

GEOMETRÍA DE CURVATURA CONSTANTE

Capítulo VIII

PROPIEDADES DIFERENCIALES  
DE LA MÉTRICA NO EUCLIDIANA

1. Forma métrica del plano euclidiano

§ 215. La fuente de todas nuestras deducciones siguientes es el análisis detenido de la estructura de las fórmulas mediante las cuales puede ser expresado el resultado de la medición de magnitudes geométricas.

Ante todo, consideraremos el caso más sencillo, cuando las mediciones se efectúan sobre el plano euclidiano.

Sea dado sobre un plano un sistema de coordenadas ortogonales cartesianas con los ejes  $Ox$  y  $Oy$ . Entonces, como sabemos de la geometría analítica, el cuadrado de la distancia  $\Delta s$  entre dos puntos  $M(x, y)$  y  $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$  se determina con la igualdad

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2. \quad (1)$$

Luego, si  $M_2(x + \delta x, y + \delta y)$  es un punto cualquiera más, entonces el coseno del ángulo  $\varphi$  entre los segmentos  $MM_1$  y  $MM_2$  se determina con la igualdad

$$\cos \varphi = \frac{\Delta x \delta x + \Delta y \delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}. \quad (2)$$

Al fin, el rectángulo con los vértices  $P_1(x, y)$ ,  $P_2(x + \Delta x, y)$ ,  $P_3(x, y + \Delta y)$ ,  $P_4(x + \Delta x, y + \Delta y)$  tiene el área  $\sigma$  determinada por la igualdad

$$\sigma = \Delta x \Delta y. \quad (3)$$

A partir de estas fórmulas, mediante pasos límite conocidos pueden obtenerse fórmulas más generales de la geometría diferencial válidas para las imágenes curvilíneas. A saber, si  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  son ecuaciones paramétricas de una curva suave, entonces la longitud de su arco  $s$ , correspondiente a la variación del parámetro  $t$  de  $a$  hasta  $b$ , se expresa mediante la integral

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

y el cuadrado de la diferencial del arco tiene el aspecto de

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Si  $\frac{dy}{dx}$  y  $\frac{\delta y}{\delta x}$  son coeficientes angulares de las direcciones de dos curvas en el punto de su intersección, el ángulo  $\varphi$  entre las curvas puede hallarse a base de la igualdad

$$\cos \varphi = \frac{dx \delta x + dy \delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2} \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}. \quad (11)$$

Al fin, si  $\Sigma$  es cierto dominio cuadrable, su área  $\sigma$  se determina con la igualdad

$$\sigma = \iint_{(\Sigma)} dx dy. \quad (\text{III})$$

Las fórmulas (I), (II), (III) caracterizan analíticamente la ley de la medición de longitudes, ángulos y áreas, expresada por los axiomas de la planimetría de Euclides. Por ende, se dice que por las referidas fórmulas se determina la métrica del plano euclidiano.

Para apuntar los segundos miembros de las fórmulas (I), (II), (III) nos valimos de un sistema de coordenadas ortogonales cartesianas. Si nos hubiéramos valido de algún otro sistema de coordenadas, entonces las expresiones para  $ds^2$ ,  $\cos \varphi$  y  $\sigma$  tendrían un aspecto distinto.

Sean, por ejemplo,  $r$  y  $\theta$  las coordenadas polares de un punto arbitrario,  $r = \varphi(t)$ ,  $\theta = \psi(t)$ , las ecuaciones de cierta recta. Entonces, la diferencial del arco de dicha recta, correspondiente a  $dt$  dado, puede expresarse a través de las diferenciales  $dr = \varphi'(t)dt$ ,  $d\theta = \psi'(t)dt$  mediante la relación

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (\text{I}')$$

Si  $dr$ ,  $d\theta$  son las variaciones de las coordenadas polares provocadas por un desplazamiento infinitamente pequeño del punto  $(r, \theta)$  según la dirección de cierta curva, y  $\delta r$ ,  $\delta\theta$  son variaciones de las coordenadas debidas al desplazamiento de este punto según la dirección de una otra curva, entonces el coseno del ángulo  $\varphi$  entre las curvas viene determinado por la igualdad

$$\cos \varphi = \frac{dr \delta r + r^2 d\theta \delta\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} \sqrt{\delta r^2 + r^2 \delta\theta^2}}. \quad (\text{II}')$$

Al fin, si  $\Sigma$  es un dominio cuadrable, y  $\sigma$  es su área, entonces,

$$\sigma = \iint_{(\Sigma)} r dr d\theta. \quad (\text{III}')$$

Las fórmulas (I'), (II'), (III') determinan analíticamente la métrica del plano euclidiano mediante las coordenadas polares.

Para hacer abstracción de las particularidades provocadas por el uso de uno u otro sistema de coordenadas en las fórmulas para  $ds^2$ ,  $\cos \varphi$  y  $\sigma$ , y revelar el principio general de la construcción de dichas fórmulas, las escribiremos en coordenadas arbitrarias. Obtendremos las expresiones buscadas a partir de las fórmulas (I), (II), (III).

Sea dado algún sistema de coordenadas  $(u, x)$  determinado por las ecuaciones  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , mediante las cuales, a partir de las coordenadas  $u, v$  de un punto arbitrario del plano pueden hallarse las coordenadas cartesianas  $x, y$  de dicho punto [acotaremos la clase de los sistemas de coordenadas admisibles exigiendo que las funciones  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  sean continuamente diferenciables y que se cumpla la condición de ser desigual a cero su jacobiano:

$$D \begin{pmatrix} x, y \\ u, v \end{pmatrix} \neq 0, \text{ la última condición garantiza que las relaciones } x = x(u, v), y = y(u, v)$$

sean invertibles en el entorno de un punto arbitrario y sean continuamente diferenciables las funciones  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ ].

Consideremos cierta línea  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ ; si  $dt$  es una variación del parámetro  $t$  y  $ds$  es la diferencial del arco de esta línea correspondiente a  $dt$ , entonces se puede obtener la expresión de  $ds$  a través de  $du = u'(t)dt$  y  $dv = v'(t)dt$  sustituyendo en el segundo miembro de la igualdad

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (\text{I})$$

los valores

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

Efectuando esta sustitución, agrupando los términos que contienen  $du^2$ ,  $du dv$ ,  $dv^2$ , e introduciendo las notaciones

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 &= E, \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} &= F, \\ \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 &= G, \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

hallaremos:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (1^*)$$

Aquí  $E$ ,  $F$ ,  $G$  son magnitudes, las cuales, para la elección dada del sistema de coordenadas  $(u, v)$ , se determinan por las ecuaciones  $(\alpha)$  en cada punto del plano, sin depender en absoluto de la elección de la curva que pase por dicho punto. Al contrario, las diferenciales  $du$ ,  $dv$  dependen exclusivamente de cómo se desplaza el punto con las coordenadas  $u$ ,  $v$ . De tal modo, la expresión del segundo miembro de  $(1^*)$  es una forma cuadrática con los argumentos  $du$ ,  $dv$  y con los coeficientes  $E$ ,  $F$ ,  $G$ .

Más, si  $du$ ,  $dx$  y  $\delta u$ ,  $\delta x$  son las diferenciales de las coordenadas  $u$ ,  $v$  correspondientes al desplazamiento del punto en dos direcciones diferentes que forman un ángulo  $\varphi$  una respecto a la otra, entonces, sustituyendo en la fórmula (II)

$$\cos \varphi = \frac{dx \delta x + dy \delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2} \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}$$

las magnitudes

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, & dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \\ \delta x &= \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v, & \delta y &= \frac{\partial y}{\partial u} \delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \delta v \end{aligned}$$

y tomando en consideración las igualdades  $(\alpha)$ , hallaremos:

$$\cos \varphi = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}. \quad (II^*)$$

Al fin, realizando la sustitución de las variables en la integral (III), hallaremos la expresión siguiente para el área  $\sigma$  del dominio  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{\Sigma} dx dy = \iint_{\Sigma} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \iint_{\Sigma} \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2} du dv = \\ &= \iint_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (III^*) \end{aligned}$$

De tal modo, obtuvimos tres fórmulas:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (I^*)$$

$$\cos \varphi = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}, \quad (II^*)$$

$$\sigma = \iint_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (III^*)$$

que expresan en un sistema de cualesquiera coordenadas longitudes, ángulos y áreas sobre el plano euclidiano. Contienen las fórmulas (I) — (III) y (I') — (III') como casos particulares.

Ahora es fácil notar que las expresiones para  $\cos \varphi$  y  $\sigma$  se construyen de un modo bien determinado a partir de la forma cuadrática  $ds^2$ .

A saber, el numerador del segundo miembro de la fórmula (II\*) es una forma bilineal que se obtiene mediante la polarización de la forma (I\*), y bajo el signo del radical en la integral de la fórmula (III\*) está nada menos que el discriminante de la forma (I\*).

Por consiguiente, la métrica del plano euclidiano en cada sistema de coordenadas se determina por la forma cuadrática (I\*), la cual, por esta razón, se llama *métrica*.

Las investigaciones de los matemáticos y los mecánicos del siglo XIX revelaron que los sistemas geométricos, en los cuales la medición de las magnitudes, lo mismo que sobre el plano euclidiano, se determina analíticamente por la forma diferencial CUADRÁTICA, resultan ser un fenómeno bien general en la geometría. Precisamente, estos sistemas son los que constituyen el objeto de la Geometría diferencial. Por ejemplo, el cálculo de longitudes, ángulos y áreas sobre cada superficie del espacio euclidiano, como lo sabemos de la teoría de las superficies (a su debido tiempo, lo haremos recordar detalladamente al lector), se efectúa mediante las fórmulas de la misma estructura que las (I\*) — (III\*).

Nuestro objetivo inmediato es demostrar que en la referida clase de sistemas geométricos se incluye la *geometría no euclidiana de Lobachevski*, es decir, que *en esta geometría también la métrica se determina por cierta forma diferencial cuadrática*.

## 2. Cálculo de la distancia entre dos puntos en el plano de Lobachevski

§ 216. Con la intención de investigar el carácter geométrico diferencial de la métrica del plano de Lobachevski, ante todo, tenemos que deducir una fórmula que exprese la distancia entre dos puntos a través de sus coordenadas (en algún sistema de coordenadas suficientemente cómodo).

La fórmula (I) del § 215 expresa la distancia euclidiana entre dos puntos mediante sus coordenadas cartesianas; en la base de esta fórmula subyace el teorema de Pitágoras.

La geometría no euclidiana de Lobachevski desconoce el teorema de Pitágoras, y la obtención de un teorema parecido a él, es bastante complicada; además, los sistemas de coordenadas que puedan introducirse sobre el plano de Lobachevski por analogía con el cartesiano, aquí resultan no muy cómodos en muchos conceptos para el manejo.

Por eso no emprenderemos el desarrollo de la teoría sintética de Lobachevski, sino que optaremos por otra vía que conduce directamente a la solución del problema planteado. Hagamos una reserva previa de que, en este caso, el plano de Lobachevski será considerado no separadamente, sino como un objeto del espacio de Lobachevski.

Denotemos el plano sujeto al examen (en el espacio de Lobachevski) con la letra  $\alpha$ , señalando algún punto  $O$  sobre este plano.

Existen dos orisferas que tocan el plano  $\alpha$  en el punto  $O$  (se encuentran en lados diferentes con respecto al plano  $\alpha$ ); elijamos alguna de ellas, denotándola con la letra  $\Sigma$ . Todo lo que si-

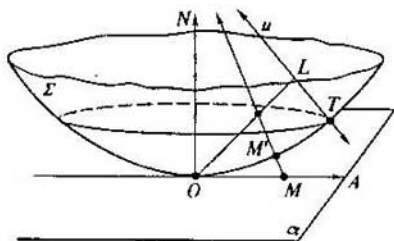


Fig. 159

que a continuación está basado en que la geometría elemental de la orisfera  $\Sigma$  es la geometría de Euclides (§ 47).

Ahora vamos a establecer cierta aplicación especial del plano  $\alpha$  en la orisfera  $\Sigma$ . Precisamente, hagamos que a un punto arbitrario  $M$  del plano  $\alpha$  le corresponda un punto  $M'$  de la orisfera  $\Sigma$ , en el cual ésta se interseca con la recta que pasa por  $M$  paralelamente a la perpendicular trazada a  $\alpha$  en el punto  $O$  (fig. 159; la dirección de paralelismo se supone establecida hacia el mismo sentido desde el plano  $\alpha$  en que está situada la orisfera  $\Sigma$ ). Fácilmente se comprende que las imágenes de todos los puntos del plano  $\alpha$  no llenan la orisfera  $\Sigma$  por completo; trataremos de determinar el dominio que llenan.

En el plano  $\alpha$  consideremos alguna recta  $OA$  que pase por el punto  $O$ ; sea  $ON$  la perpendicular al plano  $\alpha$  en el punto  $O$  (el punto  $N$  se encuentra en el mismo lado respecto a  $\alpha$  que la orisfera  $\Sigma$ ). En la bisectriz del ángulo  $AON$ , tracemos un segmento  $l$  de modo que le corresponde un ángulo de paralelismo  $\Pi(l) = \frac{\pi}{4}$ ; denotemos con la letra  $L$  el extremo de dicho segmento.

Debido a la elección de la magnitud de  $l$ , la recta  $u$  perpendicular al segmento  $OL$  en su extremo  $L$  y perteneciente al plano del ángulo  $AON$ , será paralela con respecto al rayo  $OA$  hacia un lado, y lo será con respecto a  $ON$  hacia el otro (fig. 159). Como la recta  $u$  es paralela a  $ON$ , es el eje de la orisfera  $\Sigma$  y, por consiguiente, interseca  $\Sigma$  en cierto punto  $T$ . Ahora, en el rayo  $OA$ , tomemos un punto arbitrario  $M$  (distinto al  $O$ ), trazando a través de él un rayo paralelo con respecto a  $ON$ . Este rayo pasa por el plano  $AON$  entre las rectas paralelas  $TL$  y  $ON$ . Por consiguiente, el punto  $M'$ , en el cual el mismo atraviesa el oriciclo  $OT$ , se halla entre los puntos  $O$  y  $T$ . Por otro lado, si tomamos un punto cualquiera  $P'$  en el oriciclo  $OT$  entre  $O$  y  $T$ , trazando a través del mismo una recta paralela a la  $ON$ , desde  $O$  hacia  $N$ , aquélla será paralela a la recta  $u$  en la misma dirección; en la otra dirección, esta recta se desviará de la recta  $u$  hacia el rayo  $OA$ , intersecándolo en un punto  $P$ . Esto significa que cada punto del oriciclo  $OT$  que se encuentre entre  $O$  y  $T$  es la imagen de un cierto punto perteneciente al rayo  $OA$ . Por fin, queda claro que el punto  $O$  corresponde a sí mismo. Así pues, las imágenes de todos los puntos del rayo  $OA$  llenan el arco del oriciclo  $OT$  con un extremo excluido  $T$ .

De aquí concluimos directamente que las imágenes de todos los puntos del plano  $\alpha$  llenan sobre la orisfera  $\Sigma$  un dominio «cubierto» por el arco  $OT$  (con el extremo  $T$  excluido) al girar éste alrededor de la recta  $ON$ .

Desde el punto de vista de la geometría, sobre la orisfera este dominio constituye nada más que el recinto interior del círculo  $k$ , cuyo centro es el punto  $O$ , y cuyo radio es el arco del oriciclo  $OT$ . El arco  $OT$  se llama *radio de curvatura del espacio de Lobachevski*. Si elegimos algún arco del oriciclo por concepto de la unidad de medida de las longitudes sobre la orisfera  $\Sigma$ , entonces la longitud del arco  $OT$  se expresará por un cierto número  $R$ . El número  $R$  (con la escala elegida) lo llamaremos también *radio de curvatura*.

Comparemos cierta parte determinada del espacio con la escala elegida; o sea, por ejemplo, el dominio interior de la esfera  $E$ , cuyo radio es igual a la distancia entre los extremos del arco de escala del oriciclo. El número  $\frac{l}{R}$  puede estimarse como «medida de lo no euclidiano» del espacio dentro de  $E$ . Precisamente, cuanto más es  $R$ , tanto menos se diferencia el espacio de Lobachevski dentro de  $E$  del euclidiano. El sentido exacto de esta última aserción consiste en lo siguiente: si  $x$  es cualquier segmento que se halla dentro de  $E$ , el ángulo del paralelismo  $\Pi(x)$  tiende uniformemente a  $\frac{\pi}{2}$  para  $R \rightarrow \infty$  (véase el § 230).

En el caso límite de  $R = \infty$  el círculo  $k$  se extiende sobre toda la orisfera  $\Sigma$ , pero entonces la orisfera  $\Sigma$  coincide con el plano  $\alpha$ , resultando euclidiano el espacio.

Introduzcamos en la orisfera  $\Sigma$  un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas  $(x'; y')$  con el origen en el punto  $O$  y la escala ya elegida antes. En estas coordenadas la frontera del círculo  $k$  se representará con la ecuación

$$x'^2 + y'^2 = R^2.$$

Ahora estableceremos cierto sistema de coordenadas también sobre el plano de Lobachevski  $\alpha$ . Esto es, con cada punto  $M$  del plano  $\alpha$ , compararemos, por concepto de coordenadas, dos números

$$x = \frac{x'}{R}, \quad y = \frac{y'}{R},$$

donde  $x', y'$  son las coordenadas cartesianas de la imagen  $M'$  del referido punto sobre la orisfera  $\Sigma$ .

De lo antecedente se deduce que las coordenadas de cualquier punto del plano  $\alpha$  satisfacen la desigualdad

$$x^2 + y^2 < 1;$$

recíprocamente, si dos números  $x, y$  dados con anterioridad satisfacen tal desigualdad, entonces sobre el plano  $\alpha$  existe un punto (exactamente uno), cuyas coordenadas son los mismos números  $x, y$  dados. Los números  $x, y$  se llaman coordenadas beltramianas del punto  $M$ .

§ 217. Ahora precisemos nuestro problema y lo formulemos del modo siguiente: dedúzcase una fórmula que exprese la distancia entre dos puntos  $M_1(x_1; y_1)$  y  $M_2(x_2; y_2)$  del plano  $\alpha$  a partir de sus coordenadas beltramianas  $x_1, y_1$  y  $x_2, y_2$  dadas.

Para la comodidad del lector, la deducción de la fórmula requerida está dividida en etapas.

1. En el párrafo antecedente establecimos cierta aplicación especial del plano  $\alpha$  sobre el interior del círculo  $k$  de la orisfera  $\Sigma$ . Esta aplicación posee la siguiente propiedad, sobre la cual se asientan todas las conclusiones que siguen: las imágenes de los puntos de una recta arbitraria perteneciente al plano  $\alpha$  constituyen el arco de cierto oriciclo dentro del círculo  $k$ . En efecto, al construir la imagen del punto  $M$  perteneciente al plano  $\alpha$ , trazamos a través de  $M$  un rayo paralelo al  $ON$ , hasta intersectar la orisfera  $\Sigma$  (véase la fig. 159); el punto de intersección  $M'$  no es sino la imagen del punto  $M$ . Sea dada una recta arbitraria  $a$  en el plano  $\alpha$ . Tracemos un rayo paralelo al  $ON$  a través de cada uno de sus puntos; todos los rayos trazados pertenecen a un plano  $\lambda$  paralelo al rayo  $ON$ , llenando cierta franja en este plano. Además, todos los rayos trazados son normales de la orisfera  $\Sigma$ ; luego, el plano  $\lambda$  interseca normalmente la orisfera  $\Sigma$ . Mas, la sección normal de la orisfera  $\Sigma$  por el plano  $\lambda$  es un oriciclo, cuya porción que está dentro de  $k$ , constituye el conjunto de imágenes de todos los puntos de la recta  $a$ . Así pues, las imágenes de todos los puntos de una recta arbitraria  $a$  perteneciente al plano  $\alpha$  constituyen el arco de un oriciclo, lo cual se afirmaba.

2. Consideremos algún movimiento del plano  $\alpha$  sobre sí mismo, es decir, una aplicación del plano  $\alpha$  sobre sí mismo tal que la distancia entre sus dos puntos cualesquiera sea igual a la

que separa sus imágenes. Anotemos simbólicamente esta aplicación en forma de  $M^* = \varphi(M)$ , donde  $M$  es un punto arbitrario del plano  $\alpha$ ,  $M^*$  es su imagen; anotemos simbólicamente también en forma de  $M' = \psi(M)$  la aplicación antes considerada del plano  $\alpha$  sobre el interior del círculo  $k$  de la orisfera  $\Sigma$ . Dos aplicaciones  $M^* = \varphi(M)$  y  $M' = \psi(M)$  inducen la aplicación  $M'^* = \chi(M')$  del interior del círculo  $k$  sobre sí mismo; aquí,  $M'$  es un punto arbitrario que se halla dentro del círculo  $k$ ,  $M'^*$  es su imagen, además,  $M'^* = \chi(M') = \psi(M^*)$ ,  $M^* = \varphi(M)$ ,  $M = \psi^{-1}(M')$ , donde  $\psi^{-1}$  es un símbolo que denota una aplicación inversa a la aplicación  $\psi$ . En otros términos, al moverse los puntos del plano  $\alpha$ , se desplazan sus imágenes sobre la orisfera  $\Sigma$ ; este desplazamiento viene representado por la anotación simbólica  $M'^* = \chi(M')$ .

Ahora, hagamos constar que al moverse  $M^* = \varphi(M)$ , los puntos situados en alguna recta perteneciente al plano  $\alpha$  pasan a puntos situados también en una recta; en resumen: al moverse el plano  $\alpha$  sobre sí mismo, todos sus puntos pasan también a rectas. A continuación, como hemos establecido en el punto anterior, al aplicarse  $M' = \psi(M)$ , los puntos situados en cualquier recta perteneciente al plano  $\alpha$ , pasan a puntos que forman el arco del oriciclo dentro de  $k$ ; en resumen: al aplicarse  $M' = \psi(M)$  del plano  $\alpha$  sobre el círculo  $k$ , las rectas del referido plano pasan a arcos de oriciclos. Comparando estas dos circunstancias, concluimos que al aplicarse sobre sí mismo  $M'^* = \chi(M')$  del círculo  $k$ , todos los arcos de los oriciclos ubicados dentro de  $k$ , pasan también a arcos de oriciclos.

Desde el punto de vista de la geometría elemental de la orisfera  $\Sigma$ , la cual es la geometría de Euclides, los oriciclos son rectas. Teniéndolo en cuenta, podemos enunciar del modo siguiente la conclusión antecedente: mediante la aplicación de  $M'^* = \chi(M')$ , el interior del círculo  $k$  se aplica sobre sí mismo de suerte que todas las cuerdas del círculo  $k$  vuelven a pasar a cuerdas.

