Parte II

GEOMETRÍA PROYECTIVA

Capítulo V

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

1. Objeto de la geometría proyectiva

§ 77. En las primeras décadas del siglo XIX, simultáneamente con el desarrollo exitoso de las investigaciones acerca de los fundamentos de la geometría, surgió una nueva rama de los conocimientos geométricos: la geometría proyectiva. Sus impulsores fueron las artes gráficas y la arquitectura. En un comienzo, la geometría proyectiva tenía un diapasón bastante limitado de aplicaciones. Pero, a medida que se desarrollaba, se fue introduciendo más y más en diversos dominios de la geometría, hasta que, a fines del siglo XIX, las investigaciones sobre geometría proyectiva y sobre los fundamentos de la geometría elemental se unieron estrechamente. Un resultado notable de esta unión fue la elaboración, dentro de la geometría proyectiva, de una teoría profunda, que incluyó en un esquema unificado las geometrías de Euclides, de Lobachevski y de Riemann.

§ 78. El conocido geómetra francés Poncelet (1788 — 1867) destacó, como objeto de estudio, algunas propiedades de las figuras geométricas, que él llamó proyectivas.

Ahora explicaremos de qué clase de propiedades se trata.

Sea A una figura arbitraria, situada en algún plano α; β, algún otro plano, y O, un punto arbitrario del espacio, que no pertenece a ninguno de los planos α, β (fig. 87). El punto O, conjuntamente con cada punto M de la figura A, determina una recta OM; ésta interseca al plano β en algún punto, que denotaremos con M' y llamaremos *proyección del punto M* (sobre el plano β desde el centro O). Las proyecciones de todos los puntos de la figura A en el plano β forman una figura A', que se llama *proyección de la figura A*. La operación que permite obtener la figura A' lleva el nombre de *proyección central* desde el punto O. Variando la elección del punto O y del plano β, podemos obtener, mediante proyecciones centrales de la figura A, un conjunto infinito de figuras que, en parte, serán parecidas a la figura A, pero que en muchos aspectos diferirán sustancialmente de ésta. Por ejemplo, proyectando una circunferencia se puede obtener una elipse o una parábola, e inclusive una hipérbola; proyectando un triángulo regular se puede obtener uno de forma arbitraria, etc. Muchas propiedades de la figura, entonces, no se transmiten a su proyección. Así, por ejemplo, las propiedades de un triángulo regular pueden no conservarse bajo una proyección, cuyo resultado no dará, en general, otro triángulo regular; la propiedad básica de la circunferencia, que se expresa en su definición habitual, también puede ser destruida al proyectar, pues, proyectando una circunferencia, se puede obtener, digamos, una elipse, etc. Análogamente, muchas magnitudes

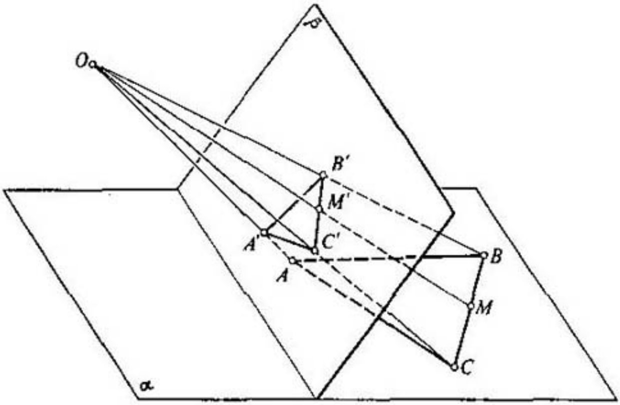


Fig. 87

relacionadas con la figura en general cambiarán. Así, al proyectar un segmento de longitud a dada, es posible obtener otro cuya longitud sea tan grande como se quiera, o bien tan pequeña como se quiera; al proyectar un triángulo de área Δ dada, se puede obtener otro cuya área sea mayor, o bien menor, que la magnitud Δ.

Por otra parte, las figuras poseen propiedades que se conservan en cualquier proyección, y a las figuras se les puede poner en correspondencia magnitudes que también se conservan en cualquier proyección. Tales propiedades y magnitudes se denominan *invariantes de una proyección*.

Justamente las propiedades de las figuras que son invariantes con respecto a *cualquier* proyección, fueron llamadas por Poncelet *propiedades proyectivas*, considerándolas como el objeto de estudio de la geometría proyectiva. Son, asimismo, objetos de la geometría proyectiva las magnitudes invariantes con respecto a una proyección.

EJEMPLOS. Si los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de una figura A están sobre una misma recta, sus proyecciones $P_1', P_2', \ldots, P_n'$ estarán, asimismo, en alguna recta. Consecuentemente, la propiedad de puntos de una figura de estar alineados, es proyectiva. Se puede decir, de otro modo, que la recta es un objeto de la geometría proyectiva.

Si los puntos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ de una figura A están sobre alguna sección cónica k, sus proyecciones $Q_1', Q_2', \ldots, Q_n'$ también estarán en alguna sección cónica k'. Dicho de otra forma, la sección cónica es un objeto de la geometría proyectiva. Aquí únicamente debe tenerse en cuenta que las propiedades inherentes a la circunferencia exclusivamente, o exclusivamente a la elipse, o únicamente a la parábola, o sólo a la hipérbola, no son propiedades proyectivas; por esto, en la geometría proyectiva no se hace diferencia alguna entre las secciones cónicas, como en la geometría elemental. En otras palabras, aunque las secciones cónicas son objetos de la geometría proyectiva, sus tipos específicos —las circunferencias, elipses, parábo-

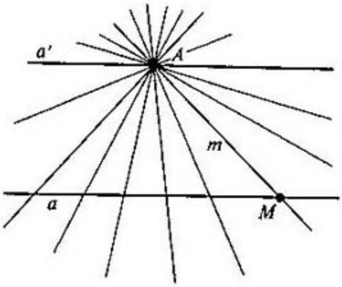


Fig. 88

las, hipérbolas— no se distinguen en la geometría proyectiva, y no se estudian por separado.

§ 79. El problema del estudio de las propiedades proyectivas de las figuras atrajo la atención de muchos geómetras, entre los cuales mencionaremos, después de Poncelet, a Chasles (1793 — 1880) y a Steiner (1769 — 1863). A ellos pertenece la consolidación de una serie de temas generales de la geometría proyectiva, en los cuales Steiner, Chasles y otros geómetras vieron el nacimiento de los métodos sintéticos en geometría. Al desarrollar estos métodos, en contraposición a los analíticos, estos geómetras lograron éxitos considerables en el perfeccionamiento del aparato de la geometría proyectiva y en su aplicación a diversos problemas geométricos.

Sin embargo, el significado profundo de la geometría proyectiva en el desarrollo de las ideas geométricas no radica en la cantidad de casos particulares donde sus métodos resultan más cómodos que los de la geometría analítica, sino —como veremos ahora— en el grado de generalidad de la geometría proyectiva, que le permite unificar diversos sistemas geométricos, incluyendo, en particular, la geometría elemental.

Sin embargo, tanto para Steiner como para Chasles, la geometría proyectiva lucía como una parte de la elemental. Su transformación en una disciplina totalmente independiente fue ya un fruto de la segunda mitad del siglo XIX.

Una premisa importante para esta transformación fue la utilización de elementos infinitamente alejados, impropios en la geometría proyectiva. Ahora nos detendremos a discutir esto en particular.

§ 80. Sea A un punto arbitrario del espacio y a una recta que no pasa por A (fig. 88). Tracemos por A y a el plano α y consideremos todas las rectas de α que pasan por A; éstas forman un haz plano con centro A; lo llamaremos el haz A.

Se puede establecer una correspondencia entre las rectas de este haz y los puntos de la recta a, asignando a cada punto M de a la recta m del haz A que corta a en el punto M (fig. 88); m se llamará recta proyectante del punto M.

Evidentemente, cualquiera que sea la posición del punto M sobre la recta a, siempre le corresponderá una recta determinada m. Pero no podemos afirmar que a cualquier recta del haz A le corresponda un punto de la recta a. Precisamente, la recta a' de dicho haz que es paralela a a no la interseca y, por esto, no tiene punto que le corresponda. Entonces, la correspondencia entre las rectas del haz A y los puntos de la recta a no es biyectiva. Esto causa numerosos tropiezos al estudiar las proyecciones. A fin de evitarlos, se conviene en considerar que las rectas paralelas se cortan en el infinito. Entonces la recta a' del haz A, paralela a a, tendrá, al igual que toda otra recta del haz, un punto que le corresponda sobre la recta a, sólo que no será un punto ordinario, sino cierto objeto nuevo, llamado *punto del infinito*, o punto impropio, de la recta a.

El punto del infinito de una recta se considera perteneciente asimismo a todo plano que pase por esta recta. Además, se supone que rectas paralelas tienen un punto impropio común; por ello, un sistema de rectas paralelas situadas en un mismo plano es llamado *haz con centro impropio*.

Obsérvese que, al proyectar, un haz con centro en un punto del infinito puede transformarse en un haz ordinario. Así, por ejemplo, en la fig. 89 el haz del plano α con centro impropio S_∞ se proyecta desde el centro O sobre el plano β en un haz ordinario con centro S.

Se supone que los puntos impropios de rectas no paralelas son diferentes. Así, entonces, cada plano contiene una cantidad infinita de puntos impropios diferentes. El conjunto de todos los puntos del infinito de un plano es llamado su *recta impropia*, o *recta del infinito*.

El conjunto de todos los puntos impropios del espacio se denomina *plano impropio, o plano del infinito*. Esta terminología se justifica por los dos hechos siguientes:

1. Dos planos paralelos tienen puntos del infinito comunes, a raíz de lo cual la colección de los puntos impropios de un plano puede ser considerada como la imagen que se obtiene en la intersección de dos planos; por esto, resulta natural llamar recta a dicha colección.

2. El conjunto de todos los puntos impropios del espacio determina, al intersecarse con cualquier plano ordinario, una recta impropia. Por ello, es natural llamar plano a dicho conjunto.

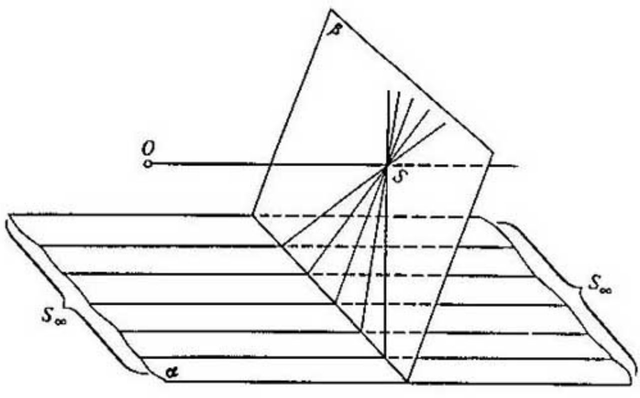


Fig. 89

§ 81. Todo lo expuesto se puede resumir como sigue.

El conjunto de los objetos del espacio euclidiano es completado con elementos nuevos, que llevan los nombres de «punto impropio», «recta impropia», «plano impropio». La adjunción de elementos nuevos se efectúa observando determinadas condiciones, precisamente:

1. Al conjunto de puntos de cada recta se agrega un punto del infinito; al conjunto de rectas de cada plano se adjunta una recta del infinito; al conjunto de planos del espacio se agrega un plano del infinito.

2. Las propiedades de incidencia del conjunto ampliado de elementos geométricos deben satisfacer las condiciones contenidas en todos los axiomas de incidencia (es decir, del primer grupo de axiomas de Hilbert).

3. Las propiedades de incidencia del conjunto ampliado de elementos geométricos deben ser tales que dos planos cualesquiera tengan una recta común, cada par de recta y plano tengan un punto común, y cada par de rectas situadas en un mismo plano tenga, asimismo, un punto común.

Una recta completada con el punto del infinito se denomina *recta proyectiva*; dicha recta debe pensarse como una línea cerrada. Un plano completado con la recta del infinito se llama *plano proyectivo;* el espacio completado con el plano del infinito lleva el nombre de *espacio proyectivo*.

§ 82. Con frecuencia se introducen los elementos impropios también en la geometría elemental. Pero allí su aplicación se reduce, esencialmente, a una nueva manera de expresar resultados geométricos (en lugar de decir que las rectas son paralelas, se dice que convergen en el infinito; un cilindro es considerado como un cono con vértice en un punto del infinito, etc.). Por el contrario, en la geometría proyectiva los elementos impropios juegan el mismo papel que las figuras geométricas ordinarias, constituyendo una parte orgánica del espacio proyectivo.

La causa de esta diferencia quedará totalmente clara, si se comparan los objetos de estudio de la geometría elemental y de la proyectiva. La primera se dedica, en gran medida, al estudio de las denominadas propiedades métricas de las figuras, es decir, las propiedades que tienen que ver con la medición de magnitudes geométricas (longitudes, ángulos y áreas). Siempre es posible medir cualquier segmento AB de extremos ordinarios y este proceso da como resultado un número determinado, que expresa la longitud del segmento AB. Pero si uno de los extremos del segmento es un punto del infinito, el proceso de medición pierde su sentido, pues sobre un tal segmento la unidad lineal puede ser colocada infinitas veces. Análogamente, el proceso de medida de ángulos no es aplicable cuando un lado del ángulo es una recta impropia, y los métodos «intuitivos» de medición de áreas no pueden aplicarse a figuras que contienen elementos impropios.

Así, en la geometría elemental los elementos impropios juegan, necesariamente, un papel particular y se diferencian sustancialmente de los elementos geométricos ordinarios, desde el punto de vista de sus relaciones con éstos. Por el contrario, en la geometría proyectiva los hechos que distinguen a los elementos impropios de los demás, pierden su validez, por cuanto las propiedades métricas de las figuras no son sus objetos de estudio. Es más, como los elementos impropios pueden transformarse en ordinarios bajo una proyección, éstos no pueden poseer ninguna *propiedad proyectiva* que los distinga de los ordinarios. Por esto, en la geometría proyectiva no hay diferencias entre los elementos ordinarios y los impropios.

§ 83. La idea de los elementos impropios surgió hace ya bastante tiempo. Pero la unificación de los elementos impropios y los habituales, que es natural desde el punto de vista de la geometría proyectiva, era ficticia, mientras las propiedades proyectivas de las figuras eran estudiadas con métodos de la geometría elemental, pues estos métodos se basan en la medida, y la métrica de la geometría elemental conduce inevitablemente a distinguir entre las imágenes finitas y las infinitas. A fin de dar un significado preciso al concepto de espacio proyectivo, fue necesario eliminar completamente de la geometría proyectiva todo lo que tiene que ver con mediciones.

El problema de liberar a la geometría proyectiva de los métodos que utilizan mediciones fue resuelto, en principio, por Staudt (1798 — 1867).

La geometría proyectiva, liberada de la métrica, se transformó en una disciplina que estudia únicamente las propiedades de la posición relativa de los objetos geométricos. Al mismo tiempo la geometría proyectiva se transformó en una disciplina geométrica independiente con su axiomática propia y su propia colección de objetos (como la recta proyectiva, el plano proyectivo y el espacio proyectivo).

2. Teorema de Desargues. Construcción de grupos armónicos de elementos

§ 84. Construiremos la geometría proyectiva basándonos en cierto sistema de axiomas, que se refieren a las relaciones mutuas entre los objetos básicos. Dichos objetos son puntos, rectas y planos; las relaciones mutuas que se mencionarán en los axiomas son las de incidencia y de orden. Los axiomas de la geometría proyectiva, al igual que los teoremas que siguen de ellos, expresan determinadas propiedades del espacio euclidiano, completado con elementos impropios. Pero, claro está, por puntos, rectas y planos en la geometría proyectiva pueden entenderse objetos cualesquiera, y las relaciones mutuas entre ellos pueden interpretarse arbitrariamente, siempre y cuando se observe todo lo que se menciona en los axiomas. Entonces las deducciones que se obtengan de los axiomas expresarán resultados determinados, que se referirán a los objetos escogidos. Consecuentemente, el espacio proyectivo es un conjunto cualquiera de objetos, denominados puntos, rectas y planos, para los cuales se han definido relaciones mutuas de manera que se observen todas las condiciones contenidas en los axiomas que a continuación se presentan.

Los axiomas de la geometría proyectiva pueden ser reunidos en tres grupos, de los cuales

el grupo I contiene nueve axiomas de incidencia,

el grupo II contiene seis axiomas de orden,

el grupo III contiene un axioma de continuidad.

En la presente sección se analizan los axiomas del I grupo y sus consecuencias más importantes.

GRUPO I. AXIOMAS PROYECTIVOS DE INCIDENCIA.

Suponemos que las rectas y los planos pueden encontrarse en determinadas relaciones con los puntos, que denotaremos con los términos: «la recta pasa por el punto», o «el punto está sobre la recta», «el plano pasa por el punto», o «el punto está sobre el plano». Las condiciones que deben cumplir estas relaciones se expresan en los axiomas I, 1 — I,9.

I, 1. *Cualesquiera que sean dos puntos A y B, existe una recta a que pasa por estos puntos.*

I, 2. *Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A y B, existe no más de una recta que pasa por A y B.*

I, 3. *En cada recta hay no menos de tres puntos. Existen al menos tres puntos que no están sobre una misma recta.*

I, 4. *Por cada tres puntos A, B, C que no están sobre una misma recta, pasa algún plano α. En cada plano hay no menos de un punto.*

I, 5. *Por cada tres puntos A, B, C no pertenecientes a una misma recta, pasa no más de un plano.*

I, 6. *Si dos puntos diferentes A, B de una recta a están sobre un plano α, cada punto de la recta a estará en α.*

I, 7. *Si dos planos α, β tienen un punto común A, tendrán al menos otro punto común B.*

I, 8. *Existen al menos cuatro puntos que no están sobre un mismo plano.*

I, 9. *Dos rectas cualesquiera, ubicadas en un mismo plano, tienen algún punto común.*

Si se confrontan los axiomas I, 1 — I, 9 que acabamos de enunciar con los del primer grupo de Hilbert (véase el cap. II, § 12), se puede notar, ante todo, que todas las condiciones de los axiomas del primer grupo de Hilbert están contenidas también en los axiomas proyectivos I, 1 — I, 9. Por esto, *todos los teoremas de la geometría elemental, basados únicamente en los axiomas de incidencia, son válidos también en la geometría proyectiva*. Sólo en dos puntos difieren los axiomas proyectivos de incidencia de los axiomas de incidencia de la geometría elemental:

1) En el axioma I, 3 del sistema proyectivo se exige que en cada recta existan no menos de tres puntos, mientras que en el axioma correspondiente I, 3 del sistema de Hilbert se pone la condición de que cada recta tenga al menos dos puntos.

2) Los axiomas proyectivos de incidencia contienen la condición I,9, que no se impone, ni tampoco se cumple, en la geometría elemental. Gracias al axioma I, 9, en la geometría proyectiva no hay paralelismo, pues dos rectas cualesquiera de un plano se cortan.

Los axiomas proyectivos de incidencia contienen, entonces, más condiciones que los axiomas de incidencia de la geometría elemental, por lo cual de los primeros pueden ser deducidos teoremas que no se desprenden de los axiomas de incidencia de Hilbert.

En particular, de los axiomas I, 1 — I, 9 sigue que

1) una recta y un plano tienen siempre un punto común;

2) dos planos tienen siempre una recta común;

3) tres planos tienen siempre un punto común.

§ 85. Sin detenernos en los corolarios triviales de los axiomas I, 1 — I, 9, pasaremos a demostrar el teorema de Desargues, que constituye la base de la geometría proyectiva del plano.

Convendremos en llamar *trivértice* al conjunto de tres puntos que no están sobre una misma recta, y las tres rectas que unen estos puntos, dos a dos. Llamaremos vértices a los tres puntos en cuestión, y lados del trivértice, a las rectas que los unen (evitamos llamar triángulo a una tal figura, guardando este término para denotar una figura un tanto diferente, que se mencionará más adelante, luego de haber presentado los axiomas proyectivos de orden).

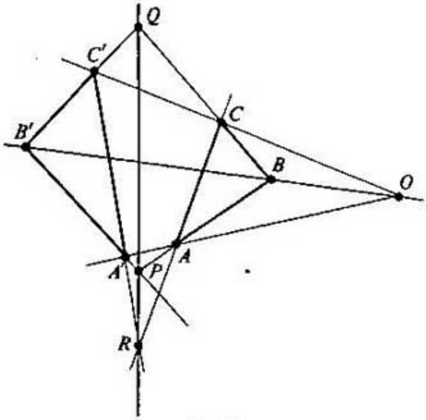


Fig. 90

Consideremos dos trivértices, cuyos vértices denotaremos con las letras A, B, C y A', B', C'. Llamaremos correspondientes a los vértices denotados con las mismas letras (A y A', B y B', C y C'); llamaremos, asimismo, correspondientes a los lados que pasan por vértices correspondientes.

TEOREMA 1 (PRIMER TEOREMA DE DESARGUES, TEOREMA DIRECTO). *Si los lados correspondientes de los trivértices ABC y $A'B'C'$ se intersecan en puntos P, Q, R pertenecientes a una misma recta, las rectas que unen los vértices correspondientes se cortarán en un mismo punto* (*fig.* 90).

TEOREMA 2 (SEGUNDO TEOREMA DE DESARGUES, RECÍPROCO). *Si las rectas que unen los vértices correspondientes de los trivértices ABC y $A'B'C'$ se cortan en un mismo punto, los lados correspondientes de estos trivértices se intersecarán en puntos pertenecientes a una misma recta**).

Convendremos en llamar *eje de perspectiva, o eje de homología* a la recta que contiene a los puntos de intersección de los lados correspondientes de los trivértices; *centro de perspectiva* (o *centro de homología*), al punto común de las rectas que unen vértices correspondientes. Entonces los dos teoremas de Desargues pueden ser enunciados en forma concisa como sigue:

Si dos trivértices poseen eje de homología, también tendrán un centro de homología, y recíprocamente.

Demostremos el primer teorema de Desargues.

Sean ABC y $A'B'C'$ trivértices situados en un mismo plano α, que posean un eje u de perspectiva (fig. 91). La recta u contiene, entonces, los puntos P, Q, R de corte de los pares de lados correspondientes AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, AC y $A'C'$. Hay que demostrar que las rectas AA', BB' y CC' convergen a un mismo punto, es decir, que los trivértices dados tienen centro de perspectiva**).

*) Nos interesa únicamente el caso en que los trivértices ABC y $A'B'C'$ pertenezcan a un mismo plano.

**) Supondremos que la recta u no contiene ningún vértice de los trivértices considerados (en caso contrario el teorema es también verdadero, cosa que resulta evidente).

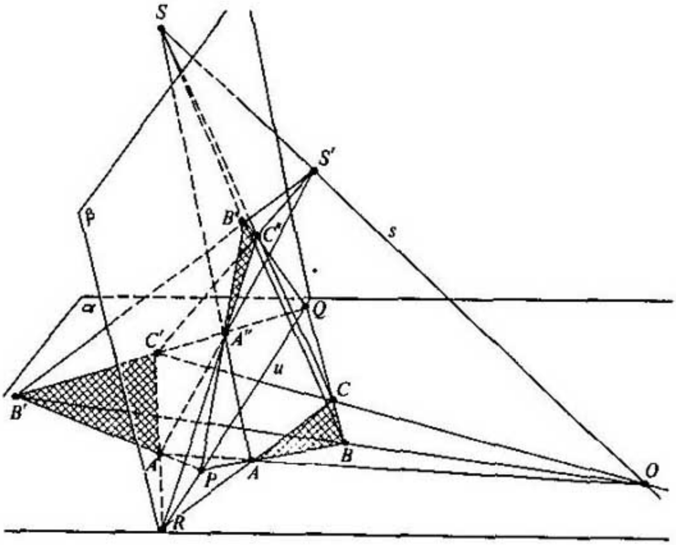


Fig. 91

Para probar esto, fijemos algún punto B'' que no pertenezca al plano α (su existencia queda asegurada por el axioma I, 8). Los puntos P, Q y B'' no están sobre una misma recta; por esto, existe un único plano β que los contiene. En virtud del axioma I, 3, podemos escoger sobre la recta $B''Q$ algún punto C'', diferente de B'' y de Q. Por el axioma I, 6, este punto pertenece al plano β, al igual que el punto R; por esto, la recta RC'' se encuentra en el plano β. Como las rectas RC'' y PB'' están en un mismo plano, tendrán un punto común, en virtud del axioma I, 9; lo denotaremos con A''. Hemos obtenido en el plano β un trivértice $A''B''C''$ que se encuentra en una posición especial con respecto a los trivértices ABC y $A'B'C'$; precisamente, los trivértices ABC, $A'B'C'$ y $A''B''C''$ tienen un eje común de homología u; además, los lados correspondientes AB, $A'B'$ y $A''B''$ de estos trivértices convergen a un mismo punto P. Análogamente, los lados BC, $B'C'$ y $B''C''$ convergen a un mismo punto Q, mientras que los lados AC, $A'C'$ y $A''C''$ convergen a un mismo punto R.

Dada esta disposición, los trivértices ABC y $A''B''C''$, así como $A'B'C'$ y $A''B''C''$, tienen un centro de homología; no es difícil probar esto. A pesar de que aquí tenemos que establecer, con respecto a los trivértices ABC y $A''B''C''$ (o bien $A'B'C'$ y $A''B''C''$), el mismo resultado que afirma el teorema de Desargues con respecto a los trivértices ABC y $A'B'C'$, la demostración se simplifica notablemente, gracias a que los trivértices ABC y $A''B''C''$ (o bien $A'B'C'$ y $A''B''C''$) están en distintos planos.

Consideremos los planos PAA'', QBB'' y RCC''; como se observó al final del § 84, tres planos cualesquiera tienen un punto común. Sea S el punto común de los planos indicados. Obsérvese que la recta AA'' es común a los planos PAA'' y RCC''; ahora, es de suma importancia establecer que los planos PAA'' y RCC'' son distintos. En efecto, el plano PAA'' contiene la recta BB''. Pero, en virtud de la elección del punto B'', las rectas BB'' y u no tienen puntos comunes. Esto implica que el punto R no puede pertenecer al plano PAA'', de modo que los planos PAA'' y RCC'' son, efectivamente, diferentes. Por esto, la recta común AA'' de estos planos contiene todos sus puntos comunes, en particular el punto S. Dicho de otro modo, la recta AA'' pasa por S. De razonamientos análogos sigue que las rectas BB'' y CC'' pasan también por el punto S. Con esto queda establecida la existencia de un centro de homología de los trivértices ABC y $A''B''C''$. Análogamente se puede establecer que los trivértices $A'B'C'$ y $A''B''C''$ poseen centro de perspectiva S'.

Tracemos por los puntos S y S' la recta s; ésta cortará al plano α en algún punto O. Es fácil comprobar que O es, precisamente, centro de homología de los trivértices ABC y $A'B'C'$. En efecto, proyectemos la figura tridimensional, formada por los trivértices $A'B'C'$, $A''B''C''$ y el punto S', desde el centro S sobre el plano α. Evidentemente, la proyección del trivértice $A'B'C'$ será ese mismo trivértice, mientras que la del $A''B''C''$ será el ABC. Las rectas $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ se proyectarán, respectivamente, en las rectas AA', BB', CC'. Y como las rectas $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ convergen al punto S', sus proyecciones, es decir, las rectas AA', BB', CC' convergerán a la proyección del punto S', es decir, al punto O. Hemos demostrado, con esto, que las rectas que unen los vértices correspondientes de los trivértices ABC y $A'B'C'$ convergen a un mismo punto, cosa que deseábamos mostrar.

Pasemos a la demostración del teorema recíproco.

Sean dados los trivértices ABC y $A'B'C'$, situados en un mismo plano, con respecto a los cuales se sabe que poseen centro de homología, es decir, que las rectas AA', BB', CC' convergen a un mismo punto O. Hay que demostrar que tienen eje de perspectiva, es decir, que los puntos P, Q, R de corte de los lados correspondientes AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, AC y $A'C'$, están sobre una misma recta.

Para lo que sigue resulta cómodo eliminar de nuestra discusión el caso poco interesante en que los trivértices tengan un lado común, digamos, cuando las rectas BC y $B'C'$ coincidan. En tal caso el punto Q queda indeterminado y se puede considerar que está en una misma recta con los puntos P y R. En este caso el teorema es, en consecuencia, verdadero. Se supondrá, además, que los lados correspondientes de los trivértices ABC y $A'B'C'$ son diferentes.

Haremos la demostración por el método de reducción al absurdo. *Supongamos que AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, AC y $A'C'$ se intersecan en tres puntos P, Q, R que no están en una misma recta*. En tal caso, los puntos P y Q son necesariamente distintos y determinan cierta recta u, que se interseca con las rectas AC y $A'C'$ en puntos DIFERENTES R_1 y R_2, de forma que R_1, A' y C' no están sobre una misma recta (fig. 92). Por esto, la recta R_1A' corta a $B'C'$ en algún punto C'', diferente de C'. El punto C'' no está sobre la recta $C'CO$. En efecto, si C'' perteneciese a dicha recta, el punto B' también le pertenecería y, por ende, el B estaría sobre la misma recta. Pero entonces los lados correspondientes BC y $B'C'$ tendrían que coincidir, caso que hemos excluido. Así, pues, la recta $C''C$ no pasa por el punto O. Considere-

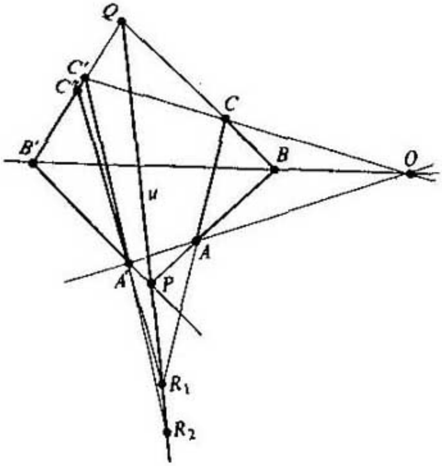


Fig. 92

mos los trivértices ABC y $A'B'C''$. Por lo que acabamos de probar, éstos no poseen centro de perspectiva; sin embargo, tienen eje de perspectiva: precisamente, la recta u, sobre la cual se encuentran los puntos P, Q y R_1.

Hemos obtenido una contradicción con el teorema directo de Desargues, quedando así demostrado el teorema recíproco.

Ahora pasaremos a definir y construir los elementos armónicos, lo que es de importancia fundamental en la geometría proyectiva. Los razonamientos que siguen se basarán en el teorema de Desargues.

§ 86. Una figura plana, constituida por cuatro puntos, de los cuales no hay tres que estén sobre una misma recta, más las seis rectas que unen estos puntos dos a dos, se denomina *cuadrivértice completo*.

Los puntos indicados se denominan *vértices*; las rectas que los unen, *lados* del cuadrivértice. En la fig. 93 se representa un cuadrivértice con vértices $ABCD$. Los lados que no tienen vértice común son llamados *opuestos*. Así, el cuadrivértice $ABCD$ posee los pares de lados opuestos AB y CD, AC y BD, BC y AD. Los puntos de intersección de los lados opuestos llevan el nombre de *puntos diagonales* del cuadrivértice. En la fig. 93 los puntos diagonales serán P, Q, R.

Mediante el cuadrivértice completo se define el concepto de grupo armónico de elementos.

Un par de puntos S, T de una recta arbitraria u será llamado ARMÓNICO CONJUGADO *del par de puntos P, Q de la misma recta, si P y Q son puntos diagonales de algún cuadrivértice, mientras que S y T se determinan por la intersección de la recta con el par de sus lados opuestos que pasan por el tercer punto diagonal* (fig. 93).

Por el significado mismo de esta definición, los puntos P y Q, que constituyen el primer par, son equitativos; otro tanto puede decirse de los puntos S y T del segundo par (pero todavía no estamos en condiciones de afirmar la igualdad de derechos de los pares P, Q y S, T).

Convendremos en llamar al punto T el *cuarto armónico* de los tres puntos P, Q, S, si el par S, T es armónico conjugado del par P, Q (aquí en el orden de escritura de los puntos es importante que en los dos primeros lugares se escriban los puntos que constituyen el primer par del grupo armónico). Evidentemente, si T es el cuarto armónico de los tres puntos P, Q, S, entonces S será el cuarto armónico de los tres puntos P, Q, T.

La definición dada de pares armónicos encierra, asimismo, un método de determinación del cuarto armónico de tres puntos dados. A fin de construir el cuarto armónico de tres puntos arbitrarios P, Q, S de una recta u, debe escogerse en el plano, fuera de u, algún punto B y, sobre la recta PB, un punto A, diferente de P y de B (la existencia del punto A queda asegurada por el axioma (I, 3)). Entonces, por la intersección de las rectas BS y AQ quedará determinado el punto C, luego de lo cual se determina el punto D con el corte de las rectas PC y BQ; trazando la recta AD, se halla el punto T, que será el buscado.

Es de suma importancia establecer que, dados los puntos P, Q, S, la posición del cuarto armónico T se determina de manera única, es decir, no depende de la elección de los puntos B y A.

Esto es una consecuencia inmediata del teorema que sigue.

TEOREMA 3. *Sean $ABCD$ y $A'B'C'D'$ dos cuadrivértices con puntos diagonales comunes* P y Q (fig. 93). *Si los lados BC y $B'C'$ de estos cuadrivértices se intersecan en el punto S de la recta PQ, sus lados AD y $A'D'$ se cortarán en el punto T de la misma recta.*

La demostración se basa en la proposición de Desargues.

Consideremos los trivértices ABC y $A'B'C'$. Sus lados correspondientes se cortan en tres puntos P, S, Q que están sobre una misma recta. En virtud del primer teorema de Desargues, de aquí se desprende que las rectas AA', BB' y CC' concurren a un mismo punto O. Los lados correspondientes de los trivértices BCD y $B'C'D'$ también se intersecan en tres puntos situados sobre una recta: en los mis-

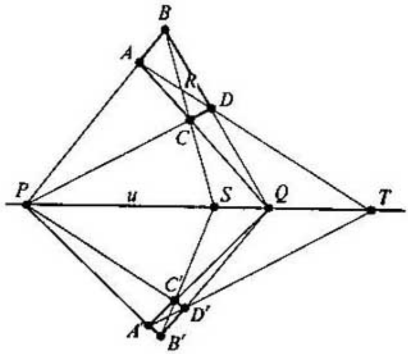


Fig. 93

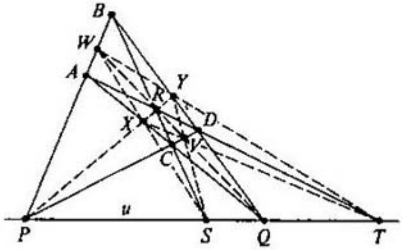


Fig. 94

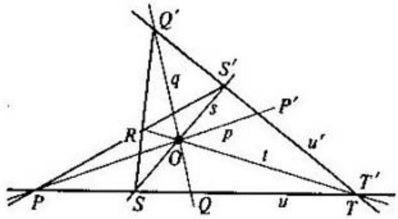


Fig. 95

mos puntos P, Q, S. Aplicando nuevamente el primer teorema de Desargues, concluimos que las rectas BB', CC' y DD' tienen un punto común O'. Evidentemente, los puntos O y O' coinciden, pues cada uno de ellos queda determinado por la intersección de las rectas BB' y CC'. Así, entonces, todas las rectas AA', BB' y DD' se cortan en el punto O. En particular, las rectas AA', BB' y DD' concurren a un mismo punto. Según el segundo teorema de Desargues, los lados correspondientes de los trivértices ABD y $A'B'D'$ se cortarán entonces en tres puntos alineados. Esto significa que el punto T de intersección de las rectas AD y $A'D'$ está situado sobre la recta PQ, y el teorema queda probado.

De la definición de grupos armónicos de puntos y del teorema que acabamos de demostrar se desprende directamente la siguiente proposición, que expresa la univocidad de la definición del cuarto punto armónico.

TEOREMA 4. *Si el par S, T es armónico conjugado del par P, Q y si $ABCD$ es algún cuadrivértice con puntos diagonales P, Q, cuyo lado BC pasa por el punto S, el lado AD pasará por el punto T.*

Demostremos ahora el siguiente teorema importante.

TEOREMA 5. *Si el par de puntos S, T de la recta u es armónico conjugado del par P, Q, entonces el par P, Q será armónico conjugado del par S, T.*

Para probar esto, fijemos algún cuadrivértice $ABCD$ con puntos diagonales P, Q, tal que el par de lados opuestos BC y AD corte a la recta u en los puntos S y T (fig. 94). Sea R el tercer punto diagonal del cuadrivértice $ABCD$; tracemos las rectas PR y QR. Estas rectas, al cortarse con los lados del cuadrivértice considerado, determinarán cuatro puntos, que denotaremos con las letras X, Y, V, W, como se muestra en la fig. 94.

Consideremos ahora el cuadrivértice $AXRW$; éste tendrá puntos diagonales P, Q y su lado AR pasará por el punto T. Como el punto S es el cuarto armónico de los tres puntos P, Q, T, en virtud del teorema 4 el lado XW del cuadrivértice $AXRW$ tendrá que pasar por S. Así, los puntos W, X, S, están sobre una misma recta. Considerando los cuadrivértices $RWBY$, $YDVR$, $RVCX$ concluimos, por razonamientos análogos, que los puntos de cada una de las ternas que siguen: W, Y, T; Y, V, S y X, V, T están sobre una misma recta.

De aquí sigue que $XVYW$ es un cuadrivértice con puntos diagonales S, T y con lados XY, VW, que pasan por los puntos P, Q. Esto significa, precisamente, que el par P, Q es armónico conjugado del par S, T.

El teorema que acabamos de probar establece la reciprocidad de la conjugación armónica de pares. Por esto, en lo sucesivo, al considerar dos pares de puntos sobre una recta, uno de los cuales es armónico conjugado del otro, no distinguiremos cuál de los dos es conjugado del otro, y los llamaremos *mutuamente armónicos*.

Una de las propiedades más importantes de los grupos armónicos de puntos es expresada por el siguiente

TEOREMA 6. *Sean p, q y s, t dos pares de rectas de algún haz con centro O, que al cortarse con una recta u determinan los pares de puntos P, Q y S, T respectivamente, y al cortarse con la recta u', los pares de puntos P', Q' y S', T'. Entonces si P, Q y S, T son pares mutuamente armónicos, también lo serán los pares P', Q' y S', T'.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos primero la afirmación en el caso particular en que dos de los puntos correspondientes P, Q, S, T y P', Q', S', T', digamos, los puntos T y T', coinciden (fig. 95).

Tracemos la recta SQ' y denotemos con R su punto de intersección con la recta OT. Como los pares de puntos P, Q y S, T son mutuamente armónicos, en virtud del teorema 4 la recta RS' deberá pasar por el punto P (para comprobarlo, debe considerarse el cuadrivértice $ROS'Q'$, con puntos diagonales S, T). Se obtiene el cuadrivértice $RPSO$ con puntos diagonales S', T' y lados OP y RS, que pasan por los puntos P' y Q'. De aquí sigue que los pares P', Q' y S', T' son mutuamente armónicos, con lo que queda probado el teorema en el caso particular analizado.

Pasemos a considerar el caso general de posición de las rectas u y u'. Construimos la recta $P'T$ (fig. 96). Las rectas p, q, s, t determinan sobre $P'T$ los puntos P'', Q'', S'', T''. Como los puntos T y T'' coinciden, al ser armónicos conjugados los pares P, Q y S, T, también lo serán, por el análisis precedente, los pares P'', Q'' y S'', T''. Pero, como también coinciden los puntos P'' y P', al ser armónicos conjugados los pares P'', Q'' y S'', T'', también lo serán los pares P', Q' y S', T'. Queda así totalmente demostrado el teorema.

En virtud de este teorema, si dos pares de rectas de un haz determinan, al cortarse con alguna recta, dos pares de puntos armónicos conjugados, la misma propiedad la poseerán los pares de puntos determinados por la intersección de los pares de rectas considerados, con cualquier otra recta. Así, la propiedad de dos pares de rectas de un haz, de determinar sobre alguna recta pares armónicos conjugados de puntos, no depende de la elección de la recta, y viene así a ser una propiedad intrínseca de los pares de rectas en cuestión. Los pares de rectas de un haz que posean esta propiedad se llamarán *armónicos conjugados*.

Diremos que las rectas $p, q, s, \dots$, que parten del punto O hacia los puntos P, Q, S, ..., *proyectan* estos puntos desde O. La construcción de las rectas proyectantes $p, q, s, \dots$ a partir de los puntos dados $P, Q, S, \dots$ se llamará *operación de proyección;* la determinación de los puntos $P, Q, S, \dots$ a partir de las rectas dadas p, q, $s, \dots$, *operación de sección*.

Utilizando esta terminología, podemos enunciar la siguiente proposición (como corolario del teorema 6).

Como resultado de las operaciones de proyección o de sección de pares armónicos conjugados de elementos (sean éstos puntos de una recta o bien rectas de un haz), siempre se obtienen nuevamente pares de elementos armónicos conjugados.

O, dicho de otra forma:

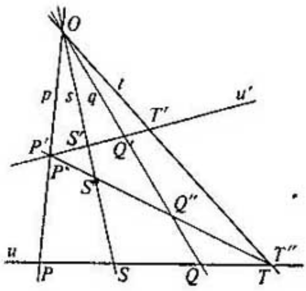


Fig. 96

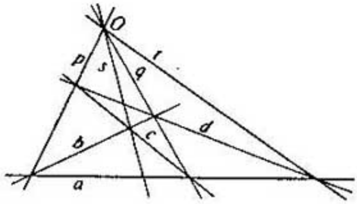


Fig. 97

La propiedad de conjugación armónica es invariante con respecto a las proyecciones y a las secciones.

Recurriendo a una terminología similar a la que utilizamos con respecto a los grupos armónicos de puntos sobre una recta, diremos que la recta t de un haz es la cuarta armónica de la terna de rectas p, q, s del mismo haz, si los pares p, q y s, t son armónicos conjugados (en la escritura de la terna p, q, s, se pone en los dos primeros lugares al par p, q).

El lector puede fácilmente dilucidar el método de construcción de la cuarta recta armónica t a partir de tres rectas dadas p, q, s, analizando la fig. 97 (al reconstruir la figura representada en la fig. 97, hay que trazar primeramente, de manera arbitraria, las dos rectas a, b que pasen por algún punto de la recta p; luego se traza la recta c y, por último, la d; hecho esto, la posición de la recta t queda unívocamente determinada).

§ 87. Todos los teoremas que hemos demostrado en esta sección tienen que ver con la geometría proyectiva del plano. La fuente de éstos la constituye el teorema de Desargues que, por su contenido, es también un teorema de la geometría plana. Sin embargo, su demostración fue efectuada utilizando razonamientos de la geometría del espacio. Es natural plantearse la pregunta de si es posible demostrar el teorema de Desargues de forma que en la prueba no se recurra a configuraciones en el espacio.

Se conocen demostraciones de este tenor, pero todas ellas son de carácter métrico y, por esto, no son aplicables en la geometría proyectiva. Un análisis de esta cuestión, llevado a cabo por Hilbert, reveló que es imposible demostrar el teorema de Desargues con los medios de la geometría proyectiva, sin recurrir a construcciones en el espacio.

Dicho con más precisión: si se eliminan de la lista de axiomas I,1 — I,9 todas las aseveraciones que se refieren al espacio, de las restantes —que serán únicamente los axiomas I,1— I,3 — no sigue el teorema de Desargues. La independencia de este teorema de los axiomas I,1 — I,3 (e inclusive de los axiomas de una lista más larga, que contenga, amén de los axiomas I,1 — I,3, también los axiomas proyectivos de orden y de continuidad, que detallaremos más adelante) puede ser demostrada, en principio, con el mismo método que fue descrito en detalle y aplicado varias veces en el capítulo IV. (La demostración de Hilbert se expone en sus «Fundamentos de la Geometría»).

En virtud de lo indicado, la proposición de Desargues puede considerarse como un axioma de la geometría proyectiva plana.

§ 88. Para concluir esta sección, haremos dos observaciones. La primera tendrá que ver con la demostración de la proposición acerca de la invariancia de los grupos armónicos de elementos con respecto a proyecciones. Tal proposición fue demostrada con métodos de la geometría plana. Si no renunciamos a utilizar configuraciones en el espacio, es posible dar otra demostración, más esclarecedora.

Sean u y u' dos rectas de un plano α (fig. 98); sean P, Q, S, T, puntos de la recta u, y P', Q', S', T', sus proyecciones sobre la recta u' desde un centro O (situado asimismo en el plano α). Supongamos que los pares P, Q y S, T son armónicos conjugados. Tracemos por u y u' planos β y β' respectivamente, diferentes del plano α. Como los pares de puntos P, Q y S, T son armónicos conjugados, en el plano β puede construirse un cuadrivértice Ω, que tenga P, Q por puntos diagonales y un par de lados opuestos que pasen por S y T. Proyectando el cuadrivértice Ω desde el centro O sobre el plano β' (que hace las veces de pantalla), obtenemos en el plano β' un cuadrivértice Ω', situado con respecto a los pares P', Q' y S', T' del mismo modo que Ω está con respecto a los pares P, Q y S, T. De aquí sigue inmediatamente que los pares P', Q' y S', T' son armónicos conjugados.

La segunda observación se refiere a la posibilidad de generalizar el teorema de la invariancia de los grupos armónicos de elementos con respecto a proyecciones.

Hasta aquí hemos considerado proyecciones desde algún centro. A veces debe considerarse también la proyección axial (en la geometría proyectiva del espacio), amén de la proyección central.

Sea o alguna recta, y sea P, Q, S, ... un sistema de puntos sobre otra recta u, que no esté en un mismo plano con o (fig. 99). El sistema de planos π, $\varkappa$, σ, . . . , que pasan por la recta o y por los puntos P, Q, S, ... , se llama haz de planos con eje o, que proyecta los puntos P, Q, S, ... Si u' es alguna nueva recta, que interseca a los planos π, $\varkappa$, σ, ... en los puntos P', Q', S', ... , diremos que P', Q', S', ... fueron obtenidos mediante una proyección axial de los puntos P, Q, S, ...

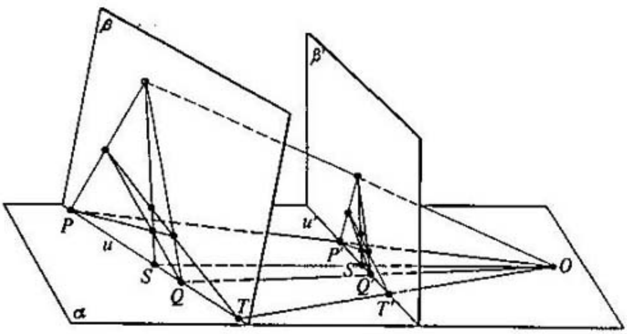


Fig. 98

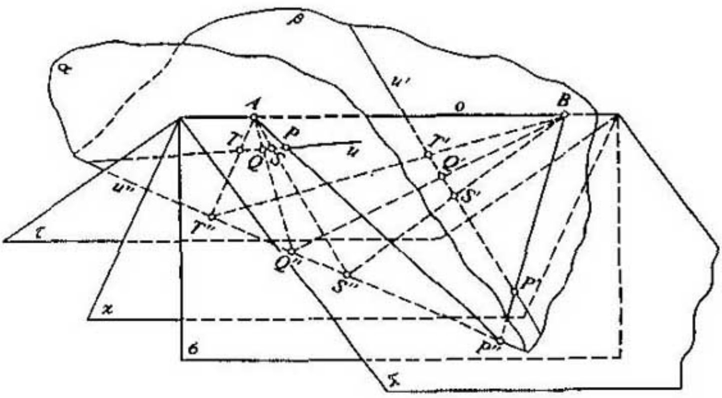


Fig. 99

Sucede que *la invariancia de la conjugación armónica de pares de los puntos tiene lugar también bajo una proyección axial*.

Sea P, Q, S, T una cuaterna armónica de puntos de una recta u, que se transforma en la cuaterna P', Q', S', T' de alguna recta u', bajo una proyección axial (en el caso general, las rectas u y u' no están sobre un mismo plano). Mostraremos que la cuaterna de puntos P', Q', S', T' es también armónica.

Con este fin, tracemos una recta u'', que interseque a las dos rectas u y u' (fig. 99). Las rectas u y u'' están en un mismo plano α; las rectas u' y u'' también están en un mismo plano β. Sean A y B los puntos en los cuales los planos α y β se intersecan con el eje del haz proyectante de planos, y P'', Q'', S'', T'', los puntos en los cuales los planos de este haz cortan a la recta u''. Evidentemente, el grupo de puntos P'', Q'', S'', T'' puede considerarse como obtenido por medio de una proyección central de los puntos P, Q, S, T, desde el centro A, dentro del plano α. Por esto, de la armonicidad del grupo de puntos P, Q, S, T sigue que el grupo P'', Q'', S'', T'' es armónico. Ahora bien, considerando el grupo P', Q', S', T' como la proyeccion central del grupo P'', Q'', S'', T'' desde el centro B, podemos concluir que la primera cuaterna es armónica, en virtud de que la segunda lo es.

Así, entonces, si dos pares de planos π, $\varkappa$ y σ, τ de cierto haz determinan, al cortarse con cierta recta, dos pares de puntos armónicos conjugados, estos planos determinarán dos pares de puntos armónicos conjugados también al intersecarse con cualquier otra recta. En este caso, los pares de planos π, $\varkappa$ y σ, τ se llaman *armónicos conjugados*.

No es difícil comprobar que al intersecar pares de planos armónicos conjugados de un haz por algún plano que *no pase* por el eje de dicho haz, se obtienen en el plano secante dos *pares armónicos* conjugados de rectas de un haz lineal. La demostración *es inmediata* y no nos detendremos en ella.

3. Orden de los puntos sobre la recta proyectiva

§ 89. Como ya sabemos, en la geometría elemental, como base de la definición del orden de los puntos de una recta, se toma el concepto de la posición de un punto entre otros dos (véase el cap. II, § 13). En la geometría proyectiva, donde la recta se piensa como una línea cerrada, no tiene sentido introducir este concepto. En efecto, considerando tres puntos arbitrarios de la recta proyectiva (o bien tres puntos de una circunferencia), no podemos, en su posición relativa, distinguir a alguno de ellos en comparación con los otros dos.

Para definir el orden de los puntos de una recta proyectiva, se parte de la consideración de dos pares de puntos. Vamos a permitirnos, primeramente, el uso de un dibujo. Sean A, B, C, D cuatro puntos de una recta proyectiva u, situados tal como se representa en la fig. 100 (donde la recta proyectiva tiene la forma de una línea cerrada). Si quisiésemos desplazar el punto C sobre la recta u hasta hacerlo coincidir con el D, tendríamos necesariamente que hacer coincidir en algún momento el punto C con el A, o bien con el B. Análogamente, para hacer coincidir el punto A con el B, tendríamos que hacer pasar el punto A por la posición del punto C, o bien por la del D. En tal caso se dice que el par A, B separa al par C, D.

En este mismo grupo de puntos A, B, C, D, los pares A, D y B, C son tales que para hacer coincidir los puntos B y C no hay necesidad de hacer pasar a alguno de ellos por la posición del A, o bien del D; análogamente, para superponer los puntos A y D no hay necesidad de hacer pasar a ninguno de ellos por la posición del B, o bien por la del C. Se dice entonces que los pares A, D y B, C no se separan entre sí. De la misma manera, no se separan entre sí los pares A, C y B, D. Así, nuestra idea intuitiva de la recta proyectiva (o de la circunferencia) nos permite distinguir pares de puntos que se separan y pares que no se separan.

En un desarrollo lógico de la geometría proyectiva, la separación de pares de puntos sobre la recta se adopta como relación básica de orden. Las propiedades necésarias de esta relación se presentan en los axiomas del segundo grupo.

GRUPO II. AXIOMAS PROYECTIVOS DE ORDEN.

Suponemos que dos puntos de una recta pueden encontrarse en una determinada relación con dos otros puntos de esta recta; denotaremos esta relación con el término «separan». Además, deben satisfacerse las condiciones indicadas en los axiomas siguientes, que son, precisamente, los axiomas de orden.

II,1. *Cualesquiera que sean tres puntos diferentes A, B, C de una recta arbitraria u, existe sobre esta recta algún punto D tal que el par A, B separa al par C, D.*

Si el par A, B separa al par C, D, los cuatro puntos A, B, C, D son diferentes.

II,2. *Si el par A, B separa al C, D, también el par B, A separa al C, D y el par C, D separa al A, B (es decir, la propiedad de separación es reflexiva y no depende del orden en que se tomen los puntos del par).*

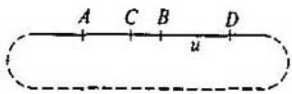


Fig. 100

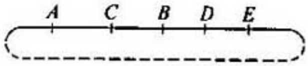


Fig. 101

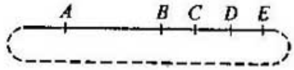


Fig. 102

II,3. *Cualesquiera que sean cuatro puntos diferentes A, B, C, D de una recta u, de ellos siempre, y de manera única, se pueden formar dos pares separados.*

II,4. *Sean dados sobre la recta u los puntos A, B, C, D, E; si los pares C, D y C, E separan al par A, B, entonces el par D, E no separa al A, B* (fig. 101).

II,5. *Sean dados sobre la recta u los puntos A, B, C, D, E; si los pares C, D y C, E no separan al A, B, entonces el par D, E tampoco separará al A, B* (fig. 102).

II,6. *Sean A, B y C, D dos pares de puntos de una recta u; A', B' y C', D', sus proyecciones, desde un centro arbitrario, sobre una recta cualquiera u'. Si los pares A, B y C, D se separan, los pares A', B' y C', D' también se separarán. En forma concisa: la separación de dos pares de puntos es una propiedad invariante con respecto a las proyecciones.*

Basándonos en el axioma II,6 puede darse la definición del concepto de pares separados de rectas de un haz plano.

Precisamente, si *a, b* y *c, d* son dos pares de rectas que pasan por algún punto y *s* es alguna recta que corta a *a, b* y *c, d* en los puntos *A, B* y *C, D,* respectivamente, entonces, como se desprende del axioma II,6, los pares de puntos *A, B* y *C, D,* cualquiera que sea la elección de la recta *s,* o bien estarán siempre separados, o bien no separados. En el primer caso diremos que los pares de rectas *a, b* y *c, d* se separan mutuamente; en el segundo, que no se separan. Así, el concepto de separación de pares de rectas se reduce al de separación de pares de puntos; el último es, para nosotros, un concepto básico, que no se reduce a otros primitivos.

Al exponer la geometría proyectiva, no es nuestra finalidad construirla sobre la base de requisitos mínimos. Por esto, no trataremos de aclarar si todos los axiomas enunciados son efectivamente necesarios o si algunos de ellos pueden ser demostrados. Lo importante es que estos axiomas bastan para la demostración de los teoremas que constituyen el cuerpo de la geometría proyectiva*).

TEOREMA 7. *Supongamos que sobre una recta arbitraria u se han fijado dos puntos A y B. Entonces todos los puntos de la recta u, diferentes de A y B, pueden ser separados en dos clases, de modo que dos puntos cualesquiera de una misma clase formen un par que no separa a A, B, y cada par de puntos de clases diferentes separen al par A, B.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del axioma I,3, sobre la recta *u* existe algún punto *C,* diferente de *A* y de *B.* Pongamos en una clase el punto *C* y todo otro punto de la recta *u*, si este punto, conjuntamente con el *C*, forma un par que no separa al *A, B.* En la otra clase pondremos cada punto de *u* que, conjuntamente con el *C*, separe al par *A, B.* Entonces todos los puntos de la recta *u* (excepción hecha de *A* y de *B*) se separan en dos clases. Tenemos que demostrar que esta distribución satisface las condiciones planteadas en el enunciado del teorema.

---

*) Conjuntamente con el axioma de continuidad, expuesto en el § 94, estos axiomas conforman un sistema completo.

Sean C_1 y C_2 dos puntos de la primera clase. De acuerdo con las condiciones usadas para determinar la primera clase, los pares C, C_1 y C, C_2 no separan al A, B. Por el axioma II,5, de aquí sigue que el par C_1, C_2 no separa al A, B. Sean, ahora, D_1 y D_2 dos puntos de la segunda clase. Según la definición de la segunda clase, los pares C, D_1 y C, D_2 separan al A, B. En virtud del axioma II,4, de esto concluimos que el par D_1, D_2, al igual que en el primer caso, no separa al par A, B. Así, entonces, si dos puntos pertenecen a una misma clase, no separan al par A, B.

Sean ahora M y N dos puntos de clases diferentes. Supongamos, por ejemplo, que M se escoge en la primera clase, y N, en la segunda. Entonces el par C, M no separa al A, B, mientras que el C, N lo separa. Si el par M, N no separase al A, B, entonces, como además el par M, C no separa al A, B, por el axioma II,5 el par C, N no tendría que separar al A, B, lo que contradiría la hipótesis asumida. Consecuentemente, el par M, N separa al A, B. El teorema queda demostrado.

Obsérvese que si la construcción descrita de las dos clases se aplica partiendo no del punto C, sino de cualquier otro punto de la primera clase, se obtienen las mismas dos clases construidas en el primer caso. Si, en cambio, se toma como inicial algún punto de la segunda clase y se efectúa nuevamente la distribución de puntos, se obtendrán otra vez las clases anteriores, sólo que en orden inverso.

Aplicando la terminología usual en la geometría intuitiva, llamaremos *segmento* a cada una de las dos clases en cuestión. Entonces el contenido del teorema precedente puede expresarse en los siguientes términos.

Dos puntos A, B de una recta la dividen en dos segmentos; si M y N son puntos de un mismo segmento, el par M, N no separa al A, B; si, en cambio, M y N son puntos de segmentos diferentes, los pares M, N y A, B separan uno al otro.

A fin de distinguir uno de los dos segmentos considerados con respecto al otro, debe indicarse alguno de sus puntos. Por esto, en la geometría proyectiva el segmento a veces se denota con tres letras; por ejemplo, ACB denota el segmento de extremos A, B y punto interior C. Si el par C, D separa al A, B, entonces ACB y ADB son segmentos diferentes de extremos A, B. Los segmentos ACB y ADB se llamarán *complementarios* (mutuamente).

Ahora demostraremos un teorema que nos permitirá definir en la geometría proyectiva una figura totalmente análoga a un triángulo euclidiano.

TEOREMA 8. *Sean A, B, C tres puntos que no pertenecen a una misma recta, u y u', dos rectas que no pasan por ninguno de los puntos A, B, C; sean, además, P, Q, R, los puntos en los que la recta u interseca a las rectas AB, BC y AC; P', Q', R', los puntos en los cuales estas mismas rectas cortan a u'. Entonces, si el par P, P' no separa al par A, B y el par Q, Q' no separa al B, C, el par R, R' no separará al A, C* (fig. 103).

DEMOSTRACIÓN. Denotemos con O el punto de intersección de las rectas u y u'. Proyectando los pares A, B y P, P' desde el punto O, como centro, sobre la recta AC, obtenemos como proyecciones los pares A, S y R, R'. Por la hipótesis del teorema, los pares A, B y P, P' no separan uno al otro. Entonces, en virtud del axioma II,6, los pares A, S y R, R' también tendrán que estar no separados. Proyectando nuevamente desde el centro O, sobre la recta AC, los pares B, C y Q, Q', obtenemos los pares S, C y R, R'. Como B, C no separa a Q, Q', por el mismo axioma II,6 los pares S, C y R, R' no se separarán. Así, los pares S, A y S, C no separan al R, R'. Del axioma II,5 hallamos, entonces, que A, C no separa a R, R'. El teorema queda demostrado.

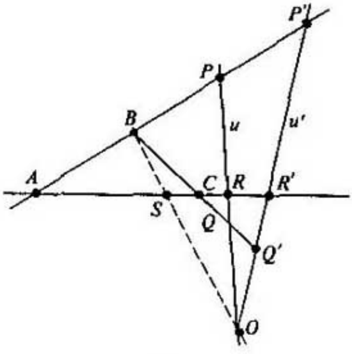


Fig. 103

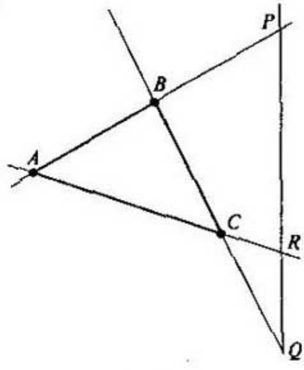


Fig. 104

Fijados tres puntos A, B, C no alineados, escojamos uno de los dos segmentos de extremos A, B y uno de los dos segmentos de extremos B, C (en la fig. 104 los segmentos escogidos se representan por trazos gruesos). Convengamos en denotar con AB y BC precisamente los segmentos escogidos. Tomemos sobre el segmento complementario a AB algún punto P, en el complementario a BC, algún punto Q y tracemos la recta PQ. Sea R el punto en que la recta PQ corta a la AC. Ahora variaremos arbitrariamente los puntos P y Q, dejando siempre el primero en el segmento complementario al AB y el segundo en el complementario a BC. Entonces, como sigue inmediatamente del teorema anterior, el punto R, al desplazarse por la recta AC, permanecerá siempre dentro de un segmento fijo de los dos que quedan determinados por los puntos A y C. El segmento de extremos A y C COMPLEMENTARIO a aquél que contiene al punto R, se convendrá en denotar con AC. Podemos ver que *el segmento AC queda determinado de manera unívoca al fijar los segmentos AB y BC.* La figura formada por los puntos A,B, C y los segmentos AB, BC y AC se llamará *triángulo*; llamaremos *sus lados* a los segmentos AB, BC y AC.

No es difícil establecer que cada trivértice ABC determina cuatro triángulos con vértices comunes A, B, C. Los lados de estos triángulos son segmentos complementarios mutuamente sobre las rectas que hacen de lados del trivértice. En la fig. 105 se representan los triángulos I, II, III, IV, determinados por un (único) trivértice ABC.

Ahora mostraremos que *en la geometría proyectiva vale la proposición de Pasch* (véase el cap. II, § 13), *es decir, si se dan un triángulo ABC y, en el plano de éste, alguna recta a, que no pase por ninguno de los puntos A, B, C y si esta recta pasa por algún punto del lado AB, entonces pasará o bien por algún punto del lado BC, o bien por alguno del lado AC.*

Para demostrar esto observemos, ante todo, que de acuerdo con la definición de triángulo existe una recta u que interseca a las rectas AB, BC y AC en tres puntos P, Q, R respectivamente, de forma que P está en el segmento complementario a AB, Q, en el complementario a BC y R, en el complementario a AC (fig. 106). Además,

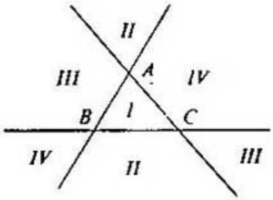


Fig. 105

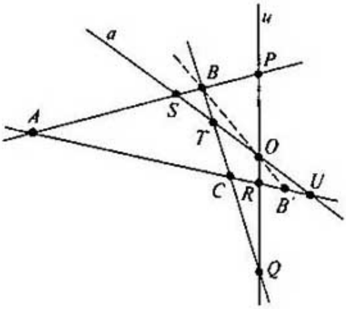


Fig. 106

como nuestro análisis se efectúa en el plano proyectivo, por el axioma I,9 la recta dada a tiene un punto T en común con la recta BC, y un punto U en común con la recta AC. Denotemos con S el punto de corte de las rectas a y AB.

Supongamos que el punto T está en el segmento BQC y el U en el ARC. Entonces, por el teorema 8, el punto S tendrá que pertenecer al segmento APB, cosa que contradice la hipótesis de que el punto S pertenece al segmento AB. Así, la recta a interseca al menos a uno de los dos lados BC y AC de nuestro triángulo. Con esto queda demostrada la proposición de Pasch.

§ 90. Fijemos en el espacio proyectivo algún plano y denotémoslo con α_∞. Convengamos en llamar «impropio» a este plano. También llamaremos «impropios» a todos los puntos y rectas pertenecientes al plano α_∞. Los demás elementos del espacio se llamarán «propios». (Escribimos entre comillas los términos «propios» e «impropios», pues el plano α_∞ fue escogido arbitrariamente y la diferencia entre los elementos «propios» y los «impropios» es convencional.)

Evidentemente, cada recta «propia» contiene un punto impropio, y sólo uno, precisamente, el punto de su intersección con el plano α_∞. En el conjunto de los puntos restantes, es decir, los «propios», de cualquier recta «propia», introduciremos una relación, expresada con el término «entre», por medio de una condición bien determinada y general para todas las rectas.

Sea a una recta «propia» arbitraria; O_∞, su punto «impropio». Consideremos tres puntos «propios» A, B, C cualesquiera de la recta a. Si el punto B, conjuntamente con el O_∞, forma un par B, O_∞ que separa al A, C, diremos que en el conjunto de los puntos «propios» de la recta a, el punto B está entre los puntos A y C. No es difícil comprobar que de esta manera el concepto «entre» establecido satisface las hipótesis de los axiomas de Hilbert de orden II,1 — II,3.

En efecto, de acuerdo con el axioma proyectivo II,2, si el par B, O_∞ separa al par A, C, éste separará también al par C, A; por ende, si por nuestra definición el punto B está entre A y C, entonces B estará, asimismo, entre C y A. Esto significa, a su vez, que el axioma de Hilbert II,1 se satisface.

Además, cualesquiera que sean los puntos «propios» A y C, en virtud del axioma proyectivo II,1 siempre existe algún punto D, tal que el par C, O_∞ separa al

A, D. Por lo tanto, en el conjunto de los puntos «propios» de la recta a siempre existe algún punto D, tal que C está entre A y D. Esto significa que el axioma de Hilbert II,2 también se observa.

Por último, según el axioma proyectivo II,3, de cuatro puntos A, B, C, O_∞ se pueden formar sólo de una manera dos pares separados. Por consiguiente, dados tres puntos A, B, C, no más de uno de ellos está entre los otros dos. En esto consiste, precisamente, el axioma de Hilbert II,3.

Al establecer en el conjunto de puntos «propios» de una recta el concepto «entre», podemos dar la definición usual en la geometría intuitiva de segmento, llamando segmento al conjunto de puntos de una recta situados entre dos puntos dados de ésta. Evidentemente, el segmento, entendido en este sentido, no es otra cosa que uno de los dos segmentos complementarios en los que se divide, por medio de los puntos A, B, la recta proyectiva que pasa por ellos; precisamente, el segmento que no contiene al punto impropio.

Es evidente también que la figura llamada triángulo en el sentido de las relaciones que hemos introducido en el sistema de elementos «propios» del espacio proyectivo, es asimismo un triángulo en el sentido en que hemos definido este concepto en la geometría proyectiva (véase el parágrafo precedente). Por esto, puede afirmarse que en el sistema de elementos «propios» del espacio proyectivo vale el axioma de Pasch, pues lo hemos demostrado para todo el espacio proyectivo.

Así, pues, en el sistema de elementos «propios» hemos introducido el concepto «entre» de forma que se satisfagan todos los axiomas de Hilbert de orden.

Supongamos, ahora, que el plano «impropio» α_∞, conjuntamente con los puntos «impropios» y rectas «impropias» que le pertenecen, fue totalmente excluido del espacio proyectivo, o, como suele decirse en tales casos, que *el espacio proyectivo ha sido cortado a lo largo del plano* α_∞. No es difícil comprobar que las relaciones de pertenencia mutua de los elementos restantes están sujetas a los axiomas de incidencia de Hilbert. De aquí y de la exposición precedente podemos afirmar que, con respecto al espacio proyectivo cortado a lo largo de alguno de sus planos, valen todos los teoremas de la geometría elemental, que se basen únicamente en los axiomas de los dos primeros grupos de Hilbert.

En particular, se puede afirmar que hay una cantidad infinita de puntos, rectas y planos en el espacio proyectivo.

El proceso que acabamos de describir viene a ser el inverso del descrito en la sección anterior. Allí se mostró que completando el espacio euclidiano con elementos nuevos se lo podía transformar en un espacio proyectivo. Ahora vemos que el espacio proyectivo, definido por medio de axiomas especiales, se transforma en cierto sentido en un análogo del euclidiano, si le quitamos alguno de sus planos.

En lo que sigue utilizaremos a veces el corte del espacio a lo largo de uno u otro plano, como método que nos permitirá efectuar demostraciones de los dos primeros grupos de axiomas de la geometría *elemental*, que ya conocemos del capítulo II.

En particular, ahora recurriremos a este método para caracterizar el orden de posición de los puntos en una recta proyectiva.

Sean A y B dos puntos de una recta proyectiva u; éstos dividen a u en dos segmentos complementarios. Consideremos uno de ellos, y convengamos en denotar por AB precisamente a este segmento. El conjunto de los puntos interiores de AB se ordenará, suponiendo que el punto M precede al N, si el par A, N separa al M, B. Hay que mostrar que se cumple la condición de transitividad, es decir, que si M precede a N, y N precede a P, entonces M precede a P. Lo más sencillo para esto es introducir en la recta u un punto impropio (punto del infinito). Como tal resulta cómodo tomar el punto B. Entonces la condición «N precede a P» puede expresarse así: «en el conjunto de los puntos propios de la recta u, el punto N está entre A y P», o bien «N está en el interior del segmento AP». Para demostrar la transitividad de la relación de orden introducida, basta en tal caso establecer, para el conjunto de los puntos propios de la recta u, la siguiente proposición: «si M está dentro del segmento AN, y N, dentro del AP, entonces M está, asimismo, en el interior del segmento AP». Pero esta proposición fue deducida en su oportunidad a partir de los dos primeros grupos de axiomas de Hilbert (véase el cap. II, § 14).

Diremos que el orden establecido en el segmento AB corresponde al sentido del segmento desde A hacia B. En el segmento complementario a AB introduciremos el orden que corresponde al sentido desde B hacia A. Hecho esto, podemos establecer dentro de un segmento arbitrario ST de la recta u un orden bien definido, imponiendo que en las partes comunes del segmento ST con el AB y con el complementario de AB, el orden de los puntos de ST coincida con el de los puntos en estos segmentos. Analizando todos los casos posibles de posición del segmento ST, precisamente: 1) cuando ST está contenido dentro del segmento AB, 2) cuando el segmento ST está contenido dentro del segmento complementario de AB, 3) cuando ST cubre el segmento AB, 4) cuando ST cubre el complementario de AB, 5) cuando el segmento ST cubre parte del segmento AB y parte del complementario, el lector puede comprobar sin dificultad que en todos los casos el conjunto de los puntos interiores del segmento ST puede ser siempre ordenado, y además de manera única, observando la condición impuesta.

La propiedad de posición relativa de los puntos de la recta proyectiva que garantiza que en cada uno de sus segmentos se induzca —de la forma indicada arriba— un orden determinado de los puntos interiores, se llamará *orden cíclico*. Según cómo esté ordenado el conjunto de los puntos del segmento AB original —ya sea en el sentido desde A hacia B o bien desde B hacia A—, en la recta proyectiva pueden establecerse dos órdenes cíclicos diferentes. Estos son inversos uno del otro, en el sentido de que si según uno de ellos, dados dos puntos M, N dentro de algún segmento ST, el punto M precede al N, entonces según el otro orden cíclico el punto M seguirá al N, dentro del segmento ST.

Los axiomas II,1 — II,6 serán llamados axiomas proyectivos de orden, pues éstos fundamentan la introducción del orden cíclico sobre la recta proyectiva.

§ 91. Para funalizar la presente sección, introduciremos sobre la recta proyectiva una topología, es decir, dotaremos de un significado al concepto de proximidad entre sus puntos. Esto se conseguirá construyendo un sistema de entornos para cada punto de la recta proyectiva.

Supongamos fijada alguna recta proyectiva u. Convendremos en llamar entorno de uno de sus puntos arbitrarios M a cualquier segmento abierto (es decir, un segmento con los extremos excluidos) que contenga en su interior al punto M.

En este caso, tendrán lugar las siguientes proposiciones (que sirven de base a los teoremas topológicos del análisis elemental):

1. Cada entorno del punto M, contiene este punto.

2. La parte común de dos entornos del punto M contiene algún entorno de este punto.

3. Un entorno de un punto M es, asimismo, entorno de cualquier otro de sus puntos.

4. Dados dos puntos diferentes M y N, existen entornos disjuntos de éstos.

La primera y la tercera de estas afirmaciones son una consecuencia inmediata de nuestra definición de entornos; la segunda y la cuarta, a pesar de ser intuitivamente evidentes, requieren una demostración.

A fin de hacerla lo más sencilla posible, puede cortarse la recta proyectiva, reduciendo así el problema al análisis de segmentos en el sentido euclidiano. No nos dedicaremos aquí a efectuar los razonamientos necesarios.

Una vez construido un sistema de entornos en la recta proyectiva, hemos abierto la posibilidad de hablar de puntos límite (puntos de acumulación) de conjuntos, de límites de sucesiones de puntos, de continuidad de funciones definidas sobre la recta proyectiva, etc.: en una palabra, de toda la colección de resultados denominados topológicos.

Esta posibilidad será utilizada en las secciones subsiguientes.

4. Separación de los pares armónicos; continuidad de la correspondencia armónica

§ 92. Para lo que sigue resulta esencial demostrar que *los puntos diagonoles de un cuadrivértice no están sobre una misma recta.*

Sea $ABCD$ un cuadrivértice completo, con puntos diagonales P, Q, R (la notación corresponde a la fig. 93). Hay que mostrar que la recta PQ no pasa por R. Efectuemos un corte del plano por la recta PQ (es decir, eliminemos la recta PQ); en el conjunto de los elementos restantes establezcamos relaciones de orden en la forma hecha en el § 90. Entonces se cumplirán los axiomas I, II de la geometría elemental.

Según las relaciones de orden establecidas, el punto D está del mismo lado que el C con respecto a la recta AB, y del mismo lado que el B con respecto a la recta AC.

Por consiguiente, el punto D está dentro de $\angle BAC$. De aquí, en virtud del teorema 11a del § 16 del capítulo II concluimos que la recta AD interseca a la BC, es decir, que existe un punto común de estas rectas. Esto significa que el punto R no fue eliminado al efectuar el corte, con lo que queda demostrada la afirmación.

De aquí tenemos un corolario:

Si P, Q, S son tres puntos diferentes de una recta u y T es su cuarto armónico, los cuatro puntos P, Q, S, T son distintos.

De la fig. 93, donde se representa la construcción de los pares mutuamente armónicos P, Q y S, T, es fácil entrever el siguiente teorema, totalmente evidente desde el punto de vista intuitivo.

TEOREMA 9. *Los pares mutuamente armónicos separan uno al otro.*

Este teorema será de gran importancia en lo que sigue; ahora daremos su demostración rigurosa.

Sean dados, sobre una recta u, dos pares de puntos mutuamente armónicos P, Q y S, T. Consideremos algún cuadrivértice $ABCD$, para el cual P, Q sean puntos diagonales y S, T pertenezcan a lados opuestos BC y AD, que pasen por el tercer punto diagonal R (fig. 94).

Proyectemos los puntos P, Q, S, T desde el centro B sobre la recta AD; sus proyecciones serán los puntos A, D, R, T, respectivamente. Proyectemos nuevamente los puntos obtenidos sobre la recta u, pero esta vez tomando como centro de proyección el punto C. Las proyecciones de los puntos A, D, R, T serán los puntos Q, P, S, T, respectivamente.

Así, luego de dos proyecciones el grupo $PQST$ se transforma en sí mismo, pero sus puntos intercambian su orden, tal como lo muestra el esquema $\begin{pmatrix} PQST \\ QPST \end{pmatrix}$, en donde debajo de cada punto fue escrito el que le corresponde bajo la transformación.

Obsérvese ahora que los cuatro puntos P, Q, S, T pueden ser dispuestos en dos pares sólo de tres formas: 1) (PQ), (ST), 2) (PS), (QT) y 3) (PT), (QS). Es fácil notar que los pares (PS) y (QT) no pueden separar uno al otro. En efecto, si se tratase de pares separados, por el axioma II,6 también lo estarían los pares (QS) y (PT), pues se obtienen de los pares (PS) y (QT) como resultado de dos proyecciones. Por lo tanto, en este caso la segunda y la tercera de las tres formas posibles de disposición de los puntos $PQST$ en pares, producen pares que se separan. Pero esto contradice al axioma II,3, en virtud del cual dados cuatro puntos hay sólo una manera deformar pares separados.

De igual modo, si asumiésemos que son los pares (PT) y (QS) los cuales se separan, nos veríamos forzados a concluir que los pares (PS) y (QT) también uno al otro, con lo cual tendríamos nuevamente una contradicción. Como, por el axioma II,3, una de las tres maneras de formar pares dados cuatro puntos conduce necesariamente a pares separados, concluimos que los separados serán precisamente los pares (PQ) y (ST). El teorema queda demostrado.

Es útil enunciar este teorema también como sigue: si el par M, M' es conjugado armónico del par A, B, los puntos M y M' se encontrarán en segmentos mutuamente complementarios diferentes, determinados por los puntos A, B. Si los puntos A, B están fijos, entonces M' depende únicamente de M; esto lo simbolizaremos con la escritura $M' = f(M)$. Como $MM'AB$ y $M'MAB$ son en igual medida grupos armónicos de puntos, conjuntamente con la relación $M' = f(M)$ tendrá lugar la relación $M = f(M')$. La correspondencia $M' = f(M)$ se llama armónica. Evidentemente, bajo una correspondencia armónica los segmentos mutuamente complementarios con extremos comunes A, B se transforman biyectivamente el uno en el otro. Más adelante estudiaremos esta correspondencia con mayor detalle.

§ 93. Consideremos sobre una recta proyectiva arbitraria u, tres puntos dados M_1, M_2, M_3. Sea M el cuarto armónico de los puntos considerados; precisamente, el punto tal que el par M, M_3 resulte conjugado armónico del par M_1, M_2. Convendremos en utilizar la escritura simbólica $M = f(M_1, M_2, M_3)$, considerando a M como función de los tres puntos M_1, M_2, M_3. Evidentemente,, $f(M_1, M_2, M_3) = f(M_2, M_1, M_3)$ y, si $M = f(M_1, M_2, M_3)$, entonces $M_3 = f(M_1, M_2, M)$.

Si fijamos los puntos M_1 y M_2, haciendo $M_1 = A$, $M_2 = B$, y en lugar de M_3

escribimos M, la función $f(A, B, M)$ coincidirá con la función $f(M)$ introducida al final del parágrafo precedente.

Tiene lugar el siguiente teorema importante.

TEOREMA 10. *La función $M = f(M_1, M_2, M_3)$ es continua para todas las posiciones de los puntos M_1, M_2, M_3.*

De acuerdo con la forma en que definimos en el § 91 los entornos de los puntos sobre la recta proyectiva, este teorema puede enunciarse también como sigue: cualesquiera que sean los puntos M_1, M_2, M_3 y cualquiera que sea el segmento abierto Δ que contenga al punto M, siempre pueden indicarse segmentos abiertos Δ_1, Δ_2, Δ_3 que contengan los puntos M_1, M_2, M_3, respectivamente, tales que si estos puntos varían permaneciendo dentro de los segmentos Δ_1, Δ_2, Δ_3, el punto M variará sin salirse del segmento Δ.

Así, la demostración del teorema 10 tendrá que ser de carácter puramente constructivo, pues se reduce a determinar los segmentos Δ_1, Δ_2, Δ_3 a partir del segmento Δ dado. Haremos la demostración sólo en dos casos particulares, los únicos que necesitaremos en el futuro, o sea, 1) cuando el tercer argumento de la función $f(M_1, M_2, M_3)$ es un punto fijo $M_3 = C$; 2) cuando los dos primeros argumentos de la función $f(M_1, M_2, M_3)$ son puntos fijos $M_1 = A$, $M_2 = B$.

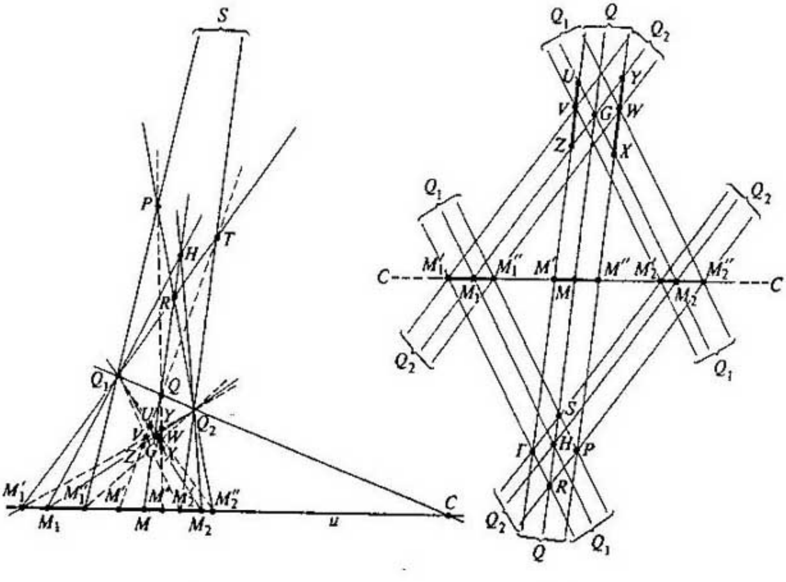
En el primer caso tendremos la función de dos variables $M = f(M_1, M_2, C)$. Sean dadas posiciones determinadas de los puntos M_1 y M_2. La construcción del punto M que les corresponde se representa en la fig. 107, *a*), donde Q_1, Q_2, G, H es el cuadrivértice de puntos diagonales M_1, M_2, Q, uno de cuyos lados Q_1Q_2 pasa por C, y el otro, HG, por M.

Supongamos que el plano proyectivo se ha seccionado a lo largo de la recta Q_1Q_2. Entonces, al considerar algún segmento cuyos extremos son conocidos, no habrá necesidad de indicar cuál de los dos segmentos mutuamente complementarios con los extremos dados se toma en consideración, pues sobre el plano proyectivo cortado dos puntos dados determinan un segmento de manera unívoca.

En la fig. 107, *b*) se representa la misma construcción con las mismas notaciones, pero la recta Q_1Q_2 ha sido dispuesta en el infinito; en esta figura, las rectas que van al punto Q_1(o al Q_2, o al Q) son paralelas; el punto M es el punto medio del segmento M_1M_2. Resulta más sencillo seguir los razonamientos ulteriores en la fig. 107, *b*).

Imaginémonos que los puntos M_1 y M_2 varían la posición suya sobre la recta u. Como el punto C permanece invariable, podemos, para determinar el punto M, siempre utilizar cuadrivértices con vértices constantes Q_1 y Q_2; entonces el punto diagonal Q también quedará fijo, pues se trata del cuarto armónico de los tres puntos fijos Q_1, Q_2, C, cosa que se comprueba fácilmente.

Si el punto M_1 al desplazarse permanece dentro de algún segmento $M_1'M_1''$ y el M_2, al desplazarse independientemente de M_1, permanece dentro de un segmento $M_2'M_2''$, el vértice variable H del cuadrivértice que utilizamos para determinar el punto M dados M_1, M_2, C, al variar quedará dentro del cuadrilátero $PSTR$. La proyección del punto H desde el punto Q sobre la recta u es, precisamente, el punto M. Cuando los puntos M_1 y M_2 ocupan las posiciones extremas M_1' y M_2', el punto H coincide con el punto T, y M va a parar a algún punto M'; cuando M_1 y M_2 ocupan las posiciones extremas M_1'' y M_2'', el punto H coincide con el P, y M se encuentra en



a *b*

Fig. 107

un punto M''. Para todas las demás posiciones de los puntos M_1 y M_2, el punto M permanece entre M' y M''.

Resulta ahora sencillo pensar cómo construir, a partir de un entorno prefijado $\Delta = M'M''$ del punto M, entornos Δ_1 y Δ_2 de los puntos M_1 y M_2, tales que al variar estos puntos, su pertenencia a los entornos Δ_1 y Δ_2, respectivamente, asegure la pertenencia del punto M al entorno Δ. Para esto debe procederse como sigue: se proyectan los puntos M' y M'' desde el punto Q; sobre las semirrectas proyectantes se marcan los segmentos ZU y XY, cortados por las rectas Q_1M_2 y Q_2M_1; dentro del segmento ZU se toma un punto arbitrario V, dentro del segmento XY, un punto cualquiera W. Las proyecciones de los puntos V, W desde Q_2 sobre la recta u serán los puntos $M_1'M_1''$, que delimitan el segmento $\Delta_1 = M_1'M_1''$; las proyecciones de estos mismos puntos V, W desde Q_1 serán los puntos M_2', M_2'', que delimitan el segmento $\Delta_2 = M_2'M_2''$.