3. Determinemos la relación compleja de cuatro puntos de un oriciclo del mismo modo que se determina la relación compleja de cuatro puntos de la recta de Euclides (véase el § 137, la fórmula (\*)).

Sean  $M'_1 M'_2$  dos puntos arbitrarios situados sobre la orisfera  $\Sigma$  dentro del círculo  $k$ ,  $M'_1 M'_2$ , sus imágenes respecto a la aplicación  $\chi$ ; sean  $P', Q'$  y  $P'^*, Q'^*$  puntos, en los cuales los oriciclos  $M'_1 M'_2$  y  $M'_1 M'_2$  cortan la circunferencia  $k$ , denotados de modo que el orden de sucesión de los puntos  $P', Q', M'_1, M'_2$  en el oriciclo  $M'_1 M'_2$  es similar al de los puntos  $P'^*, Q'^*, M'_1, M'_2$  en el oriciclo  $M'_1 M'_2$ . Entonces

$$(P'^* Q'^* M'_1 M'_2) = (P' Q' M'_1 M'_2),$$

es decir, la relación compleja de los puntos  $P'^*, Q'^*, M'_1, M'_2$  es igual a la de los  $P', Q', M'_1, M'_2$  (véase el § 138).

4. Este último resultado es la llave para solucionar nuestro problema.

Estamos buscando una fórmula que permita calcular la distancia entre los puntos arbitrarios  $M_1$  y  $M_2$  pertenecientes al plano  $\alpha$ , si se conocen sus coordenadas beltramianas.

Consideremos las imágenes  $M'_1$  y  $M'_2$  de los puntos  $M_1$  y  $M_2$  para la aplicación  $M' = \psi(M)$  del plano  $\alpha$  sobre el interior del círculo  $k$  de la orisfera  $\Sigma$  (véase el punto 2). Tracemos sobre  $\Sigma$  un oriciclo a través de  $M'_1$  y  $M'_2$ , designando con  $P'$  y  $Q'$  los puntos de intersección del mismo con la frontera del círculo  $k$ . Sea  $(P' Q' M'_1 M'_2)$  la relación compleja de los puntos  $P', Q', M'_1, M'_2$  que se determina en el sentido euclidiano ordinario sobre la orisfera  $\Sigma$ .

Afirmamos que la distancia entre dos puntos tomados arbitrariamente  $M_1, M_2$  sobre el plano de Lobachevski  $\alpha$ , se expresa con la fórmula

$$\rho(M_1, M_2) = c \ln (P' Q' M'_1 M'_2), \quad (*)$$

donde  $c$  es una constante positiva, cuya elección corresponde a la de la escala.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, hagamos notar que  $\rho(M_1, M_2) > 0$ , si los puntos  $M_1$  y  $M_2$  son diferentes. En rigor, si  $M_1$  y  $M_2$  son puntos diferentes, entonces  $\frac{P' M'_1}{M'_1 Q'} \neq \frac{P' M'_2}{M'_2 Q'}$ , por con-

siguiente,  $(P'Q'M_1M_2) \neq 1$  y  $\ln(P'Q'M_1M_2) \neq 0$ . A continuación establecemos los siguientes hechos.

1) Pasen a  $M_1^*, M_2^*$  los puntos  $M_1, M_2$  para algún movimiento  $M^* = \varphi(M)$  del plano  $\alpha$  sobre sí mismo. A los puntos  $M_1, M_2, M_1^*, M_2^*$  del plano  $\alpha$  les corresponden sobre la orisfera  $\Sigma$  los puntos  $M_1', M_2', M_1'^*, M_2'^*$ , y al movimiento  $M^* = \varphi(M)$  le corresponde la aplicación  $M'^* = \chi(M')$  del círculo  $k$  sobre sí mismo, la cual hace pasar  $M_1', M_2'$  a  $M_1'^*, M_2'^*$ . Denotemos, como se hizo más arriba, con  $P', Q'$  los puntos de intersección del oriciclo  $M_1'M_2'$  con la frontera del círculo  $k$ ; análogamente, mediante los puntos  $M_1'^*M_2'^*$  determinaremos los puntos  $P'^*, Q'^*$ . Si las notaciones  $P', Q'$  y  $P'^*, Q'^*$  están concordadas idóneamente, entonces, a base del punto 3 tenemos la igualdad de relaciones complejas

$$(P'^*Q'^*M_1'^*M_2'^*) = (P'Q'M_1M_2).$$

De aquí se desprende de inmediato la igualdad  $\rho(M_1^*, M_2^*) = \rho(M_1, M_2)$ .

2) En la recta  $M_1M_2$  tomemos un tercer punto  $M_3$  de forma que el punto  $M_2$  esté entre  $M_1$  y  $M_3$ . Sobre la orisfera  $\Sigma$ , a los puntos  $M_1, M_2, M_3$  les corresponden los puntos  $M_1', M_2', M_3'$  situados en un mismo oriciclo, hallándose  $M_2'$  entre  $M_1'$  y  $M_3'$ . Tengan el viejo sentido los símbolos  $P'$  y  $Q'$ ; supondremos solamente que en el oriciclo  $M_1'M_2'M_3'$  la dirección  $P'Q'$  es contraria a la de  $M_1'M_2'M_3'$ . Para esta última condición resultará  $\frac{P'M_1'}{M_1'Q'} > \frac{P'M_2'}{M_2'Q'}$ , por consiguiente,  $(P'Q'M_1M_2) > 1$  y del mismo modo

$$(P'Q'M_2M_3) < 1, \quad (P'Q'M_1M_3) < 1.$$

Escribamos las igualdades

$$\begin{aligned} (P'Q'M_1M_3) &= \frac{P'M_1'}{M_1'Q'} : \frac{P'M_3'}{M_3'Q'} = \left( \frac{P'M_1'}{M_1'Q'} : \frac{P'M_2'}{M_2'Q'} \right) \cdot \left( \frac{P'M_2'}{M_2'Q'} : \frac{P'M_3'}{M_3'Q'} \right) = \\ &= (P'Q'M_1M_2)(P'Q'M_2M_3). \end{aligned}$$

De aquí  $\ln(P'Q'M_1M_3) = \ln(P'Q'M_1M_2) + \ln(P'Q'M_2M_3)$ .

Como todas las relaciones sujetas a consideración son superiores a uno, serán positivos sus logaritmos y, consiguientemente, coincidirán con sus magnitudes absolutas. De suerte, podemos apuntar

$$|\ln(P'Q'M_1M_3)| = |\ln(P'Q'M_1M_2)| + |\ln(P'Q'M_2M_3)|$$

lo que conduce a la igualdad

$$\rho(M_1M_3) = \rho(M_1M_2) + \rho(M_2M_3).$$

3) Sea asignado cierto segmento  $E_1E_2$  como unidad de longitud. Dado que  $E_1, E_2$  son puntos diferentes, entonces  $c_1 = |\ln(P'_eQ'_eE_1E_2)| > 0$  (aquí  $P'_e, Q'_e$  son puntos de intersección del oriciclo  $E_1E_2$  con la frontera del círculo  $k$ ). Si en la fórmula (\*) suponemos  $c = \frac{1}{c_1}$ , obtendremos:

$$\rho(E_1E_2) = 1.$$

Así pues, la fórmula (\*) atribuye un determinado número positivo a cada segmento, y

1) a segmentos iguales les corresponden números iguales;

2) si  $M_2$  es un punto del segmento  $M_1M_3$  y a los segmentos  $M_1M_2$  y  $M_2M_3$  les corresponden los números  $\rho(M_1M_2) = a$ ,  $\rho(M_2M_3) = b$ , entonces al segmento  $M_1M_3$  le corresponde el número  $\rho(M_1M_3) = a + b$ ;

3) a cierto segmento  $E_1E_2$  le corresponde un número igual a 1.

Mas, estas condiciones determinan unívocamente la longitud del segmento (véase el § 20).

Con esto mismo queda demostrado que la fórmula (\*) expresa la longitud del segmento  $M_1M_2$ .



Con esto termina la parte de principio de la deducción de la fórmula que estamos buscando; todo lo que sigue se reduce a cálculos elementales.

5. Al igual que en el § 216, designaremos con  $x, y$  las coordenadas beltramianas del punto  $M$  perteneciente al plano  $\alpha$ , con  $x', y'$ , las coordenadas cartesianas de su imagen  $M'$  sobre la orisfera  $\Sigma$ ; al mismo tiempo,  $x' = Rx, y' = Ry$ .

Sobre el plano  $\alpha$ , junto con los puntos dados  $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ , la distancia entre los cuales tenemos que expresar, consideremos sus imágenes  $M'_1(x'_1; y'_1), M'_2(x'_2; y'_2)$  sobre  $\Sigma$ .

Sea  $M'(x'; y')$  un punto arbitrario del oriciclo  $M'_1M'_2$ ; suponiendo  $\frac{M'_1M'}{M'M'_2} = \lambda$ , obtendremos las relaciones conocidas

$$x' = \frac{x'_1 + \lambda x'_2}{1 + \lambda}, \quad y' = \frac{y'_1 + \lambda y'_2}{1 + \lambda}. \quad (1)$$

Sean  $\lambda = \lambda_1$  y  $\lambda = \lambda_2$  los valores del parámetro  $\lambda$ , para los cuales el punto  $M'$  acierta  $P'$  y  $Q'$  en la frontera del círculo  $k$ ; tenemos

$$(P'Q'M'_1M'_2) = \frac{P'M'_1}{M'_1Q'} : \frac{P'M'_2}{M'_2Q'} = \frac{M'_1P'}{P'M'_2} : \frac{M'_1Q'}{Q'M'_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Para hallar  $\lambda_1, \lambda_2$ , hay que sustituir los segundos miembros de las igualdades (1) en la ecuación de la frontera del círculo  $k$

$$x'^2 + y'^2 = R^2$$

y resolver la ecuación cuadrática obtenida respecto a  $\lambda$ . Al efectuar esta sustitución y al pasar a las coordenadas beltramianas de los puntos dados, obtenemos:

$$(x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 - (1 + \lambda)^2 = 0;$$

suponiendo aquí, para la brevedad,

$$x_1^2 + y_1^2 - 1 = \Omega_{11},$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 - 1 = \Omega_{12},$$

$$x_2^2 + y_2^2 - 1 = \Omega_{22},$$

escribiremos la última ecuación en forma de

$$\Omega_{22}\lambda^2 + 2\Omega_{12}\lambda + \Omega_{11} = 0,$$

de donde

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{22}}.$$

Para la numeración adecuada de los radicales  $\lambda_1, \lambda_2$  obtenemos:

$$(P'Q'M'_1M'_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\Omega_{12} - \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}} < 1^{*}.$$

Por consiguiente,

$$\rho(M_1, M_2) = c \ln \frac{\Omega_{12} - \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}. \quad (2)$$

Esta es la fórmula buscada. Haremos sólo un paso más, a saber, impondremos una determinada condición sobre la elección de la constante  $c$ . Es que a su tiempo supusimos establecida cierta escala sobre la orisfera  $\Sigma$ ; además, introdujimos una escala sobre el plano  $\alpha$ . Mientras

\* Aquí hay que tener en cuenta que todas las magnitudes  $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{22}$  son negativas.

que no esté recíprocamente condicionada del todo la elección de estas dos escalas, sigue indeterminada la constante  $c$ .

La elección de las escalas quedará sujeta a la siguiente condición. Sea  $M$  un punto arbitrario sobre el plano  $\alpha$ ,  $M'$ , su imagen sobre la orisfera  $\Sigma$ ; supongamos que el punto  $M$  se aproxima hacia el punto  $O$  según una recta, entonces el punto  $M'$  irá aproximándose hacia el punto  $O$  según un oriciclo. Exigiremos la igualdad

$$\lim_{M \rightarrow O} \frac{OM}{OM'} = 1,$$

donde  $OM$  es la longitud del segmento rectilíneo,  $OM'$ , la del arco del oriciclo. A esta condición determinaremos la constante  $c$ . Para comodidad de los cálculos, consideremos que el punto  $M'$  pertenece al eje  $Ox'$  del sistema cartesiano de la orisfera  $\Sigma$ . Entonces

$$OM' = x' = Rx, \quad OM = \rho(O, M) = c \ln \frac{1+x}{1-x}$$

[nos valemos de la fórmula (2) suponiendo  $x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = x, y_2 = 0$ ] y, por consiguiente,

$$\lim_{M \rightarrow O} \frac{OM}{OM'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{Rx} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{2c}{R} = 1;$$

de aquí  $c = \frac{R}{2}$ .

La fórmula que expresa la distancia no euclidiana entre dos puntos mediante sus coordenadas beltramianas, obtiene la forma de

$$\rho(M_1, M_2) = \frac{R}{2} \ln \frac{\Omega_{12}^2 - \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}} \quad (3)$$

§ 218. Ahora queremos dar una descripción del sistema de coordenadas beltramianas que no tenga que ver con el espacio circundante.

Por ahora, partamos de la consideración del sistema cartesiano sobre la orisfera  $\Sigma$ , como se hizo en el § 216, donde las coordenadas beltramianas fueron introducidas por primera vez.

Sean  $Ox'$  y  $Oy'$  dos oriciclos que sirven de ejes a un sistema cartesiano de la orisfera  $\Sigma$  (fig. 160). Al aplicarse el plano  $\alpha$  sobre la orisfera  $\Sigma$ , los oriciclos  $Ox'$  y  $Oy'$  tienen como sus preimágenes dos rectas recíprocamente perpendiculares pertenecientes al plano  $\alpha$ , que pasan por el punto  $O$ ; las designaremos con los símbolos  $Ox$  y  $Oy$ . Sobre el plano  $\alpha$ , dentro del ángulo formado por las direcciones positivas de las rectas  $Ox$  y  $Oy$ , tomemos un punto arbitrario  $M$  con las coordenadas beltramianas  $x, y$ ; sobre la orisfera  $\Sigma$  su imagen  $M'$  tiene coordenadas cartesianas (positivas)  $x' = Rx, y' = Ry$ . Bajemos una perpendicular del punto  $M$  a la recta  $Ox$  y designemos su base con  $M_x$ . Tracemos un rayo del punto  $M_x$  paralelo al  $ON$  ( $ON$  posee el mismo sentido que en el § 216); designemos con el símbolo  $M'_x$  el punto de su intersección con la orisfera  $\Sigma$ . Ahora hagamos constar que 1) el punto  $M'_x$  pertenece al oriciclo  $Ox'$ , precisamente, a su parte positiva; 2) los puntos  $M, M', M_x, M'_x$  yacen en un mismo plano; 3) la recta  $MM_x$  es perpendicular al plano  $NOM_x$ , por consiguiente, el plano  $MM'M'_x$  que pasa por ella, también es perpendicular al plano  $NOM_x$ ; 4) esta última circunstancia permite concluir que el arco del oriciclo  $M'M'_x$  es perpendicular al oriciclo  $Ox'$ . Así pues, el punto  $M'_x$  correspondiente, según la construcción, al punto  $M_x$  sobre la orisfera  $\Sigma$ , desde el punto de vista de la geometría de la orisfera, es la base de la perpendicular bajada del punto  $M'$  al eje  $Ox'$ . De manera análoga se construyen los puntos  $M_y$  y  $M'_y$  sobre  $Oy$  y  $Oy'$  (el cuadro general de nuestras construcciones aparece en la fig. 160). A base de lo expuesto tenemos:

$$OM'_x = x' = Rx, \quad OM'_y = y' = Ry.$$

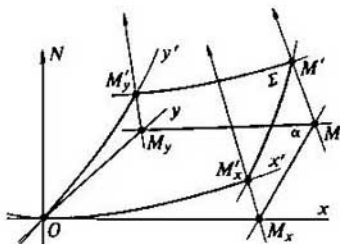


Fig. 160

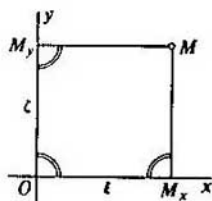


Fig. 161

Pongamos

$$OM_x = \xi, \quad OM_y = \zeta$$

y expresemos estas magnitudes a través de  $x$  y  $y$ . Hallemos  $\xi$ ; la otra magnitud  $\zeta$  se hallará análogamente. Como conocemos las coordenadas cartesianas del punto  $M'_x$ , que son  $x'$  y  $0$ , conocemos también las beltramianas del punto  $M_x$ :  $x$  y  $0$ . De este modo, para determinar  $\xi$  es suficiente aplicar la fórmula (3) del § 217, suponiendo en ella  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = 0$ . Obtenemos:

$$\xi = \frac{R}{2} \ln \frac{1+x}{1-x};$$

del mismo modo hallaremos:

$$\zeta = \frac{R}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.$$

La inversión de estas igualdades nos da las expresiones de las coordenadas beltramianas que necesitamos:

$$x = \operatorname{th} \frac{\xi}{R}, \quad y = \operatorname{th} \frac{\zeta}{R}; \quad (1)$$

aquí  $\operatorname{th}$  es un símbolo que denota la tangente hiperbólica. Al deducir estas fórmulas, suponíamos positivos los números  $x$ ,  $y$ ,  $\xi$  y  $\zeta$ , pero si por  $\xi$  y  $\zeta$  se sobreentienden los segmentos  $OM_x$  y  $OM_y$  con la consideración del signo según la regla corriente, entonces las fórmulas (1) expresarán las coordenadas beltramianas para cualquier posición del punto  $M$ . Esto se desprende de que la tangente hiperbólica es una función impar, es decir,  $\operatorname{th}(-\alpha) = -\operatorname{th} \alpha$ .

Ahora tenemos la posibilidad de descubrir las coordenadas beltramianas, haciendo abstracción absoluta del espacio que circunda el plano: sobre un plano se eligen dos ejes recíprocamente perpendiculares  $Ox$  y  $Oy$  y una escala; de un punto arbitrario  $M$  se baja la perpendicular  $MM_x$  al eje  $Ox$ , bajándose la  $MM_y$  al eje  $Oy$  (fig. 161). Así pues, quedan determinados dos números  $OM_x = \xi$  y  $OM_y = \zeta$ . Las coordenadas beltramianas del punto  $M$  son los números

$$x = \operatorname{th} \frac{\xi}{R}, \quad y = \operatorname{th} \frac{\zeta}{R}.$$

Si deseamos construir un punto a base de coordenadas beltramianas prefijadas  $x$ ,  $y$ , primero tenemos que hallar los segmentos  $\xi$  y  $\zeta$ , trazándolos luego en los ejes correspondientes, a partir del origen de las coordenadas  $y$ , al fin, levantar perpendiculares a los ejes, desde los

extremos de los segmentos trazados; la intersección de dichas perpendiculares determinará el punto de las coordenadas dadas  $x, y$ .

Las referidas perpendiculares tendrán un punto de intersección si, y sólo si, los números dados  $x, y$  satisfacen la desigualdad

$$x^2 + y^2 < 1;$$

la observancia de esta desigualdad, según sabemos, es necesaria y suficiente para que los números  $x, y$  sean coordenadas beltramianas de algún punto perteneciente al plano de Lobachevski (véase el § 216).

Es notable que en las coordenadas beltramianas la recta es determinada por una ecuación de primer grado. En rigor, sea  $u$  cierta recta perteneciente al plano  $\alpha$ ,  $M$ , un punto variable de dicha recta, con coordenadas beltramianas instantáneas  $x, y$ . Sobre la orisfera  $\Sigma$ , la imagen de  $u$  es el oriciclo  $u'$ , la imagen del punto  $M$  es el punto  $M'$  con coordenadas cartesianas  $x', y'$ . Ya que en la geometría de la orisfera el oriciclo  $u'$  juega el papel de una recta, en las coordenadas cartesianas le corresponde una ecuación de primer grado

$$A'x' + B'y' + C' = 0.$$

En esta ecuación, suponiendo  $x' = Rx, y' = Ry$  e introduciendo las magnitudes  $A'R = A, B'R = B, C' = C$ , obtenemos la ecuación de la curva dada:

$$Ax + By + C = 0.$$

Vemos que ésta es una ecuación de primer grado (con una condición complementaria:  $x^2 + y^2 < 1$ ).

§ 219. Algo más tarde nos veremos obligados a ocuparnos de la transformación de coordenadas beltramianas.

Sean dados sobre el plano de Lobachevski dos sistemas de coordenadas beltramianas (para la simplicidad, supongamos que tienen una misma escala). El punto arbitrario  $M$  perteneciente al plano, en uno de los sistemas tiene coordenadas  $(x, y)$ , en el otro,  $(\bar{x}, \bar{y})$ ; las magnitudes  $(\bar{x}, \bar{y})$  son funciones de  $x, y$ . Nos importará saber que estas funciones 1) son diferenciables continuamente, 2) tienen un jacobiano diferente de cero.

Demostremoslo. Realicemos un movimiento del plano sobre sí mismo, que haga coincidir las nuevas coordenadas del eje con los viejos ejes. En este caso, el punto  $M$  pasará al punto  $M^* = \varphi(M)$ . No es difícil comprender que las viejas coordenadas  $(x^*, y^*)$  del punto  $M^*$  son iguales a las nuevas del punto  $M$ . De tal modo,

$$x^* = \bar{x}, \quad y^* = \bar{y}.$$

Vemos de nuevo la aplicación conocida del plano sobre la orisfera  $\Sigma$  que toca el plano en el origen de las viejas coordenadas. El movimiento de  $M^* = \varphi(M)$  induce la aplicación sobre sí mismo del interior del círculo  $k$  de la orisfera  $\Sigma$ ; al igual que antes, lo anotaremos simbólicamente en forma de  $M'^* = \chi(M')$ .

La aplicación  $M'^* = \chi(M')$  hace que las cuerdas del círculo  $k$  vuelvan a ser cuerdas. De aquí y a base del § 138 concluimos que en el sistema de coordenadas cartesianas  $(x', y')$ , el cual, sobre  $\Sigma$ , corresponde al sistema beltramiano  $(x, y)$  del plano dado, esta aplicación viene representada por las fórmulas de tipo de

$$\left. \begin{aligned} x'^* &= \frac{a'_1 x' + b'_1 y' + c'_1}{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma'} \\ y'^* &= \frac{a'_2 x' + b'_2 y' + c'_2}{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma'} \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

a condición de que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Valiéndonos de las relaciones  $x' = Rx$ ,  $y' = Ry$ ,  $x'^* = Rx^* = R\bar{x}$ ,  $y'^* = Ry^* = R\bar{y}$ , de las fórmulas (\*) obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{a'_1 Rx + b'_1 Ry + c'_1}{\alpha' R^2 x + \beta' R^2 y + \gamma' R} \\ y &= \frac{a'_2 Rx + b'_2 Ry + c'_2}{\alpha' R^2 x + \beta' R^2 y + \gamma' R} \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Introduzcamos nuevas designaciones de coeficientes, suponiendo que

$$\begin{aligned} a'R &= a_1, & b'_1 R &= b_1, & c'_1 &= c_1, \\ a'_2 R &= a_2, & b'_2 R &= b_2, & c'_2 &= c_2, \\ \alpha' R^2 &= \alpha, & \beta' R^2 &= \beta, & \gamma' R &= \gamma. \end{aligned}$$

Entonces las fórmulas (\*\*) tendrán la forma de

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma} \\ \bar{y} &= \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma} \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

siendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \neq 0$$

(pues  $\Delta = R^3 \Delta'$  y  $\Delta' \neq 0$ ). Las fórmulas (\*\*\*) surten las expresiones de las nuevas coordenadas beltramianas de un punto arbitrario  $M$  mediante sus viejas coordenadas beltramianas (en estas fórmulas, los coeficientes  $a_1, b_1, \dots, \gamma$  dependen de cómo están situados los nuevos ejes respecto a los viejos). Ahora, cerciorémonos de que las fórmulas (\*\*\*) tienen sentido para todos los valores admisibles de las coordenadas beltramianas, es decir, para todos los valores de  $x, y$  que satisfagan la condición de  $x^2 + y^2 < 1$ . Efectivamente, si para  $x_0^2 + y_0^2 < 1$  resultara  $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$ , entonces para los valores de  $x, y$  bastante próximos a  $x_0, y_0$  que satisfagan las condiciones  $x^2 + y^2 < 1$ ,  $\alpha x + \beta y + \gamma \neq 0$ , los valores correspondientes de  $x, y$  podrían ser tan grandes como se quiera; mas, esto es imposible a causa de la desigualdad  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 < 1$ .

Así pues,  $\bar{x}, \bar{y}$  se expresan a través de  $x, y$  mediante fracciones racionales, cuyos denominadores difieren de cero para cualesquiera valores admisibles de  $x, y$ .

De aquí se deduce que  $\bar{x}, \bar{y}$  son diferenciables continuamente respecto a  $x, y$  en todos los puntos del plano de Lobachevski.

Luego, un cálculo no complicado conduce a la fórmula

$$D \left( \frac{\bar{x}, \bar{y}}{x, y} \right) = \frac{\Delta}{(\alpha x + \beta y + \gamma)^3}.$$

De aquí concluimos que las funciones  $\bar{x}, \bar{y}$  tienen un jacobiano diferente de cero en todos los puntos del plano de Lobachevski.

## 3. Forma métrica del plano de Lobachevski

§ 220. Ahora tenemos la posibilidad de establecer el resultado de principio prometido aún en el § 217: demostrar que la métrica del plano de Lobachevski se determina por una cierta forma cuadrática diferencial. Con este fin iremos buscando la expresión de la longitud del arco de una línea suave arbitraria. Los cálculos siguientes se basan en la fórmula (3) del § 217, que expresa la distancia entre dos puntos del plano de Lobachevski a través de las coordenadas beltramianas. A continuación representemos esta fórmula en cierta forma especial.

Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos puntos del plano de Lobachevski. Denotemos con  $(x; y)$  las coordenadas beltramianas del primer punto, con  $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ , las del segundo; denotemos con  $\Delta\rho$  la longitud del segmento  $M_1M_2$ . Supondremos infinitamente pequeñas las magnitudes  $\Delta x$  y  $\Delta y$ . Expresemos las magnitudes  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{22}$  que integran el segundo miembro de la fórmula (3) del § 217; tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{11} &= x^2 + y^2 - 1, \\ \Omega_{12} &= x^2 + y^2 - 1 + x\Delta x + y\Delta y, \\ \Omega_{22} &= x^2 + y^2 - 1 + 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

A consecuencia de la relación básica  $x^2 + y^2 < 1$  que enlaza las coordenadas beltramianas de un punto arbitrario, todas estas magnitudes son negativas. De las relaciones (1) hallamos:

$$\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22} = (\Omega_{12} - \Omega_{11})^2 - \Omega_{11}(\Omega_{22} - 2\Omega_{12} + \Omega_{11}) = (x\Delta x + y\Delta y)^2 + (1 - x^2 - y^2) \cdot (\Delta x^2 + \Delta y^2) = (1 - y^2)\Delta x^2 + 2xy\Delta x\Delta y + (1 - x^2)\Delta y^2, \quad (2)$$

de donde se ve que  $\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}$  constituyen una magnitud positiva, infinitamente pequeña junto con  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ .

A base de la fórmula (3) del § 217 obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \frac{R}{2} \ln \frac{\Omega_{12} - \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}} = \frac{R}{2} \ln \left( 1 - \frac{2\sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{\Omega_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}} \right) = \\ &= R \frac{\sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}}{1 - x^2 - y^2} + \alpha(x, y, \Delta x, \Delta y), \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\alpha$  es una variable infinitésima de orden superior respecto a  $\sqrt{\Omega_{12}^2 - \Omega_{11}\Omega_{22}}$ . Las igualdades (3) y (2) nos suministran el aspecto especial de la fórmula (3) del § 217, que necesitamos:

$$\Delta\rho = R \frac{\sqrt{(1 - y^2)\Delta x^2 + 2xy\Delta x\Delta y + (1 - x^2)\Delta y^2}}{1 - x^2 - y^2} + \alpha(x, y, \Delta x, \Delta y), \quad (4)$$

del cual ya se deduce fácilmente la expresión de la longitud del arco.

Sea determinada alguna línea por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Al variar  $t$  en el segmento  $t_0 \leq t \leq T$ , un punto arbitrario describe cierto arco  $A_0A$  de la línea, de forma que para  $t = t_0$  el punto variable coincide con el origen del arco  $A_0$ , y si  $t = T$  con el extremo del arco  $A$ . Si las funciones  $x(t)$  y  $y(t)$ , junto con sus derivadas de primer orden, son continuas en el segmento  $t_0 \leq t \leq T$ , y sus derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto del referido segmento, entonces llamaremos suave el arco  $A_0A$ <sup>\*)</sup>.

\*) La condición de  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \neq 0$  aquí tiene el mismo sentido que en la Geometría diferencial euclidiana (véase P. K. Rashevski, Geometría diferencial (П. К. Ращевский, Дифференциальная геометрия)).

\*) La condición de  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \neq 0$  aquí tiene el mismo sentido que en la Geometría diferencial euclidiana (véase P. K. Rashevski, Geometría diferencial (П. К. Ращевский, Дифференциальная геометрия)).

Es importante establecer que la suavidad de una línea no depende del sistema de coordenadas beltramianas a que pertenece. Con esta finalidad, consideremos una transformación arbitraria de las coordenadas beltramianas dadas en nuevas coordenadas beltramianas. Sean  $(x, y)$  y  $(\bar{x}, \bar{y})$  viejas y nuevas coordenadas, respectivamente, de un punto arbitrario de un plano;  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  son funciones de  $x, y$ :

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y), \quad \bar{y} = \bar{y}(x, y).$$

En el § 219 mostramos que estas funciones son diferenciables continuamente y poseen un jacobiano diferente de cero. De aquí se desprenden la existencia y la continuidad de las derivadas  $\frac{d\bar{x}}{dt}, \frac{d\bar{y}}{dt}$ :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Luego, si  $\frac{dx}{dt}$  y  $\frac{dy}{dt}$  son desiguales a cero a un mismo tiempo, entonces  $\frac{d\bar{x}}{dt}$  y  $\frac{d\bar{y}}{dt}$  tampoco pueden anularse a un mismo tiempo, pues

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

De tal modo, la propiedad de suavidad sugerida para el sistema  $(x, y)$  se cumplirá también en el caso de cualquier otro sistema  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Al introducir el concepto de longitud del arco  $A_0 A$ , procederemos del mismo modo que al determinar la longitud del arco de una línea en la geometría euclidiana. Partamos de manera arbitraria el segmento  $t_0 \leq t \leq T$  con puntos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  dispuestos en orden ascendente:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T.$$

En el arco  $A_0 A$ , a cada punto  $t_i$  le corresponderá cierto punto  $A_i$ . Construyamos una quebrada  $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A$ , designando con  $\sigma$  su longitud. De tal modo, a cada división del segmento  $t_0 \leq t \leq T$  le corresponde un cierto número positivo  $\sigma$ , o sea, la longitud de la quebrada correspondiente.

Ahora, imaginémosnos que se opta por una sucesión de divisiones del segmento  $t_0 \leq t \leq T$  tal que la longitud máxima de un segmento parcel de una división tiende a cero. Si la sucesión correspondiente de los números  $\sigma$  tiende a cierto límite  $s$  que no depende de la elección de la sucesión de divisiones del segmento  $t_0 \leq t \leq T$ , entonces el valor de este límite, es decir, el número  $s$ , lo llamaremos longitud del arco  $A_0 A$ .

Pongamos

$$\begin{aligned} A_i A_{i+1} &= \Delta \rho_i \\ x(t_{i+1}) - x(t_i) &= \Delta x_i \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= \Delta y_i \end{aligned}$$

Entonces, conforme a la fórmula (4), la longitud de la quebrada se determinará por la igualdad

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \rho_i = R \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{(1-y_i^2)(\Delta x_i)^2 + 2x_i y_i \Delta x_i \Delta y_i + (1-x_i^2)(\Delta y_i)^2}{(1-x_i^2 - y_i^2)^2}} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(x_i, y_i, \Delta x_i, \Delta y_i).$$

Pasando al límite, de aquí hallamos:

$$s = R \int_{t_0}^T \frac{\sqrt{(1-y^2)x'^2 + 2xyx'y' + (1-x^2)y'^2}}{1-x^2-y^2} dt, \quad (5)$$

donde las virgulillas denotan la diferenciación respecto a  $t^{**}$ .

La existencia de la integral presente en el segundo miembro de la fórmula obtenida viene asegurada por la continuidad de las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $x'(t)$  e  $y'(t)$ . Supongamos ser variable el límite superior de la integral en la fórmula (5); entonces, el arco de la curva se expresará mediante esta fórmula como función de  $T$ :

$$s = s(T).$$

Al determinar la diferencial del arco, hallamos:

$$ds = R \frac{\sqrt{(1-y^2)dx^2 + 2xy dx dy + (1-x^2)dy^2}}{1-x^2-y^2}$$

ó

$$ds^2 = R^2 \frac{(1-y^2)dx^2 + 2xy dx dy + (1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}. \quad (6)$$

De tal modo, *el cuadrado de la diferencial de un arco es la forma cuadrática de las diferenciales  $dx$  y  $dy$ .*

Introducamos las notaciones:

$$\frac{R^2(1-y^2)}{(1-x^2-y^2)^2} = E(x, y), \quad \frac{R^2xy}{(1-x^2-y^2)^2} = F(x, y), \quad \frac{R^2(1-x^2)}{(1-x^2-y^2)^2} = G(x, y). \quad (7)$$

Entonces (6) se apuntará en forma de

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2. \quad (8)$$

<sup>\*\*</sup>) Para demostrar que  $\Sigma \alpha(x_i, y_i, \Delta x_i, \Delta y_i) \rightarrow 0$ , basta notar que  $\alpha_i = \alpha(x_i, y_i, \Delta x_i, \Delta y_i)$  tiene el segundo orden de infinitud respecto a  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ . Más exactamente, si toda la

línea pertenece al dominio  $1-x^2-y^2 > \varepsilon > 0$ , entonces la relación  $\left| \frac{\alpha_i}{\Delta t_i^2} \right|$  por arriba está acotada por un número que depende de  $\varepsilon$  y de las cotas superiores de las magnitudes  $|x'(t)|$ ,  $|y'(t)|$ . Esto deriva de la determinación de  $\alpha_i$  conforme a la igualdad (3) y de la expresión  $\Delta x_i, \Delta y_i$  a través de  $\Delta t_i$  según la fórmula de Lagrange.



La forma cuadrática  $E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$  determina la medición de las magnitudes de líneas sobre el plano de Lobachevski. Por ende, la llamamos *forma métrica del plano de Lobachevski*.

§ 221. Ahora establecemos la fórmula que exprese el ángulo entre dos líneas.

Como fue mostrado más arriba (véase el § 218), en las coordenadas beltramianas, una recta se determina por la ecuación de primer grado:

$$Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

Si algún punto  $M_1(x_1, y_1)$  se halla sobre esta recta, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1), es decir, debe tener lugar

$$Ax_1 + By_1 + C = 0. \quad (2)$$

Sustrayendo término a término la igualdad (2) de la ecuación (1), obtenemos:

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

donde  $k = -\frac{A}{B}$ .

En esta última ecuación, llamaremos a la magnitud  $k$  *parámetro director de una recta*.

El ángulo entre dos líneas arbitrarias, naturalmente, se define como ángulo entre sus tangentes. Como en las coordenadas beltramianas una recta se representa por una ecuación de primer grado, entonces la ecuación de una tangente en estas coordenadas tiene justamente la misma forma que la ecuación de una tangente en las coordenadas cartesianas del plano euclidiano, y su parámetro director se expresa justamente del mismo modo que el coeficiente angular de una tangente en la geometría de Euclides.

Efectivamente, sea dada una curva determinada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Tomemos en esta curva dos puntos  $M$  y  $M'$  correspondientes a dos valores del parámetro  $t$  y  $t'$ . La ecuación de la secante  $MM'$  en las coordenadas beltramianas, por lo visto, tiene forma de

$$\frac{X - \varphi(t)}{\varphi(t') - \varphi(t)} = \frac{Y - \psi(t)}{\psi(t') - \psi(t)},$$

De aquí, dividiendo en  $t' - t$  los denominadores de ambos miembros y pasando al límite para  $t' \rightarrow t$ , obtenemos la ecuación de una tangente en forma de

$$\frac{X - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{Y - \psi(t)}{\psi'(t)}$$

y el parámetro director

$$k = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{dy}{dx}.$$

Consideremos dos líneas cualesquiera, cuyas direcciones en un punto común  $M(x, y)$  estén determinadas por los parámetros  $k_1 = \frac{dy}{dx}$ ,  $k_2 = \frac{\delta y}{\delta x}$ . Demostraremos que el ángulo  $\varphi$  entre estas dos líneas se expresa mediante una fórmula exactamente de la misma estructura que la (II\*) del § 215, que expresa el ángulo euclidiano en coordenadas arbitrarias; a saber,

$$\cos \varphi = \frac{E dx \delta x + F(dx \delta y + \delta y \delta x) + G dy \delta y}{\sqrt{E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2} \sqrt{E \delta x^2 + 2F \delta x \delta y + G \delta y^2}}. \quad (3)$$

Ante todo, estableceremos que el segundo miembro de esta fórmula es un invariante en cuanto a la transformación de las coordenadas beltramianas.

Junto con el sistema de coordenadas  $(x, y)$ , consideremos un nuevo sistema beltramiano  $(\bar{x}, \bar{y})$ , el origen y las direcciones de cuyos ejes son arbitrarios. Representemos la fórmula métrica del plano de Lobachevski en las nuevas coordenadas:

$$ds^2 = \bar{E} d\bar{x}^2 + 2\bar{F} d\bar{x} d\bar{y} + \bar{G} d\bar{y}^2.$$

Como  $ds^2$  no depende del sistema de coordenadas, debe tener lugar la identidad siguiente:

$$\bar{E} d\bar{x}^2 + 2\bar{F} d\bar{x} d\bar{y} + \bar{G} d\bar{y}^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2. \quad (4)$$

Suponiendo que la relación entre las coordenadas viejas y nuevas se establece con las fórmulas

$$x = x(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = y(\bar{x}, \bar{y}),$$

sustituamos estas expresiones de  $x$  e  $y$  a través de  $\bar{x}, \bar{y}$  en el segundo miembro de la identidad; obtendremos:

$$\begin{aligned} \bar{E} d\bar{x}^2 + 2\bar{F} d\bar{x} d\bar{y} + \bar{G} d\bar{y}^2 = & \left[ E \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2F \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + G \left( \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] d\bar{x}^2 + \\ & + 2 \left[ E \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + F \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right) + G \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \right] d\bar{x} d\bar{y} + \\ & + \left[ E \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \right)^2 + 2F \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + G \left( \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] d\bar{y}^2. \end{aligned}$$

Más,  $d\bar{x}$  y  $d\bar{y}$  como diferenciales de variables independientes son magnitudes que varían arbitrariamente: por esto, los coeficientes de la forma diferencial cuadrática presente en el primer miembro de la última identidad, son iguales a los coeficientes correspondientes de la forma de su segundo miembro, es decir,

$$\left. \begin{aligned} \bar{E} &= E \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2F \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + G \left( \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right)^2, \\ \bar{F} &= E \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + F \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right) + G \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}}, \\ \bar{G} &= E \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \right)^2 + 2F \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + G \left( \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

El numerador del segundo miembro de la fórmula (3) constituye una forma bilineal

$$E dx \delta x + F (dx \delta y + dy \delta x) + G dy \delta y,$$

es decir, una expresión homogénea, lineal respecto a cada uno de los sistemas de variables  $dx, dy$  y  $\delta x, \delta y$ . Fácilmente se ve que esta forma es invariante respecto a la transformación de las coordenadas de Beltrami, es decir,

$$\bar{E} d\bar{x} \delta \bar{x} + \bar{F} (d\bar{x} \delta \bar{y} + d\bar{y} \delta \bar{x}) + \bar{G} d\bar{y} \delta \bar{y} = E dx \delta x + F (dx \delta y + dy \delta x) + G dy \delta y. \quad (5a)$$

En efecto, sustituyendo las magnitudes  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  por las expresiones (5) en el primer miembro y valiéndonos de las igualdades

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} d\bar{y}, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} d\bar{y}, \quad (5b)$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \delta \bar{x} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \delta \bar{y}, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \delta \bar{x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \delta \bar{y}, \quad (5c)$$

después de transformaciones simples, obtendremos el segundo miembro de la igualdad (5a), con esto mismo dejaremos demostrada la validez de dicha igualdad. No obstante, la igualdad (5a) puede obtenerse fácilmente, sin enterarnos de cómo se expresen  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$  mediante  $E$ ,  $F$ ,  $G$  para la condición (4), es decir, sin acudir a las fórmulas (5). Es que la igualdad (4) se observa idénticamente, cualesquiera que sean  $d\bar{x}$ ,  $d\bar{y}$ , como consecuencia de las fórmulas (5b). Por ende, (o, si se quiere, a consecuencia de las fórmulas (5c)) tenemos

$$\bar{E} \delta \bar{x}^2 + 2\bar{F} \delta \bar{x} \delta \bar{y} + \bar{G} \delta \bar{y}^2 = E \delta x^2 + 2F \delta x \delta y + G \delta y^2, \quad (4a)$$

así también

$$\begin{aligned} \bar{E} (d\bar{x} + \delta \bar{x})^2 + 2\bar{F} (d\bar{x} + \delta \bar{x})(d\bar{y} + \delta \bar{y}) + \bar{G} (d\bar{y} + \delta \bar{y})^2 = \\ = E (dx + \delta x)^2 + 2F (dx + \delta x)(dy + \delta y) + G (dy + \delta y)^2. \end{aligned} \quad (4b)$$

Sustrayendo (4) y (4a) de (4b), obtenemos (5a).

Hemos demostrado la invariación del numerador del segundo miembro de la fórmula (3). La invariación del denominador se expresa por las igualdades (4) y (4a).

Así pues, el segundo miembro de la fórmula (3) constituye un invariante en cuanto a la variación de las coordenadas beltramianas.

Sea dado un punto  $M$  con las coordenadas beltramianas  $x$ ,  $y$  dos líneas que pasen por el mismo, con los parámetros directores

$$k_1 = \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Para establecer que la fórmula (3) determina el ángulo entre las líneas dadas, introduzcamos un nuevo sistema de coordenadas beltramianas, ubicando su origen en el punto  $M$ . Al nuevo sistema de coordenadas le corresponderán nuevos valores de  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y nuevos valores de los parámetros directores de las líneas dadas (de relaciones de las diferenciales de las nuevas coordenadas); el valor del segundo miembro de la fórmula (3) seguirá invariable. Para no complicar la cosa con símbolos excesivos, conservemos las viejas notaciones de las magnitudes.

Ahora, en el punto  $M$  tenemos:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; valiéndonos de las fórmulas (7) del § 220, en el punto  $M$  hallamos los valores siguientes de los coeficientes  $E$ ,  $F$ ,  $G$ :

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2,$$

y la fórmula (3) adquiere el siguiente aspecto

$$\cos \varphi = \frac{dx \delta x + dy \delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2} \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}. \quad (*)$$

Consideremos la orisfera  $\Sigma$  que toca nuestro plano en el punto  $M$ , es decir, en el origen del nuevo sistema de coordenadas; apliquemos el plano sobre la orisfera así, como lo hicimos en el § 226. A cada punto del plano con coordenadas beltramianas  $(x, y)$  le corresponde un punto con coordenadas cartesianas  $(x', y')$  sobre  $\Sigma$ , siendo

$$x = \frac{x'}{R}, \quad y = \frac{y'}{R}.$$

En el segundo miembro de la fórmula (\*), sustituycamos los argumentos con arreglo a estas fórmulas; obtendremos

$$\cos \varphi = \frac{dx' \delta x' + dy' \delta y'}{\sqrt{dx'^2 + dy'^2} \sqrt{\delta x'^2 + \delta y'^2}}. \quad (**)$$

Esta fórmula coincide con la de Euclides (II) del § 215; de aquí es evidente que ella determina el ángulo entre las imágenes de las dos líneas dadas sobre la orisfera  $\Sigma$ . Pero, en el punto de

contacto de la orisfera  $\Sigma$  con nuestro plano, el ángulo entre dos líneas cualesquiera sobre el plano es igual al ángulo entre sus imágenes sobre la orisfera. Por consiguiente, la fórmula (\*\*\*) y, por ende, la (\*) determinan el ángulo entre las dos líneas dadas sobre el plano de Lobachevski en consideración. Con esto mismo queda demostrado que en un punto arbitrario y en cualesquiera coordenadas beltramianas el ángulo se determina mediante la fórmula (3).

§ 222. Procedamos, por fin, al problema de la medición de áreas.