Los segmentos Δ_1 y Δ_2 construidos son los entornos buscados de los puntos M_1 y M_2, es decir, si M_1 y M_2 varían su posición, pero permanecen dentro de Δ_1 y Δ_2, respectivamente, entonces $M = f(M_1, M_2, C)$ cambiará su posición, pero se conservará dentro de Δ. Como los entornos Δ_1 y Δ_2 con las propiedades indicadas pueden ser determinados cualesquiera que sean los puntos M_1, M_2 y el entorno Δ, la función $M = f(M_1, M_2, C)$ es continua para posiciones cualesquiera de los puntos M_1 y M_2 sobre la recta proyectiva u.

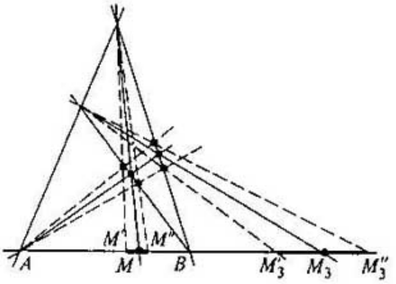


Fig. 108

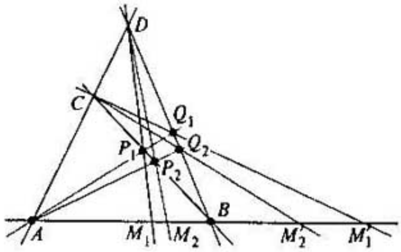


Fig. 109

Pasando al otro particular que queríamos considerar, precisamente, cuando en la relación $M = f(M_1, M_2, M_3)$ están fijos $M_1 = A$ y $M_2 = B$, nos limitaremos a referirnos a la fig. 108; de esta figura, sin más aclaraciones, se aprecia cómo construir, a partir de un entorno dado $\Delta = M'M''$ del punto M, un entorno $\Delta_3 = M_3'M_3''$ del punto M_3, tal que al variar M_3, mientras éste permanezca dentro de Δ_3, el punto M se quede dentro de Δ. La posibilidad de tal construcción significa la continuidad de la función $M = f(A, B, M_3)$.

No nos detendremos en probar la continuidad de la función $M = f(M_1, M_2, M_3)$ en la totalidad de sus variables, pues el teorema 10 no nos hará falta en toda su generalidad.

Por el contrario, estudiaremos desde otro punto de vista la función de una variable $M' = f(A, B, M)$.

Supongamos que sobre la recta u se ha introducido algún orden cíclico, de manera que el conjunto de puntos de uno de los segmentos de extremos A, B ha sido ordenado en el sentido desde A hacia B, mientras que el conjunto de los puntos del segmento complementario se ha ordenado en el sentido desde B hacia A. Convendremos en denotar con AB el primero de estos segmentos.

Si el punto M se encuentra en el interior del segmento AB, en virtud del teorema 9 el punto $M' = f(A, B, M)$ tendrá que encontrarse en el segmento complementario al AB. Sean M_1 y M_2 dos posiciones arbitrarias del punto variable M dentro de AB, y M_1' y M_2', las posiciones correspondientes del punto M'. Ahora mostraremos que si el punto M_1 sobre el segmento AB precede al punto M_2, entonces el punto M_1', en el segmento complementaio al AB, sigue al punto M_2' (fig. 109).

A fin de mostrar esto, construimos los cuadrivértices completos CDP_1Q_1 y CDP_2Q_2 con puntos diagonales A, B comunes, de forma que los lados opuestos DP_1 y CQ_1 del primero de ellos pasen por M_1 y M_1', y los lados opuestos DP_2 y CQ_2 del segundo, por M_2 y M_2'. Proyectemos el grupo de puntos ABM_1M_2 desde el centro D sobre la recta CB. Como proyección, se obtiene el grupo de puntos CBP_1P_2. Este grupo se proyecta ahora desde el centro A sobre la recta DB; entonces, el grupo de puntos CBP_1P_2 se transformará en el DBQ_1Q_2. Proyectando, por último, el grupo de puntos DBQ_1Q_2 deste el centro C sobre la recta u, hallamos como proyección el grupo $ABM_1'M_2'$. Así, después de una serie de proyecciones los puntos ABM_1M_2 se transforman en los $ABM_1'M_2'$.

Si en el orden establecido de los puntos del segmento AB, el punto M_1 precede al M_2, entonces, por definición de este orden, el par A, M_2 separa al par M_1, B. En virtud de la invariancia de la propiedad de separación de dos pares bajo proyecciones (véase el axioma II,6), el par B, M_1' habrá de separar al A, M_2'. Pero esto significa, precisamente, que si el conjunto de puntos del segmento complementario al AB se ordena en el sentido desde B hacia A, en este orden M_1' sigue a M_2'.

El resultado obtenido puede describirse gráficamente como sigue: si el punto variable M recorre el segmento AB en el sentido desde A hacia B, el punto armónico M' que le corresponde recorrerá el segmento complementario al AB en el sentido opuesto, es decir, también desde A hacia B.

Si en el segmento AB se ha fijado un grupo de puntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, dispuestos de manera que cada punto de subíndice menor precede a cada uno de subíndice mayor, entonces en el segmento complementario al AB, a los puntos de este grupo le corresponderán puntos $M_1', M_2', \ldots, M_n'$, dispuestos de forma que cada punto de subíndice menor sigue a cada uno de subíndice mayor.

Una aplicación de un segmento orientado sobre otro (también orientado), bajo la cual el orden de los puntos de cualquier grupo ordenado o bien se conserva siempre, o bien se transforma siempre en el opuesto, se denomina *ordenada* (*en forma directa* y *en forma inversa*, respectivamente, o «aplicación que conserva la orientación» y «aplicación que invierte la orientación», respectivamente).

Utilizando esta terminología y tomando en cuenta todo lo expuesto hasta aquí, podemos enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA 11. *La aplicación armónica $M' = f(A, B, M)$ del segmento AB sobre su complementario es continua y ordenada en forma inversa.*

OBSERVACIÓN. Hasta ahora hemos asumido que los puntos del grupo armónico eran diferentes y la definición del cuarto armónico para tres puntos dados fue presentada sólo para el caso en que los puntos dados eran diferentes. Por esto, en el teorema 10 el caso de coincidencia de las variables M_1, M_2, M_3 de la función $M = f(M_1, M_2, M_3)$ debe considerarse, en rigor, como un caso singular, que merece una consideración especial.

Sin detenernos en el análisis de esta cuestión para la función $M = f(M_1, M_2, M_3)$, consideraremos la función $M' = f(A, B, M)$ para $M = A$ y $M = B$.

Supongamos que AB denota alguno de los dos segmentos determinados en la recta proyectiva por los puntos A y B. Del teorema 11 sigue que si M, permaneciendo dentro de AB, se aproxima monótonamente al punto A, entonces M' se aproximará hacia A, al encuentro de M, permaneciendo dentro del segmento complementario al AB. Por esto, si deseamos definir la función $M' = f(A, B, M)$ para $M = A$ de forma que resulte ser continua para esta posición de M, tenemos que poner que para $M = A$ es, asimismo, $M' = A$, es decir, considerar que $f(A, B, A) = A$. Análogamente tendremos $f(A, B, B) = B$.

En la aplicación de la recta proyectiva sobre sí misma que pone en correspondencia al punto M el punto $M' = f(A, B, M)$, los puntos A y B se corresponden a sí mismos. Estos se llaman *puntos dobles* (o *fijos, o unidos*) de la aplicación armónica.

5. Axioma de continuidad. Sistema proyectivo de coordenadas sobre la recta

§ 94. Nos acercamos a un punto de gran importancia en la exposición de la geometría proyectiva: la presentación del principio de determinación de los puntos del espacio proyectivo por medio de coordenadas.

En la geometría euclidiana las coordenadas de los puntos se determinan de manera muy sencilla, recurriendo a mediciones. En la geometría proyectiva, donde no hay axiomas de congruencia, la construcción de un sistema de coordenadas requiere ciertas astucias. Nosotros expondremos esta cuestión siguiendo el método de F.Klein.

Necesitaremos, amén de los dos grupos de axiomas proyectivos considerados más arriba (de incidencia y de orden), el axioma de continuidad (de Debekind), que viene a ser el único axioma del tercer grupo. A fin de facilitar su enunciado, introduciremos una terminología adecuada.

Imaginémonos que el espacio proyectivo se ha cortado a lo largo de algún plano que, por comodidad, se considerará alejado al infinito. Entonces en el conjunto de puntos de cada recta propia (es decir, cada recta que no se encuentre en el plano impropio) puede introducirse una relación que se expresa con el término «entre» (véase el § 90). Precisamente, si O_∞ es el punto impropio de alguna recta propia a, y A, B, C son otros tres puntos de ella, el punto C se considera ubicado entre A y B en la recta a, si el par C, O_∞ separa al par A, B. Entonces, como ya sabemos, con respecto a los elementos propios del espacio se satisfarán todos los requisitos de los dos primeros grupos de axiomas de Hilbert. Basándonos en los axiomas referidos, podemos ordenar el conjunto de puntos propios de una recta, de forma que cada vez que un punto C siga a algún punto A y preceda a un punto B, resulte situado entre A y B en el sentido que acabamos de definir. Observando este requisito, el conjunto de puntos propios de una recta puede ser ordenado únicamente de dos maneras distintas; además, los órdenes así introducidos son opuestos uno del otro (véase el § 14). Convendremos en llamar a cada uno de ellos, *orden lineal* sobre la recta proyectiva cortada en el punto del infinito.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el axioma de continuidad, el único del tercer grupo y el último en la axiomática proyectiva.

GRUPO III. AXIOMA DE CONTINUIDAD (DE DEDEKIND).

III. *Sea a una recta proyectiva arbitraria, cortada en algún punto O_∞. Si el conjunto de los puntos restantes de esta recta se divide en dos clases de forma que:* 1) *cada punto pertenezca a una clase, y sólo a una;* 2) *cada clase contenga puntos;* 3) *cada punto de la primera clase, en uno de los dos órdenes lineales sobre la recta a, preceda a cada punto de la segunda clase, entonces o bien en la primera clase existe un punto que sigue a todos los demás de esta clase, o bien en la segunda existe un punto que precede a todos sus otros puntos.*

En forma más concisa, este axioma se expresará como sigue:

En cada cortadura de Dedekind del conjunto ordenado de puntos de una recta proyectiva cortada, exactamente una de las dos clases posee un elemento que la clausura.

§ 95. En las páginas que siguen se muestra cómo puede introducirse un sistema de coordenadas sobre la recta proyectiva.

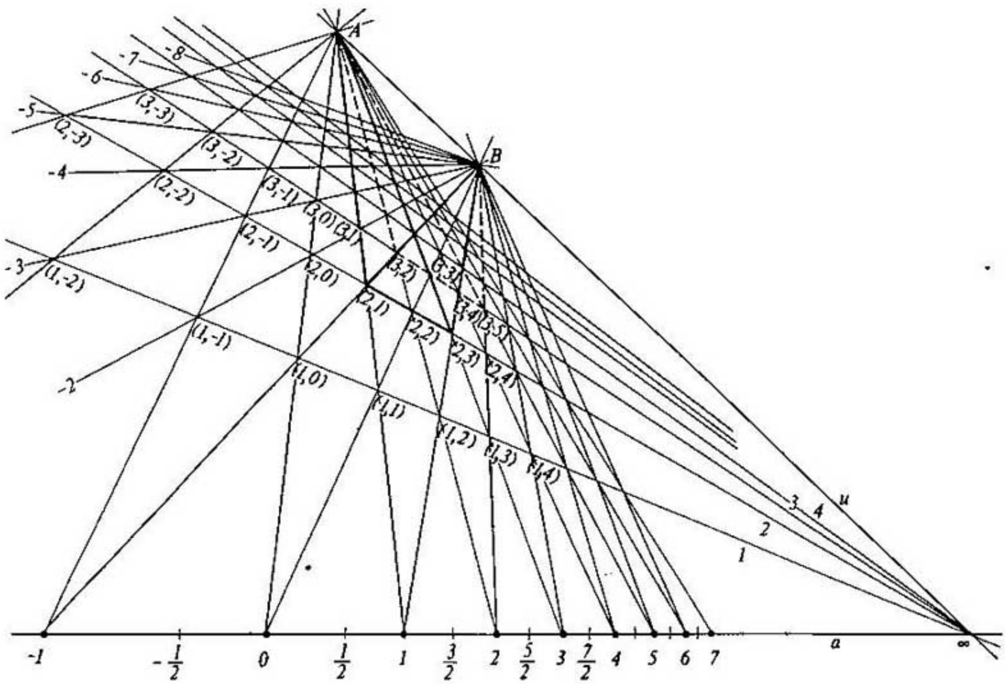
Sean dadas una recta proyectiva arbitraria a y, sobre ella, tres puntos, de los cuales dos han sido marcados con los números 0 y 1 y el tercero, con el símbolo ∞ (fig. 110). Llamaremos impropio al punto ∞, y propios a los demás puntos de la recta a. Convengamos en imaginar a la recta a cortada en el punto ∞ e introduzcamos en esta recta un orden lineal, de modo que el punto 0 preceda al punto 1. Luego marquemos con el número 2 el punto que forma, conjuntamente con el punto 0, un par armónico conjugado del par 1, ∞. Por el teorema 9, el par 0, 2 separa al 1, ∞. Por esto, en el orden lineal sobre la recta cortada a, el punto 1 está entre 0 y 2; dicho de otro modo, el punto 2 sigue a los puntos 0 y 1. Marquemos, seguidamente, con el número 3 el punto que, conjuntamente con el punto 1, forme un par armónico conjugado del par 2, ∞; con el número 4, el punto que, conjuntamente con el punto 2, forme un par armónico conjugado del par 3, ∞, etc. Nos queda, así, una sucesión infinita de puntos marcados con los números 0, 1, 2, 3, 4, ... Evidentemente, en esta sucesión el punto p, para cualquier $p \geqslant 1$, sigue a cada uno de los puntos 0, 1, 2, ... , $p - 1$.

Hecho esto, marquemos con el número -1 el punto que, conjuntamente con el punto 1, forme un par armónico conjugado del par 0, ∞; con el número -2, el punto que, conjuntamente con el punto 0, forme un par armónico conjugado con el par -1, ∞, etc. Como resultado general obtenemos los puntos ..., $-m$, $-m + 1$, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... , n, ... , que siguen el uno al otro en el orden lineal que se tiene sobre la recta cortada a. Llamaremos a estos puntos *puntos enteros de la escala proyectiva.*

A fin de facilitar su construcción real, procedemos como sigue.

Se trazan por el punto ∞ de la recta a dos rectas arbitrarias, una de las cuales marcaremos con el número 1, y la otra, con la letra u; sobre la recta u se escoge algún punto A (fig. 110). Se trazan, asimismo, las rectas $A0$ y $A1$, que unen el punto A con los puntos 0 y 1. Estas rectas, al cortarse con la recta 1, determinan dos puntos, que denotaremos por (1, 0) y (1,1), respectivamente. Trazando, ahora, por los puntos 0 y (1, 1) una recta, hallamos el punto B en que ésta corta a la recta u. Hecho esto, trazamos la recta por los puntos B y 1, determinamos sobre la recta 1 el punto (1, 2) y, proyectándolo desde el punto A sobre la recta a, obtenemos el punto que arriba convinimos en marcar con el número 2, pues precisamente este punto, junto con el punto 0, forma un par armónico conjugado con el par 1, ∞. Para comprobarlo, basta considerar el cuadrivértice completo de vértices A, B, (1, 1) y (1, 2); los puntos 1 e ∞ son puntos diagonales de este cuadrivértice, mientras que los puntos 0 y 2 se encuentran sobre dos de sus lados opuestos; esto significa, precisamente, que los pares 0, 2 y 1, ∞ son armónicos conjugados. Una vez construido el punto 2, proyectándolo desde el punto B sobre la recta 1, obtenemos el punto (1, 3), y proyectando este último desde el punto A sobre la recta a, obtenemos el punto 3; una vez determinado el punto 3, proyectándolo desde el punto B sobre la recta 1, obtenemos el punto (1, 4) y proyectando éste desde el punto A sobre la recta a, obtenemos el punto 4, etc.

De la misma forma pueden ser obtenidos los puntos enteros marcados con números negativos. Por ejemplo, proyectando el punto (1, 0) desde el punto B, obte-



A
B
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
(3,-3)
(2,-3)
(3,-2)
(2,-2)
(3,-1)
(3,0)
(3,1)
(2,-1)
(1,-2)
(2,0)
(3,2)
(3,3)
(2,1)
(1,-1)
(3,4)
(3,5)
(2,2)
(2,3)
(1,0)
(2,4)
(1,1)
(1,2)
(1,3)
(1,4)
3
4
u
2
1
-1
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$
1
$\frac{3}{2}$
2
$\frac{5}{2}$
3
$\frac{7}{2}$
4
5
6
7
a
∞

Fig. 110

nemos sobre la recta a el punto -1; proyectando este último desde A sobre la recta 1, determinamos el punto $(1, -1)$, y proyectándolo desde el punto B, obtenemos sobre la recta a el punto -2, etc.

Por construcción, dos rectas, una de las cuales une el punto B con algún punto entero n y la otra une A con el punto entero $n + 1$, para cualquier n se cortan sobre la recta 1.

Además SE PUEDE DEMOSTRAR que dos rectas, una de las cuales une el punto B con algún punto entero n y la otra une A con el punto entero $n + 2$, para todo n se cortan asimismo sobre una recta determinada. Esta recta fue marcada en la fig. 110 con el número 2, y los puntos situados sobre ella que corresponden a intersecciones dos a dos de las rectas indicadas fueron denotados por ... , $(2, -3)$, $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2,2)$, ...

Análogamente, dos rectas, una de las cuales une el punto B con un punto n y la otra, el punto A con el punto $n + 3$, para todo n se intersecan sobre una recta determinada 3; sobre ella aparece, así, el sistema de puntos ...,$(3, -3)$, $(3, -2)$, $(3, -1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, ...

Dos rectas, una de las cuales une el punto B con el punto n, y la otra, el punto A con el $n + 4$, para todo n se intersecan sobre una recta determinada 4, etc.

Bastará dar la demostración de estas afirmaciones para el sistema de puntos ... , $(2, -3)$, $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, ... Hecho esto, quedará clara su generalización a los demás sistemas de puntos.

Mostraremos, pues, que los puntos ... , $(2, -3)$, $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, ... están sobre una misma recta.

Con este fin, observaremos, ante todo, que para cualquier n el par de puntos A, $(1, n)$ es conjugado armónico con el par $(2, n)$, n.

Efectivamente, estos pares se obtienen proyectando desde el punto B los dos pares mutuamente armónicos (por construcción) ∞, $n - 1$ y $n - 2$, n de la recta a y, consecuentemente, por el teorema 6 del § 86 son a su vez armónicos conjugados entre sí.

Marquemos con el número 2 la recta que va del punto ∞ al punto $(2, 0)$. Como se ve, los dos pares de rectas u, 1 y 2, a, que parten del punto ∞, proyectan los dos pares armónicos conjugados de puntos A, $(1, 0)$ y $(2, 0)$, 0. Por esto, las semirrectas indicadas, al cortarse con cualquier recta, determinan sobre ésta dos pares armónicos conjugados de puntos (véase el § 86, teorema 6).

En particular, la recta que une los puntos A y n, interseca las semirrectas u, 1 y a en los tres puntos A, $(1, n)$ y n, y a la recta 2, en un punto que tiene que ser el cuarto armónico de los tres indicados. Pero éste es, como hemos visto, el punto $(2, n)$. Y como el cuarto armónico de tres puntos dados se determina de manera única, concluimos que el punto $(2, n)$, para todo n, está sobre la recta 2.

Una vez probado que los puntos ... , $(2, -3)$, $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, ... están sobre una recta, es fácil mostrar que los puntos ... , $(3, -3)$, $(3, -2)$, $(3, -1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, ... también se encuentran alineados. Para esto debe observarse, ante todo, que el par A, $(2, n)$, para todo n, es armónico conjugado del par $(3, n)$, $(1, n)$. Hecho esto, utilizando la alineación de los dos sistemas de puntos ... , $(1, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ $(1, 2)$, ... y ... , $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, ... , se puede probar la alineación del sistema de puntos ... , $(3, -2)$, $(3,$

$-1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$ $(3, 2)$, ... haciendo una analogía exacta con el razonamiento precedente. De idéntica manera puede probarse que los puntos ... , $(4, -2)$, $(4, -1)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, ... están sobre una recta, etc. Ahora ya estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema auxiliar, de gran importancia para lo que sigue:

TEOREMA A. *Si x e y son dos números enteros y $z = \dfrac{x + y}{2}$ también es un entero, entonces el punto entero z, conjuntamente con el punto ∞, forma un par que separa armónicamente el par de puntos enteros x e y.*

Un punto que, conjuntamente con el punto ∞, forme un par que separe armónicamente sobre la recta a un par de puntos dados P y Q, se convendrá en llamar *centro proyectivo del segmento PQ* (el centro proyectivo depende, claro está, de la elección del punto ∞). Entonces, el teorema que acabamos de enunciar puede expresarse como sigue:

Si x, y y $z = \dfrac{x + y}{2}$ son números enteros, entonces el punto entero z es el centro proyectivo del segmento determinado por los puntos enteros x e y.

Al demostrar este teorema supondremos, para fijar ideas, que $y > x$. De la hipótesis sigue que la diferencia $y - x$ es un número par. En el caso $y - x = 2$ la afirmación del teorema es, evidentemente, correcta, pues el hecho que para $y - x = 2$, el punto $\dfrac{x + y}{2}$ sea centro proyectivo del segmento xy, fue tomado como base de la determinación de la escala proyectiva. Precisamente en esta propiedad se basa la construcción presentada en la fig. 110, donde puede apreciarse que la recta que une el punto A con el y, y la recta que une el B con el x, al cortarse con la recta 1 determinan dos puntos que, conjuntamente con los puntos A y B, constituyen los vértices de un cuadrivértice que posee puntos diagonales $\dfrac{x + y}{2}$ e ∞ y un par de lados opuestos que pasan por los puntos xy. Esto significa, precisamente, que el punto $\dfrac{x + y}{2}$ es el centro proyectivo del segmento xy. De manera similar puede verificarse el teorema en el caso $y - x = 4$, $y - x = 6$, etc.

Sea, por ejemplo, $y - x = 4$. Consideremos la recta que une el punto A con el y, la recta que une el B con el x, y los puntos de intersección de estas rectas con la recta 2. Estos puntos, conjuntamente con A y B, constituyen los vértices de un cuadrivértice que tiene puntos diagonales $\dfrac{x + y}{2}$ e ∞ y un par de lados opuestos que pasan por los puntos x e y. Esto significa, precisamente, que el punto $\dfrac{x + y}{2}$ es el centro proyectivo del segmento xy. En la fig. 110 se indica con trazo grueso el cuadrivértice cuyo análisis permite apreciar que el punto $1 = \dfrac{3 + (-1)}{2}$ es el centro proyectivo del segmento de extremos 3 y -1; en este caso, precisamente, es $y - x = 3 - (-1) = 4$.

Si $y - x = 6$, la verificación del teorema se hace de la misma manera, sólo que ahora habrá que recurrir a la recta 3; para $y - x = 8$, a la recta 4, etc.

En la fig. 110, CON TRAZO PUNTEADO grueso, se indica el cuadrivértice cuyo análisis permite apreciar que el punto $2 = \frac{5 + (-1)}{2}$ es el centro proyectivo del segmento de extremos 5 y -1; en este caso será $y - x = 5 - (-1) = 6$.

Hasta ahora hemos trabajado únicamente con puntos enteros. Ahora nos dedicaremos a «densificar» la escala proyectiva, completándola con nuevos puntos con marcas fraccionarias.

Determinemos, primero, el centro proyectivo del segmento (0, 1) e indiquémoslo con el número $\frac{1}{2}$. Hecho esto, partiendo de los tres puntos $0, \frac{1}{2}$ e ∞ se construye una escala proyectiva de la misma manera que lo hicimos partiendo de los puntos $0, 1, \infty$. Se obtiene así un sistema de puntos que, en la nueva escala, harán las veces de enteros; los marcaremos con los números: $\ldots, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$ No es difícil constatar que todos los puntos de la forma $\ldots, -\frac{4}{2}, -\frac{2}{2}, 0, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$ de la nueva escala coinciden con los puntos $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ de la escala vieja, respectivamente. En efecto, el punto $\frac{2}{2}$ de la nueva escala coincide con el punto 1 de la inicial, pues los segmentos $\left(0, \frac{2}{2}\right)$ y $(0, 1)$ tienen un centro proyectivo común, precisamente, el punto $\frac{1}{2}$; el punto $\frac{4}{2}$ de la nueva escala coincide con el punto 2 de la antigua, pues los segmentos $\left(0, \frac{4}{2}\right)$ y $(0, 2)$ tienen un centro proyectivo común. En efecto, en virtud del teorema A, el segmento $\left(0, \frac{4}{2}\right)$ tiene por centro proyectivo el punto $\frac{2}{2}$ de la nueva escala y, por el mismo teorema, el segmento $(0, 2)$ tiene por centro proyectivo el punto 1 de la escala inicial; pero, como acabamos de observar, los puntos $\frac{2}{2}$ y 1 coinciden. Prosiguiendo, el punto $\frac{6}{2}$ de la nueva escala coincide con el punto 3 de la antigua, pues los segmentos $\left(\frac{2}{2}, \frac{6}{2}\right)$ y $(1,3)$ tienen origen común (ya sabemos que los puntos $\frac{2}{2}$ y 1 son idénticos) y centro proyectivo común, el cual viene a ser el punto $\frac{4}{2}$ de la nueva escala y, al mismo tiempo, el punto 2 de la inicial. Continuando el razonamiento, se establece la identidad de todos los puntos de la forma $\frac{2n}{2}$ y n; análogamente se establece la identidad de los puntos $-\frac{2n}{2}$ y $-n$.

Ahora resulta claro que todos los puntos de la nueva escala, es decir, la escala determinada a partir de los puntos $0, \frac{1}{2}, \infty$, puede obtenerse también si a los puntos de la escala inicial se agregan los centros proyectivos de los segmentos tipo $(n, n+1)$.

Además, es evidente que como generalización del teorema A puede ahora enunciarse el siguiente teorema.

TEOREMA B. *Cualesquiera que sean los números enteros x e y, el número $z = \frac{x+y}{2}$ determina siempre el centro proyectivo del segmento xy.*

No tiene sentido detener en este primer paso la densificación de la escala, que efectuamos agregando a los puntos enteros los centros proyectivos de los segmentos $(n, n+1)$. Considerando los puntos tipo $\frac{n}{2}$ (entre los cuales están todos los enteros, determinados por las fracciones reducibles), construimos el centro proyectivo de cada segmento $\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ y lo marcamos con el número $\dfrac{\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2}}{2} = \frac{2n+1}{2^2}$. Así se obtienen puntos que, conjuntamente con los ya hallados, se determinan por números de la forma $\frac{n}{2^2}$; aplicando el mismo método a estos puntos, obtenemos puntos que se determinan por números de la forma $\frac{n}{2^3}$, etc.

Así, cualquiera que sea la fracción binaria $\frac{n}{2^m}$, en la recta proyectiva cortada a existe un punto bien determinado, que en nuestra construcción es marcado con el número $\frac{n}{2^m}$. A base de lo expuesto, podemos afirmar que para m fijado los puntos tipo $\frac{n}{2^m}$ $(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ constituyen una escala proyectiva, determinada por los puntos $0, \frac{1}{2^m}$ e ∞. De aquí se obtiene la siguiente generelización del teorema B.

TEOREMA C. *Cualesquiera que sean las fracciones binarias x e y, el número $z = \frac{x+y}{2}$ es siempre el centro proyectivo del segmento xy.*

En efecto, sean $x = \frac{n}{2^p}$ e $y = \frac{m}{2^p}$; reduciendo estas fracciones a común denominador, las representamos en la forma $x = \frac{M}{2^r}$ e $y = \frac{N}{2^r}$, después de lo cual podemos considerar x e y como puntos enteros de la escala determinada por los puntos $0, \frac{1}{2^r}$ e ∞. Entonces, resulta evidente que el teorema C es un corolario directo del teorema B.

§ 96. Ahora demostraremos que los puntos marcados con fracciones binarias (que llamaremos en lo sucesivo racionales binarios) son DENSOS en toda la recta proyectiva a.

Daremos la demostración por el método de reducción al absurdo. Supongamos que cierto segmento PQ no contiene puntos racionales binarios en su interior y supongamos, para fijar ideas, que en el orden lineal sobre la recta proyectiva cortada a, el punto P precede al Q.

En la hipótesis hecha habrá que considerar tres casos:

1) Existen puntos racionales binarios que preceden al punto P y también números racionales binarios que siguen al punto Q.

2) Existen puntos racionales binarios que preceden a P, pero no los hay que sigan a Q.

3) Existen puntos racionales binarios que sigan a Q, pero ninguno que preceda a P.

Tenemos que demostrar que en todos estos casos, asumiendo que el segmento PQ no tiene puntos racionales binarios, se obtiene una contradicción.

Tomemos el primer caso.

Distribuyamos todos los puntos de la recta proyectiva cortada a en dos clases, poniendo en la SEGUNDA clase cada punto racional binario que siga al punto Q y, además, cada otro punto de la recta a, que siga a un tal punto racional binario; en la primera clase pondremos todos los demás puntos. Evidentemente, la distribución indicada de puntos es una cortadura de Dedekind. En virtud del axioma III, existe un punto que realiza esta cortadura, es decir, que clausura una de susclases; lo denotaremos con Q_0. No es difícil verificar ante todo, que Q_0 no puede preceder a Q. Además, si Q y Q_0 son diferentes, entre ellos no habrá puntos racionales binarios; en caso contrario, el punto Q_0 sería un punto de la segunda clase y no será el primero (es decir, el punto de clausura). Ahora, cualquier entorno del punto Q_0 en la recta a contiene puntos racionales binarios. En efecto, si existiese un entorno del punto Q_0 que no contuviese puntos racionales binarios, todos los puntos de este segmento —incluido el propio Q_0— pertenecerían a la primera clase, y el punto Q_0 no sería el último punto allí (es decir, el de clausura). Obsérvese, además, que Q_0 no puede coincidir con el punto ∞, pues, por hipótesis, el punto Q es seguido por puntos racionales binarios, que necesariamente separan Q_0 de ∞.

Efectuemos ahora una distribución de todos los puntos de la recta proyectiva cortada a en dos clases, poniendo esta vez en la primera clase cada punto racional binario que preceda al punto P y, además, todo otro punto de la recta a que preceda a un tal punto racional binario; en la segunda clase se ponen todos los demás puntos. Nuevamente obtenemos alguna cortadura de Dedekind; sea P_0 el punto que la realiza. En forma análoga a la discusión precedente, podemos establecer, en primer lugar, que P_0 no puede seguir a P y que, si P_0 y P son diferentes, entre ellos no habrá puntos racionales binarios; en segundo lugar, que cada entorno del punto P_0 contiene puntos racionales binarios y, por último, que P_0 no puede coincidir con el punto ∞.

Así, pues, el segmento P_0Q_0, al igual que el PQ, debe estar libre de puntos racionales binarios, pero en cualquier entorno del punto P_0 y en cualquier entorno del punto Q_0 habrá tales puntos.

Sean X e Y dos puntos arbitrarios de la recta a, distintos del punto ∞, y $Z = f(X, Y, \infty)$, el punto que, conjuntamente con ∞, forma un par Z, ∞ que separa armónicamente el par X, Y. El punto Z no es otra cosa que el centro proyectivo del segmento X, Y. Sea, además, $R_0 = f(P_0, Q_0, \infty)$ el centro proyectivo del segmento P_0Q_0. Como sabemos, el punto R_0 está en el interior del segmento P_0Q_0. Por el teorema 10, la función $f(X, Y, \infty)$ es continua para $X = P_0$, $Y = Q_0$. Por esto, existen entornos Δ_1 y Δ_2 de los puntos P_0 y Q_0, tales que si el punto X está dentro de Δ_1, y el punto Y, dentro de Δ_2, el punto $Z = f(X, Y, \infty)$ estará dentro del segmento P_0Q_0. De acuerdo con lo expuesto arriba, Δ_1 y Δ_2 contienen puntos racionales binarios. Si x es una fracción binaria que corresponde a algún punto X en el interior de Δ_1, e y, una fracción binaria correspondiente a un punto Y de Δ_2, entonces $Z = f(X, Y, \infty)$, en virtud del teorema C, será un punto racional binario, al cual le corresponderá la fracción binaria $\dfrac{x+y}{2}$. Consecuentemente, dentro del segmento P_0Q_0 necesariamente habrá algún punto racional binario. Pero, por construcción, este segmento estaba libre de puntos racionales binarios. Así, entonces, al asumir que existe algún segmento PQ que no contenga puntos racionales binarios, hemos llegado a una contradicción, por ahora, en el primero de los tres casos enumerados arriba.

Pasemos al segundo caso.

En esencia, ahora tenemos que mostrar que los puntos racionales binarios no pueden preceder todos a algún punto P de la recta proyectiva cortada. Suponiendo lo contrario, separemos todos los puntos de la recta cortada, en dos clases. En la primera clase pondremos cada punto racional binario y todo otro punto que preceda a algún racional binario. Todos los demás puntos se adjudicarán a la segunda clase. Se obtiene, así, una cortadura de Dedekind. Por el axioma III, existe un punto P_0 que la realiza. En forma similar a como lo hicimos en la discusión del caso precedente, se puede probar, en primer lugar, que si P_0 y P son diferentes, entonces entre ellos no hay puntos racionales binarios, es decir, que no hay puntos racionales binarios en todo lo que va de la recta desde P_0 hasta ∞ y, en segundo lugar, que cada entorno del punto P_0 contiene puntos racionales binarios.

De aquí se puede obtener de inmediato una contradicción.

En efecto, sea X un punto arbitrario de la recta cortada, e Y, el punto que se determina a partir del punto dado X de forma que el par 0, Y separe armónicamente al par X, ∞. Utilizando la notación que ya introdujimos, podemos escribir: $Y = f(X, \infty, 0)$. Pongamos $R_0 = f(P_0, \infty, 0)$; este punto está en el interior del segmento (P_0, ∞), pues 0 precede a P_0. Por el teorema 10, la función $Y = f(X, \infty, 0)$ es continua para $X = P_0$. Por esto, existe un entorno Δ del punto P_0, tal que si X está dentro de Δ, el punto Y estará dentro del segmento (P_0, ∞). El entorno Δ, al igual que todo otro entorno del punto P_0, contiene puntos racionales binarios. Sea x una fracción binaria que corresponde a algún punto X del interior de Δ; Y, el punto racional binario determinado por la fracción binaria $y = 2x$. En virtud del teorema C, el punto X es el centro proyectivo del segmento $(0, Y)$; por ende, Y corresponde a

X en la relación $Y = f(X, \infty, 0)$. Pero como X está dentro de Δ, Y estará en el interior del segmento (P_0, ∞). Así, entonces, este segmento contiene algún punto racional binario, en contra de su definición. La contradicción obtenida nos lleva a rechazar la hipótesis del segundo de los tres casos enumerados arriba.

No tiene sentido estudiar por separado el tercer caso, pues, en líneas generales, no difiere del precedente. Nuestra afirmación queda, así, totalmente demostrada.

§ 97. Hemos comprobado que los puntos racionales binarios son densos sobre toda la recta proyectiva. Pero éstos no agotan todos sus puntos. Existe un conjunto infinito de otros puntos, a los cuales ahora pondremos en correspondencia, por una ley determinada, números reales diferentes de las fracciones binarias.

Sea M un punto cualquiera de la recta proyectiva cortada. Sea $\{P\}$ el conjunto de todos los puntos racionales binarios que preceden al punto M, y $\{Q\}$, el de todos los puntos racionales binarios que siguen a M; además, si el propio M es un punto racional binario, lo incluiremos, por ejemplo, en el primero de estos conjuntos. Denotemos con $\{p\}$ el conjunto de las fracciones binarias que corresponden a puntos de $\{P\}$; con $\{q\}$, el conjunto de las que corresponden a puntos de $\{Q\}$. Entonces:

1) si p es una fracción arbitraria de $\{p\}$ y q, una arbitraria de $\{q\}$, será $p < q$;

2) los conjuntos $\{p\}$ y $\{q\}$, tomados a la vez, forman todo el conjunto de las fracciones racionales binarias.

Por esto, existe un único número x, que es mayor que cualquier número de $\{p\}$ *) y menor que cualquier número de $\{q\}$. Este número, precisamente, se pondrá en correspondencia al punto M.

Así, cada punto de la recta proyectiva cortada obtiene un número bien determinado que le corresponde; en lo sucesivo lo llamaremos su *coordenada proyectiva*.

La correspondencia que acabamos de establecer de una coordenada determinada para cada punto (excepto ∞) posee las siguientes propiedades:

1. A puntos distintos corresponden coordenadas diferentes; además, si el punto M_1, de coordenada x_1, precede al punto M_2, de coordenada x_2, entonces $x_1 < x_2$.

Efectivamente, como el conjunto de puntos racionales binarios es denso en toda la recta proyectiva, entre M_1 y M_2 habrá algún punto racional binario P con coordenada p. Pero, entonces, $x_1 < p < x_2$.

2. Cualquiera que sea el número real x, existe un punto de coordenada x.

En efecto, si x es una fracción binaria, entonces, como se sabe de la discusión precedente, existe un punto racional binario al que le corresponde como coordenada la fracción dada x. Si, en cambio, x es otro número real, para probar nuestra afirmación separamos todas las fracciones binarias en dos conjuntos: $\{p\}$ y $\{q\}$. En el conjunto $\{p\}$ pondremos cada fracción binaria p, si $p < x$; en el $\{q\}$, cada fracción binaria q, si $x < q$. Simultáneamente, podemos imaginarnos el conjunto de los puntos racionales binarios distribuidos en dos conjuntos: $\{P\}$ y $\{Q\}$, formados por los puntos con coordenadas de $\{p\}$ y de $\{q\}$, respectivamente. A continuación, efectuamos en el conjunto de la totalidad de los puntos de la recta proyectiva cortada, una cortadura de Dedekind, poniendo en la primera clase de ésta cada punto de $\{P\}$ y cada otro punto de la recta, si éste precede a algún punto de $\{P\}$; en la segunda clase ponemos todos los demás puntos.

---

*) O bien es el mayor de estos números, si M es un punto racional binario.

Por el axioma III, existe un punto M que realiza esta cortadura de Dedekind. Evidentemente, M sigue a cada punto de $\{p\}$ y precede a todo punto de $\{Q\}$. Por esto, la coordenada del punto M tendrá que ser mayor que cada fracción de $\{p\}$ y menor que cada una de $\{q\}$. Pero tal número puede ser únicamente el número dado x. Consecuentemente, la coordenada de M es x.

3. La correspondencia entre puntos de la recta proyectiva cortada y sus coordenadas es continua, es decir, si una sucesión M_n de puntos tiene como límite el punto M, la coordenada x del punto M será el límite de la sucesión de coordenadas x_n de los puntos M_n, y recíprocamente. En forma más concisa; $M_n \to M$ implica $x_n \to x$, y, recíprocamente, $x_n \to x$ implica $M_n \to M$. Esta propiedad se desprende de que 1) la correspondencia entre los puntos de la recta proyectiva cortada y de sus coordenadas es biyectiva; 2) cada número real es coordenada de algún punto; 3) el orden de disposición de los puntos coincide con el orden de sus coordenadas. En virtud de esto, si x es la coordenada del punto M, entonces a cada entorno de M en la recta proyectiva cortada le corresponde, sobre el eje numérico, un entorno de su coordenada x; a cada entorno de la coordenada x sobre el eje numérico le corresponde un entorno del punto M en la recta proyectiva cortada. Así, si M_n cae dentro de algún entorno del punto M, entonces x_n caerá dentro del entorno correspondiente de x y, recíprocamente, si x_n cae en algún entorno de x, M_n caerá en el entorno correspondiente del punto M. Esto significa que si $M_n \to M$, entonces $x_n \to x$, y si $x_n \to x$, entonces $M_n \to M$.

4. Si M_1 y M_2 son dos puntos arbitrarios de coordenadas x_1 y x_2, entonces el centro proyectivo del segmento M_1M_2 tiene por coordenada al número $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Para demostrarlo, consideremos una sucesion de fracciones binarias $p_1^{(n)}$ que converja a x_1, y otra sucesión de fracciones binarias $p_2^{(n)}$ que converja a x_2. Así, $\lim\limits_{n \to \infty} p_1^{(n)} = x_1$ y $\lim\limits_{n \to \infty} p_2^{(n)} = x_2$. Denotemos con $P_1^{(n)}$ y $P_2^{(n)}$ los puntos racionales binarios de coordenadas $p_1^{(n)}$ y $p_2^{(n)}$, con $c^{(n)}$, la coordenada del centro proyectivo del segmento $P_1^{(n)}$ y $P_2^{(n)}$ y con c, la coordenada del centro proyectivo del segmento M_1M_2. Del teorema 10 sigue que $c = \lim\limits_{n \to \infty} c^{(n)}$. Por otra parte, en virtud del teorema C (que con respecto a los puntos racionales binarios afirma precisamente lo que queremos demostrar ahora para puntos arbitrarios), se tiene: $c^{(n)} = \dfrac{p_1^{(n)} + p_2^{(n)}}{2}$.

De aquí sigue que $c = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{p_1^{(n)} + p_2^{(n)}}{2} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Esto es, precisamente, lo que había que mostrar.

Las primeras tres propiedades mostradas del sistema proyectivo de coordenadas pueden expresarse conjuntamente como sigue: al construir un sistema proyectivo de coordenadas, se realiza una correspondencia biyectiva y continua entre el conjunto de todos los puntos de la recta proyectiva cortada y el de todos los números reales; esta correspondencia, además, es tal que los puntos de la recta y los números que les corresponden (sus coordenadas) se encuentran en iguales relaciones de orden. Cabe observar que estas propiedades las tienen muchos otros sistemas de coordenadas, además del que hemos descrito arriba (el proyectivo).

Por el contrario, la cuarta propiedad es característica para este sistema y desde un comienzo fue puesta como base de su definición. Dicho de otro modo, entre todos los sistemas coordenados posibles sobre la recta proyectiva cortada, el sistema proyectivo se destaca por que en éste las coordenadas del centro proyectivo de un segmento son siempre iguales a la media aritmética de las coordenadas de sus extremos.

Queremos subrayar, para finalizar esta sección, que el sistema proyectivo se determina fijando los tres puntos 0, 1, ∞. Al cambiarlos, se obtienen diferentes sistemas proyectivos de coordenadas, sobre una misma recta.

6. Sistema proyectivo de coordenadas en el plano y en el espacio

§ 98. Supongamos que sobre un plano proyectivo arbitrario se ha fijado alguna recta. La denotaremos con el símbolo ∞, convendremos en llamarla recta impropia (recta del infinito) e imaginaremos que el plano proyectivo se ha cortado a lo largo de esta recta.

Ahora indicaremos un método determinado, por el cual a los puntos del plano proyectivo cortado se les podrá poner en correspondencia biyectiva los pares de números reales. Estos números se denominarán coordenadas proyectivas de los puntos correspondientes.

El sistema proyectivo de coordenadas queda determinado cuando se fijan los siguientes elementos geométricos: algún punto O, al cual llamaremos origen del sistema de coordenadas; dos rectas que pasen por O, una de las cuales se llamará eje x, y la otra, eje y, y además un punto E, que no pertenezca a ninguno de los ejes.

Sean ∞_x e ∞_y los puntos del infinito de los ejes x e y, es decir, los puntos de su intersección con la recta ∞(fig. 111). Proyectemos el punto E desde ∞_y sobre el eje x, y desde ∞_x sobre el eje y; marquemos cada proyección obtenida con el número 1. Hecho esto, introduzcamos sobre el eje x un sistema lineal de coordenadas proyectivas, determinado por los tres puntos 0, 1, ∞_x, en la misma forma a como lo hicimos en la sección precedente; análogamente, introduzcamos un sistema de coordenadas sobre el eje y, partiendo de los puntos 0, 1, ∞_y.

Consideremos ahora un punto M, situado arbitrariamente en el plano proyectivo cortado. Sea M_x la proyección del punto M desde ∞_y sobre el eje x y M_y, la proyección del mismo punto M desde ∞_x sobre el eje y. El punto M_x, en el sistema lineal de coordenadas sobre el eje x, tiene cierta coordenada x; análogamente, el punto M_y tiene sobre el eje y una coordenada y. Llamaremos a los números x e y *coordenadas proyectivas del punto M en el plano.*

Evidentemente, cada punto del eje x tiene coordenadas del tipo $(x, 0)$, cada punto del eje y, coordenadas tipo $(0, y)$; las coordenadas del punto O son $(0, 0)$. El punto E tiene ambas coordenadas iguales a 1; por esto, a veces se lo llama «punto de las unidades».

Pasaremos, ahora, a demostrar la propiedad básica de las coordenadas proyectivas, enunciada en el siguiente teorema.

TEOREMA 12. *En coordenadas proyectivas, cada recta se determina por una ecuación algebraica de primer grado.*

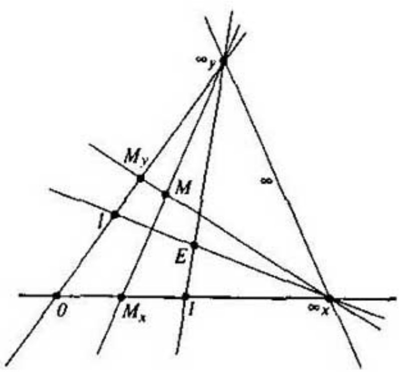


Fig. 111

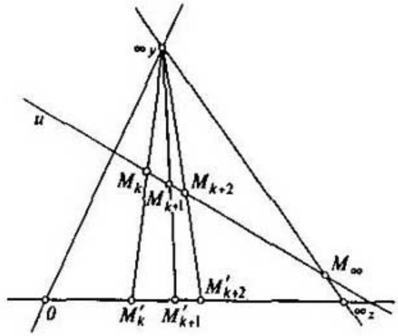


Fig. 112

DEMOSTRACIÓN. Sea dada alguna recta u; fijemos en ella dos puntos arbitrarios M_0 y M_1 y denotemos con M_∞ el punto del infinito de la recta u (es decir, el punto de su intersección con la recta ∞). Partiendo de los tres puntos M_0, M_1 y M_∞, construimos sobre la recta u una escala proyectiva (igual a como lo hicimos en la sección precedente, partiendo de los puntos 0, 1, ∞), con puntos enteros ... , M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, M_3, ... Consideremos tres puntos vecinos M_k, M_{k+1}, M_{k+2} y el punto M_∞ (fig. 112). Por la propiedad básica de la escala proyectiva, el punto M_{k+1} debe ser el centro proyectivo del segmento M_kM_{k+2}, es decir, el par M_k, M_{k+2} debe ser armónicamente separado por el par M_{k+1}, M_∞. Proyectando los cuatro puntos indicados desde ∞_y sobre el eje x, obtenemos como proyecciones, los puntos M'_k, M'_{k+1}, M'_{k+2}, ∞_x. Como la propiedad de conjugación armónica es invariante bajo proyecciones, el par M'_k, M'_{k+2} se separa armónicamente por el par M'_{k+1}, ∞_x. Dicho de otro modo, el punto M'_{k+1} es el centro proyectivo del segmento $M'_kM'_{k+2}$. Por esto, entre las coordenadas de los puntos M_k, M_{k+1}, M_{k+2} tiene lugar la relación

$$\frac{x_k + x_{k+2}}{2} = x_{k+1}. \qquad (*)$$

Análogamente,

$$\frac{y_k + y_{k+2}}{2} = y_{k+1}. \qquad (**)$$

Sea ahora M un punto arbitrario del plano con coordenadas x, y, y $L(M) = Ax + By$ una función lineal de este punto. Escojamos los números A, B, C de forma que se cumplan las igualdades:

$$\left.\begin{aligned} L(M_0) + C = Ax_0 + By_0 + C = 0, \\ L(M_1) + C = Ax_1 + By_1 + C = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

De las relaciones (*) y (**) hallamos:

$$L(M_k) + L(M_{k+2}) - 2L(M_{k+1}) = 0.$$

Consecuentemente, si $L(M_k) + C = 0$ y $L(M_{k+1}) + C = 0$, entonces también $L(M_{k+2}) + C = 0$. Por esto y por consecuencia de las igualdades (***), obtenemos, para todo punto entero M_n:

$$L(M_n) + C = Ax_n + By_n + C = 0.$$

Así, las coordenadas de todos los puntos enteros de la recta u satisfacen la ecuación de primer grado

$$Ax + By + C = 0.$$

No resulta difícil comprobar que esta ecuación es satisfecha no sólo por las coordenadas de los puntos, sino también por las de todos los puntos racionales binarios. En efecto, los puntos racionales binarios fueron introducidos en su oportunidad por un proceso de «densificación» sucesiva de la escala proyectiva; convengamos en llamar «primera densificación» de la escala, a la colección de todos los puntos enteros junto con los centros proyectivos de los segmentos que éstos determinan; «segunda densificación», al conjunto de todos los puntos de la «primera densificación» junto con los centros proyectivos de los segmentos que éstos determinan, etc.

Si el punto $M_{k+1/2}$ es el centro proyectivo del segmento M_kM_{k+1}, para sus coordenadas tendrán lugar las igualdades

$$x_{k+1/2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad y_{y+1/2} = \frac{y_k + y_{k+1}}{2},$$

en virtud de lo cual

$$L(M_k) + L(M_{k+1}) - 2L(M_{k+1/2}) = 0.$$

Por esto, en el caso $L(M_k) + C = 0$ y $L(M_{k+1}) + C = 0$, debe ser $L(M_{k+1/2}) + C = 0$. Así, la ecuación $Ax + By + C = 0$ es satisfecha por las coordenadas de todos los puntos de la primera densificación; razonando análogamente, se comprueba que también es satisfecha por todos los puntos de la segunda densificación, etc. Como la función $Ax + By + C = 0$ es continua e igual a cero en los puntos de un conjunto denso sobre la recta u, esta función será igual a cero en todos los puntos de dicha recta. En otras palabras, las coordenadas de cada punto de la recta u satisfacen la ecuación $Ax + By + C = 0$; por otra parte, es evidente que las coordenadas de los puntos de la recta u agotan todos los pares (x, y) de soluciones de esta ecuación, por consecuencia, ésta no es otra que la ecuación de la recta u. Se aprecia que se trata de una ecuación algebraica de primer grado; nuestra afirmación queda, así, demostrada.

Conjuntamente con la ecuación

$$Ax + By + C = 0,$$

que llamaremos *ecuación general de la recta*, utilizaremos también sus siguientes formas especiales:

1) Ecuación despejada con respecto a alguna de las coordenadas, por ejemplo, y:

$$y = kx + l;$$

por su aspecto exterior, es idéntica a la ecuación con coeficiente angular, que se utiliza con frecuencia en la geometría analítica del plano euclidiano. Pero, por supues-

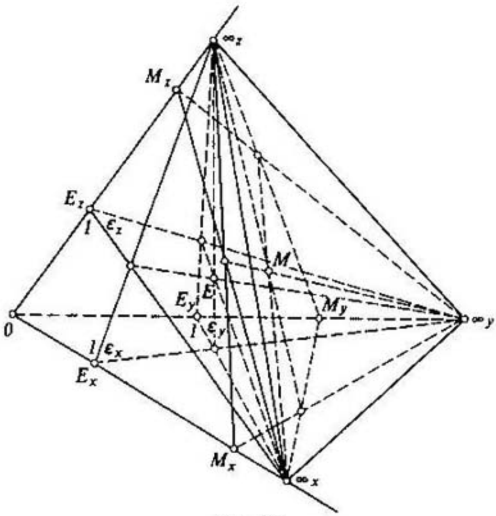


Fig. 113

to, ahora no cabe llamar al parámetro k coeficiente ANGULAR de la recta, pues en la geometría proyectiva faltan todos los conceptos métricos, entre ellos, el de magnitud de un ángulo.

2) Ecuación que contiene las coordenadas x_0, y_0 de alguno de los puntos de la recta:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

3) La ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

por su escritura coincide con la llamada ecuación segmentaria de la recta, bien conocida en la geometría analítica elemental. Pero ahora debemos concebir a y b no como las longitudes de los segmentos que la recta determina sobre los ejes, sino como las coordenadas proyectivas de los puntos de intersección de la recta con los ejes.

§ 99. Pasemos al estudio de las coordenadas proyectivas en el espacio.

Supongamos fijado algún plano en el espacio proyectivo; lo denotaremos con el símbolo ∞, convendremos en llamarlo plano del infinito (plano impropio) y nos imaginaremos que el espacio ha sido cortado a lo largo de este plano.

En el espacio proyectivo cortado introduciremos un sistema de coordenadas, fijando algún punto O, que denominaremos origen del sistema; tres rectas no coplanares que pasen por O y que llamaremos eje x, eje y y eje z, respectivamente, y además un punto E, que no pertenezca a ninguno de los tres planos determinados por los ejes, tomados dos a dos (fig. 113).

Sean ∞_x, ∞_y, ∞_z los puntos del infinito de los ejes, es decir, los puntos de intersección de estos ejes con el plano ∞. Sea ε_x el plano determinado por los puntos E, ∞_y, ∞_z; ε_y, el que se determina por los puntos E, ∞_x, ∞_z; ε_z, el plano determinado por los puntos E, ∞_x, ∞_y. El plano ε_x intersecará el eje x en algún punto E_x; el plano ε_y cortará el eje y en cierto punto E_y, y el plano ε_z intersecará el eje z en algún punto E_z; marquemos cada punto obtenido con el número 1.

Hecho esto, introduzcamos en el eje x un sistema lineal de coordenadas proyectivas, determinado por los tres puntos O, 1, ∞_x; análogamente, introduzcamos sistemas de coordenadas en los ejes y y z, partiendo de los puntos O, 1, ∞_y y O, 1, ∞_z, respectivamente.

Consideremos, ahora, un punto M, situado arbitrariamente en el espacio proyectivo cortado.

Sea M_x el punto de intersección del plano $M\infty_y\infty_z$ con el eje x; M_y, el punto de intersección del plano $M\infty_x\infty_z$ con el eje y, y M_z, el punto de corte del plano $M\infty_x\infty_y$ con el eje z. El punto M_x tiene cierta coordenada x en el sistema lineal de coordenadas sobre el eje x; análogamente, los puntos M_y sobre el eje y y M_z sobre el z, tienen coordenadas y y z, respectivamente.

Llamaremos a los números x, y, z *coordenadas proyectivas del punto M en el espacio*. Ahora probaremos la propiedad básica de las coordenadas proyectivas, enunciada en el siguiente teorema.

TEOREMA 13. *En coordenadas proyectivas, cada plano se determina por una ecuación algebraica de primer grado.*

DEMOSTRACIÓN. A fin de facilitar la demostración de este teorema, nos limitaremos a deducir únicamente las ecuaciones de los planos que no pasan por el origen de coordenadas o por alguno de los puntos ∞_x, ∞_y, ∞_z.

Sea dado algún plano α, que interseca los ejes de coordenadas en los puntos A, B, C. Si estos puntos tienen coordenadas a, b, c respectivamente, con la restricción impuesta arriba será $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Demostraremos que el plano α tiene ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (*)$$

Consideremos sobre el plano α un punto M arbitrario; sean $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ sus coordenadas. Denotemos con μ el plano determinado por los puntos M, ∞_y, ∞_z; con R, el punto de intersección del plano μ con el eje x; con P y Q, los puntos en los cuales la recta de intersección de los planos α y μ corta los planos Oxy y Oxz (fig. 114). Evidentemente, la recta PQ contiene el punto M.

En el sistema proyectivo de coordenadas sobre el plano $R\infty_y\infty_z$, la recta PQ tiene una ecuación de tipo

$$\frac{y}{p} + \frac{z}{q} = 1.$$

Esta ecuación debe satisfacerse por las coordenadas $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$, pues el punto M pertenece a la recta PQ. Por consecuencia, tenemos:

$$\frac{\bar{y}}{p} + \frac{\bar{z}}{q} = 1. \qquad (**)$$

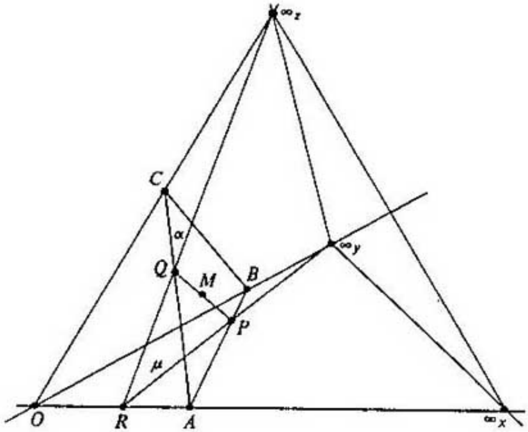


Fig. 114

Determinemos ahora los parámetros p y q. Con este fin, obsérvese que la ecuación de la recta AB en las coordenadas proyectivas del plano Oxy es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Pero las coordenadas proyectivas del punto P en el plano Oxy son los números $\bar{x}$, p (y en el espacio, los números $\bar{x}$, p, 0). Por esto, tiene lugar la relación

$$\frac{\bar{x}}{a} + \frac{p}{b} = 1,$$

de donde

$$p = b\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right).$$

Análogamente, de la ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1,$$

que determina la recta AC en el plano Oxz, para $\bar{x} = x$, $z = q$, se halla:

$$q = c\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right).$$

Para estos valores de p y q, la igualdad (**) nos da:

$$\frac{\bar{y}}{b\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)} + \frac{\bar{z}}{c\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)} = 1,$$

o bien
$$\frac{\bar{x}}{a}+\frac{\bar{y}}{b}+\frac{\bar{z}}{c} = 1.$$
Así, pués, las coordenadas de cualquier punto del plano α satisfacen la ecuación (*), quedando demostrado lo que se proponía*).

Dejamos que el lector deduzca las formas particulares de la ecuación del plano, en el caso en que éste contenga el origen, o bien los puntos impropios de los ejes. Todos ellos quedan abarcados por la fórmula general
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Por cuanto el plano queda determinado por una ecuación de primer grado, la recta en el espacio puede ser dada por medio de dos ecuaciones de tipo
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$
Estas ecuaciones, mediante transformaciones algebraicas, pueden reducirse a la forma «canónica»
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$
donde x_0, y_0, z_0 son las coordenadas de algún punto de la recta.

§ 100. Hasta ahora hemos construido un sistema de coordenadas en la recta proyectiva cortada, en el plano proyectivo cortado y en el espacio proyectivo cortado. Dicho de otro modo, cuando considerábamos la recta proyectiva, poníamos a sus puntos en correspondencia coordenadas, de forma que un punto (que era denotado con el símbolo ∞) no obtenía coordenada alguna. Al considerar el plano proyectivo y el espacio proyectivo, a sus puntos les poníamos en correspondencia pares y ternas de coordenadas, respectivamente, de manera que los puntos de cierta recta —y, en el espacio, de cierto plano— (denotados con el símbolo ∞), no recibían ninguna coordenada.

A fin de efectuar una aritmetización global de la recta, del plano y del espacio proyectivos, es necesario utilizar las COORDENADAS HOMOGÉNEAS. Describiremos, ante todo, el sistema de coordenadas homogéneas de la recta proyectiva.

Sea dada cierta recta proyectiva a. Fijemos sobre ésta tres puntos de manera arbitraria; indiquemos dos de ellos con los números 0 y 1, y el tercero, con el símbolo ∞. Introduzcamos seguidamente en la recta a, el sistema proyectivo de coordenadas determinado por los puntos 0, 1, ∞. En este sistema, cualquier punto de la recta posee una coordenada bien determinada, a excepción del punto ∞. Sea M un punto cualquiera de la recta a, de coordenada x. Diremos que dos números x_1 y x_2, *que no son simultáneamente iguales a* 0, son las coordenadas homogéneas del punto M, si la razón $x_1 : x_2$ es igual a x. Al punto ∞ le ponemos en correspondencia las coordenadas homogéneas x_1, x_2, con la condición $x_2 = 0$. El sistema de coordenadas homogéneas así construido posee las propiedades siguientes:

1) Cada punto de la recta proyectiva tiene coordenadas homogéneas.

---

*) Además tendríamos que mostrar que las coordenadas de cualquier punto que no esté sobre el plano α no satisfacen la ecuación (*); pero esto sigue directamente de observar que en dicha ecuación cada coordenada se puede despejar de manera única.

2) Si x_1, x_2 son coordenadas homogéneas del punto M, también ρx_1, ρx_2, siendo ρ cualquier número diferente de 0, son coordenadas homogéneas del punto M.

3) A distintos puntos le corresponden siempre cocientes diferentes de sus coordenadas homogéneas.

4) Si $x_1 \to x_1^0$, $x_2 \to x_2^0$, entonces el punto variable M de coordenadas homogéneas x_1, x_2 tiene por límite el punto M^0, de coordenadas homogéneas x_1^0, x_2^0.

Al operar con las coordenadas homogéneas, es de particular importancia tener una buena idea del significado de la segunda propiedad. Precisamente, cada punto de la recta proyectiva tiene un número infinito de pares de coordenadas homogéneas, las cuales, entonces, no quedan determinadas de manera única por el punto que les corresponde: queda determinado su cociente. Escogiendo adecuadamente el factor ρ, se puede conseguir que una de las coordenadas ρx_1, ρx_2 sea igual a cualquier número distinto de 0 (por ejemplo, a la unidad). Así, serán coordenadas homogéneas de los puntos 0 e ∞, que ahora convendremos en denotar con A_1 y A_2, los pares de números (0, 1) y (1, 0). Como coordenadas homogéneas del punto 1, que ahora denotaremos con E, se puede tomar el par (1, 1). Evidentemente, las coordenadas homogéneas sobre la recta proyectiva quedan determinadas al fijar los puntos A_1 (0, 1), A_2 (1, 0) y E (1, 1).

§ 101. A fin de efectuar una aritmetización global del plano proyectivo, introducimos en éste, ante todo, un sistema de coordenadas proyectivas no homogéneas, con origen en el punto O, ejes Ox, Oy, con punto de unidades E y recta impropia ∞ (denotaremos con ∞_x e ∞_y los puntos impropios de los ejes). Entonces, todos los puntos del plano proyectivo, a excepción de los puntos de la recta ∞, poseerán coordenadas proyectivas.

A continuación introducimos en el plano proyectivo coordenadas homogéneas; ante todo, lo haremos para los puntos que no pertenecen a la recta ∞. Si el punto M no está sobre la recta ∞, diremos que sus coordenadas homogéneas son tres números x_1, x_2, x_3, QUE NO SON IGUALES A CERO A LA VEZ, y tales que $x_1 : x_3 = x$, $x_2 : x_3 = y$, siendo x, y las coordenadas proyectivas (no homogéneas) del punto M. Si el punto M pertenece a la recta ∞, entonces carece de coordenadas no homogéneas, por lo cual la definición precedente para sus coordenadas homogéneas no es aplicable. Diremos que los tres números x_1, x_2, x_3, son coordenadas homogéneas del punto M_∞, situado sobre la recta ∞, si se cumplen las condiciones:

1) $x_3 = 0$;

2) al menos uno de los dos números x_1, x_2 es diferente de 0;

3) la razón $x_1 : x_2$ es igual al cociente $B : - A$, donde A y B son los coeficientes de la ecuación

$$Ax + BY + C = 0$$

de CUALQUIER recta que pase por el punto M_∞; es decir, x_1 y x_2 daben ser tales que

$$Ax_1 + Bx_2 = 0.$$

Demostremos que la tercera condición es correcta; precisamente, mostremos que la razón $B : - A$ no depende de la elección de la recta que pase por el punto M_∞.

Sean

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

las ecuaciones de dos rectas que pasen por M_∞. Ya que ambas tienen por único punto común a M_∞, y a este punto, por estar en la recta ∞, no le corresponden ningunos números como coordenadas no homogéneas, entonces las ecuaciones (*) tienen que ser incompatibles. Por esto, es necesario que

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde $B_1 : -A_1 = B_2 : -A_2$. Esto prueba que la tercera condición es correcta.

De la definición de coordenadas homogéneas sigue que cualquiera que sea el punto M que pertenezca a la recta $Ax + By + C = 0$, sus coordenadas homogéneas satisfarán la relación $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$. Llamaremos a esta relación, ecuación de la recta en coordenadas homogéneas y, cambiando la notación de los coeficientes A, B, C por u_1, u_2, u_3, la escribiremos en la forma:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

(ésta no contiene término independiente, es decir, es homogénea; este hecho es característico de las coordenadas homogéneas).

Las propiedades básicas de las coordenadas homogéneas en el plano proyectivo son análogas a las que poseen las coordenadas proyectivas en la recta; precisamente:

1) Cada punto del plano proyectivo posee coordenadas homogéneas.

2) Si x_1, x_2, x_3 son coordenadas homogéneas del punto M, también ρx_1, ρx_2, ρx_3 (donde ρ es cualquier número diferente de 0) son coordenadas homogéneas del punto M.

3) A puntos distintos les corresponden siempre cocientes diferentes $x_1 : x_2 : x_3$ de sus coordenadas homogéneas.

4) Si $x_1 \to x_1^0, x_2 \to x_2^0, x_3 \to x_3^0$, el punto variable M de coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3 tiene por límite el punto M^0 de coordenadas homogéneas x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Es importante recalcar que para ningún punto las tres coordenadas homogéneas se anulan simultáneamente. Cualquiera de las tres coordenadas ρx_1, ρx_2, ρx_3 que sea diferente de 0 puede hacerse igual a la unidad, escogiendo adecuadamente el factor ρ. Por ejemplo, para el punto O pueden tomarse, como coordenadas homogéneas, los tres números 0, 0, 1; para el punto ∞_x, los tres números 1, 0, 0; para el punto ∞_y, los tres números 0, 1, 0, y para el punto E, los tres números 1, 1, 1. En lo que sigue escribiremos A_1, A_2, A_3 en lugar de ∞_x, ∞_y y 0, y llamaremos a estos puntos, *vértices del triedro de coordenadas*. Evidentemente, el triedro de coordenadas $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$ y el punto de las unidades E (1, 1, 1), una vez escogidos, determinan el sistema de coordenadas homogéneas en el plano proyectivo. La elección de estos cuatro puntos debe estar sujeta a una única condición: ninguna terna de ellos debe pertenecer a una misma recta.

La recta A_1A_2 del plano proyectivo (que antes se denotaba con el símbolo ∞) contiene los puntos de tercera coordenada nula. La relación $x_3 = 0$ no es otra cosa que la ecuación de la recta A_1A_2. Las rectas A_2A_3 y A_1A_3 tienen ecuaciones $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, respectivamente.

§ 102. La construcción de las coordenadas homogéneas en el espacio proyectivo se efectúa de un modo plenamente análogo a la construcción sobre el plano recién descrita. Primero, fijando los ejes Ox, Oy, Oz y el plano ∞, debe introducirse un sistema de coordenadas no homogéneas proyectivas. En este sistema tienen coordenadas todos los puntos del espacio, excepto los del plano ∞. Luego se determinan las coordenadas homogéneas. Si el punto M no pertenece al plano ∞, entonces se llaman coordenadas homogéneas del mismo CUATRO números cualesquiera x_1, x_2, x_3, x_4 que *sean desiguales a cero a la vez*, tales que $x_1 : x_4 = x$, $x_2 : x_4 = y$, $x_3 : x_4 = z$, donde x, y, z son coordenadas no homogéneas del punto M.

Si el punto M_∞ pertenece al plano ∞, entonces sus coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, x_4 vienen determinadas por las siguientes condiciones:

1) $x_4 = 0$;

2) entre tres números x_1, x_2, x_3 hay al menos uno diferente de cero;

3) la relación[*] $x_1 : x_2 : x_3$ es igual a la $m : n : p$, donde m, n, p son parámetros en las ecuaciones

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

de cualquier recta que pase por el punto M_∞.

Demostremos que la tercera condición es admisible, a saber, probemos que la relación $m : n : p$ no depende de la elección de la recta que pasa por el punto M_∞.

Sean

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (*)$$

y

$$\frac{x' - x_0'}{m'} = \frac{y' - y_0'}{n'} = \frac{z' - z_0'}{p'} \qquad (**)$$

ecuaciones de dos rectas que pasan por el punto M_∞ del plano ∞. Debido a que ambas rectas pasan por un mismo punto, debe existir un plano

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (\alpha)$$

que contenga las dos rectas. Esta circunstancia impone cierta restricción analítica sobre los parámetros de las ecuaciones (*) y (**). Para obtener dicha restricción, designemos con t cada una de las relaciones iguales (*) y con t', cada una de las relaciones iguales (**). Entonces, en vez de (*) y (**) se podrá escribir los dos sistemas siguientes de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + mt, & & x' = x_0' + m't', \\ y &= y_0 + nt, & \text{y}\quad & y' = y_0' + n't', \\ z &= z_0 + pt & & z' = z_0' + p't'. \end{aligned} \qquad (\beta)$$

Si la primera recta se halla en el plano (α), entonces las coordenadas de cada uno de sus puntos deben satisfacer la ecuación del referido plano, por eso la igualdad

$$Ax + By + Cz + D = (Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$$

debe verificarse para cualquier t. Consiguientemente,

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

---

[*] Véase la llamada al comienzo del § 71 (pág. 175).

Dado que la segunda recta también está en el plano (α), análogamente tendrá lugar

$$Am' + Bn' + Cp' = 0, \qquad Ax'_0 + By'_0 + Cz'_0 + D = 0.$$

De aquí tenemos un sistema de relaciones

$$\left.\begin{aligned} A(x_0 - x'_0) + B(y_0 - y'_0) + C(z_0 - z'_0) &= 0, \\ Am \qquad + Bn \qquad + Cp \qquad &= 0, \\ Am' \qquad + Bn' \qquad + Cp' \qquad &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

que puede estimarse como sistema de ecuaciones homogéneas con las incógnitas A, B, C. Dicho sistema tiene soluciones no triviales, puesto que el la ecuación del plano (α) los tres coeficientes A, B, C no pueden ser iguales a cero. Así que el sistema (γ) es compatible de un modo no trivial, a consecuencia de lo cual

$$\begin{vmatrix} x_0 - x'_0 & y_0 - y'_0 & z_0 - z'_0 \\ m & n & p \\ m' & n' & p' \end{vmatrix} = 0. \qquad (\delta)$$

Al observarse precisamente esta condición, las dos rectas se hallan en un mismo plano.

Ahora es fácil mostrar que si las dos rectas en cuestión tienen un punto común sobre el plano ∞, entonces m, n, p y m', n', p' son proporcionales. En efecto, por cuanto el punto común de las referidas rectas está sobre el plano ∞, el mismo no posee coordenadas no homogéneas. Por ende, cualesquiera que sean los valores de t y t', las relaciones (β) no podrán conducir a las igualdades $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Si suponemos tales igualdades, entonces tendremos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} mt - m't' + (x_0 - x'_0) &= 0, \\ nt - n't' + (y_0 - y'_0) &= 0, \\ pt - p't' + (z_0 - z'_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

respecto a los números t, $-t'$ y 1. Debido a que el determinante (δ) de este sistema es igual a cero, una de las ecuaciones es un corolario lineal de otras dos. Si a la par de esto al menos uno de los tres determinantes $\begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} n & n' \\ p & p' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} p & p' \\ m & m' \end{vmatrix}$ difiere de cero, entonces el sistema (ε) admite soluciones, lo cual, según observamos más arriba, es imposible. De tal manera,

$$\begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} n & n' \\ p & p' \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} p & p' \\ m & m' \end{vmatrix} = 0,$$

de donde

$$m : n : p = m' : n' : p'.$$

Con esto mismo queda demostrado lo que se requería.

Así pues, determinamos las coordenadas homogéneas para todos los puntos del espacio proyectivo, sin excluir ninguno. Las propiedades básicas de dichas coordenadas son plenamente análogas a las enumeradas para las coordenadas homogéneas sobre la recta y sobre el plano.

Una propiedad bien importante de las coordenadas homogéneas que introdujimos, consiste en que cualquiera que sea el punto M perteneciente a un plano determinado en coordenadas no homogéneas por la ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

las coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, x_4 del punto M siempre satisfacen la relación

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0. \tag{2}$$

Efectivamente, si el punto M no se halla en el plano ∞, entonces $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x}$ $(x_4 \neq 0)$, y de (1) se infiere inmediatamente (2); y si el punto M pertenece al plano ∞, entonces $x_4 = 0, x_1 : x_2 : x_3 = m : n : p$, donde m, n, p son parámetros de las ecuaciones de cualquier recta que pase por el punto M. Más, según vimos más arriba, entre A, B, C y m, n, p se verifica la dependencia

$$Am + Bn + Cp = 0$$

lo cual, a consecuencia de las relaciones $x_1 : x_2 : x_3 = m : n : p$, da:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

Y esta relación, si $x_4 = 0$, coincide con la igualdad (2).

La dependencia (2) entre las coordenadas homogéneas de puntos del plano la llamaremos ecuación de dicho plano en coordenadas homogéneas. Cambiando las notaciones de coeficientes de la ecuación del plano, en lo ulterior la escribiremos en forma de

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

Según la definición de las coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, x_4 del punto arbitrario M, al menos una de ellas difiere de cero; haciendo variar una misma cantidad de veces las cuatro coordenadas, se puede igualar a uno la coordenada diferente de cero. Por ejemplo, para el punto O, a título de coordenadas homogéneas, se puede señalar cuatro números 0, 0, 0, 1, para el punto ∞_x, cuatro números 1, 0, 0, 0, para el ∞_y, cuatro números 0, 1, 0, 0, para el ∞_z, cuatro números 0, 0, 1, 0 y para el E, cuatro números 1, 1, 1, 1. En lo sucesivo, en vez de ∞_x, ∞_y, ∞_z y O escribiremos A_1, A_2, A_3, A_4, llamando a estos puntos *vértices del tetraedro de coordenadas.* Evidentemente, el sistema de coordenadas homogéneas en el espacio proyectivo se determina por la elección del tetraedro de coordenadas A_1 (1, 0, 0, 0), A_2 (0, 1, 0, 0), A_3 (0, 0, 1, 0), A_4 (0, 0, 0, 1) y del punto de unidades E (1, 1, 1, 1). La elección de los referidos cinco puntos debe obedecer a una sola condición: ningunos cuatro de ellos deben estar en un mismo plano.

La cuestión de cómo varían las coordenadas homogéneas al cambiar los puntos determinantes, se resuelve en el § 114, donde serán deducidas las fórmulas de transformación de coordenadas homogéneas.

7. Correspondencia proyectiva entre elementos de las variedades unidimensionales

§ 103. En la geometría proyectiva es un concepto fundamental el de aplicación proyectiva. Entre los puntos de dos rectas proyectivas a y a', sea establecida alguna correspondencia biunívoca. Si M es un punto arbitrario de la recta a, M', su punto correspondiente de la recta a', entonces llamaremos al punto M' función del punto M empleando el símbolo usual de la dependencia funcional: $M' = f(M)$. Está claro que el punto M, a su vez, puede considerarse como función del punto M' : $M = \varphi(M')$; conviene llamar recíprocamente inversas las funciones $f(M)$ y $\varphi(M')$.

La correspondencia biunívoca $M' = f(M)$ entre los puntos de dos rectas proyectivas a y a' se llama PROYECTIVA *si a los pares armónicos conjugados de puntos M, N y P, Q de la recta a siempre les corresponden también pares armónicos conjugados de puntos M', N' y P', Q' de la recta a'.*

La representación sobre la recta a' de los puntos $M' = f(M)$ que correspondan proyectivamente a los puntos M de la recta a, se llama también *aplicación proyectiva* de la recta a sobre la a'. En el caso de coincidir a y a', se dice que está dada la aplicación proyectiva de la recta sobre sí misma.

Un importante caso particular de la aplicación proyectiva de una recta sobre otra es la aplicación determinada por la proyección central. Sean a y a' dos rectas situadas en el plano α, S, algún punto del referido plano que no pertenece a ninguna de las dos rectas a y a'. Consideraremos como imagen del punto arbitrario M de la recta a al punto $M' = f(M)$ de la recta a', situado junto con el punto M sobre una recta que parte de S. Tal aplicación $M' = f(M)$ es proyectiva. En rigor, conforme al teorema 6 del § 86, si M_1, M_2 y M_3, M_4 son pares armónicos conjugados de puntos de la recta a, tomados arbitrariamente, entonces los pares de puntos correspondientes M_1', M_2' y M_3', M_4' de la recta a' serán también armónicos conjugados. Precisamente esta circunstancia sirve de rasgo característico de la aplicación proyectiva.

De tal suerte, la aplicación proyectiva puede considerarse como generalización de la proyección central.

Ahora vamos a demostrar dos teoremas sencillos.

TEOREMA 14a. *Si la aplicación $M' = f(M)$ de la recta a sobre la a' es proyectiva, entonces la aplicación inversa de ella $M = \varphi(M')$ es también proyectiva.*

La demostración es bien sencilla. En efecto, supongamos que la aplicación $M = \varphi(M')$ no es proyectiva. Entonces, sobre la recta a' existen dos pares armónicos conjugados de puntos A', B' y C', D' cuyos pares correspondientes sobre la recta a son dos pares $A = \varphi(A')$, $B = \varphi(B')$ y $C = \varphi(C')$, $D = \varphi(D')$ que no guardan relación de conjugación armónica. Designemos con D^* el punto de la recta a, que junto con el punto C constituye un par C, D^* armónico conjugado con el par A, B. Por lo visto, los puntos D y D^* son diferentes.

Sea $D^{*\prime} = f(D^*)$. Como la aplicación $M' = f(M)$ es biyectiva, D' y $D^{*\prime}$ también serán diferentes. Dada la proyectividad de la aplicación $M' = f(M)$, los pares de puntos A', B' y C', $D^{*\prime}$ son armónicos conjugados. De tal forma, para tres puntos A', B', C' resultan obtenidos cuartos puntos armónicos D' y $D^{*\prime}$ diferentes, lo cual es imposible, según sabemos. La contradicción deducida prueba el teorema.

TEOREMA 14b. *Si $M' = f_1(M)$ es una aplicación proyectiva de la recta a sobre la a', $M'' = f_2(M')$ es una aplicación proyectiva de la recta a' sobre la a'' (en particular, las tres rectas a, a', a'' pueden coincidir una con otra), entonces la aplicación $M'' = f_2 f_1(M)$ de la recta a sobre la a'' es también proyectiva.*

Se puede decir en otros términos: *la aplicación resultante de dos aplicaciones proyectivas sucesivas es proyectiva.*

La afirmación enunciada de hecho es evidente. Efectivamente, dado que cada aplicación f_1 y f_2 conserva la conjugación armónica de los pares de puntos, la aplicación resultante de su realización sucesiva también conserva la conjugación armónica de los pares de puntos y, por consiguiente, es proyectiva.

La propiedad del conjunto de aplicaciones proyectivas expresada por el teorema 14b, se llama propiedad *de grupo* (es útil que el lector vuelva al § 19 donde se trata de la propiedad de grupo de un conjunto de movimientos).

En la geometría elemental el sistema de puntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sobre alguna recta a se considera equivalente al sistema de puntos $M'_1, M'_2, \ldots, M'_n$ sobre la misma recta o sobre una otra recta a', si mediante cierto movimiento se puede hacer coincidir el primer sistema con el segundo. Análogamente a esto, en la geometría proyectiva el sistema de puntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de la recta a se estima equivalente al sistema de puntos $M'_1, M'_2, \ldots, M'_n$ de la recta a', si existe una aplicación proyectiva de la recta a sobre la a', que haga pasar todo punto M_i al punto M'_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

En particular, el sistema $M_1, M_2, \ldots, M_n$ equivale (a menudo diremos también: *equivale proyectivamente*) al sistema $M'_1, M'_2, \ldots, M'_n$ si a consecuencia de una serie de proyecciones centrales, entre las cuales la primera es la proyección de la recta a sobre la a_1, la segunda es la proyección de la recta a_1 sobre la $a_2, \ldots$, la última es la proyección de la recta a_{n+1} sobre la recta a', todo punto M_i se aplica en el punto M'_i.

De los teoremas 14a y 14b se sigue que:

1) si un sistema de puntos rectilíneamente ubicados equivale proyectivamente a un otro sistema, entonces el segundo equivale proyectivamente al primero;

2) si dos sistemas equivalen proyectivamente a un tercer sistema, entonces los mismos equivalen proyectivamente uno a otro.

La aplicación proyectiva es un concepto fundamental de la geometría proyectiva precisamente porque mediante ella se determina la equivalencia proyectiva de dos sistemas de puntos. En este sentido la misma puede compararse con el concepto de traslación (movimiento) congruente de la geometría elemental.

En los párrafos inmediatos las aplicaciones proyectivas serán objeto independiente de nuestra investigación detenida.

En primer lugar, vamos a abordar la cuestión de mediante qué datos se determina unívocamente la correspondencia proyectiva.

El problema planteado lo resuelve el teorema de Staudt. Este será formulado y demostrado más abajo, después de que se establezcan los tres lemas subsiguientes necesarios para su demostración.

LEMA 1. *Sean dados sobre la recta proyectiva a dos pares de puntos M, N y P, Q. Para que sobre a exista un tercer par armónico conjugado tanto con el par M, N como con el P, Q, es nesesario y suficiente que los pares M, N y P, Q no separen uno a otro.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que existe el par X, Y que separa armónicamente al par M, N y al P, Q. Introduzcamos sobre la recta a un sistema proyectivo de coordenadas (no homogéneas) y atribuyamos el papel del punto nulo al X, el papel del punto infinitamente alejado, al Y, eligiendo arbitrariamente el punto de unidades. El punto X (punto nulo del sistema) es el centro proyectivo del segmento MN. Por ende, si x_1 y x_2 son las coordenadas de los puntos M y N, entonces $x_1 + x_2 = 0$. Consiguientemente, x_1 y x_2, siendo diferentes en signo, tienen un valor absoluto común x. Por esta misma razón las coordenadas de los puntos P, Q tienen un valor absoluto común y. Sabemos que en el sistema proyectivo de coordenadas sobre la recta proyectiva cortada, los puntos y las coordenadas correspondientes a ellos, están sujetos a unas mismas relaciones de orden. Por eso, si $x < y$, entonces los puntos M, N son interiores del segmento PQ, si $y < x$, entonces los puntos P, Q están dentro del segmento MN. Mas, en ambos casos los pares M, N y P, Q no separan uno a otro.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea dado que M, N y P, Q no están separados. Probemos que en este caso siempre existe un par X, Y que separa armónicamente tanto al par M, N como al P, Q. Debido a que los pares M, N y P, Q no separan uno a otro, ambos puntos P, Q son interiores a uno de los dos segmentos en que la recta proyectiva queda separada por M, N. Dentro de este segmento, tomemos un punto arbitrario E e introduzcamos sobre la recta proyectiva un sistema de coordenadas no homogéneas, adoptando al punto M por el punto nulo, al punto N, por un punto infinitamente alejado, al punto E, por el punto de unidades. Sean p, q las coordenadas de los puntos P, Q. Debido a la elección referida del punto de unidades, los números p y q son positivos. Luego, sea $y = f(x)$ la dependencia entre las coordenadas de los puntos X, Y que separan armónicamente al par P, Q. La función $y = f(x)$ es indefinida para $x = \dfrac{p+q}{2}$, pues $\dfrac{p+q}{2}$ es la coordenada del centro proyectivo del segmento PQ que es el cuarto armónico de los tres puntos P, Q, ∞; por ende, si $x = \dfrac{p+q}{2}$, se tiene: $y = f(x) = \infty$. Para los demás valores de x, la función $y = f(x)$ posee un determinado valor numérico, siendo continua; esto último se infiere del teorema 11 y de la propiedad 3 de las coordenadas proyectivas indicada en el § 97. Ahora hagamos constar que para $x \to \dfrac{p+q}{2}$ existirá $y \to \infty$, y, además, si $x \to \dfrac{p+q}{2}$ y $x < \dfrac{p+q}{2}$ entonces $y \to -\infty$; si $x = p$, entonces $y = p$ (véase la nota al final del § 93) y, por tanto, $y > 0$. Supongamos que las notaciones están elegidas de modo $p < q$; entonces, al variar x de p a $\dfrac{p+q}{2}$, la función $\varphi(x) = x + f(x)$, permaneciendo continua, varía de valores positivos a valores negativos. A consecuencia de esto, debe existir tal valor de x, que $x + f(x) = x + y = 0$. Sean X e Y puntos con las coordenadas precisamente de tal género x e y. Estas determinan el segmento XY con el centro proyectivo situado en el punto nulo, es decir, en el punto M. Expresado en otros términos, el par X, Y separa armónicamente al par M, N (hagamos recordar que el punto N está adoptado como un punto infinitamente alejado). Dado que según la definición de la función $y = f(x)$, el par X, Y al mismo tiempo separa armónicamente al par P, Q, entonces precisamente el mismo es el par de puntos buscado.