Sobre el plano de Lobachevski consideraremos un conjunto de toda clase de dominios finitos acotados por curvas suaves y suaves a trozos. Supongamos que a cada área de tal género le está puesto en correspondencia un número positivo, observándose las condiciones siguientes:

- 1) a los dominios congruentes les corresponden números iguales;
- 2) si un dominio  $\Omega$  está dividido en dos dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  por una línea suave a trozos, entonces el número correspondiente al dominio  $\Omega$  es igual a la suma de los números correspondientes a los dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

De otro modo se puede decir que está representada la función positiva del dominio

$$\sigma = f(\Omega)$$

que 1) adquiere valores iguales en los dominios congruentes y 2) posee la propiedad de aditividad, es decir,

$$f(\Omega_1 + \Omega_2) = f(\Omega_1) + f(\Omega_2)$$

(aquí  $\Omega_1 + \Omega_2$  ha de entenderse como un dominio constituido por los puntos de los dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  y por los de la línea divisoria).

Definamos también el concepto de continuidad de la función de un dominio; preliminarmente, habrá que definir la convergencia de la sucesión de dominios.

Ubiquemos el centro de un círculo de radio  $\varepsilon$  en cada punto de un dominio acotado  $\Omega$ . El conjunto de los puntos internos de todos los círculos de tal índole convengamos en llamarlo  $\varepsilon$ -entorno del dominio  $\Omega$ . De manera análoga se define el  $\varepsilon$ -entorno de la frontera de un dominio. Designemos con  $\Omega'_\varepsilon$  el conjunto de todos los puntos del dominio  $\Omega$ , salvo los que concurren en el  $\varepsilon$ -entorno de su frontera. Sea dada una sucesión infinita de dominios acotados  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n, \dots$ ; diremos que la sucesión  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n, \dots$  converge hacia el dominio  $\Omega$ , si para cualquier  $\varepsilon > 0$  se puede señalar un número  $N$  tal que para cualquier  $n \geq N$  el dominio  $\Omega_n$  quede comprendido en el  $\varepsilon$ -entorno del dominio  $\Omega$  y contenga el conjunto  $\Omega'_\varepsilon$ .

Será natural llamar continua la función del dominio  $f(\Omega)$  siempre que para cualquier dominio  $\Omega$  y para cualquier sucesión de dominios  $\Omega_n$  que converja hacia ella, tenga lugar la igualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\Omega_n) = f(\Omega).$$

Para la función positiva de un dominio, de las condiciones 1) y 2) deriva la propiedad de continuidad. Sin embargo, no nos detendremos en la demostración de esta afirmación. Para facilitar la especulación, se puede suponer sencillamente que son continuas las funciones positivas del dominio que se consideran más abajo.

Llamaremos *área del dominio*  $\Omega$  del plano de Lobachevski al valor adquirido en este dominio por la función positiva  $f(\Omega)$  que satisfaga las condiciones 1) y 2).

Conviene hacer la pregunta: ¿en qué medida las exigencias 1) y 2) determinan la función positiva  $f(\Omega)$ ? Esta cuestión se resuelve con el siguiente teorema.

TEOREMA. Si  $\varphi(\Omega)$  es alguna función positiva de un dominio, que satisfaga las condiciones 1) y 2), entonces toda otra función positiva del dominio, que satisfaga las mismas condiciones, se representa en forma de  $k\varphi(\Omega)$ , donde  $k$  es una variable positiva.

De tal modo, según nuestra definición, las áreas de todos los dominios se determinan con la exactitud hasta el factor constante. Este factor será fijo si se atribuye un área igual a uno a

cierto dominio  $\Omega_0$ ; entonces el área de un dominio arbitrario se representará en forma de

$$f(\Omega) = \frac{\varphi(\Omega)}{\varphi(\Omega_0)},$$

donde  $\varphi(\Omega)$  es una función positiva arbitraria de un dominio, que satisface las condiciones 1) y 2).

Pasemos a la demostración del teorema planteado más arriba. Hagamos notar que de las proposiciones del § 48 se deduce la validez de la afirmación del teorema para los triángulos; a saber, si  $f(\Omega)$  es función positiva de un dominio, que satisface las condiciones 1) y 2),  $\Delta$  es cierto triángulo y  $D(\Delta)$  es el defecto de este triángulo, entonces

$$f(\Delta) = k' D(\Delta), \quad (1)$$

donde  $k'$  es una constante que no depende de la elección de  $\Delta$ . Sea  $\varphi(\Omega)$  una otra función positiva del dominio, que satisface también las condiciones 1) y 2); de manera análoga

$$\varphi(\Delta) = k'' D(\Delta). \quad (2)$$

Suponiendo

$$\frac{k'}{k''} = k,$$

tendremos (1) y (2)

$$f(\Delta) = k\varphi(\Delta). \quad (3)$$

Evidentemente, la misma relación se da entre los valores adquiridos por las funciones  $f(\Omega)$  y  $\varphi(\Omega)$  en polígonos arbitrarios. En rigor, sea  $S$  un polígono arbitrario. Partámoslo de algún modo en triángulos  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ :

$$S = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n.$$

Aplicando la igualdad (3) a los triángulos:

$$f(\Delta_1) = k\varphi(\Delta_1),$$

.....

$$f(\Delta_n) = k\varphi(\Delta_n)$$

y sumando término a término las relaciones obtenidas, hallaremos:

$$f(\Delta_1) + f(\Delta_2) + \dots + f(\Delta_n) = k[\varphi(\Delta_1) + \dots + \varphi(\Delta_n)].$$

Pero, en virtud de la propiedad de aditividad de las funciones  $f$  y  $\varphi$ , podemos representar esta última igualdad en forma de

$$f(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) = k\varphi(\Delta_1 + \dots + \Delta_n)$$

ó

$$f(S) = k\varphi(S).$$

Ahora, sea  $\Omega$  un dominio arbitrario. Elijamos alguna sucesión de polígonos  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n, \dots$ , convergente hacia el dominio  $\Omega$  en el sentido determinado más arriba (no nos detendremos en la demostración de la posibilidad de tal elección). Según acabamos de demostrar, para cualquiera de dichos polígonos tiene lugar la igualdad  $f(\Omega_n) = k\varphi(\Omega_n)$ . De aquí, pasando al límite respecto a  $n \rightarrow \infty$  y tomando en consideración la continuidad de las funciones  $f$  y  $\varphi$ , hallaremos:

$$f(\Omega) = k\varphi(\Omega),$$

es decir, efectivamente, conforme a las condiciones 1) y 2), la función positiva de un dominio se determina con la exactitud hasta el factor constante. Queda demostrar la existencia de una función que posee estas propiedades.

Ahora demostraremos que la integral doble

$$f(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy \quad (4)$$

es una función continua y positiva de un dominio, que satisface las condiciones 1) y 2).

Ante todo, notemos que la función subintegral

$$\sqrt{EG - F^2} = \frac{R^2}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

es positiva y continua en todos los puntos del plano de Lobachevski, en virtud de la desigualdad  $x^2 + y^2 < 1$ , básica para las coordenadas beltramianas. De aquí se deduce que la integral presente en el segundo miembro de la igualdad (4) existe, cualquiera que sea la elección del dominio acotado  $\Omega$ , y tiene un valor positivo.

Luego, si las funciones  $E, F$  y  $G$  son fijas, es decir, si se ha elegido un determinado sistema de coordenadas beltramianas, entonces el valor de la integral (4) viene determinado sólo por la elección del dominio de integración. Es sustancial que este valor, en realidad, no dependa de la elección del sistema de coordenadas beltramianas. Para demostrarlo, consideremos un nuevo sistema de coordenadas beltramianas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , junto con el de coordenadas  $(x, y)$ ; sean  $E, F, G$  y  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  coeficientes de la forma métrica del plano de Lobachevski, en las coordenadas viejas y nuevas, respectivamente. Valiéndonos de las fórmulas (5) del § 221, después de cálculos no complicados, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix}^2 \quad (5)$$

Habiendo compuesto en las nuevas coordenadas una expresión análoga a la (4), a base de la igualdad (5) y la fórmula conocida del cambio de variables en una integral múltiple, hallamos

$$\iint_{\Omega} \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} d\bar{x} d\bar{y} = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix}^2 d\bar{x} d\bar{y} = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy.$$

Con esto mismo queda demostrada la invariación de la integral (4) respecto a la transformación de las coordenadas.

Ahora, demos demos que la función del dominio  $f(\Omega)$  representada por la igualdad (4) satisface las condiciones 1) y 2).

Sean  $\Omega$  y  $\Omega'$  dos dominios congruentes. Hay que mostrar que  $f(\Omega) = f(\Omega')$ . Dada la congruencia de los dominios  $\Omega$  y  $\Omega'$ , existe un movimiento del plano tal, con el cual el dominio  $\Omega$  se superpone sobre el  $\Omega'$ . Admitamos que con este movimiento los ejes de coordenadas  $Ox, Oy$  toman posiciones de  $O'x', O'y'$ . Junto con el viejo sistema de coordenadas beltramianas  $x, y$ , consideremos el nuevo sistema  $x', y'$ , con los ejes  $O'x'$  y  $O'y'$ : sean

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

y

$$ds^2 = E' dx'^2 + 2F' dx' dy' + G' dy'^2$$

dos representaciones de la forma métrica del plano de Lobachevski, en el sistema viejo y el nuevo, respectivamente. Designemos con  $M$  un punto arbitrario del plano  $\Omega$  y con  $M'$  el punto al cual pasa  $M$  al superponerse el dominio  $\Omega$  sobre el  $\Omega'$ . Se ve fácilmente que las viejas coordenadas del punto  $M$  son iguales a las nuevas del  $M'$ , y los valores de las funciones  $E, F, G$  en el punto  $M$  son iguales a los de las funciones  $E', F', G'$  en el punto  $M'$ , respectivamente. Debido a ello, tiene lugar la igualdad siguiente:

$$\iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy = \iint_{\Omega'} \sqrt{E'G' - F'^2} dx' dy'.$$

Más, como hemos visto, el valor de la integral (4) extendida sobre algún dominio, no depende de qué sistema de coordenadas se usa en la consideración; de tal modo,

$$\iint_{\Omega} \sqrt{E'G' - F'^2} dx' dy' = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy$$

de donde

$$\iint_{\Omega'} \sqrt{EG - F^2} dx dy = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy.$$

De este modo queda establecido que la función

$$f(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy$$

satisface la condición 1). El hecho de que satisfaga también la condición 2), dimana directamente de la propiedad de aditividad de la integral: si el dominio  $\Omega$  está dividido en dos dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , entonces

$$\iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy = \iint_{\Omega_1} \sqrt{EG - F^2} dx dy + \iint_{\Omega_2} \sqrt{EG - F^2} dx dy,$$

$$\text{ó} \quad f(\Omega_1 + \Omega_2) = f(\Omega_1) + f(\Omega_2).$$

Más arriba nos convenimos en llamar área del dominio  $\Omega$  al valor de la función positiva  $f(\Omega)$  que satisface las condiciones 1) y 2). De acuerdo con esta definición y a consecuencia del teorema demostrado más arriba, el área de un dominio puede expresarse mediante la fórmula

$$f(\Omega) = k \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy, \quad (6)$$

donde  $k$  es la constante que se fija mediante la elección de la unidad de medición de áreas.

Ahora, pondremos la unidad de medición de áreas en una determinada dependencia de la de medición de longitudes.

En la geometría euclidiana, la dependencia entre la unidad de áreas y la de longitudes se establece con que por unidad de área se toma un cuadrado, cuyo lado es igual a una unidad lineal. Algo análogo lo haremos también en la geometría de Lobachevski.

Volvamos a considerar la orisfera  $\Sigma$  que toca un plano en el origen del sistema de coordenadas beltramianas elegido; a las coordenadas beltramianas  $(x, y)$  en el plano le corresponden las cartesianas  $(x', y')$  sobre la orisfera  $\Sigma$ .

Sea  $Q'$  la designación de un cuadrado sobre la orisfera  $\Sigma$  (cuadrado, en el sentido de la geometría euclidiana de la orisfera  $\Sigma$ ) que tiene un vértice en el origen de las coordenadas, un lado, en el semieje positivo  $Ox'$ , otro lado, en el semieje positivo  $O'y'$ . Designemos con  $a$  la

longitud del lado del referido cuadrado. Sobre el plano, al cuadrado  $Q'$  le corresponde cierto cuadrilátero  $Q$  (más detalladamente,  $Q$  es la preimagen de  $Q'$  al aplicarse el plano sobre  $\Sigma$ , la cual fue definida en el § 216).

Designemos con  $S(Q')$  el área euclídea del cuadrado  $Q'$  [ $S(Q') = a^2$ ], con  $S(Q)$ , la del cuadrilátero  $Q$ , para cierta elección de la unidad de áreas sobre el plano. Subordinemos la elección de la unidad de áreas a la condición de

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{S(Q)}{S(Q')} = 1.$$

Partiendo de esta condición hallaremos el valor de la constante  $k$  en la fórmula (6).

Hagamos notar que la región (cerrada)  $Q'$  en las coordenadas cartesianas  $(x', y')$  sobre la orisfera  $\Sigma$  se determina con las desigualdades  $0 \leq x' \leq a$ ,  $0 \leq y' \leq a$ . Como al punto  $(x', y')$  de la orisfera  $\Sigma$  le corresponde sobre el plano un punto con las coordenadas beltramianas

$x = \frac{x'}{R}$ ,  $y = \frac{y'}{R}$ , entonces la región (cerrada)  $Q$  en las coordenadas beltramianas del plano se determina con las desigualdades

$$0 \leq x \leq \frac{a}{R}, \quad 0 \leq y \leq \frac{a}{R}.$$

De aquí hallamos:

$$S(Q) = k \iint_Q \sqrt{EG - F^2} dx dy = k \int_0^{\frac{a}{R}} \int_0^{\frac{a}{R}} \frac{R^2 dx dy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

Después de esto, por cálculos elementales obtenemos:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{S(Q)}{S(Q')} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{k \int_0^{\frac{a}{R}} \int_0^{\frac{a}{R}} \frac{R^2 dx dy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}}{a^2} = k$$

Por consiguiente,

$$k = 1.$$

Vemos que con la elección señalada de la unidad de áreas el área de un dominio arbitrario  $\Omega$  se expresa con la igualdad

$$S(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy.$$

Hagamos constar que el área del triángulo  $\Delta$  en este caso viene dada por la fórmula

$$S(\Delta) = R^2 D(\Delta),$$

donde  $D(\Delta)$  es el defecto (es útil comparar esta expresión con la fórmula (1') del § 48).

§ 223. Así pues, las fórmulas

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2, \quad (I)$$

$$\cos \varphi = \frac{E dx \delta x + F(dx \delta y + dy \delta x) + G dy \delta y}{\sqrt{E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2} \sqrt{E \delta x^2 + 2F \delta x \delta y + G \delta y^2}}, \quad (II)$$

$$S(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dx dy, \quad (III)$$



entre las cuales la primera, escrita detalladamente, tiene la siguiente forma

$$ds^2 = R^2 \frac{(1-y^2)dx^2 + 2xy dx dy + (1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}, \quad (*)$$

determinan la medición de longitudes, ángulos y áreas en las coordenadas beltramianas sobre el plano de Lobachevski.

La estructura de estas fórmulas coincide exactamente con la de las (I\*), (II\*), (III\*) del § 215, mediante las cuales se determina la mediación de las magnitudes geométricas sobre el plano de Euclides. Más, por supuesto, los valores de los coeficientes  $E, F, G$  en las fórmulas (I\*) — (III\*) del § 215 difieren de los de los coeficientes  $E, F, G$  en las (I) — (III) del presente párrafo.

Como en las fórmulas (II) y (III) las magnitudes  $E, F, G$  son coeficientes de la forma (\*), se dice que la forma (\*) determina la métrica del plano de Lobachevski.

§ 224. Hasta ahora nos vallamos exclusivamente de las coordenadas beltramianas. Ahora vamos a ampliar la clase de sistemas de coordenadas admisibles. Partiendo de cierto sistema de coordenadas beltramianas  $(x, y)$  dado, iremos introduciendo nuevas coordenadas mediante dos relaciones cualesquiera de tipo de

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (**)$$

si las funciones  $u(x, y), v(x, y)$  son diferenciables continuamente y poseen un jacobiano diferente de cero para todos los valores de  $x, y$  acotados por la condición de  $x^2 + y^2 < 1$ . Los números  $(u, v)$  se consideran nuevas coordenadas del punto  $M(x, y)$ . Las condiciones de la diferenciable continua y de la desigualdad a cero del jacobiano se imponen con el fin de conservar en cuanto a las nuevas coordenadas la definición de la línea suave, enunciada en el § 220 para los sistemas de Beltrami. Además, en tales condiciones las ecuaciones (\*) son invertibles, y su inversión suministra las funciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (**)$$

continuamente diferenciables, con el jacobiano desigual a cero. En las coordenadas  $(u, v)$  la dirección de la línea suave  $u = u(t), v = v(t)$  viene determinada por la relación  $\frac{dv}{du}$ ; efectivamente, de las igualdades (\*\*) tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{du}}{\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{du}}$$

y, por consiguiente, se conoce el parámetro director  $k = \frac{dy}{dx}$  si se conoce la relación  $\frac{dv}{du}$ .

Transformando las fórmulas (I), (II), (III) del § 223 en cuanto a las nuevas variables  $(u, v)$ , obtenemos fórmulas de la misma estructura (más con otras magnitudes  $E, F, G$ ):

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (I)$$

$$\cos \varphi = \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}, \quad (II)$$

$$S(D) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (III)$$

que en el sistema  $(u, v)$  expresan la diferencial del arco, el ángulo entre las líneas y el área del dominio. Para llevar cálculo mediante estas fórmulas, hay que conocer los coeficientes de la

forma cuadrática (I):  $E = E(u, v)$ ,  $F = F(u, v)$ ,  $G = G(u, v)$ . A base de ello decimos que la forma cuadrática (I) determina la métrica del plano de Lobachevski en las coordenadas  $(u, v)$ .

Consideremos un ejemplo importante de la transformación de coordenadas:

$$x = \operatorname{th} \frac{\xi}{R}, \quad y = \frac{\operatorname{th} \frac{\eta}{R}}{\operatorname{ch} \frac{\xi}{R}} \quad (1)$$

donde  $(\xi, \eta)$  son nuevas coordenadas,  $\operatorname{th}$  y  $\operatorname{ch}$  son símbolos que denotan la tangente y el coseno hiperbólicos. Si  $x, y$  satisfacen la desigualdad  $x^2 + y^2 < 1$ , las ecuaciones (1) son invertibles unívocamente; determinan, por consiguiente, las transformaciones de las coordenadas sobre todo el plano de Lobachevski.

Sustituyendo  $x, y$  en la forma métrica

$$ds^2 = R^2 \frac{(1 - y^2) dx^2 + 2xy dx dy + (1 - x^2) dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (2)$$

por los segundos miembros de las igualdades (1), tras transformaciones no complicadas obtenemos la forma métrica del plano de Lobachevski en las coordenadas  $\xi, \eta$ :

$$s^2 = d \operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{R} \cdot d\xi^2 + d\eta^2.$$

Conforme a las fórmulas (II) y (III), de aquí

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{R} \cdot d\xi \delta\xi + d\eta \delta\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{R} \cdot d\xi^2 + d\eta^2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{R} \cdot \delta\xi^2 + \delta\eta^2}} \\ S(D) &= \iint_{(D)} \operatorname{ch} \frac{\eta}{R} \cdot d\xi d\eta. \end{aligned}$$

En la forma métrica (2) no está presente el término con el producto  $d\xi d\eta$ . Hagamos notar que en las coordenadas generales  $(u, v)$  con la forma métrica correspondiente

$$ds^2 = E du^2 + 2E du dv + G dv^2$$

$F$  será igual a cero si, y sólo si, la red de líneas de coordenadas

$$u = \text{const},$$

$$v = \text{const}$$

es ortogonal. En rigor, es evidente que las direcciones de las líneas de coordenadas se caracterizan por las diferenciales  $dv, du = 0$  y  $dv = 0, du$ , siendo variables arbitrarias  $dv$  en el primer caso y  $du$  en el segundo. De aquí y de (II), designando con  $\varphi$  el ángulo entre las líneas  $u = \text{const}, v = \text{const}$ , tenemos:

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

De tal modo, si  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , entonces  $F = 0$ , y viceversa.

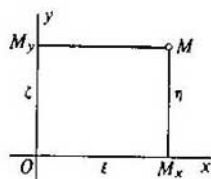


Fig. 162

La supresión del término con el producto  $d\xi d\eta$  en la forma (2) significa, por lo tanto, la ortogonalidad de la red de coordenadas  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$ .

Demos la descripción geométrica de las coordenadas  $\xi$ ,  $\eta$ .

Consideremos los ejes recíprocamente perpendiculares  $Ox$ ,  $Oy$  que sirven para determinar las coordenadas beltramianas  $x$ ,  $y$  (fig. 162). Sea  $M(x, y)$  un punto arbitrario de un plano; bajemos una perpendicular de  $M$  a  $Ox$ , designando su base con  $M_x$ . Comparando la primera de las fórmulas (1)  $x = \text{th} \frac{\xi}{R}$  con la primera de las (4) del § 218, vemos que ambas son idénticas.

Por consiguiente,  $\xi = OM_x$ . De aquí concluimos que la ecuación  $\xi = c$  (donde  $c$  es una constante) determina la recta perpendicular al eje  $Ox$ . De la fórmula (2) hallamos que para esta línea  $ds^2 = d\eta^2$ , o  $ds = \pm d\eta$ . La integración de esta última relación da  $M_x M = \pm \eta + a$  ( $a = \text{const}$ ). Suponiendo  $y = 0$  en la segunda de las fórmulas (1), obtenemos correspondientemente  $\eta = 0$ . Esto significa que, de estar el punto  $M$  en el eje  $Ox$ , debe ser  $\eta = 0$ . De tal modo,  $a = 0$  y  $M_x M = \pm \eta$ . Hagamos constar que, en virtud de la segunda de las fórmulas (1),  $\eta > 0$ , si  $y > 0$ ,  $\eta < 0$ , si  $y < 0$ . Consiguientemente, el número  $\eta$  expresa el segmento  $M_x M$ , considerándose el signo según la regla ordinaria. Los números  $(\xi, \eta)$  se llaman *primeras coordenadas* del punto  $M$ ; los números  $(\xi, \zeta)$ , con los cuales están denotadas las coordenadas beltramianas  $(x, y)$  en el § 218 (véase también la fig. 162), llevan el nombre de *segundas coordenadas* del punto  $M$ .

En la geometría de Lobachevski siempre  $\eta \neq \zeta$ .

Ahora, es fácil comprender que las líneas de coordenadas  $\xi = \text{const}$  son rectas perpendiculares al eje  $Ox$ , y las  $\eta = \text{const}$  son equidistantes ortogonales respecto a ellas.

#### 4. Geometría interior de la superficie y problema de Beltrami

§ 225. Se llama geometría interior de alguna superficie el conjunto de sus propiedades tales que puedan ser reveladas mediante mediciones efectuadas sobre el mismo plano.

Evidentemente, la planimetría de Euclides es un caso particular de la geometría interior interpretada en el referido sentido.

Los resultados obtenidos por nosotros en los capítulos antecedentes, naturalmente, plantean el problema: ¿se puede considerar también, desde cierto punto de vista, la planimetría de Lobachevski como geometría interior de cierta superficie del espacio de Euclides?

Este problema planteado en la obra de Beltrami «Experiencia de la interpretación de la geometría no euclidiana» (1868) será objeto de nuestra atención en los párrafos inmediatos.

Comenzaremos por algunos hechos más sencillos de la geometría diferencial. Si bien la mayoría de ellos (si no todos) se conoce comúnmente, no obstante, parece ser conveniente proceder así, con el fin de aclarar nuestra terminología y prevenir con ello al lector de las posibles equivocaciones que puedan surgir al conocer el material subsiguiente.

Ante todo, convengamos precisamente en qué comprenderemos bajo la palabra «superficie».

Nos limitaremos con el caso más sencillo de una superficie sin puntos múltiples la cual pueda definirse como cierto conjunto de puntos del espacio (ahora suponemos euclidiano el espacio).

Sea dado un conjunto de puntos  $S$  en el espacio de Euclides. Si  $M_0$  es un punto cualquiera del conjunto  $S$ , llamaremos entorno del punto  $M_0$  en el conjunto  $S$  al subconjunto  $U(M_0)$  del referido conjunto, que es la intersección de  $S$  con algún entorno del punto  $M_0$  en el espacio euclidiano. La definición subsiguiente consiste en la exigencia de que los puntos  $M$  tengan entornos  $U(M)$  los cuales poseen determinadas propiedades.

Para describir dichas propiedades, estimemos un sistema de coordenadas ortogonales cartesianas con el origen en el punto  $O$  y con los ejes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Además, imaginémonos algún plano con un sistema de coordenadas cartesianas bidimensionales, cuyos ejes estén designados con  $u$  y  $v$  (en lo sucesivo, se llama  $u$ ,  $v$ -plano).

Llamaremos superficie al conjunto  $S$ , si para todo punto  $M_0$  existe un entorno  $U(M_0)$  tal que todos sus puntos tengan coordenadas representadas por las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v), \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

y al mismo tiempo

1)  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  son funciones determinadas y unívocas en cierto dominio  $D$  del  $u$ ,  $v$ -plano.

2) A cada par de números  $u$ ,  $v$  perteneciente al dominio  $D$  de la ecuación  $(\alpha)$  le corresponde un punto con coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  perteneciente al entorno  $U(M_0)$ ; a distintos pares de números  $u$ ,  $v$  de la ecuación  $(\alpha)$  les corresponden sendos puntos diferentes (es decir, con las ecuaciones  $(\alpha)$  se establece la correspondencia biunívoca entre los puntos del dominio  $D$  y los del entorno  $U(M_0)$ ).

3) Las funciones  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  en el dominio  $D$  son continuas, poseen derivadas parciales continuas de primer orden, y el rango de la matriz

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (*)$$

es igual a dos.

Algo más tarde explicaremos el sentido de esta última condición.

Sin perder la comunidad, para la evidencia, consideraremos que el dominio  $D$  es un dominio simplemente conexo del  $u$ ,  $v$ -plano. Al mismo tiempo, el entorno  $U(M_0)$  de un punto arbitrario  $M_0$ , que le corresponde, será un dominio simplemente conexo sobre la superficie  $S$ .

Los entornos en cuestión son llamados a veces coordenados. No complicaremos con este calificativo nuestra exposición, más en lo sucesivo, al hablar de los entornos de los puntos de una superficie, tendremos en cuenta precisamente los entornos del referido tipo.

En algunos casos, toda la superficie es entorno de un punto suyo cualquiera (por ejemplo, un plano o un paraboloide). En el caso general, una superficie constituye un conjunto de un sistema finito o infinito de dominios del tipo descrito. Así pues, al definir la superficie, admitimos que el conjunto de sus puntos puede tener, en total, una estructura bien compleja, pero cerca de cada punto su estructura debe estar canonizada en determinados aspectos.

Para hacer más cómodo en el uso el concepto de superficie, es conveniente agregar a su definición también la condición de conexión. Esta puede enunciarse, por ejemplo, en la forma siguiente.

Sean  $U$  y  $V$  algunos entornos de dos puntos de una superficie. Diremos que estos dos entornos están unidos por una cadena de entornos, si sobre la superficie existen puntos tales y sus respectivos entornos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  tales que  $U_1$  tenga una porción común con  $U$ ,  $U_n$  tenga una porción común con  $V$ , y los entornos  $U_k, U_{k+1}$  tengan una porción común para cualquier  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Llamaremos *conexa* a una superficie, si sobre ella pueden unirse dos entornos cualesquiera mediante una cadena de entornos.

Ahora, consideremos algún dominio  $U$  de la superficie  $S$  representada por las ecuaciones de tipo de ( $\alpha$ ). Cada punto  $M$  del dominio  $U$  se determina mediante las ecuaciones ( $\alpha$ ) si tenemos dos números  $u$  y  $v$  prefijados. Por ende, los números  $u, v$  los llamaremos coordenadas del punto  $M$  sobre la superficie, valiéndonos de la designación usual en la geometría analítica  $M(u, v)$ . Estas coordenadas a menudo se denominan *interiores*.

Partiendo de las coordenadas  $u, v$ , se puede introducir infinidad de otros sistemas de coordenadas interiores en el dominio  $U$ . Para hacerlo, basta componer algunas ecuaciones:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{u}(u, v), \\ \bar{v} &= \bar{v}(u, v),\end{aligned}$$

que permitan determinar un nuevo par de números  $\bar{u}, \bar{v}$  para cada par de números  $u, v$ , debiendo estar subordinados los segundos miembros de las referidas ecuaciones a las mismas restricciones enunciadas en el § 224 para las ecuaciones (\*).

Determinábamos la superficie mediante tres ecuaciones ( $\alpha$ ). Se puede sustituirlas por una vectorial

$$r = r(u, v), \quad (\beta)$$

cuyo primer miembro posee el radio vector  $r$  del punto  $M$  de la superficie (es decir, el vector  $\overline{OM}$ ), y el segundo, la función vectorial con los componentes  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ .

Si se vale de la ecuación ( $\beta$ ), se percibe fácilmente el sentido geométrico de las condiciones 3 en la definición de la superficie aducida más arriba. Precisamente, se requieren, primero, la existencia y la continuidad de los vectores

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} \quad \text{y} \quad r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$$

y, segundo, la observancia de la desigualdad  $[r_u r_v] \neq 0$ , ya que los componentes de este producto vectorial lo son los determinantes de la matriz (\*). Esta última desigualdad significa que los vectores  $r_u$  y  $r_v$  no son colineales; entonces determinan un plano tangente a la superficie.

Ahora, estimemos las ecuaciones de tipo de

$$\begin{aligned}u &= u(t), \\ v &= v(t); \end{aligned}$$

éstas determinan una línea (la trayectoria del punto  $M(u, v)$ , con  $t$  variable) sobre una superficie. La dirección de esta línea en el espacio se representa por el vector

$$\frac{dr}{dt} = r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt}.$$

Por lo visto, quedará determinada la dirección de la línea, si se da la relación de las diferenciales  $du : dv$ . Por ende,  $du : dv$  la llamaremos *parámetro de la dirección*.

Introduzcamos designaciones usuales en la geometría diferencial:

$$r_u^2 = E, \quad r_u r_v = F, \quad r_v^2 = G.$$

Entonces podemos hallar el cuadrado de la diferencial del arco de la línea sobre la superficie, suponiendo

$$ds^2 = dr^2 = (r_u du + r_v dv)^2 = E du^2 + 2 du dv + G dv^2.$$

Además, si  $du : dv$  y  $\delta u : \delta v$  son los parámetros de dos direcciones a los cuales les corresponden los vectores  $dr$  y  $\delta r$  tangentes a la superficie, entonces el ángulo  $\varphi$  entre estas direcciones viene dado por la igualdad

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{dr \delta r}{\sqrt{dr^2} \sqrt{\delta r^2}} = \frac{(r_u du + r_v dv)(r_u \delta u + r_v \delta v)}{ds \delta s} = \\ &= \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}} \end{aligned}$$

Al fin, como se conoce del análisis elemental, si un dominio  $U$  de una superficie corresponde a un dominio  $D$  del  $u, v$ -plano entonces el área del dominio  $U$  se calcula según la fórmula

$$\sigma = \iint_{(D)} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Así pues, tenemos tres relaciones básicas:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (I)$$

$$\cos \varphi = \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}, \quad (II)$$

$$\sigma = \iint_{(D)} \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (III)$$

que expresan la diferencial de arco, el ángulo entre dos líneas y el área de dominio en el sistema de coordenadas  $u, v$  mediante las funciones  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$ . De estas fórmulas se ve que las mediciones de longitudes, ángulos y áreas sobre una superficie vienen determinadas por completo por los coeficientes de la forma cuadrática

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (I)$$

Por eso se dice que la forma (I) determina la métrica de la superficie; la llaman *métrica*.

Es cierto que con el la variación del sistema de coordenada cambian los coeficientes de forma métrica y, al mismo tiempo, las diferenciales de las coordenadas, correspondientes a algún desplazamiento de un punto según una línea situada sobre la superficie. En este caso, si  $E, F, G$  son coeficientes de forma métrica en un sistema de coordenadas interiores,  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  son coeficientes en otro sistema, y  $du, dv$  y  $d\bar{u}, d\bar{v}$  son diferenciales de las coordenadas viejas y nuevas determinadas por un mismo elemento de la línea, entonces

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \bar{E} d\bar{u}^2 + 2\bar{F} d\bar{u} d\bar{v} + \bar{G} d\bar{v}^2,$$

ya que el primer miembro y el segundo expresan una misma magnitud  $ds^2$ .

Conociendo las fórmulas de transformación de las coordenadas y  $E, F, G$ , es fácil calcular  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ . Hagamos notar que la dependencia entre  $E, F, G$  y  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  se obtiene formalmente a base de los cálculos algebraicos. Por eso, la computación de  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  a partir de  $E, F, G$  dados puede operarse aplicando las fórmulas (5) del § 221, donde resolvimos un problema justamente igual, desde el punto de vista algebraico, que ésta.

Si los coeficientes de dos formas están ligados por las relaciones (5) del § 221, diremos que estas dos formas pasan una en otra transformándose las coordenadas. Tales formas se llaman *equivalentes*.

En correspondencia con esta definición, se puede decir que la métrica de cada superficie en coordenadas interiores diferentes se determina por formas métricas distintas, mas, todas estas formas son equivalentes entre sí.

§ 226. Consideremos algún dominio  $U$  sobre una superficie  $S$  y un dominio  $U'$  sobre una superficie  $S'$ . Supongamos que entre los puntos del dominio  $U$  y entre los del  $U'$  se ha estable-

cido una correspondencia biunívoca y continua en ambos sentidos. Entonces tendremos también una correspondencia entre las líneas del dominio  $U$  y las del  $U'$ ; a saber, a cada línea  $L$  del dominio  $U$  le corresponde en el dominio  $U'$  una línea  $L'$  constituida por puntos correspondientes a los de la línea  $L$ . De manera justamente igual, a cada dominio  $V$  situado dentro de  $U$ , le corresponde en  $U'$  un dominio  $V'$  compuesto por los puntos que corresponden a los del  $V$ . La figura  $A'$  (por ejemplo, una línea) del dominio  $U'$ , correspondiente a la figura  $A$  del  $U$ , la llamaremos *imagen de la figura  $A$* .

*Si cada arco suave  $l$  en el dominio  $U$  tiene por su imagen en  $U'$  un arco suave  $l'$  de la misma longitud que  $l$ , entonces la correspondencia se llama isométrica o simplemente isometría. Los dominios  $U$  y  $U'$ , entre los cuales se puede establecer la correspondencia isométrica, se llaman isométricos uno respecto al otro.*

Para obtener un rasgo analítico del carácter isométrico de los dominios, imaginémosnos que en el dominio  $U$  están introducidas algunas coordenadas interiores  $u, v$ . En el dominio  $U'$  introduciremos un sistema de coordenadas interiores relacionado de un modo peculiar con el sistema  $u, v$  del dominio  $U$ . A saber, cada punto  $M'$  situado en  $U'$  lo compararemos con dos números (serán las coordenadas del mismo) iguales a las coordenadas en el sistema  $(u, v)$  en  $U$  de aquel punto  $M$  de este dominio  $U$ , que corresponda al punto  $M'$ . Hablando brevemente, el sistema de coordenadas en el dominio  $U'$  se introduce de modo que los puntos correspondientes en  $U$  y  $U'$  tengan coordenadas numéricamente iguales.

Sean  $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$  y  $E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2$  las formas métricas de los dominios  $U$  y  $U'$  en las coordenadas dadas. Consideremos los elementos correspondientes de dos líneas en  $U$  y  $U'$ . Se caracterizan por unas mismas diferenciales  $du, dv$ . Según la condición de la isometría debemos tener:

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2. \quad (*)$$

Ya que nada limita la elección del par de elementos correspondientes de dos líneas pertenecientes a los dominios  $U$  y  $U'$ , entonces en la igualdad  $(*) du$  y  $dv$  son magnitudes absolutamente arbitrarias. Por eso obtenemos de  $(*)$ :

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'.$$

De tal modo, en las coordenadas dadas  $(u, v)$ , los dominios  $U$  y  $U'$  tienen formas métricas iguales. Es obvia la proposición recíproca: si dos superficies tienen formas métricas iguales, son isométricas.

(Notemos que en coordenadas arbitrarias las formas métricas de las superficies isométricas pueden no coincidir, pero sí, serán equivalentes.)

De las fórmulas (I) — (III) del § 225 se sigue que *en el caso de isometría, siendo iguales las longitudes de los arcos correspondientes, también resultan iguales los valores de los ángulos entre las direcciones correspondientes, así como las áreas de las superficies correspondientes.*

Por ende, todas las propiedades de la superficie que puedan revelarse mediante las mediciones que se efectúen sobre ella, resultan iguales para las superficies isométricas. Esto da motivo para decir que las superficies isométricas tienen una geometría interior común. Una geometría interior común para todo el conjunto de superficies isométricas entre sí, se determina por una misma forma métrica.

Para demostrar evidentemente, cómo se construye infinidad de superficies diferentes con una geometría interior común, pediremos al lector que se imagine que la superficie físicamente está realizada a partir de un material elástico, pero no extensible. Deformemos esta superficie de modo que no haya pliegues ni rupturas. Las superficies obtenidas de tal modo, a consecuencia de que el material no es extensible, serán isométricas entre sí y, por consiguiente, tendrán una geometría interior común.

Por ejemplo, dando forma cilíndrica a una hoja de papel, demostraremos de un modo evidente que un trozo de superficie y cierta parte del cilindro tienen una geometría interior igual. Si tratamos de superponer una hoja de papel sobre una esfera o una ensilladura (paraboloide

hiperbólico), entonces, en el primer caso, se formarán pliegues, en el segundo, rupturas. Esta circunstancia demuestra claramente el hecho de que la geometría interior de cada trozo de una esfera o de una ensilladura se diferencia sustancialmente de la geometría de cualquier sector del plano.

La deformación continua de una superficie para la cual se conserva la geometría interior de ésta, se llama *doblado*.

Remitámonos a lo enunciado en el § 224. Allí determinamos la forma métrica del plano de Lobachevski y dedujimos las fórmulas (I) — (III), mediante las cuales se expresan las longitudes de líneas, las magnitudes de ángulos y las áreas de dominios. La estructura de estas fórmulas es del todo idéntica a la de las (I) — (III) del § 225. Naturalmente, por eso surge la pregunta: ¿existe en el espacio de Euclides una superficie, cuya forma métrica sea equivalente a la del plano de Lobachevski? Puede esperarse que la geometría interior de una superficie de tal género coincidirá con la planimetría de Lobachevski, es decir, incluirá todos los axiomas de la planimetría de Lobachevski en el sistema de sus proposiciones.

Si formulamos precisamente en términos de la isometría la pregunta formulada, de pronto puede verse que la misma conduce a dos problemas distintos:

1) Hállese una superficie, para cada punto de la cual exista un entorno isométrico respecto a cierto dominio del plano de Lobachevski.

En cuanto a una superficie tal, aún no puede decirse que su geometría en total sea idéntica a la del plano de Lobachevski.

(Así, por ejemplo, cada punto de un cilindro circular tiene un entorno que puede desarrollarse y superponerse sobre cierto sector del plano euclidiano. Sin embargo, la geometría del cilindro circular, en total, difiere sustancialmente de la geometría de un plano.)

Diremos que sobre una superficie que satisfaga las condiciones del problema, la geometría de Lobachevski se realiza «localmente».

2) Hállese una superficie que admita su aplicación isométrica sobre todo el plano de Lobachevski.

La geometría interior de tal superficie debe representar la realización de la planimetría no euclidiana dentro del espacio de Euclides. De la solución positiva del segundo problema se deduciría directamente la consistencia lógica del sistema no euclidiano bidimensional. Precisamente, tal objetivo lo perseguía Beltrami al que se debe, como se dijo más arriba, el planteo de estos problemas. Pero Beltrami dejó resuelto sólo el primero. En lo que respecta al segundo, según se supo más tarde, éste no tiene solución. A saber, D. Hilbert demostró que en el espacio de Euclides no existe una superficie que tenga la propiedad requerida<sup>\*)</sup>.

Expondremos bien detalladamente los resultados de Beltrami que de por sí representan un interés geométrico, independientemente de la demostración de la consistencia de la geometría de Lobachevski.

## 5. Geometría sobre la superficie de curvatura constante

§ 227. Nuestro objeto es hallar, si es posible, en el espacio euclidiano una superficie, para cada punto de la cual exista un entorno isométrico respecto a cierto dominio del plano de Lobachevski. Supongamos que tal superficie existe; designémosla con  $S$ . Tratemos de estudiar las propiedades que debe de poseer la superficie  $S$ . En lo sucesivo, esto ayudará a revelar la existencia de tal superficie.

<sup>\*)</sup> D. Hilbert, Fundamentos de la geometría, Apéndice V (D. Hilbert, «Die Grundlagen der Geometrie», Siebente Auflage, Lpz. — Berl., 1930). Cabe notar que en este teorema de Hilbert se trata sobre las superficies, cuyo radio vector instantáneo satisface la condición de la diferenciabilidad continua triple respecto a las coordenadas interiores ( $u, v$ ).



Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos puntos arbitrarios de la superficie  $S$ . Según la condición, para cada uno de ellos existe sobre  $S$  un entorno isométrico respecto a cierta porción del plano de Lobachevski. Designemos con  $U_1$  y  $U_2$  tales entornos de los puntos  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente. Aplíquese isométricamente  $U_1$  sobre el dominio  $U'_1$  del plano de Lobachevski, aplicándose el punto  $M_1$  en el punto  $M'_1$  dentro de  $U'_1$ ; análogamente, denotemos con  $U'_2$  el dominio obtenido por la aplicación isométrica del entorno  $U_2$  sobre el plano de Lobachevski, y con  $M'_2$ , el punto correspondiente al  $M_2$  en esta aplicación.

Sobre el plano de Lobachevski, dentro del dominio  $U'_1$  existe otro dominio  $U''_1$  que cubre el punto  $M'_1$  y tiene dimensiones tan pequeñas que para su desplazamiento congruente que haga coincidir el punto  $M'_1$  con  $M'_2$  cubrirá una parte de  $U'_1$  del plano, que está por entero dentro de  $U'_2$ . Además, al desplazarse el dominio  $U''_1$  a su nueva posición  $U''_2$ , cualquier dirección junto al punto  $M'_1$  se puede hacerla coincidir con cualquier dirección junto al punto  $M'_2$  (a esta propiedad del conjunto de movimientos la llamamos en el § 45 transitividad respecto a elementos lineales). Ahora, designemos con  $\bar{U}_1$  y  $\bar{U}_2$  los dominios sobre la superficie  $S$ , que corresponden a los  $U'_1$  y  $U'_2$  del plano de Lobachevski en las aplicaciones isométricas de  $U_1$  y  $U_2$  sobre  $U'_1$  y  $U'_2$ .

A consecuencia de la isometría de los dominios  $U'_1$  y  $U'_2$ , deben ser isométricos uno respecto a otro también los dominios  $\bar{U}_1$  y  $\bar{U}_2$ . De tal modo, cualquiera que sea el punto  $M_1$  de la superficie  $S$ , siempre existe un entorno del mismo, que puede aplicarse isométricamente sobre cierta porción de la superficie  $S$  de modo que el punto  $M_1$  se aplique en cualquier otro punto  $M_2$  prefijado de la misma superficie. Además, de los razonamientos aducidos se desprende que, al mismo tiempo, cualquier dirección que parta del punto  $M_1$  sobre la superficie  $S$ , puede ser aplicada sobre cualquier dirección que parta del punto  $M_2$ .

Si convenimos en llamar congruentes desde el punto de vista de la geometría interior de la superficie  $S$  los dominios isométricos de ésta, y utilizamos la terminología introducida en el § 45, entonces el resultado obtenido puede formularse de la manera siguiente: *la superficie  $S$  admite un conjunto de movimientos transitivo respecto a elementos lineales.*

Sólo hay que tener en cuenta dos circunstancias:

1) Los dominios isométricos de la superficie  $S$  como imágenes del espacio euclidiano circundante, hablando en general, no son congruentes.

En el caso dado se trata de los movimientos en el sentido de la geometría interior de la superficie y ni mucho menos de los movimientos en el sentido de la geometría euclidiana del espacio.

2) La superficie  $S$  EN TOTAL puede carecer de la aptitud de desplazarse sobre sí misma tan libremente para que el conjunto de estos movimientos sea transitivo en cuanto a elementos lineales, aun cuando se los considere desde el punto de vista de la geometría interior.

En el caso dado se trata no de los movimientos de toda la superficie sobre sí misma, sino de los movimientos de sus trozos suficientemente pequeños sobre ella.

No obstante para estas restricciones, se puede percibir una gran analogía entre la superficie  $S$ , cuya geometría interior «localmente» es la geometría de Lobachevski, y las superficies, sobre las que se realiza la geometría elemental en el sentido en que definimos este concepto en el § 45.