LEMA 2. *La separación de los pares de puntos es una propiedad invariante respecto a las aplicaciones proyectivas.*

Este lema se infiere inmediatamente del precedente. En rigor, sean dados sobre la recta a dos pares de puntos M, N y P, Q; supongamos, por ejemplo, que los mismos no están separados. Entonces, según el lema 1, debe existir el par X, Y armónico conjugado tanto con el par M, N como con el P, Q. A causa de la aplicación proyectiva de la recta a sobre alguna recta a', los puntos M, N, P, Q, y X, Y se aplicarán en los puntos M', N', P', Q' y X', Y', resultando armónico conjugado el par X', Y' tanto con el par M', N' como con el P', Q' (esto se deduce inmediatamente de la definición de la aplicación proyectiva). Pero entonces, según el lema 1, los pares M'. N', y P', Q' no deben estar separados. Así pues, vemos que en la aplicación proyectiva los pares no separados pasan a pares no separados. Mas entonces, manifiestamente, los pares separados siempre pasan a pares separados.

En efecto, si los pares separados pudieran pasar a pares no separados, entonces, en la aplicación inversa (que es también proyectiva; véase el teorema 14a) los pares no separados pasarían a pares separados, pero tenemos probado que esto es imposible. El lema está demostrado.

El lema siguiente tiene un carácter puramente analítico.

LEMA 3. *Sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos funciones definidas para cualquier x, $-\infty < x < +\infty$; en cuanto a $f(x)$ se sabe que es monótona, y en cuanto a $\varphi(x)$, que es continua. De aquí, si $f(x)$ y $\varphi(x)$ coinciden en un conjunto de puntos siempre denso de la recta numérica, entonces las mismas coinciden idénticamente.*

Designemos con A un conjunto de puntos siempre denso de la recta numérica, sobre el cual, según el enunciado, las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ adoptan valores iguales, designando con x_0 un punto arbitrario exterior al conjunto A. Tenemos que demostrar que $f(x_0) = \varphi(x_0)$. Supongamos que $f(x_0) > \varphi(x_0)$. Como el conjunto A es siempre denso, podemos elegir en él dos puntos x_1 y x_2 así que para $x_1 < x_0 < x_2$ la diferencia $x_2 - x_1$ será tan próxima a cero como se quiera. A cuasa de la continuidad de $\varphi(x)$, para la diferencia $x_2 - x_1$ bastante pequeña, las magnitudes $\varphi(x_1)$ y $\varphi(x_2)$ diferirán tan poco de $\varphi(x_0)$ que a la par de la desigualdad $f(x_0) > \varphi(x_0)$ tendrán lugar también las desigualdades $f(x_0) > \varphi(x_1)$ y $f(x_0) > \varphi(x_2)$. Pero a consecuencia de que sobre el conjunto A las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ tienen valores iguales, y x_1 y x_2 se han elegido en dicho conjunto, resulta que $\varphi(x_1) = f(x_1)$ y $\varphi(x_2) = f(x_2)$. De tal manera, si $x_1 < x_0 < x_2$, tenemos $f(x_1) < f(x_0)$, $f(x_2) < f(x_0)$, lo cual contradice a la condición de monotonía de la función $f(x)$.

Al reducir análogamente a la contradicción la hipótesis de $f(x_0) < \varphi(x_0)$, terminaremos la demostración del lema.

Ahora podemos demostrar el teorema fundamental de la geometría proyectiva, que se debe a Staudt.

TEOREMA 15. *La correspondencia proyectiva entre dos rectas se determina unívocamente al establecer tres pares de puntos correspondientes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean a y a' dos rectas proyectivas entre las cuales está establecida una correspondencia proyectiva tal que al punto M de la recta a le corresponde el punto $M' = f(M)$ de la recta a'. Luego, sean A, B, C tres puntos diferentes de la recta a, siendo $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ y $C' = f(C)$ sus puntos homólogos en la recta a'. Tenemos que mostrar que no existe una otra aplicación proyectiva $M' = \varphi(M)$ de la recta a sobre la a', que infiera también $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ y $C' = \varphi(C)$.

Para demostrarlo, introduzcamos sobre la recta a un sistema proyectivo de coordenadas (no homogéneas), adoptando el punto A como punto nulo, el B, como punto de unidades y el C, como punto infinitamente alejado. Al mismo tiempo, introduciremos coordenadas proyectivas sobre la recta a'; sobre ella eligiremos como punto nulo, punto de unidades y punto infinitamente alejado los puntos A', B' y C', respectivamente. Una vez introducidos los sistemas de coordenadas sobre las rectas a y a', podemos caracterizar todo punto M de la recta a (menos el infinitamente alejado) mediante su coordenada x, caracterizando con la coordenada x' todo punto M' de la recta a' (menos el infinitamente alejado). Al proceder así, tenemos la posibilidad de considerar el equivalente aritmético de la relación $M' = f(M)$, esto es, la función $x' = f(x)$, donde x y x' son las coordenadas de los puntos proyectivamente homólogos M y M'. Obviamente, el teorema será demostrado si establecemos que $x' = f(x)$ es una función del todo determinada. Ahora vamos a demostrar que $f(x) \equiv x$.

Si comparamos la definición de la correspondencia proyectiva con la de las coordenadas proyectivas, veremos fácilmente la fuente de la identidad $f(x) \equiv x$. En primer lugar, como los puntos A, B, C sobre la recta a y sus homólogos A', B', C' de la recta a' resultantes de la aplicación $M' = f(M)$, están elegidos como punto nulo, punto de unidades y punto infinitamente alejado, por tanto $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(\infty) = \infty$. Luego, el punto D marcado con 2 en la escala proyectiva de la recta a, junto con el punto A, forma un par armónico conjugado con el par B, C; debido a que la aplicación proyectiva conserva (según la definición) la propiedad de conjugación armónica, el punto D debe aplicarse en un punto D' tal que el par A', D' separe armónicamente al $B'C'$. Consecuentemente, el punto D' sobre la recta a', al igual que el D sobre la a, tiene la coordenada 2, es decir, $f(2) = 2$. Al razonar análogamente, nos cercioraremos de que $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, etc., $f(-1) = -1$, $f(-2) = -2$, etc. De tal forma, para cualquier n entero tenemos $f(n) = n$. La definición de la aplicación proyectiva también supone que los centros proyectivos de los segmentos con los extremos de números enteros sobre la recta a se aplican en los centros proyectivos de los segmentos correspondientes con los extremos de números enteros sobre la recta a'; por eso $f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}$. Del mismo modo, los centros proyectivos de los segmentos $\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ sobre la recta a se aplican en los centros proyectivos de los segmentos $\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ sobre la recta a'; por ende, $f\left(\frac{n}{2^2}\right) =$

Así pues, si x es una fracción binaria, entonces $f(x) = x$. Hay que mostrar que $f(x) = x$ para cualquier x. Con este objeto, hagamos notar que $f(x)$, siendo una función definida para cualquier x, $-\infty < x < +\infty$, es monótona. Efectivamente, consideremos tres puntos M_1, M_2, M_3 de la recta a (diferentes del punto C) y los puntos M_1', M_2', M_3' de la recta a', correspondientes a ellos según una aplicación. Supongamos que el punto M_2 situado sobre la recta proyectiva a cortada se halla entre los puntos M_1 y M_3; esto quiere decir que el par M_2, C separa al par M_1, M_3. Pero, conforme al lema 2, entonces el par $M_2'C'$ separa al par M_1', M_3'. Por consiguiente, el punto M_2' sobre la recta a' cortada se halla entre M_1' y M_3'. De tal manera, la aplicación $M' = f(M)$ sujeta al examen, bien conserva el orden de puntos bien lo cambia por el contrario; en virtud de ello, la función $x' = f(x)$ será ora monótonamente creciente ora monótonamente decreciente.

Más arriba hemos visto que si x es una fracción binaria, entonces $f(x) = x$. Por tanto, dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x) = x$ toman valores iguales sobre cierto conjunto de puntos siempre denso de la recta numérica (precisamente, sobre el conjunto de fracciones binarias). Dado que entre estas dos funciones $f(x)$ es monótona, y $\varphi(x) = x$ es continua, entonces, según el lema 3, las mismas coinciden idénticamente, es decir, para cualquier x tenemos $x' = f(x) = \varphi(x) = x$.

Al establecer esto, de hecho ya tenemos demostrado el teorema. En rigor, si están dados tres pares de puntos A, A', B, B' y C, C' correspondientes en la aplicación proyectiva $M' = f(M)$ de la recta a sobre la a', entonces, debido a la elección de los sistemas de coordenadas descrita arriba, a todo punto M le corresponde necesariamente el punto M' que tiene sobre la recta a' la misma coordenada que M tiene sobre la recta a. Luego, la correspondencia proyectiva se determina globalmente al fijar tres pares de puntos correspondientes.

Un importante corolario del teorema demostrado es el siguiente.

TEOREMA 16. *En la aplicación proyectiva no idéntica de la recta proyectiva sobre sí misma, el número de puntos fijos no puede ser superior a dos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M' = f(M)$ una aplicación proyectiva no idéntica de cierta recta proyectiva u sobre sí misma. Supongamos que la referida aplicación tiene tres puntos fijos A, B, C, es decir, que existen los puntos A, B, C coincidentes con sus puntos homólogos A', B', C', de suerte que $A' = f(A) = A$, $B' = f(B) = B$, $C' = f(C) = C$. Junto con la aplicación $M' = f(M)$, consideremos también la aplicación idéntica de la recta u sobre sí misma, es decir, una aplicación tal que todo punto M coincide con su punto correspondiente M' : $M' \equiv M$. Respecto a la aplicación idéntica, todos los puntos de la recta u son fijos, comprendidos los puntos A, B, C. De tal forma, tanto la aplicación $M' = f(M)$ como la aplicación idéntica $M' \equiv M$ hacen pasar los puntos A, B, C a los mismos puntos A, B, C. Estas aplicaciones poseen, por tanto, tres pares comunes de puntos correspondientes. Por ser proyectiva cada una de ellas (la aplicación $M' = f(M)$ lo es según el enunciado, la $M' \equiv M$, de un modo evidente), en virtud del teorema antecedente, las referidas aplicaciones no se distinguen una de otra. Dicho en otros términos, $M' = f(M)$ debe ser una aplicación idéntica, lo cual, no obstante, queda excluido por el enunciado del teorema. Así pues, al admitir que $M' = f(M)$ posee tres puntos fijos, incurrimos en una contradicción. Así queda demostrado el teorema.

El mismo resultado puede formularse en otros términos del modo que sigue.

TEOREMA 17. *Si en la aplicación proyectiva de la recta sobre sí misma hay tres puntos fijos, entonces serán fijos todos los puntos de la recta, es decir, la aplicación es idéntica.*

§ 104. Convengamos en llamar *variedades proyectivas unidimensionales:*

1) al conjunto de puntos de la recta proyectiva;

2) al conjunto de rayos del haz plano, es decir, al conjunto de rectas que están en un mismo plano y pasan por algún punto, esto es, por el centro del haz;

3) al conjunto de planos que pasan por una misma recta del espacio (tal conjunto de planos se llama *haz*, la recta por la cual pasan los planos, *eje del haz*.

El concepto de correspondencia proyectiva definido más arriba para las rectas proyectivas, se extiende naturalmente al caso de las variedades unidimensionales arbitrarias.

Sean Π y Π' dos variedades unidimensionales cualesquiera. Imaginémonos que entre sus elementos se ha establecido cierta correspondencia biunívoca de modo que al elemento arbitrario x de la variedad Π le corresponde el elemento $x' = f(x)$ de la Π'. Llamaremos *proyectiva* a la correspondencia $x' = f(x)$ si a cualesquiera pares armónicos conjugados de elementos x_1, x_2 y x_3, x_4 de la variedad Π les corresponden también pares armónicos conjugados de elementos x_1', x_2' y x_3'; x_4' de la variedad Π'.

El teorema siguiente constituye la generalización del teorema 15 para el caso de la correspondencia proyectiva entre cualesquiera variedades de una dimensión:

TEOREMA 18. *La correspondencia proyectiva entre dos variedades unidimensionales se determina unívocamente al fijar tres pares de elementos correspondientes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean dadas variedades unidimensionales Π y Π' entre las cuales se ha establecido una correspondencia proyectiva que hace corresponder un elemento $x' = f(x)$ de la variedad Π' a un elemento arbitrario x de la Π. Luego, sean a, b, c tres elementos diferentes de Π, a', b', c', sus elementos correspondientes en Π'. Hay que mostrar que no existe una correspondencia proyectiva entre Π y Π', diferente de $x' = f(x)$, que también haga corresponder elementos a', b', c' a los elementos a, b, c.

Para simplificar la exposición, consideremos algún caso determinado, suponiendo, por ejemplo, que Π y Π' son haces planos de rayos. En el plano de haz Π, tomemos una recta u cualquiera que no pase por el centro del haz; de manera análoga tomemos en el plano del haz Π' cierta recta u'. Denotemos con X el punto en que el rayo x del haz Π atraviesa a la recta u, y con X', el punto en que el rayo $x' = f(x)$ del haz Π' corta a la recta u'. Consideremos la correspondencia entre u y u', en la cual al punto X le corresponde el punto X'; apuntémoslo simbólicamente $X' = F(X)$. Es fácil comprender que la correspondencia $X' = F(X)$ es proyectiva. Lo imponen inmediatamente la definición de la correspondencia proyectiva entre los haces (formulada por nosotros algo más arriba para cualesquiera variedades de una dimensión) y la proposición sobre la invariación de la propiedad de conjugación armónica respecto a las proyecciones y cortaduras, formulada al final del § 86.

De tal manera, la correspondencia proyectiva $x' = f(x)$ entre los haces Π y Π' induce la correspondencia proyectiva $X' = F(X)$ entre las rectas u y u'. En tal caso, por lo visto, las correspondencias diferentes $x' = f(x)$ y $x' = \varphi(x)$ entre Π y Π' inducen correspondencias diferentes $X' = F(X)$ y $X' = \Phi(X)$ entre u y u'. Sean A, B, C puntos de intersección de la recta u con los rayos a, b, c, y A', B', C', puntos de intersección de la recta u' con los rayos a', b', c'. Si aparte de la correspondencia proyectiva $x' = f(x)$ entre Π y Π' existiera también una otra correspondencia $x' = \varphi(x)$, la cual, al igual que la primera, haga corresponder los rayos a, b, c a los a', b', c', entonces habría correspondencias proyectivas diferentes

$X' = F(X)$ y $X' = \Phi(X)$ entre las rectas u y u'; tanto $X' = F(X)$ como $X' = \Phi(X)$ harían pasar los puntos A, B, C a los puntos A', B', C'. Mas, esto contradice al teorema 15. Por consiguiente, aparte de la correspondencia proyectiva $x' = f(x)$ no existe una otra correspondencia proyectiva entre los haces Π y Π' que haga pasar a, b, c a a', b', c'. Así pues, la correspondencia proyectiva entre los haces se determina unívocamente al fijar tres pares de rayos correspondientes.

Si Π y Π' denotan variedades unidimensionales de otro género, siempre se puede reducir el asunto a las correspondencias proyectivas entre rectas mediante una operación de cortadura, y así obtener en todos los casos el teorema 18 como consecuencia del teorema 15.

Del teorema 18 se deduce evidentemente el siguiente

TEOREMA 19. *En la aplicación proyectiva no idéntica de cualquier variedad unidimensional sobre sí misma, el número de elementos fijos no puede ser superior a dos.*

Este teorema viene a ser la generalización del teorema 16 en que se trata de los puntos fijos en las aplicaciones proyectivas de la recta sobre sí misma.

§ 105. Hagamos constar una proposición más que necesitamos para lo ulterior.

TEOREMA 20. *Sean dadas las variedades proyectivas de una dimensión Π y Π'; luego, hágase corresponder todo elemento x de la variedad Π a un elemento $x' = f(x)$ de variedad Π', puestos en correspondencia los elementos diferentes x_1 y x_2 a los elementos también diferentes $x_1' = f(x_1)$ y $x_2' = f(x_2)$. Si en este caso a los pares armónicos conjugados de elementos de Π siempre les corresponden los pares armónicos conjugados de elementos de Π', entonces $x' = f(x)$ es una aplicación biyectiva de Π sobre Π'.*

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar el caso cuando Π y Π' son rectas, puesto que los demás casos pueden reducirse al mismo mediante una operación de cortadura, análogamente a como lo hicimos al demostrar el teorema 18.

Así pues, supongamos que Π y Π' son rectas, designándolas con u y u', y que todo punto M de la recta u está aplicado en el punto $M' = f(M)$ de la u' de modo que puntos diferentes de la recta u se aplican en puntos diferentes de la u', y los pares armónicos conjugados de puntos de la recta u se aplican en los pares armónicos conjugados de la u'. Tenemos que mostrar que $M' = f(M)$ es una aplicación biyectiva de la recta u sobre la u', es decir, QUE TODO PUNTO DE LA RECTA u' CONSTITUYE LA IMAGEN DE CIERTO PUNTO DE LA u.

Es fácil comprender que esta afirmación se infiere inmediatamente de los razonamientos mediante los cuales se demostró el teorema 15. Efectivamente, tomemos sobre la recta u tres puntos cualesquiera, marcando con 0 y 1 dos de ellos, y con ∞, el tercero. Denotaremos correspondientemente con 0, 1 y ∞ las imágenes de los referidos puntos sobre la recta u'. Luego, sobre cada recta u y u' introduzcamos un sistema de coordenadas no homogéneas proyectivas determinado por los puntos 0, 1 y ∞. Entonces la relación simbólica $M' = f(M)$ puede sustituirse por la relación aritmética $x' = f(x)$ entre las coordenadas de los puntos M y M'.

El teorema quedará demostrado si establecemos que la función $x' = f(x)$, al variar X de $-\infty$ a $+\infty$, toma TODOS los valores que hay entre $-\infty$ y $+\infty$. Pero, al aducir nuevamente los razonamientos usados en la demostración del teorema 15, tendremos que concluir que $f(x) \equiv x$, de donde se deducirá lo requerido.

Sin embargo, aquí hay un punto resbaladizo. A saber, en el teorema 15 se usa el lema 2 referente a la aplicación proyectiva de una recta sobre otra. La aplicación que estamos considerando ahora, lo mismo que la proyectiva, conserva la conjugación armónica de los pares de puntos y a distinción de la proyectiva, de antemano no se supone biyectiva.

Por ende, antes de usar en este caso la afirmación del lema 2, hay que lograr que al demostrar dicho lema, se prescinda de la condición de biyectividad de la aplicación. Recordemos que la demostración del referido lema se dividía en dos partes. Primero, establecimos que la aplicación proyectiva $M' = f(M)$ de la recta u sobre la u' hacía pasar los pares no separados de puntos de la recta u a pares no separados de puntos de la u'. En esta parte no hace falta la biyectividad de la aplicación $M' = f(M)$. Luego mostramos que los pares separados de la recta u pasaban a pares también separados de la u'. Establecimos esta circunstancia considerando la aplicación inversa de la $M' = f(M)$, y la existencia de la aplicación inversa equivale a la biyectividad de la aplicación $M' = f(M)$. Por tanto, hay que modificar esta parte de la demostración del lema 2. La modificación no requerirá mucho trabajo. Una vez mostrado el hecho de que a causa de la aplicación $M' = f(x)$ los pares no separados pasan a pares no separados, podemos demostrar por reducción al absurdo el hecho de aplicarse los pares separados en pares separados. He aquí el método que sugerimos. Supongamos que a dos pares de puntos A, B y C, D que separan uno a otro sobre la recta u, les corresponden los pares de puntos A', B' y C', D' que no separan uno a otro sobre la recta u'. Como los pares A, B y C , D están separados, de acuerdo con el axioma II, 3, los pares A, C y B, D y los A, D y B, C no deben estarlo. Al contrario, por no estar separados los pares A', B' y C', D', conforme al mismo axioma II, 3, estarán separados bien los pares A', C' y B', D bien los A', D' y C', D'. De tal manera, nuestra suposición exige que sobre la recta u necesariamente haya pares no separados que se aplican en pares separados sobre la recta u'. Esto contradice a la premisa inicial del razonamiento. Así queda demostrado lo requerido.

8. Correspondencia proyectiva entre las variedades de dos y tres dimensiones

§ 106. Vamos a definir la aplicación proyectiva de las imágenes de dos y de tres dimensiones.

Primero consideremos el caso de dos dimensiones. Sea establecida correspondencia biunívoca entre los puntos de dos planos α y α', según la cual al punto arbitrario M del plano α le corresponde el punto $M' = f(M)$ del plano α'.

Esta correspondencia se llama *proyectiva* si a los puntos de cualquier recta perteneciente al plano α les corresponden en el plano α' los puntos también pertenecientes a cierta recta.

La fijación sobre el plano α' de los puntos $M' = f(M)$ correspondientes proyectivamente a los puntos M del plano α, también se llama *aplicación proyectiva del plano α sobre el plano α'*. En el caso de coincidir α y α', se dice que está dada una aplicación proyectiva del plano α' sobre sí mismo.

Según la definición de la aplicación proyectiva del plano α sobre el α', los puntos de cada recta a del plano α tienen por imágenes suyas a puntos situados sobre cierta recta a' del plano α'. Esta recta a' la llamaremos correspondiente a la recta a por consecuencia de la aplicación.

La definición de la correspondencia proyectiva exige que los puntos situados rectilíneamente pasen a puntos situados también rectilíneamente. Mas, la definición no dice nada sobre los puntos que no pertenecen a una misma recta, y no se excluye de antemano la posibilidad de aplicarse tales puntos sobre una misma recta. Sin embargo, en lo sucesivo probaremos que este caso queda eliminado, es decir, si las imágenes se hallan sobre una misma recta, entonces las preimágenes también están sobre una misma recta. Dicho en otros términos, demostraremos que la aplicación inversa de la proyectiva también es proyectiva (teorema 23a). Conjuntamente con esto se demostrará que en la aplicación proyectiva la correspondencia de las rectas, lo mismo que la de los puntos, es biunívoca.

Un importante caso particular de la aplicación proyectiva del plano sobre el plano es la aplicación determinada por la proyección central.

Al proyectar los puntos de algún plano α desde un centro arbitrario sobre un otro plano proyectivo α' (usándolo como pantalla), cada punto M del plano α se aplica en cierto punto $M' = f(M)$ del α'. La aplicación $M' = f(M)$ es proyectiva, puesto que cualquier recta del plano α se proyecta también en una recta del plano α'.

Demostremos el teorema que sigue.

TEOREMA 21. *Si el plano α está aplicado proyectivamente sobre el plano α', entonces a los grupos armónicos de elementos del plano α les corresponden, a causa de la aplicación sobre el plano α', también grupos armónicos de elementos.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea a una recta arbitraria del plano α, a', su recta correspondiente en el plano α', A, B y C, D, pares armónicos conjugados de puntos de la recta a, arbitrariamente elegidos. Hay que mostrar que los pares de puntos A', B' y C', D' de la recta a' correspondientes a los A, B, C, D a causa de la aplicación, también son armónicos conjugados. Ante todo, hagamos notar que sobre el plano α debe existir un punto exterior a la recta a, cuya imagen es exterior a la recta a'. En rigor, si todos los puntos del plano α, exteriores a la recta a se aplicaran sobre la a', entonces cierto conjunto de puntos de la recta a debería aplicarse sobre un conjunto de puntos del plano α', exteriores a la recta a' (por cuanto se supone biyectiva la aplicación proyectiva del plano α sobre el α'); pero esto queda excluido por la definición de la aplicación proyectiva (conforme a la cual se conserva el carácter rectilíneo de la posición de puntos). Denotemos con R algún punto del plano α, que no se halla sobre la recta a, y cuya imágen R' en el plano α' no está sobre la recta a'. A consecuencia de la conjugación armónica de los pares A, B y C, D, se puede construir en el plano α un cuadrivértice T con los puntos diagonales A, B y un par de lados opuestos que pasan por C, D; además, se puede elegir el punto R como uno de los vértices del cuadrivértice T (véase el § 86). Dado que la imagen R' del punto R no está sobre la recta a', entre las imágenes de todos los vértices del cuadrivértice T ningunas tres se encuentran sobre una misma recta. Por eso es imagen del cuadrivértice T cierto cuadrivértice T'.

Patentemente, los puntos A', B' constituyen los puntos diagonales del cuadrivértice T', y los lados opuestos suyos pasan por los puntos C', D'. De aqui se sigue que los pares de puntos A', B^{1} y C', D' son armónicos conjugados.

2) Sea P un punto arbitrario del plano α, P', su imagen sobre el plano α', a, b y c, d, pares armónicos conjugados de rayos de un haz arbitrariamente elegidos sobre el plano α con el centro P. Hay que mostrar que en el haz con el centro P' los pares

de rayos a', b' y c', d' correspondientes a los rayos a, b, c, d merced a la aplicación, también son armónicos conjugados. Esto se deduce inmediatamente de lo que precede. En primer lugar notemos que sobre el plano α debe existir una recta que no pasa por P, y cuya imagen no pasa por P'. En efecto, tomemos sobre el plano α algún punto Q diferente de P, designando con Q' su imagen sobre α'. Como fue mostrado algo más arriba, sobre el plano α existe un punto R que no pertenece a la recta PQ, cuya imagen es exterior a $P'Q'$. Por lo visto, justamente la recta QR será la recta de tal género, que no pasa por P, y cuya imagen no pasa por P'. Denotemos con t la recta QR, denotando con t' su imagen. Sean A, B, C, D puntos en que los rayos a, b, c, d cruzan a la recta t, A', B', C', D', puntos en que los rayos a', b', c', d' atraviesan a la recta t'. Está claro que A', B', C', D' con las imágenes de los puntos A, B, C, D. Como los pares de rayos a, b y c, d son armónicos conjugados, según la proposición formulada al final del § 86, los pares de puntos A, B y C, D serán armónicos conjugados. De aquí, en virtud de la primera parte de la demostración, se deduce que los pares de puntos A', B', y C', D' que son las imágenes de los puntos A, B y C, D, también son armónicos conjugados; pero debido a que los rayos a', b', c', d' pasan por los puntos A', B', C', D', respectivamente, de acuerdo a la proposición del § 86, mencionada más arriba, los pares de rayos a', b', y c', d' obedecen a la relación de conjugación armónica. Con esto mismo queda demostrado plenamente el teorema.

De los teoremas 20 y 21 se desprende el siguiente

TEOREMA 22. *Si el plano α está aplicado proyectivamente sobre el plano α', entonces en este caso*

1) *el conjunto de puntos de toda recta a del plano α se aplica biyectivamente sobre el conjunto de puntos de la recta correspondiente a' del plano α' y*

2) *el conjunto de rayos de un haz arbitrario sobre el plano α con el centro P se aplica biyectivamente sobre el conjunto de rayos del haz cuyo centro P' es el punto del plano α', correspondiente al punto P gracias a la aplicación.*

De aquí puede deducirse sin dificultades el siguiente

TEOREMA 23a. *Si $M' = f(M)$ es una aplicación proyectiva del plano α sobre el α', entonces la aplicación inversa $M = \varphi(M')$ del plano α' sobre el α también es proyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sea a' una recta arbitraria del plano α' Tomemos sobre ella dos puntos A' y B' cualesquiera; sobre el plano α, lès corresponden los puntos $A = \varphi(A')$ y $B = \varphi(B')$. Designemos con a la recta determinada por los puntos A, B. Como la aplicación $M' = f(M)$ es proyectiva, a practicarse ésta, todos los puntos de la recta a se aplican sobre la a'. Según el teorema 22, la aplicación de la recta a sobre la a', obtenida por este medio, resulta biyectiva, es decir, las inágenes de los puntos de la recta a «llenan» la recta a'. Expresado en otros términos, todo punto de la recta a' constituye la imagen de algún punto de la recta a. Y esto quiere decir que en el caso de estar el punto M' sobre a', el punto $M = \varphi(M')$ se halla sobre a. Así pues, la aplicación $M = \varphi(M')$ hace pasar los puntos del plano α' situados sobre una recta arbitraria, a puntos ubicados sobre una misma recta sobre el plano α, lo cual viene a constituir una propiedad característica de la aplicación proyectiva. El teorema está demostrado.

Es interesante que tiene lugar el siguiente teorema sorprendente a primera vista.

Sea aplicado biyectivamente el conjunto de todos los puntos del plano α sobre cierto conjunto G' de puntos del plano α'. Si todo género de puntos del plano α, pertenecientes a una misma recta se aplican en puntos del plano α', también pertenecientes a una misma recta, entonces son posibles sólo dos casos: 1) *ora el conjunto G' está situado por entero en una sola recta cualquiera del plano α',* 2) *ora el conjunto G' coincide con todo el plano α' (entonces la aplicación indicada es una aplicación proyectiva del plano α sobre todo el plano α').*

DEMOSTRACIÓN. Podemos realizar el primer caso tomando de antemano cualquier conjunto de puntos G' de potencia de continuo sobre alguna recta del plano α' y aplicando biyectivamente de cualquier modo el plano α sobre G'.

Ahora, supongamos que el conjunto G' contiene puntos del plano α' que no están sobre una misma recta. En tal caso, a los grupos armónicos de elementos del plano α les corresponden según la aplicación también grupos armónicos de elementos del plano α' (se demuestra análogamente al teorema 21).

De aquí y de los teoremas 20, 21 se infiere que 1) el conjunto de puntos de toda recta a del plano M se aplica biyectivamente sobre el conjunto de puntos de la recta correspondiente a' del plano α'; 2) el conjunto de rayos de un haz arbitrario sobre el plano α con el centro P se aplica biyectivamente sobre el conjunto de rayos del haz cuyo centro P' es el punto del plano α', que corresponde al punto P según la aplicación.

Sobre el plano α, tomemos algún punto P y designemos con P' su imagen situada sobre α'. Sea M' un punto del todo arbitrario del plano α'; sea a' la recta que une M' con P'. Conforme a lo dicho más arriba, la recta a', siendo un rayo del haz con el centro P' en el plano α', debe corresponder a cierta recta a perteneciente al haz con el centro P ubicado sobre el plano α; además, la correspondencia entre los puntos de las rectas a y a' debe ser biunívoca. Por ende, el punto M' situado sobre la recta a', debe corresponder a cierto punto M de la recta a, es decir, a cierto punto del plano α. Así pues, las imágenes de puntos del plano α' necesariamente han de llenar todo el plano α'. Así queda demostrado el teorema.

A continuación indicaremos un teorema evidente.

TEOREMA 23b. *Si $M' = f_1(M)$ es una aplicación proyectiva del plano α sobre el α', $M'' = f_2(M')$, una aplicación proyectiva del plano α' sobre el plano α'' (pudiendo, en particular, coincidir uno con otro los tres planos), entonces la aplicación $M'' = f_2(f_1(M))$ del plano α sobre el α'' también es proyectiva.*

Dicho en otros términos: *la aplicación resultante de dos aplicaciones proyectivas sucesivas, es proyectiva.*

La afirmación enunciada es evidente. En rigor, debido a que cada una de las aplicaciones f_1 y f_2 conserva la posición rectilínea de los puntos, la aplicación resultante de su realización sucesiva, posee la misma propiedad y, consecuentemente, es proyectiva.

La propiedad del conjunto de aplicaciones proyectivas expresada por el teorema 23b, se llama propiedad de grupo.

Convengamos en decir que la figura Σ que se halla en cierto plano α, *equivale proyectivamente* a la figura Σ' que se halla en el mismo plano o en un otro plano α' si existe la aplicación proyectiva del plano α sobre el α' en la cual Σ se aplica sobre Σ'.

En particular, la figura Σ equivale proyectivamente a la Σ' si a consecuencia de una serie de proyecciones centrales del plano α sobre el α_1, del plano α_1 sobre el

$\alpha_2, \ldots$, del plano α_{n-1} sobre el α', la figura Σ se aplica proyectivamente sobre la Σ'.

De los teoremas 23a y 23b se sigue que:

1) si una figura equivale proyectivamente a una otra, entonces la segunda equivale proyectivamente a la primera;

2) si dos figuras equivalen proyectivamente a una tercera, entonces equivalen proyectivamente una a otra.

Merced a la correspondencia señalada de figuras, las aplicaciones proyectivas en la geometría proyectiva vienen a desempeñar un papel análogo al que desempeñan las traslaciones congruentes de figuras (es decir, los movimientos) en la geometría elemental.

Por cierto tiempo las aplicaciones proyectivas de planos serán objetos independientes de nuestra investigación.

TEOREMA 24. *Si el plano α está aplicado proyectivamente sobre el α', entonces en este caso*

1) *toda recta a del plano α se aplica proyectivamente sobre la recta correspondiente a' del plano α';*

2) *todo haz de rayos del plano α se aplica también proyectivamente sobre el haz de rayos correspondiente del plano α'.*

Para cerciorarnos de la validez de este teorema basta comparar los teoremas 21 y 22 con la definición de la aplicación proyectiva de las variedades unidimensionales.

Ahora tenemos la posibilidad de probar el siguiente teorema importante que puede estimarse como generalización del teorema 15 para el caso de las variedades de una dimensión.

TEOREMA 25. *La aplicación proyectiva del plano α sobre el α' se determina unívocamente al fijar cuatro pares de puntos correspondientes según la aplicación, a condición de que entre los cuatro puntos que se definen sobre el plano α ningunos tres pertenezcan a una misma recta.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada la aplicación proyectiva $M' = f(M)$ del plano α sobre el plano α'. Luego, sean A, B, C, D cuatro puntos del plano α, entre los cuales ningunos tres están sobre una misma recta A', B', C', D', sus puntos correspondientes en el plano α' (la definición de la aplicación proyectiva y el teorema 23a señalan que entre los puntos A', B', C', D' tampoco hay tres puntos que se hallen sobre una misma recta). Hay que mostrar que no existe una aplicación proyectiva del plano α sobre el α', que difiera de la aplicación indicada $M' = f(M)$, pero que haga pasar los puntos A, B, C, D a los puntos A', B', C', D', lo mismo que la aplicación dada.

Sobre el plano α, tomemos un punto arbitrario M, denotando con m la recta AM. La referida recta figura entre los rayos de un haz con el centro A. Cualquiera que sea la aplicación proyectiva de α sobre α', que hace pasar los puntos A, B, C, D a los A', B', C', D', será proyectiva la aplicación del haz con el centro A sobre el haz con el centro A', determinada por aquélla (véase el teorema 24). Luego, por más numerosas que sean las diversas aplicaciones proyectivas de α sobre α' que hacen pasar A, B, C, D a A', B', C', D', todas ellas determinan una sola aplicación proyectiva general del haz con el centro A sobre el haz con el centro A'. Efectivamente, cada una de ellas aplica los rayos AB, AC y AD del primer haz en los rayos $A'B'$, $A'C'$ y $A'D'$ del segundo; luego, según la condición a que está sujeta la elección de los puntos A, B, C, D, serán diferentes los rayos AB, AC y AD (así como los $A'B'$, $A'C'$ y $A'D'$); mas, conforme al teorema 18, la aplicación proyectiva de las variedades unidimensionales (en particular, de los haces) se define unívocamente al fijar tres pares de elementos correspondientes. Por eso, en todas las aplicaciones proyectivas posibles del plano α sobre α', que hacen pasar A, B, C, D a A', B', C', D', la recta m del plano α se aplica sobre una recta m' determinada por completo que corresponde a la m en la correspondencia proyectiva entre los haces en cuestión. Consecuentemente, en todas las aplicaciones proyectivas del plano α sobre el α', que hacen pasar A, B, C, D a A', B', C', D', el punto M se aplica sobre una recta determinada globalmente que pasa por A'. Análogamente, al considerar en el plano α un haz de rayos con el centro B y su aplicación sobre el plano α', se puede establecer que por más numerosas que sean las aplicaciones del plano α sobre el α', que hacen pasar A, B, C, D a A', B', C', D', a consecuencia de todas ellas el punto M se aplica sobre una recta determinada globalmente que pasa por el punto B' en el plano α'. La intersección de las rectas indicadas determina la imagen del punto M sobre el plano α', de un mismo modo en todas las aplicaciones proyectivas de α sobre α', que hacen pasar A, B, C, D a A', B', C', D'. Y como el punto M es arbitrario, de los razonamientos aducidos se infiere que, además de la aplicación proyectiva $M' = f(M)$ dada, no existe una otra aplicación proyectiva de α sobre α' que haga pasar los puntos A, B, C, D a los A', B', C', D', lo mismo que la aplicación dada. El teorema está demostrado.

Del teorema 25 se deduce el siguiente

TEOREMA 26. *En el caso de la aplicación proyectiva no idéntica del plano sobre sí mismo no puede existir cuatro puntos fijos, entre los cuales no hay tres que estén sobre una misma recta.*

En efecto, sea $M' = f(M)$ una aplicación proyectiva no idéntica del plano α sobre sí mismo. Supongamos que existen cuatro puntos A, B, C, D, entre los cuales no hay tres que estén sobre una misma recta, que permanecen fijos al practicar la aplicación $M' = f(M)$. Junto con la aplicación $M' = f(M)$, consideremos la aplicación idéntica $M' \equiv M$. Por lo visto, la misma es proyectiva. Luego, al operar la aplicación $M' \equiv M$, los puntos A, B, C, D (al igual que todos los puntos del plano) permanecen fijos. De tal modo, tanto la aplicación $M' = f(M)$ como la idéntica $M' \equiv M$ hacen pasar los puntos A, B, C, D a los mismos puntos A, B, C, D. Las referidas aplicaciones poseen, por consiguiente, cuatro pares comunes de puntos correspondientes situados así como está previsto en el teorema 25 y, conforme al teorema 25, no pueden diferir una de otra. Expresado en otros términos, dada nuestra proposición, $M' = f(M)$ debe ser una aplicación idéntica, lo cual contradice al enunciado del teorema. Así queda demostrado lo que se requería.

NOTA. La acotación impuesta sobre la ubicación de los puntos de que se trata en los teoremas 25 y 26, es importante. Para cerciorarnos de ello, consideremos la llamada *aplicación armónica.*

Sea O un punto arbitrariamente elegido en el plano α, a, alguna recta del mismo plano, que no pasa por el punto O. Denotemos con M un punto arbitrario del plano α, con A, el punto en que la recta OM corta la recta a (fig. 115). Al punto M' que junto con el punto M separa armónicamente al par O, A, lo consideramos correspondiente al punto M en la aplicación armónica del plano α sobre sí mismo; llamaremos *centro de la aplicación* al punto O, *eje* de la misma, a la recta a. Para designar el punto M', usaremos también el apunte simbólico $M' = H(M)$.

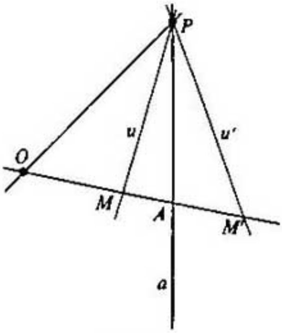


Fig. 115

Es fácil establecer que la aplicación armónica $M' = H(M)$ es proyectiva. Efectivamente, sea u una recta cualquiera del plano α, P, su punto de intersección con el eje a, u', una recta que pasa por P, y junto con la recta u separa armónicamente el par de rectas a y PO. Obviamente, si el punto M se desplaza por la recta u, entonces su punto correspondiente $M' = H(M)$ se desplazará por la recta u'. De tal manera, al practicar la aplicación $M' = H(M)$, toda recta se aplica también en recta. Precisamente esto sirve de rasgo característico de la aplicación proyectiva.

Luego, conforme a la nota formulada al final del § 93, si el punto M coincide con algún punto del eje a, entonces el punto homólogo $M' = H(M)$ coincidirá con el mismo punto del eje. De suerte que si M coincide con el centro O, entonces el punto $M' = H(M)$ también coincidirá con el centro. Por consiguiente, el centro O y todos los puntos del eje a constituyen puntos fijos de la aplicación $M' = H(M)$. Vemos que la aplicación proyectiva $M' = H(M)$ del plano α sobre sí mismo posee una infinidad de puntos fijos (no obstante, todos ellos, menos el punto O, están situados sobre una misma recta). Pues bien, si cierta aplicación proyectiva del plano α sobre sí mismo deja fijos los cuatro puntos, entonces se puede concluir que la referida aplicación es idéntica sólo cuando se conoce que la posición de los puntos fijos obedece a la restricción indicada en el teorema 26.

§ 107. En lo sucesivo, vamos a utilizar a veces la expresión *variedad proyectiva de dos dimensiones;* en este caso entenderemos bien un plano proyectivo bien la llamada radiación. *La radiación* es un conjunto de rectas y planos del espacio proyectivo, que pasan por algún punto suyo (*centro de la radiación*).

Se puede definir la aplicación proyectiva para cualesquiera variedades bidimensionales. A fin de formular más cómodamente dicha definición, convengamos en llamar *elemento de primer género* de la variedad bidimensional Π a todo punto que le pertenece, si Π es un plano, y a toda recta que le pertenece, si Π es una radiación; llamaremos *elemento de segundo género* de la variedad bidimensional Π a la recta que le pertenece, si Π es un plano, y al plano que la pertenece, si Π es una radiación.

Entre los elementos de primer género de dos variedades Π y Π' sea establecida una correspondencia biunívoca así que a un elemento arbitrario x de la variedad Π le corresponde un elemento $x' = f(x)$ de la variedad Π'. La correspondencia (o aplicación) $x' = f(x)$ se llama *proyectiva* si a cualquier grupo de elementos de primer género de la variedad Π, pertenecientes a un mismo elemento de segundo género de la referida variedad, le corresponde en la variedad Π' un grupo de elementos de primer género, también pertenecientes a un mismo elemento de segundo género.

Todos los teoremas demostrados en el párrafo anterior, naturalmente, se generalizan para el caso de las variedades bidimensionales arbitrarias. A fin de obtener las formulaciones de los teoremas generalizados, en las formulaciones de teoremas aducidas en el § 106, hay que sustituir los términos «punto» y «recta» por las expresiones «elemento de primer género» y «elemento de segundo género». Para cerciorarnos de su validez, basta notar que los elementos de primero y de segundo géneros de una radiación, siendo atravesados por un plano, correspondientemente dan elementos de primero y de segundo géneros del referido plano. De tal manera, la investigación de las aplicaciones proyectivas de las variedades de dos dimensiones puede reducirse a la de las aplicaciones proyectivas de planos, que fue practicada más arriba.

§ 108. Ahora vamos a considerar aplicaciones proyectivas de las variedades proyectivas de tres dimensiones; llamamos *variedades proyectivas de tres dimensiones* a espacios proyectivos.

Sean dados dos espacios proyectivos Π y Π' (cada uno de los símbolos Π y Π' denota cierto conjunto de objetos llamados puntos, rectas y planos, para los cuales están definidas las relaciones de pertenencia mutua y de orden observando las exigencias de los axiomas proyectivos). Luego, sea establecida entre los puntos de Π y Π' una correspondencia biunívoca, según la cual a un punto arbitrario M del espacio le responde el punto $M' = f(M)$ del Π'. La correspondencia biunívoca $M' = f(M)$ entre los puntos de los espacios Π y Π' se llama *proyectiva* si a los puntos de cualquier plano del espacio Π les corresponden en el espacio Π' los puntos que también se hallan sobre cierto plano.

La definición en el espacio Π' de los puntos $M' = f(M)$ correspondientes proyectivamente a los puntos M del espacio Π, se llama también *aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre el espacio* Π'. En el caso de coincidir el espacio Π y el Π', se dice que está dada una aplicación proyectiva del espacio sobre sí mismo.

Las propiedades básicas de las aplicaciones proyectivas de variedades tridimensionales constituyen generalizaciones naturales de las propiedades correspondientes de las aplicaciones proyectivas de variedades bidimensionales y se establecen mediante razonamientos absolutamente análogos a los aducidos en el § 107. Por ende, nos limitaremos sólo a formular los más principales teoremas sobre las aplicaciones proyectivas para el caso de tres dimensiones, sin detenernos en su demostración.

TEOREMA 27. *Si el espacio* Π *está aplicado proyectivamente sobre el* Π', *entonces todo grupo armónico de elementos del espacio* Π *tiene por su imagen en el espacio* Π' *también un grupo armónico de elementos.*

TEOREMA 28. *En la aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre el* Π':

1) *Toda variedad unidimensional del espacio* Π *se aplica biyectiva y proyectivamente sobre la variedad unidimensional correspondiente del espacio* Π'. *En particular, toda recta del espacio* Π *se aplica biyectiva y proyectivamente sobre la recta correspondiente del espacio* Π'.

2) *Toda variedad bidimensional del espacio* Π *se aplica biyectiva y proyectivamente sobre la variedad bidimensional correspondiente del espacio* Π'. *En particu-*

lar, todo plano del espacio Π *se aplica biyectiva y proyectivamente sobre el espacio correspondiente del* Π'.

TEOREMA 29a. *Si* $M' = f(M)$ *es una aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre el espacio* Π', *entonces la aplicación inversa* $M = \varphi(M')$ *del espacio* Π' *sobre el* Π *también es proyectiva.*

TEOREMA 29b. *Si* $M' = f_1(M)$ *es una aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre el espacio* Π', *y* $M'' = f_2(M')$, *una aplicación proyectiva del espacio* Π' *sobre el* Π'', *entonces la aplicación* $M'' = f_2(f_1(M))$ *del espacio* Π *sobre el espacio* Π'' *también es proyectiva, es decir, el conjunto de aplicaciones proyectivas de espacios posee propiedad de grupo.*

TEOREMA 30. *La aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre el espacio* Π' *se define unívocamente al fijar cinco pares de puntos correspondientes según la aplicación, a condición de que entre los cinco puntos fijados en el espacio* Π *no hay cuatro que se hallen en un mismo plano.*

Del teorema 30 se infiere inmediatamente el siguiente

TEOREMA 31. *En la aplicación proyectiva no idéntica del espacio sobre sí mismo no pueden existir cinco puntos fijos entre los cuales no hay cuatro que se hallen sobre un mismo plano.*

La limitación impuesta por este teorema sobre la posición de los puntos, es sustancial. Podemos cerciorarnos de ello generalizando para el caso del espacio el concepto de aplicación armónica cuya definición para el plano la dimos al final del § 106.

Aparte de los teoremas básicos aducidos más arriba, indiquemos complementariamente el teorema que sigue.

Sea aplicado biyectivamente el conjunto de todos los puntos del espacio proyectivo Π *sobre cierto conjunto* G' *de puntos del espacio proyectivo* Π'. *Si todo punto del espacio* Π *situado sobre un plano se aplica en un punto del espacio* Π' *también situado sobre un plano, entonces son posibles sólo dos casos:* 1) *ora el conjunto* G' *está situado por entero sobre un solo plano cualquiera del espacio* Π', 2) *ora el conjunto* G' *coincide con todo el espacio* Π', *(entonces la aplicación indicada es una aplicación proyectiva del espacio* Π *sobre todo el espacio* Π').

Naturalmente, este teorema generaliza el teorema sobre la aplicación de planos formulado y demostrado en el § 106 después del teorema 23a.

Respecto a los cuerpos espaciales, se introduce el concepto de equivalencia proyectiva, del mismo modo que para el caso de las figuras de una y de dos dimensiones. El cuerpo T del espacio Π se llama *proyectivamente equivalente* al cuerpo T' del mismo espacio o de un espacio Π' si existe la aplicación proyectiva del espacio Π sobre el Π' a consecuencia de la cual el cuerpo T se aplica sobre el T'.

La reflexividad y la transitividad de la relación de equivalencia proyectiva se deducen inmediatamente de los teoremas 29a y 29b.

9. Representaciones analíticas de las aplicaciones proyectivas. Involución

§ 109. Ahora nos proponemos una finalidad inmediata consistente en deducir las relaciones entre las coordenadas proyectivas de los puntos que corresponden unos a otros en la aplicación proyectiva.

Primero vamos a considerar las aplicaciones proyectivas del plano sobre el plano y del espacio sobre el espacio, abordando luego el caso de una dimensión, a saber, la aplicación proyectiva de rectas.

Sean α y α' dos planos (no es preciso que sean diferentes). Sobre cada uno de ellos, introduzcamos algún sistema de coordenadas homogéneas proyectivas (si α y α' coinciden, entonces los sistemas de coordenadas que se introducen sobre ellos, en particular, también pueden coincidir). Luego, definamos cierta aplicación especial de los puntos del plano α en el α', precisamente: al elegir algunos números c_{11}, $c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{31}, c_{32}, c_{33}$, consideraremos que el punto $M'(x_1', x_2', x_3')$ del plano α' corresponde según la aplicación al punto $M(x_1, x_2, x_3)$ del plano α si las coordenadas de los referidos puntos satisfacen las igualdades:

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donde ρ' es cualquier número desigual a cero. Llamaremos *lineal* tal aplicación apuntando simbólicamente $M' = L(M)$ al tratar de ella.

Hagamos recordar al lector que conforme a la propiedad básica de las coordenadas homogéneas, la elección del factor ρ' no incide en la posición del punto M' con las coordenadas $\rho' x_1', \rho' x_2', \rho' x_3'$ (véase el § 101). Por eso todo punto M puede tener como imagen suya únicamente un solo punto M'. Los números c_{ik} que determinan la aplicación lineal, los apuntaremos en forma de una matriz:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

llamándola *matriz de la aplicación lineal*; llamaremos *coeficientes de la aplicación* a los propios números c_{ik} y *determinante de la aplicación* al determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Es importante señalar que para $\Delta = 3$ no todo punto del plano α tiene una imagen. En efecto, si $\Delta = 0$, entonces el sistema

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 &= 0, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 &= 0, \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

admite soluciones x_1^0, x_2^0, x_3^0 desiguales a cero a un mismo tiempo; el punto $M(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ no tiene imagen sobre el plano α', pues a base de las fórmulas (1) en este caso obtenemos $x_1' = 0, x_2' = 0, x_3' = 0$, lo cual es imposible, puesto que x_1', x_2', x_3' son coordenadas homogéneas (véase el § 101). Así pues, puede resultar región de determinación de la aplicación $M' = L(M)$ no todo el plano α, sino el plano α con cierto conjunto de puntos $\alpha_0(M)$ eliminado. Se comprende fácilmente que en el caso de $\Delta = 0$, el conjunto $\alpha_0(M)$ es ora punto ora recta ora todo el plano α. A saber, si en el sistema (*) hay dos ecuaciones esenciales (es decir, linealmente independientes), entonces el sistema (*) determina la relación de las incógnitas x_1, x_2, x_3. En este caso, $\alpha_0(M)$ consta de un solo punto; si en el sistema (*) hay una sola ecuación esencial, entonces, evidentemente, $\alpha_0(M)$ es una recta (determinada por la referida ecuación); al fin, si el sistema (*) carece en absoluto de ecuaciones esenciales (es decir, si todos los $c_{ik} = 0$), entonces $\alpha_0(M)$ coincide con el plano α.

Dicho en otros términos, $\alpha_0(M)$ es punto, recta o plano correspondientemente a las igualdades: Rang $C = 2$, Rang $C = 1$ ó Rang $C = 0$. Es natural estimar este último caso excluido de la consideración.

Para las aplicaciones lineales tienen lugar los siguientes teoremas.

TEOREMA 32. *Si la aplicación lineal $M' = L(M)$ de los puntos del plano α en el plano α' tiene un determinante diferente de cero, entonces $M' = L(M)$ es una aplicación biyectiva del plano α sobre el α'.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada una aplicación lineal $M' = L(M)$ definida por las fórmulas (1), con el determinante $\Delta \neq 0$. Entonces:

1) Todo punto M del plano α tiene imagen sobre el plano α'. Efectivamente, cualesquiera que sea el punto $M(x_1, x_2, x_3)$, según las fórmulas (1) siempre se determinan tres números $\rho' x_1', \rho' x_2', \rho' x_3'$; que no pueden ser todos iguales a cero, ya que para $\Delta \neq 0$, de las igualdades

$$
\begin{aligned}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 &= 0,\\
c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 &= 0,\\
c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

se inferiría $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, lo cual es imposible. Mas, los tres números $\rho' x_1'$, $\rho' x_2'$, $\rho' x_3'$, si son no todos iguales a cero, en el sistema de coordenadas homogéneas sobre el plano α' definen cierto plano M', precisamente este punto constituye la imagen del punto M.

2) Todo punto M' del plano α' es imagen de uno, y sólo de un punto M del plano α.

En rigor, si $\Delta \neq 0$, entonces de las ecuaciónes (1), para x_1', x_2', x_3' y ρ' indicados, siempre se puede hallar, y además de un modo unívoco, los valores correspondientes x_1, x_2, x_3; si todos los números x_1', x_2', x_3' son no todos iguales a cero, entonces los números x_1, x_2, x_3 tampoco pueden ser todos iguales a cero. De tal forma, a partir de las coordenadas homogéneas del punto M', las relaciones (1) siempre definen las coordenadas homogéneas de cierto punto M. Luego, para los valores diferentes de ρ', las ecuaciones (1) determinan valores diferentes de x_1, x_2, x_3, pero las relaciones $x_1 : x_2 : x_3$ no varían al variar ρ'. Consiguientemente, a base del punto M' dado, el punto M se define unívocamente.

Así el teoréma queda demostrado.

Si en las ecuaciones (1) adoptamos $\rho' = \dfrac{1}{\rho}$ y para $\Delta \neq 0$ expresamos ρx_1, ρx_2, ρx_3 por estas ecuaciones, entonces obtendremos las igualdades:

$$
\left.
\begin{aligned}
\rho x_1 &= c_{11}'x_1' + c_{12}'x_2' + c_{13}'x_3',\\
\rho x_2 &= c_{21}'x_1' + c_{22}'x_2' + c_{23}'x_3',\\
\rho x_3 &= c_{31}'x_1' + c_{32}'x_2' + c_{33}'x_3'
\end{aligned}
\right\}
\tag{4}
$$

que determinan la aplicación del plano α' sobre el α, inversa de la aplicación de α sobre α' dada. Por lo visto, la aplicación inversa es lineal, al igual que la indicada. Los coeficientes c'_{ik} se expresan por medio de los coeficientes c_{ik} conforme a las reglas conocidas del álgebra. Los mismos componen la matriz

$$C' = \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} \\ c'_{21} & c'_{22} & c'_{23} \\ c'_{31} & c'_{32} & c'_{33} \end{pmatrix} \tag{5}$$

inversa de la matriz C de la aplicación dada, es decir, entre C y C' tiene lugar la relación

$$CC' = I,$$

donde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz unidad. Como es sabido, en tal caso los determinantes Δ y Δ' de las referidas matrices están sujetos a una dependencia análoga:

$$\Delta\Delta' = 1.$$

De aquí, en particular, se infiere que $\Delta' \neq 0$.

TEOREMA 33. *Si la aplicación lineal $M' = L(M)$ de los puntos del plano α en el α' tiene un determinante igual a cero, entonces todas las imágenes de los puntos del plano α se localizan en el plano α' sobre una misma recta. (En este caso la aplicación $M' = L(M)$ no es biyectiva).*

En rigor, si el determinante de la aplicación definida por las fórmulas (1) es igual a cero, entonces existen tres números u_1, u_2, u_3 entre los cuales al menos uno difiere de cero, que satisfacen las igualdades

$$\left.\begin{aligned} c_{11}u_1 + c_{21}u_2 + c_{31}u_3 &= 0, \\ c_{12}u_1 + c_{22}u_2 + c_{32}u_3 &= 0, \\ c_{13}u_1 + c_{23}u_2 + c_{33}u_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Multipliquemos término a término la primera de las igualdades (1) por u_1, la segunda, por u_2, la tercera, por u_3, y sumémoslas; a consecuencia de las ecuaciones (6) obtendremos, para cualesquiera x_1, x_2, x_3:

$$u_1x'_1 + u_2x'_2 + u_3x'_3 = 0.$$

De tal manera, las coordenadas del punto $M' = L(M)$, sin depender de cómo se elige el punto M, satisfacen la ecuación de cierta recta. Con esto mismo queda demostrado el teorema*).

TEOREMA 34. *Cualquiera que sea la aplicación lineal $M' = L(M)$ de los puntos del plano α en el plano α', las imágenes de los puntos de cualquier recta del plano α se localizan en el plano α' también sobre una recta.*

---

*) Hagamos constar que si Rang $C = 2$, entonces los puntos M' llenan una recta. Si Rang $C = 1$, entonces todos los puntos M' coinciden; de imagen sirve un único punto.

DEMOSTRACIÓN. 1) Si $\Delta = 0$, entonces la afirmación es válida a consecuencia del teorema 33.

2) Si $\Delta \neq 0$, entonces, junto con la aplicación indicada, existe una inversa de ella, también lineal, definida por las fórmulas del tipo de (4). Sea $M(x_1, x_2, x_3)$ un punto arbitrario de cierta recta definida en el plano α por la ecuación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \tag{7}$$

Luego, sea $M'(x_1', x_2', x_3')$ el punto que corresponde al punto M en el plano α'; las coordenadas de los puntos M y M' obedecen a las relaciones (4). Al multiplicar ambos miembros de la ecuación (7) por ρ y al sustituir ρx_1, ρx_2, ρx_3 de acuerdo a las fórmulas (4), obtendremos la relación

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = 0, \tag{8}$$

donde

$$\begin{aligned} u_1' &= c_{11}'u_1 + c_{21}'u_2 + c_{31}'u_3, \\ u_2' &= c_{12}'u_1 + c_{22}'u_2 + c_{32}'u_3, \\ u_3' &= c_{13}'u_1 + c_{23}'u_2 + c_{33}'u_3. \end{aligned}$$

De tal suerte, si M está sobre la recta definida por la ecuación (7) en el plano α, entonces M' se halla sobre la recta que se define en el plano α' por la ecuación (8). El teorema está demostrado.

Al comparar los teoremas 32 y 34 con la definición de la aplicación proyectiva de planos, obtenemos el teorema que sigue.

TEOREMA 35. *Toda aplicación lineal de los puntos del plano α en el plano α', cuyo determinante difiere de cero, es una aplicación proyectiva del plano α sobre el α'.*

Más abajo mostraremos que, también a la inversa, toda aplicación proyectiva es lineal. Antes de obtener este importante resultado, tendremos que demostrar un teorema auxiliar.

TEOREMA 36. *Si M_1, M_2, M_3, M_4 son cuatro puntos del plano α situados en él como quiera, observando sólo la condición de que entre ellos no hay tres que estén sobre una misma recta, y si M_1', M_2', M_3', M_4' son cuatro puntos del plano α' cuya localización obedece a una condición análoga, entonces existe una aplicación lineal del plano α sobre el α' con un determinante diferente de cero, que hace pasar los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 a los puntos M_1', M_2', M_3', M_4', respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Sean x_{1k}, x_{2k}, x_{3k} las coordenadas de uno de los puntos dados $M_k (k = 1, 2, 3, 4)$ en algún sistema de coordenadas homogéneas sobre el plano α, y x_{1k}', x_{2k}', x_{3k}', las coordenadas del punto $M_k' (k = 1, 2, 3, 4)$ en cierto sistema de coordenadas homogéneas sobre el plano α'. Tenemos que probar la posibilidad de elegir los parámetros de la aplicación lineal

$$\left.\begin{aligned} \rho'x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho'x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho'x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

de modo que el determinante suyo resulte diferente de cero, y que la referida aplicación haga pasar los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 a los puntos M_1', M_2', M_3', M_4', respectivamente. Por lo visto, para ello hay que establecer que a base de las relaciones

$$\left.\begin{aligned} \rho_k' x_{1k}' &= c_{11}x_{1k} + c_{12}x_{2k} + c_{13}x_{3k}, \\ \rho_k' x_{2k}' &= c_{21}x_{1k} + c_{22}x_{2k} + c_{23}x_{3k}, \\ \rho_k' x_{3k}' &= c_{31}x_{1k} + c_{32}x_{2k} + c_{33}x_{3k}, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

($k = 1, 2, 3, 4$) pueden hallarse los parámetros c_{ik} y las magnitudes ρ_k' (donde ρ_k' es el factor del primer miembro de (1), correspondiente a la elección indicada de las coordenadas homogéneas de los puntos M_k y M_k'), y pueden hallarse de forma que los parámetros c_{ik} satisfarán la condición de $\Delta \neq 0$.

En primer lugar, hagamos notar que ninguno de los determinantes del tercer orden de la matriz

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} \end{Vmatrix} \qquad (\beta)$$

es igual a cero. En efecto, si, por ejemplo, tuviera lugar la igualdad

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

entonces existirían las relaciones lineales

$$\begin{aligned} u_1x_{11} + u_2x_{21} + u_3x_{31} &= 0, \\ u_1x_{12} + u_2x_{22} + u_3x_{32} &= 0, \\ u_1x_{13} + u_2x_{23} + u_3x_{33} &= 0 \end{aligned}$$

y, de tal suerte, los puntos M_1, M_2, M_3 estarían sobre la recta $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$; y esto queda excluido por el enunciado del teorema. Asimismo son desiguales a cero todos los determinantes del tercer orden de la matriz compuesta por las coordenadas $x_{1k}', x_{2k}', x_{3k}'$ análogamente a la matriz (β).

Ahora, abordemos las relaciones (α). Haciendo $k = 1, 2, 3$, vamos a escribir tres igualdades proporcionadas por la primera de las relaciones (α):

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_{11} + c_{12}x_{21} + c_{13}x_{31} &= \rho_1' x_{11}', \\ c_{11}x_{12} + c_{12}x_{22} + c_{13}x_{32} &= \rho_2' x_{12}', \\ c_{11}x_{13} + c_{12}x_{23} + c_{13}x_{33} &= \rho_3' x_{13}'. \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Precisamente éste es el sistema de ecuaciones lineales con c_{11}, c_{12}, c_{13} desconocidos. El determinante del sistema (γ) (lo designaremos con D), según lo que precede, difiere de cero. Consiguientemente,

$$c_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \rho_1' x_{11}' & x_{21} & x_{31} \\ \rho_2' x_{12}' & x_{22} & x_{32} \\ \rho_3' x_{13}' & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad c_{12} = \frac{\begin{vmatrix} x_{11} & \rho_1' x_{11}' & x_{31} \\ x_{12} & \rho_2' x_{12}' & x_{32} \\ x_{13} & \rho_3' x_{13}' & x_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad c_{13} = \frac{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \rho_1' x_{11}' \\ x_{12} & x_{22} & \rho_2' x_{12}' \\ x_{13} & x_{23} & \rho_3' x_{13}' \end{vmatrix}}{D},$$

ó

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\rho_1' x_{11}' X_{11} + \rho_2' x_{12}' X_{12} + \rho_3' x_{13}' X_{13}}{D}, \\ c_{12} &= \frac{\rho_1' x_{11}' X_{21} + \rho_2' x_{12}' X_{22} + \rho_3' x_{13}' X_{23}}{D}, \\ c_{13} &= \frac{\rho_1' x_{11}' X_{31} + \rho_2' x_{12}' X_{32} + \rho_3' x_{13}' X_{33}}{D}, \end{aligned}\right\} \qquad (\delta_1)$$

donde X_{ik} es el complemento algebraico del elemento x_{ik} del determinante D. De forma análoga, valiéndonos de la segunda y la tercera igualdades de (α), obtendremos:

$$\left.\begin{aligned} c_{21} &= \frac{\rho_1' x_{21}' X_{11} + \rho_2' x_{22}' X_{12} + \rho_3' x_{23}' X_{13}}{D}, \\ c_{22} &= \frac{\rho_1' x_{21}' X_{21} + \rho_2' x_{22}' X_{22} + \rho_3' x_{23}' X_{23}}{D}, \\ c_{23} &= \frac{\rho_1' x_{21}' X_{31} + \rho_2' x_{22}' X_{32} + \rho_3' x_{23}' X_{33}}{D}, \end{aligned}\right\} \qquad (\delta_2)$$

$$\left.\begin{aligned} c_{31} &= \frac{\rho_1' x_{31}' X_{11} + \rho_2' x_{32}' X_{12} + \rho_3' x_{33}' X_{13}}{D}, \\ c_{32} &= \frac{\rho_1' x_{31}' X_{21} + \rho_2' x_{32}' X_{22} + \rho_3' x_{33}' X_{23}}{D}, \\ c_{33} &= \frac{\rho_1' x_{31}' X_{31} + \rho_2' x_{32}' X_{32} + \rho_3' x_{33}' X_{33}}{D}. \end{aligned}\right\} \qquad (\delta_3)$$

Ahora, pongamos los segundos miembros de las igualdades (δ_1), (δ_2), (δ_3) en las ecuaciones (α) para $k = 4$, considerando por razones de sencillez $\rho_4' = 1$. Después de agrupar adecuadamente los términos, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_{11}' D_1}{D}\rho_1' + \frac{x_{12}' D_2}{D}\rho_2' + \frac{x_{13}' D_3}{D}\rho_3' &= x_{14}', \\ \frac{x_{21}' D_1}{D}\rho_1' + \frac{x_{22}' D_2}{D}\rho_2' + \frac{x_{23}' D_3}{D}\rho_3' &= x_{24}', \\ \frac{x_{31}' D_1}{D}\rho_1' + \frac{x_{32}' D_2}{D}\rho_2' + \frac{x_{33}' D_3}{D}\rho_3' &= x_{34}', \end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

donde

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= X_{11}x_{14} + X_{21}x_{24} + X_{31}x_{34}, \\ D_2 &= X_{12}x_{14} + X_{22}x_{24} + X_{32}x_{34}, \\ D_3 &= X_{13}x_{14} + X_{23}x_{24} + X_{33}x_{34}. \end{aligned}\right\} \qquad (\zeta)$$

De las expresiones D_1, D_2, D_3 se ve que estas magnitudes son los determinantes del tercer orden de la matriz (β). Consecuentemente, $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, D_3 \neq 0$. Adoptemos

$$D' = \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{vmatrix};$$

entonces el determinante A de la matriz (ε) se expresará en forma de

$$A = \frac{D' D_1 D_2 D_3}{D^3}.$$

De aquí $A \neq 0$, a causa de lo cual el sistema (ε) es definido. Al resolver este sistema, hallaremos:

$$\rho'_1 = \frac{D}{D' D_1} \begin{vmatrix} x'_{14} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{24} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{34} & x'_{32} & x'_{33} \end{vmatrix}, \qquad \rho'_2 = \frac{D}{D' D_2} \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{14} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{24} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{34} & x'_{33} \end{vmatrix},$$

$$\rho'_3 = \frac{D}{D' D_3} \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{14} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{24} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{34} \end{vmatrix}.$$

Como todos los determinantes, a través de los cuales se expresan $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3$, difieren de cero (lo establecimos al comenzar la demostración), $\rho'_1 \neq 0, \rho'_2 \neq 0, \rho'_3 \neq 0$. Una vez hallados $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3$, los parámetros c_{ik} se determinan unívocamente por las igualdades (δ).

Para los valores de c_{ik} hallados, la aplicación lineal (1) es la buscada, puesto que 1) hace pasar los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 a los puntos M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 y 2) tiene un determinante diferente de cero; esto último se desprende inmediatamente del teorema 33. El teorema está demostrado.

Antes, en el § 106, demostramos el teorema 25, conforme al cual la aplicación proyectiva de un plano sobre otro se determina unívocamente al fijar cuatro pares de puntos correspondientes (sujetos a la restricción conocida sobre su posición). Los resultados precedentes permiten enunciar un teorema más terminante, a saber:

TEOREMA 37. *Cualesquiera que sean cuatro puntos M_1, M_2, M_3, M_4 del plano α, entre los cuales ningunos tres se hallan sobre una misma recta, y cualesquiera que sean cuatro puntos M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 del plano α', cuya posición satisface la misma condición, siempre existe una, y sólo una única aplicación proyectiva del plano α sobre el α', que hace pasar M_1, M_2, M_3, M_4 a M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, respectivamente.*

Este teorema se infiere inmediatamente de los teoremas 35 y 36.

De paso demostremos un teorema análogo para la aplicación proyectiva de rectas.

TEOREMA 37a. *Cualesquiera que sean tres puntos diferentes M_1, M_2, M_3 de la recta a, y cualesquiera que sean tres puntos diferentes M'_1, M'_2, M'_3 de la recta a', existe una, y sólo una única aplicación proyectiva de la recta a sobre la a', que hace pasar los puntos M_1, M_2, M_3 a los M'_1, M'_2, M'_3.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que la unicidad de tal aplicación viene establecida por el teorema 15, ahora sólo hay que probar la existencia de dicha aplicación.

A través de la recta a, tracemos algún plano α y, a través de la recta a', un plano α'. En el plano α, elijamos una recta arbitraria u que pasa por M_3 (pero no coincide con la recta a), tomando sobre ella dos puntos P, Q cualesquiera; en el plano α', tomemos una recta arbitraria u' que pasa por M_3' (pero no coincide con la recta a'), y sobre ella, dos puntos P', Q' cualesquiera. Según el teorema 37, existe una aplicación proyectiva del plano α sobre el α', que hace pasar los puntos M_1, M_2, P, Q a los puntos M_1', M_2', P', Q'. Conforme al teorema 24, en esta aplicación la recta a se aplica proyectivamente sobre la a', y de un modo tal que el punto M_1 pasa al M_1', el punto M_2 al M_2' y M_3, al M_3'; esto último se debe a que el punto M_3 se halla en la intersección de las rectas a, u, y el punto M_3' está en la intersección de las rectas correspondientes a', u'. Así queda demostrado el teorema.

Más abajo, en el § 140, mostraremos cómo se puede realizar de hecho la aplicación proyectiva de la recta sobre la recta, determinada por tres pares de puntos correspondientes, sin recurrir a la aplicación de planos.

Ahora tenemos la posibilidad de establecer sin dificultades algunas uno de los más principales teoremas de la geometría proyectiva:

TEOREMA 38. *Toda aplicación proyectiva del plano sobre el plano es una aplicación lineal con el determinante diferente de cero.*

LA DEMOSTRACIÓN es bien corta. Efectivamente, sea $M' = f(M)$ alguna aplicación proyectiva del plano α sobre el α'. Sobre el plano α, elijamos cuatro puntos M_1, M_2, M_3, M_4 de forma que entre ellos no haya tres que estén sobre una misma recta. Sean M_1', M_2', M_3', M_4' sus puntos correspondientes en el plano α'. En virtud del teorema 23a, la posición de los puntos M_1', M_2', M_3', M_4' satisface la misma condición. Según el teorema 36, existe una aplicación lineal $M' = L(M)$ del plano α sobre el α' con un determinante diferente de cero, la cual hace pasar los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 a los M_1', M_2', M_3', M_4'. De los teoremas 35 y 25 se desprende que las aplicaciones $M' = f(M)$ y $M' = L(M)$ no difieren una de otra. Así queda demostrado el teorema.

El teorema 38 resuelve el problema planteado al comienzo de la presente sección, referente a la representación analítica de las aplicaciones proyectivas:

Toda aplicación proyectiva se representa en coordenadas proyectivas por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \quad . \tag{1}$$

con el determinante diferente de cero

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

§ 110. Todos los teoremas demostrados en el párrafo antecedente se generalizan naturalmente para el caso de tres dimensiones. Sin aducirlos, nos limitaremos a formular la proposición fundamental:

Cualquiera que sea la aplicación proyectiva $M' = f(M)$ del espacio Π sobre el espacio Π', las coordenadas proyectivas x_1', x_2', x_3', x_4' del punto M' se expresan a través de las coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4 del punto M mediante las relaciones lineales

$$\begin{aligned}
\rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4,\\
\rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4,\\
\rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4,\\
\rho' x_4' &= c_{41}x_1 + c_{42}x_2 + c_{43}x_3 + c_{44}x_4,
\end{aligned}$$

con los coeficientes constantes c_{ik}, siendo diferente de cero el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34}\\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}.$$

§ 111. Ahora podemos hallar representaciones analíticas para las aplicaciones proyectivas de la recta sobre la recta.

Sean a y a' dos rectas proyectivas; luego, sea $M' = f(M)$ alguna aplicación proyectiva de la recta a sobre la a'. Introduzcamos sobre la recta a un sistema de coordenadas homogéneas proyectivas, determinándolo con tres puntos A_1, A_2 y E de forma que los puntos A_1 y A_2 tengan coordenadas (0, 1) y (1, 0), respectivamente, y el punto E tenga coordenadas (1, 1) (véase el final del § 100). Análogamente, al fijar tres puntos A_1', A_2' y E', introduciremos coordenadas homogéneas proyectivas sobre la recta a'. Nuestro objeto consiste en establecer relaciones entre las coordenadas de los puntos M y $M' = f(M)$.

Demostremos que las coordenadas (x_1, x_2) del punto M y las coordenadas (x_1', x_2') del punto $M' = f(M)$ están enlazadas por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
\rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2,\\
\rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2,
\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

donde $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ son coeficientes constantes determinados por la aplicación, $\rho' \neq 0$, un factor arbitrario, siendo diferente de cero el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Para demostrarlo, tracemos a través de la recta a algún plano α y, a través de la recta a', algún plano α'. Después de esto, introduzcamos sobre el plano α un sistema de coordenadas proyectivas de manera que el punto A_1 tenga coordenadas (0, 1, 0), el punto A_2, coordenadas (1, 0, 0) y el punto E, coordenadas (1, 1, 0). De tal modo, la recta a será determinada por la ecuación $x_3 = 0$, es decir, será una de las rectas del triedro de coordenadas; además, si M es un punto arbitrario de la recta a, y $(x_1, x_2, 0)$, sus coordenadas sobre el plano α, entonces los números x_1, x_2 coincidirán con las coordenadas homogéneas del punto M en el sistema de coordenadas introducido desde el principio sobre la recta a (para determinar el sistema de coordenadas indicado sobre el plano α, hay que ubicar dos vértices del triedro de coordenadas en los puntos A_1 y A_2, escoger arbitrariamente el tercer vértice A_3, eligiendo por el punto de unidades algún punto de la recta A_3E; véase el § 101). Análogamente introduciremos coordenadas homogéneas proyectivas sobre el plano α'.

Después de esto, tomemos sobre la recta a tres puntos A, B, C cualesquiera y, sobre la recta a', sus puntos correspondientes A', B', C' debidos a la aplicación $M' = f(M)$. Además, sobre el plano α tomemos puntos D, G cualesquiera, así que D, G, C estén sobre una misma recta diferente de la recta a; sobre el plano α', elijamos análogamente los puntos D', G' de manera que D', G', C' se hallen sobre una misma recta diferente de a'. Conforme al teorema 37, existe una aplicación proyectiva $M' = F(M)$ del plano α sobre el α', que hace pasar los puntos A, B, D, G a los puntos A', B', D', G', respectivamente. Por lo visto, en este caso los puntos de la recta a se aplicarán en los puntos de la recta a'; según el teorema 24, la aplicación $M' = F(M)$ DE LA RECTA a SOBRE LA a' es proyectiva. No cuesta trabajo obtener fórmulas que expresan las coordenadas del punto $M' = F(M)$ sobre la recta a' a través de las del punto M sobre la recta a. Para ello, primero hemos de escribir las fórmulas que conocemos:

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (^{**})$$

Mediante las referidas fórmulas se expresan las coordenadas del punto $M' = F(M)$ a base de las del punto M, como quiera que esté situado el punto M sobre el plano α. Tomemos $x_3 = 0$. Entonces la última de las igualdades $(^{**})$, para cualesquiera x_1, x_2, necesariamente debe dar $x_3' = 0$ (pues la recta a se aplica en la a'); por tanto, $c_{31} = c_{32} = 0$ y, de tal modo, para $x_3 = 0$, $x_3' = 0$, hallamos:

$$\rho' x_1' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2.$$
$$\rho' x_2' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2.$$

Precisamente ésta es la relación buscada entre las coordenadas de los puntos M y $M' = F(M)$ pertenecientes a las rectas a y a', es decir, la representación analítica de la aplicación $M' = F(M)$. Pero se ve fácilmente que la aplicación $M' = F(M)$ DE LA RECTA a SOBRE LA a' no difiere de la aplicación dada $M' = f(M)$. En rigor, a causa de la aplicacion $M' = F(M)$ el punto C de la recta a se aplica en el punto C' de la a'. Para establecerlo, consideremos la aplicación $M' = F(M)$ de todo el plano α sobre el plano α'; la misma hace pasar las rectas AB y DG a las rectas $A'B'$ y $D'G'$, haciendo pasar, por ende, el punto C definido por la intersección de las rectas AB, DG, al punto C' definido por la intersección de las rectas $A'B'$, $D'G'$. De tal modo, tanto en la aplicación $M' = F(M)$ como en la $M' = f(M)$ los puntos A, B, C de la recta a se hacen pasar a los puntos A', B', C' de la a'. A base del teorema 15 de aquí se sigue que la aplicación $M' = F(M)$ coincide con la $M' = f(M)$. Consiguientemente, las fórmulas $(^{*})$ proporcionan la representación analítica de la aplicación proyectiva arbitrariamente definida $M' = f(M)$ de la recta a sobre la a'.

El hecho de que el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

es diferente de cero, se infiere de la biyectividad de la aplicación proyectiva. En efecto, si $\Delta = 0$, entonces mediante las ecuaciones (*) es imposible determinar x_1, x_2 a base de x_1', x_2' arbitrariamente dados, es decir, la aplicación definida por las fórmulas (*) no es biyectiva en contra del enunciado.

Así queda demostrada por completo nuestra proposición.

Así pues, hemos resuelto plenamente el problema de hallar las representaciones analíticas de aplicaciones proyectivas. Podemos formular en breve los resultados obtenidos de la manera siguiente: *las aplicaciones proyectivas de variedades proyectivas siempre se representan en coordenadas proyectivas homogéneas por relaciones lineales.*

§ 112. En muchos casos resulta cómodo utilizar las representaciones analíticas de aplicaciones proyectivas en coordenadas no homogéneas. Las referidas aplicaciones se deducen inmediatamente de las fórmulas que expresan aplicaciones proyectivas en coordenadas homogéneas.

Recordemos que si x_1, x_2 son coordenadas proyectivas homogéneas de algún punto M de una recta, entonces el número $x = \dfrac{x_1}{x_2}$ es la coordenada proyectiva NO HOMOGÉNEA del mismo punto M (véase el § 100). Sea dada cierta aplicación proyectiva $M' = f(M)$ de la recta a sobre la recta a'. Entonces, según sabemos, entre las coordenadas homogéneas de los puntos M y M' existen las relaciones

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{aligned} \qquad \left(\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

Dividiendo término a término la primera de estas ecuaciones por la segunda y poniendo $\dfrac{x_1}{x_2} = x$, $\dfrac{x_1'}{x_2'} = x'$, obtendremos la dependencia buscada entre las coordenadas no homogéneas x y x' de los puntos M y M':

$$x' = \frac{c_{11}x + c_{12}}{c_{21}x + c_{22}}. \tag{*}$$

Al introducir nuevas designaciones de los coeficientes: $c_{11} = \alpha$, $c_{12} = \beta$, $c_{21} = \gamma$, $c_{22} = \delta$, escribiremos dicha igualdad en forma de

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \tag{1}$$

De tal modo, si está dada una aplicación proyectiva de la recta a sobre la recta a', entonces las coordenadas proyectivas no homogéneas de los puntos de la recta a' se expresan a través de las coordenadas proyectivas no homogéneas de los puntos correspondientes de la recta a por medio de la función lineal fraccional con el determinante diferente de cero.

De una manera análoga pueden obtenerse las representaciones analíticas en coordenadas no homogéneas de las aplicaciones proyectivas del plano sobre el plano y del espacio sobre el espacio.

Así, siendo $M' = f(M)$ una aplicación proyectiva del plano α sobre el plano α', entre las coordenadas proyectivas homogéneas de los puntos M y M' se dan las relaciones (1) del § 109. Al dividir término a término la primera y la segunda de ellas por la tercera, al poner $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, $\frac{x_1'}{x_3'} = x'$, $\frac{x_2'}{x_3'} = y'$ y al cambiar las notaciones de los coeficientes, obtendremos las dependencias buscadas entre las coordenadas no homogéneas (x, y) y (x', y') de los puntos M y M' en forma de:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \qquad \left(\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \neq 0\right) \tag{2}$$

Análogamente, si $M' = f(M)$ es una aplicación proyectiva del espacio Π sobre el espacio Π', entonces las coordenadas x', y', z' del punto M' se expresan a través de las coordenadas proyectivas x, y, z del punto M mediante las ecuaciones:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta} \qquad \left(\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

§ 113. Al concluir la presente sección, nos detendremos en un importante caso particular de la aplicación proyectiva de las variedades unidimensionales.

Sea aplicada proyectivamente sobre sí misma cierta variedad unidimensional proyectiva Π (una recta, un haz lineal o un haz de planos), pasando su elemento arbitrario p al elemento $p' = f(p)$. Imaginémonos que la aplicación indicada se practica sucesivamente dos veces. Entonces el elemento p primero pasa al elemento $p' = f(p)$, luego, al $p'' = f(p')$. Como regla, el elemento p'' no coincidirá con el p.

Si el elemento $p'' = f(p')$, donde $p' = f(p)$, coincide con el elemento p, cualquiera que sea éste, entonces la aplicación $p' = f(p)$ se llama INVOLUTIVA *o, sencillamente,* INVOLUCIÓN.

Precisamente la involución es el caso particular de la aplicación proyectiva, que nos proponemos a investigar seguidamente.

El carácter involutivo de la aplicación $p' = f(p)$ puede expresarse:

1) ora por el hecho de que para cualquier p tiene lugar la relación $f(f(p)) = p$;

2) ora por el hecho de que para cualquier p, junto con la relación $p' = f(p)$, tiene lugar la relación $p = f(p')$, es decir, la aplicación inversa coincide con la dada.

Ambas características se deducen directamente de la definición de la involución (precisamente, de que $p'' = p$).

Supongamos que la variedad de una dimensión Π, entre cuyos elementos existe establecida la relación involutiva $p' = f(p)$, es un haz de rectas o un haz de planos. Tomemos alguna recta a, limitando su elección con una sola condición: si Π es un haz de rectas, entonces a se halla en su plano sin pasar por su centro, si Π es un haz de planos, entonces la referida recta no corta a su eje. Denotemos con M el punto de intersección de la recta a con el elemento p de la variedad Π y, con M', el punto de intersección de a con el elemento p'. Patentemente, la correspondencia $M' = F(M)$ entre los puntos de la recta a, por consecuencia de la cual al punto M le responde el punto M', es involutiva, lo mismo que la correspondencia dada $p' = f(p)$. También es patente que las propiedades de las correspondencias involutivas $p' = f(p)$ y $M' = F(M)$ son idénticas. Por eso es suficiente investigar la involución de las variedades de una dimensión para el caso cuando la variedad constituye una recta.

Sea $M' = F(M)$ alguna aplicación proyectiva de la recta a sobre sí misma. Introduzcamos sobre la recta a un sistema de coordenadas proyectivas (no homogéneas). Entonces, según sabemos, entre las coordenadas x y x' de los puntos M y $M' = F(M)$ tendrá lugar la relación

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \tag{*}$$

Ante todo, procuremos aclarar bajo qué condición para los coeficientes α, β, γ, δ la aplicación $M' = F(M)$ es involutiva. Para ello, al resolver la ecuación (*) respecto a x, hallemos la representación analítica de la aplicación inversa de la dada. Esta será:

$$x = \frac{-\delta x' + \beta}{\gamma x' - \alpha}. \tag{**}$$

Como fue notado más arriba, la aplicación involutiva se caracteriza por el que no se diferencia de su aplicación inversa. Al comparar (*) y (**), en seguida hallamos que las aplicaciones representadas por estas fórmulas coinciden bien en el caso de $\delta = -\alpha$, bien en el de $\delta = \alpha$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Cuando $\delta = \alpha$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, la aplicación es idéntica ($x' = x$). OMITAMOS LA INVESTIGACIÓN DE LA INVOLUCIÓN IDÉNTICA. Entonces la igualdad $\delta = -\alpha$ es la condición suficiente y necesaria para que la aplicación representada por la fórmula (*) sea involutiva.