Para tener una idea clara sobre el movimiento en el sentido de la geometría interior, imaginémosnos un trozo de película flexible pero NO EXTENSIBLE, aplicada fuertemente a una superficie. El desplazamiento de este trozo sobre la superficie representa el movimiento en el sentido de la geometría interior, si el trozo desplazado sigue adherido a la superficie en cada nueva posición. La superficie  $S$  que nos interesa, debe estar deformada de modo que un trozo de la película flexible extensible adherido a ella en cualquier lugar, sin despegarse, pueda ser desplazado libremente sobre ella y girar alrededor de su punto cualquiera; no obstante, además, el tamaño del trozo que permite tales desplazamientos, puede depender de desde qué punto hacia cuál lo desplazamos.

Acotemos la clase de las superficies sujetas al examen con condiciones complementarias de «suavidad de tercer orden». Esto significa que los segundos miembros de las ecuaciones (α) del § 225 se suponen ser funciones tres veces diferenciables continuamente. En tal caso, se hace aplicable a las superficies en cuestión la teoría clásica de las superficies.

Tomando en consideración el teorema de Gauss de la invariación de la curvatura total en las aplicaciones isométricas<sup>\*)</sup>, a base de lo expuesto podemos concluir: *la superficie S necesariamente tiene una curvatura total igual en todos los puntos.*

Tal superficie se llama *superficie de curvatura constante.*

Demostremos el teorema: *cada superficie de curvatura constante admite un conjunto de movimientos interpretados en el sentido de la geometría interior, transitivo respecto a los elementos lineales.*

Primero, realicemos algunos cálculos preparatorios. Sea  $S$  cualquier superficie de curvatura constante. Tomemos sobre esta superficie un punto arbitrario  $M_0$  y tracemos a través de él una línea geodésica  $\Gamma$ . En  $\Gamma$ , a partir de  $M_0$ , tracemos un arco de una longitud  $u$  y a través de su extremo tracemos una geodésica de una longitud  $v$ , perpendicular respecto a  $\Gamma$ , designando su extremo con  $M$ . En cierto entorno  $U(M_0)$  del punto  $M_0$  las magnitudes  $u, v$  pueden considerarse como coordenadas del punto  $M$ . A saber,  $u, v$  serán las coordenadas semigeodésicas en el entorno  $U(M_0)$ . En el sistema  $u, v$  la forma métrica tiene el aspecto de  $ds^2 = E du^2 + dv^2$ .

Convengamos en llamar la línea  $\Gamma (v = 0)$  línea geodésica básica del sistema de coordenadas  $u, v$ , el punto  $M(u = 0, v = 0)$ , punto inicial o, simplemente, origen.

Como la coordenada  $u$  es igual a la longitud del arco de la línea  $\Gamma$ , entonces para  $v = 0$  debe tenerse  $ds^2 = du^2$ . Comparando esta igualdad con la relación  $ds^2 = E du^2$  que resulta de la forma métrica si  $v = 0$ , hallamos:

$$E(u, 0) = 1.$$

Hagamos notar seguidamente que, por cuanto  $\Gamma$  es una geodésica, a lo largo de  $\Gamma$  la curvatura geodésica debe ser igual a cero:  $\frac{1}{\rho_g} = 0$ . Valgámonos de una fórmula conocida en la teoría de las superficies

$$\frac{1}{\rho_g} = \sqrt{EG - F^2} \left\{ \frac{2}{11} \right\},$$

que expresa la curvatura geodésica de la línea de coordenadas  $v = \text{const.}$  Como  $\frac{1}{\rho_g} = 0$ , entonces, para  $v = 0$

$$\left\{ \frac{2}{11} \right\} = \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Pero en el sistema semigeodésico  $F(u, v) = 0$ ; de tal modo, a base de esta última igualdad tenemos:

$$E_v(u, 0) = 0.$$

<sup>\*)</sup> Se llama curvatura total de una superficie en un punto dado el producto de sus curvaturas principales en dicho punto:  $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ . La demostración del teorema de Gauss, al igual

que la demás información de la teoría de las superficies que se usa en el presente párrafo las puede hallar el lector en el libro de P. K. Rashevski, Geometría diferencial (*К. П. Рашевский. Дифференциальная геометрия*).

Ahora, determinaremos la función  $E(u, v)$ , partiendo de que una superficie con la forma métrica

$$ds^2 = E du^2 + dv^2$$

tiene una curvatura total constante.

Se conoce que en las coordenadas semigeodésicas la curvatura total  $K$  de una superficie se determina con la igualdad

$$K = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial v^2}.$$

Por consiguiente, nos veremos obligados a integrar la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial v^2} + K\sqrt{E} = 0 \quad (\alpha)$$

suponiendo que  $K = \text{const}$ , para las condiciones iniciales

$$E(u, 0) = 1, \quad E_v(u, 0) = 0. \quad (\beta)$$

Consideremos tres casos:

1.  $K = 0$ . A base de la ecuación ( $\alpha$ ) hallamos:

$$\sqrt{E} = \varphi(u)v + \psi(u).$$

En virtud de las condiciones iniciales ( $\beta$ ), tenemos:  $\psi(u) \equiv 1$  y  $\varphi(u) \equiv 0$ . De tal modo, la forma métrica se presenta

$$ds^2 = du^2 + dv^2. \quad (\text{A})$$

2.  $K > 0$ . Integrando la ecuación ( $\alpha$ ) como una ecuación lineal de segundo orden, obtenemos la ecuación general

$$\sqrt{E} = \varphi(u) \cos(\sqrt{K} v) + \psi(u) \sin(\sqrt{K} v).$$

Para satisfacer las condiciones iniciales ( $\beta$ ), hay que elegir funciones de integración arbitrarias  $\varphi(u) \equiv 1$  y  $\psi(u) \equiv 0$ . De tal modo, la forma métrica tiene el aspecto:

$$ds^2 = \cos^2(\sqrt{K} v) du^2 + dv^2. \quad (\text{B})$$

3.  $K < 0$ . En este caso la solución general de la ecuación ( $\alpha$ ) será:

$$\sqrt{E} = \varphi(u)e^{\sqrt{-K} v} + \psi(u)e^{-\sqrt{-K} v}. \quad (\text{B})$$

En virtud de las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \sqrt{E}(u, 0) &= \varphi(u) + \psi(u) \equiv 1, \\ (\sqrt{E}(u, 0))_v &= (\varphi(u) - \psi(u))\sqrt{-K} = 0. \end{aligned}$$

De aquí

$$\varphi(u) = \psi(u) \equiv \frac{1}{2}$$

y

$$\sqrt{E} = \frac{e^{\sqrt{-K} v} + e^{-\sqrt{-K} v}}{2} = \text{ch}(\sqrt{-K} v).$$

La forma métrica tiene el aspecto:

$$ds^2 = \text{ch}^2(\sqrt{-K} v) du^2 + dv^2. \quad (\text{C})$$

De tal modo, vemos que en coordenadas semigeodésicas con la línea básica geodésica la forma métrica de una superficie de curvatura constante  $K$  se determina únicamente por el valor numérico de  $K$ .

Ahora, tomemos dos puntos arbitrarios  $M_1$  y  $M_2$  sobre la superficie  $S$ , estimando cada uno de ellos como origen de un sistema de coordenadas semigeodésicas. La dirección de las geodésicas básicas puede elegirse de forma arbitraria. Denotemos con  $U_1$  el dominio de existencia del sistema semigeodésico con el punto inicial  $M_1$ , y con  $U_2$ , el de existencia del sistema semigeodésico con el punto inicial  $M_2$ .

Si el número positivo  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, entonces para  $-\varepsilon < u < +\varepsilon$ ,  $-\varepsilon < v < +\varepsilon$  el punto que tenga coordenadas  $(u, v)$  del primer sistema, pertenece a  $U_1$ , perteneciendo a  $U_2$  el punto con coordenadas  $(u, v)$  del segundo sistema.

Sean  $Q_1$  y  $Q_2$  dominios determinados por las desigualdades  $-\varepsilon < u < +\varepsilon$ ,  $-\varepsilon < v < +\varepsilon$  ( $Q_1$  y  $Q_2$  tienen una forma parecida al cuadrado) en los sistemas de coordenadas primero y el segundo, respectivamente. De los razonamientos recién expuestos se deduce que la forma métrica del dominio  $Q_1$  en las coordenadas del primer sistema coincide con la del  $Q_2$  en las del segundo sistema. Por ende, si establecemos correspondencia entre los puntos de dichos dominios a base de la igualdad de las coordenadas, entonces esta correspondencia será isométrica. De tal modo, desde el punto de vista de la geometría interior de la superficie  $S$ , los dominios  $Q_1$  y  $Q_2$  son congruentes. Del hecho de que se eligen arbitrariamente las geodésicas básicas en los sistemas de coordenadas usados en este razonamiento, se desprende que el conjunto de desplazamientos congruentes sobre la superficie  $S$  es transitivo respecto a los elementos lineales. El teorema queda demostrado.

La investigación aducida de la forma métrica de una superficie de curvatura constante permite enunciar también el teorema siguiente:

*Cualesquiera que sean dos superficies de una misma curvatura constante, cada porción suficientemente pequeña de cualquiera de ellas puede ser aplicada isométricamente sobre cierta porción de la otra.*

*Dos superficies de curvatura constante igual, localmente, tienen geometría interior igual.*

Hagamos notar que dos superficies que tengan curvaturas constantes diferentes, no pueden ser isométricas una respecto a la otra. En efecto, si en algunas coordenadas estas superficies tuvieran formas métricas iguales, entonces, al calcular las curvaturas totales de dichas superficies, deberíamos obtener constantes iguales.

§ 228. A base de todo lo expuesto, llegamos a concluir lo siguiente: al investigar localmente la geometría interior de las superficies de una curvatura constante dada, es suficiente estudiar sólo algún representante de esta clase.

Consideremos tres casos de valores posibles de la curvatura total  $K = \text{const}$ :  $K = 0$ ,  $K > 0$  y  $K < 0$ .

1) La superficie más elemental de curvatura nula constante es el plano. La geometría interior de un plano es la planimetría de Euclides.

Esta viene determinada por la forma métrica

$$ds^2 = du^2 + dv^2. \quad (*)$$

Como la forma métrica de cualquier superficie de curvatura nula constante puede reducirse a (\*), entonces cada porción suficientemente pequeña de tal superficie puede ser aplicada isométricamente o, como se dice, desarrollada sobre el plano. En virtud de ello, las superficies de curvatura nula se llaman *desarrollables*. Al mismo tiempo, las superficies desarrollables pueden concebirse como superficies obtenidas en el proceso de deformación de un plano o de una porción del mismo, o como superficies compuestas por porciones planas deformadas.

Por ejemplo, un cilindro parabólico se obtiene mediante la deformación de un plano entero. En total, su geometría interior es idéntica a la planimetría de Euclides.

Un cilindro circular se obtiene mediante la deformación de una franja plana; al mismo tiempo, deben unirse de dos en dos los puntos situados en los bordes de esta franja. Localmente, el cilindro circular tiene geometría interior de Euclides, no obstante, en total, su geometría difiere sustancialmente de la del plano euclidiano.

Lo mismo puede decirse también acerca del cono, cuyo ejemplo es cómodo para mostrar el movimiento en el sentido de la geometría interior y aclarar el sentido de las restricciones en los teoremas referentes a este concepto.

Designemos con  $D$  una parte de un cono circular, cubierta tan sólo una vez por un círculo con el centro en el punto  $M$  (el lector puede imaginarse el cono en forma de un modelo de madera, y el círculo hecho de papel). Cada otra parte del cono que pueda cubrirse con el mismo círculo, es isométrica a  $D$ . De tal modo, los movimientos del círculo sobre el cono son movimientos en el sentido de la geometría interior. La no identidad de los movimientos en el sentido de la geometría interior del cono respecto a los movimientos en el espacio, se expresa evidentemente con la deformación del círculo durante su movimiento sobre el cono.

Al desplazarse el círculo, podemos hacer coincidir su centro situado inicialmente en el punto  $M$ , con cualquier punto  $M'$  del cono. No obstante, si el punto  $M'$  está dado cerca del vértice del cono, entonces habrá que limitar correspondientemente el tamaño del círculo. En todo caso, si la distancia entre el punto  $M'$  y el vértice es menor que el radio del círculo, entonces, al coincidir el centro con  $M'$ , el círculo no cabrá sobre el cono; además, hay que tener en cuenta que la parte del cono próxima al vértice, puede cubrirse varias veces con el círculo (por eso en los teoremas del movimiento sobre una superficie se trata de su porción suficientemente pequeña).

2) La superficie más elemental de curvatura positiva constante  $K > 0$  es una esfera, cuyo radio  $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$ .

Ubiquemos el centro de la esfera en el origen de un sistema ortogonal de coordenadas cartesianas del espacio e introduzcamos sobre la esfera coordenadas interiores  $u, v$  iguales a las geográficas (es decir, a la longitud y la latitud) multiplicadas por  $R$ . En el espacio, cada punto de la esfera será determinado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= R \cos \frac{u}{R} \cos \frac{v}{R}, \\y &= R \sin \frac{u}{R} \cos \frac{v}{R}, \\z &= R \sin \frac{v}{R}.\end{aligned}$$

Entonces, en cualquier parte de la esfera exenta del polo superior y del inferior, para los cuales

$v = \pm \frac{1}{2} \pi R$ , tenemos:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \cos^2 \frac{v}{R} du^2 + dv^2.$$

Suponiendo aquí  $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$ , obtendremos:

$$ds^2 = \cos^2(\sqrt{K} v) du^2 + dv^2,$$

lo cual coincide exactamente con la expresión (B) hallada en el párrafo antecedente.

De tal modo, el sistema  $u, v$  es un sistema semigeodésico, cuya línea básica lo es el ecuador en el plano  $z = 0$ .

Deformando cierta parte de la esfera, podemos obtener un conjunto infinito de otras superficies con curvatura positiva constante.

3) Una de las superficies más elementales de curvatura negativa constante  $K < 0$  es la *seudoesfera*.

Ahora, vamos a ofrecer la descripción de esta superficie.

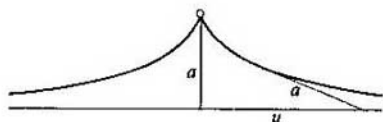


Fig. 163a

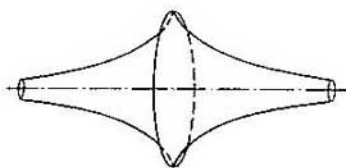


Fig. 163b

Examinemos una línea plana conocida con el nombre de tráctriz, caracterizada por la propiedad siguiente: el segmento de su tangente desde el punto de tangencia hasta el de intersección con cierta recta determinada, es una magnitud constante.

Para no gastar tiempo en razonamientos prolijos, pediremos al lector que, al examinar la fig. 163a, donde está representada una tráctriz, adopte sin demostraciones algunas de sus peculiaridades.

En la fig. 163a, la longitud del segmento constante de la tangente está denotada con la letra  $a$ , la recta, por la cual se desliza un extremo de este segmento, con la letra  $u$ . Ante todo, es evidente que la tráctriz tiene un punto de retroceso situado a una distancia  $a$  respecto a  $u$ ; es el punto de la tráctriz más alejado de  $u$ . Desde el punto de retroceso parten dos ramas recíprocamente simétricas, cada una de las cuales se aproxima indefinidamente hacia la recta  $u$ . De tal modo, esta recta es la asíntota de la tráctriz. También es fácil comprender que en los puntos no singulares la tráctriz tiene convexidad hacia la asíntota. La superficie formada por el giro de la tráctriz alrededor de la asíntota, se llama *seudoesfera* (fig. 163 b).

La seudoesfera tiene dos partes que constan de puntos regulares; cada una de estas dos partes, alejándose al infinito, se encoge hacia el eje de revolución. Estas partes están unidas una con la otra a lo largo de la arista de retroceso. De acuerdo con nuestra definición de la superficie (véase el § 225), tenemos que considerar que la arista de retroceso no pertenece a la superficie. En lo sucesivo, al hablar sobre la seudoesfera, tendremos en cuenta una de sus dos partes regulares. Ahora, demostraremos que la seudoesfera tiene una curvatura negativa constante en todos los puntos. Para ello, baste demostrar que la curvatura de la seudoesfera es constante (y negativa) a lo largo de alguno de sus meridianos.

Elijamos un sistema ortogonal cartesiano  $(x, y, z)$  de modo que el eje  $x$  coincida con el de revolució de la seudoesfera, y el plano  $x = 0$  contenga la arista de retroceso. Examinemos el meridiano de la seudoesfera situado en el primer cuadrante del plano  $(x, y)$ ; sea  $y = f(x)$  su ecuación. Para todo  $x > 0$  tendremos  $a > y > 0$ ; además, dado que, al crecer  $x$ , el punto de la tráctriz se aproxima al eje  $x$ , entonces  $y' < 0$ , y como la convexidad de la tráctriz mira hacia el eje  $x$ , entonces  $y'' > 0$ .

Designemos con  $M$  un punto arbitrario del meridiano  $y = f(x)$  y construyamos en este punto una normal exterior de la seudoesfera. Tomando en consideración que las direcciones principales de la superficie de revolución son direcciones de su meridiano y latitud, calcularemos las curvaturas principales de la seudoesfera en el punto  $M$ .

La normal de la seudoesfera da hacia la concavidad de la curva  $y = f(x)$ , por eso la curvatura principal  $\frac{1}{R_1}$  correspondiente a la dirección del meridiano, es positiva y exactamente igual a la curvatura del referido meridiano, es decir,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

La curvatura de la latitud es  $\frac{1}{y}$ ; por consecuencia, la segunda curvatura principal  $\frac{1}{R_2}$  puede determinarse con la fórmula

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\cos \varphi}{y},$$

donde  $\varphi$  es el ángulo entre la normal y el segmento  $y$ . Evidentemente, este ángulo es igual al de inclinación de la tangente al eje  $x$ , por consiguiente,  $\operatorname{tg} \varphi = y'$  y  $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$ .

De aquí

$$\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{y\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Ahora, podemos expresar la curvatura total  $K = \frac{1}{R_1 R_2}$  en los puntos del meridiano  $y = f(x)$  con la fórmula

$$K = -\frac{y''}{y(1 + y'^2)^2}. \quad (1)$$

Construyamos en el punto  $M(x, y)$  una tangente a la curva  $y = f(x)$  y denotemos con  $(X, 0)$  las coordenadas del punto de intersección de esta tangente con el eje  $x$ . De la ecuación

$$Y - y = y'(X - x),$$

para  $Y = 0$ , hallamos

$$X - x = -\frac{y}{y'}.$$

Según la definición de la tractriz,

$$X - x = -a \cos \varphi \quad (a = \text{const}).$$

De tal modo, tenemos la igualdad

$$\frac{y}{y'} = a \cos \varphi.$$

Sustituyendo  $\cos \varphi$  con la expresión  $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$ , obtendremos la ecuación diferencial de la tractriz

$$\frac{y\sqrt{1 + y'^2}}{y'} = -a.$$

De aquí

$$\begin{aligned} y'^2(a^2 - y^2) &= y^2, \\ y''(a^2 - y^2) &= y(1 + y'^2). \end{aligned}$$

De estas dos últimas relaciones hallamos:

$$y'' = \frac{y'^2(1 + y'^2)}{y},$$

de donde, en virtud de (1),

$$K = -\frac{y'^2}{y^2(1 + y'^2)}$$

A consecuencia de la ecuación (2) tenemos, al fin:

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

Con esto mismo queda demostrado que en todos los puntos la pseudoesfera tiene una misma curvatura negativa igual a  $-\frac{1}{a^2}$ , donde  $a$  es un parámetro de la tractriz, mediante cuya revolución se ha formado la pseudoesfera dada. Evidentemente, existe una pseudoesfera con cualquier curvatura negativa dada con anterioridad. Para construir un meridiano de una pseudoesfera con una curvatura dada, sólo hay que integrar la ecuación (2) para un valor dado del parámetro  $a$ . A base de lo anterior podemos afirmar que en el entorno de cualquier punto de la pseudoesfera la forma métrica tiene el aspecto siguiente en las coordenadas semigeodésicas (con la geodésica básica)

$$ds^2 = \text{ch}^2(\sqrt{-K} v) du^2 + dv^2$$

(§ 227, fórmula (C)).

Deformando cierto trozo de la pseudoesfera, se puede obtener infinidad de otras superficies de curvatura negativa constante.

Así pues, cualquiera que sea  $K$  ( $-\infty < K < +\infty$ ), en el espacio de Euclides existe una superficie de curvatura constante  $K$ .

En lo que se refiere a la solución del problema de Beltrami, llegamos a la conclusión que sigue: si en el espacio euclidiano existen superficies, sobre las cuales se realiza localmente la geometría de Lobachevski, entonces una de tales superficies será o bien esfera, o bien plano, o bien pseudoesfera.

Notemos que la construcción de las coordenadas semigeodésicas de la superficie se efectúa del mismo modo que la de las primeras coordenadas en el plano de Lobachevski (véase el § 224). Por eso, en las coordenadas semigeodésicas, la forma métrica de una superficie con la geometría interior de Lobachevski debe coincidir con la forma métrica del plano de Lobachevski, expresada en las primeras coordenadas. Al final del § 224 encontramos la expresión de la forma métrica del plano de Lobachevski en las primeras coordenadas  $\xi, \eta$ :

$$ds^2 = \text{ch}^2 \frac{\eta}{R} d\xi^2 + d\eta^2. \quad (**)$$

Nos queda cotejar esta expresión con las formas métricas de la esfera, del plano y la pseudoesfera, las cuales, según sabemos, tienen el aspecto siguiente en las coordenadas semigeodésicas, respectivamente:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cos^2(\sqrt{K} v) du^2 + dv^2, \\ ds^2 &= du^2 + dv^2, \\ ds^2 &= \text{ch}^2(\sqrt{-K} v) du^2 + dv^2. \end{aligned}$$

Vemos que (\*\*) coincide precisamente con la última de las tres formas (para  $\frac{1}{R} = \sqrt{-K}$ ).

De aquí sigue el teorema de Beltrami:

*En el entorno de cada punto de una pseudoesfera tiene lugar la geometría de Lobachevski.*

Cortemos una pseudoesfera a lo largo de alguno de sus meridianos; obtendremos un dominio simplemente conexo  $D$  acotado por la arista de retroceso y los bordes del corte. Sea  $D'$  un dominio de un plano de Lobachevski, isométrico al dominio  $D$ . Procuraremos describir el dominio  $D'^{*}$  con términos de la geometría de Lobachevski. Como los meridianos son las geodésicas de la pseudoesfera, entonces, en la aplicación isométrica de  $D$  sobre  $D'$  los meridianos se

<sup>\*</sup>) Habría que demostrar la existencia del dominio  $D'$ , mas, no nos detendremos en esto.



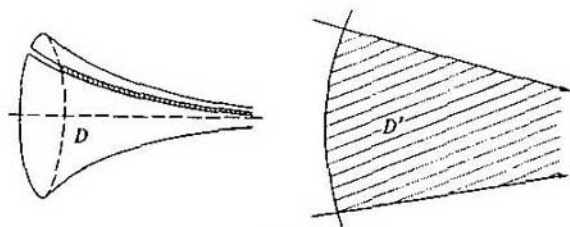


Fig. 164

aplicarán sobre cierto sistema de rectas. Será un sistema de rectas paralelas una a otra en el sentido de Lobachevski. Esto último se desprende de la aproximación asintótica de los meridianos y, por lo tanto, de sus aplicaciones. Evidentemente, serán aplicaciones de las latitudes las trayectorias ortogonales del referido sistema de rectas paralelas, es decir, los oriciclos (más bien, los arcos de oriciclos).

Así pues, el dominio  $D'$  está acotado por dos rayos de un haz parabólico (véase el § 39) y el arco de un oriciclo ortogonal a este haz. En la fig. 164 este dominio está señalado con rayado.

Mediante cierto procedimiento artificial en el espacio euclidiano se puede realizar también una parte más extensa del plano de Lobachevski. Para ello, imaginémosnos un conjunto numerable de seudoesferas iguales y coincidentes una con otra. En la disposición de estas seudoesferas concebimos un determinado orden, a saber: sobre la seudoesfera designada con  $A_0$  está superpuesta la  $A_1$ , sobre ésta, la seudoesfera  $A_2$ , etc.; además, la seudoesfera  $A_0$  misma está superpuesta sobre la  $A_{-1}$ , y esta última, sobre la  $A_{-2}$ , etc. Ahora, cortemos todas las seudoesferas a lo largo de alguno de sus meridianos comunes. Para el observador que esté mirando la sección del lado del eje, un borde del corte de cada seudoesfera es izquierdo y el otro, derecho. Unamos el borde izquierdo de cada seudoesfera  $A_n$  con el derecho de la  $A_{n+1}$ . Entonces resultará una superficie  $\Sigma$  que puede concebirse en forma de una cinta sin fin arrollada apretadamente en un molde seudoesférico. La superficie  $\Sigma$ , evidentemente, es isométrica a la parte del plano de Lobachevski que está del lado de la concavidad de cierto oriciclo.

Puede decirse de otro modo: la parte del plano de Lobachevski situada del lado de la concavidad del oriciclo, puede ser realizada en el espacio euclidiano en forma de una envoltura sin fin (o, como se dice, una superficie que cubre) de la seudoesfera.

Como ya señalábamos antes, Hilbert había demostrado que en el espacio de Euclides no existía una superficie que fuera isométrica a todo el plano de Lobachevski. De tal modo, la tentativa de Beltrami de realizar la planimetría euclidiana en forma de la geometría interior de cierta superficie, no podía ser coronada por el éxito.

A pesar de esto, las investigaciones de Beltrami revisten una gran importancia de principio.

Primero, incluso una realización parcial de la planimetría no euclidiana en el espacio euclidiano cambió la actitud escéptica de los geómetras ante las obras de Lobachevski. Por lo tanto, los descubrimientos de Beltrami jugaron un papel importante en el desarrollo general de la ciencia.

Segundo, gracias a Beltrami, la planimetría de Euclides, la de Lobachevski y la geometría sobre la esfera resultaron unidas en un esquema geométrico-diferencial general. Precisamente, se supo que todos estos sistemas geométricos se realizaban sobre una superficie de curvatura constante  $K$  y correspondían a los casos de  $K = 0$ ,  $K < 0$  y  $K > 0$ .

En virtud de todo lo expuesto, queda determinada la fuente analítica de la estrecha dependencia existente entre la geometría de Lobachevski y la geometría esférica.

En rigor, la forma métrica de la esfera

$$ds^2 = \cos^2(\sqrt{K} v) du^2 + dv^2 \quad (*)$$

y la forma métrica de la pseudoesfera

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K} v) du^2 + dv^2 \quad (**)$$

son diferentes en el dominio real. Más, si se admiten valores imaginarios para la magnitud  $\sqrt{K}$  o para  $\sqrt{-K}$ , entonces, como se sabe,

$$\operatorname{cos}(\sqrt{K} v) = \operatorname{ch}(\sqrt{-K} v).$$

De tal modo, al ser sustituido  $\sqrt{K}$  por  $\sqrt{-K}$ , las formas (\*) y (\*\*) se convierten una en otra.

## 6. Deducción de las relaciones métricas fundamentales en la geometría de Lobachevski

§ 229. En la presente sección ofreceremos una serie de proposiciones de la geometría de Lobachevski que han quedado al margen de la línea fundamental de nuestra exposición.

No encontraremos más ningunas dificultades de principio. Tras establecidas las más principales fórmulas métricas de la geometría de Lobachevski (§§ 216 — 222), todos los demás problemas de carácter métrico que surjan en esta geometría, se resuelven fácilmente aplicando las fórmulas obtenidas.

En la base de nuestros cálculos pondremos cierto sistema de coordenadas beltramianas  $(x, y)$ . Como es sabido (véase el § 216), las coordenadas beltramianas de un punto arbitrario del plano de Lobachevski están ligadas mediante la relación

$$x^2 + y^2 < 1. \quad (*)$$

Consideremos un plano euclidiano  $\Sigma$  con un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas  $(x, y)$ . La relación (\*) determina un dominio interior de un círculo unitario  $k_1$  sobre  $\Sigma$ . Comparemos un punto del plano  $\Sigma$  (situado dentro del círculo  $k_1$ ), cuyas coordenadas cartesianas son los números  $x, y$ , con un punto arbitrario del plano de Lobachevski, cuyas coordenadas cartesianas son los mismos  $x, y$ . Con esto mismo estableceremos cierta aplicación especial de todo el plano de Lobachevski sobre el interior del círculo  $k_1$ ; para esta aplicación serán imágenes de las rectas de Lobachevski las cuerdas del círculo  $k_1$  (desde luego, con los extremos excluidos).

Introducamos una métrica artificial dentro del círculo  $k_1$ . A saber, llamaremos distancia entre dos puntos internos del círculo  $k_1$  a un número igual a su distancia entre sus preimágenes sobre el plano de Lobachevski, convendremos en considerar valor del ángulo entre dos cuerdas  $a$  y  $b$  un número igual al valor del ángulo entre dos rectas de Lobachevski que sirven de preimágenes de las cuerdas  $a$  y  $b$ ; de manera análoga determinaremos las áreas de dominios.

Prácticamente, esto significa que el cálculo de las magnitudes geométricas fundamentales lo debemos llevar en coordenadas cartesianas mediante las fórmulas de la geometría de Lobachevski que expresen las correspondientes magnitudes en coordenadas de Beltrami.

De tal manera obtenemos cierta realización del plano de Lobachevski dentro del círculo euclidiano  $k_1$ . Manejaremos esta realización en lo sucesivo.

Es importante notar que nuestras deducciones tendrán un carácter general, es decir, no estarán relacionadas con las particularidades de la realización elegida. Esto está claro, pues la relación (\*) y las fórmulas métricas fundamentales de la geometría de Lobachevski deducidas

por nosotros a partir de axiomas de la geometría de Lobachevski, independientemente de en qué objetos se consideren realizados dichos axiomas<sup>\*)</sup>.

§ 230. LA EXPRESIÓN DE LA FUNCIÓN  $\Pi(l)$  A TRAVÉS DE FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES.

Sean dados sobre el plano de Lobachevski una recta arbitraria  $a$  y un punto  $O$  a una distancia  $l > 0$  de esta recta. Del punto  $O$  bajemos una perpendicular  $OP$  a la recta  $a$  y, a través de  $O$ , tracemos una recta  $b$  paralela a la recta  $a$ . El ángulo agudo  $\alpha$  entre las rectas  $b$  y  $OP$  se llama ángulo de paralelismo para el segmento  $OP = l$ , constituyendo la función del argumento  $l$ :  $\alpha = \Pi(l)$  (véase el § 33). Ahora, mostraremos que  $\Pi(l)$  se expresa mediante una fórmula bien sencilla a través de las funciones trascendentes elementales del argumento  $l$ .

Ubiquemos el origen de las coordenadas beltramianas en el punto  $O$ , dirijamos el eje  $Ox$  según el segmento  $OP$ ; el punto  $P$  tendrá las coordenadas beltramianas  $x = x_1, y = 0$ . A base de lo expuesto en el § 218, la recta  $a$  viene determinada por la ecuación

$x = \operatorname{th} \frac{l}{R} = x_1 (= \text{const})$ ; por consiguiente, al representar los objetos del plano de Lo-

bachevski dentro del círculo  $k_1$ , la recta  $a$  se representará por una cuerda perpendicular al eje  $Ox$  (fig. 165), la recta  $b$ , por la cuerda convergente con la cuerda  $a$  en la frontera del círculo  $k_1$  (esto deriva de la definición del paralelismo de las rectas en la geometría de Lobachevski). Como fue mostrado en el § 221, la fórmula que determina el ángulo entre dos direcciones junto a cierto punto  $M$  sobre el plano de Lobachevski, coincide con la fórmula de Euclides (II), del § 215, si  $M$  se halla en el origen de coordenadas. De aquí concluimos que el ángulo euclidiano entre la cuerda  $b$  y el segmento  $OP$  es igual a  $\alpha$ .

Tenemos una relación trigonométrica euclidiana  $x_1 = \cos \alpha$ . Junto con ésta, tenemos la dependencia  $x_1 = \operatorname{th} \frac{l}{R}$  (véase la primera de las fórmulas (4) del § 218). De estas últimas relaciones obtenemos:  $\cos \alpha = \operatorname{th} \frac{l}{R}$ , o, después de transformaciones no complicadas,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{l}{R}}$ . Tomando en consideración que  $\alpha = \Pi(l)$ , de aquí encontramos la fórmula de

Lobachevski:

$$\Pi(l) = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{l}{R}}.$$

§ 231. TRIGONOMETRÍA DE LOBACHEVSKI.

Ahora, estableceremos relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo no euclidiano. Consideremos, ante todo, un triángulo rectangular  $ABC$  con los catetos  $CB = a$ ,  $CA = b$ , con la hipotenusa  $AB = c$  y los ángulos agudos  $CAB = \alpha$ ,  $CBA = \beta$ . Ubiquemos el origen de coordenadas beltramianas en el punto  $A$ , dirigiendo el eje de abscisas según el cateto  $AC$  (fig. 166). Denotemos con  $x_1, y_1$  las coordenadas del punto  $C$ , con  $x_2, y_2$ , las del punto  $B$ . Tenemos  $x_1 = \operatorname{th} \frac{b}{R}, y_1 = 0, x_2 = x$ ; trataremos de determinar la coordenada  $y_2$  de la

<sup>\*)</sup> No obstante, no podemos afirmar que hemos demostrado la completitud del sistema de los axiomas de la geometría bidimensional de Lobachevski (el concepto de completitud del sistema de axiomas está expuesto en el § 75). Para ello, habría que deducir las fórmulas métricas fundamentales de la geometría de Lobachevski sin acudir a axiomas especiales. Tal conclusión fue dada por H. Liebmann, mas, se saca mediante razonamientos bastante largos (véase el apéndice VII en el libro de N. I. Lobachevski, Investigaciones geométricas de la teoría de las líneas paralelas (Н. И. Лобачевский, Геометрические исследования по теории параллельных линий.) Una deducción más sencilla fue sacada por A. V. Pogorelov hace poco; está expuesta en el libro «Fundamentos de la geometría»

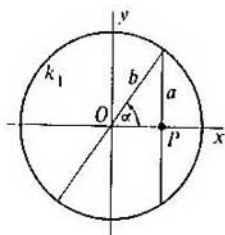


Fig. 165

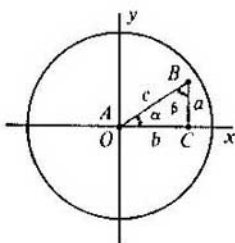


Fig. 166

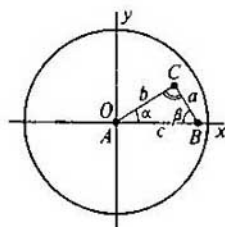


Fig. 167

fórmula (3) del § 217. En esta fórmula, suponiendo  $n(B, C) = a$ , hallaremos:

$$a = \frac{R}{2} \ln \frac{1 - x_1^2 + y_2 \sqrt{1 - x_1^2}}{1 - x_1^2 - y_2 \sqrt{1 - x_1^2}} = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + y_2 \operatorname{ch} \frac{b}{R}}{1 - y_2 \operatorname{ch} \frac{b}{R}}$$

De aquí

$$y_2 = - \frac{\operatorname{th} \frac{a}{R}}{\operatorname{ch} \frac{b}{R}}$$

Aplicando la relación euclidiana  $y_2 = x_1 \operatorname{tg} \alpha$  al triángulo  $ABC$  como objeto de la geometría de Euclides, obtenemos la fórmula de la geometría de Lobachevski:

$$\operatorname{th} \frac{a}{R} = \operatorname{sh} \frac{b}{R} \operatorname{th} \alpha, \quad (1)$$

(la dependencia entre dos catetos y un ángulo agudo).

Ahora, hagamos notar que la longitud euclidiana  $b_e$  del segmento  $AB$  se expresa a través de la longitud  $c$  del referido segmento en el sentido de la geometría de Lobachevski mediante

la fórmula  $c_e = \operatorname{th} \frac{c}{R}$  (para demostrarlo, basta dirigir el eje de abscisas desde el punto  $A$  a lo

largo del segmento  $AB$  y aplicar la primera de las fórmulas (1) del § 218). Tomando en consideración esto, de la fórmula euclidiana  $b_e = c_e \cos \alpha$  obtenemos de inmediato la fórmula siguiente de la geometría de Lobachevski:

$$\operatorname{th} \frac{b}{R} = \operatorname{th} \frac{c}{R} \cos \alpha \quad (2)$$

(la dependencia entre la hipotenusa, un cateto y el ángulo agudo adyacente).

Ahora, ubiquemos los ejes de coordenadas respecto al triángulo  $ABC$ , así como están en la fig. 167. Expresemos el ángulo  $\beta$  mediante la fórmula (3) del § 221. Ante todo, en las expresiones (7) del § 220 para los coeficientes  $E, F, G$  sustituyamos la coordenadas del punto  $B$ :

$x = \operatorname{th} \frac{c}{R}$ ;  $y = 0$ ; la fórmula (3) del § 221 tendrá el aspecto siguiente:

$$\cos \beta = \frac{dx \delta x + \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{c}{R}\right) dy \delta y}{\sqrt{dx^2 + \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{c}{R}\right) dy^2} \sqrt{\delta x^2 + \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{c}{R}\right) \delta y^2}}$$

Considerando que  $dx$ ,  $dy$  corresponden al desplazamiento según el eje  $Ox$  ( $dy = 0$ ),  $\delta x$ ,  $\delta y$  corresponden al desplazamiento según la recta  $BC$  ( $\frac{\delta y}{\delta x} = -\operatorname{th} \beta_e$ , donde  $\beta_e$  es el valor euclideo del ángulo  $ABC$ ), y colocando

$$1 - \operatorname{th}^2 \frac{c}{R} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{c}{R}},$$

de la igualdad antecedente obtenemos;

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta_e}{\operatorname{ch}^2 \frac{c}{R}}}}$$

Comparando esta última relación con la fórmula conocida  $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}$ , hallamos

$$\operatorname{ch} \frac{c}{R} \cdot \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta_e \quad (*)$$

Notemos que en el centro del círculo  $k_1$  los ángulos euclidianos coinciden con los ángulos en el sentido de Lobachevski; por lo tanto,  $\alpha_e = \alpha$  y  $\operatorname{tg} \beta_e = \operatorname{ctg} \alpha_e = \operatorname{ctg} \alpha$ . De aquí y de la fórmula (\*) obtenemos una nueva relación de la trigonometría de Lobachevski:

$$\operatorname{ch} \frac{c}{R} \cdot \operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha \quad (3)$$

(la dependencia entre la hipotenusa y dos ángulos agudos).

La fórmula (3) establece la dependencia entre una magnitud lineal y las magnitudes angulares. En la geometría euclidiana no hay un análogo para esta fórmula, pues en ella tiene lugar la semejanza de figuras.

Volvamos a la posición del triángulo de la fig. 166. Tenemos una relación euclidiana

$$c_e^2 = x_1^2 + y_2^2, \quad \text{donde } c_e = \operatorname{th} \frac{c}{R}, \quad x_1 = \operatorname{th} \frac{b}{R}, \quad y_2 = \frac{\operatorname{th} \frac{a}{R}}{\operatorname{ch} \frac{b}{R}};$$

tras cálculos no complicados, de aquí obtenemos:

$$\operatorname{ch} \frac{c}{R} = \operatorname{ch} \frac{a}{R} \cdot \operatorname{ch} \frac{b}{R} \quad (4)$$

(la dependencia entre la hipotenusa y dos catetos).

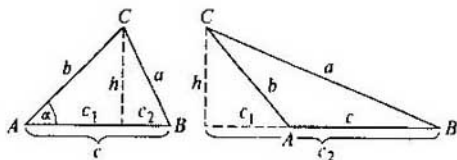


Fig. 168

Señalaremos dos fórmulas más, cuya deducción la efectuará fácilmente el lector mismo:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{R} = \operatorname{sh} \frac{c}{R} \operatorname{sen} \alpha \quad (5)$$

(la dependencia entre la hipotenusa, un cateto y el ángulo agudo opuesto) y

$$\operatorname{ch} \frac{a}{R} \sin \beta = \cos \alpha \quad (6)$$

(la dependencia entre un cateto y dos ángulos agudos).

§ 232. Ahora, sea  $ABC$  un triángulo arbitrario del plano de Lobachevski. Trazando en él la altura  $h$  (como se muestra en la fig. 168) y aplicando la fórmula (4); obtenemos

$$\operatorname{ch} \frac{h}{R} = \frac{\operatorname{ch} \frac{b}{R}}{\operatorname{ch} \frac{c_1}{R}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{a}{R}}{\operatorname{ch} \frac{c_2}{R}}$$

(los segmentos  $c_1$  y  $c_2$  se ofrecen en la fig. 168). De aquí

$$\operatorname{ch} \frac{a}{R} = \frac{\operatorname{ch} \frac{b}{R}}{\operatorname{ch} \frac{c_1}{R}} \operatorname{ch} \frac{c_2}{R} = \frac{\operatorname{ch} \frac{b}{R}}{\operatorname{ch} \frac{c_1}{R}} \operatorname{ch} \left( \frac{c}{R} \mp \frac{c_1}{R} \right) = \operatorname{ch} \frac{b}{R} \left( \operatorname{ch} \frac{c}{R} \mp \operatorname{sh} \frac{c}{R} \cdot \operatorname{th} \frac{c_1}{R} \right);$$

pero a consecuencia de la fórmula (2) tenemos:

$$\operatorname{th} \frac{c_1}{R} \pm \operatorname{th} \frac{b}{R} \cos \alpha.$$

De las dos últimas relaciones se deduce la fórmula

$$\operatorname{ch} \frac{a}{R} = \operatorname{ch} \frac{b}{R} \operatorname{ch} \frac{c}{R} - \operatorname{sh} \frac{b}{R} \cdot \operatorname{sh} \frac{c}{R} \cos \alpha. \quad (A)$$

§ 233. Las fórmulas (1) — (6), al igual que la fórmula (A), fueron establecidas antes, en el § 61. Sin embargo, en el § 61 estas fórmulas fueron demostradas por nosotros sólo para un modelo especial de la geometría de Lobachevski. Aquí demostramos las fórmulas (1) — (6), (A) partiendo de axiomas de la geometría de Lobachevski, sin hacer suposiciones algunas acerca de la naturaleza de los elementos geométricos. Con esto mismo dejamos demostradas las fórmulas (1) — (6), (A) para cualquier modelo de la geometría de Lobachevski.

En el § 62 cotejamos la fórmula (A) con la fórmula básica de la trigonometría esférica:

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos \alpha. \quad (B)$$

La fórmula (B) pasa a (A) mediante la sustitución de  $R$  por  $Ri$  ( $i = \sqrt{-1}$ ). Esto quiere decir que la trigonometría de Lobachevski puede estimarse como trigonometría sobre la esfera de un radio imaginario. Tal dependencia entre las fórmulas de Lobachevski y fórmulas de la trigonometría esférica se explica exhaustivamente desde el punto de vista geométrico-diferencial. Es que la geometría de Lobachevski es la trigonometría de curvatura negativa constante  $K = -\frac{1}{R^2}$ , la geometría sobre la esfera es la geometría de curvatura positiva constante  $K = \frac{1}{R^2}$ . Con la sustitución de  $R$  por  $Ri$ , la forma métrica de la esfera pasa a forma métrica del plano de Lobachevski. Al mismo tiempo, todas las relaciones métricas de la geometría esférica también pasan a correspondientes relaciones de la geometría de Lobachevski.

## Capítulo IX

### FORMAS ESPACIALES DE LA GEOMETRÍA

#### DE CURVATURA CONSTANTE

##### 1. Variedades bidimensionales con métrica geométrico-diferencial

§ 234. Sabemos que cada superficie del espacio euclidiano tiene una geometría interior bien determinada. Pero la geometría interior, por su parte, no determina ni mucho menos la superficie que la posee. Efectivamente, mediante la deformación se puede obtener infinidad de superficies diferentes en forma, pero con una geometría interior común.

De tal modo, la estructura de la disposición espacial de los puntos de una superficie es una circunstancia en mucho grado aleatoria para su geometría interior. Y, en todo caso, si se conoce la forma métrica de la superficie para cierto sistema de coordenadas interiores, entonces todos los hechos de la geometría interior de esta superficie pueden obtenerse sin apelación alguna al espacio circundante. Por eso surge la idea de generalizar el concepto de geometría interior de modo que se pueda hacer abstracción absoluta del espacio circundante.

La conveniencia de tal generalización podemos verla, en particular, si acudimos al material de la sección antecedente. Así, sabemos que la métrica del plano de Lobachevski, al igual que la de cada superficie del espacio euclidiano, es determinada por la forma cuadrática. Abstractamente, el plano de Lobachevski existe, esto fue demostrado al final del capítulo III. Mas, es imposible superponerlo TOTALMENTE sobre alguna superficie del espacio de Euclides. En el caso dado, al igual que en muchos otros problemas geométricos, resultan ser demasiado estrechos los marcos de la teoría clásica de las superficies.