De tal modo, las involuciones son aquellas aplicaciones proyectivas que se representan en forma de

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha} \quad (\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma \neq 0). \tag{***}$$

Ahora vamos a demostrar una serie de teoremas sencillos sobre las involuciones.

TEOREMA 39. *Sea dada una aplicación proyectiva $M' = F(M)$ de la recta a sobre sí misma. Si existe al menos un punto M_0 cuya imagen $M_0' = F(M_0)$ no coincide con él, pero que vuelve a la posición inicial al repetirse la aplicación, entonces todos los puntos retoman a la posición primitiva y, de tal modo, $M' = F(M)$ es una involución.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ una representación analítica de la aplicación $M' = F(M)$ en algún sistema de coordenadas proyectivas sobre la recta a, sean x_0 y x_0', las coordenadas de los puntos M_0 y M_0'. Según el enunciado,

$$x_0' = \frac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta} \quad \text{y} \quad x_0 = \frac{\alpha x_0' + \beta}{\gamma x_0' + \delta} \quad (x_0 \neq x_0')$$

ó

$$\gamma x_0 x_0' + \delta x_0' - \alpha x_0 - \beta = 0,$$
$$\gamma x_0 x_0' + \delta x_0' - \alpha x_0' - \beta = 0.$$

Restando término a término la segunda igualdad de la primera, hallaremos:

$$\delta(x_0' - x_0) + \alpha(x_0' - x_0) = 0.$$

Como $x_0' - x_0 \neq 0$, de aquí se infiere que $\delta = -\alpha$, y el teorema queda demostrado.

TEOREMA 40. *Si en la aplicación involutiva de la recta proyectiva sobre sí misma existen puntos fijos, entonces su número es igual a dos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$ la representación analítica de alguna involución. Obviamente, las coordenadas de los puntos fijos (para los cuales $x' = x$) se determinan por la ecuación

$$x = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha},$$

$$\gamma x^2 - 2\alpha x - \beta = 0.$$

Si $\gamma \neq 0$, entonces esta ecuación es cuadrada, siendo diferente de cero su determinante $\alpha^2 + \beta\gamma = -\Delta$. De tal forma, la misma tiene ora dos raíces complejas, sin existir puntos fijos de la involución en este caso, ora dos raíces reales diferentes, existiendo dos puntos fijos en tal caso.

Si $\gamma = 0$, entonces, suponiendo $-\dfrac{\beta}{\alpha} = a$, representaremos la relación entre x y x' en forma de $x' = -x + a$. En este caso, por lo visto, la involución tiene dos puntos fijos: $x = \dfrac{a}{2}$ y $x = \infty$. El teorema está demostrado.

La involución que no deja fijo ningún punto de la recta, se llama *elíptica*. La involución elíptica se caracteriza por la condición de $\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma > 0$.

La involución que deja fijos dos puntos, se llama *hiperbólica*. Para la involución hiperbólica $\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma < 0$.

A veces la aplicación $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$ se llama involución parabólica si $\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma = 0$. Sin embargo, la transformación homográfica cuyo determinante es igual a cero, según sabemos, no es biyectiva y, consiguientemente, no figura en la clase que convenimos en considerar*).

TEOREMA 41. *Si $M' = f(M)$ es una involución hiperbólica con los puntos fijos A y B, entonces el par de puntos M, M' separa armónicamente el par de puntos A, B.*

DEMOSTRACIÓN. Elijamos sobre la recta un sistema de coordenadas proyectivas no homogéneas de modo que A en este sistema tenga la coordenada $x = 0$, y el punto B, la coordenada (simbólica) $x = \infty$. Sea

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha} \tag{*}$$

una representación analítica de la involución $M' = f(M)$ en el sistema de coordenadas elegido. Dado que el punto A es fijo, para $x = 0$, es necesario que $x' = 0$; de aquí $\beta = 0$. Por ser fijo el punto B, si $x \to \infty$, es necesario que $x' \to \infty$; de aquí $\gamma = 0$. Así la relación (*) toma la forma de

$$x' = -x.$$

Consecuentemente, $\dfrac{x + x'}{2} = 0$, es decir, el punto A es el centro proyectivo del segmento xx', y esto quiere decir que el par M, M' separa armónicamente el par A, B (véanse el § 97, la propiedad 4 de las coordenadas proyectivas, y el § 95 donde está definido el centro proyectivo). El teorema está demostrado.

El teorema puede formularse también del modo siguiente:

La involución hiperbólica $M' = f(M)$ con los puntos fijos A y B constituye una aplicación armónica de los segmentos recíprocamente complementarios con los extremos comunes A, B, uno sobre otro (véase el § 93, en particular, la nota al final de párrafo).

TEOREMA 42. *La involución se determina unívocamente al fijar dos pares diferentes de puntos correspondientes.*

Para demostrarlo, es suficiente notar que la involución $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$ se determina al fijar numéricamente sus coeficientes, entre los cuales hay tres independientes. Mas, debido a que la función lineal fraccional no se altera por la variación proporcional de los coeficientes, para determinar la involución, hay que determinar sólo dos relaciones $\alpha : \beta : \gamma$, para lo cual bastan dos condiciones. Estas consisten en definir dos pares de puntos correspondientes. Si las coordenadas de los puntos definidos son x_1, x_1' y x_2, x_2', entonces las relaciones de los parámetros de la involución para la cual dichos puntos son correspondientes, pueden hallarse a partir de las

---

*) El hecho de que la transformación $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ para $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = 0$, no es biyectiva, además de las consideraciones generales enunciadas, puede establecerse fácilmente también del modo que sigue: si $\Delta = 0$, entonces $\alpha : \gamma = \beta : \delta = q$; en tal caso $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \dfrac{q(\gamma x + \delta)}{\gamma x + \delta} = q$, por consiguiente, a cualquier punto le responde un mismo punto con la coordenada $x' = q$.

ecuaciones

$$x_1' = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 - \alpha}, \qquad x_2' = \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 - \alpha},$$

ó

$$\gamma x_1 x_1' - \alpha(x_1 + x_1') - \beta = 0,$$
$$\gamma x_2 x_2' - \alpha(x_2 + x_2') - \beta = 0.$$

Efectivamente, de aquí

$$\alpha : \beta : \gamma = \begin{vmatrix} x_1 x_1' & 1 \\ x_2 x_2' & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 + x_1' & x_1 x_1' \\ x_2 + x_2' & x_2 x_2' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 + x_1' & 1 \\ x_2 + x_2' & 1 \end{vmatrix}.$$

Las relaciones $\alpha : \beta : \gamma$ serán indefinidas sólo en el caso de anularse todos los determinantes presentes en el segundo miembro de la igualdad antecedente. Pero entonces $x_1 + x_1' = x_2 + x_2'$ y $x_1 x_1' = x_2 x_2'$, por tanto, bien $x_1 = x_2$, $x_1' = x_2'$, bien $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1'$. Sin embargo, las dos posibilidades están excluidas por lo que enuncia el teorema.

De tal modo, cualesquiera que sean dos pares diferentes de puntos M_1, M_1' y M_2, M_2', siempre existe una involución, y además la única, que hace pasar M_1 a M_1' y M_2 a M_2'. El teorema está demostrado.

Hagamos constar que según el teorema 15 la aplicación proyectiva arbitraria se determina fijando tres pares de puntos correspondientes; mientras que la involución, según vemos, requiere para su determinación dos pares de puntos preestablecidos. Por lo visto, esta circunstancia se debe a que el número de parámetros de la aplicación proyectiva general es mayor en uno que el de parámetros de la involución.

Al concluir, observemos lo siguiente.

Los teoremas recién demostrados están formulados para la involución sobre la recta. Si en las formulaciones de los referidos teoremas en todo lugar sustituimos los términos «punto de la recta» por «elemento de la variedad de una dimensión», entonces resultarán teoremas sobre las involuciones de cualesquiera variedades de una dimensión.

10. Fórmulas de transformación de las coordenadas proyectivas. Relación compleja de cuatro elementos

§ 114. Sean introducidos sobre la recta proyectiva a dos sistemas diferentes de coordenadas homogéneas proyectivas. Llamaremos convencionalmente primero a uno de ellos y segundo, al otro. El punto arbitrario M de la recta tiene coordenadas (x_1, x_2) en el primer sistema y (x_1', x_2'), en el segundo. Nos planteamos la tarea de deducir las fórmulas que permitan expresar las coordenadas (x_1', x_2') mediante las (x_1, x_2). Es importante que el lector comprenda que este problema, en esencia, ya se ha resuelto en la sección precedente.

En rigor, en el § 111 se estableció la dependencia entre las coordenadas de los puntos correspondientes unos a otros al aplicarse la recta sobre la recta. Consideremos la aplicación idéntica de la recta a sobre sí misma, es decir, una aplicación tal que deja fijo todo punto de la recta a. La aplicación idéntica, obviamente, es proyectiva. Por ende, las coordenadas (x_1, x_2) del punto M en el primer sistema y las coordenadas (x_1', x_2') de su imagen, es decir, del mismo punto M en el segundo sistema, deben estar sujetas a las mismas ecuaciones que las obtenidas en el § 111; a saber:

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2, \end{aligned} \qquad \left(\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0\right). \qquad (^*)$$

Precisamente éstas son las fórmulas buscadas. Los valores numéricos de los parámetros c pueden hallarse en cada caso concreto de transformación de las coordenadas con arreglo a las condiciones que determinan dicha transformación.

Si dividimos término a término la primera de las igualdades (*) por la segunda y cambiamos las notaciones, suponiendo $c_{11} = \alpha, c_{12} = \beta, c_{21} = \gamma, c_{22} = \delta$, entonces obtendremos la fórmula de transformación de las coordenadas proyectivas no homogéneas (sobre la recta):

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \qquad (^{**})$$

Mediante razonamientos análogos a los recién expuestos en cuanto a la recta, se puede establecer que las fórmulas conocidas, que expresan la dependencia entre las coordenadas proyectivas de los puntos correspondientes unos a otros en la aplicación proyectiva del plano sobre el plano o del espacio sobre el espacio, a la vez son fórmulas para transformar las coordenadas proyectivas sobre el plano o en el espacio.

Es natural que cuando las referidas fórmulas determinan la transformación de coordenadas (homogéneas), las magnitudes presentes en ellas x_i y x_i' ($i = 1, 2, 3$ para el plano e $i = 1, 2, 3, 4$ para el espacio) constituyen diversas coordenadas de un mismo punto.

§ 115. Al establecer las fórmulas de transformación de las coordenadas proyectivas, hemos resuelto así un problema que reviste una importancia de principio. Sólo ahora tenemos la posibilidad práctica de aclarar la cuestión sobre la invariación de las funciones de coordenadas de puntos o la invariación de las relaciones entre las coordenadas de puntos en la geometría proyectiva.

En particular, ahora podemos definir el concepto de *relación compleja de cuatro elementos* de la variedad unidimensional, bien importante en la geometría proyectiva. Primero definamos la relación compleja de cuatro puntos de la recta.

Sean M_1, M_2, M_3, M_4 cuatro puntos de cierta recta proyectiva a. Sobre esta, introduzcamos algún sistema de coordenadas proyectivas (desde el punto de vista del cálculo, ahora es más cómodo usar las coordenadas no homogéneas), designando con t_1, t_2, t_3, t_4 las coordenadas de los puntos indicados. Demostraremos que *la magnitud*

$$\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4}$$

no está sujeta a la elección del sistema de coordenadas. Para probarlo, junto con el sistema ya introducido, consideremos un nuevo sistema de coordenadas proyectivas. Si denotamos con t la coordenada de un punto arbitrario de la recta a en el sistema primitivo y con t', la coordenada del mismo punto en el nuevo sistema, entonces

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes determinadas por la elección de los sistemas de coordenadas. En particular, para las nuevas coordenadas t'_1, t'_2, t'_3 de los puntos M_1, M_2, M_3 tienen lugar las igualdades:

$$t'_1 = \frac{\alpha t_1 + \beta}{\gamma t_1 + \delta}, \quad t'_2 = \frac{\alpha t_2 + \beta}{\gamma t_2 + \delta}, \quad t'_3 = \frac{\alpha t_3 + \beta}{\gamma t_3 + \delta}.$$

De aquí

$$t'_3 - t'_1 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(t_3 - t_1)}{(\gamma t_1 + \delta)(\gamma t_3 + \delta)},$$

$$t'_2 - t'_3 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(t_2 - t_3)}{(\gamma t_2 + \delta)(\gamma t_3 + \delta)},$$

y

$$\frac{t'_3 - t'_1}{t'_2 - t'_3} = \frac{\gamma t_2 + \delta}{\gamma t_1 + \delta} \cdot \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3}.$$

Análogamente

$$\frac{t'_4 - t'_1}{t'_2 - t'_4} = \frac{\gamma t_2 + \delta}{\gamma t_1 + \delta} \cdot \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{t'_3 - t'_1}{t'_2 - t'_3} : \frac{t'_4 - t'_1}{t'_2 - t'_4} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4},$$

lo que había que demostrar.

La magnitud

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4} \qquad (*)$$

se llama RELACIÓN COMPLEJA DE CUATRO PUNTOS M_1, M_2, M_3, M_4.

De lo recién considerado se infiere que la relación compleja viene determinada exclusivamente por la posición de los puntos M_1, M_2, M_3, M_4; se requiere un sistema de coordenadas sólo para hallar de hecho su valor numérico, es decir, para fines puramente auxiliares.

La fórmula (*) revela inmediatamente las siguientes propiedades de la relación compleja:

1) $$(M_1M_2M_3M_4) = (M_3M_4M_1M_2),$$

es decir, en la relación compleja, sin alterar su valor, se puede permutar el primero y el segundo pares de puntos.

2) $$(M_1M_2M_4M_3) = \frac{1}{(M_1M_2M_3M_4)},$$

es decir, al permutar los puntos dentro de algún par, el valor de la relación compleja cambia por el inverso.

§ 116. Demostremos otra serie de teoremas importantes sobre la relación compleja de cuatro puntos.

TEOREMA 43. *En cualquier aplicación proyectiva de la recta a sobre la recta a', la relación compleja de un grupo arbitrario de puntos M_1, M_2, M_3, M_4 de la recta a es igual a la relación compleja de sus puntos correspondientes M_1', M_2', M_3', M_4' de la recta a'.*

Para demostrarlo, introduzcamos sobre las rectas a y a' sistemas de coordenadas; si t_i son las coordenadas de los puntos M_i, y t_i', las de los M_i', entonces

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4}$$

y

$$(M_1'M_2'M_3'M_4') = \frac{t_3' - t_1'}{t_2' - t_3'} : \frac{t_4' - t_1'}{t_2' - t_4'}.$$

Conforme al § 112, entre las coordenadas t y t' de los puntos proyectivamente correspondientes de las rectas a y a' existe la dependencia $t' = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$; pero mediante esta dependencia la igualdad $(M_1'M_2'M_3'M_4') = (M_1M_2M_3M_4)$ puede establecerse por los mismos cálculos que los aducidos en el párrafo precedente.

Un caso particular del teorema 43 es el siguiente

TEOREMA 44. *Si a y a' son dos rectas del plano α, y S, un punto arbitrario del plano α, que no pertenece a ninguna de las rectas a y a', entonces la relación compleja de cualquier cuaterna de puntos M_1, M_2, M_3, M_4 de la recta a es igual a la de sus proyecciones M_1', M_2', M_3', M_4' desde el centro S sobre la recta a'.*

El hecho de que este teorema es un caso particular del precedente, se debe a que la proyección central constituye un caso particular de la aplicación proyectiva (véase el § 103). El teorema 44 puede enunciarse también así:

Cuatro rayos m_1, m_2, m_3, m_4 del haz plano al cortar cualquier recta que se halla en el plano del haz, determinan cuatro puntos, el valor de cuya relación compleja es un mismo para todas las rectas.

Esta magnitud se llama *relación compleja de los rayos* m_1, m_2, m_3, m_4; para designarla, se usa el símbolo $(m_1m_2m_3m_4)$.

Del mismo modo puede definirse la relación compleja de cuatro elementos del haz de planos, a saber: si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ son cuatro planos que pasan por una misma recta, entonces en su intersección con cualquier recta del espacio los mismos determinan cuatro puntos, el valor de cuya relación compleja es un mismo para todas las rectas. Esta magnitud se llama *relación compleja de cuatro planos* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ y se denota con el símbolo $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$.

El teorema que se aduce a continuación, para las aplicaciones proyectivas de los haces (de rayos o de planos) juega el mismo papel que el teorema 43 para las aplicaciones proyectivas de rectas.

TEOREMA 45. *En cualquier aplicación proyectiva del haz sobre el haz la relación compleja de un grupo arbitrario de cuatro elementos del haz es igual a la de sus elementos correspondientes dentro del otro haz.*

DEMOSTRACIÓN. Sea x un elemento arbitrario del primer haz, y $x' = f(x)$, el elemento que le corresponde según la aplicación en el segundo haz. Cortemos los elementos del primer haz por una recta cualquiera a, los del segundo, por una recta a', designando con M el punto de intersección de la recta a con el elemento x, con M', el punto de intersección de la recta a' con el elemento x'. Consideremos la aplicación de la recta a sobre la a', debido a la cual al punto M le corresponde el $M' = F(M)$. La aplicación $M' = F(M)$, lo mismo que la $x' = f(x)$ dada, será proyectiva. Por eso, si M_1, M_2, M_3, M_4 son puntos de intersección de la recta a con los elementos arbitrariamente elegidos x_1, x_2, x_3, x_4 del primer haz, M_1', M_2', M_3', M_4' son puntos de intersección de la recta a' con los elementos correspondientes x_1', x_2', x_3', x_4' del segundo haz, entonces

$$(M_1'M_2'M_3'M_4') = (M_1M_2M_3M_4)$$

(véase el teorema 43); luego, conforme a la definición de la relación compleja de cuatro elementos del haz, tenemos:

$$(x_1x_2x_3x_4) = (M_1M_2M_3M_4),$$
$$(x_1'x_2'x_3'x_4') = (M_1'M_2'M_3'M_4').$$

Consecuentemente,

$$(x_1'x_2'x_3'x_4') = (x_1x_2x_3x_4),$$

lo que había que demostrar.

Se establece fácilmente también el teorema siguiente que abarca los teoremas 43 y 45.

TEOREMA 46. *En cualquier aplicación proyectiva de una variedad unidimensional sobre otra la relación compleja de un grupo arbitrario de cuatro elementos de la primera variedad es igual a la de sus elementos correspondientes en la segunda.*

En esta formulación están previstos los casos de aplicación de la recta sobre el haz de rayos, de la recta sobre el haz de planos y del haz de rayos sobre el haz de planos.

De los teoremas 46 y 24 se infiere el

TEOREMA 47. *Si el plano α está aplicado proyectivamente sobre el plano α', entonces la relación compleja de cualquier grupo de cuatro elementos pertenecientes a una misma variedad unidimensional del plano α, es igual a la de cuatro elementos correspondientes del plano α'.*

De los teoremas 46 y 28 se deduce un teorema igual referente a las aplicaciones proyectivas del espacio sobre el espacio.

En breve los resultados obtenidos también pueden expresarse así:

La relación compleja es un invariante de las aplicaciones proyectivas.

§ 117. Sean dados cuatro puntos A, B, C, D sobre alguna recta a, y cuatro puntos A', B', C', D' sobre la misma recta o una otra recta a'. Preguntemos: ¿bajo qué condición existe una aplicación proyectiva de la recta a sobre la a' que haga pasar los puntos A, B, C, D a los puntos A', B', C', D'?

Del teorema 43 se sigue que la condición necesaria para ello es la igualdad de las relaciones complejas del grupo de puntos A, B, C, D y del grupo de puntos A', B', C', D'. Es fácil comprender que la condición señalada es también suficiente.

En efecto, supongamos que $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Denotemos con $M' = f(M)$ la aplicación proyectiva de la recta a sobre la a' que hace pasar los puntos A, B, C, a los A', B', C'. Su existencia viene asegurada por el teorema 37a. Sea $f(D) = D^*$. Según el teorema 43, $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Consiguientemente, $(A'B'C'D^*) = (A'B'C'D')$. De aquí y de la definición de la relación compleja se desprende de inmediato que el punto D^* coincide con el D'. De tal manera, en rigor, bajo la condición de $(ABCD) = (A'B'C'D')$ existe una aplicación proyectiva de la recta a sobre la a', a saber, la aplicación $M' = f(M)$ que hace pasar los puntos A, B, C, D a los A', B', C', D'.

Con arreglo a la definición enunciada antes, el grupo de puntos $M_1, M_2, \dots, M_n$ de la recta a se considera proyectivamente equivalente al sistema de puntos M'_1, $M'_2, \dots, M'_n$ de la recta a' si existe una aplicación proyectiva de la recta a sobre la a', que haga pasar los puntos $M_1, M_2, \dots, M_n$ a los $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$, respectivamente.

Razonando de un modo análogo al anterior, es fácil establecer la proposición: *Para que el sistema de puntos $M_1, M_2, \dots, M_n$ de la recta a equivalga proyectivamente al sistema de puntos $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ de la recta a', es necesario y suficiente que la relación compleja de cualquier grupo de cuatro puntos M_p, M_q, M_r, M_s del primer sistema sea igual a la de la cuaterna correspondiente de puntos M'_p, M'_q, M'_r, M'_s del segundo.*

La relación compleja que permite caracterizar la equivalencia proyectiva, es *el invariante básico* de la geometría proyectiva, lo mismo que la distancia entre puntos que caracteriza la congruencia, es el invariante básico en la geometría elemental.

§ 118. Si sobre una recta proyectiva un par de puntos A, B separa armónicamente al par C, D, entonces $(ABCD) = -1$.

Demostrémoslo. Primero, hagamos notar que la relación compleja de cuatro puntos diferentes nunca puede ser igual a $+1$. Efectivamente, si

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4} = 1,$$

entonces $\dfrac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \dfrac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}$ y para $x_1 \neq x_2$, es necesario que $x_3 = x_4$, en contra del enunciado.

Luego, según la definición del grupo armónico de puntos, si el par A, B separa armónicamente al C, D, entonces existe un cuadrivértice completo $PQRS$ situado respecto a los puntos A, B, C, D así como lo muestra la fig. 116. Proyectemos los puntos A, B, C, D desde el centro S sobre la recta PQ. En virtud de la invariación de la relación compleja en la proyección (véase el teorema 44), obtendremos $(ABCD) = (PQED)$. Volvamos a proyectar los puntos A, B, C, D sobre la recta PQ, mas, esta vez desde el centro R. Entonces $(ABCD) = (QPED)$. Pero, conforme al § 115,

$$(QPED) = \frac{1}{(PQED)}.$$

De tal forma, $(ABCD) = (PQED)$ y $(ABCD) = \dfrac{1}{(PQED)}$, de donde $(ABCD)^2 = 1$ y $(ABCD) = \pm 1$. Dado que, según lo demostrado más arriba, la relación compleja

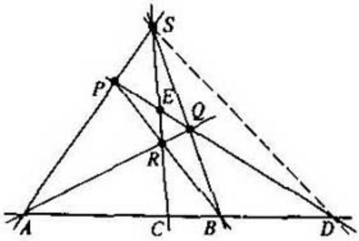


Fig. 116

de puntos diferentes no puede ser igual a + 1, entonces

$$(ABCD) = -1,$$

quedando probado lo que se requería.

De aquí y de la definición de la relación compleja de cuatro puntos del haz se desprende en seguida el teorema general que sigue.

TEOREMA 48. *Si el par de elementos x, y de una variedad unidimensional separa armónicamente al par de sus elementos z, t, entonces $(xyzt) = -1$.*

§ 119. Ahora vamos a deducir algunas nuevas fórmulas que expresan la relación compleja en coordenadas proyectivas.

Sobre un plano, sea dado un sistema de coordenadas no homogéneas proyectivas con el origen en el punto O y con los puntos infinitamente alejados de los ejes ∞_x e ∞_y (véase el § 98). Consideremos cuatro puntos cualesquiera M_1, M_2, M_3, M_4 del plano situados sobre una misma recta, planteándonos el objeto de expresar la relación compleja $(M_1M_2M_3M_4)$ a través de las coordenadas (x^1, y^1) (x^2, y^2), (x^3, y^3), (x^4, y^4) de los puntos en cuestión.

Para ello, proyectemos los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 desde el punto ∞_y sobre el eje x; sean M_1', M_2', M_3', M_4' las proyecciones resultantes. Éstas tienen coordenadas $(x^1, 0)$, $(x^2, 0)$, $(x^3, 0)$, $(x^4, 0)$; su relación compleja puede apuntarse en forma de

$$(M_1'M_2'M_3'M_4') = \frac{x^3 - x^1}{x^2 - x^3} : \frac{x^4 - x^1}{x^2 - x^4}.$$

Si denotamos con $M_1''M_2''M_3''M_4''$ las proyecciones de los puntos M_1, M_2, M_3, M_4 desde ∞_x sobre el eje y, entonces, análogamente a lo que precede,

$$(M_1''M_2''M_3''M_4'') = \frac{y^3 - y^1}{y^2 - y^3} : \frac{y^4 - y^1}{y^2 - y^4}.$$

Según el teorema 44,

$$(M_1M_2M_3M_4) = (M_1'M_2'M_3'M_4'),$$
$$(M_1M_2M_3M_4) = (M_1''M_2''M_3''M_4''),$$

por tanto, para expresar la magnitud $(M_1M_2M_3M_4)$, vale cualquiera de las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} (M_1M_2M_3M_4) &= \frac{x^3 - x^1}{x^2 - x^3} : \frac{x^4 - x^1}{x^2 - x^4}\,; \\ (M_1M_2M_3M_4) &= \frac{y^3 - y^1}{y^2 - y^3} : \frac{y^4 - y^1}{y^2 - y^4}\,. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Para expresar la relación compleja $(M_1M_2M_3M_4)$ en coordenadas homogéneas, en las fórmulas obtenidas hay que sustituir las coordenadas no homogéneas x^i, y^i de cada punto $M_i (i = 1, 2, 3, 4)$ por las relaciones de coordenadas homogéneas $\frac{x_1^i}{x_3^i}$, $\frac{x_2^i}{x_3^i}$ del referido punto; al proceder así hallaremos las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} (M_1M_2M_3M_4) &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^1 \\ x_3^3 & x_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^1 \\ x_3^4 & x_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^4 \\ x_3^2 & x_3^4 \end{vmatrix}}, \\ (M_1M_2M_3M_4) &= \frac{\begin{vmatrix} x_2^3 & x_2^1 \\ x_3^3 & x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_2^4 & x_2^1 \\ x_3^4 & x_3^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2^2 & x_2^4 \\ x_3^2 & x_3^4 \end{vmatrix}}, \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

(en estas fórmulas el índice superior corresponde al número del punto, y el subíndice, al de la coordenada).

En el espacio, la relación compleja de cuatro puntos de una recta se expresa en coordenadas proyectivas con las mismas fórmulas, sólo que su número es mayor en una.

Hagamos constar un modo especial de apuntar la relación compleja, que se infiere de las fórmulas (B).

Sean P y Q dos puntos diferentes de un plano, cuyas coordenadas homogéneas están designadas con p_i y $q_i (i = 1, 2, 3)$. Es fácil mostrar que todo punto T con las coordenadas homogéneas

$$t_i = p_i + tq_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

está sobre la recta PQ. En efecto, si

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = \Sigma u_ix_i = 0$$

es la ecuación de la recta PQ, entonces $\Sigma u_ip_i = 0$ y $\Sigma u_iq_i = 0$; pero en este caso también

$$\Sigma u_it_i = \Sigma u_i(p_i + tq_i) = \Sigma u_ip_i + t\Sigma u_iq_i = 0,$$

es decir, las coordenadas del punto T satisfacen la ecuación de la recta PQ.

Demos dos valores arbitrarios $t = \lambda$ y $t = \mu$ al parámetro t, expresando según las fórmulas (B) las relaciones complejas de los cuatro puntos P, Q, L, M con coordenadas homogéneas p_i, q_i, $p_i + \lambda q_i$, $p_i + \mu q_i$; al aplicar, por ejemplo, la primera de las fórmulas (B), obtendremos:

$$(PQLM) = \frac{\begin{vmatrix} p_1 + \lambda q_1 & p_1 \\ p_3 + \lambda q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & \overline{p}_1 + \lambda q_1 \\ q_3 & p_3 + \lambda q_3 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} p_1 + \mu q_1 & p_1 \\ p_3 + \mu q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & \overline{p}_1 + \mu q_1 \\ q_3 & p_3 + \mu q_3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\lambda \begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}} : \frac{\mu \begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Aquí ha de hacerse la reserva de que el resultado de estos cálculos será definido sólo a condición de $\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Si $\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0$, entonces habrá que usar la segunda fórmula de (B). El resultado de los cálculos será definido y coincidirá con el precedente si $\begin{vmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Ambos determinantes $\begin{vmatrix} q_1 & p_1 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} q_2 & p_2 \\ q_3 & p_3 \end{vmatrix}$ no pueden ser iguales a cero, pues en este caso $p_1 : p_2 : p_3 = q_1 : q_2 : q_3$, lo cual es imposible, por cuanto los puntos P, Q con diferentes según el enunciado. Así pues,

$$(PQLM) = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{C}$$

Tal forma de apuntar la relación compleja es simple y cómoda en el uso; obviamente, se puede aplicarla también cuando las coordenadas de los puntos P, Q, L, M están dadas en el sistema espacial.

Al concluir la sección, vamos a deducir una fórmula que expresa la relación compleja de cuatro rayos del haz.

Sea dado un haz con el centro $S(x_0, y_0)$; en el sistema de coordenadas no homogéneas la ecuación de su rayo cualquiera puede tomar el siguiente aspecto:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{*}$$

Denotemos con m_1, m_2, m_3, m_4 cuatro rayos del haz dado, con k_1, k_2, k_3, k_4, sus valores correspondientes del parámetro k en la ecuación (*) y con $M_1(x_1, 0)$, $M_2(x_2, 0)$, $M_3(x_3, 0)$, $M_4(x_4, 0)$, los puntos de intersección de los rayos m_1, m_2, m_3, m_4 con el eje x. Según la definición de la relación compleja de cuatro puntos,

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4};$$

conforme a la definición de la relación compleja de cuatro rayos del haz, $(m_1m_2m_3m_4) = (M_1M_2M_3M_4)$. Por consiguiente,

$$(m_1m_2m_3m_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}.$$

De la ecuación (*) para $y = 0$ hallamos

$$x_i = x_0 - \frac{y_0}{k_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

En la expresión antecedente, al sustituir para $(m_1m_2m_3m_4)$ las magnitudes x_1, x_2, x_3, x_4 por los segundos miembros de las referidas igualdades, después de realizar transformaciones evidentes, obtendremos la fórmula que sigue:

$$(m_1m_2m_3m_4) = \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_3} : \frac{k_4 - k_1}{k_2 - k_4}. \tag{D}$$

Ésta expresa la relación compleja de cuatro rayos a través de los parámetros que los determinan.

De la fórmula (D) se obtiene fácilmente la representación analítica de la aplicación proyectiva del haz sobre el haz, es decir, se halla la forma de la función $k' = f(k)$, donde k y k' son los parámetros que determinan los rayos de dos haces proyectivamente correspondientes unos a otros.

Efectivamente, si k_1, k_2, k_3 son los parámetros de algunos tres rayos del primer haz y k_1', k_2', k_3', los de los rayos correspondientes del segundo, entonces

$$\frac{k_3' - k_1'}{k_2' - k_3'} : \frac{k' - k_1'}{k_2' - k'} = \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_3} : \frac{k - k_1}{k_2 - k},$$

ya que, según el teorema 45, la relación compleja es un invariante de la aplicación proyectiva de los haces; al expresar k' a base de esta relación, hallaremos

$$k' = \frac{\alpha k + \beta}{\gamma k + \delta}, \tag{E}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes (que dependen de $k_1, k_2, k_3, k_1', k_2', k_3'$).

De tal manera, la aplicación proyectiva del haz sobre el haz se representa analíticamente por una función lineal fraccional. Su determinante $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ difiere de cero, pues en el caso contrario, la aplicación determinada por la fórmula (E) no será biyectiva.

11. Principio de dualidad

§ 120. PRINCIPIO DE DUALIDAD SOBRE EL PLANO PROYECTIVO. En esta sección formularemos y demostraremos una de las notables tesis de la geometría proyectiva conocida por el nombre de *principio de dualidad.* Primero nos limitaremos al caso de dos dimensiones, exponiendo la esencia del principio de dualidad en la geometría proyectiva sobre el plano.

En la geometría proyectiva de dos dimensiones se consideran objetos de dos clases: puntos y rectas. Las propiedades de sus relaciones recíprocas vienen definidas por los axiomas proyectivos de los grupos I, II, III, entre los cuales sólo los axiomas I,1 — I,3, I,9, II,1 — II,6 y III son axiomas de la geometría bidimensional, los demás axiomas (es decir, los axiomas I,4 — I,8) tienen un carácter espacial. Mas, según muestra la exposición precedente, para tener la posibilidad de demostrar teoremas de la geometría proyectiva bidimensional sin usar construcciones en el espacio de tres dimensiones, a los axiomas I,1 — I,3, I,9, II,1 — II,6 y III ha de agregarse también la proposición de Desargues. Llamaremos *axiomas proyectivos bidimensionales* a los axiomas enumerados junto con la proposición de Desargues. El análisis de los fundamentos de la geometría proyectiva revela que a todo axioma proyectivo bidimensional puede ponerse en correspondencia cierta proposición de modo que las dos proposiciones que se corresponden, una vez formuladas adecuadamente, pasan una a otra al sustituir el término «punto» por «recta» y el término «recta» por «punto». Esta circunstancia que contiene, en esencia, el principio de dualidad sobre el plano (lo enunciaremos exactamente más abajo), la tendrá clara el lector después de que realicemos de hecho la correspondencia señalada.

Empecemos por los axiomas del primer grupo. Éstos definen las relaciones de pertenencia mutua de puntos y de rectas, expresadas usualmente por los términos: «el punto se halla sobre la recta» o «la recta pasa por el punto». Ahora, en lugar de estos giros, será más cómodo valernos de otros, a saber: «el punto pertenece a la recta» o «la recta pertenece al punto». Observando esta condición, vamos a modificar correspondientemente la expresión verbal de los axiomas I,1 — I,3, I,9, apuntándolos del lado izquierdo de la página; a la derecha, frente a cada axioma citaremos su proposición correspondiente en el sentido explicado más arriba.

En adelante llamaremos recíprocamente *duales* dos proposiciones de tal género.

I,1. Cualesquiera que sean dos puntos A y B, existe una recta a perteneciente al punto A y al B.

Cualesquiera que sean dos rectas a y b, existe un punto A perteneciente a la recta a y a la b. (Esta proposición no es sino el axioma I,9)

I,2. Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A y B, existe no más de una recta perteneciente al punto A y al B.

Cualesquiera que sean dos rectas diferentes a y b, existe no más de un punto perteneciente a la recta a y a la b. (Esta proposición se infiere directamente del axioma I,2).

I,3. A cada recta le pertenecen no menos de tres puntos. Existen al menos tres puntos que no pertenecen a una misma recta.

A cada punto pertenecen no menos de tres rectas. Existen no menos de tres rectas que no pertenecen a un mismo punto. (La demostración de esta afirmación se lleva a cabo fácilmente aplicando los axiomas I,1 — I,3).

I,9. Cada dos rectas tienen un punto común.

Cada dos puntos tienen una recta común. (Esta proposición no es sino el axioma I,1).

PROPOSICIÓN DE DESARGUES. Supongamos que no pertenecen a una misma recta tres puntos A, B, C, y tampoco pertenecén a una misma recta tres puntos A', B', C'; luego, tengan un punto común P la recta perteneciente a los puntos A, B, y la recta perteneciente a

Supongamos que no pertenecen a un mismo punto tres rectas a, b, c, y tampoco pertenecen a un mismo punto tres rectas a', b', c'; luego, tengan una recta común p el punto perteneciente a las rectas a, b, y el punto perteneciente a las a', b'; tengan una recta común q el

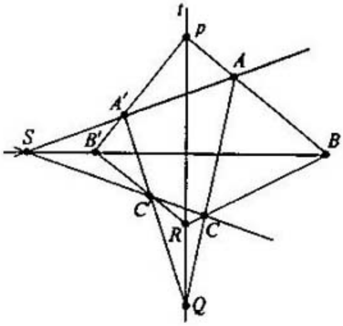


Fig. 117

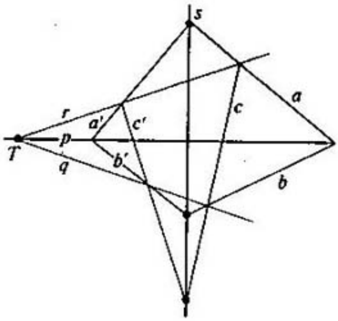


Fig. 118

los A', B'; tengan un punto común Q la recta perteneciente a los puntos B, C, y la recta perteneciente a los B', C', y tengan un punto común R la recta perteneciente a los puntos A, C y la recta perteneciente a los A', C'. De suerte que si los puntos P, Q, R pertenecen a una misma recta t, entonces las tres rectas entre las cuales una pertenece a los puntos A, A', otra, a los B, B' y otra, a los C, C', poseen un punto común S (fig. 117).

punto perteneciente a las rectas b, c, y el punto perteneciente a las b', c', y tengan una recta común r el punto perteneciente a las rectas a, c, y el punto perteneciente a las a', c'. De suerte que si las rectas p, q, r pertenecen a un mismo punto T, entonces los tres puntos entre los cuales uno pertenece a las rectas a, a', otro, a las b, b' y el tercero, a las c, c', poseen una recta común s (fig. 118). (Esta proposición no es sino el teorema 2 recíproco del de Desargues).

De tal forma, en rigor, a cada axioma proyectivo bidimensional del primer grupo es posible poner en correspondencia cierta afirmación correcta (es decir, derivada de los mismos axiomas) así que las proposiciones correspondientes resultan recíprocamente duales.

Pasemos a considerar los axiomas del segundo grupo II,1 — II,6.

El concepto fundamental usado por los axiomas II,1 — II,6 es el de pares separados de puntos sobre la recta; empleando este concepto, se definen los pares separados de rectas que pasan por un mismo punto (véase el § 89). A continuación aparecen los axiomas del segundo grupo al lado de sus proposiciones duales; la validez de estas últimas se infiere inmediatamente de los axiomas I,II y de la definición de

II,1. Cualesquiera que sean tres puntos diferentes A, B, C pertenecientes a una misma recta u, existe tal punto D perteneciente a la recta u, que el par de puntos A, B separa al par de puntos C, D.

Cualesquiera que sean tres rectas diferentes a, b, c pertenecientes a un mismo punto U, existe tal recta d perteneciente al punto U, que el par de rectas a, b separa al par de rectas c, d.

Si el par A, B separa al par C, D, entonces los cuatro puntos A, B, C, D son diferentes.	Si el par a, b separa al par c, d, entonces las cuatro rectas a, b, c, d son diferentes.
II,2. Si el par de puntos A, B separa al par de puntos C, D, entonces el par B, A separa al C, D, y el par C, D separa al A, B.	Si el par de rectas a, b separa al par de rectas c, d, entonces el par b, a separa al c, d, y el par c, d separa al a, b.
II,3. Cualesquiera que sean cuatro puntos diferentes A, B, C, D pertenecientes a la recta u, los mismos pueden componer siempre y de un modo único dos pares separados.	Cualesquiera que sean cuatro rectas diferentes a, b, c, d pertenecientes al punto U, las mismas pueden componer siempre y de un modo único dos pares separados.
II,4. Sean A, B, C, D, E puntos pertenecientes a la recta U; si los pares C, D y C, E separan al par A, B, entonces el par D, E no separa al A, B.	Sean a, b, c, d, e rectas pertenecientes al punto U; si los pares c, d y c, e separan al par a, b, entonces el par d, e no separa al a, b.
II,5. Sean A, B, C, D, E puntos pertenecientes a la recta u; si los pares C, D y C, E no separan al par A, B, entonces el par D, E tampoco separa al A, B.	Sean a, b, c, d, e rectas pertenecientes al punto U; si los pares c, d y c, e no separan al par a, b, entonces el par d, e tampoco separa al a, b.
II,6. Sean a, b y c, d dos pares de rectas que pertenecen a un mismo punto S, siendo u y u' dos rectas que no pertenecen al punto S; luego, sean A, B, C, D puntos pertenecientes a la recta u y, correspondientemente, a las rectas a, b, c, d, siendo A', B', C', D' puntos pertenecientes a la recta u' y, correspondientemente, a las rectas a, b, c, d. Entonces, si el par A, B separa al par C, D, entonces el A', B' separa la C', D'.	Sean A, B y C, D dos pares de puntos que pertenecen a una misma recta s, siendo U y U' dos puntos que no pertenecen a la recta s; luego, sean a, b, c, d rectas pertenecientes al punto U y, correspondientemente, a los puntos A, B, C, D, siendo a', b', c', d' rectas pertenecientes al punto U' y, correspondientemente, a los puntos A, B, C, D. Entonces, si el par a, b separa al par c, d, entonces el a', b' separa al c', d'.

Así pues, también a los axiomas del segundo grupo pueden ponerse en correspondencia proposiciones duales.

Pasemos, por fin, al axioma de continuidad III.

Para poder formular el axioma III (de Dedekind), a su tiempo tuvimos que definir previamente el orden lineal de puntos sobre la recta proyectiva cortada. Hagamos recordar al lector esta definición.

Sea a una recta arbitraria. Elijamos sobre ella algún punto U, y para los demás puntos de la recta a, establezcamos la relación expresada por el término «entre», suponiendo que respecto a los puntos A, B, C el punto C se halla entre A y B, si el par A, B está separado por el C, U. Decimos que en el conjunto de puntos de la recta a, que resulta al eliminarse el punto U, existe establecido el orden lineal si el referido conjunto está ordenado con arreglo a la condición que sigue: cada vez que el punto C esté entre los puntos A y B en el sentido del orden establecido, el punto C se halla entre A y B también en el sentido de la definición recién adoptada.

Con miras a formular la proposición dual del axioma III, vamos a definir el orden lineal en el conjunto de todas las rectas, menos una, que pasan por un mismo punto.

Sea A un punto arbitrario. Entre las rectas que pasan por el punto A, elijamos alguna recta u, y para los demás, establezcamos la relación expresada por el término «entre», suponiendo que respecto a tres rectas a, b, c la recta c pasa entre a y b, si el par a, b está separado por el c, u. Diremos que en el conjunto de todas las rectas que pasan por A, menos la recta u, existe establecido el orden lineal si el referido conjunto está ordenado con arreglo a la condición que sigue: cada vez que la recta c esté entre las rectas a y b en el sentido del orden establecido, la recta c se halla entre a y b también en el sentido de la definición recién adoptada.

Ahora podemos enunciar del modo siguiente el axioma III y su afirmación dual:

AXIOMA III. Sea a recta arbitraria, U, cualquier punto perteneciente a la recta a, y sea introducido el orden lineal en el conjunto de los demás puntos que pertenecen a la referida recta. Si este conjunto está dividido en dos clases de forma que

1) cada punto figura en una, y sólo en una clase;

2) cada clase contiene puntos;

3) cada punto de la primera clase antecede a cada punto de la segunda,

entonces ora en la primera clase existe un punto que sigue (en el sentido del orden establecido) a todos los puntos de dicha clase, ora en la segunda existe un punto que precede a todos los demás puntos suyos.

Sea A un punto arbitrario, u, cualquier recta perteneciente al punto A, y sea introducido el orden lineal en el conjunto de las demás rectas que pertenecen al referido punto. Si este conjunto está dividido en dos clases de forma que

1) cada recta figura en una, y sólo en una clase;

2) cada clase contiene rectas;

3) cada recta de la primera clase antecede a cada recta de la segunda,

entonces ora en la primera clase existe una recta que sigue (en el sentido del orden establecido) a todas las rectas de dicha clase, ora en la segunda existe una recta que precede a las demás rectas suyas.

Podemos cerciorarnos fácilmente de la validez de la proposición dual del axioma III practicando la operación de cortadura. En efecto, sean S un punto arbitrario y u, alguna recta que no pasa por el punto S. A toda recta que pasa por S, hagamos corresponderle el punto de la recta u, perteneciente a ella. Si en el conjunto de todas las rectas, menos una, que pasan por S, así como en el de todos los puntos correspondientes a estas rectas, está introducido el orden lineal, entonces entre los elementos correspondientes de los conjuntos en cuestión se establecerán relaciones de orden bien siempre iguales, bien siempre contrarias. Por ende, el principio de Dedekind tiene lugar en el conjunto de rectas que pasan por S, dado que se registra en el conjunto de puntos de la recta u, es decir, la proposición dual del axioma III es válida a consecuencia del mismo axioma.

Así pues, efectivamente, todo axioma de la geometría proyectiva bidimensional tiene su proposición dual. A base del análisis efectuado, podemos enunciar el siguiente principio:

PRINCIPIO DE DUALIDAD SOBRE EL PLANO. *Sean dados dos conjuntos de objetos llamados correspondientemente puntos y rectas, entre los cuales están establecidas relaciones de pertenencia y de orden observando los requisitos de todos los axiomas de la geometría proyectiva de dos dimensiones. Si cambiamos los papeles de estos objetos, es decir, llamamos rectas a los objetos del primer conjunto y puntos, a los del segundo, dejando invariables las relaciones recíprocas entre ellos, entonces en tal caso nuevamente quedarán satisfechos los requisitos de los axiomas proyectivos.*

§ 121. Obviamente, podemos desarrollar la geometría proyectiva partiendo a discreción ora de los axiomas inicialmente adoptados ora de sus proposiciones duales. Desde el punto de vista lógico, en ambos casos nos ocuparemos de un mismo problema.

Si realizamos de hecho tal construcción dual de la geometría proyectiva, entonces junto con todo teorema proyectivo obtendremos su dual; en tal caso todos los teoremas se agruparán en pares de suerte que, formulada adecuadamente, una proposición del par se convertirá en la otra al cambiar el término «punto» por «recta» y viceversa. Es fácil señalar tal forma abstractamente lógica de apuntar los teoremas de la geometría proyectiva, que una en una sola las proposiciones recíprocamente duales. Para ello, hay que prescindir en absoluto de los términos «punto» y «recta», sustituyéndolos por «objeto de primer género» y «objeto de segundo género». Entonces se podrá interpretar de manera dual cada teorema formulado abstractamente, entendiendo por los puntos los objetos de primer género y por las rectas, los de segundo, atribuyendo en otro caso sentido contrario a los objetos de primero y segundo géneros. Los teoremas recíprocamente duales que resultan de estas interpretaciones, SIENDO APLICADOS A UNA REALIZACIÓN DETERMINADA DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA, exponen, como regla, hechos diferentes. Por ejemplo, la afirmación: «dos objetos de primer género siempre determinan un objeto común a ellos, y sólo uno» conduce a dos proposiciones recíprocamente duales: 1) por dos puntos diferentes pasa siempre una, y sólo una recta, 2) dos rectas diferentes siempre se cruzan en un solo punto.

Si en estas dos proposiciones entendemos de un mismo modo los términos «punto» y «recta», entonces, evidentemente, las referidas proposiciones tendrán sentidos concretos diferentes.

En la geometría proyectiva hay teoremas, y entre ellos figuran teoremas importantes, que se descubrieron en años diferentes y aun en épocas diferentes, pero, siendo recíprocamente duales, coinciden al practicarse la construcción abstractamente lógica de la geometría proyectiva. A título de ejemplos pueden citarse los famosos teoremas de Pascal y de Brianchon (véase el § 143) descubiertos con un intervalo de 100 años, que resultaron lógicamente equivalentes.

Desde el punto de vista contemporáneo, el principio de dualidad no se concibe como un fenómeno sobremanera sorprendente. El mismo se revela fácilmente mediante el aprecio abstractamente lógico de la geometría. Mas, a comienzos del siglo XIX, el descubrimiento del principio de dualidad fue original y progresivo en alto grado; en particular, el principio de dualidad jugó un gran papel en el desarrolo de la concepción abstracta de los objetos geométricos.

En lo que precede, el carácter dual de la geometría proyectiva se manifiesta constantemente en que las proposiciones acerca del sistema de puntos de la recta se ponen en correspondencia a las proposiciones análogas acerca de los elementos del haz. Hagamos constar que la geometría elemental desconoce la dualidad. Así, en las relaciones de pertenencia mutua, los puntos y las rectas de Euclides no son duales unos a otras; en rigor, mientras que sobre el plano de Euclides dos puntos siempre poseen una recta común, dos rectas no siempre poseen un punto común (pueden ser paralelas). Las relaciones de orden también desconocen la dualidad; a saber, todos los puntos de la recta euclidiana están ubicados en orden lineal, siendo cíclico el orden de rayos en el haz. Se revelan fácilmente también las diferencias sustanciales en las relaciones de congruencia de segmentos y de ángulos (no las hay en absoluto en la geometría proyectiva); por ejemplo, sobre el plano euclidiano los triángulos con los lados correspondientemente congruentes son iguales, siendo desiguales, como regla, los triángulos con los ángulos correspondientemente congruentes.

§ 122. Es natural que la dualidad inherente a la geometría proyectiva de dos dimensiones, tenga una cierta expresión analítica.

Para lograr, a la par con la comparación dual de los hechos de la geometría proyectiva, una comparación adecuada de las relaciones analíticas que les corresponden, vamos a introducir *las coordenadas de las rectas*. Más abajo ofrecemos su determinación.

Sobre un plano, sea introducido un sistema de coordenadas homogéneas proyectivas. Entonces, todo punto del plano se determina por la relación de tres puntos x_1, x_2, x_3 y toda recta, por la ecuación del tipo de

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \qquad (*)$$

Los coeficientes u_1, u_2, u_3 de la ecuación (*), convengamos en llamarlos coordenadas de la recta determinada por esta ecuación. Evidentemente, las coordenadas u_1, u_2, u_3 son homogéneas, ya que tres números u_1, u_2, u_3 y tres números ρu_1, ρu_2, ρu_3 determinan una misma recta. Dicho en otros términos, para determinar una recta, es suficiente definir las relaciones $u_1 : u_2 : u_3$. Es evidente también que tres números cualesquiera u_1, u_2, u_3 constituyen coordenadas de cierta recta, excepto el caso de ser iguales a cero los tres números.

De lo que antecede se infiere que si (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de cierto punto P y (u_1, u_2, u_3), las coordenadas de cierta recta p, entonces la relación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

es la condición de pertenencia mutua del punto P y de la recta p. De aquí tenemos dos proposiciones recíprocamente duales que siguen:

Siendo constantes (u_1, u_2, u_3) y variables (x_1, x_2, x_3), la relación

$$(*) \qquad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

determina toda clase de puntos pertenecientes a la recta (u_1, u_2, u_3); en este sentido la misma se llama ecuación de la recta (u_1, u_2, u_3).

Siendo constantes (x_1, x_2, x_3) y variables (u_1, u_2, u_3), la relación

$$(*) \qquad x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$$

determina toda clase de rectas pertenecientes al punto (x_1, x_2, x_3); en este sentido la misma se llama ecuación del punto (x_1, x_2, x_3)*).

*) Además, siendo constantes x_1, x_2, x_3 y variables u_1, u_2, u_3, se suele más llamar a la relación (*) ecuación *del haz* con el centro (x_1, x_2, x_3).

Luego, hagamos notar que si (p_1, p_2, p_3) y (q_1, q_2, q_3) son las coordenadas de dos puntos P y Q, entonces, para cualquier λ, los números $p_1 + \lambda q_1$, $p_2 + \lambda q_2$, $p_3 + \lambda q_3$ son las coordenadas de cierto punto L de la recta PQ. En efecto, sea $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ la ecuación de la recta PQ; las coordenadas de los puntos P y Q deben satisfacer esta ecuación, por consiguiente, $u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0$ y $u_1q_1 + u_2q_2 + u_3q_3 = 0$. Pero entonces

$$u_1(p_1 + \lambda q_1) + u_2(p_2 + \lambda q_2) + u_3(p_3 + \lambda q_3) = 0,$$

es decir, las coordenadas del punto L satisfacen la ecuación de la recta PQ y, por tanto, L en efecto está sobre la recta PQ.

Análogamente, si (v_1, v_2, v_3) y (w_1, w_2, w_3) son las coordenadas de dos rectas v y w, entonces, para cualquier λ, los números $v_1 + \lambda w_1$, $v_2 + \lambda w_2$, $v_3 + \lambda w_3$ son las coordenadas de cierta recta l que pasa por el punto de intersección de las rectas v y w.

Efectivamente, sea O el punto de intersección de las rectas v y w y $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$, su ecuación; las coordenadas de las rectas v y w deben satisfacer esta ecuación, consecuentemente, $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ y $x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 = 0$. Pero entonces

$$x_1(v_1 + \lambda w_1) + x_2(v_2 + \lambda w_2) + x_3(v_3 + \lambda w_3) = 0,$$

es decir, las coordenadas de la recta l satisfacen la ecuación del punto O y, por tanto, l en efecto pasa por el punto O.

En el § 119 mostramos que la relación compleja de los puntos P, Q, L, M con las coordenadas $p_i, q_i, p_i + \lambda q_i, p_i + \mu q_i (i = 1, 2, 3)$ se expresa con la fórmula

$$(PQLM) = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{1}$$

En virtud del principio de dualidad, la relación compleja de las rectas v, w, l, m con las coordenadas $v_i, w_i, v_i + \lambda w_i, v_i + \lambda w_i (i = 1, 2, 3)$ puede expresarse por una fórmula completamente análoga

$$(vwlm) = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{2}$$

De las fórmulas (1) y (2) y del teorema 48 se deducen las siguientes proposiciones recíprocamente duales:

Si los puntos P, Q, L, M tienen coordenadas $p_i, q_i, p_i + \lambda q_i, p_i + \mu q_i (i = 1, 2, 3)$, respectivamente, entonces la condición necesaria y suficiente de la separación armónica de los pares P, Q y L, M es la igualdad

$$\frac{\lambda}{\mu} = -1.$$

Si las rectas v, w, l, m tienen coordenadas $v_i, w_i, v_i + \lambda w_i, v_i + \mu w_i (i = 1, 2, 3)$, recpectivamente, entonces la condición necesaria y suficiente de la separación armónica de los pares v, w y l, m es la igualdad

$$\frac{\lambda}{\mu} = -1.$$

Es fácil comprender que análogamente a los ejemplos citados y en todos los casos de otra índole, las relaciones analíticas correspondientes a los hechos recíprocamente duales de la geometría proyectiva, se convierten unas en otras al sustituir las coordenadas de puntos por las de rectas, y viceversa.

§ 123. PRINCIPIO DE DUALIDAD EN EL ESPACIO PROYECTIVO. En la geometría proyectiva del espacio tenemos objetos de tres tipos, éstos son los puntos, las rectas y los planos, y dos formas de sus relaciones recíprocas: la pertenencia y el orden.

En lugar de las expresiones adoptadas en la geometría intuitiva «el punto se halla sobre la superficie» o «el plano pasa por el punto», convengamos en valernos de la expresión «el punto pertenece al plano» o «el plano pertenece al punto»; en vez de las expresiones «el punto se halla sobre la recta» o «la recta pasa por el punto», convengamos en usar la expresión «el punto pertenece a la recta» o «la recta pertenece al punto»; en lugar de decir «la recta se halla sobre el plano» o «el plano pasa por la recta», digamos «la recta pertenece al plano» o «el plano pertenece a la recta».

Entonces, si formulamos de un modo adecuado los axiomas I,1 — I,9 que establecen las propiedades de las relaciones de pertenencia mutua de los objetos, entonces a cada uno de estos axiomas puede hacérseles corresponder cierta proposición correcta (que se infiere de los axiomas I,1 — I,9) de modo que dos proposiciones que se corresponden, pasan una a otra al cambiar el término «punto» por «plano» y el término «plano» por «punto» (mientras que el término «recta» no debe cambiar). Llamaremos recíprocamente duales a las proposiciones que figuran en la correspondencia señalada.

A continuación se dan de dos en dos los axiomas I,1 — I,9 y sus proposiciones duales; dejamos que las demuestre el lector.

I,1. Cualesquiera que sean dos puntos A y B, existe una recta a que pertenece al punto A y al B.

Cualesquiera que sean dos planos α y β, existe una recta a que pertenece al plano α y al β.

I,2. Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A y B, existe no más de una recta que pertenece a los puntos A y B.

Cualesquiera que sean dos planos diferentes α y β, existe no más de una recta que pertenece a los planos α y β.

I,3. A cada recta pertenecen no menos de tres puntos. Existen al menos tres puntos que no pertenecen a una misma recta.

A cada recta pertenecen no menos de tres planos. Existen al menos tres planos que no pertenecen a una misma recta.

I,4. Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C que no pertenecen a una misma recta, existe cierto plano α perteneciente a los puntos A, B, C. A cada plano le pertenece no menos de un punto.

Cualesquiera que sean tres planos α, β, γ que no pertenecen a una misma recta, existe cierto punto A perteneciente a los planos α, β, γ. A cada punto le pertenece no menos de un plano.

I,5. Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C que no pertenecen a una misma recta, a los mismos les pertenece no más de un plano común.

Cualesquiera que sean tres planos α, β, γ que no pertenecen a una misma recta, a los mismos les pertenece no más de un punto común.

I,6. Si dos puntos A, B pertenecientes a la recta a pertenecen al plano α, entonces cada punto perteneciente a la recta a pertenece al plano α.

Si dos planos α, β pertenecientes a la recta a pertenecen al punto A, entonces cada plano perteneciente a la recta a pertenece al punto A.

I,7. Si a dos planos α, β les pertenece un punto común A, entonces a los mismos les pertenece al menos un punto común B más.

I,8. Hay no menos de cuatro puntos que no pertenecen a un mismo plano.

I,9. Cada dos rectas pertenecientes a un mismo plano, pertenecen a un punto común.

Si a dos puntos A, B les pertenece un plano común α, entonces a los mismos les pertenece al menos un plano común β más.

Hay no menos de cuatro planos que no pertenecen a un mismo punto.

Cada dos rectas pertenecientes a un mismo punto, pertenecen a un plano común.

No hay necesidad de anotar detalladamente las proposiciones duales de los axiomas II, III. El modo de formular las referidas proposiciones se ha dilucidado suficientemente por lo expuesto; las mismas se demuestran mediante razonamientos completamente triviales.

Dado que todas las proposiciones duales de los axiomas proyectivos I, II, III, son válidas (es decir, se deducen de los mismos axiomas), tienen lugar el

PRINCIPIO DE DUALIDAD EN EL ESPACIO. *Sean dados tres conjuntos de objetos llamados correspondientemente puntos, rectas y planos, entre los cuales existen establecidas las relaciones de pertenencia y de orden observando las exigencias de todos los axiomas de la geometría proyectiva. Si cambiamos los papeles de estos objetos llamando planos a los del primer conjunto, puntos, a los del tercero (reservando el nombre primitivo para los objetos del segundo conjunto), sin cambiar las relaciones mutuas entre ellos, entonces en este caso nuevamente serán satisfechas las exigencias de los axiomas proyectivos.*

Obviamente, se puede desarrolar la geometría proyectiva espacial, al igual que la de dos dimensiones, arrancando a discreción bien de los axiomas inicialmente adoptados, bien de sus proposiciones duales.

Si practicamos tal construcción dual de la geometría proyectiva, entonces junto con cada teorema proyectivo se obtendrá su teorema dual.

Por supuesto, si, al demostrar cierto teorema proyectivo, queremos obtener su teorema dual, no tenemos que aducir de hecho su demostración; la formulación del teorema dual se deduce de la del teorema dado, cambiando los términos según el esquema:

punto — plano,

recta — recta,

plano — punto,

y su validez se establece por el principio de dualidad.

Siendo fija la elección de objetos geométricos, las proposiciones recíprocamente duales expresan, como regla, diferentes hechos concretos. Por ejemplo, todos los teoremas sobre las figuras compuestas por puntos y rectas de un mismo plano, proporcionan, a título de sus duales, teoremas sobre los cuerpos compuestos por rectas y planos que pasan por un mismo punto; dicho en otros términos, la dual de la geometría sobre el plano es la geometría de la radiación.

§ 124. Ateniéndonos al principio de dualidad, vamos a introducir las coordenadas de planos, a la par de las de puntos. A saber, llamaremos coordenadas del plano arbitrario α a los coeficientes u_1, u_2, u_3, u_4 de su ecuación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

que determina el plano α en algún sistema de coordenadas homogéneas proyectivas.

Evidentemente, las coordenadas (u_1, u_2, u_3, u_4) son homogéneas, puesto que los cuatro números u_1, u_2, u_3, u_4 y los cuatro números $\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho u_4$ determinan un mismo plano. Pues bien, para determinar un plano, es suficiente preestablecer las relaciones $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$. Es notorio que cualesquiera cuatro números u_1, u_2, u_3, u_4 constituyen las coordenadas de cierto plano, excepto el caso de ser iguales a cero estos cuatro números.

Por lo antes dicho, si (x_1, x_2, x_3, x_4) son las coordenadas de algún punto P y (u_1, u_2, u_3, u_4), las de cierto plano α, entonces la relación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

es la condición de la pertenencia mutua del punto P y el plano α. De aquí tenemos dos proposiciones recíprocamente duales:

Siendo constantes (u_1, u_2, u_3, u_4) y variables (x_1, x_2, x_3, x_4), la relación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

define todo género de puntos pertenecientes al plano (u_1, u_2, u_3, u_4); en este sentido la misma se llama ecuación del plano.

Siendo constantes (x_1, x_2, x_3, x_4) y variables (u_1, u_2, u_3, u_4), la relación

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0$$

define todo género de planos pertenecientes al punto (x_1, x_2, x_3, x_4); en este sentido la misma se llama ecuación de la radiación de planos.

A continuación nos cercioramos fácilmente de la validez de las afirmaciones siguientes:

Si $x_i, y_i, z_i (i = 1, 2, 3, 4)$ son coordenadas de tres puntos X, Y, Z, entonces las relaciones

$$p_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i,$$

para cualesquiera α, β, γ (excepto $\alpha = \beta = \gamma = 0$), determinan las coordenadas del punto P que pertenece al plano XYZ; por ende, las relaciones señaladas se llaman ecuaciones paramétricas del referido plano.

Si $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ son coordenadas de tres planos α, β, γ, entonces las relaciones

$$\pi_i = u\alpha_i + v\beta_i + w\gamma_i,$$

para cualesquiera u, v, w (excepto $u = v = w = 0$), determinan las coordenadas del punto π que pertenece al punto común de los planos α, β, γ; por ende, las relaciones señaladas se llaman ecuaciones paramétricas de la radiación de planos con el centro en el referido punto.

Si $x_i, y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ son coordenadas de dos puntos X, Y, entonces las relaciones

$$(*) \qquad p_i = \alpha x_i + \beta y_i,$$

para cualesquiera α, β (excepto $\alpha = \beta = 0$), definen las coordenadas del punto P perteneciente a la recta XY;

Si $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2, 3, 4)$ son coordenadas de dos planos α, β, entonces las relaciones

$$(*) \qquad \pi_i = u\alpha_i + v\beta_i,$$

para cualesquiera u, v (excepto $u = v = 0$), definen las coordenadas del plano π perteneciente a la recta según la por ende, las relaciones señaladas se llaman ecuaciones paramétricas de la referida recta.

Si dividimos las igualdades (*) por α, poniendo $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, entonces las coordenadas variables p_i se expresarán mediante un solo parámetro:

$$p_i = x_i = \lambda y_i.$$

cual se cortan los planos α y β; por ende, las relaciones señaladas se llaman ecuaciones paramétricas de la referida recta (en coordenadas de plano).

Si dividimos las igualdades (*) por u, poniendo $\frac{v}{u} = t$, entonces las coordenadas variables π_i se expresarán mediante un solo parámetro:

$$\pi_i = \alpha_i + t\beta_i.$$

En el primer caso, siendo diferentes los valores del parámetro, las ecuaciones definen el conjunto de puntos pertenecientes a la recta, en el segundo, el conjunto de planos pertenecientes a la recta.

Conforme al § 119, la relación compleja de cuatro puntos X, Y, L, M con las coordenadas x_i, y_i, $x_i + \lambda y_i$, $x_i + \mu y_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) se expresa por la fórmula

$$(XYLM) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

En virtud del principio de dualidad, de aquí se infiere que la relación compleja de cuatro planos α, β, τ, σ con las coordenadas α_i, β_i, $\alpha_i + t\beta_i$, $\alpha_i + s\beta_i$($i = 1, 2, 3, 4$) se expresa por la fórmula

$$(\alpha\beta\tau\sigma) = \frac{t}{s}.$$

Análogamente a los ejemplos aducidos, también en otros casos las relaciones analíticas correspondientes a hechos recíprocamente duales, pasan unas a otras al sustituir las coordenadas de puntos por las de planos y al sustituir las coordenadas de planos por las de puntos.

12. Curvas y haces algebraicos. Superficies y radiaciones algebraicas. Plano proyectivo complejo y espacio proyectivo complejo

§ 125. En la geometría proyectiva sobre el plano, uno de los principales objetos de investigación son las curvas algebraicas y los haces algebraicos correspondientes a ellas según el principio de dualidad. Más abajo se ofrece su definición:

Se llama *curva algebraica* al conjunto de puntos cuyas coordenadas homogéneas proyectivas satisfacen cierta ecuación homogénea algebraica, es decir, a la ecuación del tipo de

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n} = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 1, 2, 3),$$

Se llama *haz algebraico* al conjunto de rectas cuyas coordenadas homogéneas proyectivas satisfacen cierta ecuación homogénea algebraica, es decir, a la ecuación del tipo de

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \ldots u_{\alpha_n} = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 1, 2, 3),$$

donde a la izquierda está una forma homogénea de grado n; los coeficientes $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ se suponen independientes respecto a la sucesión de los índices. El grado n de esta ecuación se llama orden de la curva algebraica.

donde a la izquierda está una forma homogénea de grado n; los coeficientes $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ se suponen independientes respecto a la sucesión de los índices. El grado n de esta ecuación se llama clase del haz algebraico.

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ correspondientemente se tienen:

una línea de primer orden determinada por la ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

es decir, un cúmulo de puntos pertenecientes a una misma recta; una línea de segundo orden determinada por la ecuación

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + $$
$$+ 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0;$$

una línea de tercer orden determinada por la ecuación

$$a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + 3a_{122}x_1x_2^2 +$$
$$+ a_{222}x_2^3 + 3a_{223}x_2^2x_3 + 3a_{233}x_2x_3^2 +$$
$$+ 3a_{113}x_1^2x_3 + 3a_{133}x_1x_3^2 +$$
$$+ 6a_{123}x_1x_2x_3 + a_{333}x_3^3 = 0, \text{ etc.}$$

un haz de primera clase determinado por la ecuación

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0,$$

es decir, un cúmulo de rectas pertenecientes a un mismo punto; un haz de segunda clase determinada por la ecuación

$$a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 +$$
$$+ 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2 = 0;$$

un haz de tercera clase determinado por la ecuación

$$a_{111}u_1^3 + 3a_{112}u_1^2u_2 + 3a_{122}u_1u_2^2 +$$
$$+ a_{222}u_2^3 + 3a_{223}u_2^2u_3 + 3a_{233}u_2u_3^2 +$$
$$+ 3a_{113}u_1^2u_3 + 3a_{133}u_1u_3^2 +$$
$$+ 6a_{123}u_1u_2u_3 + a_{333}u_3^3 = 0, \text{ etc.}$$

Conforme a la definición enunciada, las líneas algebraicas se distinguen entre todas las líneas en general según el tipo de sus ecuaciones. Es natural preguntar: ¿puede alterarse el carácter algebraico de una ecuación al pasar de un sistema de coordenadas proyectivas a otro? En tal caso no tendría sentido introducir el concepto de línea algebraica en la geometría. Sin embargo, como es fácil mostrar, el carácter algebraico y el grado de la ecuación son invariantes respecto a la transformación de las coordenadas proyectivas. En rigor, sabemos que al cambiar de sistema proyectivo de coordenadas homogéneas, las coordenadas primitivas de los puntos del plano pasan a ser funciones homogéneas lineales de las nuevas, y las coordenadas nuevas, a su vez, se expresan lineal y homogéneamente a base de las primitivas. Pero, evidentemente, en este caso obtendremos en nuevas coordenadas una forma también homogénea y, además, del mismo grado n que la inicial. Por consiguiente, el concepto de curva algebraica y de su orden tiene un sentido geométrico que no depende de la elección del sistema de coordenadas.

Para establecer una propiedad análoga de la definición de los haces algebraicos, en primer lugar hay que deducir las fórmulas que rigen el cambio de las coordenadas homogéneas de rectas al cambiar el sistema de coordenadas proyectivas. Con este objeto escribamos la ecuación de una recta arbitraria:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (*)$$

y la ecuación de esta misma recta en nuevas coordenadas:

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = 0. \qquad (^{**})$$

Sean

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

las relaciones entre las nuevas coordenadas de puntos y las primitivas.

Dado que las ecuaciones (*) y (**) determinan una misma recta, entonces, para x_1, x_2, x_3 cualesquiera debe tener lugar la relación

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = \mu(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3);$$

al sustituir aquí x_1', x_2', x_3' por sus expresiones basadas en x_1, x_2, x_3, obtendremos la identidad

$$\frac{1}{\rho'}[(c_{11}u_1' + c_{21}u_2' + c_{31}u_3')\,x_1 + (c_{12}u_1' + c_{22}u_2' + c_{32}u_3')x_2 +$$

$$+ (c_{13}u_1' + c_{23}u_2' + c_{33}u_3')\,x_3] = \mu(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3).$$

Suponiendo $\rho'\mu = \sigma$, de aquí hallaremos:

$$\left.\begin{aligned} \sigma u_1 &= c_{11}u_1' + c_{21}u_2' + c_{31}u_3' \\ \sigma u_2 &= c_{12}u_1' + c_{22}u_2' + c_{32}u_3' \\ \sigma u_3 &= c_{13}u_1' + c_{23}u_2' + c_{33}u_3' \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Precisamente éstas son las relaciones entre las viejas coordenadas de rectas y las nuevas que necesitamos. De tal modo, las fórmulas de transformación de las coordenadas de rectas tienen la misma estructura que las de transformación de las coordenadas de puntos (en este caso el determinante de la transformación (β) es igual al de la transformación (α) y, luego, $\neq 0$). Consecuentemente, el concepto de haz algebraico y de su clase, al igual que el de curva algebraica y de su orden, tiene un sentido geométrico independiente de la elección del sistema de coordenadas.

Se entiende que al cambiar las viejas variables por las formas lineales de las nuevas en las ecuaciones algebraicas, resulta una ecuación cuyos coeficientes, como regla, difieren de los de la ecuación inicial. También está claro que todas las propiedades geométricas de las líneas y los haces y todas las magnitudes geométricas relacionadas con ellas, deben representarse analíticamente por tales relaciones entre los coeficientes de las ecuaciones y por tales funciones de dichos coeficientes, que no varían al cambiar el sistema de coordenadas proyectivas.

De tal manera, *la tarea de la investigación de las rectas y los haces algebraicos en la geometría proyectiva sobre el plano equivale a la tarea algebraica de la investigación de las invariantes de las formas homogéneas con tres argumentos.*

Una observación más.

Al examinar las fórmulas (α) y (β), podemos estimar también que las coordenadas que figuran en ellas, corresponden a un mismo sistema; entonces, por ejemplo, en las fórmulas (α) los números x_1, x_2, x_3 y x_1', x_2', x_3' serán ya no coordenadas distintas de un mismo punto, sino coordenadas de puntos diferentes M y M'. Según sabemos, la aplicación del plano proyectivo sobre sí mismo, debido a la cual el punto M

pasa al M' determinado por las fórmulas (α), es proyectiva. Merced a tal aprecio de las fórmulas (α) y (β) (como fórmulas de la aplicación proyectiva), la invariación de la estructura de la ecuación de las imágenes algebraicas respecto a las transformaciones (α) y (β) significa que *en la aplicación proyectiva las imágenes algebraicas de cualquier orden o clase se aplican en imágenes algebraicas del mismo orden o de la misma clase.*

Luego, es obvio que al practicar cierta aplicación proyectiva determinada por las fórmulas (α), y al cambiar simultáneamente las coordenadas proyectivas con arreglo a las mismas fórmulas, la imagen algebraica arbitraria A en el sistema (x_1, x_2, x_3) y la imagen A' que le corresponde proyectivamente en el sistema (x_1', x_2', x_3'), tendrán ecuaciones iguales. Por cuanto las imágenes algebraicas que pueden aplicarse proyectivamente una sobre otra, tienen ecuaciones idénticas en las coordenadas convenientes, las mismas tienen también imágenes algebraicas idénticas. Esto corresponde a la condición general para toda la geometría proyectiva de considerar equivalentes las figuras que pasan unas a otras gracias a la aplicación proyectiva (lo mismo que en la geometría elemental se consideran iguales las figuras que coinciden al efectuar movimientos).

§ 126. Una recta arbitraria contiene no más de n puntos de una línea de orden n o consta por entero de puntos de la referida línea. Efectivamente, sea

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n} = 0$$

la ecuación de cierta línea de orden n, p_i y $q_i (i = 1, 2, 3)$, las coordenadas de dos puntos P y Q. Las coordenadas $x_i (i = 1, 2, 3)$ de un punto arbitrario de la recta PQ pueden expresarse como funciones del parámetro λ:

$$x_i = p_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Estas fórmulas determinan los puntos comunes de la recta PQ y de la línea dada, si λ satisface la ecuación

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}(p_{\alpha_1} + \lambda q_{\alpha_1})(p_{\alpha_2} + \lambda q_{\alpha_2}) \ldots (p_{\alpha_n} + \lambda q_{\alpha_n}) = 0. \qquad (*)$$

Supongamos que el punto Q se ha elegido observando la condición de

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} \ldots q_{\alpha_n} \neq 0$$

(lo cual es posible si la recta no está compuesta por entero de puntos de la línea dada). En tal caso, el primer miembro de la ecuación (*) contiene λ^n, y dicha ecuación tiene grado n. Dado que a toda raíz real λ_i le corresponde cierto punto de intersección de la recta PQ con la línea algebraica dada, y el número de raíces reales de la ecuación (*) no es superior a n, el número máximo de puntos comunes de la recta y de la línea de orden n efectivamente es igual a n.

Análogamente, un punto arbitrario contiene no más de n rectas de un haz de clase n, o todas las rectas que le pertenecen, figuran en el haz. En efecto, sean

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \ldots u_{\alpha_n} = 0$$

la ecuación de cierto haz de clase n y S, algún punto determinado por la intersección de dos rectas v y w con las coordenadas v_i y $w_i (i = 1, 2, 3)$. Las coordenadas $u_i (i = 1, 2, 3)$ de una recta arbitraria perteneciente al punto S, pueden expresarse como funciones del parámetro λ:

$$u_i = v_i + \lambda w_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Estas fórmulas determinan las rectas que pertenecen al punto S y al haz dado, si λ satisface ecuación

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(v_{\alpha_1} + \lambda w_{\alpha_1})(v_{\alpha_2} + \lambda w_{\alpha_2}) \ldots (v_{\alpha_n} + \lambda w_{\alpha_n}) = 0. \qquad (^{**})$$

Supongamos que la recta w se ha elegido observando la condición de

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \ldots w_{\alpha_n} \neq 0$$

(lo cual es posible si no todas las rectas pertenecientes al punto S figuran en el haz dado). En este caso el primer miembro de la ecuación (**) comprende λ^n, y la referida ecuación tiene grado n. Puesto que a toda raíz real λ_i le corresponde una recta perteneciente al punto S y al haz algebraico dado, y el número de raíces reales de la ecuación (**) no es superior a n, el número máximo de rectas del haz que pasan por el punto S, efectivamente es igual a n.

Las proposiciones demostradas hacen pensar que el orden de la curva algebraica puede interpretarse desde el punto de vista de la geometría intuitiva, como número máximo de puntos de la referida curva que pertenecen a una misma recta, y la clase del haz, como número máximo de sus rectas pertenecientes a un mismo punto. No obstante, es fácil comprender que tal interpretación sería errónea. A saber, existen tales líneas de orden n que tienen menos de n puntos comunes con CUALQUIER recta. A modo de ejemplo basta señalar la línea de 2° orden $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ que carece de puntos en absoluto.

Entretanto, la interpretación geométrica mencionada del orden de la curva y de la clase del haz será posible siempre que ampliemos el conjunto de elementos del plano proyectivo agregándole nuevos elementos «imaginarios». La introducción de elementos imaginarios en la geometría es tan conveniente como la introducción de números imaginarios en el álgebra, pues posibilita la sencillez adecuada de las formulaciones de muchos teoremas.

A continuación se expone el principio de la introducción de elementos imaginarios sobre el plano proyectivo.

§ 127. Sean dados dos conjuntos de objetos llamados correspondientemente puntos y rectas, entre los cuales están establecidas las relaciones de pertenencia y de orden observando las exigencias de los axiomas proyectivos bidimensionales (dicho en otros términos, sea dado un plano proyectivo). Entonces, según sabemos, a todos los puntos pueden ponerse en correspondencia biunívocamente, obedeciendo a una cierta ley, las relaciones de números reales x_1, x_2, x_3 llamados coordenadas homogéneas proyectivas de puntos y, a todas las rectas, las relaciones de números reales u_1, u_2, u_3 llamados coordenadas proyectivas de rectas. Convengamos en llamar *punto imaginario a cualquier sistema de tres números complejos* x_1, x_2, x_3 si al menos uno de ellos difiere de cero y si la relación de al menos dos de ellos no puede expresarse mediante un número real; consideraremos coincidentes los puntos (x_1, x_2, x_3) y $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$, donde ρ es cualquier número complejo desigual a cero. Bajo las mismas condiciones llamaremos *recta imaginaria* a la terna de números complejos u_1, u_2, u_3. De tal forma, cualquier terna de números puede considerarse tanto como punto así como recta.

Si cambia el sistema de coordenadas proyectivas, entonces las coordenadas de todos los puntos se transforman de acuerdo a las fórmulas (α) del § 125, mientras que las coordenadas de todas las rectas se transforman a base de las fórmulas (β).

Consideraremos que estas fórmulas definen las coordenadas de los puntos y las rectas imaginarios en todo nuevo sistema de coordenadas proyectivas que se introduce.

Así pues, se da un sentido invariante al concepto de puntos y rectas imaginarios. Precisamente, podemos decir que *los puntos y las rectas imaginarios son ciertos objetos que se determinan por ternas de números complejos con las relaciones complejas, correspondientemente a todo sistema de coordenadas proyectivas; en un mismo sistema de coordenadas, dos ternas de números determinan un mismo objeto si son proporcionales los números que figuran en ellas; en los sistemas de coordenadas diferentes, dos ternas de números determinan un mismo objeto si están enlazadas por las relaciones* (α) *o las* (β), *en función de si es punto o recta el referido objeto.*

Para el conjunto ampliado de objetos se establecen las relaciones de pertenencia mutua: el punto (x_1, x_2, x_3) se considera perteneciente a la recta (u_1, u_2, u_3) bajo la condición de $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. De los cálculos que nos condujeron a las fórmulas (β), se infiere que dicha condición tiene un sentido invariante (es decir, si para un punto real o imaginario dado y para una recta real o imaginaria dada la referida condición se observa en un sistema de coordenadas, entonces la misma se observará también en otro sistema cualquiera).

No se introducen las relaciones de orden para los objetos imaginarios. Llamaremos *plano proyectivo complejo* al conjunto de puntos y rectas reales del plano proyectivo, completado por elementos imaginarios.

Lo mismo que los puntos y las rectas, las demás imágenes algebraicas del plano proyectivo complejo se dividen en reales e imaginarias. Se llaman reales las imágenes algebraicas que pueden representarse por las ecuaciones con los coeficientes reales, llamándose imaginarias las que pueden representarse sólo por las ecuaciones con los coeficientes complejos. Para evitar juicios erróneos, hagamos constar aquí mismo que pueden ser reales las imágenes compuestas exclusivamente por elementos imaginarios; por ejemplo, la línea $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ es real, sin embargo no tiene ningún punto real*).

Sobre el plano proyectivo complejo, cada línea algebraica de orden n posee n puntos de intersección con toda recta (si se considera adecuadamente la multiplicidad de los puntos). En rigor, volvamos al examen aducido al comienzo del presente párrafo. La ecuación (*) tiene n raíces reales o complejas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, a cada una de las cuales están puestos en correspondencia tres números mediante las fórmulas

$$x_i = p_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ya que introdujimos elementos imaginarios en la consideración, ahora podemos estimar como coordenadas de cierto punto los tres números (x_1, x_2, x_3), sean reales o complejos. Los puntos correspondientes a las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son puntos comunes de la línea y de la recta sujetas al examen. Si al computar estos puntos contamos los que corresponden a las raíces múltiples, tantas veces cuantas unidades tiene el índice de multiplicidad, entonces siempre tendremos n puntos de intersección de la recta con una línea de orden n.

Para los haces, los razonamientos son análogos.

---

*) Si admitimos las transformaciones de coordenadas según las fórmulas (α) y (β) con los valores complejos de los coeficientes c_{ik}, entonces la diferencia entre las imágenes imaginarias y reales perderá el sentido invariante.

Así pues, sobre el plano proyectivo complejo

el orden de la línea algebraica es igual al número de puntos de esta línea, pertenecientes a alguna recta;

la clase del haz algebraico es igual al número de rectas de este haz, que pasan por algún punto.

Al concluir el presente párrafo, hagamos notar que el haz algebraico constituye, como regla, un sistema de rectas tangentes a la línea algebraica.

En efecto, debido a que sobre el plano proyectivo toda recta $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ se determina al fijar dos parámetros $u_1 : u_2 : u_3$, y la ecuación del haz establece un solo enlace entre dichos parámetros, el haz algebraico es una familia uniparamétrica de rectas; mas, la familia uniparamétrica tiene, como regla, una envolvente; de tal suerte, el haz algebraico se compone de rectas tangentes a una línea. El hecho de que la referida línea es algebraica, se establece por cálculos no complicados a base de los métodos generales de la teoría de las envolventes.

La observación enunciada permitirá al lector dar cierta clara evidencia a la noción sobre los haces algebraicos.

§ 128. Las líneas algebraicas y los haces algebraicos, patentemente, son conceptos recíprocamente duales de la geometría proyectiva. A la envolvente del haz algebraico le corresponde según el principio de dualidad el haz de tangentes de la curva algebraica. A fin de explicarnos tal correspondencia, tenemos que tomar en consideración el hecho de que la envolvente del haz consta de puntos característicos, cada uno de los cuales es punto común de dos rectas infinitamente próximas del haz; es del todo evidente que al punto característico del haz le corresponde según el principio de dualidad una tangente a la curva, es decir, una recta que pasa por dos puntos suyos infinitamente próximos. Por tanto, al conjunto de puntos característicos del haz algebraico (es decir, de la envolvente) le corresponde, como imagen dual, un conjunto de tangentes a la línea algebraica (es decir, el haz algebraico envuelto por dicha línea).

En la geometría proyectiva se trata frecuentemente de la clase de la curva y del orden del haz.

Se llama *clase de la recta algebraica* a la clase del haz algebraico de sus tangentes.

Se puede expresarlo en otros términos: es clase de la curva el número de tangentes (reales o imaginarias) que pueden trazarse a ella desde un punto arbitrario del plano.

Se llama *odren del haz algebraico* al orden de su envolvente.

Se puede expresarlo en otros términos: es orden del haz el número de sus puntos característicos (reales o imaginarios) situados sobre una misma recta.

La clase y el orden de una misma imagen algebraica, como regla, son diferentes.

§ 129. No tenemos la posibilidad de aducir aquí los teoremas sustanciales de la teoría general de las curvas algebraicas; nos limitaremos a emitir sólo unas cuantas observaciones. De las proposiciones fundamentales del álgebra y del análisis se sigue que la curva algebraica, a diferencia de ciertas curvas transcendentes (es decir, no algebraicas), no puede tener puntos de terminación ni tener forma de un hilo infinito arrollado en un plano proyectivo. Dicho en otros términos, todas las líneas algebraicas son cerradas. Por ejemplo, las líneas algebraicas del plano de Euclides —la parábola y la hipérbola— conocidas por el lector, al completarse por elementos infinitamente alejados el plano euclidiano, se cierran en el infinito, y de tal modo pasan a ser curvas cerradas sobre el plano ampliado (es decir, sobre el plano proyectivo).

Asimismo se puede demostrar que el número de trozos individuales de toda curva algebraica es finito.

En lo que se refiere al problema de la clasificación de las curvas algebraicas, diremos que si $n > 3$, este problema pasa a los dominios complejos del álgebra (precisamente, a la teoría de los invariantes de las formas homogéneas de tres argumentos) y constituye el objeto de tratados especiales.

§ 130. El espacio proyectivo real puede completarse por elementos imaginarios de manera plenamente análoga a como lo hicimos en el caso del plano. A saber, primero se puede determinar los puntos imaginarios y los planos imaginarios y la relación de pertenencia de los puntos y los planos reales e imaginarios (análogamente a la definición de los puntos imaginarios, las rectas imaginarias y la relación de pertenencia en el § 127); luego, en calidad de recta arbitraria, se puede considerar un conjunto de puntos de intersección de algunos dos planos (en este caso, serán rectas nuevas, es decir, imaginarias, las que no se determinan por la intersección de los planos reales). El conjunto de elementos reales e imaginarios obtenido así, con una relación de pertenencia y de orden (de puntos reales sobre rectas reales) prefijada se llama *espacio proyectivo complejo*.

En el espacio proyectivo complejo se determinan las superficies y las radiaciones algebraicas (que constituyen análogos espaciales de las curvas y los haces algebraicos).

Se llama *superficie algebraica* al conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_m} = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m = 1, 2, 3, 4),$$

cuyo primer miembro es una forma homogénea de las variables x_1, x_2, x_3, x_4 de grado m. El número m se llama *orden de la superficie*.

Se llama *radiación algebraica* al conjunto de planos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$\Sigma a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \dots u_{\alpha_m} = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m = 1, 2, 3, 4),$$

cuyo primer miembro es una forma homogénea de las variables u_1, u_2, u_3, u_4 de grado m. El número m se llama *clase de la radiación*.

Las imágenes algebraicas se llaman *reales* si pueden representarse por ecuaciones con coeficientes reales.

Aplicando los razonamientos aducidos en el § 126 al caso de tres dimensiones, se puede demostrar que

el orden de la superficie algebraica es igual al número de sus puntos (reales e imaginarios) que pertenecen a una misma recta.

la clase de la radiación algebraica es igual al número de sus planos (reales e imaginarios) que pasan por una misma recta.

Al concluir, observemos que no todas las propiedades de las ecuaciones de imágenes algebraicas expresan las propiedades geométricas de las referidas imágenes, sino solamente las que subsisten después de cualquier transformación de las coordenadas proyectivas.

De tal manera, *la tarea de la investigación de las superficies y las radiaciones algebraicas en la geometría proyectiva tridimensional equivale a la tarea algebraica de la investigación de los invariantes de formas homogéneas de cuatro argumentos.*

13. Imágenes de segundo grado. Teoría de las polares

La tarea general de la investigación de las imágenes algebraicas de las imágenes algebraicas de orden o de clase m dados consiste en hallar el sistema completo de los invariantes de la ecuación homogénea de grado m, es decir, de tal sistema de funciones de los coeficientes de una ecuación de grado m las cuales

1) son invariantes respecto a la transformación homogénea lineal de los argumentos del primer miembro de la ecuación,

2) son tales que si para dos ecuaciones de grado m con los coeficientes numéricamente definidos estas funciones toman valores correspondientemente iguales, entonces las ecuaciones dadas se transforman unas en otras por medio de cierta transformación lineal de los argumentos.

Dicho en otros términos, conociendo el sistema completo de los invariantes de una ecuación de grado m, en el caso de dos imágenes arbitrarias de orden o de clase m, siempre podemos resolver el problema de si son proyectivamente idénticas o no.

Aun en la geometría de dos dimensiones, para m grandes, esta tarea ofrece ingentes dificultades. Para $m = 3$, la misma se hizo avanzar por Newton*) quien clasificó globalmente las líneas de tercer orden, es decir, señaló todos los géneros proyectivamente diferentes de las referidas líneas, entre las cuales las demás se obtienen mediante transformaciones proyectivas. El caso de $m = 2$ es el más simple, está estudiado completamente por medios bien elementales. En la presente sección lo consideraremos con ciertos detalles.

En este examen nos limitaremos preferentemente a la geometría de dos dimensiones; casi todos los resultados que obtenemos, se aplican a la geometría de tres dimensiones introduciendo modificaciones normalizadas en las formulaciones y las ecuaciones. Hagamos notar además que al estudiar las imágenes de segundo grado será suficiente investigar las líneas de segundo orden; entonces, las propiedades de los haces de segunda clase pueden obtenerse por medio del principio de dualidad.

Empezaremos por exponer la teoría de las polares que juega un importante papel en la investigación general de las imágenes de 2° grado.

§ 131. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES MÁS PRINCIPALES DE LAS POLARES. Sea dada cierta línea (real) de segundo orden determinada por la ecuación

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{α}$$

*) Véase *F. Klein*, Gesammelte mathematische Abhandlungen, £ 36, Vols 1 — 3, Berlín, 1921 — 23.

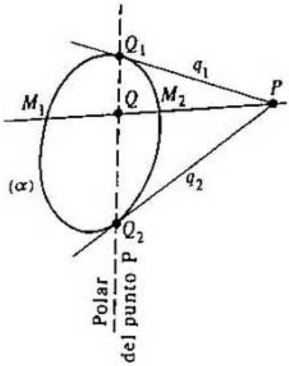


Fig. 119

que se apunta detalladamente de forma que sigue:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Diremos que los puntos P y Q están armónicamente situados respecto a la línea de segundo orden dada (α), si el par de puntos P, Q está armónicamente conjugado con el par de puntos M_1, M_2, en los cuales la referida línea atraviesa a la recta PQ (fig. 119).

El lugar geométrico de los puntos armónicamente situados con el punto P respecto a una línea de segundo orden se llama POLAR *del punto P respecto a esta línea.*

Ahora vamos a demostrar que la polar es línea recta. Con este fin deduzcamos la ecuación de la polar.

Preliminarmente, procuremos obtener una condición para las coordenadas p_i y q_i de los puntos P y Q, bajo la cual los puntos P, Q están armónicamente situados respecto a la línea (α). Según sabemos, las coordenadas x_i de cualquier punto M situado sobre la recta PQ, tienen forma de

$$x_i = p_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Hallaremos los puntos comunes de la línea (α) y la recta PQ si en calidad de λ elegimos las raíces λ_1 y λ_2 de la ecuación cuadrática

$$\Sigma a_{ik}(p_i + \lambda q_i)(p_k + \lambda q_k) = 0$$

que puede escribirse en forma de

$$\lambda^2 \Sigma a_{ik}q_iq_k + \lambda(\Sigma a_{ik}p_iq_k + \Sigma a_{ik}p_kq_i) = \Sigma a_{ik}p_iq_k = 0$$

o, a consecuencia de la simetría $a_{ik} = a_{ki}$, en forma de

$$\lambda^2 \Sigma a_{ik}q_iq_k + 2\lambda \Sigma a_{ik}p_ip_k + \Sigma a_{ik}p_ip_k = 0.$$

Conforme al § 119, dos pares de puntos p_i, q_i y $p_i + \lambda_1 q_i$, $p_i + \lambda_2 q_i$ están armónicamente conjugados si $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$ ó $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. De aquí y a consecuencia del teorema de Viete tenemos la condición buscada de la posición armónica de los puntos P, Q respecto a la línea (α):

$$\Sigma a_{ik} p_i q_k = 0. \qquad (\beta)$$

Suponiendo que Q es un punto arbitrario armónicamente situado con el punto P respecto a la línea (α) y sustituyendo las notaciones de sus coordenadas q_1, q_2, q_3 por x_1, x_2, x_3, obtendremos la ecuación de la polar del punto P

$$\Sigma a_{ik} p_i x_k = 0 \qquad (\gamma)$$

con las coordenadas variables x_k. Apuntada detalladamente, la ecuación (γ) tiene forma de

$$(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)x_2 + \\ + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0. \qquad (\delta)$$

Vemos que ésta es una ecuación de primer grado; consiguientemente, la polar en efecto es una línea recta.

Si introducimos las notaciones $\Sigma a_{ik} p_i p_k = \Phi(p_1, p_2, p_3)$, entonces podemos apuntar la ecuación de la polar en forma de

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} x_3 = 0.$$

Según su forma, la misma no se diferencia de la ecuación, representada en coordenadas homogéneas, de la recta tangente a la línea $\Phi(p_1, p_2, p_3) = 0$ en el punto (p_1, p_2, p_3); esta ecuación es bien conocida en el análisis y en la geometría diferencial. Ya que la definición de la tangente y la deducción de su ecuación, corrientes en el análisis, se basan sólo en las propiedades de las líneas que tienen lugar en la geometría proyectiva, con derecho podemos afirmar el teorema siguiente.

TEOREMA 49. *Si el punto P se halla sobre una línea de segundo orden, entonces es polar suya la recta tangente a la línea dada en este punto.*

Luego, ha de señalarse un importante teorema relativo a las polares de puntos arbitrarios:

TEOREMA 50 (PRINCIPIO DE RECIPROCIDAD EN LA TEORÍA DE LAS POLARES). *Si la polar del punto P pasa por el punto Q, entonces la polar del punto Q pasa por el punto P.*

La demostración de esta proposición se infiere directamente de la ecuación de la polar. En rigor, si p_i son las coordenadas del punto P, entonces la polar del referido punto tiene la ecuación

$$\Sigma a_{ik} p_i x_k = 0,$$

y si q_i son las coordenadas del punto Q, entonces la polar del punto Q tiene la ecuación

$$\Sigma a_{ik} q_i x_k = 0.$$

Dada la simetría $a_{ik} = a_{ki}$, tenemos:

$$\Sigma a_{ik} p_i q_k = \Sigma a_{ik} q_i p_k.$$

Por eso, la igualdad $\Sigma a_{ik} p_i q_k = 0$ que expresa la pertenencia del punto Q a la polar P, trae consigo la igualdad $\Sigma a_{ik} q_i p_k = 0$ que expresa la pertenencia del punto P a la polar Q.

De los teoremas 49 y 50 se desprende inmediatamente el siguiente

TEOREMA 51. *Las rectas que pasan por cierto punto P, tangentes a una línea de segundo orden, tienen puntos adherentes sobre la polar del punto P* (fig. 119).

Efectivamente, si q_1 es una tangente, y el punto Q_1 es su punto adherente, entonces, de acuerdo con el teorema 49, la recta q_1 es polar de su punto adherente Q_1; y, dado que la recta q_1 pasa por el punto P, a consecuencia del teorema 50, la polar del punto P pasa a través del punto Q_1, lo cual se afirma por el teorema.

Notemos que el teorema 51 puede demostrarse de una forma bien clara y evidente al considerar la tangente PQ_1 como límite de la secante PM_2M_1.

§ 132. Si la recta p es polar del punto P, entonces dicho punto P se llama *polo* de la recta p.

Es natural hacer la pregunta: ¿si toda recta posee un polo? Para responderla, comparemos la ecuación de una recta arbitraria

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \tag{ε}$$

con la de una polar (δ). Manifiestamente, la recta (ε) será polar de cierto punto si su ecuación admite la forma de ecuación de polar, es decir, si existen tales números p_1, p_2, p_3 que

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 &= u_1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 &= u_2, \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 &= u_3; \end{aligned}\right\} \tag{ζ}$$

entonces, precisamente el punto con las coordenadas p_1, p_2, p_3 será el polo de la recta (ε). El sistema (ζ) tiene soluciones para cualesquiera valores de u_1, u_2, u_3 si, y sólo si, el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

difiere de cero. Por eso, podemos enunciar la proposición siguiente:

Si una línea de segundo orden satisface la condición de $\Delta \neq 0$, entonces, respecto a tal línea, toda recta tiene un polo.

Llamaremos *degeneradas* las líneas para las cuales $\Delta = 0$ (una descripción clara y evidente se dará en el § 134).

Cabe señalar una importante circunstancia más. A base de la fórmula (δ) podemos componer la ecuación de la polar de cualquier punto (p_1, p_2, p_3). Sin embargo, en este caso no siempre resultará una ecuación determinada, a saber, no se excluye la posibilidad de obtener las igualdades

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 &= 0, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 &= 0, \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 &= 0. \end{aligned} \tag{*}$$

Sin entrar en detalles de la investigación de este caso, hagamos notar sólo que si p_1, p_2, p_3 satisfacen las relaciones (*), entonces

$$\Sigma a_{ik}p_i q_k = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)p_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)p_2 + \\ + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)p_3 = 0$$

y, por consiguiente, el punto (p_1, p_2, p_3) se halla sobre una línea de segundo orden. De tal suerte:

Pueden tener polar indeterminada sólo los puntos que están sobre una línea de segundo orden indicada.

Además, por ser incompatible el sistema (*) para $\Delta \neq 0$ (se excluye la solución $p_1 = p_2 = p_3 = 0$), se puede afirmar la proposición: *respecto a una línea de segundo orden regular, todos los puntos poseen polares determinadas.*

§ 133. Sea dada cualquier línea regular de segundo orden. Entonces, a todo punto del plano podemos poner en correspondencia una recta globalmente determinada, o sea, su polar y, a toda recta, un punto globalmente determinado, o sea, su polo.

Fácilmente se muestra que en este caso:

1) a puntos diferentes les corresponden rectas diferentes;

2) a rectas diferentes les corresponden puntos diferentes;

3) al punto de intersección de dos rectas le corresponde la recta que une sus polos (lo que se sigue del teorema 50);

4) a la recta que une dos puntos, le corresponde el punto de intersección de sus polares (lo que se desprende también del teorema 50).

En general, para la correspondencia señalada de los elementos geométricos, a toda figura A compuesta por puntos y rectas, le corresponde cierta figura A' que se llama *transformación polar* de la figura A respecto a una línea de segundo orden indicada.

Si la figura A' es la transformación polar de la figura A, entonces la A es, a su vez, la transformación polar de la A'; por ende, dos figuras de tal género se llaman también *recíprocamente polares*. La figura que coincide con su transformación polar, se llama *autopolar*. Por ejemplo, si tomamos un punto arbitrario P y sobre su polar p un punto arbitrario Q, designando con q la polar del punto Q; con R, el punto de intersección de las rectas p, q; con r, la polar del punto R (fig. 120), enton-

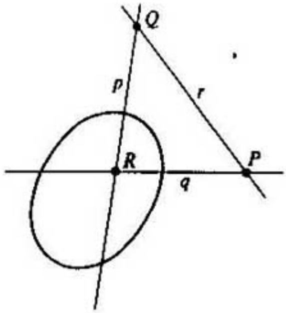


Fig. 120

$$\Sigma a_{ik}p_iq_k = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)p_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)p_2 + \\ + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)p_3 = 0$$

y, por consiguiente, el punto (p_1, p_2, p_3) se halla sobre una línea de segundo orden. De tal suerte:

Pueden tener polar indeterminada sólo los puntos que están sobre una línea de segundo orden indicada.

Además, por ser incompatible el sistema (*) para $\Delta \neq 0$ (se excluye la solución $p_1 = p_2 = p_3 = 0$), se puede afirmar la proposición: *respecto a una línea de segundo orden regular, todos los puntos poseen polares determinadas.*

§ 133. Sea dada cualquier línea regular de segundo orden. Entonces, a todo punto del plano podemos poner en correspondencia una recta globalmente determinada, o sea, su polar y, a toda recta, un punto globalmente determinado, o sea, su polo.

Fácilmente se muestra que en este caso:

1) a puntos diferentes les corresponden rectas diferentes;

2) a rectas diferentes les corresponden puntos diferentes;

3) al punto de intersección de dos rectas le corresponde la recta que une sus polos (lo que se sigue del teorema 50);

4) a la recta que une dos puntos, le corresponde el punto de intersección de sus polares (lo que se desprende también del teorema 50).

En general, para la correspondencia señalada de los elementos geométricos, a toda figura A compuesta por puntos y rectas, le corresponde cierta figura A' que se llama *transformación polar* de la figura A respecto a una línea de segundo orden indicada.

Si la figura A' es la transformación polar de la figura A, entonces la A es, a su vez, la transformación polar de la A'; por ende, dos figuras de tal género se llaman también *recíprocamente polares.* La figura que coincide con su transformación polar, se llama *autopolar.* Por ejemplo, si tomamos un punto arbitrario P y sobre su polar p un punto arbitrario Q, designando con q la polar del punto Q; con R, el punto de intersección de las rectas p, q; con r, la polar del punto R (fig. 120), enton-

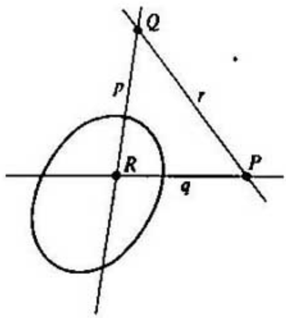


Fig. 120

ces, conforme al teorema 50, la recta q pasará por P, y la r, por P y Q; obtendremos *un trivértice autopolar* cada lado del cual es la polar del vértice opuesto y, consecuentemente, cada vértice es el polo del lado opuesto. Los trivértices autopolares se usarán mucho en el párrafo siguiente. Hagamos constar además que las figuras recíprocamente polares al mismo tiempo son también recíprocamente duales. Precisamente por medio de las transformaciones polares descubrió el principio de dualidad su autor Poncelet.

§ 134. Ahora nos dedicamos de lleno a resolver la tarea de determinar todas las líneas de segundo orden proyectivamente diferentes y de hallar el sistema completo de los invariantes de la ecuación de segundo grado.

Para hallar todas las líneas de segundo orden, vamos a construir tal sistema de coordenadas, respecto al cual la ecuación de una línea de segundo orden arbitrariamente definida tenga la forma más sencilla.

Sea dada una línea de segundo orden arbitraria k. Fuera de esta línea, elijamos cualquier punto P, designando con p su polar; conforme a la nota formulada al final del § 132, la recta p será globalmente determinada, pues P no pertenece a la línea. Después, introduzcamos un sistema de coordenadas proyectivas ubicando los vértices del triedro de coordenadas de modo que el vértice $A_1(1, 0, 0)$ coincida con el punto P, y los otros dos $A_2(0, 1, 0)$ y $A_3(0, 0, 1)$ se localicen de cualquier forma sobre la recta p; vamos a tomar arbitrariamente el punto de unidades $E(1, 1, 1)$. Sea

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

la ecuación de la línea k en las coordenadas establecidas. Ahora, observemos que la recta p, por ser lado A_2A_3 del triedro de coordenadas, tiene la ecuación

$$x_1 = 0. \qquad (*)$$

Por otra parte, la ecuación de esta misma recta, siendo ésta polar del punto $A_1(1, 0, 0)$, puede componerse de acuerdo a la fórmula (δ) del § 131; colocando $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ en esta fórmula, obtendremos:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0. \qquad (**)$$

Como las ecuaciones (*) y (**) determinan una misma recta, es necesario

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0.$$

De tal manera, la ecuación de la línea k en nuestras coordenadas adquiere la forma de

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Si $a_{23} \neq 0$, entonces proseguiremos la elección especial del triedro de coordenadas. A saber, elegiremos de cualquier modo el punto A_2 sobre la recta p, mas, a condición de que no pertenezca a la línea k; esto es posible, ya que en el caso de $a_{23} \neq 0$ sobre la recta $x_1 = 0$ existen los puntos $(0, x_2, x_3)$, para los cuales $a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 \neq 0$. Como punto A_3 tomemos el punto de intersección de la recta p con la polar del A_2; la elección del punto A_3 ya no es arbitraria, pues, debido a que A_2 no está sobre la línea k, el referido punto tiene una polar determinada.

El triedro de coordenadas $A_1A_2A_3$ que hemos construido, es autopolar respecto a la línea k, es decir, cada lado suyo constituye la polar del lado opuesto. En particular, la recta A_1A_3 cuya ecuación es

$$x_2 = 0, \qquad (***)$$

es la polar del punto $A_2(0, 1, 0)$; colocando $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$ en la fórmula (δ) del § 131, obtendremos la ecuación de la polar del punto A_3 en forma de

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

o, como $a_{21} = a_{12} = 0$:

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \qquad (****)$$

Al comparar las ecuaciones (***) y (****), hallaremos:

$$a_{23} = 0.$$

Por tanto, eligiendo adecuadamente el triedro de coordenadas, siempre podemos reducir la ecuación de la línea de segundo orden a la forma siguiente

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0. \qquad (I)$$

En lo que se refiere a la simplificación ulterior de esta ecuación, tenemos que distinguir tres casos:

1. Si $a_{22} = a_{33} = 0$, entonces la ecuación (I) tiene forma de

$$x_1^2 = 0, \qquad (1)$$

resultando imposible su simplificación ulterior.

2. Si $a_{33} = 0$ y $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, entonces transformando las coordenadas*)

$$x_1' = \sqrt{|a_{11}|}x_1, \quad x_2' = \sqrt{|a_{22}|}x_2, \quad x_3' = x_3$$

podemos reducir la ecuación (I) a la forma

$$\pm x_1'^2 \pm x_2'^2 = 0. \qquad (2)$$

3. Si $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$, entonces después de la transformación

$$x_1' = \sqrt{|a_{11}|}x_1, \qquad x_2' = \sqrt{|a_{22}|}x_2, \qquad x_3' = \sqrt{|a_{33}|}x_3$$

hallaremos:

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 = 0. \qquad (3)$$

Estas simplificaciones que se realizan teniendo ya elegido el triedro de coordenadas $A_1A_2A_3$, exigen, notoriamente, que se cambie el punto de unidades.

Las ecuaciones más sencillas (1), (2), (3) de la línea de segundo orden se llaman *canónicas*. Al cambiar adecuadamente la numeración de las coordenadas y al multiplicar por — 1 las referidas ecuaciones, podemos reducirlas a las que siguen:

$$x_1^2 = 0; \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 0, \\ x_1^2 - x_2^2 = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

*) Hagamos recordar una vez más que estamos considerando sólo líneas reales y transformaciones reales (es decir, todos los coeficientes de las ecuaciones de líneas y de las fórmulas de transformaciones se suponen reales).

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

La ecuación (1) determina la recta $x_1 = 0$ tomada dos veces. Cada una de las ecuaciones (2) determina un par de rectas diferentes, a saber, la ecuación $x_1^2 + x_2^2 = 0$ determina el par de rectas imaginarias $x_1 + ix_2 = 0$, $x_1 - ix_2 = 0$, y la ecuación $x_1^2 - x_2^2 = 0$, el par de rectas reales $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$.

Todas las líneas de segundo orden (1) y (2) son degeneradas, puesto que para las ecuaciones $x_1^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_1^2 - x_2^2 = 0$ se tiene, respectivamente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Las ecuaciones (3) determinan líneas regulares de segundo orden, ya que para estas ecuaciones

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Las líneas degeneradas, consiguientemente, son pares de rectas. A la primera de las ecuaciones (3) le corresponde una línea que no posee punto real alguno; ésta se llama *nula*. A la segunda de las ecuaciones (3) le corresponde una curva en el sentido propio de la palabra; ésta se llama *oval*. La curva oval divide el plano proyectivo (real) en dos regiones, entre las cuales la primera se caracteriza por la condición de

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$$

y se llama *interior*, la segunda, por la condición de

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0$$

y se llama *exterior*. Para tener una noción clara y evidente de la estructura de estas regiones, hagamos constar que la recta $x_3 = 0$ no atraviesa a la región interior, dado que para $x_3 = 0$ y para x_1, x_2 reales la ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$ es imposible; por ende, para todos los puntos de la región interior $x_3 \neq 0$, y los podemos definir con las coordenadas no homogéneas $x = \dfrac{x_1}{x_3}$ y $y = \dfrac{x_2}{x_3}$. En las coordenadas no homogéneas, la región interior se caracteriza por la relación

$$x^2 + y^2 < 1$$

y, por consiguiente, es topológicamente equivalente al círculo euclidiano *); de aquí se deduce que la región exterior constituye la cinta de Moebius (véase el § 240).

*) Dos figuras se llaman *topológicamente equivalentes* si el conjunto de los puntos de una de ellas admite una aplicación biunívoca y continua en ambos sentidos sobre el conjunto de los puntos de la otra. Por ejemplo, el cuadrado y el círculo son topológicamente equivalentes. También son equivalentes el cubo y la esfera. Al contrario, la esfera y el toro son topológicamente diferentes.

Ahora podemos aducir también el sistema completo de los invariantes de la ecuación general de la línea de segundo orden

$$\Sigma a_{ik}x_i x_k = 0.$$

En primer lugar, vamos a señalar como invariante de la referida ecuación el rango de su matriz

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Aquí vamos a remitirnos a una proposición conocida en el álgebra (en la parte correspondiente a las formas cuadráticas) que dice: si los argumentos x_i de la forma cuadrática $\Sigma a_{ik}x_i x_k$ se sustituyen por las funciones homogéneas lineales de los nuevos argumentos x_i', entonces, a condición de que el determinante compuesto por los coeficientes de dichas funciones difiere de cero, la forma cuadrática $\Sigma a_{ik}' x_i' x_k'$ resultante de tal transformación, tiene la matriz A' del mismo rango que la matriz A de la forma inicial:

$$\text{Rang } A' = \text{Rang } A.$$

Al examinar las ecuaciones (1), (2), (3), vemos que el rango de la matriz de la ecuación (1) es igual a 1, el de la matriz de las ecuaciones (2) es igual a 2, y el de la matriz de las ecuaciones (3) es igual a 3.

Dado que el rango de la matriz es invariante, en el caso de la ecuación de una línea arbitraria de segundo orden en cualesquiera coordenadas siempre podemos determinar según el rango de su matriz a cual de los tres grupos de ecuaciones canónicas (1), (2), (3) puede reducirse la misma.

Luego, es invariante de la ecuación $\Sigma a_{ik}x_i x_k = 0$ la signatura de su primer miembro.

Se llama *signatura* de la forma cuadrática al valor absoluto de la diferencia en su representación canónica entre el número de términos positivos y el de términos negativos. La invariación de la signatura viene expresada por el teorema sobre la inercia de formas cuadráticas conocido en el álgebra: las representaciones canónicas de una forma cuadrática resultantes de diferentes transformaciones lineales reales poseen una misma signatura.

Si conocemos, además del rango de la matriz A, también la signatura del primer miembro de la ecuación general de una curva de segundo orden, podemos señalar no sólo a cual de los tres grupos (1), (2), (3) de ecuaciones canónicas puede reducirse la misma, sino también a que ecuación dentro del grupo correspondiente.

Consecuentemente, *el rango de la matriz y la signatura de la ecuación de una línea de segundo orden constituyen el sistema completo de sus invariantes.*

Vemos que la ecuación de la línea de segundo orden posee sólo dos invariantes, para cuyos valores de números enteros existen solamente cinco combinaciones diferentes; correspondientemente a esto, existe sólo cinco líneas de segundo orden proyectivamente diferentes, las demás pueden obtenerse a base de ellas por medio de transformaciones proyectivas.

Una clasificación de las líneas de segundo orden se ofrece en la tabla que sigue:

Forma canónica de la ecuación		Tipo de la línea	Rango	Signatura
$x_1^2 = 0$	Líneas degeneradas	Par de rectas coincidentes	1	1
$x_1^2 + x_2^2 = 0$		Par de rectas imaginarias	2	2
$x_1^2 - x_2^2 = 0$		Par de rectas reales	2	0
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	Líneas regulares	Línea nula	3	3
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$		Curva oval	3	1

A diferencia de las líneas de segundo orden, las de órdenes superiores siempre tienen invariantes continuales, y aun en la clase de la línea de tercer orden hay una infinidad de líneas proyectivamente diferentes.

§ 135. Ahora vamos a exponer en breves palabras los más principales hechos de la teoría de los haces de segunda clase.

La ecuación general del haz de segunda clase tiene forma de

$$\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0 \qquad (\alpha)$$

o, apuntada más detalladamente,

$$a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2 = 0;$$

aquí u_1, u_2, u_3 son las coordenadas variables de una recta arbitraria del haz. Diremos que las rectas s y t están armónicamente situadas respecto al haz de segunda clase dado (α), si el par de rectas s y t es armónico conjugado con el par de rectas del haz (α) que pasan por el punto común de las rectas s y t.

A base de las coordenadas s_i, t_i de las rectas s, t, la condición de su posición armónica respecto al haz (α) puede apuntarse en forma de

$$\Sigma a_{ik} s_i t_k = 0. \qquad (\beta)$$

Esta relación resulta mediante la deducción dual de la relación (β) del § 131.

De aquí se infiere que el cúmulo de las rectas armónicamente situadas con la recta fija s respecto al haz (α), se determina por la ecuación

$$\Sigma a_{ik} s_i u_k = 0, \qquad (\gamma)$$

donde u_k son las coordenadas variables (es decir, las coordenadas de una recta arbitraria del cúmulo sujeto al examen).

La ecuación (γ) es una ecuación de primer grado, consecuentemente, *las rectas armónicamente situadas con la recta fija s, constituyen el haz de primera clase; su centro S se llama polo de la recta s respecto al haz de segunda clase indicado*.

Si introducimos la notación $\Sigma a_{ik} s_i s_k = \Phi(s_1, s_2, s_3)$, entonces la ecuación ($\gamma$) puede escribirse en forma de

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s_1}u_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial s_2}u_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial s_3}u_3 = 0; \qquad (\delta)$$

los coeficientes $\frac{\partial\Phi}{\partial s_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial s_2}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial s_3}$ de la ecuación (δ) son las coordenadas del punto S.

El polo de una recta respecto al haz de segunda clase es una imagen dual de la polar del punto con respecto a la línea de segundo orden. El haz de segunda clase (α) constituye una familia de rectas definidas por la ecuación

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (^*)$$

cuyos coeficientes u_k están enlazados por la condición

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Busquemos los puntos característicos de esta familia, es decir, los puntos de adherencia de las rectas de la familia a la envolvente. Según las reglas de la geometría diferencial, el punto característico de la recta (u_1, u_2, u_3) se determina por la ecuación (*) con la relación adicional

$$x_1du_1 + x_2du_2 + x_3du_3 = 0, \qquad (^{**})$$

donde du_1, du_2, du_3 están enlazadas por la igualdad

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}du_3 = 0. \qquad (^{***})$$

Al comparar las igualdades (**) y (***) y al tomar en consideración que, aparte de la condición (***), no existen otras restricciones para las magnitudes du_1, du_2, du_3, podemos concluir que x_1, x_2, x_3 son proporcionales a los números $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$. Expresado en otros términos, $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$ son las coordenadas del punto característico de la recta (u_1, u_2, u_3).

Más arriba, en el § 131, hicimos notar que las coordenadas de la tangente en el punto (p_1, p_2, p_3) de la línea de segundo orden $\Phi(p_1, p_2, p_3) = 0$ son los números $\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}$. Vemos que las coordenadas de los puntos característicos del haz de segunda clase se determinan a base de la ecuación del referido haz, del mismo modo que las de las rectas tangentes de la línea de segundo orden se determinan según la ecuación de dicha línea. Esto corresponde al hecho de que los puntos característicos del haz son imágenes duales de las tangentes de la línea.

Hagamos constar también que las expresiones $\frac{\partial\Phi}{\partial s_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial s_2}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial s_3}$ de las coordenadas del polo de la recta (s_1, s_2, s_3), en forma de escribirse, no difieren de las expresiones de las coordenadas del punto característico. De aquí sigue el teorema dual del teorema 49:

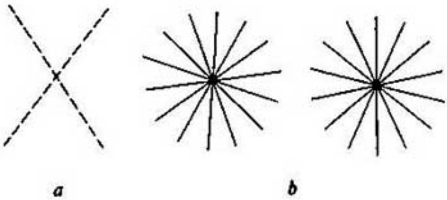


Fig. 121

Si la recta s pertenece a un haz de segunda clase, entonces el punto característico es polo suyo.

Al igual que las curvas de segundo orden, los haces de segunda clase se dividen en degenerados y regulares; los haces degenerados se caracterizan por la igualdad $\Delta = 0$, donde Δ es un determinante de tercer orden compuesto por los coeficientes de la ecuación del haz. El sentido geométrico de la degeneración de un haz de segunda clase se establece fácilmente a base del método de dualidad, si se conoce el sentido geométrico de la degeneración de la línea de segundo orden; por cuanto la línea degenerada de segundo orden constituye una colección de puntos pertenecientes a cualquiera de dos rectas determinadas (fig. 121, *a*), el haz degenerado de segunda clase constituye una colección de rectas pertenecientes a cualquiera de dos puntos determinados (fig. 121, *b*). Dicho en otros términos, el haz degenerado de segunda clase es un par de haces de primera clase (que pueden ser diferentes o coincididos, reales o imaginarios).

En cuanto a los haces regulares de segunda clase, éstos están enlazados bien sencillamente con las curvas regulares de segundo orden; este enlace se expresa por el teorema que sigue.

TEOREMA 52. *El cúmulo de tangentes de una curva regular de segundo orden es un haz regular de segunda clase; la envolvente del haz regular de segunda clase es una curva regular de segundo orden.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos la primera parte de este teorema; entonces, la validez de la segunda será asegurada por el principio de dualidad. Sea

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

la ecuación de la curva k de segundo orden; p_1, p_2, p_3, las coordenadas del punto de su adherencia a la recta $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Al comparar la ecuación general de la tangente

$$(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3)x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3)x_2 + \\ + (a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0$$

con la ecuación $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, obtendremos las igualdades

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 &= \alpha u_1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 &= \alpha u_2, \\ a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 &= \alpha u_3, \end{aligned} \qquad (*)$$

donde α ($\neq 0$) es un factor arbitrario de proporcionalidad. Además, ya que el punto de adherencia pertenece a la tangente,

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0. \qquad (^{**})$$

Si expresamos las magnitudes p_1, p_2, p_3 a partir de las ecuaciones (*) (esta posibilidad viene asegurada por la desigualdad $\Delta \neq 0$) y sustituimos sus expresiones en la relación (**), obtendremos cierta dependencia entre u_1, u_2, u_3 que puede considerarse como condición de la adherencia de la recta con las coordenadas (u_1, u_2, u_3) a la línea k dada. La misma dependencia puede obtenerse igualando a cero el determinante del sistema compuesto por las ecuaciones (*) y (**):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & u_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (^{***})$$

La igualdad (***) caracteriza las coordenadas de la tangente, por tanto, siendo ecuación con las coordenadas variables u_1, u_2, u_3, la misma determina un haz de tangentes a la línea k.

Vemos que (***) es una ecuación de segundo grado. Luego, las tangentes a una línea regular de segundo orden en efecto constituyen un haz de segunda clase.

Además, hay que demostrar que el referido haz es regular.

A este fin, observemos que al desarrollar el primer miembro de la ecuación (***), obtenemos la forma cuadrática

$$A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + A_{22}u_2^2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{23}u_2u_3 + A_{33}u_3^2 = 0$$

cuyos coeficientes A_{ik} son menores de los elementos a_{ik} de la matriz

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Por eso, si dividimos el primer miembro de la ecuación del haz por la magnitud Δ y ponemos $\dfrac{A_{ik}}{\Delta} = a_{ik}^*$, entonces su ecuación tomará forma de

$$a_{11}^*u_1^2 + 2a_{12}^*u_1u_2 + a_{22}^*u_2^2 + 2a_{13}^*u_1u_3 + 2a_{23}^*u_2u_3 + a_{33}^*u_3^2 = 0,$$

y la matriz A^* de esta ecuación será inversa de la A. Pero entonces, según se sabe, entre los determinantes Δ y Δ^* de las matrices A y A^* tendrá lugar la relación $\Delta\Delta^* = 1$, de donde se sigue que $\Delta^* \neq 0$, lo cual había que demostrar.

El teorema demostrado puede expresarse también en tales términos: *para toda imagen regular de segundo grado, la clase y el orden coinciden* (= 2).

En cuanto a las imágenes de grados superiores, tal afirmación es incorrecta.

Como las curvas regulares de segundo orden son también de segunda clase, a través de todo punto del plano, a una recta de segundo orden se puede trazar dos rectas tangentes (diferentes o múltiples, reales o imaginarias).

§ 136. Los métodos de investigar las imágenes de segundo grado que hemos expuesto para el caso de la geometría bidimensional, naturalmente, se generalizan para el caso tridimensional y conducen a resultados análogos. Precisamente, en el espacio proyectivo, al igual que sobre el plano proyectivo, las imágenes de segundo grado se caracterizan de un modo exhaustivo por los valores de números enteros sólo de dos invariantes: del rango de la matriz principal y de la signatura del primer miembro de la ecuación.

En el espacio proyectivo existe solamente un número finito de superficies de segundo orden y de radiaciones de segunda clase proyectivamente diferentes, entre los cuales los demás se pueden obtener por medio de transformaciones proyectivas.

Por ejemplo, toda superficie de segundo orden, en función del rango y de la signatura de su ecuación

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + $$
$$+ 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0,$$

puede transformarse proyectivamente en una de las superficies aducidas en la tabla que sigue:

Rango = 1	Signatura	Rango = 2	Signatura	Rango = 3	Signatura	Rango = 4	Signatura
$x_1^2 = 0$	1	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$	4
		$x_1^2 - x_2^2 = 0$	0	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	1	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$	2
						$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$	0

La ecuación $x_1^2 = 0$ determina el plano tomado dos veces $x_1 = 0$. Cada una de las ecuaciones $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_1^2 - x_2^2 = 0$ determina un par de planos, además, la ecuación $x_1^2 + x_2^2 = 0$ determina un par de planos imaginarios $x_1 + ix_2 = 0$ y $x_1 - ix_2 = 0$, y la ecuación $x_1^2 - x_2^2 = 0$, un par de planos reales $x_1 + x_2 = 0$ y $x_1 - x_2 = 0$.

Cada una de las ecuaciones $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ determina un cono con el vértice en el punto $A_4(0, 0, 0, 1)$, es decir, una superficie compuesta por las rectas que pasan por el punto $A_4(0, 0, 0, 1)$. En rigor, si cierto punto $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ se halla, por ejemplo, sobre la superficie $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, entonces $x_1^{02} + x_2^{02} - x_3^{02} = 0$; pero en tal caso, para las coordenadas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ de cualquier punto $\bar{M}$ de la recta A_4M_0 se observa la relación $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 = 0$, de lo cual podemos cerciorarnos fácilmente expresando paramétricamente las coordenadas $\bar{x}_i$

$$\bar{x}_1 = 0 + \lambda x_1^0 = \lambda x_1^0, \qquad \bar{x}_3 = 0 + \lambda x_3^0 = \lambda x_3^0,$$
$$\bar{x}_2 = 0 + \lambda x_2^0 = \lambda x_2^0, \qquad \bar{x}_4 = 1 + \lambda x_4^0.$$

Efectivamente, de estas relaciones se tiene:

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 = \lambda^2(x_1^{02} + x_2^{02} - x_3^{02}) = 0.$$

De tal forma, todo punto $\bar{M}$ de la recta A_4M_0 pertenece a la superficie $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, es decir, la recta que une el punto A_4 con cualquier punto de la superficie, se halla por entero sobre la referida superficie; precisamente esta circunstancia caracteriza el cono con el vértice A_4. Evidentemente, el cono $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ no tiene generatrices reales; el mismo se llama *nulo*. El cono $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ posee una infinidad de generatrices reales y se llama *ordinario*.

Todas las superficies enumeradas se llaman *degeneradas*; la anulación del determinante de la matriz de su ecuación es indicio de la superficie degenerada.

Las superficies regulares de segundo orden aparecen en la última columna de la tabla ofrecida más arriba.

La primera de ellas no contiene punto real alguno y se llama *nula*.

La segunda se llama *oval*; la misma equivale topológicamente a la esfera euclidiana. Para cerciorarnos de esto, hemos de notar que para todos los puntos de la superficie $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ es necesario $x_4 \neq 0$, por eso se puede determinarlos con las coordenadas no homogéneas $x = \dfrac{x_1}{x_4}$, $y = \dfrac{x_2}{x_4}$, $z = \dfrac{x_3}{x_4}$; pero en las coordenadas no homogéneas la ecuación de la superficie que estamos considerando, tiene forma de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y no difiere de la esfera euclidiana.

La tercera superficie se llama *anular*; la misma equivale topológicamente al toro. Esto es fácil de entender si hacemos notar que la superficie $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ está cubierta por líneas rectas. En efecto, dos ecuaciones de primer grado

$$\left.\begin{aligned} \mu(x_1 + x_3) &= \lambda(x_2 + x_4), \\ -\lambda(x_1 - x_3) &= \mu(x_2 - x_4) \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

para cualesquiera λ y μ (que no sean iguales a cero a un mismo tiempo) determinan una recta que se halla sobre la superficie sujeta al examen, dado que la ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ es un corolario de las ecuaciones (*); luego, a través de todo punto de la superficie pasa una, y sólo una recta del sistema (*), puesto que para cualesquiera $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$ que satisfacen la condición $x_1^{02} + x_2^{02} - x_3^{02} - x_4^{02} = 0$, se puede hallar una, y sólo una relación $\lambda_0 : \mu_0$ tal que

$$\begin{aligned} \mu_0(x_1^0 + x_3^0) &= \lambda\ (x_2^0 + x_4^0), \\ -\lambda_0(x_1^0 - x_3^0) &= \mu_0(x_2^0 - x_4^0). \end{aligned}$$

Consiguientemente, para $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ la recta (*) pasa por el punto preestablecido $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$. De tal suerte, las rectas reales (*) cubren una sola vez y enteramente la superficie. Mas, el sistema de dichas rectas forma un «tubo» cerrado, ya que, de una parte, la recta proyectiva es cerrada y, de otra, las rectas del sistema (*) pasan por una curva oval, a saber, la cortadura de la superficie $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ por el plano $x_4 = 0$.

Además del sistema (*), la superficie dada está cubierta también por un sistema de rectas definidas por la ecuación

$$\left.\begin{aligned} \mu(x_1 + x_3) &= \lambda(x_2 - x_4), \\ -\lambda(x_1 - x_3) &= \mu(x_2 + x_4). \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Las rectas (*) y (**) se llaman *generatrices rectilíneas* de la superficie.

Hagamos constar que la superficie del espacio euclidiano bien conocida por el lector, o sea, el hiperboloide de una hoja, se convierte en una superficie anular del espacio proyectivo al completarse el espacio euclidiano por elementos infinitamente alejados.

14. Teoremas constructivos y problemas de la geometría proyectiva

§ 137. En la presente sección haremos conocer al lector ciertos teoremas elementales de la geometría proyectiva relativos a las líneas de segundo orden. Los mismos son de aplicación variada en los problemas de construcción euclidianos.

El lector puede hacerse la pregunta ¿si tenemos derecho a aplicar los teoremas de la geometría proyectiva a la investigación de las figuras del plano euclidiano? Para cerciorarnos de la posibilidad de tal aplicación, basta recordar que el plano euclidiano se convierte en proyectivo agregándosele elementos infinitamente alejados. De tal manera, todo hecho proyectivo puede interpretarse sobre el plano de Euclides si éste se concibe completado por una recta infinitamente alejada.

Como ejemplo, consideremos la relación compleja de cuatro puntos de una recta y la de cuatro rayos de un haz desde el punto de vista de la geometría elemental.

Sean A, B, C, D cuatro puntos cualesquiera de la recta euclidiana a. Sobre el plano euclidiano que contiene la recta a, introduzcamos cierto sistema de coordenadas cartesianas. Por razón de comodidad, hagamos coincidir el eje x con la recta a; denotemos con x_a, x_b, x_c, x_d las abscisas de los puntos A, B, C, D. Observemos que el sistema cartesiano sobre el plano euclidiano es al mismo tiempo un sistema proyectivo, pues en las coordenadas cartesianas todas las rectas tienen ecuaciones de primer grado. Por eso

$$(ABCD) = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_c} : \frac{x_d - x_a}{x_b - x_d}$$

(véase el § 115). Mas, en las coordenadas cartesianas $x_c - x_a = AC$, $x_b - x_c = CB$, $x_d - x_a = AD$, $x_b - x_d = DB$, donde AC, CB, AD y DB denotan las longitudes de los segmentos con los extremos A y C, C y B, etc., tomadas con los signos correspondientes. Por consiguiente,

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}. \qquad (*)$$

La relación compleja de cuatro rayos a, b, c, d que pasan por un mismo punto O, en la geometría elemental puede definirse por la fórmula

$$(abcd) = \frac{\text{sen}\,(ac)}{\text{sen}\,(cb)} : \frac{\text{sen}\,(ad)}{\text{sen}\,(db)} \qquad (**)$$

donde (ac), (cb), etc., designan los ángulos entre los rayos a y c, c y b, etc., tomados con los signos correspondientes *).

Para cerciorarnos de la validez de la fórmula (**), cortemos los rayos a, b, c, d por la recta u, denotando con A, B, C, D los puntos de intersección, con h, la longitud de la perpendicular bajada del punto O sobre la recta u (fig. 122). Expresando de dos modos el área del triángulo OAC, obtendremos:

$$\frac{1}{2} AC \cdot h = \frac{1}{2} OA \cdot OC \cdot \operatorname{sen}(ac).$$

Análogamente, del triángulo OCB

$$\frac{1}{2} CB \cdot h = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \operatorname{sen}(cb).$$

De aquí

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\operatorname{sen}(ac)}{\operatorname{sen}(cb)}. \tag{1}$$

Del mismo modo, considerando los triángulos OAD y ODB, hallaremos:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\operatorname{sen}(ad)}{\operatorname{sen}(db)}. \tag{2}$$

De las relaciones (1) y (2) tenemos:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\operatorname{sen}(ac)}{\operatorname{sen}(cb)} : \frac{\operatorname{sen}(ad)}{\operatorname{sen}(db)}.$$

Después de esto queda claro que la fórmula (*) es correcta, dado que la relación compleja $(abcd)$, según la definición, es un número igual a $(ABCD)$ (véase el § 116).

Acabamos de mostrar ejemplos de la interpretación métrica de los objetos proyectivos. A su vez, las proposiciones de la geometría elemental, aun las que tienen carácter métrico, admiten la interpretación proyectiva y se presentan de forma distinta al ser apreciadas desde el punto de vista proyectivo.

Por ejemplo, el teorema de la geometría elemental: la recta que une el punto de intersección de las diagonales del trapecio con el de intersección de los lados no paralelos, divide por la mitad los lados paralelos del trapecio, tiene un claro sentido proyectivo, a saber: el punto medio del segmento, junto con el punto infinitamente alejado, separa armónicamente el par de sus extremos. En rigor, al considerar el tra-

---

*) A saber, elijamos la dirección positiva de los giros alrededor del punto O y, sobre cada recta a, b, c, d introduzcamos la dirección positiva. Entonces, por (ab), por ejemplo, entenderemos la magnitud del ángulo constituido por la dirección positiva de la recta b y la dirección positiva de la recta a; estimaremos positiva esta magnitud si dentro del ángulo indicado el paso de a a b se efectúa en dirección positiva alrededor de O, estimándola negativa en el caso contrario. Puede decirse que el segundo miembro de la igualdad (**) no depende de cómo se eligen los giros positivos alrededor de O ni de qué dirección está elegida como positiva sobre cada una de las rectas a, b, c, d.

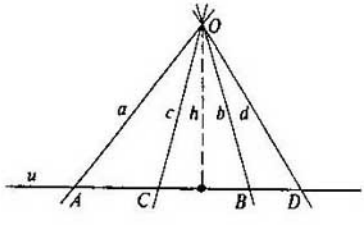


Fig. 122

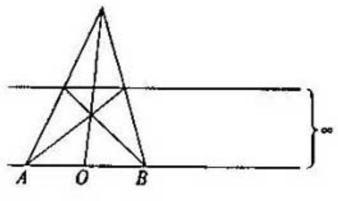


Fig. 123

pecio que aparece en la fig. 123, es fácil identificarlo como un cuadrivértice completo con un punto diagonal infinitamente alejado; de las propiedades armónicas del referido cuadrivértice se infiere que el par de puntos A, B está armónicamente separado por el par de puntos O, ∞. En otros términos puede decirse: el centro euclidiano del segmento coincide con su centro proyectivo.

Según se señaló algo más arriba, todo sistema cartesiano de coordenadas sobre el plano euclidiano es a la vez un sistema proyectivo. De aquí se deduce que las líneas de segundo orden que se estudian en la geometría analítica, son los mismos objetos de que tratamos en las secciones precedentes, mejor dicho, llegan a serlo una vez completado por elementos infinitamente alejados el plano euclidiano. Efectivamente, si, a partir de las coordenadas cartesianas x, y, introducimos las coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, suponiendo $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, entonces la ecuación general de la curva de segundo orden en las coordenadas cartesianas

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

tomará forma de

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

coincidiendo con la que estudiamos más arriba.

A continuación se ofrece una serie de proposiciones y problemas; todos ellos pueden apreciarse como proposiciones y problemas de la geometría elemental.

§ 138. El presente párrafo insertado en esta sección ocupa una posición completamente aislada y no está ligado con el demás material de la sección. Aquí se exponen proposiciones de carácter auxiliar que serán usadas mucho más tarde (en el cap. IX).

En el plano euclidiano, con un sistema de coordenadas cartesianas dado sobre él, consideremos alguna circunferencia k. Sea dada una aplicación biunívoca de la región interior de la circunferencia k sobre sí misma; denotemos con el símbolo φ esta aplicación. Supongamos que φ aplica los puntos que se hallan sobre una misma recta, en puntos que también se hallan en una misma recta, y los puntos que no están sobre una misma recta, en puntos que tampoco lo están. Dicho de otra forma, suponemos que la aplicación φ hace pasar toda cuerda de la circunferencia k también a cuerda y cuerdas diferentes a cuerdas diferentes.

Bajo estas condiciones, para la aplicación φ las coordenadas de la imagen se expresan a través de las de la preimagen mediante las fórmulas

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \tag{1}$$

donde $a_1, b_1, \ldots, \gamma$ son ciertas constantes que satisfacen la desigualdad

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea P un punto arbitrario que se halla dentro de k; a, b, c, d, cuatro cuerdas que pasan por P. Supongamos que a, b separan armónicamente a c, d. Entonces se puede construir un cuadrivértice G cuyos vértices están sobre las cuerdas a, b, y los puntos diagonales, sobre las cuerdas c, d. Debido a la aplicación φ, el punto P se convertirá en cierto punto P', las cuerdas a, b, c, d, en ciertas cuerdas a', b', c', d'. El cuadrivértice G se aplicará en el cuadrivértice G' cuyos vértices estarán sobre las cuerdas a', b', y los puntos diagonales, sobre las c', d'.

Luego, las cuerdas a', b' separan armónicamente las c', d'. Vemos que a causa de la aplicación φ, toda cuaterna armónica de cuerdas tiene por imagen también una cuaterna armónica de cuerdas. Por consiguiente, todo haz de cuerdas se aplica proyectivamente en su haz de cuerdas correspondiente.

Dentro de k, elijamos cuatro puntos A, B, C, D así que ningunos tres de ellos estén sobre una misma recta. Sean A', B', C', D' las imágenes de los referidos puntos; en virtud de las condiciones impuestas sobre la aplicación φ, entre los puntos A', B', C', D' no hay tres que estén sobre una misma recta.

Conforme al teorema 37, existe una aplicación proyectiva de todo el plano (completado por puntos infinitamente alejados) sobre sí mismo, que hace pasar los puntos A, B, C, D en los puntos A', B', C', D'. Designemos con ψ esta aplicación. Demostremos que dentro de la circunferencia k las aplicaciones φ y ψ coinciden, es decir, para cualquier punto interior a k, la imagen respecto a φ coincide con la imagen respecto a ψ.

Dentro de la circunferencia k, tomemos un punto M arbitrario, denotando con M' y M'' sus imágenes respecto a φ y ψ. Tanto la aplicación φ como la ψ aplican proyectivamente el haz de cuerdas con el centro A sobre el haz de cuerdas con el centro A', aplicándose en el primer caso la cuerda AM sobre la cuerda $A'M'$, en el segundo, sobre la $A'M''$. En ambos casos la terna de cuerdas diferentes AB, AC, AD del haz con el centro A se aplica en una misma terna de cuerdas diferentes $A'B', A'C', A'D'$ del haz con el centro A'; mas, según el teorema 18, la aplicación proyectiva de haces se define unívocamente fijando tres pares de elementos correspondientes. Por tanto, la cuerda $A'M'$ debe coincidir con la $A'M''$, es decir, los puntos M' y M'' deben hallarse junto con el punto A' sobre una misma recta. Razonando análogamente, estableceremos que los puntos M' y M'' deben estar junto con el punto B' sobre una misma recta, y junto con el C', sobre una misma recta también. Dado que A', B', C' se hallan sobre rectas diferentes, de las conclusiones precitadas se deduce que M' y M'' coinciden. Así pues, dentro de la circunferencia k la aplicación φ coincide con cierta aplicación proyectiva del plano indicado (completado por elementos infinitamente alejados) sobre sí mismo. De acuerdo al §112, las coordenadas cartesianas de la imagen y de la preimagen de cualquier aplicación proyectiva están enlazadas por las fórmulas del tipo de (1) bajo la condición (2). Así queda demostrada nuestra afirmación.

De la demostración aducida se desprende también la proposición que sigue.

Sean M_1, M_2 dos puntos arbitrarios interiores a la circunferencia k, M_1', M_2', sus imágenes respecto a φ; sean P, Q y P', Q' puntos en que las rectas M_1M_2 y $M_1'M_2'$ atraviesan la circunferencia k, denotados de forma que el orden de sucesión de los puntos P, Q, M_1, M_2 sobre la

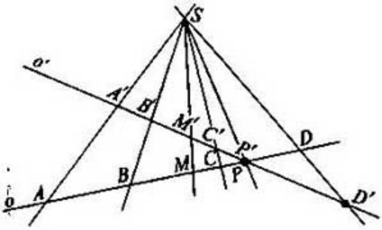


Fig. 124

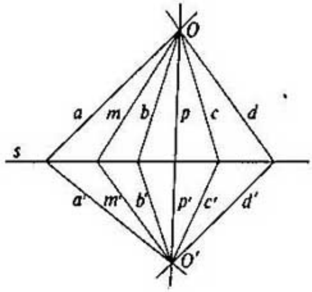


Fig. 125

recta M_1M_2 es análogo al de los puntos P', Q', M_1', M_2' sobre la recta $M_1'M_2'$. Entonces

$$(P'Q'M_1'M_2') = (PQM_1M_2). \tag{3}$$

En efecto, bajo las condiciones especificadas, los puntos P', Q', M_1', M_2' son imágenes de los puntos P, Q, M_1, M_2 respecto a la aplicación ψ. Y, por ser proyectiva la aplicación ψ, la relación compleja de los puntos PQM_1M_2 es igual a la de sus imágenes $P'Q'M_1'M_2'$.

§ 139. CRITERIO DE LA CORRESPONDENCIA DE PERSPECTIVA. En lo sucesivo, tendremos sólo correspondencias proyectivas entre dos rectas y entre dos haces; todos los objetos a estudiar se supondrán pertenecientes a un mismo plano. Para nosotros revestirán una importancia especial las llamadas *correspondencias de perspectiva*. La correspondencia entre los puntos de dos rectas se llama correspondencia de perspectiva si las rectas que unen los puntos homólogos, pasan por un mismo punto del plano (llamado *centro de la perspectiva;* fig. 124).

La correspondencia entre los rayos de dos haces se llama correspondencia de perspectiva si los puntos de intersección de los rayos homólogos están sobre una misma recta (llamada *eje de perspectiva*; fig. 125).

Patentemente, toda correspondencia de perspectiva es proyectiva (a consecuencia del teorema 6 del § 86; véase también el § 103). Sin embargo, no toda correspondencia proyectiva ni mucho menos es de perspectiva.

Los dos teoremas que siguen, proporcionan un criterio útil para distinguir las correspondencias de perspectiva entre todas las correspondencias proyectivas.

TEOREMA 53. *Para que la correspondencia proyectiva entre los puntos de dos rectas sea una correspondencia de perspectiva, es necesario y suficiente que al punto de intersección de las referidas rectas, considerado como elemento de una de ellas, le corresponda el mismo punto en la otra recta.*

TEOREMA 54. *Para que la correspondencia proyectiva entre los rayos de dos haces sea una correspondencia de perspectiva, es necesario y suficiente que al rayo común de los referidos haces, considerado como elemento de uno de ellos, le corresponda el mismo rayo en el otro haz.*

Es suficiente demostrar uno de los dos teoremas: entonces la validez del otro será asegurada por el principio de dualidad.

Aduzcamos la demostración del teorema 53.

La demostración de la necesidad se visualiza inmediatamente: en rigor, si entre las rectas o y o' está establecida una correspondencia de perspectiva con el centro de la perspectiva S, entonces los pares de puntos homólogos se determinan por la intersección de las rectas o y o' con los rayos que parten de S; pero el rayo que pasa por el punto común de las rectas o y o', manifiestamente, determina el par de puntos correspondientes P, P' que coinciden uno con otro (fig. 124).

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Entre los puntos de la recta o y o', sea establecida una correspondencia proyectiva de modo que al punto P de la recta o, en que se cruzan las rectas o y o', le corresponde sobre la recta o' el punto P' que coincide con el punto P.

Sobre la recta o, tomemos dos puntos A y B y, sobre la o', sus puntos correspondientes A' y B', denotando con S el punto de intersección de las rectas AA', BB'. Luego, designemos con M un punto arbitrario de la recta o, con $M' = f(M)$, su punto homólogo en la correspondencia dada, con $M^* = \varphi(M)$, el punto en que el rayo SM atraviesa a la recta o'. La correspondencia $M^* = \varphi(M)$, según la construcción, es una correspondencia de perspectiva (con el centro de la perspectiva S) y, consecuentemente, también proyectiva; además, notoriamente, los puntos A, B, P tienen sus homólogos A', B', P' en la correspondencia $M^* = \varphi(M)$. Así tenemos correspondencias proyectivas $M' = f(M)$ y $M^* = \varphi(M)$ con tres pares de puntos homólogos A, A', B, B' y P, P'. Según el teorema 15, dichas correspondencias no pueden ser diferentes, es decir, $M' = M^*$. De aquí se sigue que la correspondencia dada $M' = f(M)$ es de perspectiva, con el centro de la perspectiva S. El teorema queda demostrado.

§ 140. CONSTRUCCIÓN GRÁFICA DE LAS CORRESPONDENCIAS PROYECTIVAS A BASE DE TRES PARES DE ELEMENTOS CORRESPONDIENTES DADOS. Sobre la recta o, sean dados tres puntos A, B, C, sobre la otra recta o', tres puntos A', B', C'. Sabemos que existe una única aplicación proyectiva $M' = f(M)$ de la recta o sobre la o', que hace pasar los puntos A, B, C en los A', B', C', respectivamente. Ahora nuestro objeto es señalar el procedimiento gráfico de construir el punto correspondiente $M' = f(M)$ sobre la recta o' de todo punto M de la recta o. A este fin, unamos mediante la recta dos puntos correspondientes cualesquiera entre los dados, por ejemplo, B y B', y tomemos los puntos S y S' sobre la recta que une (fig. 126). Luego, establezcamos correspondencia entre los rayos de los haces con los centros S y S', estimando el rayo $S'M'$ del haz S' como rayo homólogo del SM del haz S. Por ser proyectiva la correspondencia $M' = f(M)$, la correspondencia entre los rayos de los haces S y S' que hemos establecido, será proyectiva. Pero, por añadidura, será una correspondencia de perspectiva, ya que al rayo SB del haz S le corresponde el rayo $S'B'$ del haz S', que coincide con él (véase el teorema 54). Por tanto, todos los rayos correspondientes de los haces S y S' se cruzan sobre una misma recta; ésta es el eje de la perspectiva. De aquí tenemos la construcción requirida: después de elegir los puntos S y S', trazamos los rayos SA, $S'A'$, SC, $S'C'$ y construimos la recta A^*C^* según se muestra en la fig. 126. Precisamente esta última será el eje de la perspectiva de los haces S y S'.

A fin de construir sobre la recta o' el punto M' correspondiente al punto M de la recta o, es suficiente trazar el rayo SM y unir el punto M^* en que éste cruzará a la

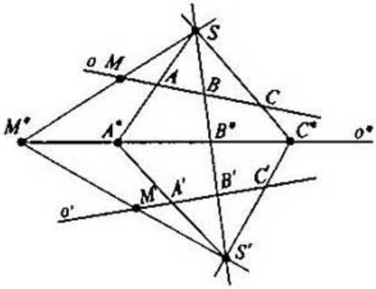


Fig. 126

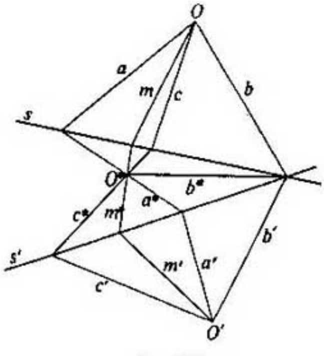


Fig. 127

recta A^*C^*, con el punto S'; la recta $S'M^*$ atravesará a la recta o' en el punto buscado $M' = f(M)$.

La construcción de los rayos proyectivamente correspondientes de dos haces es dual de la construcción recién descrita. La vamos a exponer sin explicaciones detalladas.

Sean O y O' los centros de dos haces entre cuyos rayos está establecida una correspondencia proyectiva y se requiere construir el rayo correspondiente $m' = f(m)$ del haz O' a base de un rayo arbitrario m del haz O; se conocen tres rayos a, b, c del haz O y sus tres rayos correspondientes a', b', c' en el haz O'. Para ello, hay que trazar arbitrariamente dos rectas s y s' a través del punto de intersección de cualesquiera rayos correspondientes de los indicados, por ejemplo, a través del punto de intersección de los rayos b y b' (fig. 127); luego, hay que unir mediante la recta el punto de intersección de las rectas a, s con el punto de intersección de las rectas a', s', y mediante la recta el punto de intersección de las rectas c, s con el punto de intersección de las rectas c', s'; las rectas trazadas de esta forma, en su intersección determinarán el punto O^*. Después de esto la construcción del rayo $m' = f(m)$ se efectúa así como se muestra en la fig. 127: el punto en que el rayo m corta a la recta s, se une con el punto O^*, y se determina el punto de intersección de la recta que los une, con la s'; precisamente el rayo que va desde O' al referido punto, será el rayo buscado $m' = f(m)$.

Hagamos constar que la correspondencia entre los elementos de las variedades de una dimensión, que se establece efectuando cierta sucesión de operaciones de proyección y cortadura, siempre es proyectiva (debido a que estas operaciones hacen pasar los grupos armónicos de elementos a grupos también armónicos de elementos). A base de lo expuesto en el presente párrafo, podemos afirmar que cualquiera que sea la correspondencia proyectiva entre los elementos de variedades de una dimensión, la misma siempre puede obtenerse a consecuencia de cierta sucesión de operaciones de proyección y de cortadura.

§ 141. CONSTRUCCIÓN PROYECTIVA DE LAS IMÁGENES DE SEGUNDO GRADO (TEOREMAS DE STEINER). La correspondencia proyectiva entre las imágenes de primer grado puede aprovecharse para construir las imágenes de segundo grado. El procedimiento de tal construcción se contiene en los teoremas de Steiner que se aducen más abajo.

TEOREMA 55. *El conjunto de puntos de intersección de los rayos proyectivamente correspondientes de dos haces es una línea de segundo orden que pasa por los centros de dichos haces.*

DEMOSTRACIÓN. Sobre un plano, introduzcamos algún sistema de coordenadas proyectivas; en este caso es cómodo tomar las no homogéneas. Sean $S_1(x_1, y_1)$ y $S_2(x_2, y_2)$ los centros de dos haces entre cuyos rayos viene establecida cierta correspondencia proyectiva. Si

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{1}$$

es la ecuación de un rayo arbitrario del primer haz,

$$y - y_2 = k'(x - x_2), \tag{2}$$

la ecuación del rayo correspondiente del segundo, entonces, según sabemos, el parámetro k' es una función lineal fraccional del parámetro k:

$$k' = \frac{\alpha k + \beta}{\gamma k + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \tag{3}$$

(véase el § 119). A fin de obtener la ecuación de la línea que se describe por el punto de intersección de los rayos (1) y (2) al variar k, hay que excluir los parámetros k y k' de las ecuaciones (1), (2) y (3). El resultado de la exclusión tiene forma de

$$\gamma(y - y_1)(y - y_2) + \delta(y - y_2)(x - x_1) - \\ - \alpha(y - y_1)(x - x_2) - \beta(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad (*)$$

y es, evidentemente, una ecuación de segundo grado respecto a x, y.

De tal suerte, en efecto, los puntos comunes de los rayos correspondientes de los haces S_1 y S_2 constituyen una línea de segundo orden. El hecho de que esta línea pasa por S_1 y S_2, se ve de inmediato; efectivamente, tanto los valores de $x = x_1$, $y = y_1$ como los de $x = x_2$, $y = y_2$ satisfacen la ecuación (*), luego, los puntos S_1 y S_2 pertenecen al conjunto de puntos de intersección de los rayos correspondientes de los haces S_1 y S_2, es evidente sin cálculos algunos; por ejemplo, el punto S_2 pertenece al referido conjunto dado que el rayo S_1S_2 del haz corta a todos los rayos del segundo haz, incluidos sus rayos correspondientes, en el punto S_2.

Hagamos notar de paso que *al rayo común S_1S_2 de los haces S_1 y S_2, si lo estimamos perteneciente al primer haz, le corresponde en el segundo haz el rayo t_2 tangente en el punto S_2 a una línea de segundo orden formada por los puntos de intersección de los rayos proyectivamente correspondientes de los haces S_1 y S_2; y si estimamos que el rayo S_1S_2 pertenece al segundo haz, entonces en el primero le corresponderá el rayo t_1 tangente a la referida línea en el punto S_1.*

Efectivamente, sean M el punto de intersección de dos rayos correspondientes m y m', s, un rayo común de los haces S_1 y S_2, t_2, la tangente en el punto S_2 (fig. 128). Supongamos que el punto M tiende hacia S_2 según una curva; entonces m tiende hacia s y m' hacia t_2. Pero la correspondencia proyectiva es continua (esto deriva de su representación analítica). Por ende, las posiciones límite de los rayos correspondien-

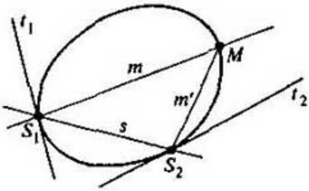


Fig. 128

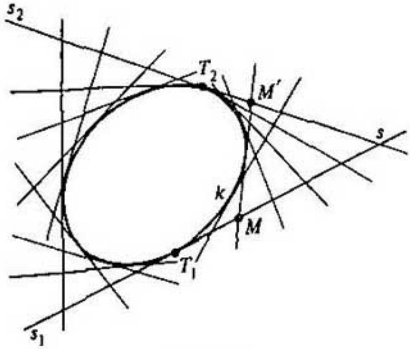


Fig. 129

tes $s = \lim\limits_{M \to S_2} m$ y $t_2 = \lim\limits_{M \to S_2} m'$ son rayos correspondientes, es decir, al rayo s, como a un rayo del primer haz, le corresponde el rayo t_2 en el segundo haz. Análogamente se demuestra que al rayo s, como a un rayo del segundo haz, le corresponde el rayo t_1 en el primer haz.

Conviene preguntar: ¿si cualquier línea de segundo orden puede formarse mediante dos haces proyectivos, es decir, mediante los haces entre cuyos rayos viene establecida una correspondencia proyectiva? Es natural que mediante los haces proyectivos con los rayos reales se puede construir sólo tales líneas de segundo orden que poseen un conjunto infinito de puntos reales. Por tanto, no pueden construirse: la línea degenerada de segundo orden compuesta por dos rectas imaginarias, y la línea nula regular (esto está claro, ya que por cuanto permanecemos en los límites de las construcciones de geometría intuitiva, las imágenes compuestas de elementos imaginarios se deslizan de nuestro campo visual).

En lo que se refiere a las demás líneas de segundo orden, es decir, la recta real tomada dos veces, el par de rectas reales diferentes y la línea oval (véase el § 134), todas ellas pueden construirse aplicando el procedimiento descrito más arriba.

1) LA RECTA REAL TOMADA DOS VECES constituye el lugar geométrico de los puntos comunes de los rayos correspondientes de haces proyectivos, si coinciden los centros de los referidos haces, y si resulta múltiple el rayo de uno de los haces que coincide con el rayo correspondiente del otro haz. Por ejemplo, los haces

$$y = kx, \qquad y = k'x \tag{*}$$

con el centro común (0, 0), entre cuyos rayos viene establecida la correspondencia

$$k' = \frac{k}{1 + k}, \tag{**}$$

tienen como conjunto de puntos comunes de los rayos correspondientes el eje de coordenadas tomado dos veces, ya que al eliminar los parámetros k, k' de las ecuaciones (*) y (**), obtenemos $y^2 = 0$.

2) EL PAR DE RECTAS REALES DIFERENTES resulta de la intersección de los rayos correspondientes de dos haces puestos en correspondencia de perspectiva. En tal caso el eje de la perspectiva es una recta del par, y el rayo común de los haces, la otra.

3) LA LÍNEA OVAL resulta de la intersección de los rayos correspondientes de dos haces cuando entre dichos rayos viene establecida la correspondencia proyectiva, pero no la de perspectiva: en rigor, en este caso los puntos comunes de los rayos correspondientes no se encuentran sobre líneas rectas*).

Según el principio de dualidad, del teorema 55 sigue el

TEOREMA 56. *El cúmulo de rectas que unen los puntos correspondientes de dos rectas fijas puestas en correspondencia proyectiva, constituye un haz de segunda clase que contiene estas dos rectas.*

Si las rectas fijas s_1 y s_2 están puestas en correspondencia de perspectiva, entonces el rayo de segunda clase que se considera en el teorema 56, degenera en un par de haces de primera clase; uno de ellos tendrá por su centro el centro de la perspectiva de la correspondencia dada, el otro, el punto común de las rectas s_1 y s_2.

Si las rectas s_1 y s_2 están puestas en correspondencia proyectiva pero no de perspectiva, entonces el haz de segunda clase definido con arreglo al teorema 56, es regular. Conforme al teorema 52, el referido haz tiene una envolvente que constituye una línea regular de segundo orden. Y, por cuanto el haz contiene las rectas s_1 y s_2, su línea envolvente de segundo orden es tangente a estas rectas.

En la fig. 129 aparece un haz regular de segunda clase engendrado por la correspondencia proyectiva entre las rectas s_1 y s_2, y se aprecia la línea de segundo orden k que envuelve el referido haz; las letras T_1, T_2 designan los puntos de adherencia de la línea k a las rectas s_1 y s_2, las letras M, M', dos puntos arbitrarios que se corresponden. En la figura puede verse que si el punto M tiende hacia S, entonces M' tiende hacia T_2.

De tal manera, *si concebimos el punto común de las rectas s_1, s_2 en una de estas rectas, entonces en la otra le corresponderá el punto de adherencia a la línea k* (es decir, el punto característico de un haz de segunda clase).

Esta proposición, evidentemente, es dual de la proposición establecida más arriba, acerca de las tangentes a la curva de segundo orden con los puntos de adherencia en los centros de los haces proyectivos que forman esta curva (la correspondencia dual de las tangentes a una curva y de los puntos característicos de un haz se ha señalado al final del § 127).

§ 142. TEOREMAS RECÍPROCOS DE STEINER. En el párrafo precedente hemos mostrado que toda línea de segundo orden puede definirse como punto geométrico de los puntos comunes de los rayos correspondientes de dos haces poyectivos, y que la misma pasa por los centros de los referidos haces.

El teorema siguiente establece que los centros de los haces proyectivos que forman una línea de segundo orden, son puntos ordinarios de ésta.

TEOREMA 57. *Sea k una línea regular de segundo orden, P y P', dos puntos arbitrarios suyos. Si a cada rayo m del haz P le corresponde el rayo $m' = f(m)$ del haz P', que corta al rayo m en la línea k, entonces la correspondencia $m' = f(m)$ es proyectiva.*

---

*) Hagamos recordar al lector que todas las líneas ovales de segundo orden son proyectivamente equivalentes.

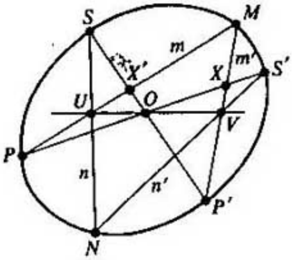


Fig. 130

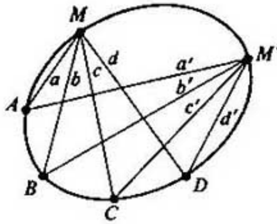


Fig. 131

NOTA. En cuanto a las líneas degeneradas, este teorema es válido sólo si se adoptan ciertas restricciones para la posición de los puntos P y P'; precisamente, si la línea k constituye un par de rectas, entonces ambos puntos deben hallarse sobre una de ellas. En el caso contrario, la correspondencia $m' = f(m)$ no será biunívoca.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que la línea k puede formarse mediante dos haces proyectivos; sean S y S' los centros de los haces proyectivos que forman la línea k (fig. 130). Sobre la línea, fijemos cierto punto M y denotemos con N un punto variable de la línea, con n y n', los rayos SN y $S'N$; según la condición de la elección de los puntos S, S', la correspondencia $n' = \varphi(n)$ es proyectiva. Luego, sean U el punto de intersección de la recta PM con el rayo n, V, el punto de intersección de la recta $P'M$ con el rayo n' *). Como la correspondencia $n' = \varphi(n)$ es proyectiva, la correspondencia entre el punto U de la recta PM y el V de la recta $P'M$ será una correspondencia proyectiva entre los puntos de las rectas PM y $P'M$. Pero, más aún, la referida correspondencia es de perspectiva; efectivamente, si el punto U, al desplazarse por la recta PM, coincide con el punto M, entonces su punto correspondiente V coincidirá simultáneamente con el M; según el teorema 53, precisamente esta circunstancia asegura el carácter de perspectiva de la correspondencia $U - V$. Hallemos el centro de la perspectiva de dicha correspondencia. A este fin, hagamos constar que si el punto N coincide con el P, entonces el punto U también coincidirá con el P, y la posición correspondiente del punto V será el punto X ubicado en la intersección de las rectas $P'M$ y PS'. De tal forma, los puntos P y X se corresponden; consiguientemente, el centro de la perspectiva se halla sobre la recta PX o, lo cual es lo mismo, sobre la PS'; al razonar análogamente, nos cercioraremos de que el centro de la perspectiva se encuentra sobre la recta $P'S$. En la fig. 130 el mismo está denotado con la letra O. Así pues, la recta UV siempre pasa por el punto O.

Ahora, fijemos el punto N, suponiendo variable el punto M. Consideremos la correspondencia $m' = f(m)$ de los rayos dirigidos de los puntos P y P' hacia el punto M, y junto con ella, la correspondencia $V = \Phi(U)$ entre los puntos de las rectas SN y $S'N$ (ahora estas rectas están fijas); aquí los puntos homólogos U, V se determinan por la intersección de las rectas SN y $S'N$ con los rayos correspondientes

---

*) Según el enunciado del teorema, los puntos P y P' son puntos arbitrariamente definidos sobre una curva.

m, m' de los haces P, P'. Según lo que precede, la recta UV siempre pasa por el punto O (que no varía al variar M); de aquí se desprende que la correspondencia $V = \Phi(U)$ es una correspondencia de perspectiva, y por esto la $m' = f(m)$ es una correspondencia de perspectiva (ya que se establece mediante cierta sucesión de operaciones de proyección y de cortadura). El teorema queda demostrado.

A base del principio de dualidad*) del referido teorema se deduce el

TEOREMA 58. *Sean k una línea regular de segundo orden, t y t', dos tangentes suyas; si a cada punto M de la recta t está puesto en correspondencia el punto $M' = f(M)$ de la recta t' de modo que la recta MM' es tangente a la línea k, entonces la correspondencia $M' = f(M)$ es proyectiva.*

De los teoremas 57 y 58 y del teorema 46 derivan, entre otras, dos proposiciones siguientes duales una de otra:

1) *Si M y M' son dos puntos cualesquiera de una línea de segundo orden, a, b, c, d y a', b', c', d' son los rayos que parten de dichos puntos hacia los puntos arbitrarios A, B, C, D de esta línea* (fig. 131), *entonces tiene lugar la igualdad de relaciones complejas*

$$(abcd) = (a'b'c'd').$$

2) *Si m y m' son cualesquiera dos tangentes a una línea de segundo orden, A, B, C, D y A', B', C', D', puntos sobre las rectas m y m', determinados por la intersección con cuatro tangentes arbitrarias a, b, c, d* (fig. 132), *entonces tiene lugar la igualdad de relaciones complejas*

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

§ 143. CONSTRUCCIÓN DE LA LÍNEA DE SEGUNDO ORDEN A BASE DE SUS CINCO ELEMENTOS DADOS. Los resultados obtenidos en el párrafo precedente permiten afirmar una serie de proposiciones que se aducen a continuación.

1) *Cinco puntos de un plano, entre los cuales no hay tres que se hallen sobre una misma recta, siempre determinan la única línea regular de segundo orden que pasa por ellos.*

En efecto, sean dados sobre un plano cinco puntos entre los cuales no hay tres que se hallen sobre una misma recta. Designemos con S, S' algunos dos de ellos, con A, B, C, los tres restantes. Luego, de los puntos S y S', tracemos los rayos a, b, c y a', b', c' a los puntos A, B, C y establezcamos la correspondencia proyectiva entre los rayos de los haces con los centros S y S' de forma que a los rayos a, b, c les correspondan los a', b', c'. Entonces, el lugar geométrico de los puntos de intersección de los rayos homólogos de los haces S y S' será una línea de segundo orden que pasa por los puntos indicados; no puede existir otra línea, dado que la correspondencia proyectiva se determina unívocamente al fijar tres pares de elementos correspondientes.

En el § 140 hemos expuesto el procedimiento de construir pares correspondientes de rayos de dos haces proyectivos; aplicándolo en el caso dado, se puede construir, a partir de cinco puntos de una línea de segundo orden, otros muchos puntos suyos tantos cuantos se quieran.

---

*) Su aplicación en este caso está asegurada por el teorema 52.

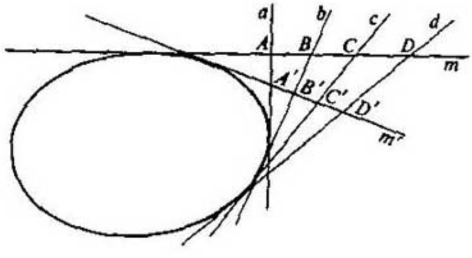


Fig. 132

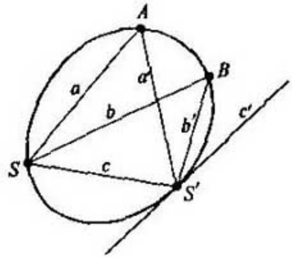


Fig. 133

A propósito, la fig. 130 constituye el esquema de un instrumento para trazar la línea de segundo orden; en rigor, imaginémonos que en los cinco puntos S, P, N, P', S' indicados están instaladas cinco varillas fijas $P'S$, SN, NS' y $S'P$ con las cuales están conectadas las varillas móviles PM, $P'M$ y UV mediante articulaciones desplazables en los puntos U, V y mediante articulaciones fijas en los puntos P, O, P'. Entonces, si la varilla UV gira alrededor del punto O, entonces las varillas PM y $P'M$ conectadas con ella, giran de manera que el punto de su intersección M traza una línea de segundo orden que pasa por los puntos S, P, N, P', S' dados.

2) *Cuatro puntos de un plano, entre los cuales no hay tres que se hallen sobre una misma recta, y la recta que pasa por uno de ellos, determinan la única línea de segundo orden que pasa por los referidos puntos y es tangente a la recta dada.*

Efectivamente, designemos los elementos indicados así como lo muestra la fig. 133, y establezcamos entre los rayos de los haces S y S' la correspondencia proyectiva a base de los tres pares de rayos homólogos a, a'; b, b'; c, c'. Entonces, el lugar geométrico de los puntos de intersección de los rayos homólogos de los haces S y S', determinado unívocamente, será la línea de segundo orden que pasa por los puntos A, B, S, S' y es tangente a la recta c' (véase el § 141).

3) *Tres puntos de un plano que no están situados sobre una misma recta, y dos rectas entre las cuales una pasa por uno de los tres puntos dados, y la otra, por uno de los dos restantes, determinan la única línea de segundo orden que pasa por los referidos puntos y es tangente a las rectas indicadas.*

En efecto, designemos los elementos indicados así como lo muestra la fig. 134, y establezcamos entre los rayos de los haces S y S' la correspondencia proyectiva a base de los tres pares de rayos a, a'; b, b'; c, c'. Entonces, el lugar geométrico de los puntos de intersección de los rayos homólogos de los haces S y S' será la línea de segundo orden que pasa por los puntos S, A, S' y es tangente a las rectas b y c'.

A base del principio de dualidad, de las proposiciones demostradas aquí se infiere que la línea regular de segunda clase, como envolvente del haz, de segunda clase, se determina unívocamente al fijar cinco elementos suyos en una de las combinaciones que siguen:

1) los elementos dados son cinco tangentes;

2) los elementos dados son cuatro tangentes y el punto de adherencia sobre una de ellas;

3) los elementos dados son tres tangentes y los puntos de adherencia sobre dos de ellas.

§ 144. TEOREMAS DE PASCAL Y BRIANCHON. Ahora vamos a detenernos en dos proposiciones de la geometría proyectiva conocidas bajo el nombre de teoremas de Pascal y Brianchon.

TEOREMA 59 (TEOREMA DE PASCAL). *Cualquiera que sea el hexavértice inscrito en una línea de segundo orden, los puntos de intersección de sus lados opuestos se hallan sobre una misma recta* (fig. 135).

TEOREMA 60 (TEOREMA DE BRIANCHON). *Cualquiera que sea el hexavértice circunscrito alrededor de una línea de segundo orden, las rectas que unen sus vértices opuestos, pasan por un mismo punto* (fig. 136).

Los dos teoremas, obviamente, son duales uno de otro; por esto es suficiente demostrar uno de ellos.

Un análisis detenido del material precedente revela que el teorema de Pascal es una paráfrasis del de Steiner sobre la construcción de la línea de segundo orden mediante dos haces proyectivos y, por tanto, fue demostrado implícitamente por nosotros antes. Para cerciorarnos de ello, ante todo, hay que señalar la regla que permita identificar los pares de lados opuestos del hexavértice, como quiera que se hallen sus vértices. A este fin, numeremos con 1, 2, 3, 4, 5, 6 los lados del hexavértice en función de su conexión sucesiva; llamaremos lados opuestos a los lados cuyos números difieren en tres, es decir, 1 y 4, 2 y 5, 3 y 6. Al notarlo, volvamos a la figura que aparece en la fig. 130. Aquí tenemos un hexavértice inscrito en una línea de segundo orden, cuyos lados enumerados según el orden de su conexión, son SN, NS', $S'P$, PM, MP', $P'S$; asignémosles correspondientemente los números 1, 2, 3, 4, 5, 6. En la fig. 130, el punto de intersección de los lados 1, 4 está designado con U, el punto de intersección de los 2, 5, con V, y el punto de intersección de los 3, 6, con O. En su tiempo se demostró que los tres puntos U, O, V se hallan sobre una misma recta, y que los puntos S, P, N, P', S', M están situados de un modo totalmente arbitrario sobre una curva; por ende, precisamente entonces fue demostrado el teorema de Pascal.

El teorema de Brianchon, según hemos señalado, se deduce del de Pascal con arreglo al principio de dualidad.

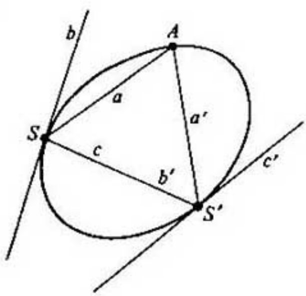


Fig. 134

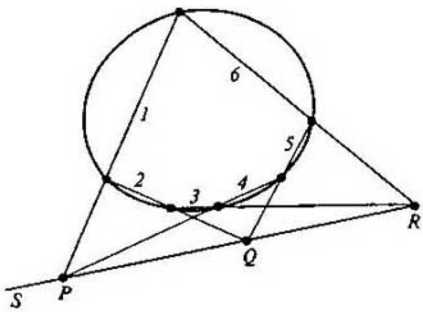


Fig. 135

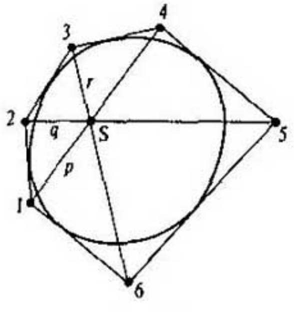


Fig. 136

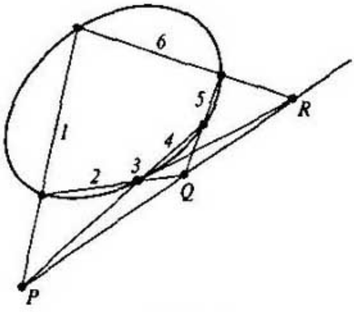


Fig. 137

§ 145. CASOS LÍMITE DE LOS TEOREMAS DE PASCAL Y DE BRIANCHON. Imaginémonos que coincidan todos los puntos que determinan algún lado de un hexavértice inscrito (por ejemplo, los puntos que determinan el lado 3 en la fig. 135); entonces el referido lado se convierte en tangente, resultando así la configuración de la fig. 137. Correspondientemente, tenemos un teorema.

La tangente a una línea de segundo orden, trazada en uno de los vértices de un pentavértice inscrito, se interseca con el lado opuesto a este vértice en el punto situado sobre la recta que pasa por los puntos de intersección de los demás pares de lados no adyacentes del pentavértice.

Obtendremos el caso límite dual del teorema de Brianchon suponiendo que dos lados adyacentes de un hexavértice circunscrito coinciden, y su vértice común se convierte en punto adherente (fig. 138). Correspondientemente, tenemos un teorema.

La recta que une el punto adherente de uno de los lados de un pentavértice circunscrito, con el vértice opuesto, pasa por el punto común de las rectas que unen los dos pares restantes de vértices no adyacentes del referido pentavértice.

Otros casos límite del teorema de Pascal para el cuadrivértice inscrito y el trivértice inscrito y los casos límite del teorema de Brianchon para el cuadrivértice circunscrito y el trivértice circunscrito sin explicaciones aparecen en las figs. 139, 140, 141 y 142.

§ 146. PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN DE LA TANGENTE EN UN PUNTO DADO DE LA CURVA DE SEGUNDO ORDEN, Y DEL PUNTO ADHERENTE DE LA TANGENTE DADA.

PROBLEMA. A base de cinco puntos de una curva de segundo orden construir la tangente en uno de ellos.

Este problema se resuelve mediante el teorema de Pascal para el pentavértice inscrito. Sean marcados con los números 1, 2, 4, 5, 6 los segmentos que unen los puntos dados según muestra la fig. 137, y el punto indicado, con 3; entonces, al determinar en primer lugar los puntos P, Q, y luego, el punto R, y al unir el punto R con el 3, obtendremos la tangente buscada.

PROBLEMA. A base de cinco tangentes de una curva de segundo orden construir el punto de adherencia de uno de ellos.

Este problema se resuelve mediante el teorema de Brianchon para el pentalátero circunscrito. Sean marcados con los números 1, 2, 4, 5, 6 los puntos de intersección de las tangentes dadas según muestra la fig. 138. Entonces, al unir con rectas los puntos 1, 4 y los 2, 5, hallamos el punto de intersección de las referidas rectas; la recta que une este punto con el 6, al atravesar a la recta 2, 4 determinará sobre ella el punto adherente buscado.

§ 147. CORRESPONDENCIA PROYECTIVA ENTRE LOS PUNTOS DE LA CURVA DE SEGUNDO ORDEN. En la presente sección hemos considerado pormenorizadamente la correspondencia proyectiva entre los elementos de las variedades unidimensionales de primer grado. Para muchos problemas de la geometría proyectiva es útil generalizar el concepto de correspondencia proyectiva para el conjunto de elementos de variedades unidimensionales de segundo grado.

Ahora vamos a mostrar cómo se efectúa tal generalización, ateniéndonos en nuestros razonamientos a un caso concreto de la variedad de segundo grado, precisamente, a la curva oval de segundo orden.

Convengamos en llamar armónicos conjugados a dos pares de puntos A, B y C, D de una línea de segundo orden k, si los mismos se proyectan desde algún punto M de la línea k por dos pares de rayos armónicos conjugados. A base de la primera de las dos proposiciones aducidas al final del § 142, podemos afirmar que la propiedad de la conjugación armónica de dos pares de puntos A, B y C, D de una línea de segundo orden no está vinculada a la elección del punto M y, de tal modo, se define exclusivamente por la posición de los propios puntos A, B, C, D.

La correspondencia biunívoca entre los puntos de dos líneas de segundo orden diferentes o coincidentes k_1 y k_2 se llama proyectiva, si en la referida correspondencia a los pares armónicos conjugados de los puntos de la línea k_1 les responden también pares armónicos conjugados de los puntos de la línea k_2.

La definición enunciada, según vemos, es totalmente análoga a la de la correspondencia proyectiva entre los puntos de rectas. El establecimiento de la correspondencia proyectiva lo llamaremos también *aplicación proyectiva* de la línea k_1 sobre la k_2. En el caso de coincidir las líneas k_1 y k_2, se dice que una línea está aplicada proyectivamente sobre sí misma. Precisamente de este caso nos vamos a ocupar ahora.

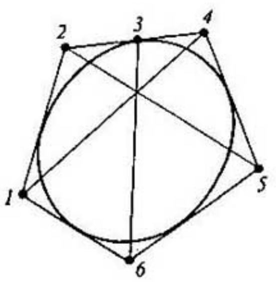


Fig. 138

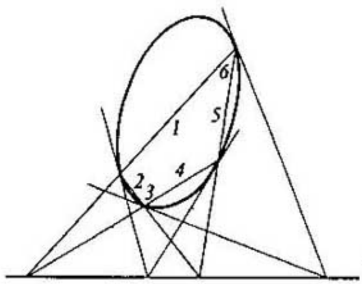


Fig. 139

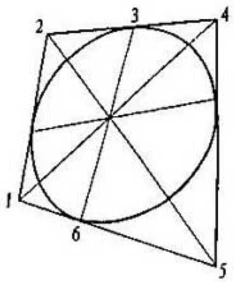


Fig. 140

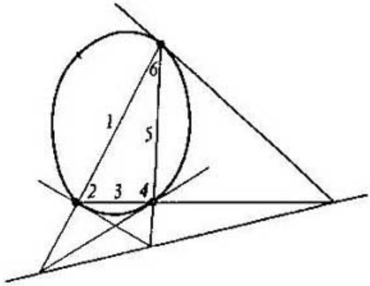


Fig. 141

Sea dada la aplicación proyectiva de cierta línea de segundo orden k sobre sí misma; sobre la línea k, elijamos algún punto A y designemos con A' su imagen. Luego, entre los rayos de los haces con los centros A y A', respectivamente, establezcamos correspondencia, haciendo corresponder un rayo m del haz A a un rayo arbitrario m' del A' de forma que el punto de intersección del rayo m con la línea k sea la imagen del punto de intersección del rayo m' con dicha línea. Es fácil comprender que la correspondencia establecida es proyectiva. En rigor, si m', n' y p', q' son dos pares armónicos conjugados de rayos del haz A', según la definición de la conjugación armónica sobre la línea de segundo orden, los pares de puntos M, N y P, Q en los cuales los rayos m', n', p', q' cortan a la línea, serán también armónicos conjugados; merced a la aplicación proyectiva de la curva sobre sí misma, los pares de puntos M, N y P, Q pasan a los pares armónicos conjugados de puntos M', N' y P', Q' que son proyectados desde el punto A por los pares armónicos conjugados de rayos m, n y p, q. Mas, precisamente estos rayos del haz A se hacen corresponder a los rayos m', n', p', q' del haz A'. De tal suerte, gracias a la correspondencia establecida, a los grupos armónicos de elementos del haz A' les responden los grupos armónicos de elementos del haz A; precisamente en esto reside la propiedad característica de la correspondencia proyectiva.

En cuanto a la correspondencia establecida entre los rayos de los haces A y A', se puede decir más: la misma es no sólo proyectiva sino también de perspectiva. Esto se sigue de que al rayo $A'A$ del haz A' le responde el rayo AA' del A (véase el teorema 54).

Consecuentemente, los rayos correspondientes de los haces A y A' se intersecan sobre una misma recta, esto es, sobre el eje de la perspectiva de los referidos haces. De aquí tenemos el siguiente procedimiento bien sencillo de realizar gráficamente la aplicación proyectiva de la línea de segundo orden sobre sí misma, válido cuando esta aplicación viene determinada por la fijación de tres pares de puntos correspondientes (dicho procedimiento incluye la demostración del hecho de que tres pares de puntos correspondientes determinan la aplicación proyectiva). Sean dados tres pares de puntos proyectivamente correspondientes de una línea de segundo orden: A, A'; M_1, M_1'; M_2, M_2' (fig. 143). Construyamos en primer lugar el eje de la perspectiva de los haces A y A', para lo cual hallemos el punto de intersección de las rectas

AM_1' y $A'M_1$ y el punto de intersección de las AM_2' y $A'M_2$; precisamente la recta que une estos puntos será el eje de la perspectiva. Una vez construido el eje de la perspectiva, para todo punto M de la línea podemos hallar el punto homólogo M' proyectando el punto M desde A' sobre el eje de la perspectiva y luego proyectando el punto resultante sobre el eje, desde A sobre la curva. La fig. 143 muestra la construcción de los puntos M_3', M_4', ... que corresponden a los M_3, M_4, ...

Hagamos constar también que los puntos de intersección del eje de la perspectiva de los haces A y A' con la línea de segundo orden son puntos fijos en la aplicación proyectiva de la línea sobre sí misma. En efecto, de la construcción de los puntos proyectivamente correspondientes de la línea de segundo orden recién descrita se desprende inmediatamente que si el punto M de la línea al mismo tiempo se encuentra sobre el eje de la perspectiva, su punto correspondiente coincide con él, es decir, el punto M se aplica sobre sí mismo. En la fig. 143 se puede ver que al aproximarse un punto variable de la línea hacia el punto Q en que dicha línea es atravesada por el eje, el punto correspondiente también se aproxima hacia el punto Q.

En el instante en que el punto variable coincide con Q, el mismo coincide con su homólogo. Por eso el punto fijo de la aplicación se llama *doble*.

A base de lo expuesto, la construcción de los puntos dobles de la aplicación proyectiva de una línea trazada, de segundo orden, sobre sí misma se reduce a la del eje de la perspectiva de los haces A y A'. Si el eje de la perspectiva de los referidos haces no corta la línea, no existen puntos dobles de la aplicación.

Es notable que el eje de la perspectiva de los haces A y A' coincide con el eje de la perspectiva de cualquier otro par de haces que proyectan los puntos correspondientes de la línea y que tienen centros en dos puntos homólogos. Efectivamente, sean A, B, C tres puntos de la línea, A', B', C', sus puntos homólogos en cierta aplicación proyectiva de la referida línea sobre sí misma (fig. 144). Elijamos primero como centros de los haces que proyectan los puntos correspondientes de la línea, los puntos A y A'. El eje de la perspectiva de estos haces s_a se determinará por el punto

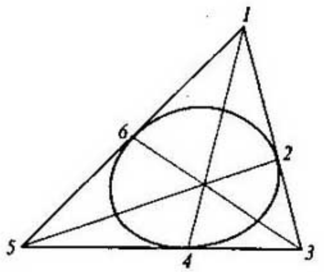


Fig. 142

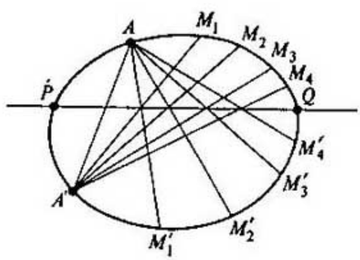


Fig. 143

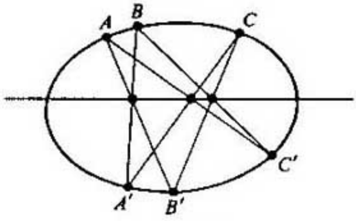


Fig. 144

de intersección de las rectas $A'B$ y AB' y el punto de intersección de las $A'C$ y AC'. Luego, elijamos los puntos B y B' como centros de los haces proyectantes. El eje de la perspectiva de dichos haces s_b se definirá por el punto de intersección de las rectas $B'A$ y BA' y el punto de intersección de las $B'C$ y BC'. Pero, en virtud del teorema de Pascal, los tres puntos obtenidos se hallan sobre una misma recta y, consiguientemente, los ejes s_a y s_b coinciden.

El eje de la perspectiva común de los haces A y A', B y B', etc., se llama sencillamente *eje de la perspectiva de la aplicación proyectiva de la curva de segundo orden sobre sí misma.*

Todo lo expuesto permite formular la afirmación siguiente.

Si está dada la aplicación proyectiva de una curva de segundo orden sobre sí misma, entonces, cualesquiera que sean dos pares de puntos correspondientes M, N y M', N', las rectas MN' y $M'N$ se intersecan siempre sobre una cierta recta, precisamente ésta es el eje de la perspectiva de la aplicación indicada.

§ 148. CONSTRUCCIÓN DE LOS PUNTOS DOBLES DE LA APLICACIÓN PROYECTIVA DE UNA RECTA SOBRE SÍ MISMA. Los resultados obtenidos en el párrafo precedente permiten resolver el problema que sigue.

PROBLEMA. Construir puntos dobles de la aplicación proyectiva de la recta a sobre sí misma si están dados tres pares de puntos correspondientes de esta aplicación A y A', B y B', C y C'.

RESOLUCIÓN. Valiéndonos de un compás, construyamos una circunferencia arbitraria k (fig. 145) y elijamos sobre ella algún punto S. Luego, entre los puntos de la circunferencia k establezcamos correspondencia, asignando a un punto arbitrario M^* de esta circunferencia el punto correspondiente $M^{*\prime}$ de modo que el par de puntos M^*, $M^{*\prime}$ se proyecte desde el punto S en el par de los puntos de la recta a correspondientes uno a otro en la aplicación proyectiva indicada. Manifiestamente, la correspondencia $M^* \sim M^{*\prime}$ es proyectiva (sobre la circunferencia), y los puntos dobles suyos se proyectan desde S en los puntos dobles de la aplicación proyectiva dada de la recta a sobre sí misma.

De tal forma, el problema se reduce a la construcción de los puntos dobles de la aplicación proyectiva de la circunferencia k sobre sí misma. Para construirlos, proyectemos los puntos A, B, C, A', B', C' desde el punto S sobre la circunferencia k; sobre la circunferencia k obtendremos los puntos A^*, B^*, C^*, $A^{*\prime}$, $B^{*\prime}$, $C^{*\prime}$. Luego construyamos el eje de la perspectiva de la correspondencia $M^* \sim M^{*\prime}$ determinada por tres pares de puntos homólogos A^* y $A^{*\prime}$, B^* y $B^{*\prime}$, C^* y $C^{*\prime}$, y definamos los puntos P^*, Q^* en que el eje construido corta a la circunferencia. Al proyectar los puntos P^*, Q^* desde el centro S sobre la recta a, hallaremos los puntos dobles buscados P, Q. (Todas las construcciones aparecen en la fig. 145.)

§ 149. CONSTRUCCIÓN DE LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA ARBITRARIA CON LA LÍNEA DE SEGUNDO ORDEN DETERMINADA POR CINCO PUNTOS.

PROBLEMA. Una línea de segundo orden k está determinada por cinco puntos S, S', A, B, C (fig. 146); hallar los puntos de su intersección con una recta arbitraria a (la línea k no se supone trazada de hecho, se conocen sólo sus puntos S, S', A, B, C).

Este problema se reduce al anterior. En efecto, podemos considerar la línea k como punto geométrico de los puntos de intersección de los rayos proyectivamente correspondientes m, m' de los haces con los centros S, S' si la correspondencia $m \sim m'$ está determinada de forma que a los rayos SA, SB, SC les responden los rayos $S'A$, $S'B$, $S'C$. Los pares de los rayos proyectivamente correspondientes m, m', al cortar a la recta a, definen sobre ella los pares de puntos proyectivamente correspondientes M, M'; en particular, los pares de rayos correspondientes SA y $S'A$, SB y $S'B$, SC y $S'C$ determinan sobre la recta a los pares de los puntos homólogos A_1 y A_1', B_1 y B_1', C_1 y C_1'. Los puntos de intersección de la recta a con la línea k son aquellos en los que convergen los rayos homólogos m, m'; consiguientemente, los mismos constituyen puntos dobles de la correspondencia proyectiva $M \sim M'$. De tal suerte, para resolver el problema, tenemos que construir los puntos dobles de la aplicación proyectiva de la recta a sobre sí misma estimando que dicha aplicación viene determinada por tres pares de puntos A_1 y A_1', B_1 y B_1', C_1 y C_1'. La construcción requerida se aduce en el párrafo antecedente.

NOTA. En el caso de pasar la recta a por uno de los cinco puntos indicados, la construcción del único punto incógnito de su intersección con la línea k, se facilita considerablemente. En este caso podemos valernos del teorema de Pascal. En la fig. 147 los puntos dados de la línea k están marcados con 1, 2, 3, 4, 5, y el punto de

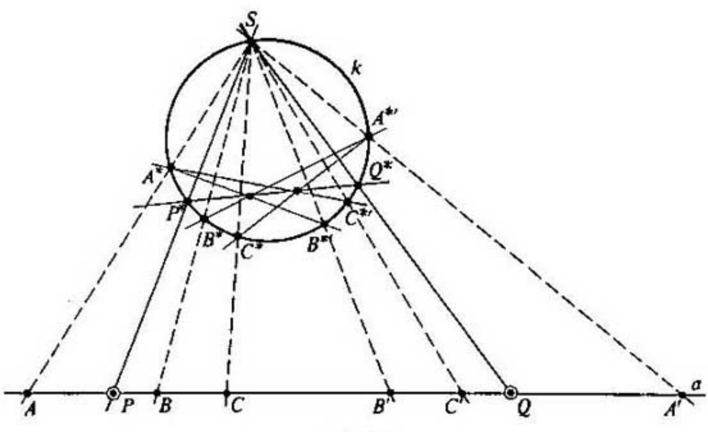


Fig. 145

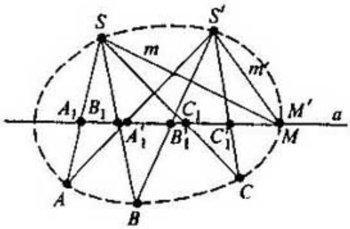


Fig. 146

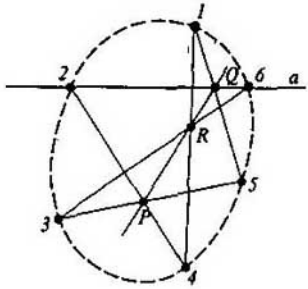


Fig. 147

intersección de la recta a con la línea k buscado, con el número 6; las letras P, Q, R denotan los puntos de intersección de los lados opuestos del hexavértice 1, 2, 3, 4, 5, 6; como el referido hexavértice está inscrito en la línea de segundo orden k, los puntos P, Q, R se encuentran sobre una misma recta. Por esto la construcción del punto 6 puede realizarse del modo siguiente: en primer lugar, hallar los puntos P y Q, luego, trazando la recta PQ, hallar el punto R y, al fin, uniendo los puntos 3 y R de la recta, el punto 6.

§ 150. TRAZADO DE LAS TANGENTES DESDE UN PUNTO DADO DEL PLANO A LA LÍNEA DE SEGUNDO ORDEN DETERMINADA POR CINCO PUNTOS.

PROBLEMA. Viene determinada por los cinco puntos A, B, C, D, E una línea de segundo orden k, y dado un punto arbitrario P. Trazar las tangentes a la línea k desde el punto P.

RESOLUCIÓN. A través del punto P y cualesquiera dos de los cinco puntos dados, por ejemplo, A y B, tracemos dos rectas PA y PB (fig. 148). Siguiendo el procedimiento recién expuesto, hallemos los puntos A_1 y B_1 en que las rectas PA y PB cortan la línea k. Luego construyamos el cuadrivértice completo ABA_1B_1; de sus propiedades armónicas se infiere que su diagonal p es la polar del punto P respecto a la línea k (véase la definición de la polar en el § 131). Al fin, hallemos los puntos M_1 y M_2 de intersección de la polar p con la línea k y unámoslas mediante las rectas t_1 y t_2 con el punto P. Del teorema 51 se sigue que t_1 y t_2 son las tangentes buscadas.

§ 151. SEGUNDO TEOREMA DE DESARGUES. Ahora vamos a exponer un interesante teorema de la geometría proyectiva sobre los haces de curvas de segundo orden conocido bajo el nombre de segundo teorema de Desargues.

Se llama haz de curvas de segundo orden a la colección de curvas que, para los valores diferentes del parámetro λ (considerando $\lambda = \infty$), se determinan por la ecuación

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} + \\ + \lambda(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}) = 0, \qquad (*)$$

donde a_{ik}, b_{ik} son coordenadas constantes, x, y, coordenadas (proyectivas) variables; notoriamente, el haz constituye una colección de líneas que pasan por cuatro puntos de intersección de dos líneas:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

y

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0;$$

estos cuatro puntos llamados *puntos básicos del haz*, pueden ser tanto reales como imaginarios.

TEOREMA 61 (DE DESARGUES). *Las líneas de segundo orden pertenecientes a algún haz, atraviesan a toda recta que no pase por los puntos básicos del haz, en los pares de puntos correspondientes en una misma involución.*

Antes de demostrar este teorema, hagamos recordar al lector el concepto de involución. En el § 113 llamamos involución sobre la recta a tal aplicación proyectiva de la recta sobre sí misma gracias a la cual todo punto de la recta después de aplicarse dos veces, vuelve a su lugar, es decir, si el punto $M' = f(M)$ es la imagen del M, entonces $M'' = f(M') = M$. En coordenadas proyectivas sobre la recta, las coordenadas x, x' de los puntos M, M' correspondientes en la involución, están enlazadas por la relación

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

a condición de $\alpha = -\delta$ (véase el § 113).

Ahora, pasemos a la demostración. Sea a la recta arbitraria de que se trata en el teorema de Desargues. Supongamos que el sistema de coordenadas está elegido de modo que el eje x coincide con la recta a. Entonces, para determinar los puntos de intersección de las líneas del haz con la recta a, será suficiente poner $y = 0$ en la ecuación (*). Obtendremos:

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} + \lambda(b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33}) = 0. \qquad (**)$$

Sean x, x' las coordenadas de los dos puntos M y M' en que la línea del haz correspondiente a cierto valor de λ, atraviesa a la recta a. Según el teorema de Viete, de

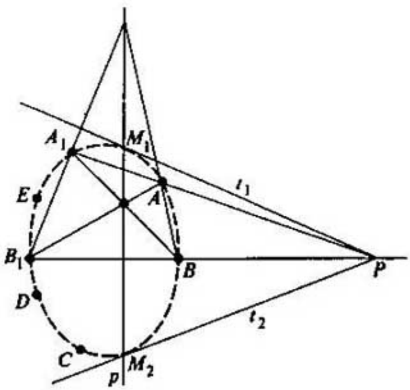


Fig. 148

(**) tenemos:

$$x + x' = -\frac{2(a_{13} + \lambda b_{13})}{a_{11} + \lambda b_{11}}, \qquad (\alpha)$$

$$xx' = \frac{a_{33} + \lambda b_{33}}{a_{11} + \lambda b_{11}}. \qquad (\beta)$$

Ahora, procuremos hallar la dependencia entre x y x'; para esto, eliminemos λ de las relaciones (α) y (β). Merced a la eliminación obtendremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x + x') + 2a_{13} & b_{11}(x + x') + 2b_{13} \\ a_{11}xx' - a_{33} & b_{11}xx' - b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

de donde

$$x' = \frac{(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})x + 2(a_{13}b_{33} - a_{33}b_{13})}{2(a_{13}b_{11} - a_{11}b_{13})x - (a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})}. \qquad (\gamma)$$

Vemos que x' se expresa a través de x mediante una función lineal fraccional; por consiguiente, la correspondencia $M(x) \sim M'(x')$ es proyectiva. Luego, al comparar la fórmula (γ) con la fórmula general $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, vemos que la condición $\delta = -\alpha$ que caracteriza la involución, en el caso dado se ha cumplido.

Mostremos que el determinante Δ de la transformación (γ) es desigual a cero. Pero $\Delta = -(a_{11}b_{33} - a_{33}b_{11})^2 - 4(a_{13}b_{11} - a_{11}b_{13})(a_{13}b_{33} - a_{33}b_{13})$ es el resultado de las ecuaciones $a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$ y $b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33} = 0$, tomado con el signo contrario; si $\Delta = 0$, estas ecuaciones tienen una raíz común, es decir, la recta a pasa por el punto básico del haz, lo cual está excluido por el enunciado del teorema. Consecuentemente, $\Delta \neq 0$, y el teorema queda demostrado.

En los dos párrafos que siguen, se examinan las aplicaciones del segundo teorema de Desargues.

§ 152. CONSTRUCCIÓN DE LOS PUNTOS DOBLES DE LA INVOLUCIÓN. En el § 113 hemos demostrado el teorema 42, conforme al cual la involución se determina al fijar dos pares diferentes de puntos correspondientes. Ahora vamos a mostrar cómo, a partir de dos pares de puntos correspondientes en la involución, construir una cantidad arbitraria de otros pares suyos y los puntos dobles (si existen tales).

Sean A, A' y B, B' dos pares de puntos correspondientes en cierta involución sobre la recta a. A través de los puntos A y A', tracemos una circunferencia k_a y, a través de los B y B', una circunferencia k_b, eligiendo las referidas circunferencias de forma que se intersequen en dos puntos; designemos con O_1 y O_2 los puntos de su intersección (fig. 149a y 149b). El sistema de circunferencias que pasan por los puntos O_1 y O_2, constituye un caso particular del haz de curvas de segundo orden. Según el segundo teorema de Desargues, las circunferencias de este sistema cortan a la recta a en los pares de puntos correspondientes de una misma involución. De tal suerte, al trazar circunferencias diferentes a través de los puntos O_1 y O_2 y al determinar los puntos de su intersección con la recta a, obtendremos diferentes pares de

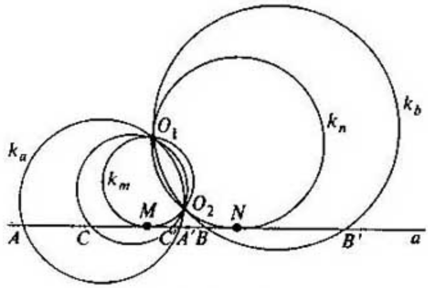


*Fig. 149*a

puntos correspondientes unos a otros en la involución definida por los pares A, A' y B, B'. Trazando a través de los puntos O_1 y O_2 dos circunferencias k_m y k_n tangentes a la recta a, hallaremos los puntos dobles de la involución, precisamente, los puntos adherentes de las circunferencias k_m y k_n con la recta a. En la fig. 149a los puntos dobles están designados por M y N.

Al comparar las figs. 149a y 149b, se comprende fácilmente que los dos pares de puntos A, A' y B, B' definen una involución hiperbólica (es decir, una involución que posee puntos dobles) si los referidos pares de puntos no separan uno a otro, y una involución elíptica (es decir, una involución que no posee puntos dobles) si los mismos separan uno a otro.

§ 153. DETERMINACIÓN DE LA CURVA DE SEGUNDO ORDEN A BASE DE CUATRO PUNTOS SUYOS Y UNA TANGENTE.

PROBLEMA. Vienen dados cuatro puntos y una tangente de una línea de segundo orden. Hallar el punto adherente de la tangente dada.

Este problema puede considerarse como un problema de determinación de la curva de segundo orden a base de cuatro puntos suyos y una tangente; en rigor, una vez determinado el punto adherente de la tangente dada, tendremos cinco puntos de la curva, y cinco puntos determinan globalmente una curva de segundo orden.

RESOLUCIÓN. Sean A, B, C, D cuatro puntos dados de una línea buscada de segundo orden y t, su tangente indicada. Consideremos un haz de líneas de segundo

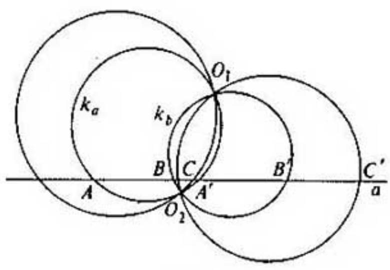


*Fig. 149*b

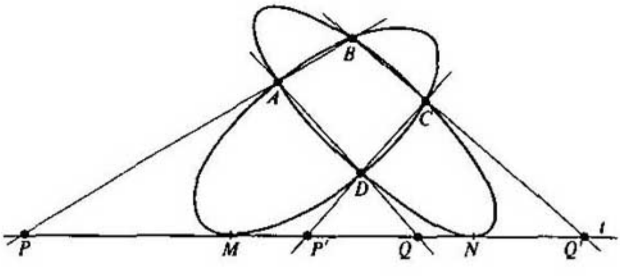


Fig. 150

orden con los puntos básicos A, B, C, D. Las líneas del referido haz, conforme al segundo teorema de Desargues, cortan la recta t en pares de puntos correspondientes de una misma involución. La línea buscada se incluye en el haz indicado, y su punto de adherencia es el punto doble de esta involución. De tal manera, el problema se reduce a hallar los puntos dobles de la involución. Para determinarlos, hay que conocer dos pares de puntos correspondientes. Los obtendremos atravesando la recta t con líneas cualesquiera del haz. A este fin, lo más cómodo es tomar dos líneas degeneradas del haz, por ejemplo, el par de rectas AB, CD y el par de rectas AD, BC (fig. 150).

Sean P, P' y Q, Q' los pares de puntos en que dichas líneas degeneradas de segundo orden atraviesan la recta t. Si los pares P, P' y Q, Q' no separan uno a otro, aplicando el procedimiento expuesto en el párrafo precedente, hallaremos dos puntos dobles de la involución M y N. Cada uno de ellos es punto de adherencia a la recta t de cierta línea de segundo orden que pasa por los puntos A, B, C, D dados. En este caso, por tanto, el problema tiene dos soluciones.

Si los pares P, P' y Q, Q' separan uno a otro, entonces la involución definida por los mismos, no posee puntos dobles. En este caso el problema (sobre el plano real) no tiene soluciones.

§ 154. En la presente sección hemos aducido una serie de teoremas concretos acerca de las propiedades proyectivas de las líneas de segundo orden. Su fuente es la construcción de la línea de segundo orden mediante dos haces proyectivos, expuesta por nosotros más arriba. Es natural preguntar, si se puede extender los mismos procedimientos a la teoría de lás líneas de órdenes superiores. En principio, esto es posible. Por ejemplo, las líneas de tercer orden se pueden construir mediante dos haces proyectivos entre los cuales uno es haz de líneas de segundo orden, y el otro, haz de rectas. Ahora vamos a mostrar en concreto el procedimiento.

Sea

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} + \\ + \lambda(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}) = 0 \qquad (*)$$

un haz de líneas de segundo orden e

$$y - y_1 = \lambda'(x - x_1), \qquad (**)$$

un haz de rectas. A la línea del haz (*), que corresponde a cierto valor del parámetro λ, hagamos corresponderle la recta del haz (**), que responde al valor del parámetro λ', definido por la fórmula

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \qquad (***)$$

donde α, β, γ, δ son las constantes que satisfacen la condición de $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Tal correspondencia entre los elementos de los haces (*) y (**) la llamaremos *proyectiva*.

Una vez eliminados los parámetros λ y λ', de las relaciones (*), (**) y (***) resulta la ecuación

$$\Phi(x, y) = 0$$

de tercer grado respecto a x, y. De aquí tenemos:

El lugar geométrico de los puntos de intersección de las líneas correspondientes de dos haces proyectivos entre los cuales uno constituye un haz de curvas de segundo orden, y el otro, un haz de rectas, es una línea de tercer orden.

Generalizando el concepto de correspondencia proyectiva para el caso de dos haces de líneas de segundo orden, del mismo modo se puede definir constructivamente las líneas de cuarto orden, etc.

Es posible formular en términos puramente geométricos la correspondencia proyectiva entre los haces de líneas de primero, segundo, etc. órdenes; a la vez, consecuentemente, es posible dar una definición constructiva y puramente geométrica de las imágenes de grados superiores. La investigación de las propiedades concretas de las imágenes de grados superiores, basada sobre esta idea, se emprendía por ciertos autores, pero la misma no es tan sencilla, clara y evidente como la investigación de las líneas de segundo orden y, debido a su carácter especial, requiere mayor amplitud que la de las tareas del presente libro*).

*) Al lector que desee conocer más detalladamente las proposiciones constructivas de la geometría proyectiva, le recomendamos el libro: *N. A. Glagólev*, Geometría proyectiva (Н. А. Глаголев, Проективная геометрия).

Capítulo VI

PRINCIPIOS DE LA TEORÍA DE GRUPOS EN LA GEOMETRÍA. GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

1. Geometría y teoría de grupos

§ 155. En los capítulos precedentes del libro, en varias secciones donde se definía la equivalencia (igualdad) de figuras geométricas en diversos sistemas geométricos (en la geometría elemental, en la geometría proyectiva), señalábamos las llamadas propiedades de grupo del conjunto de las transformaciones que habían sido puestas por base de la definición de imágenes equivalentes (propiedades de grupo de los movimientos, de las transformaciones proyectivas). En todos los casos así teníamos manifestaciones de los principios de la teoría de grupos en la geometría, los cuales fueron elaborados por Sophus Lie y Felix Klein.

En las investigaciones geométricas contemporáneas los principios de la teoría de grupos juegan un papel importantísimo. El presente capítulo del libro está dedicado a ellos.

§ 156. GRUPO ABSTRACTO. El objeto principal de este capítulo serán los grupos de transformaciones. Antes de definirlos, haremos recordar al lector qué es un grupo en general.

DEFINICIÓN DEL GRUPO. *El grupo* es un conjunto de objetos de naturaleza arbitraria (en lo sucesivo, éstos se llamarán elementos, designándose con a, b, c, d, ...), que satisface las exigencias de los axiomas siguientes.

1. *A todo par de elementos de un conjunto, dispuestos en un orden determinado, le corresponde, conforme a una ley determinada, cierto elemento del referido conjunto.* Si a dos elementos a, b les corresponde el elemento c, entonces en tal caso se emplea la igualdad simbólica

$$c = ab;$$

el elemento c se llama *producto* de los elementos a, b.

2. (LEY ASOCIATIVA). *Cualesquiera que sean los elementos a, b, c, siempre tiene lugar la igualdad*

$$(ab)c = a(bc).$$

3. *Existe un elemento e tal que para cualquier elemento a tiene lugar la igualdad*

$$ae = a.$$

El elemento a se llama *unidad* del grupo.

4. *Cualquiera que sea el elemento a, existe tal elemento x dependiente de a, que tiene lugar la igualdad*

$$ax = e.$$

El elemento x se llama *recíproco* al elemento a y se denota por a^{-1}.

Mediante razonamientos sencillos, a base de estos axiomas se puede deducir los teoremas siguientes*).

a) Si $ax = e$, entonces $xa = e$. Merced a esta propiedad del grupo no hay necesidad de distinguir los elementos inversos «derecho» e «izquierdo».

b) Si e es la unidad del grupo, entonces para cualquier elemento a tiene lugar también la igualdad $ea = a$. Gracias a esta propiedad del grupo no hay necesidad de distinguir las unidades «derecha» e «izquierda».

c) Si $ax = e$ y $ay = e$, entonces $x = y$, es decir, *el elemento inverso se determina unívocamente a base de un elemento a dado.*

A consecuencia de los referidos teoremas tenemos una proposición: *a base de los elementos dados a y b siempre se determina, y además unívocamente, el elemento x que satisface la igualdad* $ax = b$, *a saber,* $x = a^{-1}b$; *así como el elemento y que satisface la igualdad* $ya = b$, *a saber,* $y = ba^{-1}$. De tal modo, *en un grupo siempre está determinada, y además unívocamente, una operación inversa de la multiplicación de grupo.*

Si los elementos e y e^* para cualquier a satisfacen las igualdades $ae = a$ y $ae^* = a$, entonces $e^* = e$, es decir, *todo grupo tiene una sola unidad.*

Demos una definición más: si las exigencias de los axiomas de grupo se satisfacen para cierta parte de elementos de un grupo, entonces dicha parte de elementos del grupo se llama *subgrupo* del mismo; evidentemente, un subgrupo siempre contiene la unidad del grupo y, junto con cada elemento suyo posee uno inverso del mismo.

En el presente párrafo hemos tratado de un grupo abstracto, en cuya teoría no importa la naturaleza de sus elementos ni la de la multiplicación de grupo; importa sólo lo que se exige por los axiomas 1 — 4. En lo sucesivo analizaremos exclusivamente *grupos* concretos *de transformaciones;* su definición general se ofrece en el párrafo siguiente.

§ 157. GRUPOS DE TRANSFORMACIONES. Sea M un conjunto arbitrario; designemos sus elementos con $x, y, z, \ldots$ o con $x', y', z', \ldots$, etc. Si a cada elemento x del conjunto M le corresponde cierto elemento $x' = f(x)$ del referido conjunto, entonces diremos que está dada una aplicación del conjunto M en él mismo.

En el caso de 1) corresponder siempre elementos diferentes $x_1' = f(x_1)$ y $x_2' = f(x_2)$ a elementos diferentes x_1 y x_2 y 2) existir para cada elemento x' del conjunto M un elemento x tal que $x' = f(x)$, es decir, cuando todo elemento del conjunto M es la imagen de cierto elemento de este conjunto, la aplicación $x' = f(x)$ se llama transformación biunívoca del conjunto M.

Sea $x' = f(x)$ cierta transformación biunívoca del conjunto M; si a todo elemento y del conjunto M le ponemos en correspondencia el único elemento y' que pasa a ser elemento y en la aplicación dada (según la definición aducida), es decir, un elemento y' tal que $f(y') = y$, entonces obtendremos cierta nueva transformación biunívoca $y' = \varphi(y)$ del conjunto M. Esta se llama transformación *inversa* de la transformación dada.

---

*) Véase, por ejemplo, *L. S. Pontriaguin,* Grupos continuos, Editorial «Mir», Moscú, 1978.

De tal modo, toda transformación biunívoca $x' = f(x)$ tiene una sola transformación recíproca determinada (también biunívoca) inversa de la misma. La transformación inversa de la transformación dada $x' = f(x)$ suele denotarse así: $x' = f^{-1}(x)$.

Sean $x' = f_1(x)$ y $x' = f_2(x)$ dos transformaciones biunívocas del conjunto M; si a cada elemento y del conjunto M le hacemos corresponder el elemento y' en que se convierte y al realizarse sucesivamente la primera y la segunda transformaciones dadas (es decir, el elemento $y' = f_2(y^*)$, donde $y^* = f_1(y)$), entonces obtendremos cierta transformación biunívoca. Ésta se llama *producto* de dos transformaciones dadas (realizadas en una determinada sucesión) y puede representarse simbólicamente de la forma siguiente: $x' = f_2(f_1(x))$.

Hablando con propiedad, el producto de transformaciones depende de la sucesión en que éstas se realicen o, dicho en términos generales, $f_2(f_1(x)) \neq f_1(f_2(x))$.

La transformación $e(x) = x$ que deja fijos todos los elementos, se llama *idéntica*. Evidentemente, si $x' = f(x)$ es cierta transformación biunívoca y $x' = f^{-1}(x)$ es su transformación inversa, entonces $f(f^{-1}(x)) = x = e(x)$ y $f^{-1}(f(x) = x = e(x)$, es decir, el producto de una transformación dada y de la inversa de ella es una transformación idéntica (en tal caso no importa el orden en que se realicen la transformación dada y la inversa).

Sea dado un conjunto M. Consideremos todas las transformaciones biunívocas posibles de dicho conjunto; como siempre, representémoslas con las igualdades simbólicas $x' = a(x)$, $x' = b(x)$, $x' = f(x)$ y así sucesivamente o, lo cual es más cómodo ahora, simplemente con a, b, f, ... , etc. Si a y b son dos transformaciones $x' = a(x)$ y $x' = b(x)$, entonces su producto puede representarse por la igualdad $x' = a(b(x))$ o por la igualdad $x' = b(a(x))$, en función del orden en que éstas se realicen. De acuerdo con esto, convengamos en designar con $c = ab$ el producto de las transformaciones a, b cuando b es primera en realizarse, y por $c = ba$, el de las transformaciones a, b si a antecede a b.

Es fácil mostrar que *la colección de todas las transformaciones biunívocas del conjunto M constituye un grupo* si el producto de dos elementos de la referida colección, es decir, de dos transformaciones, se concibe según lo definido más arriba.

En rigor:

1) Junto con todo par de transformaciones a, b tomadas en un determinado orden, queda determinada una nueva transformación c; esto es, su producto:

$$c = ab.$$

2) Si a, b, c son transformaciones arbitrarias, entonces

$$(ab)c = a(bc).$$

La validez de esta igualdad es evidente. Efectivamente, si $x' = a(x)$, $x' = b(x)$, $x' = c(x)$ son transformaciones dadas, entonces $(ab)c$ y $a(bc)$ denotan igualmente la transformación $x' = a(b(c(x)))$. Vemos que el producto de las transformaciones siempre obedece a la ley asociativa.

3) Existe una transformación e (a saber, la transformación idéntica $e(x) = x$) tal que para cualquier transformación a tiene lugar la igualdad

$$ae = a.$$

En efecto, si $x' = a(x)$ es la transformación designada por a, siendo $e(x) = x$ la transformación idéntica, entonces ae es la transformación $x' = a(e(x)) = a(x)$ que no difiere de a.

4) Cualquiera que sea la transformación a, existe una transformación f tal que tiene lugar la igualdad

$$af = e.$$

La transformación inversa de la a dada constituye precisamente esta transformación f, es decir, $f = a^{-1}$.

Vemos que la serie de todas las transformaciones biunívocas del conjunto M satisface los axiomas de grupo 1 — 4. Por consiguiente, esta colección constituye un grupo. Su unidad es la transformación idéntica. Además del grupo de todas las transformaciones del conjunto M, se llama grupo de transformaciones del referido conjunto a cualquier colección determinada de transformaciones que satisfaga las exigencias de los axiomas de grupo.

Para que una cierta colección de transformaciones del conjunto M sea grupo, es suficiente que se cumplan las dos exigencias siguientes:

1) si a, b son transformaciones de una colección dada, entonces su producto ab debe estar en la colección dada;

2) si a es alguna transformación de una colección dada, entonces su transformación recíproca a^{-1} también debe estar en la colección dada.

En rigor, según lo notado más arriba, siempre se observa la ley asociativa para el producto de transformaciones; además, si una colección dada contiene, junto con toda transformación a, transformación inversa a^{-1} y, junto con todas dos transformaciones contiene el producto de éstas, entonces en dicha colección de transformaciones quede excluida la transformación idéntica $e = aa^{-1}$ (la unidad del grupo de transformaciones). Consiguientemente, si una colección de transformaciones satisface las dos exigencias señaladas, por tanto satisface las exigencias de todos los axiomas de grupo, constituyento así un grupo.

§ 158. GEOMETRÍA DE UN GRUPO DADO. Sean dados un conjunto de elementos arbitrarios M y cierto grupo de sus transformaciones G. Convengamos en llamar *espacio* al conjunto M, *puntos*, a sus elementos, y *figura*, a todo cúmulo de puntos. A la figura A llamémosla *equivalente*, o igual a la figura B, si en el grupo G existe una transformación que convierta la figura A en figura B.

De las dos condiciones que caracterizan el grupo de transformaciones, formuladas al final del § 157, de inmediato se infiere que:

1) *Si la figura A equivale a la figura B, entonces la figura B equivale a la figura A.*

Efectivamente, si la figura A equivale a la figura B, entonces cierta transformación g del grupo G transforma A en B; por lo tanto la transformación inversa g^{-1} convierte B en A. Pero conforme a la segunda condición de las dos mencionadas, g^{-1} está en el grupo G. De tal modo, en el grupo G hay una transformación que convierte B en A, por consiguiente, B equivale a A.

2) *Si dos figuras A y B equivalen a una tercera figura C, entonces las figuras A y B equivalen una a otra.*

En efecto, si A equivale a C, entonces en el grupo G existe una transformación g que convierte A en C; y si B equivale a C, entonces en el grupo G existe una transformación h que hace pasar B a C. Entonces la transformación h^{-1} convierte C en B y, por consecuencia, el producto $h^{-1}g$ transforma A en B. De aquí se deduce la equivalencia de las figuras A y B.

Vemos que las condiciones que determinan un grupo de transformaciones, se necesitan para asegurar las propiedades fundamentales de la equivalencia de figuras (reflexividad y transitividad),sin las cuales no tendría sentido utilizar el término «equivalen».

Siguiendo a F. Klein, llamaremos *geométricas* a tales propiedades de las figuras del espacio M y a tales magnitudes relacionadas con las figuras, que sean invariantes respecto a cualquier transformación del grupo G dado y, las cuales, por tanto, sean iguales para todas las figuras equivalentes. Llamaremos *geometría del grupo* G al sistema de proposiciones sobre las propiedades de figuras y de magnitudes, que sean invariantes respecto a todas las transformaciones del grupo G.

La idea de Klein de considerar diversas geometrías como teorías de los invariantes de los grupos correspondientes, permitió revelar los profundos nexos entre las geometrías descubiertas e investigadas para la década del 80 del siglo XIX. Esta idea fue expuesta por Klein al comenzar a ejercer la cátedra en Erlangen en 1878, en su conferencia «Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen» conocida hoy en día bajo el título de «Programa de Erlangen».

Las aplicaciones concretas de los métodos de la teoría de grupos de Klein se exponen en la sección que sigue.

2. Grupo proyectivo y sus subgrupos principales

§ 159. En el párrafo antecedente definimos el concepto de geometría de un grupo dado. La definición enunciada por nosotros es extraordinariamente general, pues no impone restricciones algunas sobre el espacio M ni sobre el grupo G. Se entiende que la geometría del grupo dado G será substancial siempre que dicho grupo G y el espacio M en el cual se da aquél, estén suficientemente concretizados. En lo sucesivo, nos limitaremos a la consideración de LA GEOMETRÍA DEL GRUPO PROYECTIVO.

La investigación que realizaremos, nos hará ver de forma distinta y en un determinado sistema todas las geometrías distintas que estudiamos en los capítulos anteriores. Para no complicar la exposición con cálculos algebraicos engorrosos, la ejemplificaremos con un caso de dos dimensiones. Como aquí nos valdremos exclusivamente del método analítico, no costará trabajo alguno extender los resultados obtenidos al caso de dimensiones superiores. Para ello, cada una de las relaciones que hallemos, sólo habrá que sustituirla por una relación de la misma estructura, que debe tener un número mayor de variables. El propio lector podrá practicar fácilmente la modificación señalada.

§ 160. GRUPO PROYECTIVO. Consideremos un plano proyectivo, es decir, un conjunto de puntos determinados por una terna de coordenadas homogéneas (x_1, x_2, x_3). La aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo, a consecuencia de la cual a cada punto $M(x_1, x_2, x_3)$ le corresponde un punto $M'(x_1', x_2', x_3')$ con las coordenadas

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donde c_{ik} son las constantes reales que satisfacen la condición de

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

y ρ' es cualquier número $\neq 0$, es una aplicación proyectiva o, como decimos también, una transformación proyectiva de un plano proyectivo.

En el § 106 mostramos que la colección de transformaciones proyectivas posee propiedades de grupo; a saber, según el teorema 23a, la transformación inversa de una transformación proyectiva también es proyectiva y, según el teorema 23b, el producto de dos transformaciones proyectivas es una transformación proyectiva. A consecuencia de ello y a base del § 157 podemos afirmar que *una colección de transformaciones proyectivas constituye un grupo.*

Hagamos notar que las propiedades de grupo de una colección de transformaciones proyectivas se establecen fácilmente por medios puramente analíticos (éstas fueron establecidas geométricamente en el § 106). En rigor, sean

$$\rho_1' x_i' = \sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(1)} x_\alpha \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

y

$$\rho_2' x_i' = \sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} x_\alpha \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3}$$

representaciones analíticas de dos transformaciones proyectivas $M' = f_1(m)$ y $M' = f_2(M)$. Consideremos un punto arbitrario $M(x_1, x_2, x_3)$; la primera transformación lo hace pasar a cierto punto $M'(x_1', x_2', x_3')$, y la segunda convierte el punto $M'(x_1', x_2', x_3')$ en el punto $M''(x_1'', x_2'', x_3'')$. Conforme a las fórmulas (2) y (3) tenemos:

$$\rho_2' x_i'' = \sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} x_\alpha' = \sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} \left(\frac{1}{\rho_1'} \sum_{\beta=1}^{3} c_{\alpha\beta}^{(1)} x_\beta \right) =$$

$$= \frac{1}{\rho_1'} \sum_{\beta=1}^{3} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} c_{\alpha\beta}^{(1)} \right) x_\beta.$$

Si adoptamos $\rho_1' \rho_2' = \rho''$, $\sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} c_{\beta\alpha}^{(1)} = c_{i\beta}$, entonces podemos apuntar las relaciones antecedentes en forma de

$$\rho'' x_i'' = \sum_{\beta=1}^{3} c_{i\beta} x_\beta \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Vemos que las relaciones (4) que representan analíticamente la transformación $M'' = f_2(M') = f_2(f_1(M))$, es decir, el producto de las dos transformaciones dadas, tienen la misma estructura que las relaciones (1). En lo sucesivo, denotaremos con $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ y C las matrices compuestas por las magnitudes $c_{ik}^{(1)}$, $c_{ik}^{(2)}$ y c_{ik}, respectivamente. A consecuencia de las igualdades $\sum_{\alpha=1}^{3} c_{i\alpha}^{(2)} c_{\alpha k}^{(1)} = c_{ik}$ la matriz C es el producto de las matrices $C^{(1)}$ y $C^{(2)}$:

$$C = C^{(2)}C^{(1)}. \tag{5}$$

De tal modo, el producto de dos transformaciones proyectivas (2) y (3) es una transformación bilineal (4) cuya matriz es igual al producto de las matrices de las transformaciones (2) y (3).

Sean $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$ y Δ los determinantes de las matrices $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ y C. De la fórmula (5) se infiere la igualdad numérica

$$\Delta = \Delta^{(1)}\Delta^{(2)}. \tag{6}$$

De aquí, si $\Delta^{(1)} \neq 0$ y $\Delta^{(2)} \neq 0$, entonces $\Delta \neq 0$ también. Con esto mismo queda demostrado que el producto de transformaciones proyectivas es una transformación lineal con el determinante diferente de cero, es decir, es una transformación proyectiva.

Para cerciorarnos de que la transformación inversa de una transformación proyectiva es también proyectiva, baste notar que para $\Delta \neq 0$, las magnitudes x_1, x_2, x_3 se expresan linealmente por x_1', x_2', x_3' a partir de las relaciones (1). Luego, la transformación lineal obtenida por la inversión de las fórmulas (1), evidentemente, tiene una matriz inversa de la matriz de la transformación (1); su determinante Δ' es igual a $\frac{1}{\Delta}$. Consiguientemente, $\Delta' \neq 0$. Por cuanto la transformación inversa de una transformación proyectiva es lineal y posee un determinante diferente de cero, la misma es también proyectiva. Así pues, mediante cálculos algebraicos no complicados establecimos que el cúmulo de transformaciones proyectivas constituye un grupo, ya que satisface las dos condiciones que caracterizan el grupo de transformaciones (según el § 157).

El grupo de transformaciones proyectivas se llama grupo *proyectivo*. Toda transformación individual de un grupo proyectivo se define mediante la representación numérica de las magnitudes c_{ik} en las fórmulas (1). No obstante, dada la homogeneidad de las fórmulas (1), para definir la transformación (1), es suficiente prefijar ocho RELACIONES de las magnitudes c_{ik}. Las referidas ocho relaciones se llaman *parámetros* del grupo proyectivo.

Si toda transformación integrante de un grupo (cualquiera) se define mediante la representación numérica de n parámetros independientes, en este caso se trata de *un grupo de n términos*. De tal modo, el grupo proyectivo (sobre el plano) consta de ocho términos.

§ 161. INVARIANTES DEL GRUPO PROYECTIVO. La geometría proyectiva es la asignatura que estudia tales propiedades de figuras y tales magnitudes relacionadas con las figuras, que son invariantes respecto a cualquier transformación proyectiva. Por ende, *podemos definir la geometría proyectiva como geometría del grupo proyectivo*.

En el estudio de la geometría proyectiva un interés particular lo ofrecen los invariantes del grupo proyectivo, pues en la geometría proyectiva precisamente ellos constituyen magnitudes geométricas.

Llamaremos invariante de n puntos arbitrarios respecto del grupo proyectivo a una función escalar $F(M_1, M_2, \dots, M_n)$ que sea desigual idénticamente a la constante, pero que adquiera valores iguales en tales sistemas de n puntos que se convierten unos en otros mediante la transformación proyectiva*).

Hagamos constar que el grupo proyectivo no tiene invariantes de tres puntos y menos. Es fácil demostrarlo por reducción al absurdo. En efecto, admitamos que exista un invariante de tres puntos $F(M_1, M_2, M_3)$. Sobre un plano, elijamos tres puntos algunos M_1^0, M_2^0, M_3^0, designando con c el valor de la función $F(M_1^0, M_2^0, M_3^0)$. Sean M_1, M_2, M_3 tres puntos CUALESQUIERA. Sabemos que cualesquiera que sean los tres puntos M_1, M_2, M_3 y los tres puntos M_1^0, M_2^0, M_3^0, existe una transformación proyectiva que convierte los puntos M_1, M_2, M_3 en puntos M_1^0, M_2^0, M_3^0. Por eso $F(M_1, M_2, M_3) = c = \text{const}$ en contra de la definición es invariante. Se puede demostrar de la misma manera que un grupo proyectivo no tiene invariante de cuatro puntos ARBITRARIOS. Pero respecto al grupo proyectivo, existe un invariante de cuatro puntos SITUADOS SOBRE UNA MISMA RECTA: lo es la relación compleja (véase el § 115).

Para $n \geqslant 5$ existen ya invariantes de un sistema arbitrario de n puntos. Es notable que todos ellos pueden expresarse mediante relaciones complejas. Esta circunstancia quedará en claro si consideramos el caso más sencillo de $n = 5$.

Sean M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 cinco puntos arbitrarios de un plano. Mediante la construcción mostrada en la fig. 151, a base de los puntos M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 dados podemos definir dos grupos de cuatro puntos cada uno: M_1, Q, M_2, P y M_5, R, M_4, P rectilíneamente dispuestos. Evidentemente, las relaciones complejas $(M_1QM_2P) = f_1$ y $(M_5RM_4P) = f_2$ son las funciones de los puntos M_1, M_2, M_3, M_4, M_5; expresaremos este hecho del modo siguiente

$$f_1 = f_1(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$$

y

$$f_2 = f_2(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5).$$

Estas funciones son los invariantes del grupo proyectivo. Efectivamente, sean $M_1', M_2', M_3', M_4', M_5'$ un nuevo sistema de cinco puntos y P', Q', R', tres puntos definidos a base de los puntos M_i', al igual que P, Q, R están definidos a base de los puntos M_i. Si cierta aplicación proyectiva convierte los puntos $M_1, \dots, M_5$ en puntos $M_1', \dots, M_5'$, entonces esta misma aplicación hace pasar los puntos P, Q, R a puntos P', Q', R', por lo cual $(M_1QM_2P) = (M_1'Q'M_2'P')$ y $(M_5RM_4P) = M_5'R'M_4'P')$. De tal forma, toda vez que el sistema de puntos $M_1, \dots, M_5$ equivalga proyectivamente al sistema $M_1', \dots, M_5'$, tendrán lugar las igualdades $f_1(M_1, \dots, M_5) = f_1(M_1', \dots, M_5')$ y $f_2(M_1, \dots, M_5) = f_2(M_1', \dots, M_5')$. Precisamente esto significa que f_1 y f_2 son invariantes proyectivos.

---

*) Para evitar la necesidad de considerar los posibles casos especiales, al tratar de los puntos arbitrarios cuyo número sea más de dos, convengamos en sobreentender siempre un grupo de puntos tal que no tenga tres puntos algunos que se hallen sobre una misma recta.

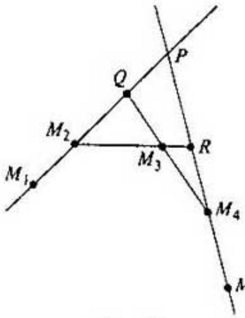


Fig. 151

Más aún, es fácil establecer que también viceversa, si tenemos $f_1(M_1, \ldots, M_5) = f_1(M'_1, \ldots, M'_5)$ y $f_2(M_1, \ldots, M_5) = f_2(M'_1, \ldots, M'_5)$, el sistema de cinco puntos $M_1, \ldots, M_5$ equivale proyectivamente al sistema $M'_1, \ldots, M'_5$. En rigor, sean $M_1, \ldots, M_5$ y $M'_1, \ldots, M'_5$ dos sistemas de puntos que satisfacen las relaciones $f_1(M_1, \ldots, M_5) = f_1(M'_1, \ldots, M'_5)$ y $f_2(M_1, \ldots, M_5) = f_2(M'_1, \ldots, M'_5)$. Podemos construir la aplicación proyectiva $M' = \varphi(M)$ que hace pasar los cuatro puntos M_1, M_2, M_3, M_4 a cuatro puntos M'_1, M'_2, M'_3, M'_4; por esta misma aplicación el punto P se convertirá en punto P'. Según el enunciado, $f_1(M_1, \ldots, M_5) = f_1(M'_1, \ldots, M'_5)$, es decir, $(M_1QM_2P) = (M'_1Q'M'_2P')$, y por eso la apl icación $M' = \varphi(M)$ debe transformar el punto Q en punto Q'. De manera análoga, de la igualdad $f_2(M_1, \ldots, M_5) = f_2(M'_1, \ldots, M'_5)$ se deduce que la aplicación $M' = \varphi(M)$ hace pasar el punto R a punto R'. Pero entonces, evidentemente, la aplicación $M' = \varphi(M)$ reduce el punto M_3 a punto M'_3. Con esto mismo queda demostrada la equivalencia de los sistemas $M_1, \ldots, M_5$ y $M'_1, \ldots, M'_5$.

Ahora, supongamos que $F(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ sea cualquier invariante proyectivo de cinco puntos. Tomemos un sistema arbitrario de puntos M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, deformándolo de modo que las magnitudes $f_1(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ y $f_2(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ permanezcan invariables. De cuanto precede resulta que todos los sistemas obtenidos por tal deformación equivalen al sistema de referencia y, consiguientemente, tras esta deformación la función $F(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ conserva un valor invariable. De tal modo, si f_1 y f_2 adquieren determinados valores numéricos, entonces F también adquiere un determinado valor numérico, por lo tanto F es una cierta función de f_1 y f_2, es decir, F tiene forma de $F = \Phi(f_1, f_2)$.

Por razonamientos exactamente análogos se puede mostrar que cualquier invariante proyectivo de $F(M_1, M_2, \ldots, M_n)$, si $n \geqslant 5$, se expresa por medio de relaciones complejas. Por ende, a la relación compleja la llaman *invariante básico* del grupo proyectivo.

§ 162. GRUPOS DE AUTOMORFISMOS. Sea dado algún grupo de transformaciones G de un espacio arbitrario M. Las transformaciones del grupo G que convierten en sí mismo (es decir, aplican sobre sí mismo) cierto conjunto de puntos U del espacio M, se llaman *transformaciones automorfas* o, dicho en otros términos, *automorfis-*

mos respecto al conjunto U; los automorfismos pueden desplazar puntos del conjunto U; pero solamente de modo que todo punto del conjunto U se desplace a un punto del mismo conjunto.

La colección de todas las transformaciones del grupo G, automorfas respecto a un conjunto U, constituye un grupo.

Efectivamente:

1) Si cada una de las dos transformaciones del grupo G hace pasar el conjunto U a sí mismo, entonces el producto de dichas transformaciones es la transformación del grupo G, que posee la misma propiedad, es decir, el producto de dos automorfismos es un automorfismo.

2) Si cierta transformación del grupo G convierte el conjunto U en sí mismo, entonces la transformación inversa es la transformación del grupo G dotada de la misma propiedad, es decir, una transformación inversa de un automorfismo, es un automorfismo.

A base de lo expuesto en el § 157, estas propiedades individualizan el carácter de grupo de la colección de automorfismos.

§ 163. GRUPO AFÍN. Señalemos sobre un plano proyectivo una recta arbitraria: convengamos en llamarla infinitamente alejada, designándola con el símbolo ∞. La colección de transformaciones proyectivas automorfas respecto a la recta ∞, según lo dicho, es un subgrupo del grupo proyectivo. Lo llamaremos *grupo afín*, llamando *afín* a toda transformación que le pertenezca.

Evidentemente, las transformaciones afines hacen pasar los puntos finitos del plano proyectivo (es decir, los puntos no pertenecientes a la recta ∞) también a puntos finitos. Por eso las transformaciones afines son asimismo transformaciones biunívocas de un conjunto de puntos finitos del plano proyectivo, es decir, son transformaciones biunívocas del plano proyectivo cortado a lo largo de la recta ∞.

Llamaremos *plano afín* *) al plano proyectivo sin la recta ∞.

Procuremos obtener la representación analítica de transformaciones afines. Con este objeto, introduzcamos en el plano proyectivo (de cuya consideración acabamos de partir) coordenadas homogéneas proyectivas (x_1, x_2, x_3) de modo que en estas coordenadas la recta ∞ tenga la ecuación $x_3 = 0$. Sea definida por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

cierta transformación proyectiva. La referida transformación será afín si de $x_3 = 0$, siendo cualesquiera x_1, x_2, se infiere la igualdad $x_3' = 0$ (es decir, si la recta $x_3 = 0$ se aplica sobre sí misma). Y para ello es necesario y suficiente que los coeficientes c_{31} y c_{32} sean iguales a cero. De tal manera obtenemos las representaciones siguientes de las transformaciones afines:

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= \phantom{c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + {}} c_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

*) Por su estructura topológica, el plano afín no difiere del plano euclídeo.

Como para todo punto finito $x_3 \neq 0$, el plano afín puede ser aritmetizado totalmente mediante las coordenadas heterogéneas $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$. Por eso huelgan las coordenadas homogéneas al investigar el grupo afín. Obtendremos una representación analítica del grupo afín en las coordenadas heterogéneas si dividimos la primera y la segunda igualdades de (**) en la tercera y pongamos $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, $\frac{x_1'}{x_3'} = x'$, $\frac{x_2'}{x_3'} = y'$; si en este caso además introducimos las notaciones $\frac{c_{i1}}{c_{33}} = a_i$, $\frac{c_{i2}}{c_{33}} = b_i$, $\frac{c_{i3}}{c_{33}} = c_i$, entonces el resultado podrá presentarse en forma de

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Toda transformación del tipo de (A) es afín, pero sólo a condición de $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$; en el caso contrario esta transformación no será biunívoca.

Dado que las fórmulas (A) contienen seis parámetros, el grupo afín se compone de seis términos.

§ 164. INVARIANTES DEL GRUPO AFÍN. La geometría del grupo afín se llama *afín*. La geometría afín que estudia las propiedades de figuras y las magnitudes invariantes respecto al grupo afín, relacionadas con dichas figuras, difiere sustancialmente de la geometría proyectiva. Por ejemplo, mientras que en la geometría proyectiva (sobre el plano proyectivo) dos rectas cualesquiera se intersecan, en la geometría afín (sobre el plano afín) existen rectas paralelas. Precisamente, las rectas del plano proyectivo convergentes en un cierto punto de la recta ∞, al cortarse el plano proyectivo a lo largo de la recta ∞, pasan a ser rectas paralelas del plano afín (pues se aleja su punto común al cortarse el plano). Evidentemente, en la geometría afín tiene lugar el postulado euclídeo de las paralelas: a través de todo punto que no pertenezca a una recta dada, pasa una, y sólo una recta, paralela a la dada. Notemos además que sobre la recta afín, al igual que sobre la euclídea, tiene lugar el orden lineal de puntos (véase el § 94).

Abordemos el problema de los invariantes del grupo afín, es decir, de las magnitudes geométricas desde el punto de vista de la geometría afín.

Ante todo, hagamos notar que todos los invariantes proyectivos al mismo tiempo son también invariantes afines. En efecto, si cierta función es invariante respecto a todas las transformaciones proyectivas, entonces es también invariante en el caso de todas las transformaciones afines, pues éstas constituyen una parte de aquéllas. Al contrario, existen invariantes afines no proyectivos.

El principal invariante afín es *la relación simple de tres puntos pertenecientes a una misma recta*. La relación simple de tres puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ (para designarla, introduciremos el símbolo $(M_1M_2M_3)$) puede determinarse por cualquiera de las dos fórmulas*):

*) Mediante la ecuación de la recta $y = kx + l$ se demuestra fácilmente que las referidas fórmulas determinan una misma magnitud.

$$(M_1M_2M_3) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}, \; (M_1M_2M_3) = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

La invariación de la función $(M_1M_2M_3)$ se demuestra sin dificultades algunas. En rigor, sean M_1', M_2', M_3' tres puntos resultantes de los puntos M_1, M_2, M_3 a consecuencia de alguna transformación del tipo de (A). Si designamos por x_i', y_i' las coordenadas de los puntos M_i', entonces de las fórmulas (A) obtendremos:

$$x_2' - x_1' = a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1) =$$
$$= (M_1M_2M_3)[a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2)],$$
$$x_3' - x_2' = a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2),$$

de donde

$$(M_1'M_2'M_3') = \frac{x_2' - x_1'}{x_3' - x_2'} = (M_1M_2M_3),$$

precisamente esto significa que la función $(M_1M_2M_3)$ es invariante respecto a cualquier transformación afín . No existen invariantes afines de tres puntos arbitrariamente dispuestos (que no se hallen sobre una misma recta). Esto se explica por que tres puntos arbitrarios que no se hallen sobre una misma recta, pueden transformarse afínmente en tres puntos cualesquiera no pertenecientes a una misma recta (en el § 161 señalamos que el grupo proyectivo no tiene invariantes de cuatro puntos arbitrarios; se demuestra bien análogamente la proposición de que el grupo afín desconoce invariante de tres puntos arbitrarios). Para $n \geqslant 4$ existen invariantes afines de un sistema arbitrario de n puntos. Es notable que todos ellos puedan expresarse a través de relaciones simples (esto puede demostrarse mediante razonamientos análogos a los aducidos en el § 161). Es por eso que la relación simple de tres puntos de una recta se llama *invariante básico del grupo afín*.

NOTA. El plano afín y, correspondientemente, la geometría afín pueden definirse de un modo absolutamente independiente de la geometría proyectiva, mediante un sistema apropiado de axiomas.

A saber, puede llamarse plano afín un conjunto de objetos de dos clases: puntos y rectas que satisfagan las exigencias de los axiomas de cinco grupos, de los cuales:

el primer grupo que define las relaciones de pertenencia recíproca entre objetos, comprende los primeros tres axiomas del grupo I del sistema de axiomas de la geometría euclidiana (§ 12) (es decir, los axiomas de dos dimensiones del grupo I);

el segundo grupo que define el orden de puntos sobre la recta, coincide con el segundo grupo de axiomas de la geometría euclidiana (dado el orden lineal de puntos sobre la recta afín, los axiomas afines de orden deben coincidir con los axiomas de orden de la geometría euclidiana);

el tercer grupo contiene el axioma de continuidad de Dedekind;

el cuarto grupo incluye el axioma de paralelismo de Euclides;

el quinto grupo encierra la proposición de Desargues (cuya formulación ha de modificarse un poco, tomando en consideración la existencia de las rectas paralelas)*).

*) Véase *D. Hilbert*, «Die Grundlagen der Geometrie».

Para definir el espacio afín, hemos de admitir todos los axiomas de la geometría tridimensional de Euclides, menos los axiomas de congruencia.

A su tiempo demostramos que los axiomas que subyacen en la base de la geometría elemental, constituyen un sistema completo. Del mismo modo se puede demostrar que el sistema de axiomas de la geometría afín es completo. En tanto, el sistema de axiomas afines es parte del sistema de Hilbert. A primera vista, esta circunstancia parece ser paradójica. No obstante, es fácil de explicar.

Es que la completitud de los axiomas afines (la misma significa que cualquier realización de éstos es isomorfa a una única realización determinada (aritmética, por ejemplo)), no impide que se agreguen nuevos axiomas de congruencia a los afines, pues JUNTO CON ELLOS SE INTRODUCE TAMBIÉN UNA NUEVA RELACIÓN ENTRE OBJETOS GEOMÉTRICOS (a saber, la relación de congruencia). Con este respecto, véase la definición de la completitud del sistema de axiomas enunciada en el § 75.

§ 165. GRUPO UNIMODULAR AFÍN. La transformación afín

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

la llamaremos *unimodular* si

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Es fácil mostrar que las transformaciones unimodulares afines constituyen un grupo. Efectivamente:

1) El producto de dos transformaciones unimodulares afines es una transformación unimodular afín.

Para probarlo, notemos que si la transformación

$$\begin{aligned} x'' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y'' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}$$

es el producto de las transformaciones

$$\begin{aligned} x' &= a_1^{(1)}x + b_1^{(1)}y + c_1^{(1)}, \\ y' &= a_1^{(1)}x + b_2^{(1)}y + c_2^{(1)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x'' &= a_1^{(2)}x' + b_1^{(2)}y' + c_1^{(2)}, \\ y'' &= a_2^{(2)}x' + b_2^{(2)}y' + c_2^{(2)}, \end{aligned}$$

entonces las matrices de estas transformaciones están enlazadas por la relación

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1^{(2)} & b_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} & b_2^{(2)} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a_1^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} & b_2^{(1)} \end{matrix} \right\| .$$

De aquí, para los determinantes de dichas matrices tiene lugar la igualdad $\Delta = \Delta^{(1)}\Delta^{(2)}$. Por consiguiente, si $\Delta^{(1)} = \pm 1$ y $\Delta^{(2)} = \pm 1$, entonces $\Delta = \pm 1$.

2) La transformación inversa de una transformación unimodular afín es unimodular afín.

Para demostrarlo, baste señalar que las transformaciones afines mutuamente inversas tienen matrices mutuamente inversas y, por lo tanto, determinantes biunívocos, es decir, si Δ_1 es el determinante de una transformación dada y Δ_2, el de su transformación inversa, entonces $\Delta_2 = \dfrac{1}{\Delta_1}$. De aquí, si $\Delta_1 = \pm 1$, entonces $\Delta_2 = \pm 1$.

Vemos que la colección de transformaciones unimodulares satisface las dos condiciones que determinan, según el § 157, el carácter de grupo de una colección de transformaciones. De tal forma, las transformaciones unimodulares constituyen, en efecto, un grupo. Lo llamaremos *unimodular afín,* al igual que la geometría basada en él.

El grupo unimodular afín consta de cinco términos, ya que en el caso de la transformación unimodular los seis parámetros de las fórmulas (*) están enlazados por la ecuación $a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$ y, por consiguiente, entre ellos hay sólo cinco términos independientes.

Evidentemente, todos los objetos de la geometría afín general al mismo tiempo son también objetos de la geometría unimodular afín. Pero en ésta concurren los objetos que no pertenecen a aquélla, pues la clase de los invariantes del grupo unimodular afín es más amplia que la de los invariantes del grupo afín general.

Ahora mostraremos que el grupo unimodular afín posee un invariante de tres puntos arbitrariamente dispuestos. Pasen a tres puntos $M_1'(x_1', y_1')$, $M_2'(x_2', y_2')$, $M_3'(x_3', y_3')$ tres puntos arbitrarios de un plano afín $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, a consecuencia de cierta transformación unimodular afín. Entonces, como se establece fácilmente por cálculo directo, tiene lugar la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

De aquí se ve que el valor absoluto del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ es el invariante de los tres puntos M_1, M_2, M_3.

En la geometría unimodular afín, a todo triángulo $M_1M_2M_3$ le puede ponerse en correspondencia el invariante

$$S = \text{valor absoluto} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

El número S se llama *área del triángulo* $M_1M_2M_3$. Evidentemente, en la geometría unimodular afín se puede definir también el concepto de área de un polígono y de área de una figura curvilínea. Precisamente, se puede llamar área de un polígono a la suma de áreas de los triángulos que lo componen, y llamar área de una figura curvilínea al límite de la sucesión de áreas de los polígonos que aproximan dicha figura.

De tal modo, entre los objetos de la geometría unimodular están las áreas de figuras.

§ 166. GRUPO ORTOGONAL. La transformación afín

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1,\\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

se llama *ortogonal* si su matriz

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

satisface la condición

$$AA' = I, \tag{3}$$

donde la virgulilla denota la operación de transposición, e I es una unidad, es decir,

$$A' = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \right\|, \qquad I = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Demostremos que la colección de transformaciones ortogonales posee propiedades de grupo.

1) El producto de dos transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal.

DEMOSTRACIÓN. Sean dadas transformaciones ortogonales con las matrices A_1 y A_2; su producto es una transformación afín con la matriz $A = A_2A_1$. A base de la regla de multiplicación de matrices podemos apuntar la identidad

$$AA' = (A_2A_1)(A_2A_1)' = (A_2A_1)(A_1'A_2') = A_2(A_1A_1')A_2'.$$

De aquí y a consecuencia de las igualdades $A_1A_1' = I$, $A_2A_2' = I$, tenemos:

$$AA' = A_2IA_2' = A_2A_2' = I.$$

Con esto mismo queda demostrado lo que se exigía.

2) La transformación inversa de una transformación ortogonal es ortogonal.

DEMOSTRACIÓN. Sean A la matriz de cierta transformación ortogonal y $B = A^{-1}$, la matriz de la transformación inversa de ésta. De la condición de ortogonalidad $AA' = I$ se deduce que $A' = A^{-1}$. De tal modo, $B = A'$. De aquí

$$BB' = A'(A')' = A'A = A^{-1}A = I.$$

Con esto mismo queda demostrado lo que se exigía.

De suerte que una colección de transformaciones ortogonales constituye un grupo. Lo llamaremos *grupo ortogonal.*

De la igualdad (3) se deduce que el determinante de la matriz A es igual a ± 1. De aquí concluimos que el grupo ortogonal es un subgrupo del grupo unimodular.

La condición de ortogonalidad apuntada de forma matricial (3) equivale a las tres relaciones escalares:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1,\\ a_2^2 + b_2^2 &= 1,\\ a_1a_2 + b_1b_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Por cuanto el grupo ortogonal proviene del grupo afín al superponerse tres enlaces sobre los seis parámetros a_i, b_i, c_i, el mismo consta de tres términos.

A las condiciones de ortogonalidad se puede darles una forma diferente de la (4). En rigor, como mostramos más arriba (al probar la ortogonalidad de la transformación inversa de una transformación dada), la matriz A de la transformación ortogonal satisface la relación

$$A'A = I.$$

De aquí tenemos

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 1, \\ b_1^2 + b_2^2 &= 1, \\ a_1b_1 + a_2b_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Los sistemas de igualdades (4) y (4') equivalen uno a otro.

A diferencia de todos los grupos considerados antes, el grupo ortogonal posee invariante de dos puntos. Es invariante, por ejemplo, la función de dos puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

La invariación de esta función puede establecerse mediante cálculos sencillos. A saber, sean $M_1'(x_1', y_1')$ y $M_2'(x_2', y_2')$ dos puntos obtenidos por la transformación ortogonal de los puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} &\rho(M_1', M_2') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \\ &= \sqrt{[a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1)]^2 + [a_2(x_2 - x_1) + b_2(y_2 - y_1)]^2} = \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(x_2 - x_1)^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (b_1^2 + b_2^2)(y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

De aquí, a consecuencia de las relaciones (4') obtenemos:

$$\rho(M_1', M_2') = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \rho(M_1, M_2).$$

En la geometría del grupo ortogonal la magnitud $\rho(M_1, M_2)$ se llama *distancia* entre los puntos M_1 y M_2. La distancia es el invariante básico de dicha geometría, pues los demás invariantes pueden expresarse por medio de distancias.

Al parecer, huelga explicar que la geometría del grupo ortogonal es la geometría elemental (euclidiana).

§ 167. COMPARACIÓN DE DIVERSAS GEOMETRÍAS. Hemos considerado el grupo proyectivo con sus subgrupos básicos: afín, unimodular afín y ortogonal. A estos grupos les corresponden las geometrías proyectiva, afín, unimodular afín y elemental (euclidiana).

Entre los grupos enumerados el más amplio es el que forma la base de la geometría proyectiva (el grupo proyectivo), el más estrecho, el que subyace en la base de la geometría elemental (el grupo ortogonal). Al mismo tiempo, entrre las geometrías enumeradas, la proyectiva tiene la clase más pobre en objetos, la elemental tiene la clase más rica. En la geometría elemental se puede considerar tanto objetos afines (la relación simple de tres puntos de una recta, el paralelismo, etc.) como proyectivos (la relación compleja de cuatro puntos, etc.). En la geometría proyectiva, al contrario, no se consideran las propiedades propiamente afines de figuras, y en la afín no se consideran las propiedades métricas, es decir, las propiedades que se determinan por la medición de segmentos.

En general, es evidente que cuanto más amplio es el grupo que forma la base de una geometría tanto más estrecha es la clase de objetos geométricos. Eso se entiende, pues cuanto más transformaciones contiene un grupo tanto menos relaciones y funciones permanecen invariantes tras todas las transformaciones suyas. Mas, en este caso es menester señalar que las propiedades de figuras y las magnitudes relacionadas con las figuras, invariantes respecto a algún grupo, son más «resistentes» que las de figuras y las magnitudes invariantes respecto a su subgrupo cualquiera, ya que siguen invariables después de diversas transformaciones.

3. Geometrías de Lobachevski, de Riemann y de Euclides en el sistema proyectivo

§ 168. GRUPO DE AUTOMORFISMOS RESPECTO A LA LÍNEA REGULAR DE SEGUNDO ORDEN. En esta sección mostraremos que la geometría de Euclides, la de Lobachevski y la de Riemann son geometrías de ciertos grupos de automorfismos proyectivos.

Sobre un plano proyectivo, sea dada cierta línea regular de segundo orden k. Consideraremos el grupo de automorfismos proyectivos respecto a la línea k, es decir, el grupo de transformaciones proyectivas que aplican la línea k sobre sí misma (el hecho de que el conjunto de automorfismos arbitrarios constituye un grupo, está demostrado en el § 162).

Tienen lugar dos teoremas importantes que siguen:

TEOREMA A. *Si k es una línea oval y A, A' son dos puntos arbitrarios situados en el interior de la línea k, entonces existen dos, y sólo dos, automorfismos respecto a k que hacen pasar el punto A a punto A', convirtiendo la dirección arbitrariamente dada del punto A en dirección arbitrariamente dada del punto A'.*

TEOREMA B. *Si k es una línea nula, y A, A' son puntos arbitrarios de un plano proyectivo, entonces existen dos, y sólo dos, automorfismos respecto a k que convierten el punto A en punto A', haciendo pasar la dirección arbitrariamente dada del punto A a dirección arbitrariamente dada del punto A'*[*].

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA A. Sean a y a' rectas que pasan por A y A' en las direcciones dadas (fig. 152). Designemos por C y C' los polos de estas rectas respecto a k, por B, el punto en el cual la polar del punto A cruza la recta a, por B', el punto en el cual la polar del punto A' corta la recta a'. El trivértice ABC es autopolar respecto a k, es decir, todos los lados suyos son polares de los vértices opuestos. Una propiedad análoga la posee el trivértice $A'B'C'$.

Introduzcamos sobre el plano un sistema de coordenadas homogéneas proyectivas x_1, x_2, x_3, adoptando el trivértice ABC como trivértice de coordenadas: $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$. En estas coordenadas la ecuación de la línea k tendrá forma de (véase el § 134).

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

[*] La definición de la línea nula y de la oval de segundo orden viene dada en el § 134; en el teorema B, el plano proyecitvo ha de concebirse completado por elementos imaginarios, a no ser así, el concepto de línea nula no tendrá sentido.

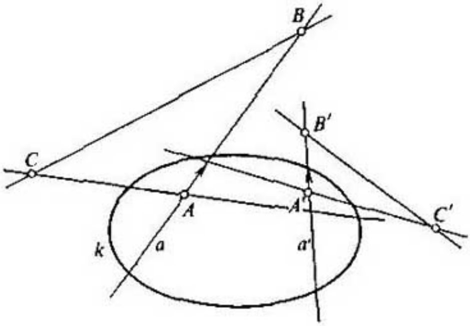


Fig. 152

Al elegir adecuadamente el punto de unidades $E(1, 1, 1)$, reduzcamos la ecuación de la línea k a la forma de

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{1}$$

Hagamos notar que precisamente los términos que contienen dos primeras coordenadas, deben llevar signos iguales en la ecuación, pues el punto A $(0, 0, 1)$ se halla en el dominio interior respecto a línea k (para este punto, el primer miembro de la ecuación (1) es negativo; véase el § 134).

Sobre el plano, introduzcamos un nuevo sistema de coordenadas homogéneas proyectivas x_1', x_2', x_3', adoptando el trivértice A', B', C' por trivértice de coordenadas de modo que sus vértices tengan las coordenadas siguientes: A' $(0, 0, 1)$, B' $(1, 0, 0)$, C' $(0, 1, 0)$. De ser adecuada la elección del punto de unidades E' $(1, 1, 1)$, la ecuación de la línea k en las coordenadas nuevas tendrá forma de

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0. \tag{2}$$

(En esta ecuación deben figurar con signos iguales precisamente los términos que contienen las primeras dos coordenadas, pues el punto A' $(0, 0, 1)$ se halla en el dominio interior respecto a la línea k).

Supongamos que exista un automorfismo respecto a la línea k, que convierte el punto A en punto A', la recta a, en recta a', y una dirección dada, en una dirección dada (esto último quiere decir que los puntos situados sobre la recta a en un orden cíclico dado, pasan a puntos dispuestos en un orden cíclico dado sobre la recta a'). Como en este caso la línea k se transforma en sí misma, el polo de la recta a respecto a k debe pasar a polo de la recta a' respecto a k y, la polar del punto A debe convertirse en polar del punto A'; en otros términos, los puntos A, B, C deben convertirse en puntos A', B', C' (respectivamente). En tal caso el automorfismo φ debe representarse por las fórmulas

$$\rho' x_1' = c_{11}x_1, \quad \rho' x_2' = c_{22}x_2, \quad \rho' x_3' = c_{33}x_3, \tag{3}$$

donde x_1, x_2, x_3 son las coordenadas viejas de la preimagen, x_1', x_2', x_3' son las coordenadas nuevas de la imagen. Transformando la ecuación (2) mediante las fórmulas

(3), obtendremos:

$$c_{11}^2x_1^2 + c_{22}^2x_2^2 - c_{33}^2x_3^2 = 0. \tag{4}$$

Esta es la ecuación de la preimagen de la línea k en las coordenadas viejas. Como φ es un automorfismo respecto a la línea k, las ecuaciones (1) y (4) deben equivaler una a otra; de aquí se deduce que deben tener lugar las igualdades

$$|c_{11}| = |c_{22}| = |c_{33}|.$$

Por cuanto en las fórmulas (3) el factor ρ' puede adoptarse arbitrariamente, entonces, sin perder la comunidad, podemos considerar iguales a uno los módulos de los números c_{11}, c_{22}, c_{33} y estimar positivo el número c_{11}. Para apuntar precisamente las fórmulas siguientes, admitamos que la dirección dada en el punto A vaya al dominio de los puntos de la recta AB, para los cuales $\frac{x_1}{x_3} > 0$, y la dirección dada en el punto A' vaya al dominio de los puntos de la recta $A'B'$, para los cuales $\frac{x_1'}{x_3'} > 0$; entonces, necesariamente tiene que haber $c_{33} > 0$, presentándose solamente dos posibilidades: 1) $c_{11} = 1$, $c_{22} = 1$, $c_{33} = 1$; 2) $c_{11} = 1$, $c_{22} = -1$, $c_{33} = 1$. De tal modo, pueden existir sólo dos automorfismos respecto a k, que satisfacen el enunciado del teorema:

$$1)\ \rho'x_1' = x_1, \qquad \rho'x_2' = x_2, \qquad \rho'x_3' = x_3, \tag{5}$$

$$2)\ \rho'x_1' = x_1, \qquad \rho'x_2' = -x_2, \qquad \rho'x_3' = x_3. \tag{6}$$

Pero es evidente que cada una de estas transformaciones proyectivas efectivamente es un automorfismo respecto a k, y cada una de ellas hace pasar el punto A a punto A', la recta a, a recta a', y una dirección dada sobre la recta a, a una dirección dada sobre la recta a'. Con esto mismo queda demostrado el teorema A.

La demostración del teorema B es la repetición casi literal de la antecedente, al cambiar la ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ por la $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (al repetir la demostración antecedente aplicada al teorema B, hay que excluir la mención de los términos que deben concurrir con signos iguales en la ecuación; esta mención no tiene sentido puesto que todos los términos de la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ poseen signos iguales).

NOTA. De la demostración del teorema A se ve que cada automorfismo respecto a la línea oval k transforma los puntos internos de esta línea también en puntos internos, ya que, según las fórmulas (5) y (6), para $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$ se tendrá $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 < 0$.

El contenido de los teoremas A y B puede enunciarse también del modo siguiente:

1) *Cualesquiera que sean dos elementos lineales situados en el interior de la línea oval k, existen dos, y sólo dos, automorfismos respecto a la línea k, que superponen el primer elemento lineal sobre el segundo.*

2) *Cualesquiera que sean dos elementos lineales de un plano proyectivo, existen dos, y sólo dos, automorfismos respecto a la línea nula dada k, que superponen el primer elemento lineal sobre el segundo.*

Una propiedad análoga la poseen los movimientos (a la par con las reflexiones especulares) sobre el plano euclidiano. A base de tal analogía llamaremos *movi-*

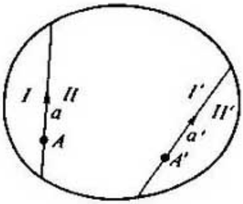


Fig. 153

mientos proyectivos a los automorfismos respecto a una línea regular de segundo orden k. La línea k que se transforma en sí misma a consecuencia de un movimiento proyectivo dado, la llamaremos *absoluto* del referido movimiento. Denominaremos *hiperbólicos* los movimientos del absoluto oval, *elípticos*, los del absoluto nulo.

En la fig. 153 se ofrecen una línea oval y, en su interior, dos elementos lineales aplicados a los puntos A y A'; las rectas, según las cuales están orientados dichos elementos lineales, están designadas por a y a'. Cada una de las rectas a y a' divide el interior de la línea k en dos segmentos; los denotamos con I, II y I', II'. De los razonamientos mediante los cuales fue demostrado el teorema A, se infiere que entre dos automorfismos del absoluto k, que superponen el primer elemento lineal sobre el segundo, el uno aplica el segmento I sobre el I' y el segmento II, sobre el II', y el otro aplica el segmento I sobre el II', el segmento II, sobre el I'. Si el punto A' coincide con el punto A, coincidiendo el elemento lineal del punto A' con el elemento lineal del punto A, entonces los automorfismos que superponen el primer elemento lineal sobre el segundo, se convierten en automorfismos que dejan invariable el elemento lineal adjunto al punto dado A. Uno de estos automorfismos será aplicación idéntica, el otro aplicará el segmento I sobre el II, y el segmento II, sobre el I. Este segundo automorfismo es análogo a la reflexión especular euclidiana respecto a una recta.

§ 169. MÉTRICA PROYECTIVA. Convengamos en llamar *hiperbólica* la geometría del grupo de movimientos hiperbólicos que tengan un absoluto cómun, *elíptica*, la geometría del grupo de movimientos elípticos con un absoluto común.

En cualquiera de tales geometrías dos figuras se consideran iguales, o congruentes, si una de ellas se transforma en otra mediante cierto automorfismo respecto al absoluto que determina la geometría (es decir, mediante un cierto movimiento proyectivo). Tanto en la geometría hiperbólica como en la elíptica existen invariantes de dos puntos. Por ejemplo, es un invariante de dos puntos arbitrarios P, Q la relación compleja $(PQUV)$, donde U, V son los puntos de intersección de la recta PQ con el absoluto, así como cualquier función de dicha relación compleja. Un interés particular lo ofrece el invariante del tipo de $c \ln (PQUV)$, donde c es constante. Mostraremos que el referido invariante posee propiedades análogas a las que caracterizan la longitud de segmento en la geometría elemental. Conviene considerar por separado los casos de la geometría hiperbólica y de la elíptica.

Primero, estudiaremos las propiedades del invariante $c \ln (PQUV)$ en la geometría hiperbólica.

Sea k una curva oval de segundo orden, la cual, en su calidad de absoluto, define la geometría hiperbólica; sean P, Q dos puntos arbitrarios situados en el interior de la línea k. Como P, Q se hallan dentro de k, serán reales los puntos U, V, en los cuales la recta PQ cruza la línea k; además, el par P, Q no separa el par U, V. Con tal disposición de los puntos P, Q, U, V la magnitud $(PQUV)$ es positiva, por consiguiente, $\ln(PQUV)$ es un número real. Luego, si el sentido del segmento PQ es contrario al del segmento UV, entonces $(PQUV) > 1$ y $\ln(PQUV) > 0$; si coinciden los sentidos de los segmentos PQ y UV, entonces $(PQUV) < 1$ y $\ln(PQUV) < 0$.

Supongamos que tenga lugar el primer caso. Tomemos sobre el segmento PQ un punto arbitrario R. Por cálculo directo es fácil mostrar que

$$(PQUV) = (PRUV) \cdot (PQUV).$$

Al someter a logaritmación esta igualdad, obtendremos la relación

$$\ln(PQUV) = \ln(PRUV) + \ln(RQUV). \qquad (*)$$

La disposición de los puntos supuesta por nosotros hace que $(PQUV) > 1$, $(PRUV) > 1$ y $(RQUV) > 1$, consiguientemente, todos los términos de la igualdad (*) son positivos.

Si los segmentos PQ y UV tienen una misma dirección, entonces todos los términos de la igualdad (*) son negativos. En ambos casos, de (*) se deduce que

$$|\ln(PQUV)| = |\ln(PRUV)| + |\ln(RQUV)|.$$

De tal forma, si con un segmento arbitrario PQ situado dentro del absoluto k, comparamos un número positivo

$$\rho(PQ) = |c \ln(PQUV)|,$$

entonces en este caso

1) con segmentos congruentes se compararán números iguales, pues $\rho(PQ)$ es el invariante de los automorfismos del absoluto k;

2) los números comparados con el segmento PQ y con trozos del mismo PQ y RQ, satisfarán la igualdad

$$\rho(PQ) = \rho(PR) + \rho(RQ).$$

Por las mismas propiedades se caracteriza la longitud de segmento en la geometría elemental. A base de esta analogía, llamaremos longitud del segmento PQ al número positivo $\rho(PQ)$ en la geometría hiperbólica del absoluto k.

Junto con el número positivo $\rho(PQ)$, se puede comparar con el segmento arbitrario PQ el número relativo

$$s(PQ) = c \ln(PQUV),$$

el cual, en el caso de ser REAL la constante c, coincide con la longitud $\rho(PQ)$ del segmento PQ, o difiere en signo de ella.

Ahora, pasemos a la consideración del invariante $c \ln(PQUV)$ en la geometría elíptica.

El absoluto de la geometría elíptica denotado por k, constituye una línea nula de segundo orden; se define en las coordenadas proyectivas mediante una ecuación con coeficientes reales, pero consta exclusivamente de puntos imaginarios. Cualesquiera que sean los puntos reales P, Q sobre el plano proyectivo, los puntos U, V en los cuales la recta PQ cruza el absoluto, son imaginarios, en este caso las coordenadas del punto U son números complejos conjugados con las coordenadas del punto V. Es fácil mostrar que para estas condiciones la relación compleja $(PQUV)$ es un número complejo con el módulo igual a uno. En efecto, si introducimos sobre la recta PQ un sistema de coordenadas no homogéneas proyectivas, designando con p, q, u, v las coordenadas de los puntos P, Q, U, V, entonces $u = \alpha + \beta i$, $v = \alpha - \beta i$ y

$$(PQUV) = \frac{u-p}{q-u} : \frac{v-p}{q-v} = \frac{[(\alpha - p) + \beta i][(q - \alpha) + \beta i)]}{[(\alpha - p) - \beta i]\,(q - \alpha) - \beta i)}.$$

Vemos que la relación compleja $(PQUV)$ es el cociente de dos números complejos conjugados, por consiguiente, $|(PQUV)| = 1$.

Al igual que todo número cuyo módulo es igual a 1, la relación compleja $(PQUV)$ puede representarse en forma de

$$(PQUV) = e^{i\varphi},$$

donde φ es una magnitud real determinada con la exactitud hasta el sumando $\pm 2\pi k (k = 1, 2, \ldots)$. De aquí se deduce que $\ln (PQUV) = i\varphi$ es una magnitud puramente imaginaria y polidígito.

De tal manera, si tomamos una constante PURAMENTE IMAGINARIA c, entonces con el segmento arbitrario PQ se comparará una magnitud real polidígita

$$s(PQ) = c \ln (PQUV). \qquad (^{**})$$

Para comparar un determinado valor de esta magnitud con el segmento arbitrario PQ, consideremos un punto variable real X sobre la recta proyectiva que contiene el segmento PQ dado. Adoptemos $(PXUV) = e^{i\theta}$. Para $X \equiv P$ tenemos:

$$(PPUV) = 1 \quad \text{y} \quad \theta = \theta_0 = \ \ldots \ = -4\pi, -2\pi, 0, +2\pi, +4\pi, \ldots;$$

si X ocupa una posición arbitraria dentro del segmento PQ, entonces a base de la ecuación $(PXUV) = e^{i\theta}$ se determina un conjunto numerable de valores correspondientes de θ. Al aproximarse X hacia el punto P, sin abandonar el interior del segmento PQ, cada uno de estos valores se aproxima hacia un determinado valor θ_0. Denotemos con $\tilde{\theta}$ el valor de θ que se aproxima hacia $\theta_0 = 0$, llamándolo principal. Convengamos también en llamar valor principal $\ln (PQUV)$ al límite, hacia el cual tiende la magnitud $\tilde{\theta}$ en el caso de tender X hacia el punto Q, permaneciendo dentro del segmento PQ.

Ahora, con cada segmento PQ, podemos comparar un número real bien determinado

$$s(PQ) = c \ln (PQUV), \qquad (^{**})$$

donde c es una constante imaginaria, $\ln (PQUV)$ es el valor principal del logaritmo natural de la magnitud $(PQUV)$.

Evidentemente, en este caso

1) con segmentos congruentes se compararán números iguales, ya que $s(PQ)$ es el invariante de los automorfismos del absoluto k;

2) los números comparados con el segmento PQ y con los trozos de este segmento PR y RQ, al tener signos iguales, satisfarán la igualdad

$$s(PQ) = s(PR) + s(RQ).$$

Estas propiedades del invariante $s(PQ)$ permiten llamar al número $|s(PQ)|$ longitud del segmento PQ en la geometría elíptica con el absoluto k.

Notemos de paso que en la geometría elíptica la longitud de toda una recta proyectiva, que sea igual a la del segmento PQ con los extremos unidos, se expresa por el número $2\pi|c|$.

Una vez determinada la longitud de segmento en las geometrías hiperbólica y elíptica, es natural determinar en estas geometrías la distancia entre dos puntos.

En la geometría hiperbólica cuyo campo es el dominio interior del absoluto, llamaremos distancia entre dos puntos a la longitud del único segmento que une los referidos puntos.

En la geometría elíptica cuyo campo es todo el plano proyectivo real*), llamaremos distancia entre dos puntos a la longitud del menor de dos segmentos definidos por dichos puntos.

Tanto en la geometría hiperbólica como en la elíptica la distancia $\rho(X, Y)$ entre los puntos arbitrarios X, Y posee las propiedades siguientes:

1) $\rho(X, X) = 0$.
2) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X) > 0$, si $x \neq Y$.
3) $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geqslant \rho(X, Z)$.

Dicho en otros términos, la magnitud $\rho(X, Y)$ tiene propiedades básicas inherentes a la distancia en el espacio euclidiano.

Omitimos la demostración de las propiedades 1) — 3) (sólo la última propiedad requiere demostración; las dos primeras son evidentes).

La definición de las longitudes de segmentos y de las distancias entre puntos, invariantes respecto al grupo de automorfismos del absoluto k, descrita en el presente párrafo, la llaman *métrica proyectiva*, dándole los calificativos *elíptica* o *hiperbólica*, en función de la clase del absoluto.

NOTA. Por cuanto el grupo de automorfismos del absoluto k según los teoremas A y B, es transitivo respecto a elementos lineales, podemos introducir *el proceso de medición de longitudes* tanto en la geometría hiperbólica como en la elíptica. Para ello, ante todo, ha de elegirse algún segmento AB por unidad de medida. Cualquiera que sea el otro segmento PQ, existe (a consecuencia de los teoremas A y B) un automorfismo del absoluto k que aplica el punto A en el punto P y convierte la dirección del segmento AB en la dirección del PQ. Si en este caso el punto B se aplica en el punto P_1 situado dentro del segmento PQ, entonces sobre el segmento PQ quedará trazado el segmento PP_1 congruente desde el punto de vista de la geometría del absoluto k al segmento AB. Trazando después el segmento $P_1P_2 \equiv AB$ sobre el segmento P_1Q y luego el segmento $P_2P_3 \equiv AB$ sobre el P_2Q, etc., determinaremos cuántos segmentos congruentes al segmento AB contiene el PQ. Así se hallará la parte entera de la longitud del segmento PQ. Luego podrán hallarse las décimas, centésimas, etc. de longitud.

Se entiende que la longitud determinada mediante esta medición, se expresará por el número $c \ln (PQUV)$, donde U, V son los puntos de intersección de la recta PQ con el absoluto k. En este caso el valor de la constante c está sujeto a la elección de la unidad lineal AB, a saber, $c = \dfrac{1}{\ln (ABUV)}$.

*) Hagamos recordar al lector que en la geometría elíptica el absoluto es una línea nula que consta de puntos imaginarios y no divide el plano proyectivo real en dominios algunos.

§ 170. Mostremos que la geometría hiperbólica dentro del absoluto oval es la geometría de Lobachevski.

Con este objeto, tomemos alguna línea oval de segundo orden designándola con k. Convengamos en llamar *puntos hiperbólicos* y *rectas hiperbólicas* a los elementos de la geometría hiperbólica determinada por el absoluto k. Los puntos hiperbólicos son puntos del plano proyectivo situados dentro de k; las rectas hiperbólicas son segmentos de rectas proyectivas, ubicados dentro de k, es decir, son cuerdas de la línea k. Los puntos de la propia línea k no se estiman como objetos hiperbólicos, por ende, los segmentos que representan rectas hiperbólicas son abiertos (no contienen sus extremos propios).

Las relaciones de pertenencia recíproca de objetos hiperbólicos satisfacen los requisitos del grupo I de axiomas de la geometría euclidiana. En rigor, al interpretar adecuadamente las propiedades más simples de las cuerdas de una línea de segundo orden, hallamos que:

1) A través de dos puntos hiperbólicos cualesquiera pasa una recta hiperbólica. En esto reside la exigencia del axioma I, 1.

2) A través de dos puntos hiperbólicos cualesquiera pasa sólo una recta hiperbólica. En esto radica la exigencia del axioma I, 2.

3) Sobre toda recta hiperbólica existen dos puntos hiperbólicos (inclusive una infinidad de puntos hiperbólicos); existen tres puntos hiperbólicos que no se hallan sobre una misma recta hiperbólica. En esto consiste la exigencia del axioma I,3.

Los demás axiomas del grupo I tienen un carácter espacial y no se toman en consideración en la geometría de dos dimensiones.

Luego, como sobre un segmento abierto los puntos están dispuestos en orden lineal, en la geometría hiperbólica, dentro de k, se cumplen los requisitos de los axiomas II,1 — II,3. El axioma de Pasch II,4 es válido en la geometría hiperbólica así como lo es sobre el plano proyectivo (véase el § 89).

De tal modo, en la geometría hiperbólica resultan cumplidos los requisitos de todos los axiomas de orden.

Abordemos los axiomas de congruencia.

En la fig. 154 aparecen dos segmentos hiperbólicos AB y $A'B'$ y dos ángulos hiperbólicos (h, k) y (h', k'). En la geometría hiperbólica, el segmento AB se considera congruente al segmento $A'B'$, si existe un automorfismo del absoluto k, que aplique el segmento AB sobre el $A'B'$; $\angle(h, k)$ se considera congruente al $\angle(h', k')$, si existe un automorfismo que haga pasar las semirrectas hiperbólicas h, k a semirrectas hiperbólicas $h'k'$. Del teorema A demostrado en el § 168 se infiere que sobre toda recta hiperbólica, en cada sentido respecto a cualquier punto de la misma, se puede trazar un segmento congruente a un segmento arbitrario dado, y que a cada semirrecta, desde cualquier lado de ésta, se puede aplicarle un ángulo congruente a un ángulo arbitrariamente dado.

De tal manera, a consecuencia del teorema A, en la geometría hiperbólica resultan satisfechas las exigencias básicas de los axiomas III, 1 y III, 4. Dado el carácter de grupo del conjunto de automorfismos, dos segmentos congruentes a un tercer segmento, son congruentes entre sí; con esto mismo queda satisfecha la exigencia del axioma III, 2.

Mediante un análisis no complicado podemos cerciorarnos de que los demás requisitos de los axiomas de congruencia también están satisfechos en la geometría hiperbólica (no vamos a aducir este análisis).

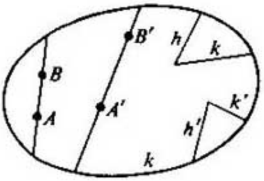


Fig. 154

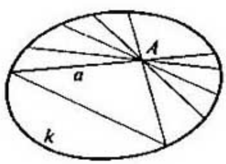


Fig. 155

Al fin, en la geometría hiperbólica es válido el principio de continuidad de Dedekind, puesto que el mismo se realiza sobre toda recta proyectiva. De aquí y del teorema 41 (del § 23) se desprende que en la geometría hiperbólica son válidas las proposiciones de Arquímedes y de Cantor.

Así pues, en la geometría hiperbólica del dominio interior del absoluto k se satisfacen las exigencias de todos los axiomas I — IV. Pero entonces, según sabemos, debe satisfacerse el requisito del axioma sobre las paralelas de Euclides o el del axioma sobre las paralelas de Lobachevski. Por lo visto, tiene lugar el segundo caso. Efectivamente, a través de un punto arbitrario A dentro de la línea k pasa una infinidad de cuerdas que no cruzan la cuerda dada a (fig. 155), y esto quiere decir que en la geometria hiperbólica a través de todo punto pasa una infinidad de rectas sin cruzar la recta hiperbólica dada.

A base de todo lo expuesto llegamos a la proposición siguiente: *la geometría hiperbólica del interior de un absoluto oval es la geometría no euclidiana de Lobachevski.*

§ 171. Es interesante considerar cómo son los diversos hechos de la geometría de Lobachevski al interpretarse dentro del absoluto k.

Señalemos algunos de ellos.

Por ejemplo, la recta hiperbólica h es perpendicular a la recta hiperbólica p si pasa a través del polo de la recta p respecto al absoluto k sobre el plano proyectivo.

En rigor, sean h y p rectas hiperbólicas que se intersecan en el punto Q; además, la recta h, siendo prolongada desde el interior del absoluto k, pase a través del polo P de la recta p (fig. 156). Apliquemos armónicamente el plano proyectivo sobre sí mismo, eligiendo por el centro de esta aplicación el punto P y, por el eje, su polar p. De la definición de la polar y de la aplicación armónica (véase el § 131 y la nota al final del § 106) se deduce que en el caso de la aplicación señalada, los segmentos del interior del absoluto k partidos por la recta p, se convierten unos en otros. De tal manera, respecto a la línea k, la referida aplicación es un automorfismo el cual, desde el punto de vista de la geometría hiperbólica, puede considerarse como reflexión especular respecto a la recta p.

Luego, es evidente que los trozos de la recta h partidos por el punto Q, se aplican uno en otro, mientras la recta p permanece inmóvil. Por consiguiente, los ángulos adyacentes definidos por las rectas h y p, desde el punto de vista de la geometría hiperbólica del absoluto k, son congruentes uno a otro, y entonces la recta h es perpendicular a la recta p.

Notemos de paso que el principio de reciprocidad, conocido en la teoría de polares, (que dice: si una recta contiene el polo de la otra, entonces ésta contiene el polo de la primera) en la geometría hiperbólica significa el carácter recíproco de la propiedad de perpendicularidad de dos rectas (si una recta es perpendicular a otra, entonces ésta es perpendicular a la primera).

Detengámonos en la interpretación de las equidistantes y los oriciclos conocidos en la geometría no euclidiana (véanse los §§ 36 — 40).

Sea k_1 una línea oval de segundo orden que se halla en el interior del absoluto k y toca el absoluto en los puntos de su intersección con la recta p (fig. 157). Evidentemente, en el caso de la reflexión especular hiperbólica respecto a cualquier recta que pase a través del punto P (éste es el polo de la recta p respecto al absoluto), la línea k_1 se aplica sobre sí misma. Por lo tanto, todas las cuerdas de la línea k_1 orientadas hacia el punto P, son segmentos hiperbólicamente congruentes; además, la recta p es perpendicular a estas cuerdas, partiéndolas por la mitad. Por eso, la línea k_1 desde el punto de vista de la geometría hiperbólica, es una equidistante con el eje p. Si ambos puntos de adherencia de la línea k_1 al absoluto se convierten en uno solo, entonces, en el límite, la línea k_1 se convierte en ORICICLO. No nos detendremos en la demostración de esta última circunstancia.

Otros ejemplos numerosos de interpretación hiperbólica de los hechos no euclidianos los podrá hallar el lector en el libro de Baldus «Nichteuklidische Geometrie».

§ 172. Ahora, demostremos que *la geometría elíptica es la geometría de Riemann* (véanse los §§ 63 — 68).

Supongamos que el plano proyectivo, sobre el cual se establece la geometría elíptica, constituya un plano infinitamente alejado del espacio euclidiano E completado por elementos infinitamente alejados. En el espacio euclidiano E, sea dado un sistema de coordenadas cartesianas x, y, z con el origen en el punto O. Partiendo de estas coordenadas, deduzcamos coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, x_4 (véase el § 102). Consideremos que el espacio E está completado no sólo por elementos infinitamente alejados, sino también por imaginarios (véase el § 127).

La ecuación $x_4 = 0$ define un plano infinitamente alejado. La ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ define sobre el referido plano una línea nula de segundo orden. Tomémosla por el absoluto de la geometría elíptica sobre el plano $x_4 = 0$. Al mismo tiempo, establezcamos sobre este plano las relaciones básicas de la geometría de Riemann así como se hizo en el § 67. Tenemos que establecer la identidad entre estas dos geometrías.

Al comparar las relaciones de enlace y de orden en estas geometrías, nos cercioraremos de que éstas son idénticas (iguales a las relaciones de enlace y de orden

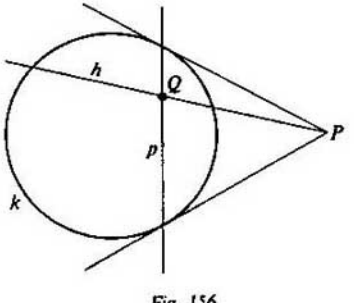


Fig. 156

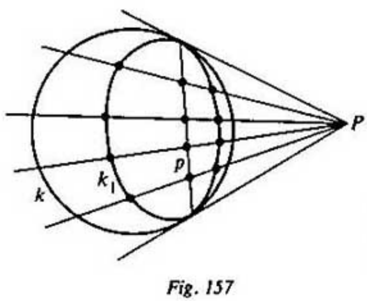


Fig. 157

en la geometría proyectiva). Queda aclarar la cuestión de congruencia de figuras; a saber, hay que mostrar que dos figuras del plano $x_4 = 0$, congruentes en el sentido de la geometría elíptica, serán congruentes también en el sentido de la geometría de Riemann, y a la inversa. Dicho en otros términos, hay que mostrar que toda transformación de los puntos del plano $x_4 = 0$, la cual es un movimiento en el sentido de la geometría elíptica, será un movimiento en el sentido de la de Riemann, y viceversa.

Consideremos alguna esfera k, suponiendo que su centro esté en el punto O. Comparemos con un punto arbitrario M del plano $x_4 = 0$ un par de puntos diametralmente opuestos de la esfera k, que resultan al proyectarse el punto M del centro de la esfera k. Comparemos con una figura arbitraria F del plano $x_4 = 0$ una figura que pertenezca a la esfera k y conste de pares de puntos diametralmente opuestos correspondientes a los puntos de la figura F. De acuerdo con el § 67, dos figuras del plano $x_4 = 0$ se estiman congruentes en el sentido de la geometría de Riemann si son congruentes las figuras correspondientes a ellas sobre la esfera k. De aquí se deduce que sobre el plano $x_4 = 0$ todo movimiento en el sentido de la geometria de Riemann constituye tal transformación de puntos que las imágenes y preimágenes son proyecciones de las imágenes y preimágenes resultantes de cierto giro de la esfera k alrededor del centro o de una cierta reflexión especular de la esfera k respecto al plano diametral.

Ahora, notemos que todo giro de la esfera k alrededor del centro o la reflexión especular de la referida esfera respecto al plano diametral, se define en coordenadas cartesianas por las fórmulas del tipo de:

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z, \end{aligned} \tag{1}$$

donde x', y', z' son las coordenadas de la imagen, x, y, z, las de la preimagen. En las fórmulas (1) los coeficientes están enlazados por la condición de

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2}$$

Si x, y, z son las coordenadas cartesianas de algún punto sobre la esfera k, entonces la proyección del referido punto sobre el plano $x_4 = 0$ tiene como coordenadas homogéneas los números x_1, x_2, x_3 proporcionales a x, y, z (véase el § 102). De aquí se infiere que sobre el plano $x_4 = 0$ todo movimiento en el sentido de la geometría de Riemann se define por las fórmulas del género de:

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho x_3' &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3, \end{aligned}$$

donde x_1', x_2', x_3' son las coordenadas de la imagen, x_1, x_2, x_3 son las de la preimagen, ρ es cualquier número desigual a cero. A consecuencia de la identidad (2), toda vez que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, se tendrá también $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0$. De tal forma, sobre el plano $x_4 = 0$ todo movimiento en el sentido de la geometría de Riemann es una transformación proyectiva automorfa respecto a la línea nula $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Con esto queda demostrado el hecho de que sobre el plano

$x_4 = 0$, todo movimiento en el sentido de la geometría de Riemann será también un movimiento en el sentido de la geometría elíptica con el absoluto $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Demostremos lo recíproco, es decir, que todo movimiento en el sentido de la geometría elíptica es un movimiento en el sentido de la de Riemann. Consideremos algún movimiento en el sentido de la geometría elíptica, designándolo con el símbolo f. En el plano $x_4 = 0$, tomemos un punto arbitrario M y una recta arbitraria orientada a que pase por M. El movimiento f convierte el punto M en cierto punto M' y la recta orientada a, en cierta recta orientada a'. Sean f_1 y f_2 dos movimientos en el sentido de la geometría de Riemann, cada uno de los cuales convierte M en M' y a en a'. Conforme a lo demostrado más arriba, f_1 y f_2 son movimientos en el sentido de la geometría elíptica. Pero en la geometría elíptica existen sólo dos movimientos que transforman M en M' y a en a' (véase el § 168, el teorema B). Por consiguiente, f coincide con f_1 o con f_2, es decir, un movimiento arbitrariamente adoptado en el sentido de la geometría elíptica es un movimiento en el de la geometría de Riemann. Así pues, sobre el plano $x_4 = 0$, un conjunto de todos los movimientos en el sentido de la geometría elíptica coincide con el conjunto de todos los movimientos en el sentido de la geometría de Riemann. Con esto mismo queda demostrada la identidad entre las referidas geometrías.

§ 173. GRUPO DE KLEIN. Ahora, mostraremos que la geometría de Euclides también es la geometría de un grupo de automorfismos proyectivos.

Sobre un plano proyectivo, tomemos alguna recta, designándola con el símbolo ∞; sobre ∞, tomemos dos puntos imaginarios cualesquiera I_1 e I_2 que posean coordenadas complejas conjugadas en un sistema arbitrario de coordenadas homogéneas proyectivas.

Para hacer cómodos los cálculos siguientes, supongamos que el sistema de coordenadas se haya elegido de modo que la ecuación $x_3 = 0$ represente la recta ∞, y los números $(1, i, 0)$ y $(1, -i, 0)$ sean las coordenadas de los puntos I_1 e I_2.

Consideraremos *la colección de transformaciones proyectivas automorfas respecto al par de puntos I_1 e I_2*. Llamaremos la referida colección (según el § 162, es un grupo) grupo de Klein.

Procuremos obtener representaciones analíticas de los automorfismos de Klein. Para ello, en primer lugar, notemos que todos los automorfismos de Klein al mismo tiempo son automorfismos respecto a la recta $x_3 = 0$, por eso pueden representarse analíticamente por las fórmulas

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= \phantom{c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + {}} c_{33}x_3 \end{aligned} \tag{*}$$

(más detalles al respecto véanse en el § 163).

Luego, debemos tomar en consideración dos posibilidades:

1) el automorfismo puede dejar fijo cada punto I_1 e I_2;

2) el automorfismo puede hacer pasar el punto I_1 a punto I_2 y el punto I_2, a punto I_1.

En el primer caso, poniendo en las ecuaciones (*) primero

$$x_1 = 1, \quad x_2 = i, \quad x_3 = 0, \quad x_1' = 1, \quad x_2' = i, \quad x_3' = 0, \quad \rho' = \rho_1,$$

luego

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = -i,\ \ x_3 = 0,\ \ x_1' = 1,\ \ x_2' = -i,\ \ x_3' = 0,\ \ \rho' = \rho_2,$$

obtendremos:

$$\rho_1 = c_{11} + ic_{12}, \qquad \rho_1 i = c_{21} + ic_{22}$$

y

$$\rho_2 = c_{11} - ic_{12}, \qquad -\rho_2 i = c_{21} - ic_{22}.$$

De aquí

$$c_{21} = -c_{12},\ \ c_{22} = c_{11}.$$

En el segundo caso, poniendo en las ecuaciones (*) primero

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = i,\ \ x_3 = 0,\ \ x_1' = 1,\ \ x_2' = -i,\ \ x_3' = 0,\ \ \rho' = \sigma_1,$$

después

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = -i,\ \ x_3 = 0,\ \ x_1' = 1,\ \ x_2' = i,\ \ x_3' = 0,\ \ \rho' = \sigma_2,$$

hallaremos:

$$\sigma_1 = c_{11} + ic_{12}, \qquad -\sigma_1 i = c_{21} + ic_{22}$$

y

$$\sigma_2 = c_{11} - ic_{12}, \qquad \sigma_2 i = c_{21} - ic_{22}.$$

De aquí

$$c_{21} = c_{12}, \qquad c_{22} = -c_{11}.$$

De tal modo, las fórmulas que representan los automorfismos de Klein, necesariamente tienen la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3, \\ \rho' x_2' &= \mp c_{12}x_1 \pm c_{11}x_2 + c_{23}x_3, \\ \rho' x_3' &= \phantom{\mp c_{12}x_1 \pm c_{11}x_2 +} c_{33}x_3, \end{aligned} \tag{**}$$

correspondiendo los signos superiores de la segunda línea a los automorfismos de primer tipo, y los inferiores, a los de segundo tipo. Es también del todo evidente que estas fórmulas, cualesquiera que sean los valores de sus parámetros, definen los automorfismos de Klein; en rigor, si en las fórmulas (**) ponemos $x_1 = 1$, $x_2 = \pm i$, $x_3 = 0$, entonces obtendremos $x_1' : x_2' : x_3' = 1 : \pm i : 0$. Por consiguiente, se ha encontrado la representación analítica del grupo de Klein en coordenadas homogéneas.

Con el propósito de considerar el grupo de Klein sobre un plano afín obtenido mediante el corte del plano proyectivo a lo largo de la recta $x_3 = 0$ y para todos los puntos del cual $x_3 \neq 0$, pasaremos a las coordenadas no homogéneas. Adoptemos

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y, \quad \frac{x_1'}{x_3'} = x', \quad \frac{x_2'}{x_3'} = y',$$

dividiendo término a término las primeras dos igualdades (**) por la tercera. Obtendremos las relaciones

$$x' = \frac{c_{11}}{c_{33}}x + \frac{c_{12}}{c_{33}}y + \frac{c_{13}}{c_{33}}, \quad y' = \mp\frac{c_{12}}{c_{33}}x \pm \frac{c_{11}}{c_{33}}y + \frac{c_{23}}{c_{33}}.$$

Si apuntamos los parámetros de otro modo, suponiendo

$$\frac{c_{11}}{c_{33}} = r\cos\varphi, \quad \frac{c_{12}}{c_{33}} = -r\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad \frac{c_{13}}{c_{33}} = u, \quad \frac{c_{23}}{c_{33}} = v,$$

entonces las igualdades precedentes podrán presentarse de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x' &= r(x\cos\varphi - y\ \mathrm{sen}\,\varphi) + u, \\ y' &= r(\pm x\,\mathrm{sen}\,\varphi \pm y\cos\varphi) + v. \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

De estas fórmulas se ve que el grupo de Klein coincide con la colección de tales transformaciones del plano euclidiano que se obtienen mediante la combinación de movimientos, reflexiones especulares y la variación en r veces de distancias entre todos los puntos. Tales transformaciones se llaman *transformaciones de semejanza*.

De tal forma, tiene lugar la proposición fundamental que sigue:

Si se consideran equivalentes figuras semejantes del plano euclidiano, entonces la geometría euclidiana puede estimarse como geometría del grupo de Klein.

Hagamos constar que una colección de rectas imaginarias que pasen por el punto I_1 o por el punto I_2, constituye un haz degenerado de segunda clase. Por cuanto éste se aplica sobre sí mismo a raíz de todas las transformaciones del grupo de Klein, lo llamaremos *absoluto* del referido grupo. Aplicando este término, podemos decir que la geometría de Euclides es la geometría del grupo de automorfismos respecto a una absoluto degenerado.

§ 174. PROPIEDADES DE LOS PUNTOS CÍCLICOS Y FÓRMULA DE LAGUERRE. Ahora partiremos de la consideración del plano euclidiano. Sobre éste, introduzcamos las coordenadas ortogonales cartesianas x, y y luego las coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, estimando que el punto de las coordenadas cartesianas x, y tiene coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3 ($x_3 \neq 0$), si $x_1 : x_3 = x$, $x_2 : x_3 = y$. Al fin, completemos el plano euclidiano por una recta infinitamente alejada $x_3 = 0$. Los puntos $I_1(1, i, 0)$ e $I_2(1, -i, 0)$ se llaman puntos circulares o *cíclicos* del plano euclidiano completado. Se denominan así por ser puntos comunes de todas las circunferencias. Efectivamente, en las coordenadas homogéneas, la ecuación de cualquier circunferencia

$$x_1^2 + x_2^2 + 2Ax_1x_3 + 2Bx_2x_3 + Cx_3^2 = 0 \qquad (*)$$

se satisface si $x_1 = 1$, $x_2 = \pm i$, $x_3 = 0$, por consiguiente, la circunferencia (*) pasa por los puntos I_1 e I_2.

Las rectas imaginarias que pasen por un punto cíclico, se llaman *isótropas* o *mínimas*.

La ecuación de la recta que pase por el punto I_1, tiene la forma de $x_1 + ix_2 + cx_3 = 0$; la ecuación de la curva isótropa que pase por el punto I_1, tiene la forma de $x_1 - ix_2 + cx_3 = 0$. En las coordenadas no homogéneas, las rectas isótropas se definen por las ecuaciones del tipo de

$$y = ix + l$$

ó

$$y = -ix + l.$$

Es notable que la distancia entre dos puntos finales cualesquiera de una recta isótropa es igual a cero. En efecto, si $X_1(x_1, y_1)$ y $X_2(x_2, y_2)$ son dos puntos finales de una recta isótropa, entonces

$$y_2 - y_1 = \pm i(x_2 - x_1),$$

de donde

$$\rho(X_1, X_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + i^2} = 0.$$

Precisamente merced a la propiedad referida las rectas isótropas se llaman mínimas. Evidentemente, a través de todo punto real (x_0, y_0) pasan dos rectas isótropas

$$y - y_0 = \pm i(x - x_0);$$

designémoslas con j_1 y j_2. Sean u_1 y u_2 dos rectas reales que pasan por (x_0, y_0), con los coeficientes angulares k_1 y k_2. Podemos componer una relación compleja de dos pares de rectas u_1, u_2 y j_1, j_2, valiéndonos de la fórmula deducida en el § 119:

$$(u_1 u_2 j_1 j_2) = \frac{i - k_1}{k_2 - i} : \frac{-i - k_1}{k_2 + i}.$$

Esta magnitud constituye el invariante del grupo de Klein, y es natural que postulemos una relación existente entre ella y el valor euclídeo del ángulo formado por las rectas u_1 y u_2. Efectivamente, al denotar la magnitud $\angle (u_1, u_2)$ con φ de modo que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

y al efectuar las transformaciones (se aducen a continuación) del segundo miembro de la igualdad précedente, hallaremos:

$$(u_1 u_2 j_1 j_2) = \frac{i - k_1}{k_2 - i} : \frac{-i - k_1}{k_2 + i} = \frac{(i - k_1)(k_2 - i)}{(k_2 - i)(-i - k_1)} =$$

$$= \frac{k_1 k_2 + 1 - i(k_2 - k_1)}{k_1 k_2 + 1 + i(k_2 - k_1)} = \frac{1 - i \operatorname{tg} \varphi}{1 + i \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi} = e^{-2i\varphi}.$$

De aquí $-2i\varphi = \ln(u_1 u_2 j_1 j_2)$ y

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln(u_1 u_2 j_1 j_2). \qquad (**)$$

La fórmula (**) conocida por *fórmula de Laguerre* representa el ángulo euclídeo como un invariante proyectivo. Es análoga a las fórmulas que expresan la longitud de segmento en la geometría hiperbólica y la elíptica (véase el § 169). La fuente de esta analogía radica en el principio de dualidad (más detalles véanse en *Klein,* Nicht—Euklidische Geometrice, cap. VI).

A base de lo expuesto en los últimos párrafos, el lector pudo cerciorarse de que los métodos de la teoría de grupos reducen a un esquema único los sistemas geométricos más principales (de Euclides, de Lobachevski, de Riemann), permitiendo así ver algo consubstancial en lo que, al parecer, es contrario.

Capítulo VII

ESPACIO DE MINKOWSKI

1. Espacio afín multidimensional

§ 175. El objeto principal del presente capítulo es el espacio de Minkowski; dicho espacio ofrece un interés considerable desde el punto de vista del aparato matemático de la física, por estar enlazado directamente con las ecuaciones de la teoría especial de la relatividad. El espacio de Minkowski constituye un espacio afín con cierta métrica particular, es decir, un espacio afín en el cual están determinadas de cierto modo las distancias entre puntos (así también la congruencia de figuras, el movimiento, etc.).

En relación con la física, resulta ser particularmente importante el espacio CUADRIDIMENSIONAL de Minkowski. Con el propósito de estudiar el referido espacio, tenemos que exponer preliminarmente la teoría de espacios afines multidimensionales. La exposición se basa sobre el concepto de espacio lineal, y la parte principal de ésta no depende de las construcciones axiomáticas precedentes.

§ 176. Sea L algún conjunto; admitamos que 1) esté dada una regla según la cual a cada par de elementos x, y del conjunto L le corresponde un elemento del mismo conjunto L; lo llamaremos *suma* de x e y, designándolo con $x + y$; 2) esté dada una regla según la cual a cada par x, λ compuesto por el elemento x del conjunto L y el número real λ, también le corresponde un elemento del conjunto L; lo llamaremos *producto* de x por λ, denotándolo con λx(o $x\lambda$). Las operaciones de axicionar los elementos de L y de multiplicarlos por números reales pueden prefijarse de cualquier modo, pero en este caso deben observarse las exigencias de los aciomas siguientes:

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Entre los elementos del conjunto L existe un elemento θ tal que $x + \theta = x$ para cualquier x; θ se llama elemento *nulo* de L.
4. Para todo x existe un elemento y tal que $x + y = \theta$; el elemento y se llama *opuesto* del elemento x, se designa con $-x$.
5. $1 \cdot x = x$.
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$; aquí y más abajo α, β denotan cualesquiera números reales.
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

El conjunto L para cuyos elementos están definidas las operaciones de adicionar y de multiplicar por números reales con la observación de los axiomas enumerados, se llama *espacio lineal* real; también llamaremos *vectores* a los elementos del espacio lineal. En lo sucesivo, hablaremos sencillamente sobre el espacio lineal, sin especificar que se trata precisamente del espacio real, por cuanto no consideraremos espacios de otro tipo.

Uno de los ejemplos concretos más simples del espacio lineal es el conjunto de vectores geométricos cuyas adición y multiplicación por números reales están definidas según las reglas de álgebra vectorial elemental.

De los axiomas I — 8 pueden deducirse los siguientes teoremas (los aducimos sin demostrar, remitiendo al lector a cualquier curso de álgebra lineal):

1) En el espacio lineal se contiene solamente un único elemento nulo.

2) Para todo elemento x existe solamente un único elemento opuesto $-x$.

3) $0 \cdot x = \theta$ para cualquier x.

4) $\theta \cdot \alpha = \theta$ para cualquier número α.

§ 177. Si tiene lugar la igualdad

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda l = \theta, \tag{1}$$

donde $x, y, \ldots l$ son vectores, $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ son números entre los cuales por lo menos uno es diferente de cero, entonces se dice que los vectores $x, y, \ldots, l$ son *linealmente dependientes*; si de (1) se infiere que $\alpha = 0, \beta = 0, \ldots, \lambda = 0$, entonces los vectores $x, y, \ldots, l$ se llaman *linealmente independientes.*

Un espacio lineal se llama n-dimensional si en él hay n vectores linealmente independientes, pero cualesquiera vectores de número $n + 1$ son linealmente dependientes.

EJEMPLO. Consideremos un conjunto K_n cuyos elementos (vectores) son grupos ordenados compuestos por n números reales cada uno: $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Definamos las operaciones de adición de vectores arbitrarios $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ y de multiplicación de un vector $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ por un número real arbitrario λ, mediante las reglas siguientes:

1) $x + y = \{x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n\}$;

2) $\lambda x = \{\lambda x_1; \ldots; \lambda x_n\}$.

En este caso es fácil comprobar que se observan todas las exigencias de los axiomas I — 8 (el vector nulo es $\theta = \{0, 0, \ldots, 0\}$); si $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un vector arbitrario, entonces su vector opuesto será $-x = \{-x_1, -x_2, \ldots, -x_3\}$. Por consiguiente, K_n con las operaciones dadas constituye un espacio lineal.

En el espacio K_n hay n vectores linealmente independientes, por ejemplo, $\{1, 0, 0, \ldots, 0\}, \{0, 1, 0, \ldots, 0\}, \ldots, \{0, 0, 0, \ldots, 0, 1\}$. De otra parte, cualesquiera vectores de número $n + 1$ son linealmente dependientes. En rigor, consideremos vectores arbitrarios $a_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\}, a_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}\}, \ldots, a_{n+1} = \{a_{n+1\,1}, a_{n+1\,2}, \ldots, a_{n+1\,n}\}$, componiendo una matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \cdots & a_{n+1\,n} \end{pmatrix}$$

Según el teorema conocido del rango de la matriz, el número máximo de filas linealmente independientes de una matriz es igual al número máximo de sus columnas linealmente independientes. Mas, en esta matriz hay sólo n columnas; por consiguiente, el número de columnas linealmente independientes no supera n, por lo tanto, el número de filas linealmente independientes tampoco es superior a n. De tal modo, las filas de esta matriz, cuyo total es $n + 1$, deben guardar una dependencia lineal, lo cual significa la dependencia lineal de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Así pues, en el espacio K_n hay n vectores linealmente independientes, pero cualesquiera vectores de número $n + 1$ son linealmente dependientes. Por consiguiente, K_n es un espacio lineal n-dimensional; lo llaman espacio *coordenado* o *aritmético* n-dimensional.

En el espacio n-dimensional lineal, todo grupo de vectores linealmente independientes tomados en número n, se llama *base*. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base, x, un vector arbitrario. Como el total de vectores $x, e_1, \ldots, e_n$ es igual a $n + 1$, entonces debe tener lugar la igualdad

$$\alpha x + \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n = \theta, \tag{2}$$

donde por lo menos uno de los números $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$ difiere de cero. El número α no puede ser igual a cero, pues entonces los vectores $e_1, \ldots, e_n$ resultarían linealmente dependientes. Por eso podemos dividir por α y reducir la igualdad (2) a la siguiente forma

$$x = \left(-\frac{\beta_1}{\alpha}\right) e_1 + \ldots + \left(-\frac{\beta_n}{\alpha}\right) e_n;$$

al introducir las notaciones $-\beta_k/\alpha = x_k$, obtendremos:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n. \tag{3}$$

La expresión del vector x mediante la fórmula (3) se llama *descomposición* de x respecto a la base $e_1, \ldots, e_n$; los números $x_1, \ldots, x_n$ se llaman *coordenadas* de x respecto a la base $e_1, \ldots, e_n$. Es fácil cerciorarnos de que la descomposición de x respecto a una base dada, es la única; en rigor, admitamos que además de (3) tenga lugar también la igualdad

$$x = x_n' e_1 + \ldots + x_n' e_n. \tag{4}$$

De (3) y (4) se deduce que

$$(x_1' - x_1)e_1 + \ldots + (x_n' - x_n)e_n = \theta; \tag{5}$$

puesto que los vectores $e_1, \ldots, e_n$ son linealmente independientes, a base de (5) obtenemos: $x_1' - x_1 = 0, \ldots, x_n' - x_n = 0$, ó $x_1' = x_1, \ldots, x_n' = x_n$, es decir, las descomposiciones (3) y (4) no pueden diferenciarse una de otra.

Al multiplicar (3) por un número λ, obtendremos:

$$\lambda x = (\lambda x_1)e_1 + \ldots + (\lambda x_n)e_n,$$

es decir, *a la multiplicación de un vector por un número le corresponde la multiplicación de todas las coordenadas suyas por el mismo número.*

Luego, esté descompuesto respecto a la base $e_1, \ldots, e_n$ un vector arbitrario y:

$$y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n. \tag{6}$$

Al sumar término a término (3) y (6), obtendremos:

$$x + y = (x_1 + y_1)e_1 + \dots + (x_n + y_n)e_n,$$

es decir, *a la adición de vectores le corresponde la de sus respectivas coordenadas.* De tal manera, si en un espacio lineal n-dimensional está elegida una base, entonces la representación de los vectores del referido espacio y las operaciones con sus vectores se aritmetizan completamente; y además se aritmetizan bien uniformemente (sin depender de la naturaleza de los objetos que son elementos del espacio). Dicho de otro modo, todos los espacios lineales n-dimensionales son isomorfos respecto a un espacio lineal n-dimensional concreto, precisamente al espacio aritmético K_n.

§ 178. En un espacio lineal L cualquiera sean dados arbitrariamente los vectores linealmente independientes $a_1, a_2, \dots, a_m$. Consideraremos el conjunto L' de todas las combinaciones lineales de los vectores $a_1, a_2, \dots, a_m$, es decir, el conjunto de todos los vectores del tipo de

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ son números cualesquiera. Evidentemente, si x e y son dos vectores de L', entonces $x + y$ también pertenece a L'; si λ es un número cualquiera, entonces, λx pertenece a L'; el vector nulo $\theta = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 0 \cdot a_m$ y el vector $-x = (-\lambda_1)a_1 + \dots + (-\lambda_m)a_m$ pertenecen a L'. De tal modo, el propio conjunto L' es un espacio lineal. Este es isomorfo a un espacio K_m coordenado y por ende es m-dimensional. Los vectores $a_1, a_2, \dots, a_m$ componen la base de L'; los números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ son las coordenadas del vector x de L' respecto a la referida base.

§ 179. Sean dados algún conjunto $\mathfrak{A}$ cuyos elementos en lo sucesivo se llaman puntos, designándose con las mayúsculas A, B, C, y algún espacio lineal n-dimensional L; denotaremos sus vectores con las minúsculas $a, b, x, y, \dots$ (menos el vector nulo; lo designaremos con θ). Supongamos que a todo par ordenado de puntos A, B del conjunto $\mathfrak{A}$ le corresponda cierto vector x de L. Si en el par A, B el punto A se considera primero, y bajo esta condición al par A, B le corresponde el vector x, entonces nos valdremos de la inscripción:

$$AB = x.$$

A un par arbitrario de puntos iguales se le pone en correspondencia un solo vector de L, puesto que no tiene sentido estimar ordenado a tal par. La correspondencia de vectores de L a los pares de puntos de $\mathfrak{A}$ puede ser cualquiera; sólo se supone que se observan las exigencias de los dos axiomas siguientes:

1. *Para cualquier punto A y para cualquier vector x tendremos un único punto B tal que $AB = x$.*

2. *Si $AB = x$, $BC = y$, entonces $AC = x + y$. Un conjunto de puntos enlazado del modo referido con un espacio lineal de n dimensiones, se llama espacio afín n-dimensional.*

De los axiomas 1, 2 se infieren fácilmente dos teoremas:

1. *A todo par de puntos coincididos le corresponde un vector nulo.*

En efecto, sea x cualquier vector, y $AA = z$. Conforme al axioma 1, existirá un punto B tal que $AB = x$, y del axioma 2 sigue que $AB = z + x$; de tal forma, $z + x = x$ para cualquier x, de donde $z = \theta$.

2. *Si $AB = x$, entonces $BA = -x$.*

Efectivamente, si $BA = y$, entonces del axioma 2 se tiene $AA = x + y$, de donde $x + y = \theta$ e $y = -x$.

En lo sucesivo, para simplificar las formulaciones, vamos a llamar sencillamente vectores a los pares ordenados de puntos del espacio afín. A base de lo expuesto queda claro que en el sentido de las operaciones lineales (adición y multiplicación por un número), los pares ordenados de puntos del espacio afín juegan un papel plenamente análogo al de los vectores geométricos libres del álgebra vectorial ordinaria. No obstante, es sustancial el hecho de que tenemos vectores en un espacio de cualquier dimensión.

§ 180. En el espacio afín se puede introducir coordenadas afines. El sistema afín de coordenadas viene determinado por la fijación del origen de coordenadas 0 y de la base de coordenadas $e_1, e_2, \dots, e_n$. Sea M un punto arbitrario; descompongamos su radio vector OM respecto a la base de coordenadas:

$$OM = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n.$$

Los coeficientes de esta descomposición se llaman *coordenadas* del punto M en el sistema dado.

Si M^* es un punto diferente, entonces

$$OM^* = x_1^*e_1 + x_2^*e_2 + \dots + x_n^*e_n.$$

De aquí

$$MM^* = OM^* - OM = (x_1^* - x_1)e_1 + \dots + (x_n^* - x_n)e_n.$$

De tal manera, al igual que en el álgebra vectorial ordinaria, obtenemos las coordenadas del vector MM^* sustrayendo las coordenadas del punto M de las del punto M^*.

Deduzcamos las fórmulas de transformación de las coordenadas afines al pasar a un nuevo origen O' y a una nueva base $e_1', e_2' \dots, e_n'$. Supongamos que se conozcan las coordenadas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ del punto O' respecto al sistema viejo, y los coeficientes de descomposición de vectores de la nueva base respecto a la base vieja:

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= p_{11}e_1 + p_{12}e_2 + \dots + p_{1n}e_n, \\ e_2' &= p_{21}e_1 + p_{22}e_2 + \dots + p_{2n}e_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n' &= p_{n1}e_1 + p_{n2}e_2 + \dots + p_{nn}e_n. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Anotemos brevemente las fórmulas (1) en forma de:

$$e_i' = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}e_k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \qquad (2)$$

Si M es un punto arbitrario, entonces

$$OM = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = \sum_{k=1}^{n} x_ke_k,$$

$$OM = O'M + OO' = \sum_{i=1}^{n} x_i'e_i' + \sum_{k=1}^{n} a_ke_k.$$

Aquí las virgulillas marcan las nuevas coordenadas del punto M. Al comparar los segundos miembros de las dos últimas relaciones y al valernos de las fórmulas (2), hallaremos:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i' + \sum_{k=1}^{n} a_k e_k = \sum_{i=1}^{n} \left\{ x_i' \sum_{k=1}^{n} \cdot p_{ik} e_k \right\} + \sum_{k=1}^{n} a_k e_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i' + a_k \right\} e_k.$$

En esta cadena de igualdades, la descomposición inicial y la obtenida al término del cálculo, están dadas respecto a una misma base. Como la descomposición respecto a la base dada es la única, obtenemos:

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i' + a_k,$$

o, anotado detalladamente:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = p_{11}x_1' + p_{21}x_2' + \ldots + p_{n1}x_n' + a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = p_{1n}x_1' + p_{2n}x_2' + \ldots + p_{nn}x_n' + a_n. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Estas fórmulas expresan las coordenadas viejas del punto arbitrario mediante sus nuevas coordenadas. Designemos con P la matriz compuesta por los coeficientes de los segundos miembros de las fórmulas (1). Como los vectores $e_1', \ldots, e_n'$ son linealmente independientes, las filas de la matriz P también deben serlo. Por ende, el determinante de la matriz P difiere de cero. La matriz P^* resultante de la transposición de la matriz P, tiene el mismo determinante; por lo tanto, para P^* existe una matriz inversa. Evidentemente, los coeficientes de $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ que están en los segundos miembros de (3), componen la matriz P^*. Si designamos con q_{ik} los elementos de la matriz $Q = (P^*)^{-1}$, es decir, de la inversa de P^*, entonces de (3) obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \ldots + q_{1n}x_n + b_1, \\ x_2' = q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \ldots + q_{2n}x_n + b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \ldots + q_{nn}x_n + b_n, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

donde $b_i = -\sum_{k=1}^{n} q_{ik} a_k$. Las fórmulas (4) expresan las nuevas coordenadas del punto a través de sus coordenadas viejas.

De conformidad con lo expuesto, si las fórmulas (4) responden a una cierta transformación de coordenadas afines, entonces el determinante de la matriz $Q = (q_{ik})$ es desigual a cero. A la inversa, si están escritas de antemano fórmulas del tipo de (4) con cualesquiera números b_i y con cualquier matriz $Q = (q_{ik})$ cuyo determinante es desigual a cero, entonces dichas fórmulas responden a una cierta transformación de coordenadas afines. En rigor, si Det $Q \neq 0$, entonces de las ecuaciones $\sum_{k=1}^{n} q_{ik} a_k = -b_i$ se hallarán a_k, es decir, se determinará el origen del nuevo sistema; además, al invertir la matriz Q, hallaremos P^*, luego P, después de lo cual a base de las fórmulas (1) hallaremos la nueva base.

§ 181. Para mayor determinación, en lo sucesivo vamos a considerar $n = 4$. En el espacio cuadridimensional afín se determinan de forma natural *las rectas, los planos y los hiperplanos.*

Sean A un punto dado, a, un vector dado ($a \neq \theta$); llamaremos *recta* que pasa por el punto A en la dirección del vector a, a un conjunto de puntos M definidos por la ecuación

$$AM = \lambda a \tag{1}$$

para todos los valores numéricos posibles del parámetro λ; el propio punto A corresponde al valor $\lambda = 0$.

Es fácil comprender que todos los puntos de la recta son equitativos en el sentido de que a cada uno de ellos se puede atribuirle el papel del punto A. Efectivamente, si B es cualquier punto de la recta sujeta al examen, que responde al valor del parámetro $\lambda = \lambda_1$, entonces

$$BM = AM - AB = (\lambda - \lambda_1)a = \mu a, \tag{2}$$

donde $\mu = \lambda - \lambda_1$. De tal modo, el conjunto de puntos M definidos por la ecuación (1) con el parámetro λ puede definirse también por la (2) con el parámetro μ; en virtud de la ecuación (2), el punto B corresponde al valor de $\mu = 0$.

Ahora, sean dados un punto A y dos vectores linealmente independientes a y b; llamaremos *plano* que pasa por A en la dirección de los vectores a, b, a un conjunto de puntos M definidos por la ecuación

$$AM = \lambda a + \mu b \tag{3}$$

para todos los valores numéricos posibles de los parámetros λ y μ.

Al fin, si están dados un punto A y tres vectores linealmente independientes a, b, c, entonces al conjunto de puntos M definidos por la ecuación

$$AM = \lambda a + \mu b + \nu c \tag{4}$$

para todo género de valores numéricos de los tres parámetros λ, μ, ν, lo llamaremos *hiperplano* que pasa por el punto A en la dirección de los vectores a, b, c.

Al igual que en el caso de la recta, es fácil comprender que todos los puntos del plano y del hiperplano son equitativos en el sentido de que a cada uno de ellos puede atribuirse el papel del punto A.

Es importante notar que el hiperplano puede considerarse como un espacio afín de tres dimensiones. En efecto, el conjunto L' de todas las combinaciones lineales de los vectores a, b, c constituye un espacio lineal tridimensional (véase el § 178); al mismo tiempo, si M_1 y M_2 son dos puntos de un hiperplano, definidos por la ecuación (4) para $\lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1, \nu = \nu_1$ y para $\lambda = \lambda_2, \mu = \mu_2, \nu = \nu_2$, entonces al par ordenado de puntos M_1 y M_2 le corresponde el vector

$$M_1M_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)a + (\mu_2 - \mu_1)b + (\nu_2 - \nu_1)c$$

de L'. Esta correspondencia satisface los requisitos de los dos axiomas del § 179; consiguientemente, según la definición del § 179, el hiperplano es un espacio afín y además es tridimensional, pues lo es el espacio lineal L'. Los parámetros λ, μ, ν de la ecuación (4) no son sino las coordenadas del punto M en el sistema afín de coordenadas que se define dentro del hiperplano, dándose el punto A como origen de las coordenadas y la terna de vectores a, b, c como base. Por supuesto, el mismo hiperplano puede definirse por la ecuación del tipo de (4), al tomarse en vez del punto A otro punto cualquiera del referido hiperplano, y en lugar de los vectores a, b, c, tres vectores cualesquiera de L', que sean linealmente independientes; tal modificación de la ecuación (4) corresponde al paso a otro sistema afín de coordenadas dentro del hiperplano dado.

De forma análoga a lo precedente se puede mostrar que todo plano es un espacio afín de dos dimensiones; toda recta es un espacio afín de una dimensión.

§ 182. De la definición de las rectas, los planos y los hiperplanos se deducen directamente la proposiciones siguientes:

1) Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A y B, existe una recta, y sólo una, que pasa por los puntos A y B (es decir, contiene dichos puntos); a saber, será una recta que pasa por A en la dirección del vector $a = AB$.

2) Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C no pertenecientes a una misma recta, existe un plano, y sólo uno, que pasa por los puntos A, B, C (precisamente, el plano que pasa por A en las direcciones de los vectores AB, AC).

3) Cualesquiera que sean cuatro puntos A, B, C, D no pertenecientes a un mismo plano, existe un hiperplano, y sólo uno, que pasa por puntos A, B, C, D (precisamente, el hiperplano que pasa por A en las direcciones de los vectores AB, AC, AD).

4) Si dos puntos diferentes A, B pertenecen a un plano α, entonces todos los puntos de la recta AB pertenecen al plano α. Para demostrarlo, baste definir el plano por la ecuación

$$AM = \lambda a + \mu b,$$

al adoptar $a = AB$; entonces todos los puntos de la recta AB se definen por la misma ecuación, si λ es variable y si $\mu = 0$.

5) Si dos planos diferentes α, β tienen dos puntos comunes A, B que no coinciden uno con otro, entonces todos los puntos comunes de los planos α, β se hallan sobre la recta AB. En efecto, si entre los puntos comunes de los planos α, β hubiese uno que no se hallase sobre la recta AB, entonces los planos α, β deberían coincidir en contradicción a la hipótesis.

6) Si tres puntos A, B, C que no se hallan sobre una misma recta, pertenecen a un hiperplano α, entonces todo el plano ABC pertenece a α (se demuestra análogamente a la cuarta proposición).

7) Si dos hiperplanos diferentes α, β tienen un punto común, entonces se intersecan según un plano.

DEMOSTRACIÓN. Sean e_1, e_2, e_3 vectores linealmente independientes en el hiperplano α. Como los hiperplanos α y β son diferentes, en el hiperplano β existirá un vector e_4 tal que e_1, e_2, e_3, e_4 sean linealmente independientes; además, en el hiperplano β existirán dos vectores e_5, e_6 más que componen una terna independiente junto con e_4. Por ser cuadridimensional todo el espacio, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 están sujetos a una dependencia lineal:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = 0;$$

aquí $\lambda_5 \neq 0$. Análogamente, existe la dependencia

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \mu_6 e_6 = 0,$$

donde $\mu_6 \neq 0$. Adoptemos:

$$a = \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = -\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \lambda_3 e_3,$$
$$b = \mu_4 e_4 + \mu_6 e_6 = -\mu_1 e_1 - \mu_2 e_2 - \mu_3 e_3.$$

Los vectores a y b pertenecen al hiperplano α y al hiperplano β; de otra parte, estos vectores son linealmente independientes (ya que $\lambda_5 \neq 0$, $\mu_6 \neq 0$). Por eso, si A es un punto común de α y β, entonces la ecuación

$$AM = \lambda a + \mu b$$

define un plano perteneciente a α y a β. El referido plano abarca todos los puntos comunes de los hiperplanos α, β, pues en el caso contrario α y β deberían coincidir (según la tercera proposición).

8) Si el plano α tiene un punto común con el hiperplano β, entonces α se halla completamente en β, o α y β se intersecan según una recta (se demuestra análogamente a lo anterior).

§ 183. Sea definida una recta arbitraria por la ecuación $AM = \lambda a$; sean M_1, M_2, M_3 tres puntos diferentes de dicha recta, sean λ_1, λ_2, λ_3 los valores del parámetro λ correspondientes a ellos. Diremos que el punto M_2 se halla entre M_1 y M_3 si $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ o $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$. Si en lugar del vector a tomamos el vector $b = \sigma a (\sigma \neq 0)$, entonces la misma recta se definirá por la ecuación $AM = \mu b$, donde $\mu = \frac{\lambda}{\sigma}$. De acuerdo a la nueva ecuación, a los puntos M_1, M_2, M_3 les corresponden los valores del nuevo parámetro: $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{\sigma}$, $\mu_2 = \frac{\lambda_2}{\sigma}$, $\mu_3 = \frac{\lambda_3}{\sigma}$. Queda claro que si el número λ_2 está entre los números λ_1 y λ_3, μ_2 también está entre μ_1 y μ_3. De tal manera, la definición enunciada no depende de la elección del vector director de la recta; es fácil mostrar que ella tampoco depende de la elección del punto A.

Una vez definido el concepto "entre", se definen del modo ordinario el segmento, el triángulo, etc. Dentro de todo plano, para cualquier triángulo es válida la afirmación de Pasch; es válida la afirmación de que toda recta perteneciente a un plano dado, divide el referido plano en dos dominios, etc.

§ 184. En el espacio afín se define naturalmente *el paralelismo* de dos rectas, de una recta y de un plano, etc. Dos rectas definidas por las ecuaciones

$$A_1M = \lambda a_1, \qquad A_2M = \lambda a_2,$$

se llaman paralelas si no coinciden, y si los vectores directores son proporcionales (es decir, si a_2 es igual al producto de a_1 por un número). La recta

$$A_1M = \lambda a_1$$

se llama paralela al plano

$$A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2$$

si no se halla en este plano, y si el vector a_1 puede descomponerse respecto a los vectores a_2, b_2. La recta

$$A_1M = \lambda a_1$$

se llama paralela al hiperplano

$$A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2$$

si no pertenece a dicho hiperplano, y si el vector a_1 puede descomponerse respecto a los vectores a_2, b_2, c_2. Dos planos

$$A_1M = \lambda a_1 + \mu b_1, \qquad A_2M = \mu a_2 + \lambda b_2$$

se llaman paralelos si no coinciden, y si los vectores a_1, b_1 pueden descomponerse respecto a los vectores a_2, b_2. El plano

$$A_1M = \lambda a_1 + \mu b_1$$

se llama paralelo al hiperplano

$$A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2$$

si no se halla en el referido hiperplano, y si los vectores a_1, b_1 pueden descomponerse respecto a los vectores a_2, b_2, c_2. Al fin, dos hiperplanos

$$A_1M = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1, \quad A_2M = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2$$

se llaman paralelos si no coinciden uno con otro, y si los vectores a_1, b_1, c_1 pueden descomponerse respecto a los vectores a_2, b_2, c_2. Son válidas las afirmaciones siguientes:

1) dos rectas son paralelas si, y sólo si, se hallan en un mismo plano y no se intersecan; a través de todo punto que no se halle sobre una recta, pasa una recta, y sólo una, paralela a la dada;

2) una recta y un plano son paralelos si, y sólo si, se hallan en un mismo hiperplano y no se intersecan;

3) una recta es paralela a un hiperplano si, y sólo si, no lo cruza;

4) un plano es paralelo a un hiperplano si, y sólo si, no lo corta;

5) dos hiperplanos son paralelos si, y sólo si, no se cortan.

En virtud de las proposiciones expuestas más arriba, se ve que por lo menos la geometría del espacio afín tridimensional que se desarrolla en la presente sección, no difiere de la geometría del espacio afín tridimensional en el sentido del § 164 (véase la nota al final del § 164).

§ 185. Las afirmaciones del párrafo precedente, al igual que las del § 183, son fáciles de demostrar algebraicamente (análogamente a como se hace en la geometría analítica ordinaria) si se emplean ecuaciones de imágenes geométricas en coordenadas afines.

Sea dado un sistema afín de coordenadas. Entonces toda ecuación de primer grado

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5 = 0 \tag{1}$$

define un hiperplano. Efectivamente, si $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ es alguna solución de la ecuación (1), entonces la referida ecuación puede apuntarse en forma de

$$A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) + A_3(x_3 - x_3^0) + A_4(x_4 - x_4^0) = 0. \tag{2}$$

Suponiendo $x_i - x_i^0 = u_i$, obtendremos:

$$A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3 + A_4u_4 = 0. \tag{3}$$

La ecuación (3) tiene tres soluciones linealmente independientes:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4),$$

presentándose cada solución de la ecuación (3) en forma de una combinación lineal de estas tres soluciones:

$$x_i - x_i^0 = u_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i \tag{4}$$
$$(i = 1, 2, 3, 4);$$

dando todos los valores numéricos posibles a los parámetros λ, μ, ν, obtendremos todas las soluciones u_i de la ecuación (3) y, al mismo tiempo, todas las soluciones x_i de la ecuación (1). Si denotamos con M un punto que tiene las coordenadas x_i, con A, un punto que posee las coordenadas x_i^0, con a, b, c, los vectores que tienen las coordenadas a_i, b_i, c_i, entonces las igualdades numéricas (4) equivaldrán a la igualdad vectorial

$$AM = \lambda a + \mu b + \nu c. \tag{5}$$

Con esto mismo queda demostrado que el conjunto M de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1), coincide con el hiperplano definido por la ecuación (5).

A la inversa, todo hiperplano se define por la ecuación de primer grado del tipo de (1). En rigor, si un hiperplano viene dado por una ecuación del tipo de (5), entonces, al pasar a las ecuaciones (4) equivalentes a ella y al excluir los parámetros λ, μ, ν, obtendremos una ecuación del tipo de (2), la cual se reduce de un modo evidente a una ecuación del tipo de (1).

De las afirmaciones recién demostradas y de las proposiciones 7), 8) del § 182 se infiere que 1) dos ecuaciones de primer grado que sean compatibles e independientes, definen un plano; 2) tres ecuaciones de primer grado que sean compatibles e independientes definen una recta.

§ 186. En el espacio afín se puede examinar hipersuperficies de segundo orden, es decir, las hipersuperficies que se definen en coordenadas afines por una ecuación de segundo orden. No vamos a exponer la clasificación de las hipersuperficies de segundo orden; en términos generales, es análoga a la clasificación afín bien conocida de las superficies de segundo orden en el espacio de tres dimensiones. Detengámonos sólo en un caso particular que tendrá importancia en lo sucesivo.

Sean (x_1, x_2, x_3, x_4) las coordenadas de un punto variable $M(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$, las de un punto constante A. Consideremos la ecuación

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0) = 0 \tag{1}$$

cuyo primer miembro es la forma cuadrática de los argumentos $x_1 - x_1^0, \dots,$ $x_4 - x_4^0$ con los coeficientes g_{ik}; designaremos esta forma con Φ. Si adoptamos $x_i = x_i^0$, entonces la ecuación (1) quedará satisfecha. Esto quiere decir que el punto A pertenece a la hipersuperficie definida por la ecuación (1). Sea M otro punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1). Movamos el punto M según la recta que parte del punto A. Entonces las diferencias $x_i - x_i^0$ irán variando proporcionalmente, permaneciendo igual a cero el primer miembro de la ecuación (1). Por consiguiente, si cierto punto M se halla sobre la hipersuperficie (1), entonces todos los puntos de la recta AM estarán sobre dicha hipersuperficie. De tal manera, la hipersuperficie (1) consta de las rectas que pasan por el punto A, y por eso se llama cono de segundo orden con el vértice A. Desde luego, puede suceder que ningún punto, salvo A, satisfaga con sus coordenadas la ecuación (1); así será siempre que Φ sea una forma de signo definido. En este caso el cono se llama *imaginario*. Si Φ es una forma de signo variable y regular (es decir, una forma de signo variable, cuyo determinante difiere de cero: Det $g_{ik} \neq 0$), entonces el cono 1) posee un conjunto infinito de rectas que lo conforman; 2) es cuadridimensional, es decir, no se halla por entero en algún hiperplano; 3) divide el espacio en dos dominios, en uno de los cuales $\Phi > 0$, en el otro $\Phi < 0$. Un cono así se llama cono real y regular de segundo orden. No vamos a demostrar que el cono real regular posee las propiedades enumeradas, sino explicaremos la esencia del fenómeno mediante un ejemplo. Consideremos la ecuación

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 - (x_4 - x_4^0)^2 = 0. \qquad (2)$$

cuyo primer miembro es una forma cuadrática respecto a $x_i - x_i^0$ con los coeficientes $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = -1$, $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$. Esta forma es regular, pues Det $g_{ik} = -1 \neq 0$, y de signo variable (es positiva si $x_1 \neq x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, $x_4 = x_4^0$, es negativa si $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, $x_4 \neq x_4^0$). Consiguientemente, la ecuación (2) define un cono real regular de segundo orden. Para que se tenga una idea clara y evidente de las propiedades del cono definido por la ecuación (2), es útil notar que todo hiperplano $x_4 - x_4^0 = C$ corta dicho cono según una esfera de tres dimensiones

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 = C^2$$

de manera análoga a como un plano perpendicular al eje de un cono circular ordinario, corta el referido cono según una circunferencia. El conjunto de puntos para los cuales el primer miembro de la ecuación (2) es negativo, se llama *región interior del cono* (2). El interior se divide en *dos huecos*, en uno de los cuales $x_4 > x_4^0$, en el otro $x_4 < x_4^0$.

§ **187**. Ahora nos ocuparemos de una proposición que tendrá un papel particularmente importante en lo sucesivo.

Sean dados cierto sistema afín de coordenadas y cuatro funciones:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_3' &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_4' &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

cada una de las cuales está definida en todo el espacio; con esto mismo viene dada la aplicación del espacio en sí mismo, pues a todo punto $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ le corresponde un punto $M'(x_1', x_2', x_3', x_4')$. *Admitamos que la aplicación* (1) *sea una aplicación biunívoca del espacio sobre sí mismo* (a cualquier punto M' le corresponde una preimagen M, y sólo una); *además, sea colineal, es decir, a tres puntos cualesquiera M_1, M_2, M_3 situados sobre una misma recta, les correspondan las imágenes M_1', M_2', M_3' también ubicadas sobre una misma recta. Para estas condiciones las funciones f_1, f_2, f_3, f_4 son lineales, es decir, tienen forma de*

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3 + q_{14}x_4 + b_1, \\ x_2' &= q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{23}x_3 + q_{24}x_4 + b_2, \\ x_3' &= q_{31}x_1 + q_{32}x_2 + q_{33}x_3 + q_{34}x_4 + b_3, \\ x_4' &= q_{41}x_1 + q_{42}x_2 + q_{43}x_3 + q_{44}x_4 + b_4, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

siendo diferente de cero el determinante de la matriz $Q = (q_{ik})$.

En breve: *si una aplicación es colineal, será también lineal.*

Expondremos las principales etapas de la demostración de este teorema, omitiendo algunos detalles de los razonamientos.

1) Consideremos alguna aplicación colineal biunívoca del espacio afín sobre sí mismo. Sean A, B, C tres puntos del espacio que no están sobre una misma recta, α, un plano definido por los puntos A, B, C. Supongamos que las imágenes A', B', C' de estos puntos tampoco se hallen sobre una misma recta, denotando con α' el plano que pasa por A', B', C'. Entonces, las imágenes de todos los puntos del plano α están situadas en el plano α'. En rigor, sea M cualquier punto de α; en el plano α, tracemos a través de M, dos rectas distintas a y b de modo que a interseque las rectas AC y BC en dos puntos diferentes P y Q, y que la recta b cruce las rectas AC y BC en dos puntos diferentes P y Q, y que la recta b cruce las rectas AC y BC en dos puntos diferentes R, S. De la definición de la aplicación sujeta al examen (y del punto 4 del § 182) se deduce que los puntos P', Q', R', S' correspondientes a los puntos P, Q, R, S según la aplicación, se hallan en el plano α'. Pero la imagen M' del punto M se define por la intersección de las rectas $P'Q'$ y $R'S'$; consiguientemente, el punto M' también está en el plano α'.

2) Según la definición de la aplicación colineal, las imágenes de puntos de una recta arbitraria a se hallan sobre una determinada recta a'; diremos que la recta a' corresponde a la recta a a consecuencia de la aplicación. Si en el plano α, sobre el cual se trató en el punto precedente, ciertas dos rectas a, b son paralelas, entonces las rectas a', b' correspondientes a ellas en el plano α', son paralelas también (esto se infiere del carácter biunívoco de la aplicación que estamos considerando). Por ende, podemos completar los planos α y α' con puntos infinitamente alejados (de forma análoga a como lo hicimos en los §§ 80, 81) y atribuirles la aplicación dada, considerando que un punto infinitamente alejado de la recta a sobre el plano α, tiene por su imagen un punto infinitamente alejado de la recta a' sobre el plano α'. Así pues, a todo punto del plano α le corresponde un punto del plano α'; a los puntos ubicados sobre una misma recta en el plano α, les corresponden los puntos que también se hallan sobre una misma recta del plano α'; a una recta infinitamente alejada del plano α le corresponde una recta infinitamente alejada del plano α'; al fin, sobre el plano α hay tres puntos A, B, C que no se localizan sobre una misma recta, y cuyas imágenes A', B', C' en el plano α' tampoco se localizan sobre una misma recta. Conforme al § 106, tal aplicación es una aplicación proyectiva del plano completado α sobre el plano completado α'.

3) Ahora, con la aplicación que estamos considerando, permanezcan fijos, es decir, coincidan con sus imágenes los puntos A, B, C. En tal caso, el plano α permanece fijo, aplicándose proyectivamente sobre sí mismo. Hagamos notar que junto con los puntos A, B, C siguen inmóviles los puntos infinitamente alejados de las rectas CA y CB. Designemos con a la recta que pasa por el punto A y por un punto infinitamente alejado de la recta CB, denotando con b la recta que pasa por B y por un punto infinitamente alejado de la recta CA. Las rectas a y b siguen fijas; por consiguiente, permanece fijo el punto P en el cual ellas se intersecan. De tal modo, siguen fijos cuatro puntos A, B, C, P del plano α, sin que haya entre ellos tres puntos que estén sobre una misma recta. De aquí y del teorema 26 del § 106 se desprende que todos los puntos del plano α permanecen fijos.

4) En un espacio, sean dados cuatro puntos A, B, C, D que no estén ubicados en un mismo plano, permaneciendo fijos en el caso de la aplicación dada. Ahora, de-

signemos con α un hiperplano definido por los puntos A, B, C, D, y demostremos que todos los puntos suyos permanecen fijos. Consideremos un punto arbitrario M del hiperplano α. Denotemos con K el punto de intersección de la recta DM con el plano ABC; del punto antecedente se infiere que el punto K permanece fijo. Del modo análogo permanece fijo el punto de intersección de la recta CM con el plano ABD. De aquí se desprende que el propio punto M también está fijo.

5) Sean A, B, C, D, E cinco puntos de un espacio, no pertenecientes a un mismo hiperplano; si estos puntos están fijos, entonces todos los puntos del espacio lo están también. Esta afirmación se deduce de la del punto 4) del mismo modo que la última fue deducida de la afimación del punto 3).

6) Ahora, consideremos la aplicación colineal dada en el enunciado del teorema; designémosla simbólicamente: $M' = f(M)$. Sean O, e_1, e_2, e_3, e_4 el origen y la base del sistema dado de coordenadas afines; sean A_1, A_2, A_3, A_4 los extremos de los vectores básicos aplicados al punto O. De la definición de la base se infiere que cinco puntos O, A_1, A_2, A_3, A_4 no están en un mismo hiperplano; en tal caso sus preimágenes O^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^* tampoco lo están. Por eso existe un sistema de coordenadas afines con el origen O^* y la base integrada por los vectores $a_i^* = O^*A_i^*$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Convengamos en llamar nuevo a este sistema y viejo, al inicialmente dado. Sea M un punto arbitrario del espacio, x_i^*, sus coordenadas respecto al nuevo sistema, M', la imagen del punto M en virtud de la aplicación dada, x_i', las coordenadas de M' en el sistema viejo. Definamos una aplicación más, $M'' = \varphi(M)$, haciéndolo del modo siguiente: en el sistema viejo, el punto M'' tiene justamente las mismas coordenadas x_i^* que las que tiene M respecto al nuevo sistema. Es evidente que la aplicación $M'' = \varphi(M)$ es biunívoca, siendo colineales ella misma y su aplicación inversa $M = \psi(M'')$ (en efecto, si, por ejemplo, M se mueve según una recta definida por tres ecuaciones cualesquiera de primer grado en el nuevo sistema, entonces la trayectoria de M'' se define por las ecuaciones absolutamente iguales en el sistema viejo y, por consiguiente, también es recta). Hagamos constar que la aplicación $M = \psi(M'')$ hace pasar los puntos O, A_i a puntos O^*, A_i^*. Ahora, construyamos la aplicación $M' = f(\psi(M''))$; dicho en otros términos, apliquemos primero el punto M'' en punto $M = \psi(M'')$, luego el punto M en punto $M' = f(M)$. La aplicación $M' = f(\psi(M''))$ es biunívoca y colineal (ya que los componentes de su aplicación poseen estas propiedades); además, la aplicación $M' = f(\psi(M''))$ deja fijos los puntos O, A_i (puesto que los referidos puntos primero pasan a puntos O^*, A_i^*, luego vuelven a sus lugares). De aquí y del punto 5) se deduce que a consecuencia de la aplicación $M' = f(\psi(M''))$ todos los puntos permanecen fijos, es decir, todo punto M' coincide con su preimagen M''. Por lo tanto, en el sistema viejo el punto $M' = f(M)$ tiene justamente la mismas coordenadas que las que tiene M en el nuevo sistema: $x_i' = x_i^*$. Mas, según el § 180, las nuevas coordenadas x_i^* de un punto arbitrario se expresan linealmente mediante sus coordenadas viejas x_i. De tal manera, x_i' son funciones lineales de las magnitudes x_i, es decir, tienen la forma (2). La desigualdad a cero del determinante de la matriz Q se debe a la invertibilidad unívoca de las fórmulas (2), la cual viene asegurada por el enunciado del teorema.

§ 188. La aplicación biunívoca y colineal del espacio afín sobre sí mismo se llama *transformación afín* del referido espacio. Conforme al teorema demostrado, *toda transformación afín se representa en coordenadas afines por fórmulas lineales del tipo* (2) *con el determinante de la matriz Q desigual a cero*. Para toda transformación afín existe una transformación inversa, la cual también es afín; esto se infiere del teorema demostrado (dado que la transformación colineal se representa por fórmulas lineales, la transformación inversa a ella también se representa por fórmulas lineales y, por lo tanto, es de forma colineal). Luego, es evidente que el producto de dos transformaciones afines es una transformación afín. De tal modo, todas las transformaciones afines de un espacio afín dado integran un grupo; lo llaman *grupo afín* del referido espacio. La teoría de los invariantes del grupo afín de un espacio afín n-dimensional se llama *geometría afín* n-dimensional. Los conceptos de recta, plano, hiperplano, paralelismo, etc. deducidos más arriba, son invariantes respecto al grupo afín; correspondientemente a ello, son objetos de la geometría afín.

2. Espacios de Euclides y espacio de Minkowski

§ **189**. Sea dado un espacio afín (real) n-dimensional $\mathfrak{A}$. Supongamos que a cada par de vectores x, y de este espacio le corresponda cierto número real que se designa en lo sucesivo con xy, observándose los requisitos de los tres axiomas siguientes:

1. $xy = yx$.

2. $x(\lambda y + \mu z) = \lambda(xy) + \mu(xz)$, donde λ, μ son cualesquiera números reales.

De estos axiomas se infiere, en particular, que para un vector nulo θ y para cualquier vector x tendremos $\theta x = 0$ (como $\theta = 0 \cdot x$, entonces $\theta x = x\theta = x(0 \times \times x) = 0\,(xx) = 0$).

3. Si $xy = 0$ para algún x y para cualquier y, entonces $x = \theta$.

El número xy se llama *producto escalar* de los vectores x e y. *El espacio n-dimensional afín con un producto escalar prefijado de sus vectores se llama espacio n-dimensional euclidiano* (mediante nuestra definición introdujimos el espacio euclidiano real, pues suponíamos que $\mathfrak{A}$ era un espacio afín real, y (x, y), números reales).

§ **190**. Al considerar algún espacio n-dimensional euclidiano, tomemos sobre él un sistema afín arbitrario de coordenadas; sea O el origen del referido sistema, $e_1, \ldots, e_n$, la base. Denotemos con g_{ik} el producto escalar de un par arbitrario de vectores básicos e_i, e_k:

$$e_i e_k = g_{ik}; \tag{1}$$

según el axioma 1, debe ser $g_{ik} = g_{ki}$. Ahora, sean x e y cualesquiera vectores,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k, \tag{2}$$

sus descomposiciones respecto a la base dada. Multipliquemos escalarmente los primeros y segundos miembros de las igualdades (2); al multiplicar término a término los segundos miembros (a base del axioma 2) y al servirnos de la tabla de multiplicar (1) de los vectores básicos, obtendremos:

$$xy = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} x_i y_k; \tag{3}$$

el segundo miembro de esta igualdad constituye la forma bilineal de las coordenadas de los vectores x, y con los coeficientes g_{ik}.

Designemos con g el determinante de la matriz (g_{ik}); *del axioma 3 se deduce que* $g \neq 0$ (es decir, la matriz (g_{ik}) es regular).

Efectivamente, si $g = 0$, entonces se puede escoger el vector $x \neq 0$ de modo que para todas las coordenadas suyas x_i, todas las sumas $\sum_{i=1}^{n} g_{ik} x_i$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ serán iguales a cero; pero entonces $xy = 0$ para cualquier y, lo cual queda excluido por el axioma 3.

Así pues, *en el espacio euclidiano n-dimensional el producto escalar xy se expresa por la forma bilineal de las coordenadas de los vectores x, y, cuyos coeficientes integran una matriz simétrica y regular.*

Ahora, sea dado un espacio n-dimensional afín; queremos introducir en él un producto escalar, es decir, hacer euclidiano este espacio. Con tal objeto, elijamos en el espacio dado un sistema afín de coordenadas, asignemos los números g_{ik}, observando la condición $g_{ik} = g_{ki}$, y comparemos el número xy con un par arbitrario de vectores x, y según la fórmula (3). En este caso, se observarán los axiomas 1 y 2, dado que la matriz escogida g_{ik} es simétrica, y el segundo miembro de la igualdad (3) es lineal respecto a los argumentos x_i y respecto a los y_i. Para observar el axioma 3, es menester elegir los números g_{ik} de modo que el determinante g de la matriz (g_{ik}) sea desigual a cero. Nos cercioramos fácilmente de que esta condición asimismo es suficiente. En rigor, supongamos que $g \neq 0$; si $xy = 0$ para cualquier y, entonces de (3) se infiere la igualdad $\sum_{i=1}^{n} g_{ik} x_i = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, y como $g \neq 0$, de estas igualdades obtendremos $x_i = 0$ ó $x = \theta$.

Así pues, si en el espacio afín n-dimensional determinamos el número xy mediante la fórmula (3) tomando en el segundo miembro cualquier forma bilineal con la matriz simétrica y regular, entonces xy satisfará los tres axiomas del producto escalar.

NOTA. Como acabamos de mostrar, el axioma 3 equivale a la regularidad de la matriz (g_{ik}). Por eso el axioma 3 se llama *condición de regularidad.*

§ **191.** En el espacio euclidiano se examinan los importantes conceptos que siguen:

1. *Ortogonalidad de vectores, de rectas, etc.* Los vectores x e y se llaman *ortogonales* o *perpendiculares* uno a otro, si $xy = 0$. Dos rectas se llaman ortogonales si lo son sus vectores directores; una recta y un plano son ortogonales si el vector director de aquélla es ortogonal a todo vector director del plano; de forma análoga se define la ortogonalidad de una recta y de un hiperplano.

2. *Norma de vector.* La norma del vector x se denota con el símbolo $\|x\|$ y se define mediante la igualdad

$$\|x\| = \sqrt{x^2}, \tag{1}$$

donde $x^2 = xx$. Para mayor determinación, supondremos el signo más ante la raíz. No obstante, hay que tener en cuenta que la definición general del producto escalar aducida más arriba, no excluye el caso de $x^2 < 0$; en este caso el vector tiene norma imaginaria. Tampoco se excluye la posibilidad de $\|x\| = 0$ para $x \neq 0$.

El vector x se llama *unitario* si $x^2 = 1$, *imaginario unitario* si $x^2 = -1$, *isótropo* si $x^2 = 0$ para $x \neq \theta$.

De la fórmula (3) del § 190 y la (1) del § 191 se deduce la expresión de la norma de vector en coordenadas:

$$\|x\|^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} x_i x_k. \tag{2}$$

Aquí a la derecha tenemos una forma cuadrática cuyos argumentos son las coordenadas del vector x; la llaman *forma métrica del espacio euclidiano*. Como Det $g_{ik} \neq \neq 0$, la forma métrica es regular.

3. *Distancia entre dos puntos*. La distancia entre dos puntos A y B se supone igual a la norma del vector AB:

$$\rho(A, B) = \|AB\|.$$

Designemos con mayúsculas las coordenadas de puntos (para no confundirlas con las de vectores). Tengan los puntos A y B coordenadas $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ y $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$. Entonces las coordenadas del vector AB serán $x_1 = X_1^* - X_1$, $x_2 = X_2^* - X_2$, etc.; de aquí y de la fórmula (2) obtenemos:

$$\rho^2(A, B) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(X_i^* - X_i)(X_k^* - X_k). \tag{3}$$

La definición general del espacio euclidiano no excluye el hecho de que la distancia entre ciertos puntos pueda ser imaginaria o igual a cero. Sean A un punto fijo con las coordenadas X_i^0, M, un punto variable cuyas coordenadas las denotaremos con X_i. Hallemos todos los puntos M que se encuentren a distancia nula de A; para las coordenadas de los referidos puntos resulta la ecuación

$$\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(X_i - X_i^0)(X_k - X_k^0) = 0. \tag{4}$$

Si la forma métrica es de signo definido, entonces la ecuación (4) se satisface sólo en el caso de $X_i = X_i^0$; aquí $\rho(A, M) = 0$ sólo cuando M coincide con A. Si la métrica es de signo variable, entonces la ecuación (4) define un cono regular real de segundo orden con el vértice A, llamado *cono isótropo* en el punto A (el cono isótropo es regular, pues lo es la forma métrica; véase el § 186). Las rectas que conforman el cono isótropo, se llaman *rectas isótropas*. Toda recta isótropa se caracteriza con que para cualquier par de sus puntos la distancia es igual a cero.

§ 192. En el espacio afín toda recta, todo plano o hiperplano a su vez es un espacio afín de dimensión correspondiente (véase el § 181). Si el espacio afín está convertido en espacio euclidiano, es decir, para cualquier par de sus vectores está determinado un producto escalar, entonces con esto mismo queda determinado el producto escalar para cualquier par de vectores de una recta, de un plano o un hiperplano dados. Por eso toda recta dada, todo plano o hiperplano dados se tornan espacio euclidiano de dimensión correspondiente, si dentro de dicha recta, dicho plano o hiperplano se observa la condición de regularidad, pero ésta puede faltar. A saber, según la condición de regularidad, si $xy = 0$ para un determinado x y para *cualquer* y, entonces $x = \theta$; pero puede suceder que sobre cierta recta, sobre cierto plano o hiperplano haya un vector $x \neq 0$ tal que $xy = 0$ para cualquier y *que esté sobre la referida recta, el referido plano o hiperplano*. Por ejemplo, el producto escalar de dos vectores cualesquiera situados sobre una recta isótropa, es igual a cero. Análogamente a las rectas, los planos e hiperplanos del espacio euclidiano, en cuyo interior no se observe la condición de regularidad, se llaman *isótropos*.

§ 193. Sean $e_1, \ldots, e_n$ la base de un sistema afín de coordenadas, en el cual la forma métrica del espacio tiene el aspecto (2) del § 191. Pasemos a una nueva base $e_1', \ldots, e_n'$ suponiendo

$$e_i' = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}e_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \operatorname{Det} p_{ik} \neq 0; \tag{1}$$

entonces las coordenadas viejas x_i de un vector arbitrario x se expresan mediante sus nuevas coordenadas x_i' por las fórmulas

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}x_i', \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

(Véase el § 180; no nos interesa la posición de los orígenes nuevo y viejo de coordenadas, puesto que tenemos coordenadas de vectores y no de puntos; las fórmulas de transformación de las coordenadas de vectores son homogéneas, es decir, los términos independientes de los segundos miembros de las referidas fórmulas son iguales a cero.) En la fórmula métrica (2) del § 191 en lugar de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pongamos sus expresiones mediante $x_1', x_2', \ldots, x_n'$; con esto mismo dejaremos reducida a nuevas coordenadas la forma métrica. Conforme a la teoría de las formas cuadráticas, los coeficientes p_{ik} de la transformación lineal (2) pueden escogerse (observando la condición de $\operatorname{Det} p_{ik} \neq 0$) de suerte que en las nuevas coordenadas la fórmula métrica tomará un aspecto canónico, es decir, poseerá sólo términos con los cuadrados de coordenadas, el número de dichos términos será igual a n (en vista de la regularidad de la forma), y los números $+1$ ó -1 les servirán de coeficientes. Dicho en otros términos, si denotamos con σ_{ik} los coeficientes de la forma transformada, obtendremos:

$$\sigma_{ii} = \pm 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\sigma_{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

En las coordenadas especiales halladas tenemos:

$$\|x\|^2 = x_1'^2 + \ldots + x_m'^2 - x_{m+1}'^2 - \ldots - x_n'^2;$$

aquí los primeros m coeficientes de σ_{ii} son positivos, lo cual puede lograrse con la numeración apropiada de las coordenadas. No se descartan los casos de ser positivos ($m = n$) o negativos ($m = 0$) cuantos coeficientes comprenda esta expresión. Tengamos en cuenta que $e_i'e_k' = \sigma_{ik}$; de aquí se infiere que

$$e_1'^2 = \ldots = e_m'^2 = +1, e_{m+1}'^2 = \ldots = e_n'^2 = -1, e_i'e_k' = 0, i \neq k,$$

es decir, los vectores básicos son unitarios o imaginarios unitarios, siendo ortogonales de dos en dos. La base de tal género se llama *ortonormal*. Hemos demostrado que en todo espacio euclidiano existe una base ortonormal.

La reducción de la forma cuadrática al aspecto canónico puede efectuarse por infinidad de procedimientos; esto quiere decir que *en el espacio euclidiano existe una infinidad de bases ortonormales diversas*. Según la ley de inercia que rige en la teoría de las formas cuadráticas, el número de términos negativos en la representación canónica de una forma métrica no está sujeto al procedimiento de reducir dicha forma al aspecto canónico. El referido número expresa propiedades geométricas de un espacio euclidiano dado y se llama su *índice*. Al mismo tiempo, el índice es el número de vectores imaginarios unitarios presentes en cualquier base ortonormal.

Si el índice es igual a cero, entonces la norma de un vector, el producto escalar de dos vectores, etc. se expresan por fórmulas completamente análogas a las bien conocidas de la geometría analítica ordinaria. En este caso las propiedades geométricas del espacio de hecho no difieren de las del espacio euclidiano tridimensional ordinario, pero, a decir más exactamente, pueden diferir sólo en dimensión. Correspondientemente, un espacio euclidiano de indice nulo se llama *propiamente euclidiano*; los demás espacios de Euclides se llaman *seudoeuclidianos*. Un espacio euclidiano que tenga el índice igual a uno se llama espacio *de Minkowski*; éste será el objeto de nuestra exposición ulterior.

§ **194**. Sea introducido en el espacio de Minkowski un sistema de coordenadas con algún origen O y con la base ortonormal $e_1, \dots, e_n$. Supongamos que los vectores básicos estén numerados de forma que $e_1^2 = \dots = e_{n-1}^2 = +1$, $e_n^2 = -1$. Entonces la norma de un vector x que tenga las coordenadas x_i se expresará por la fórmula

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2; \tag{1}$$

para el producto escalar de dos vectores x, y con las coordenadas x_i, y_i, obtendremos la expresión

$$xy = x_1y_1 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n; \tag{2}$$

para el cuadrado de la distancia entre dos puntos $A(X_i)$, $B(X_i^*)$ tendremos

$$\rho^2(A, B) = (X_1^* - X_1)^2 + \dots + (X_{n-1}^* - X_{n-1})^2 - (X_n^* - X_n)^2. \tag{3}$$

El cono isótropo con el vértice $A(X_1^0, \dots, X_n^0)$ en las coordenadas dadas se define por la ecuación

$$(X_1 - X_1^0)^2 + \dots + (X_{n-1} - X_{n-1}^0)^2 - (X_n - X_n^0)^2 = 0, \tag{4}$$

siendo real y regular. Los puntos en que el primer miembro de la ecuación (4) es negativo, constituyen la región interior del cono isótropo; la región interior se divide en dos huecos, en uno de los cuales $X_n > X_n^0$, en el otro $X_n < X_n^0$.

§ **195**. Para mayor evidencia, consideremos algunos objetos del espacio de Minkowski en los casos de $n = 2$ y $n = 3$.

1. Construyamos un modelo de geometría bidimensional de Minkowski sobre el plano euclidiano. Ante todo, convengamos en concebir del modo corriente los puntos, los vectores y las operaciones lineales con los vectores. Elijamos un sistema de coordenadas afines con el origen O y la base e_1, e_2; las coordenadas X_1, X_2 de un punto arbitrario M también tendrán el sentido corriente (por ejemplo, X_1 se representa mediante un segmento cortado por una recta que pasa por M paralelamente al segundo eje; por supuesto, el referido segmento debe medirse en la escala de e_1). Más aún, nada se opone a que los vectores e_1, e_2 tengan una misma longitud y sean perpendiculares uno a otro desde el punto de vista euclidiano. Entonces el sistema de coordenadas elegido será simplemente cartesiano rectangular. Sin embargo, introduciremos el producto escalar de dos vectores x, y con las coordenadas x_i, y_i ($i = 1, 2$) en el sentido de la geometría de Minkowski, suponiendo

$$xy = x_1y_1 - x_2y_2;$$

dicha forma al aspecto canónico. El referido número expresa propiedades geométricas de un espacio euclidiano dado y se llama su *índice*. Al mismo tiempo, el índice es el número de vectores imaginarios unitarios presentes en cualquier base ortonormal.

Si el índice es igual a cero, entonces la norma de un vector, el producto escalar de dos vectores, etc. se expresan por fórmulas completamente análogas a las bien conocidas de la geometría analítica ordinaria. En este caso las propiedades geométricas del espacio de hecho no difieren de las del espacio euclidiano tridimensional ordinario, pero, a decir más exactamente, pueden diferir sólo en dimensión. Correspondientemente, un espacio euclidiano de índice nulo se llama *propiamente euclidiano*; los demás espacios de Euclides se llaman *seudoeuclidianos*. Un espacio euclidiano que tenga el índice igual a uno se llama espacio *de Minkowski*; éste será el objeto de nuestra exposición ulterior.

§ **194.** Sea introducido en el espacio de Minkowski un sistema de coordenadas con algún origen O y con la base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$. Supongamos que los vectores básicos estén numerados de forma que $e_1^2 = \ldots = e_{n-1}^2 = +1, e_n^2 = -1$. Entonces la norma de un vector x que tenga las coordenadas x_i se expresará por la fórmula

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2; \tag{1}$$

para el producto escalar de dos vectores x, y con las coordenadas x_i, y_i, obtendremos la expresión

$$xy = x_1y_1 + \ldots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n; \tag{2}$$

para el cuadrado de la distancia entre dos puntos $A(X_i)$, $B(X_i^*)$ tendremos

$$\rho^2(A, B) = (X_1^* - X_1)^2 + \ldots + (X_{n-1}^* - X_{n-1})^2 - (X_n^* - X_n)^2. \tag{3}$$

El cono isótropo con el vértice $A(X_1^0, \ldots, X_n^0)$ en las coordenadas dadas se define por la ecuación

$$(X_1 - X_1^0)^2 + \ldots + (X_{n-1} - X_{n-1}^0)^2 - (X_n - X_n^0)^2 = 0, \tag{4}$$

siendo real y regular. Los puntos en que el primer miembro de la ecuación (4) es negativo, constituyen la región interior del cono isótropo; la región interior se divide en dos huecos, en uno de los cuales $X_n > X_n^0$, en el otro $X_n < X_n^0$.

§ **195.** Para mayor evidencia, consideremos algunos objetos del espacio de Minkowski en los casos de $n = 2$ y $n = 3$.

1. Construyamos un modelo de geometría bidimensional de Minkowski sobre el plano euclidiano. Ante todo, convengamos en concebir del modo corriente los puntos, los vectores y las operaciones lineales con los vectores. Elijamos un sistema de coordenadas afines con el origen O y la base e_1, e_2; las coordenadas X_1, X_2 de un punto arbitrario M también tendrán el sentido corriente (por ejemplo, X_1 se representa mediante un segmento cortado por una recta que pasa por M paralelamente al segundo eje; por supuesto, el referido segmento debe medirse en la escala de e_1). Más aún, nada se opone a que los vectores e_1, e_2 tengan una misma longitud y sean perpendiculares uno a otro desde el punto de vista euclidiano. Entonces el sistema de coordenadas elegido será simplemente cartesiano rectangular. Sin embargo, introduciremos el producto escalar de dos vectores x, y con las coordenadas x_i, y_i $(i = 1, 2)$ en el sentido de la geometría de Minkowski, suponiendo

$$xy = x_1y_1 - x_2y_2;$$

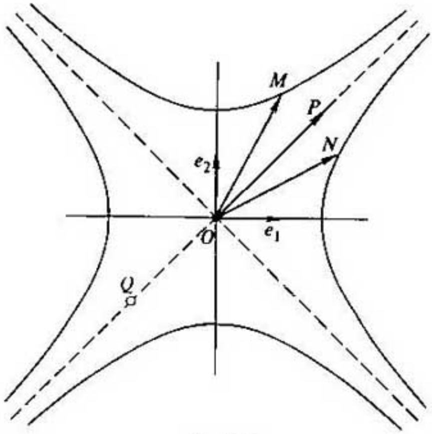


Fig. 158

correspondientemente, la norma del vector x se definirá por la ecuación

$$\|x\|^2 = x_1^2 - x_2^2.$$

El cono isótropo cuyo vértice lo ubicamos en el origen de coordenadas por razones de sencillez, se da por la ecuación

$$X_1^2 - X_2^2 = 0;$$

el cono isótropo consta de dos bisectrices coordenadas euclídeas (fig. 158). En cualquiera de estas dos bisectrices, el vector OP tiene norma igual a cero; cualesquiera puntos P, Q de la bisectriz coordenada se encuentran a una distancia nula uno respecto a otro. La región interior del cono isótropo se define por la desigualdad $X_1^2 - X_2^2 < 0$; lo componen los puntos situados dentro de los ángulos verticales, uno de los cuales está acotado por los rayos superiores de las bisectrices, el otro, por los inferiores. Todo punto M situado en el interior del cono isótropo, se encuentra a una distancia imaginaria respecto al origen de coordenadas. Sea $\rho(O, M) = ai$; entonces todos los puntos que se hallan a esta misma distancia del punto O, satisfacen la ecuación

$$X_1^2 - X_2^2 = -a^2.$$

En el sentido de la geometría de Minkowski, estos puntos integran una circunferencia de un radio imaginario ai; en el sentido euclidiano ellos se hallan sobre una hipérbola ordinaria (pues esta última ecuación define una hipérbola con los vértices ubicados en el segundo eje de coordenadas). Todo punto N que está en la región exterior del cono isótropo, se halla a una distancia real con relación al punto O. Sea $\rho(O, N) = a$; entonces todos los puntos situados a la misma distancia de O, satisfacen la ecuación

$$X_1^2 - X_2^2 = a^2.$$

En el sentido euclidiano, esta ecuación define una hipérbola con los vértices localizados en el primer eje de coordenadas; en el sentido de la geometría de Minkowski, esta misma hipérbola es una circunferencia de un radio real a.

Los vectores OM y ON con las coordenadas (x_1, x_2), (y_1, y_2) son perpendiculares uno a otro en el sentido de Minkowski, si $x_1y_1 - x_2y_2 = 0$; en el sentido euclidiano esta igualdad expresa la simetría de las direcciones de OM y ON respecto a las bisectrices coordenadas. En particular, dos vectores que se hallan sobre una misma bisectriz coordenada, son perpendiculares uno a otro en el sentido de la geometría de Minkowski.

2. La construcción de un modelo de geometría tridimensional de Minkowski puede realizarse de forma análoga a la antecedente, realizada en el espacio euclidiano de tres dimensiones. Partamos de un sistema de coordenadas rectangulares oridinario con la base e_1, e_2, e_3; para dos vectores arbitrarios x, y con las coordenadas x_i, $y_i (i = 1, 2, 3)$, definamos el producto escalar en el sentido de Minkowski por la fórmula

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

Entonces la norma del vector x se definirá por la fórmula

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2,$$

el cono isótropo, por la ecuación

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0,$$

su región interior, por la desigualdad

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 < 0.$$

Desde el punto de vista de la geometría euclidiana, el cono isótropo es un cono ordinario de revolución alrededor del tercer eje de coordenadas; su región interior se compone de dos huecos del propio cono. Todo punto que está dentro del cono isótropo, se halla a una distancia imaginaria del origen de coordenadas. Si esta distancia es igual a ai, entonces todos los puntos situados a la misma distancia del punto O, conforman una esfera de un radio imaginario ai, en el sentido euclidiano ésta es un hiperboloide de dos hojas con la ecuación correspondiente

$$X_1^2 + X^2{}_2 - X_3^2 = -a^2.$$

El hiperboloide de dos hojas definido por la ecuación

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = a^2,$$

en la geometría de Minkowski representa una esfera de un radio real a.

Si en las fórmulas que expresan xy y $\|x\|^2$, suponemos iguales a cero las terceras coordenadas, entonces obtendremos fórmulas bidimensionales del álgebra vectorial ordinaria. Esto quiere decir que en el plano de coordenadas que pasa por los vectores e_1, e_2 tiene lugar la geometría propiamente euclidiana. En general, todo plano que pasa por el origen de coordenadas y no contiene generatriz alguna del cono isótropo, es un espacio propiamente euclidiano bidimensional (puesto que sobre él no hay rectas isótropas). Todo plano que pasa por el origen de coordenadas y corte el cono isótropo según dos generatrices, es un espacio bidimensional de Minkowski. El cono isótropo de la métrica de Minkowski *sobre este plano* y su región interior se define por la intersección del plano con el cono isótropo espacial. Si un plano que corta el cono isótropo espacial, se convierte en su plano tangente, entonces las rectas integrantes del cono isótropo del plano, se reducen a una sola, desapareciendo la región interior del referido cono. El cono isótropo de tal plano resulta degenerado. Por consiguiente, todo plano tangente a un cono isótropo del espacio tridimensional de Minkowski es un plano isótropo de dicho espacio.

Las propiedades del espacio cuadridimensional de Minkowski han de concebirse por la analogía natural con el modelo tridimensional considerado.

§ 196. A toda transformación afín del espacio de Minkowski, a consecuencia de la cual la distancia entre dos puntos cualesquiera sea igual a la distancia entre sus imágenes, la llamamos *movimiento* en el referido espacio. En el espacio de Minkowski (lo suponemos cuadridimensional), haya introducido un sistema afín de coordenadas con el origen O y la base ortonormal e_1, e_2, e_3, e_4 ($e_4^2 = -1$). Entonces, toda transformación afín que haga pasar el punto $M(X_i)$ a punto $M'(X_i')$, se representa por las fórmulas del tipo de (2) del § 187; las anotaremos abreviadamente:

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik} X_k + b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Se comprende fácilmente que la transformación (1), hablando en general, no conservará la distancia entre los puntos; para conservarla, sus coeficientes deben satisfacer ciertas condiciones. Procuremos hallar dichas condiciones.

En primer lugar, consideremos un caso particular de la transformación (1):

$$X_i' = X_i + b_i. \tag{2}$$

Sean convertidos los puntos $M(X_i)$ y $N(X_i^*)$ en puntos $M'(X_i')$ y $N'(X_i^{*\prime})$ por la transformación (2); si $x_i = X_i^* - X_i$ son las coordenadas del vector MN, $x_i' = X_i^{*\prime} - X_i'$, las del vector $M'N'$, entonces, a consecuencia de las fórmulas (2) tenemos: $x_i' = x_i$; de aquí se deduce que las normas de los vectores MN y $M'N'$ son iguales. De suerte que la transformación (2), cualesquiera que sean b_i, conserva la distancia entre los puntos; este caso particular del movimiento se llama *desplazamiento paralelo*. Evidentemente, el desplazamiento paralelo puede elegirse de modo que el origen de coordenadas se desplazará a cualquier punto prefijado.

En otro caso particular de la transformación (1), cuando $b_i = 0$, el origen de coordenadas permanece fijo.

Cualquier transformación del tipo de (1) puede obtenerse mediante la realización sucesiva de las dos transformaciones consideradas: primero, ha de desplazarse paralelamente el origen de coordenadas junto con la base a una nueva posición, luego ha de realizarse la transformación que se da en las nuevas coordenadas por las fórmulas del tipo de (1) con la misma matriz (q_{ik}), pero con términos independientes iguales a cero. Como el primer desplazamiento paralelo obviamente no ofrece interés, en lo sucesivo consideraremos homogéneas las fórmulas (1):

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik} X_k. \tag{3}$$

Sean $M(X_i)$ y $N(X_i^*)$ dos puntos arbitrarios, $M'(X_i')$ y $N'(X_i^{*\prime})$, sus imágenes, sean $x_i = X_i^* - X_i$ y $x_i' = X_i^{*\prime} - X_i'$ las coordenadas de los vectores MN y $M'N'$.

Merced a las fórmulas (3) tenemos:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}x_k. \tag{4}$$

La igualdad de las distancias $\rho(M', N')$ y $\rho(M, N)$ equivale a la igualdad de las normas de los vectores $M'N'$ y MN; por consiguiente, las fórmulas (3) definirán un movimiento si los coeficientes q_{ik} están seleccionados de forma que

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \tag{5}$$

En este caso la relación (5) debe observarse como corolario de las igualdades (4), para cualesquiera x_1, x_2, x_3, x_4. Denotemos con σ_{ik} los coeficientes de la forma métrica en las coordenadas ortonormales ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = +1$, $\sigma_{44} = -1$, $\sigma_{ik} = 0$ si $i \neq k$), apuntemos el primer miembro de (5) como suma doble con los coeficientes σ_{ik} y apliquemos las fórmulas (4):

$$\begin{aligned} x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 &= \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik}x_1'x_k' = \\ &= \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik}\left(\sum_{\alpha=1}^{4} q_{i\alpha}x_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{4} q_{k\beta}x_\beta\right) = \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4}\left(\sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik}q_{i\alpha}q_{k\beta}\right)x_\alpha x_\beta; \end{aligned}$$

anotando también como suma doble el segundo miembro de (5):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sigma_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta.$$

A consecuencia de (5), las expresiones obtenidas deben ser iguales; de aquí

$$\sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik}q_{i\alpha}q_{k\beta} = \sigma_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1,\ 2,\ 3, 4).$$

Precisamente éstas son las condiciones buscadas para los coeficientes q_{ik}; al observarse estas condiciones, la transformación (3) o la (1) es un movimiento. A las condiciones (6) puede dárseles forma matricial. Al igual que antes, denotemos con Q la matriz que posee los elementos q_{ik}, con Q^*, la matriz que contiene los elementos $q_{\alpha i}^* = q_{i\alpha}$($Q^*$ se obtiene de Q mediante la transposición), con I, la matriz que tiene los elementos σ_{ik}. Entonces las relaciones (6) pueden escribirse como siguen

$$\sum_{i,k=1}^{4} q_{\alpha i}^*\sigma_{ik}q_{k\beta} = \sigma_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \tag{7}$$

Pero, escritas así, evidentemente, equivalen a una sola igualdad matricial:

$$Q^*IQ = I \tag{8}$$

o, detalladamente:

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} & q_{41} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} & q_{42} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{43} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}.$$

De tal modo, *la transformación afín* (1) *es un movimiento si, y sólo si, su matriz Q satisface la condición* (8).

Hagamos notar que de aquí, la desigualdad a cero del determinante de la matriz Q ya deriva de por sí sola; más aún, de la relación (8) tenemos: $(\text{Det } Q)^2 = 1$, consiguientemente,

$$\text{Det } Q = \pm 1. \tag{9}$$

§ 197. Mediante las fórmulas (6) se muestra fácilmente que a consecuencia de cualquier movimiento en el espacio de Minkowski se conservan el producto escalar y la ortogonalidad de vectores. En rigor, a raíz de un movimiento, conviértanse los vectores $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$ en vectores $x' = \sum x'_i e_i$, $y' = \sum y'_i e_i$ (descompuestos respecto a la misma base). Entonces

$$x'y' = x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3 - x'_4 y'_4 = \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} x'_i y'_k =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} \left(\sum_{\alpha=1}^{4} q_{i\alpha} x_\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\beta=1}^{4} q_{k\beta} x_\beta \right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \left(\sum_{i,k=1}^{4} \sigma_{ik} q_{i\alpha} q_{k\beta} \right) x_\alpha x_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sigma_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 = xy.$$

Así pues, $x'y' = xy$. En particular, si $xy = 0$, entonces $x'y' = 0$, es decir, *las imágenes de vectores ortogonales son ortogonales.* De aquí se infiere una conclusión importante: *en el espacio de Minkowski todo movimiento hace pasar la base ortonormal a base ortonormal.*

§ 198. Si a consecuencia de cierto movimiento un punto dado del espacio permanece fijo, entonces el cono isótropo del espacio cuyo vértice está en el punto dado, también permanece fijo (sus puntos se desplazan a nuevas posiciones, pero se quedan sobre él). Efectivamente, supongamos, a modo de ejemplo, que permanezca inmóvil el origen de coordenadas O. Si M es un punto arbitrario de un cono isótropo con el vértice O, entonces $\rho(O, M) = 0$, y, dado que durante el movimiento se conservan las distancias, entonces, para la imagen M' del punto M tenemos $\rho(O, M') = 0$; por consiguiente, M'se halla sobre el mismo cono isótropo. Mediante razonamientos análogos se puede mostrar que, a consecuencia de tal movimiento, los puntos situados dentro del cono isótropo, permanecen en su interior; no obstante, no se excluye el hecho de que dos huecos del cono isótropo se cambien de lugares.

§ 199. El conjunto de todos los movimientos en el espacio de Minkowski constituye un grupo, ya que el producto de dos movimientos es un movimiento, y la transformación recíproca al movimiento es un movimiento también.

Estas propiedades de grupo dimanan evidentemente de la definición de los movimientos. El grupo de movimientos en el espacio de Minkowski es uno de los subgrupos del grupo afín. En el espacio de Minkowski, entre todo el grupo de movimientos se puede distinguir, a su vez, un subgrupo de movimientos que dejan fijo un punto. Un grupo más reducido lo integran los movimientos, a causa de los cuales permanece fijo cada hueco del cono isótropo.

§ 200. La transformación

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k + b_i, \quad \operatorname{Det} q_{ik} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

que constituye cierto movimiento en el espacio de Minkowski, se llama *transformación general de Lorentz*. La transformación general de Lorentz se caracteriza por la ecuación (8) del § 196 para la matriz $Q = (q_{ik})$. Los números b_i que pueden ser cualesquiera, no juegan un papel sustancial en el estudio de las transformaciones generales de Lorentz, por ende, al prescindir de los números b_i, frecuentemente se llama transformación general de Lorentz a la transformación homogénea

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

con la misma condición para la matriz Q. El conjunto de todas las transformaciones de Lorentz integra un grupo llamado *grupo general de Lorentz*.

Si la transformación (1) constituye un movimiento en el espacio de Minkowski, a raíz del cual cada hueco del cono isótropo permanece fijo, entonces tal transformación se llama sencillamente *transformación de Lorentz*. Estas transformaciones, además de la condición (8) del § 196 para la matriz Q, se caracterizan por que ellas mismas hacen pasar el punto $(0, 0, 0, x_4)$, $x_4 > 0$, al punto (x_1', x_2', x_3', x_4'), $x_4' > 0$. Las transformaciones de Lorentz componen un grupo llamado *grupo de Lorentz*.

§ 201. Además, las transformaciones de Lorentz (o las transformaciones generales de Lorentz) pueden interpretarse geométricamente de un modo distinto.

Sea dado un sistema de coordenadas con el origen O y con la base ortonormal e_1, e_2, e_3, e_4 $(e_4^2 = -1)$; luego, introdúzcase un nuevo sistema de coordenadas con el origen O' y con la base ortonormal e_1', e_2', e_3', e_4' $(e_{24}' = -1)$. Entonces, si

$$e_i' = \sum_{k=1}^{4} p_{ik}e_k \tag{1}$$

son las descomposiciones de los vectores de la nueva base respecto a la vieja base, y

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k + b_i \tag{2}$$

son las expresiones de las nuevas coordenadas a través de las coordenadas viejas, entonces la matriz $Q = (q_{ik})$ resulta de la matriz $P = (p_{ik})$ mediante la transposición y la inversión: $Q = (P^*)^{-1}$ (véase el § 180). Como las bases vieja y nueva son ortonormales, en las designaciones del § 196 tenemos:

$$e_ie_k = \sigma_{ik}, \quad e_i'e_k' = \sigma_{ik}.$$

De aquí

$$\sigma_{ik} = e_i'e_k' = \sum_{\alpha=1}^{4} p_{i\alpha}e_\alpha \sum_{\beta=1}^{4} p_{k\beta}e_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} (e_\alpha e_\beta)p_{i\alpha}p_{k\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sigma_{\alpha\beta}p_{i\alpha}p_{k\beta}. \tag{3}$$

Si introducimos los elementos de la matriz P^*, es decir, $p^*_{\beta k} = p_{k\beta}$, entonces las igualdades antecedentes tomarán la forma siguiente:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{4} p_{i\alpha}\sigma_{\alpha\beta}p_{\beta k} = \sigma_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Todas estas relaciones equivalen a una sola igualdad matricial

$$PIP^* = I. \tag{5}$$

Mas, como las matrices P^* y Q son mutuamente inversas, entonces

$$P^*Q = E, \qquad Q^*P = E,$$

donde E es una matriz unidad. Por ende, al multiplicar ambos miembros de la igualdad (5) a la izquierda por la matriz Q^*, a la derecha, por la matriz Q, obtendremos:

$$Q^*PIP^*Q = EIE = I = Q^*IQ \tag{6}$$

ó

$$Q^*IQ = I.$$

Esta última igualdad coincide exactamente con la igualdad (8) del § 196. Por consiguiente, *toda transformación de coordenadas que corresponde al paso de un sistema ortonormal a un nuevo sistema ortonormal, es una transformación general de Lorentz* (no homogénea, dicho en términos generales). A la inversa, si la base e_1, e_2, e_3, e_4 es ortonormal, y si se observa la condición (6), entonces, por cuanto de (6) sigue (5), luego (4), luego (3), obtendremos $e_i'e_k' = \sigma_{ik}$, es decir, la nueva base será ortonormal también. Por lo tanto, *toda transformación general de Lorentz puede considerarse como una transformación de coordenadas ortonormales*. Ante tal interpretación de las transformaciones generales de Lorentz, *las llamadas de Lorentz a secas concurrentes entre ellas, se caracterizan por el que los vectores básicos e_4 y e_4' se hallan en un mismo hueco del cono isótropo.*

§ 202. Al concluir esta sección, indicaremos una relación que existe entre el grupo de Lorentz y el grupo de movimientos en la geometría de Lobachevski. Para simplificar la exposición, vamos a considerar el espacio tridimensional de Minkowski con un cono isótropo

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0. \tag{1}$$

Cortemos este cono con el plano $X_3 = 1$. En la sección se forma una circunferencia

$$X_1^2 + X_2^2 = 1, \; X_3 = 1; \tag{2}$$

la denotaremos con k. Sea dada una transformación homogénea de Lorentz

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= q_{11}X_1 + q_{12}X_2 + q_{13}X_3, \\ X_2' &= q_{21}X_1 + q_{22}X_2 + q_{23}X_3, \\ X_3' &= q_{31}X_1 + q_{32}X_2 + q_{33}X_3, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

le corresponde un movimiento en el espacio de Minkowski, que hace pasar el punto arbitrario $M(X_1, X_2, X_3)$ al punto $M'(X_1', X_2', X_3')$, dejando fijo el origen de coordenadas.

A la transformación de Lorentz dada le ponemos en correspondencia cierta transformación del plano $X_3 = 1$. Precisamente, si P es el punto de intersección de la recta OM con el plano $X_3 = 1$, P' es el punto de intersección de la recta OM' con el mismo plano, entonces consideraremos P' como imagen del punto P. Esta transformación es fácil de expresar en coordenadas.

Sean $(x, y, 1)$ las coordenadas del punto P; dado que O, P, M se hallan sobre una misma recta,

$$\frac{x}{X_1} = \frac{y}{X_2} = \frac{1}{X_3}.$$

Por consiguiente,

$$x = \frac{X_1}{X_3}, \quad y = \frac{X_2}{X_3}.$$

Análogamente, si $(x', y', 1)$ son las coordenadas de P', entonces

$$x' = \frac{X_1'}{X_3'}, \quad y' = \frac{X_2'}{X_3'}.$$

De aquí y de las fórmulas (3) obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{q_{11}x + q_{12}y + q_{13}}{q_{31}x + q_{32}y + q_{33}}, \\ y' &= \frac{q_{21}x + q_{22}y + q_{23}}{q_{31}x + q_{32}y + q_{33}}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Por cuanto $\operatorname{Det} q_{ik} \neq 0$, la aplicación del plano $X_3 = 1$ sobre sí mismo expresada por las fórmulas (4), es proyectiva (véase el § 112). Tengamos en cuenta que la transformación de Lorentz dada en el espacio, deja fijos el cono isótropo y su región interior; de aquí se deduce que sobre el plano $X_3 = 1$ la transformación (4) deja fijos la circunferencia k y su región interior. Por eso la transformación (4) es un movimiento no euclidiano en la métrica de Lobachevski que está definida sobre el plano $X_3 = 1$ dentro del absoluto k (véase el § 170). Hemos mostrado que toda transformación de Lorentz induce cierto movimiento no euclidiano dentro de k sobre el plano $X_3 = 1$. Ahora, mostremos que a base de un movimiento no euclidiano dado de antemano dentro de k, se puede hallar, y además unívocamente, la transformación de Lorentz que lo induce.

Sea dado un movimiento no euclidiano por las fórmulas del tipo de (4). Entonces la transformación buscada de Lorentz debe tener forma de

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= \lambda(q_{11}X_1 + q_{12}X_2 + q_{13}X_3), \\ X_2' &= \lambda(q_{21}X_1 + q_{22}X_2 + q_{23}X_3), \\ X_3' &= \lambda(q_{31}X_1 + q_{32}X_2 + q_{33}X_3), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

donde λ es cierto número $\neq 0$. Para cualquier $\lambda \neq 0$ las fórmulas (5) definen una transformación afín en el espacio. Demostremos que con la elección apropiada de λ esta transformación afín será una transformación de Lorentz.

En rigor, la transformación (4) deja fijas la circunferencia k y su región interior; de aquí se infiere que la transformación afín (5) deja fijos el cono isótropo y su región interior. Algebraicamente, esto quiere decir que a consecuencia de las igualdades (5) tiene lugar la relación

$$X_1'^2 + X_2'^2 - X_3'^2 = \sigma(X_1^2 + X_2^2 - X_3^2), \tag{6}$$

donde σ es proporcional a λ^2 con el factor de proporcionalidad positivo. Elijamos λ observando la igualdad $\sigma = 1$; entonces la transformación (5) expresará un movimiento en el espacio de Minkowski. Hagamos constar además que $q_{33} \neq 0$, pues en el caso contrario, el punto interior (0, 0, 1) del cono isótropo se convertirá en punto exterior $(\lambda q_{13}, \lambda q_{23}, 0)$ por la transformación (5), lo cual queda excluido. Por ende, podemos elegir el signo de λ de modo que $\lambda q_{33} > 0$. Bajo esta condición la transformación (5) deja fijo cada hueco del cono isótropo y, consiguientemente, es una transformación de Lorentz. Está claro que la elección requerida de λ es unívoca.

Así pues, las transformaciones homogéneas de tres dimensiones se hacen corresponder biunívocamente a los movimientos de la geometría bidimensional de Lobachevski. Además, es fácil comprobar que el producto de dos transformaciones de Lorentz se hace corresponder al producto de los movimientos no euclidianos correspondientes. Por consiguiente, *el grupo homogéneo tridimensional de Lorentz y el grupo de movimientos de la geometría bidimensional de Lobachevski son isomorfos.*

Análogamente se puede mostrar el isomorfismo del grupo homogéneo cuadridimensional de Lorentz y del grupo de movimientos en la geometría tridimensional de Lobachevski.

3. Espacio de sucesos de la teoría especial de la relatividad

§ 203. Considérese cierto suceso M. Imaginémonos que en realidad nos interesa no la naturaleza del suceso M, sino el lugar y el tiempo en que transcurre este suceso; además, admitamos que el suceso M tiene lugar en una porción tan pequeña del espacio y en un intervalo de tiempo tan corto que se puede considerar que dicho suceso transcurre instantáneamente en un determinado punto e. Entonces llamaremos elemental al suceso sujeto a la consideración. El lugar de un suceso elemental arbitrario se determina respecto a cierto cuerpo material elegido de antemano, y el tiempo se establece mediante un determinado reloj. Por ejemplo, se puede determinar el lugar de todo suceso respecto a la Tierra y registrar el tiempo según el reloj del observatorio de Púlkovo.

Sea elegido cierto cuerpo material T respecto al cual se determina el lugar de un suceso elemental arbitrario; estén ligados fijamente con el cuerpo T tres ejes cartesianos mutuamente perpendiculares y sea dada una escala, respecto a los cuales el lugar del suceso M se caracteriza por las coordenadas x, y, z (considerando euclídeas las propiedades geométricas del espacio real); sea dado, al fin, un reloj, según el cual el momento del suceso M se caracteriza por el número t (considerando t igual al número de unidades de tiempo a partir de cierto momento de referencia). El complejo integrado por el cuerpo T, la escala, los ejes, el reloj y el momento de referencia se llama *sistema de referencia*, los números x, y, z, t se llaman *coordenadas* del suceso M en un sistema de referencia dado.

La elección del sistema de referencia puede variar; entonces el mismo suceso M en un nuevo sistema de referencia, hablando en general, tendrá otras coordenadas x', y', z', t'. En este caso, si se toma el mismo cuerpo T, cambiando sólo los ejes ligados con él, la escala, la unidad de medida de tiempo y el momento de referencia, entonces el cambio del sistema de referencia y la transformación correspondiente de las coordenadas de sucesos se llaman *triviales*. En oposición a esto, llamaremos *esenciales* el cambio del sistema de referencia y la transformación correspondiente de las coordenadas de sucesos, si en lugar del cuerpo T se toma un cuerpo distinto T' *el cual se mueve respecto a* T.

Para la física, reviste una importancia de principio el problema de cómo se transforman las coordenadas de sucesos al cambiar esencialmente el sistema de referencia. Por cierto, tiene sentido plantear tal problema sólo respecto a algunas determinadas clases de sistemas de referencia, que sean suficientemente abarcables. A continuación se expone la solución del referido problema en cuanto a los sistemas inerciales.

§ 204. Llamaremos *inercial* a cierto sistema de referencia S si todo punto material independiente se mueve rectilínea y uniformemente respecto al sistema S. Al hablar del punto material independiente, tenemos en cuenta un cuerpo de pequeñas dimensiones tan alejado de otros cuerpos que se puede despreciar la acción de éstos sobre el referido cuerpo.

Sean S y S' dos sistemas inerciales de referencia, M, un suceso arbitrario. Nuestro objeto es obtener o caracterizar las fórmulas que expresen las coordenadas (x', y', z', t') del suceso M en el sistema S' a través de las coordenadas (x, y, z, t) del mismo suceso en el sistema S.

Primero, veamos cómo se resuelve este mismo problema desde el punto de vista de la física clásica. Ante todo, en la física clásica se admite que se pueda sincronizar universalmente los relojes, estableciendo un mismo sistema de referencia de tiempo; entonces $t' = t$. A la par con esto, se considera posible establecer una sola escala para medir las longitudes de segmentos en todos los ejes de coordenadas de los sistemas S y S'. Estos supuestos y la ley de la composición de velocidades formulada por la cinemática clásica prueban que en el caso de cierta elección especial de los ejes de coordenadas en los sistemas S y S', las coordenadas de cualquier suceso M, al pasar del sistema S al S', cambiarán con arreglo a la fórmulas

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{1}$$

(los ejes de coordenadas están elegidos de modo que $O'x'$ desliza por el Ox, y los ejes $O'y'$, $O'z'$ siguen siendo paralelos a los ejes Oy, Oz; v es la velocidad de movimiento de S' respecto a S).

De tal manera, las fórmulas buscadas se deducen fácilmente de las hipótesis de la física clásica y tienen forma muy sencilla.

No obstante, hagamos constar que la posibilidad de sincronizar universalmente todos los relojes, en absoluto, no es tan evidente como puede parecer a primera vista. Se podría sincronizar los relojes en todos los sistemas inerciales si existiesen señales de propagación instantánea. Bastaría fijar en una cierta fase el reloj de un sistema inercial, enviando al instante una señal a otros sistemas y allí fijar los relojes en la misma fase en el momento de recibir la señal; luego se podría unificar la marcha de los relojes dando otra señal tras un determinado lapso de tiempo. En este caso todos los sistemas inerciales resultarían equitativos en el sentido de que la transmisión de una señal de cualquier sistema y la recepción de la misma en otro sistema cualquiera tendrían lugar en unas mismas fases de los relojes de estos sistemas. Mas, en la naturaleza no existen señales que se propaguen instantáneamente. Si se vale de señales luminosas, mediante el procedimiento recién referido se puede lograr sólo una sincronización aproximada de los relojes en los sistemas inerciales, a condición de que sea pequeña en comparación con la velocidad de la luz, la de movimiento de unos sistemas inerciales respecto a otros.

En el sentido aproximado, no ofrecen lugar a dudas otras dos hipótesis que alegamos (la posibilidad de unificar las escalas, la ley clásica de la composición de velocidades). Por ende, las fórmulas (1) también son aproximadamente exactas si v es pequeña en comparación con la velocidad de la luz.

Pero las fórmulas (1) contradicen a los datos experimentales de la física moderna de gran velocidad. El caso consiste en lo siguiente. Es sabido desde hace mucho que las leyes de la mecánica se observan igualmente en todos los sistemas inerciales. Las fórmulas (1) no contradicen a esta tesis si se sobreentienden las leyes de la mecánica clásica, pues sus ecuaciones son invariantes respecto a la transformación según las fórmulas (1). Al mismo tiempo, de las fórmulas (1) se deduce que las leyes de la electrodinámica tienen que depender de la elección del sistema inercial, por cuanto las ecuaciones de la electrodinámica no son invariantes respecto a la transformación (1). Ante todo, la velocidad de la luz tiene que ser diferente con respecto a diversos sistemas inerciales; a saber, si en el sistema S la luz se propaga en dirección hacia el eje x con una velocidad c, entonces según las fórmulas (1), en el sistema S' debe existir una velocidad de la luz $= c - v$. No obstante, los experimentos adecuados no registraron tal efecto. En virtud de esta circunstancia, en la física está adoptado *el postulado sobre la independencia de la velocidad de la luz en cuanto a la elección del sistema inercial de referencia*. Aquí toma su principio la teoría especial de la relatividad descubierta por la obra de Lorentz, Poincaré, Minkowski y, sobre todo, de Einstein; según la referida teoría, no sólo las leyes de la mecánica, sino también las de la electrodinámica son unas mismas en todos los sistemas inerciales. La teoría de la relatividad sustituye las hipótesis iniciales de la física clásica que conducen a las fórmulas (1), por tesis más exactas concordantes con la física experimental de grandes velocidades. Con esto mismo se sustituyen también las fórmulas (1) por fórmulas más exactas. Estas serán deducidas en los párrafos inmediatos. En este caso, tendremos que utilizar esencialmente los conceptos geométricos desarrollados en dos secciones precedentes.

§ 205. Sea S algún sistema inercial de referencia, M, un suceso elemental arbitrario, t, x, y, z, las coordenadas del referido suceso en el sistema S (aquí y más abajo el tiempo t se considera como la primera coordenada para hacer cómodo el apunte de algunas fórmulas que siguen).

Designemos con $\mathfrak{A}$ un espacio cuadridimensional afín, en el cual están elegidos de un modo cualquiera el origen O y la base a_1, a_2, a_3, a_4 de un sistema afín de coordenadas. Convengamos en hacer corresponder al suceso M un punto del espacio $\mathfrak{A}$, que se define por las coordenadas t, x, y, z respecto al origen y la base elegidos; diremos que este punto representa el suceso M en el espacio $\mathfrak{A}$. El punto que representa el suceso, lo denotaremos con la misma letra que el propio suceso.

El espacio cuadridimensional afín $\mathfrak{A}$ cuyos puntos representan sucesos elementales de todo género, se llama *espacio de sucesos*. Notemos que los sucesos que transcurren durante cierto lapso de tiempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ en un punto del espacio físico, inmóvil respecto a los ejes del sistema S y dotado de las coordenadas x_0, y_0, z_0, se representan en el espacio $\mathfrak{A}$ por medio del segmento $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$; evidentemente, tal segmento es paralelo al vector a_1. Correspondientemente a esto, el eje de coordenadas orientado según el vector básico a_1 en el espacio de sucesos, se llama *eje de tiempo*.

§ 206. Ahora haremos el primer paso en la resolución del problema de transformación de las coordenadas de sucesos al pasar de un sistema inercial de referencia a otro. Considérese, además del sistema S, un otro sistema de referencia S', también inercial; sean t, x, y, z las coordenadas de un suceso arbitrario M respecto a S; sean t', x', y', z' las coordenadas del mismo suceso respecto a S'. Entonces t', x', y', z' son determinadas funciones de t, x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} t' &= f(t, x, y, z), \\ x' &= \varphi(t, x, y, z), \\ y' &= \psi(t, x, y, z), \\ z' &= \chi(t, z, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Supongamos que 1) f, φ, ψ, χ están determinados para cualesquiera valores de t, x, y, z; 2) según cualesquiera valores de t', x', y', z' de las ecuaciones (1) se determinan, y además de un único modo, t, x, y, z.

Con esto mismo suponemos que respecto a cada uno de los sistemas S, S', los sucesos puedan tener lugar dondequiera y en cualquier momento; estos supuestos significan también que los sistemas S, S' son siempre inerciales.

Demostraremos que las fórmulas (1) *son lineales, es decir, tienen forma de*

$$\left.\begin{aligned} t' &= c_{11}t + c_{12}x + c_{13}y + c_{14}z + d_1, \\ x' &= c_{21}t + c_{22}x + c_{23}y + c_{24}z + d_2, \\ y' &= c_{31}t + c_{32}x + c_{33}y + c_{34}z + d_3, \\ z' &= c_{41}t + c_{42}x + c_{43}y + c_{44}z + d_4. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Además, $\operatorname{Det} c_{ik} \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar este teorema, tenemos que adoptar una suposición física más. A saber, supondremos que a través de cualquier lugar de un espacio físico, en cualquier momento de tiempo en cualquier dirección puede pasar con cualquier velocidad conocida en la física experimental, un punto material independiente (sin embargo, no suponemos que un punto material puede tener cualquier velocidad en general, puesto que nadie ha registrado velocidades arbitrariamente grandes, y tal suposición carece de fundamento; más aún, como se verá en lo sucesivo, la misma resultaría también errónea). Al hablar de la velocidad de un punto material, tendremos en cuenta la velocidad respecto al sistema S. Designemos con C un número positivo tal que sea factible cualquier velocidad inferior a C.

Pase volando en el espacio algún punto material independiente. Como el sistema S es inercial, respecto al sistema S el movimiento de dicho punto es rectilíneo y uniforme. Por tanto, las ecuaciones del movimiento de tal punto deben tener forma de

$$x - x_0 = l(t - t_0), \quad y - y_0 = m(t - t_0),$$
$$z - z_0 = n(t - t_0), \tag{3}$$

donde l, m, n son las componentes de la velocidad del punto en vuelo, (x_0, y_0, z_0) es el lugar en que el punto se encuentra en el momento $t = t_0$. En virtud de la hipótesis admitida al comenzar la demostración, los números t_0, x_0, y_0, z_0 pueden considerarse cualesquiera. En cuanto a l, m, n, éstos deben satisfacer la desigualdad

$$l^2 + m^2 + n^2 < C^2. \tag{4}$$

El hecho de que en el momento t el punto en vuelo se encuentra en el lugar (x, y, z), es un suceso que se representa por medio de un punto (t, x, y, z) en el espacio de sucesos $\mathfrak{A}$. Todo el proceso de movimiento del punto en vuelo se representa en el espacio de sucesos mediante cierta recta, pues t, x, y, z están sujetas a tres ecuaciones independientes de primer grado (3) (véase el § 185). Denotemos esta recta con b. Luego, hagamos notar que de las relaciones (3) y (4) se infiere la desigualdad

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - C^2(t - t_0)^2 < 0, \tag{5}$$

que define la región interior de cierto cono real regular de segundo orden con el vértice (t_0, x_0, y_0, z_0) (véase el § 186); lo designaremos con K_0. Por cuanto la desigualdad (5) es un corolario de las relaciones (3) y (4), entonces la recta b que pasa por el vértice del cono K_0, se halla en su región interior. De las hipótesis admitidas se desprende que toda recta del espacio de sucesos que pasa dentro del cono K_0 por su vértice, puede representar el proceso de movimiento de un punto material independiente que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) en el momento t_0.

Ahora, abordemos las ecuaciones (1). En virtud de las referidas ecuaciones, a todo punto $M(t, x, y, z)$ del espacio de sucesos le corresponde un punto $M'(t', x', y', z')$ es decir, está definida una cierta aplicación $M' = f(M)$; en virtud de las condiciones impuestas a las ecuaciones (1), esta aplicación es una aplicación biunívoca del espacio de sucesos sobre sí mismo. Ahora, tengamos en cuenta que el sistema de referencia S' es inercial también. Por eso, si t, x, y, z constituyen coordenadas corrientes en las ecuaciones (3), entonces t', x', y', z' satisfacen las ecuaciones análogas, aunque sean distintos los parámetros (dado que las ecuaciones (3) definen el movimiento de un punto material independiente, y tal movimiento en el sistema S' será rectilíneo y uniforme). De aquí se infiere que si en el espacio de sucesos un conjunto de puntos M se halla sobre la recta b, entonces los puntos correspondientes de $M' = f(M)$ también se hallan sobre cierta recta b'. Así pues, 1) en el espacio de sucesos para cualquier punto $M_0(t_0, x_0, y_0, z_0)$ está definido un cono K_0 con el vértice M_0; 2) si la recta b pasa por M_0 dentro de K_0, entonces a causa de la aplicación $M' = f(M)$, todas las imágenes de los puntos de la recta b quedan dispuestas sobre cierta recta b'. Ahora, demostremos que cualquiera que sea la recta b, las imágenes de sus puntos también están situadas sobre una recta, es decir, que la aplicación $M' = f(M)$ es colineal.

Sobre la recta b, tomemos tres puntos diferentes M_1, M_2, M_3; sean K_1, K_2, K_3 los conos definidos para los puntos M_1, M_2, M_3 de manera análoga a que el cono K_0 fue definido para el punto M_0. Ahora ya es natural considerar que la recta b no pasa por las regiones interiores de los conos K_i. Dentro de K_1, tracemos a través de M una recta arbitraria. Las rectas b y b_1 definen el plano (bidimensional) β que las contiene. A través de los puntos M_2 y M_3, tracemos las rectas b_2^* y b_3^* paralelas a la recta b_1; las referidas rectas se situarán en el plano β y dentro de los conos correspondientes K_2 y K_3. La continuidad del primer miembro de la desigualdad (5) impone que a consecuencia de una pequeña modificación de las coordenadas de los vectores directores de las rectas b_2^* y b_3^*, los vectores directores modificados definan rectas que también se hallan dentro de los conos K_2 y K_3. Por eso, existirán rectas b_2 y b_3 que 1) pasan por M_2 y M_3 en el plano β y dentro de los conos K_2 y K_3; 2) están situadas de manera que las tres rectas b_1, b_2, b_3 se intersecan dos a dos en tres puntos diferentes P, Q, R del plano β.

Sean P', Q', R' las imágenes de los puntos P, Q, R creadas por la aplicación $M' = f(M)$. Dado el carácter biunívoco de esta aplicación, los puntos P', Q', R' son diferentes. Si R' se halla sobre la recta $P'Q'$, entonces $M_i' = f(M_i)(i = 1, 2, 3)$ están sobre la misma recta. Por consiguiente, en este caso no hay que demostrar nada. Supongamos que P', Q', R' no estén sobre una misma recta. Entonces ellos definen el plano β' que los contiene. Como las rectas b_1, b_2, b_3 pasan dentro de los conos K_1, K_2, K_3, las imágenes de sus puntos se hallan sobre tres rectas b_1', b_2', b_3'. Las rectas b_1', b_2', b_3' se intersecan dos a dos en los puntos P', Q', R' y por eso están situadas en el plano β' (véase el § 182); junto con ellas, el plano β' contiene los puntos $M_i' = f(M_i)(i = 1, 2, 3)$. Por el punto M_1 dentro del cono K_1 se puede trazar una recta c_1 que no pertenece al plano β. Aplicando a la recta c_1 la misma construcción que fue aplicada a la b_1, obtendremos análogamente a lo aducido más arriba, un plano γ' que contiene los puntos M_1', M_2', M_3' y no coincide con el plano β'. Ya que los planos β' y γ' son diferentes, entonces todos los puntos comunes suyos se hallan sobre una misma recta. A consecuencia de esto mismo los puntos M_1', M_2', M_3' están situados sobre una misma recta, resultando establecido el carácter colineal de la aplicación $M' = f(M)$. Pero según el § 187, si la aplicacion $M' = f(M)$ es colineal, entonces en las coordenadas afines la misma se representará por fórmulas lineales con un determinante diferente de cero. Por esto mismo queda demostrada nuestra afirmación.

NOTA. La demostración sigue siendo válida si se considera que el sistema S' es inercial *respecto al* sistema S, es decir, si se exige solamente que todo movimiento rectilíneo y uniforme de un punto material (con una velocidad admisible) respecto a S sea rectilíneo y uniforme también respecto a S'. En la demostración no se necesitó la reciprocidad de tal relación entre S y S'.

Ahora sabemos que las fórmulas buscadas de transformación de las coordenadas de sucesos tienen forma lineal. A continuación hay que establecer los coeficientes de las referidas fórmulas, lo cual haremos a partir del postulado sobre la independencia de la velocidad de la luz en cuanto a la elección del sistema inercial de referencia. Preliminarmente tendremos que completar un poco el concepto de espacio de sucesos expuesto en el § 205.

§ 207. Al definir el espacio de sucesos $\mathfrak{A}$, partíamos de la consideración de un sistema inercial de referencia S en el espacio físico. Junto con S, elegimos en el espacio afín $\mathfrak{A}$ el origen O y la base a_1, a_2, a_3, a_4 del sistema afín de coordenadas; el punto M que representa un suceso, se construye en el sistema de coordenadas elegido a base de las coordenadas del suceso (t, x, y, z); las referidas coordenadas se consideran dadas respecto a S. Si S' es otro sistema inercial de referencia cualquiera, en el cual el mismo suceso tiene nuevas coordenadas t', x', y', z', entonces estas nuevas coordenadas se expresan a través de t, x, y, z según las fórmulas lineales (2) del § 206 con un determinante diferente de cero. Mas, conforme al § 180, cualquier transformación lineal de cuatro variables cuyo determinante difiera de cero, puede considerarse como transformación de coordenadas afines en el espacio afín de cuatro dimensiones. Esto quiere decir que existe un nuevo sistema de coordenadas afines en el espacio $\mathfrak{A}$, definido por un origen O' y una base a_1', a_2', a_3', a_4'. Respecto al referido sistema, el punto M que representa el suceso dado, tiene coordenadas t', x', y', z'. De tal modo, a todo sistema inercial de referencia ubicado en el espacio físico le corresponde un determinado sistema afín de coordenadas del espacio de sucesos.

§ 208. Sean M_0 y M dos sucesos que se observan desde el punto de vista del sistema inercial de referencia S. Estimemos que M_0 suceda en un lugar dado (x_0, y_0, z_0) del espacio físico en un momento dado t_0. Consideraremos arbitrario el lugar (x, y, z) del suceso M; denotaremos con t el instante del suceso M. Supongamos que en el caso de $t_0 < t$ una señal luminosa enviada desde el lugar del suceso M_0 en el instante t_0, llegue al lugar del suceso M justamente en el instante t, a la inversa, si $t < t_0$, entonces la señal luminosa del suceso M_0 llega al lugar del suceso M_0 precisamente en el instante t_0.

Entonces

$$-c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0, \tag{1}$$

donde c es la velocidad de la luz, ya que el trayecto recorrido por la señal es igual a su velocidad multiplicada por un intervalo de tiempo correspondiente. En el espacio $\mathfrak{A}$ los sucesos M_0 y M se representan por dos puntos; los designaremos también con M_0 y M, siendo M_0 un punto fijo, y M, en un punto corriente. El conjunto de todos los puntos M del espacio $\mathfrak{A}$ definidos por la ecuación (1), constituye un cono con el vértice en el punto M_0 (véase el § 186); este cono se llama *cono de luz* del espacio de sucesos en el punto M_0. La ecuación (1) define un cono de luz en el sistema afín O, a_1, a_2, a_3, a_4 correspondiente al sistema inercial S.

La región interior del cono de luz se define por la desigualdad

$$-c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < 0.$$

Junto con la condición $t > t_0$, esta desigualdad define un hueco del cono de luz; lo llamaremos *superior*. Al hueco superior le corresponden los sucesos M cuyo lugar alcanza la señal luminosa del suceso M_0 anticipando los referidos sucesos. El otro hueco del cono de luz, correspondiente a la condición de $t < t_0$, lo llamaremos *inferior*; le corresponden los sucesos M antecedentes a M_0, la señal luminosa del suceso M también alcanza el lugar del suceso M_0 antes que lo alcance dicho suceso.

La región exterior del cono de luz corresponde a los sucesos M que no pueden comunicarse con el suceso M_0 aun mediante señales luminosas (así ocurre, por ejemplo, si M_0 y M suceden en distintos lugares del sistema S y a un mismo tiempo, es decir, $t = t_0$).

§ 209. Ahora tenemos la posibilidad de determinar los coeficientes presentes en las fórmulas de transformación de las coordenadas de sucesos al cambiar de sistema inercial de referencia. Pasemos al sistema afín O', a_1', a_2', a_3', a_4' correspondiente al sistema de referencia S'. En el nuevo sistema, los puntos M_0 y M tienen nuevas coordenadas, pero el cono de luz se define análogamente al caso anterior mediante la fórmula

$$-c^2(t' - t_0')^2 + (x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 = 0 \tag{2}$$

con el mismo valor de c; esto se infiere del postulado sobre la independencia de la velocidad de la luz en cuanto a la elección del sistema inercial de referencia.

Transformemos la ecuación (2) respecto a las coordenadas viejas t, x, y, z, mediante las fórmulas (2) del § 206.

Obtendremos:

$$-c^2(t' - t_0')^2 + (x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 =$$
$$= A(t - t_0)^2 + B(t - t_0)(x - x_0) + \dots + K(z - z_0)^2. \tag{3}$$

Aquí en el segundo miembro tenemos una forma cuadrática respecto a las diferencias $t - t_0$, $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, cuyos coeficientes $A, B, \dots, K$ son ciertas expresiones compuestas por los coeficientes c_{ik} de las fórmulas (2) del § 206 y por el número c.

Si consideramos igual a cero el segundo miembro de la ecuación (3), tendremos la ecuación del cono de luz en las coordenadas viejas. Pero el mismo cono, también en las coordenadas viejas, está definido por la ecuación (1). De aquí se deduce que los coeficientes del segundo miembro de la igualdad (3) deben ser proporcionales a los de la ecuación (1).

De tal modo resulta que en rigor la igualdad (3) debe tener forma siguiente

$$-c^2(t' - t_0')^2 + (x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 =$$
$$= H[-c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2], \tag{4}$$

donde H es cierta expresión integrada por los coeficientes c_{ik} de las fórmulas (2) del § 206, siendo $H > 0$ (en virtud de la ley de inercia de las formas cuadráticas). Ahora, admitamos que *en uno de dos sistemas de referencia S, S'* la escala lineal y la unidad de medida de tiempo varíen un mismo número de veces; en tal caso, todas las diferencias $t - t_0, x - x_0, y - y_0, z - z_0$ se multiplican por un mismo número (al mismo tiempo varían proporcionalmente los coeficientes c_{ik} en las fórmulas (2) del § 206). Por consiguiente, mediante cierta coordinación de las escalas lineales y las unidades de medida de tiempo en los sistemas S, S' podemos lograr la igualdad $H = 1$. En lo sucesivo consideraremos que tal coordinación tiene lugar en todo caso; bajo esta condición, para cualquier par de puntos M_0, M, como corolario de las fórmulas (2) del § 206, debe observarse la igualdad

$$-c^2(t' - t_0')^2 + (x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 =$$
$$= -c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \tag{5}$$

De tal manera, para que las fórmulas (2) del § 206 expresen la transformación de las coordenadas de sucesos al pasar de un sistema inercial de referencia a otro, sus coeficientes deben estar escogidos de modo que se observe idénticamente la igualdad (5). De aquí resultan las condiciones necesarias para los coeficientes de las fórmulas buscadas. Pero, más aún, estas condiciones resultan también suficientes; a saber, según lo mostrará el análisis ulterior, al observarse las referidas condiciones, la arbitrariedad de la elección de coeficientes corresponde precisamente a la de la elección de sistemas inerciales posibles.

No hay necesidad de hacer medición para obtener las condiciones en cuestión. De hecho, el resultado requerido ya lo obtuvimos en la sección precedente donde consideramos el espacio de Minkowski; hay que sólo saber sacarlo. Con este objeto, introduciremos en el espacio de sucesos la métrica de Minkowski.

A un par arbitrario de puntos M_0, M del espacio de sucesos, hagamos corresponderle el número

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{-c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \qquad (6)$$

llamándolo *distancia* entre los puntos M_0, M o entre los sucesos M_0, M. Al mismo tiempo determinaremos el producto escalar de un par arbitrario de vectores M_0M, M_0N, suponiéndolo igual a la forma bilineal de las coordenadas de los vectores M_0M, M_0N; los coeficientes de dicha forma bilineal, naturalmente, los adoptaremos iguales a los de la forma cuadrática que está bajo el signo de radical cuadrático en la igualdad (6) (véase el § 191).

La fórmula (6) expresa la distancia entre sucesos en las coordenadas pertenecientes a un determinado sistema inercial de referencia S. Mas, como muestra la igualdad (5), aquí no importa la elección del sistema inercial de referencia. Dicho en otros términos, la métrica *de Minkowski introducida en un espacio de sucesos, es invariante respecto al paso de un sistema inercial de referencia a otro.*

La distancia entre dos sucesos M_0 y M puede ser imaginaria, igual a cero y positiva. Precisamente, $\rho(M_0, M)$ es imaginaria si M_0 y M pueden comunicarse mediante una señal cuya velocidad es $< c$; $\rho(M_0, M) = 0$ si la comunicación es posible únicamente mediante una señal luminosa; $\rho(M_0, M) > 0$ cuando ni siquiera una señal luminosa que comunica un suceso, puede anticipar el otro. Estas tres clases de sucesos M responden a la región interior del cono de luz con el vértice M_0, al propio cono y a su región exterior respectivamente (véase el § 208). Hagamos constar de paso que un cono de luz de un espacio de sucesos no es sino el cono isótropo de la métrica de Minkowski introducida en el referido espacio.

De la fórmula (6) se deduce que la norma del primer vector básico del sistema elegido de coordenadas afines es igual a ci; las normas de los demás vectores básicos son iguales a uno. Sustituyamos el primer vector básico por un vector unitario imaginario orientado en el mismo sentido; dejemos sin cambiar los demás vectores, pero ahora designaremos los vectores básicos con e_1, e_2, e_3, e_4 (en el § 207 usamos los símbolos a_1, a_2, a_3, a_4). De tal manera,

$$e_1 = \frac{1}{c}\, a_1, \quad e_2 = a_2, \quad e_3 = a_3, \quad e_4 = a_4.$$

Correspondientemente, ahora la primera coordenada del suceso será ct y no t. Introduzcamos nuevas notaciones de las coordenadas de sucesos suponiendo

$$ct = X_1, x = X_2, y = X_3, z = X_4;$$

llamaremos coordenadas normalizadas de un suceso a las coordenadas X_i. De la fórmula (6) tenemos:

$$\rho^2(M_0, M) = -(X_1 - X_1^0)^2 + (X_2 - X_2^0)^2 + (X_3 - X_3^0) + (X_4 - X_4^0)^2, \qquad (7)$$

donde X_k^0 y X_k son las coordenadas normalizadas de los sucesos M_0 y M. Conforme a la fórmula (7), el producto escalar de dos vectores x, y con las coordenadas x_k, y_k

se expresa mediante la fórmula

$$xy = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4. \tag{8}$$

Por cuanto las fórmulas (7) y (8) tienen aspecto canónico, la base e_1, e_2, e_3, e_4 es ortonormal; $e_1^2 = -1$ (véase el § 193). En un espacio físico, pásese del sistema inercial S al sistema inercial S'. Entonces las coordenadas de sucesos se transformarán según fórmulas lineales; apuntémoslas abreviadamente para las coordenadas normalizadas

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik}X_k + b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{3}$$

En el espacio de sucesos esta transformación corresponde al paso del sistema afín O, e_1, e_2, e_3, e_4 confrontado con S, al sistema afín O', e_1', e_2', e_3', e_4' comparado con S'. Dada la invariación de la métrica del espacio de sucesos, la base e_1', e_2', e_3', e_4' también es ortonormal, siendo $e_1'^2 = -1$. De tal modo, *si en el espacio físico un sistema inercial de referencia se sustituye por otro, entonces las coordenadas de un suceso arbitrario* (X_1, X_2, X_3, X_4) *se transforman según las fórmulas* (9) *que coinciden con las de transformación de coordenadas ortonormales en el espacio cuadridimensional de Minkowski.*

Con esto, el problema planteado queda resuelto en lo fundamental, pues la cuestión de la transformación de coordenadas ortonormales se ha estudiado en la sección precedente (véase el § 201). Queda un solo detalle del cual vamos a hablar.

§ 210. Para facilitar la exposición, haremos notar que mediante una transformación trivial de los sistemas inerciales de referencia S y S', las fórmulas (9) pueden hacerse homogéneas. En efecto, recordemos que el sistema inercial de referencia es un complejo integrado por un cuerpo material T, tres ejes cartesianos ligados fijamente con el cuerpo T, una escala, un reloj y un instante inicial de medida de tiempo. Al desplazar paralelamente los ejes cartesianos de uno de los sistemas S, S', procuremos que se dispongan de modo que en cierto instante el punto de origen de los ejes del sistema S coincida con el del sistema S'; el momento de observaciones de este suceso en los sistemas S y S' lo adoptaremos como instante inicial de medida de tiempo en cada uno de estos sistemas. Entonces a los valores nulos de t, x, y, z les corresponderán los valores nulos de t', x', y', z'. Por consiguiente, en las fórmulas (9) los términos independientes b_i serán iguales a cero, resultando

$$X_i' = \sum_{k=1}^{4} q_{ik} X_k. \tag{1}$$

En el espacio de sucesos las fórmulas (1) corresponden a la variación de la base de coordenadas ortonormales al permanecer invariable el origen. Consideremos un cono de luz con el vértice ubicado en el origen de coordenadas. Como los primeros vectores e_1, e_1' de las bases vieja y nueva son unitarios imaginarios, ambos se encuentran en la región interior del cono de luz. Dado que el hueco superior del cono de luz responde a los sucesos futuros respecto al instante nulo de medición de tiempo del sistema S, e_1 está orientado precisamente hacia el hueco superior. Mas, entonces e_1' también debe estar orientado hacia el mismo hueco del cono de luz. De aquí se desprende que la transformación (1) de las coordenadas normalizadas de sucesos corresponde en el espacio de sucesos al paso a una nueva base ortonormal a condición de que el nuevo vector básico e'_1 se halle en el mismo hueco del cono de luz donde está el vector básico viejo e_1.

Conforme al § 201, esta afirmación puede formularse del modo siguiente: *toda transformación de coordenadas inerciales ortonormales de sucesos es una transformación cuadridimensional de Lorentz* (se tiene en cuenta la transformación de Lorentz en el sentido estricto).

§ 211. Ahora podemos apuntar de una vez las condiciones que deben satisfacerse por los coeficientes q_{ik}, si las fórmulas (1) del § 210 expresan una transformación de coordenadas inerciales normalizadas de sucesos; basta alegar la relación matricial (6) del § 201 (véase también el § 196). Sólo hay que tener en cuenta que ahora por vector imaginario unitario se toma el vector e_1 y no el e_4, como en los §§ 196 — 201. Por eso, en el caso dado

$$I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Así pues, *si las fórmulas* (1) *del* § 210 *expresan una transformación de coordenadas inerciales normalizadas, entonces la matriz $Q = (q_{ik})$ satisface las condiciones*

$$Q^*IQ = I, \quad q_{11} > 0 \tag{2}$$

(la relación $q_{11} > 0$ significa que e_1 y e'_1 están en un mismo hueco hel cono de luz).

§ 212. Podemos dar una forma muy sencilla a la matriz Q realizando transformaciones triviales adecuadas de los sistemas inerciales sujetas a la consideración.

Imaginémonos que en el sistema inercial S pasemos a nuevas coordenadas cartesianas, sin variar la medición de tiempo ni la escala. Entonces las coordenadas de sucesos tendrán una transformación trivial con la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ 0 & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}$$

dado que $t' = t$ y x', y', z' se expresan sólo mediante x, y, z.

La matriz

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}$$

constituye una matriz ortogonal tridimensional ordinaria que se conoce bien de la geometría analítica. La transformación de coordenadas con la matriz Q dada corresponde en el espacio de sucesos al paso de la base e_i a la base e'_i, y si

$$e'_i = \sum_{k=1}^{4} p_{ik} e_k,$$

entonces la matriz $P = (p_{ik}) = (Q^*)^{-1}$ (véase el § 180).

De aquí

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 0 & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que $e'_1 = e_1$, y los vectores e'_2, e'_3, e'_4 se expresan sólo a través de los vectores e_2, e_3, e_4 según las fórmulas cuyos coeficientes constituyen la matriz

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$

Evidentemente, $P_1 = (Q_1^*)^{-1}$ y, por consiguiente, P_1 también es una matriz ortogonal de tres dimensiones. Por lo tanto, los vectores e'_2, e'_3, e'_4 se hallan en el hiperplano de los vectores e_2, e_3, e_4 y pueden obtenerse a consecuencia del movimiento euclidiano ordinario de una terna de vectores e_2, e_3, e_4 como un todo. Aquí hay que tener en cuenta que en el hiperplano $e_2e_3e_4$ se realiza la geometría euclidiana tridimensional (véase el § 159). Viceversa, si en el espacio de sucesos $e'_1 = e_1$, y los vectores e'_2, e'_3, e'_4 se obtienen de la terna de vectores e_2, e_3, e_4 a raíz del movimiento euclidiano en el hiperplano $e_2e_3e_4$, entonces tal transformación corresponde al paso trivial en el sistema S a nuevos ejes cartesianos.

Ahora, sean S y S' dos sistemas inerciales arbitrarios (coordenados sólo en el sentido del § 210), e_i y e'_i, las bases correspondientes a ellos en el espacio de sucesos (los puntos de origen O y O' coinciden). Si $e'_1 = e_1$, entonces S' se obtiene mediante una transformación trivial de S, lo cual no ofrece interés. Estimaremos que $e'_1 \neq e_1$ (el caso de $e'_1 = -e_1$ queda excluido en absoluto; véase el § 210). Denotemos con α el hiperplano de los vectores e_2, e_3, e_4, con α', el hiperplano de los vectores e'_2, e'_3, e'_4. Estos hiperplanos tienen un punto común O, sin coincidir uno con el otro. Por eso y según el § 182, los hiperplanos α, α' se cortan según el plano bidimensional β. Dejemos invariable el vector e_1, dando una nueva posición a la terna de vectores e_2, e_3, e_4 mediante el movimiento euclidiano dentro del hiperplano α, de modo que e_2, e_3 queden ubicados sobre el plano β. Análogamente, conservando e'_1, demos una nueva posición a la terna de vectores e'_2, e'_3, e'_4 por medio del movimiento euclidiano dentro de α', para que e'_2 y e'_3 también vayan a parar sobre el plano β y, además, que coincidan con los vectores e_2, e_3. En las nuevas posiciones, dejemos vigentes las notaciones viejas de los vectores. A cada una de las variaciones operadas de las bases e_i, e'_i le corresponde una variación trivial de los sistemas S, S' del espacio físico.

Ahora tenemos:

$$\begin{aligned} e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{12}e_2 + p_{13}e_3 + p_{14}e_4, \\ e'_2 &= p_{21}e_1 + p_{22}e_2 + p_{23}e_3 + p_{24}e_4, \\ e'_3 &= \theta \quad + \theta \quad + e_3 \quad + \theta, \\ e'_4 &= \theta \quad + \theta \quad + \theta \quad + e_4. \end{aligned}$$

Multipliquemos escalarmente ambos miembros de la primera igualdad por ambos miembros de la tercera; como $e_1'e_3' = 0$, $e_1e_3 = 0$, $e_2e_3 = 0$, $e_4e_3 = 0$, y $e_3^2 = 1$, por ende $p_{13} = 0$. Se puede mostrar exactamente del mismo modo que $p_{14} = 0$, $p_{23} = 0$, $p_{24} = 0$. Por consiguiente, la matriz P adquiere el aspecto que sigue

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos:

$$Q = (P^*)^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Así pues, mediante una variación trivial de los sistemas inerciales S, S', las fórmulas de transformación de coordenadas normalizadas de sucesos siempre pueden reducirse a la forma que sigue:

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= q_{11}X_1 + q_{12}X_2, \\ X_2' &= q_{21}X_1 + q_{22}X_2, \\ X_3' &= X_3, \\ X_4' &= X_4, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

§ 213. Para determinar los demás coeficientes, se puede usar las condiciones (2) del § 211. No obstante, respecto a los sistemas especializados S, S', la transformación buscada se apunta tan sencillamente que preferiremos obtener de inmediato el resultado final a partir de la identidad (5) del § 209, que expresa la invariación de la métrica del espacio de sucesos.

Volvamos a la designación física de las coordenadas de sucesos, apuntando correspondientemente a las ecuaciones citadas más arriba:

$$t' = At + Bx, \quad x' = Dt + Ex, \quad y' = y, \quad z' = z. \qquad (1)$$

La identidad (5) del § 209 en este caso toma la forma de

$$-c^2t'^2 + x'^2 = -c^2t^2 + x^2.$$

Al colocar las expresiones (1) en el primer miembro de esta igualdad y al comparar los coeficientes de la forma cuadrática resultante del primer miembro, con los coeficientes correspondientes del segundo, hallaremos:

$$-c^2A^2 + D^2 = -c^2, \qquad (2)$$

$$-c^2AB + DE = 0, \qquad (3)$$

$$-c^2B^2 + E^2 = 1. \qquad (4)$$

Ahora, hagamos notar que por razones físicas expuestas en el § 210 (véase también el § 211), debe ser $A > 0$. Asimismo por razones físicas resulta que $E \neq 0$ y se puede considerar $E > 0$ (con la elección del sentido adecuado del eje x). A consecuencia de la igualdad (3) tenemos:

$$\frac{D}{cA} = \frac{cB}{E} .$$

Denotemos con $-\beta$ cada una de estas relaciones; entonces $D = -\beta cA$, $cB = -\beta E$. De aquí y de las igualdades (2), (4) obtenemos:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

después de lo cual hallaremos B y D. De tal manera,

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (5)$$
$$y' = y, \quad z' = z.$$

Hemos aprovechado todas las condiciones algebraicas. Por consiguiente, el parámetro β es arbitrario, dicho en términos más exactos, desde el punto de vista matemático el mismo debe satisfacer tan sólo la desigualdad

$$1 - \beta^2 > 0. \qquad (6)$$

El parámetro tiene un sentido físico sencillo. Para revelarlo, consideremos un punto arbitrario M del espacio físico, que permanece fijo en el sistema S'; las coordenadas x', y', z' del referido punto son constantes. El punto M se mueve respecto al sistema S; al diferenciar las tres últimas ecuaciónes (5), hallaremos la velocidad del punto M en el sistema S:

$$\frac{dx}{dt} = \beta c, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

De tal modo, todos los puntos fijos en el sistema S', se mueven respecto al sistema S con una misma velocidad $(\beta c, 0, 0)$ orientada según el eje x. Esta velocidad común para todos los puntos de S' se llama velocidad de movimiento del sistema S' respecto a S; al designar con v su cumponente extendida a lo largo del eje x, obtendremos: $\beta = v/c$. De la desigualdad (6) tenemos:

$$v^2 < c^2. \qquad (7)$$

Si las propiedades del espacio físico no imponen otras limitaciones sobre la velocidad v, con la cual puede moverse un sistema inercial respecto a otro, entonces, también desde el punto de vista físico el parámetro β queda limitado sólo por la desigualdad (6). Por tanto, en este caso para los coeficientes q_{ik} de la transformación (1) del § 210 no existen más condiciones sino las enunciadas por las relaciones (2) del § 211, quedando resuelto por entero el problema de que nos ocupábamos.

Dicho en otros términos, *toda transformación de coordenadas inerciales normalizadas es transformación cuadridimensional de Lorentz; toda transformación cuadridimensional de Lorentz puede considerarse como una transformación de coordenadas inerciales normalizadas.*

Al mismo tiempo se puede decir que las transformaciones de coordenadas inerciales normalizadas constituyen un grupo isomorfo respecto al grupo cuadridimensional de Lorentz. Las transformaciones homogéneas de coordenadas inerciales normalizadas integran un grupo isomorfo respecto al grupo cuadridimensional homogéneo de Lorentz e isomorfo también al grupo de movimientos no euclidianos de la geometría tridimensional de Lobachevski (véase el § 202).

§ 214. Señalemos algunas conclusiones inferidas por nuestros razonamientos y cálculos.

1. De la desigualdad (7) del § 213 se deduce que la velocidad de movimiento de un sistema inercial respecto a otro puede ser sólo menor que la de la luz.

2. Al poner $\beta = \frac{v}{c}$ en las fórmulas (5), hallaremos:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

$$y' = y, z' = z.$$

Si v es pequeña respecto a la velocidad de la luz c, entonces

$$t' \approx t, \quad x' \approx x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

y en este caso obtendremos fórmulas aproximadas de la física clásica (véase el § 204).

3. Si dos sucesos (t_1, x_1), (t_2, x_2) se dan en puntos distintos del eje x del sistema S, siendo simultáneos con respecto al referido sistema ($t_2 = t_1$), entonces de la primera formula de (1) se desprende que $t_1' \neq t_2'$, por cuanto $x_2 \neq x_1$. De tal manera, los sucesos simultáneos en el sistema S no son simultáneos en el sistema S'. Por ende, es imposible la sincronización universal de los relojes, admitida por la física clásica (en esta relación, véase el § 204).

4. Supongamos que una varilla de una longitud $\Delta x' = x_2' - x_1'$ descansa sobre el eje x' del sistema S'; que en el sistema S, respecto al cual se mueve dicha varilla, la misma se mida en un determinado instante t. De la segunda ecuación de (1) obtenemos:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \Delta x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

De tal forma, la longitud de la varilla respecto a S es menor que respecto a S'. Pero si en el sistema S' hacemos girar dicha varilla, disponiéndola en el eje y, entonces por medio de la tercera ecuación de (1) obtendremos $\Delta y = \Delta y'$. Por consiguiente, podemos comparar varillas de escala rígidas en los sistemas S y S', disponiéndolas transversalmente respecto al movimiento; mas, es imposible elegir escalas iguales en todos los ejes de ambos sistemas S y S'. Entonces, la hipótesis de la posibilidad de unificar las escalas en todos los ejes es contradictoria.

5. Muévase un punto material en el sistema S' según el eje x', con una velocidad de

$$\frac{dx'}{dt'} = u'.$$

El sistema S' se mueve con una velocidad v respecto a S. Calculemos la velocidad $u = \frac{dx}{dt}$ que tiene un punto en movimiento respecto a S. Para ello, escribamos las ecuaciones inversas a las ecuaciones (1):

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

De aquí

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v + \frac{dx'}{dt'}}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}$$

es decir,

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v}{c^2}u'}. \tag{2}$$

Esta fórmula sustituye la ley clásica de la composición de velocidades, conforme a la cual debe ser $u = v + u'$ (en relación con esto, véase el § 204). Hagamos constar que

$$\frac{v + c}{1 + \frac{v}{c^2}c} = c.$$

Esto quiere decir que según la ley de la composición de velocidades (2), la velocidad de la luz sumada a la velocidad v vuelve a dar la velocidad de la luz. Por esto mismo, precisamente la fórmula (2), y no la ley clásica de la composición de velocidades, concuerda con el postulado sobre la independencia de la velocidad de la luz respecto a la elección de sistemas inerciales de referencia*).

---

*) Más detalles sobre los fundamentos matemáticos de la teoría de la relatividad véanse en el libro: *П. К. Рашевский*, Риманова геометрия и тензорный анализ, «Наука», (P. K. Rashevski, Geometría de Riemann y análisis tensorial).