Al expandirlos, llegaremos a una concepción de la geometría tan general que podremos incluir en un esquema sistemas geométricos más variados y, entre ellos, el de Lobachevski.

§ 235. Sea dado algún conjunto  $R$  (para nosotros es indiferente la naturaleza concreta de sus elementos). Llamaremos puntos a los elementos de este conjunto, denotándolos con las letras  $x, y, z$ , etc. Sea determinado un número  $\rho(x, y)$  por concepto de distancia para cada par de puntos  $x, y$ . El conjunto  $R$  con las distancias dadas entre sus puntos se llama *espacio métrico*, si su función  $\rho(x, y)$  satisface las condiciones:

1.  $\rho(x, x) = 0$ ;
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0$  con  $x \neq y$ ;
3.  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ .

Las condiciones señaladas se llaman axiomas del espacio métrico; la última de ellas se denomina axioma del triángulo.

Aunque estos axiomas presentan exigencias bien poco rigurosas ante la función  $\rho(x, y)$ , no obstante, dan la posibilidad de establecer una serie de importantes conceptos y teoremas para un espacio métrico arbitrario. Así, en cualquier espacio métrico puede definirse el concepto de *sucesión convergente de puntos*; la sucesión  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  converge hacia el punto  $a$ , si  $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$ . Es fácil demostrar que una misma sucesión no puede converger hacia dos puntos diferentes. En rigor, admitamos que  $x_n \rightarrow a$  y  $x_n \rightarrow b$ , siendo  $a \neq b$ ; como a consecuencia del

segundo axioma  $\rho(a, b) > 0$ , para  $n$  suficientemente grande tenemos:  $\rho(x_n, a) < \frac{1}{2} \rho(a, b)$  y



$\rho(x_n, b) < \frac{1}{2} \rho(a, b)$ ; pero de aquí  $\rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \rho(a, b)$ , lo cual contradice al tercer axioma.

Luego, de manera natural se define el concepto de aplicación continua de un espacio métrico sobre otro: la aplicación  $x' = f(x)$  del espacio  $R$  sobre el espacio  $R'$  (es decir, la confrontación de cierto punto  $x'$  perteneciente a  $R'$  con cada punto  $x$  de  $R$ ) se llama *continua* en el punto  $a$  si cada sucesión  $x_1, x_2, \dots, x_n$  convergente hacia el punto  $a$  se aplica sobre la sucesión  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$  convergente hacia el punto  $f(a)$ ; simbólicamente,

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Si la aplicación  $x' = f(x)$  es continua en cada punto del espacio  $R$ , se llama *continua en todo el espacio* o, simplemente, *continua*.

A título de ejemplos del espacio métrico podemos señalar, en primer lugar, el plano euclidiano (así como el espacio euclidiano) y el plano de Lobachevski (así como el espacio de Lobachevski). A continuación consideremos alguna superficie  $S$  del espacio euclidiano (suponiéndola determinada, al igual que en el § 225). No es difícil probar que dos puntos  $x, y$  cualesquiera de la superficie  $S$  pueden unirse con un arco suave o suave a trozos sobre una superficie; un arco tal es necesariamente rectificable, es decir, tiene una determinada longitud. Si llamamos distancia interior entre dos puntos  $x, y$  en la superficie  $S$  a un número  $\rho(x, y)$  igual a la cota inferior de las longitudes de las líneas que unen los puntos  $x$  y  $y$  en la superficie, entonces  $\rho(x, y)$  satisfará los axiomas 1 — 3 (omitimos la demostración). De tal modo, cualquier superficie con distancias interiores determinadas entre puntos sobre ella, es también un espacio métrico.

Vemos que el concepto de espacio métrico abarca todos los sistemas geométricos conocidos como casos bien particulares. Para subrayar la generalidad de este concepto, señalemos que en cualquier conjunto se puede fijar distancias entre pares de puntos, observando los axiomas 1 — 3.

Sea dado un conjunto  $M$  cualquiera con los elementos  $x, y, z, \dots$ . Convengamos en considerar  $\rho(x, y) = 0$ , si  $x = y$ ,  $\rho(x, y) = 1$ , si  $x \neq y$ . Con esto, evidentemente, quedan satisfechos los axiomas 1 — 3 y, por consiguiente, el conjunto  $M$  con las distancias dadas es un espacio métrico.

Tal generalidad del concepto de espacio métrico indica que, para construir una teoría geométrica enjundiosa, son demasiado pobres los axiomas 1 — 3. Ahora, agregaremos una serie de nuevas exigencias más rigurosas a los axiomas 1 — 3. Con ello, obtendremos una clase concreta y, al mismo tiempo, muy general de espacios métricos; los llamaremos *variedades de Riemann* (bidimensionales) o *variedades de métrica geométrico-diferencial*.

He aquí estas exigencias.

1) Convengamos en llamar  $\epsilon$ -entorno ( $\epsilon$  es un número positivo) o simplemente entorno de un punto  $a$  de un espacio métrico al conjunto de todos sus puntos  $x$ , para los cuales sea válida la desigualdad  $\rho(x, a) < \epsilon$ .

*Exigiremos que para cada punto  $a$  del espacio exista un entorno  $U$  que permita una aplicación biunívoca y continua en ambos sentidos sobre el plano euclidiano.*

En el entorno  $U$ , introduciremos cierto sistema de coordenadas, a saber: llamaremos coordenadas  $u, v$  del punto  $a$  del entorno  $U$  a las coordenadas cartesianas de aquel punto de la superficie euclidiana, que corresponda a  $x$  en virtud de la referida aplicación. Las condiciones de continuidad planteadas ante esta aplicación significan lo siguiente: si  $x_0$  es un punto constante de las coordenadas  $u_0, v_0$ , siendo  $x$  un punto variable con las coordenadas  $u, v$ , entonces, cada vez que  $u \rightarrow u_0, v \rightarrow v_0$ , tiene lugar  $\rho(x, x_0) \rightarrow 0$ , y viceversa, si  $\rho(x, x_0) \rightarrow 0$ , entonces  $u \rightarrow u_0, v \rightarrow v_0$ .

2) Tengan una parte común ciertos dos entornos con coordenadas dadas en ellos. *Exigiremos que en la parte común de los dos entornos, las coordenadas de un punto arbitrario dadas*

en un entorno, se expresen a través de las coordenadas del mismo, dadas en el otro entorno por ecuaciones unívocamente convertibles, cuyos segundos miembros tengan derivadas parciales continuas y un determinante funcional diferente de cero.

Para estas dos condiciones, llamaremos *variedad bidimensional suave* al espacio métrico. Se puede definir el concepto de línea suave y de dirección para la variedad suave.

Llamaremos *arco suave cerrado* o, más brevemente, *segmento* en entorno  $U$  de la variedad  $S$  a un conjunto de puntos del referido entorno, cuyas coordenadas se determinen por las ecuaciones

$$u = u(t), v = v(t),$$

donde  $t$  pertenece a cierto intervalo cerrado  $\alpha \leq t \leq \beta$ , si 1) las funciones  $u(t)$ ,  $v(t)$  para  $\alpha \leq t \leq \beta$  son continuas y poseen derivadas continuas, 2) si las derivadas  $u'(t)$ ,  $v'(t)$  no se anulan simultáneamente, sea cual fuere el valor de  $t$  y 3) si las funciones  $u(t)$ ,  $v(t)$  no toman simultáneamente valores iguales para dos valores diferentes de  $t$ .

Los puntos del segmento correspondientes a los valores de  $t = \alpha$  y  $t = \beta$  los llamaremos *extremos* del mismo.

Evidentemente, se conservan las propiedades enumeradas de las ecuaciones que determinan cierto segmento si se pasa a las coordenadas de un otro entorno cualquiera que contenga dicho segmento.

De tal modo, por cuanto, al definirse un segmento, es indiferente la elección del entorno que lo cubre, el concepto de segmento tiene un sentido invariante.

Diremos que en cada uno de sus puntos un arco suave tiene una *dirección* que se da por la relación de diferenciales  $du = u'(t) dt$ ,  $dv = v'(t) dt$  (aquí es importante que  $u'(t)$  y  $v'(t)$  no pueden anularse simultáneamente, pues en caso contrario la relación  $du : dv$  podría ser indefinida); en el nuevo sistema de coordenadas  $(u^*, v^*)$  la dirección de la misma curva se da por la relación de diferenciales

$$du^* = \frac{\partial u^*}{\partial u} du + \frac{\partial u^*}{\partial v} dv, \quad dv^* = \frac{\partial v^*}{\partial u} du + \frac{\partial v^*}{\partial v} dv.$$

Un sistema finito de segmentos suaves (hablando en general, pertenecientes a distintos entornos de una variedad) se llama *arco suave a trozos*, si, con una numeración adecuada de dichos trozos, un extremo del primero de ellos coincide con un extremo del segundo, el otro extremo del segundo coincide con un extremo del tercero y así sucesivamente. Los extremos libres del primero y el último segmentos se llaman *extremos* de un arco suave a trozos.

Si los trozos vecinos tienen direcciones coincidentes en los extremos comunes, entonces, en este caso, el sistema de trozos constituye un *arco suave* que ha de llamarse *cerrado*, pues posee extremos (lo son los extremos libres del primero y del último segmentos).

Análogamente a esto se puede definir el concepto de arco suave abierto y suave a trozos compuesto de un conjunto numerable de segmentos  $i_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) unidos de modo que un extremo del segmento  $i_n$  coincide con el comienzo del segmento  $i_{n+1}$ . Llamaremos simplemente *línea* a un arco suave abierto.

3) En el espacio métrico se puede definir el concepto de arco rectificable y el de su longitud, al igual que se hace en el espacio euclidiano<sup>\*)</sup>. Exigiremos que cada arco cerrado fijado

\*) En un espacio  $R$ , sea dado un arco continuo  $L$ , es decir, dada una imagen continua de un segmento  $\alpha \leq t \leq \beta$ , cuyos puntos (de la imagen) están marcados con los valores correspondientes de sus preimágenes del segmento  $\alpha \leq t \leq \beta$  y se consideran ordenados en función del crecimiento de las marcas. Examinemos un sistema arbitrario de puntos  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} \leq t_n = \beta$  del segmento  $\alpha \leq t \leq \beta$ ; en el arco  $L$ , le corresponde un sistema de puntos

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ . Compongamos la suma  $\sum_{i=0}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1})$ . Si un conjunto de todas las

sumas de este tipo (como un conjunto de números) está acotado, entonces el arco  $L$  se llama rectificable; la cota superior de este conjunto es la longitud del arco  $L$ .

de cualquier línea suave  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  sea rectificable y que, sobre la línea suave, la longitud del arco con un extremo fijo y con un extremo variable  $(u(t), v(t))$  sea una función diferenciable del parámetro  $t$ .

4) Al fin, exigiremos que en cada entorno con un sistema de coordenadas  $(u, v)$  dado existan tres funciones continuas  $E = E(u, v)$ ,  $F = F(u, v)$ ,  $G = G(u, v)$ , mediante las cuales la diferencial del arco de una línea suave  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  se determina por la fórmula

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \text{ donde } du = u'(t) dt, \quad dv = v'(t) dt.$$

Al espacio métrico que satisfaga todas las condiciones planteadas, lo llamaremos *variedad geométrico-diferencial bidimensional* o *variedad de Riemann bidimensional*. Por lo tanto, para hacer más cómodo en el uso este concepto, es conveniente imponer también, además de las exigencias enumeradas, la condición de conexión; se puede enunciarla justamente de la misma forma que la condición de conexión de una superficie (véase el § 225).

§ 236. Convengamos en llamar ángulo entre las direcciones  $du : dv$  y  $\delta u : \delta v$  a la magnitud  $\varphi$  determinada por la igualdad

$$\cos \varphi = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}.$$

La magnitud que constituye aquí el segundo miembro, es invariante respecto al cambio de las coordenadas (lo que puede ser demostrado, al igual que en el § 221); por consiguiente, es indiferente la elección del sistema de coordenadas, al determinarse el ángulo.

Al fin, llamemos área del dominio  $D$  de la variedad  $S$  al valor de la integral

$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

extendida sobre el dominio  $D$ . La invariación de tal definición está demostrada en el § 222.

De tal modo, el cálculo de longitudes, ángulos y áreas de una variedad geométrico-diferencial arbitraria se realiza exactamente a base de las mismas fórmulas que sobre una superficie (véase el § 225, las fórmulas (I), (II), (III)).

Luego, podemos llamar curvatura total de una variedad en su punto arbitrario a la magnitud  $K$  que se calcula mediante la fórmula que expresa la curvatura total de una superficie a través de los coeficientes de su forma métrica; de manera análoga se puede determinar la curvatura geodésica de una línea. No obstante, al calcular estas magnitudes, es preciso diferenciar dos veces los coeficientes de la forma métrica  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y los segundos miembros de las ecuaciones de una línea  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ . Por ende, NOS VEREMOS OBLIGADOS A LIMITAR CON EXIGENCIAS ADICIONALES DE SUAVIDAD EL CONCEPTO DE UNA VARIEDAD SUAVE Y SU MÉTRICA; a saber, supondremos que las funciones  $E$ ,  $F$ ,  $G$  son continuamente diferenciables hasta el segundo orden, y todas las transformaciones admisibles de las coordenadas, hasta el tercero.

Para estas condiciones adicionales, la variedad geométrico-diferencial se llama *regular*<sup>1)</sup>. Sobre una variedad regular se puede determinar de manera ordinaria las líneas geodésicas: o bien como extremales del problema variacional mín  $\int ds$ , o bien como líneas de curvatura geodésica nula. Para hallar las geodésicas podemos valernos del sistema conocido de ecuaciones

<sup>1)</sup> Si se pasa a nuevas coordenadas  $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$ ,  $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ , entonces las funciones  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$ ,

$\bar{G}$  correspondientes a estas coordenadas se expresan a través de  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y  $\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}$

(véanse las fórmulas (5) del § 221); por eso la suavidad de las funciones  $\bar{u}(u, v)$ ,  $\bar{v}(u, v)$  debe ser en uno mayor que la suavidad de las funciones  $E$ ,  $F$ ,  $G$ .

diferenciales:

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0;$$

la familia de geodésicas coincide con la de curvas integrales de este sistema. De aquí se deduce que a través de cada punto de una variedad regular en cualquier dirección pasa una línea geodésica.

En la geometría de la variedad, las geodésicas juegan el papel de rectas.

Aplicamos todos los objetos de la geometría interior de la superficie al caso de la variedad geométrico-diferencial bidimensional abstracta. Con esto mismo obtuvimos un concepto en todo caso más amplio que el de geometría interior de una superficie del espacio euclidiano, pues abarca, por ejemplo, también la geometría del plano de Lobachevski.

Determinamos la variedad geométrico-diferencial partiendo del concepto de espacio métrico, mediante una serie de condiciones adicionales. Estas condiciones las expresamos en términos analíticos. Trataremos de revelar su sentido geométrico.

Consideremos un punto arbitrario  $M_0(u_0, v_0)$  de una variedad con la forma métrica  $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ . Sean  $E_0, F_0, G_0$  los valores de las funciones  $E, F, G$  en el punto  $M_0$ . Mediante cálculos (no los vamos a aducir aquí) se puede demostrar lo siguiente:

Sean  $M(u, v)$  y  $M'(u + \Delta u, v + \Delta v)$  dos puntos de una variedad y  $\rho(M, M')$ , la distancia entre ellos; si los puntos  $M$  y  $M'$  tienden a  $M_0$ , entonces

$$\lim \frac{\rho(M, M')}{\sqrt{E_0 \Delta u^2 + 2F_0 \Delta u \Delta v + G_0 \Delta v^2}} = 1. \quad (*)$$

Ahora, en el plano euclidiano  $E$ , tomemos en sistema de coordenadas oblicuas  $(u, v)$ , cuyos vectores de escala  $e_1, e_2$  fueron elegidos bajo las condiciones

$$|e_1| = \sqrt{E_0}, |e_2| = \sqrt{G_0},$$

$$\cos(e_1, e_2) = \frac{F_0}{\sqrt{E_0 G_0}}.$$

Si  $M^*(u, v)$  y  $M^{**}(u + \Delta u, v + \Delta v)$  son dos puntos del plano  $E$ , entonces la distancia euclídea  $\rho_E(M^*, M^{**})$  entre ellos se expresa por la fórmula

$$\rho_E(M^*, M^{**}) = \sqrt{E_0 \Delta u^2 + 2F_0 \Delta u \Delta v + G_0 \Delta v^2}.$$

Tomando en consideración esto y a base de la relación (\*) podemos llegar a la conclusión que sigue.

Para cada punto  $M_0$  de una variedad existe un entorno que permite una aplicación tal sobre el plano euclidiano  $E$  que si  $M$  y  $M^*$  son dos puntos del entorno y  $M^*, M^{**}$  son sus imágenes, entonces

$$\rho(M, M') = \rho_E(M^*, M^{**}) + \eta(M, M') \rho(M, M')$$

donde  $\eta(M, M')$  es un infinitésimo si  $\rho(M_0, M)$  y  $\rho(M_0, M')$  son infinitésimos.

\*) Estas condiciones pueden observarse, pues a consecuencia de la determinación positiva de la forma métrica  $E_0 > 0, G_0 > 0$  y  $F_0^2 < E_0 G_0$ .

En otros términos,  $\rho(M, M')$  difiere de  $\rho_E(M^*, M^{**})$  en un infinitésimo de orden superior con respecto a las dimensiones del entorno.

En esto precisamente radica el sentido geométrico fundamental de las condiciones que determinan las variedades de Riemann. Puede decirse que mediante estas condiciones distinguimos una clase de espacios métricos que tienen carácter euclidiano en lo localmente infinito.

La idea expuesta aquí se ilustra bien con el material de los §§ 220 — 222, donde las propiedades geométrico-diferenciales del plano de Lobachevski fueron establecidas mediante cierta aplicación de éste sobre el plano euclidiano representado en forma de una orisfera.

§ 237. Sea dada alguna variedad geométrico-diferencial (de Riemann). Sobre ella, consideremos un dominio arbitrario  $H$ . Es fácil cerciorarnos de que  $H$ , a su vez, es una variedad geométrico-diferencial. Naturalmente, esta variedad forma parte de una otra, más extensa; si fuera dada sólo la variedad  $H$ , la podríamos «prolongar», es decir, incluirla en una otra variedad, a saber, en la inicial.

Al investigar la geometría interior de variedades, es deseable que se descarten las que puedan ser «prolongadas»; en el caso contrario, esta investigación se perderá en la masa de detalles nada interesantes.

Tomando en consideración lo dicho, impondremos sobre estas variedades la exigencia de *completitud* (la cual, no obstante, es más rigurosa que la de no prolongabilidad). La formulación de esta exigencia emplea el concepto de sucesión fundamental conocida por el lector en el caso de la geometría euclidiana en el curso del análisis elemental.

La sucesión de puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  se llama *fundamental*, si  $\rho(x_n, x_m)$  tiende a cero, cuando los números  $n$  y  $m$  crecen infinitamente. En el plano euclidiano, cualquier sucesión fundamental es convergente, es decir, si  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \rho(x_n, x_m) = 0$ , entonces existe un punto  $x$  tal

que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$ . En el análisis elemental esta propiedad del plano euclidiano se llama principio general de convergencia.

En el caso de una variedad geométrico-diferencial arbitraria, el principio de convergencia puede no verificarse. Para convencernos de ello, es suficiente considerar un ejemplo sencillo que sigue.

En el plano de Euclides, tomemos una sucesión de puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  convergente hacia un punto  $x$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Al mismo tiempo, esta sucesión será una sucesión fundamental. Excluyamos el punto  $x$  del plano, dejando invariable la métrica de la porción restante. En la variedad que obtendremos de tal modo, los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  siguen constituyendo una sucesión fundamental, mas, ésta no tiene límite.

Las variedades geométrico-diferenciales en las que existen sucesiones fundamentales carentes de límite, se llaman *incompletas*. Cada variedad completa es *improlongable*.

En lo sucesivo, las variedades incompletas no se consideran.

§ 238. Al definir la variedad bidimensional geométrico-diferencial, hemos hecho una importante generalización del concepto de superficie y de su geometría interior. Explicemos su sentido y ventaja.

En la teoría clásica de las superficies, éstas se consideran como objetos del espacio euclidiano. Si cierta superficie tiene la ecuación exterior

$$r = r(u, v),$$

entonces su geometría interior se determina mediante la forma cuadrática  $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + D dv^2$  con los coeficientes bien determinados

$$E = r_u^2, \quad F = r_u \cdot r_v, \quad G = r_v^2.$$

De tal modo, cada superficie tiene una determinada métrica, o una geometría interior. En otros términos, la geometría interior de una superficie se determina por las particularidades de la disposición espacial de sus puntos. Si queremos realizar la geometría interior con propieda-

des dadas a base de métodos de la teoría de las superficies, entonces debemos encontrar una superficie que tenga la geometría interior requerida, es decir, se distinga por una disposición espacial de sus puntos tal, a la cual le corresponda justamente la métrica que nos interesa. Mientras tanto, por el carácter del problema de estudio de la geometría INTERIOR de una superficie, la estructura espacial de la superficie no ofrece interés.

Cuando consideramos la geometría interior de una variedad abstracta, la cual no ha de concebirse necesariamente dentro de algún espacio, estamos libres de la necesidad de tomar en consideración una circunstancia adventicia, esto es, la forma de la superficie como objeto espacial. Abstrayéndonos de las propiedades adventicias de las imágenes sujetas al estudio, facilitamos nuestra investigación.

Por otra parte, el problema de hallar una superficie, cuya métrica posea determinadas propiedades, puede carecer de solución, es decir, en el espacio puede no existir en absoluto una superficie con la métrica necesaria. No obstante, puede suceder que esta misma métrica se realice en alguna variedad abstracta, pues podemos asignar a nuestra discreción, con un grado de arbitrariedad bien grande, la métrica de la variedad abstracta. El problema de Beltrami sirve de ejemplo. En las páginas inmediatas se citarán otros ejemplos numerosos.

En la sección siguiente consideraremos variedades bidimensionales de curvatura CONSTANTE, es decir, las variedades, cuya curvatura total es igual en todos los puntos (la definición de la curvatura total de una variedad fue aducida en el § 236).

Las variedades de curvatura constante merecen ser consideradas en primer lugar, debido a muchas de sus propiedades. Basta decir que ellas, y sólo ellas, entre todas las variedades geométrico-diferenciales bidimensionales, permiten el movimiento libre sobre sí mismas de sus porciones suficientemente pequeñas. Si llamamos congruentes a dos dominios isométricos de una variedad, entonces la aserción enunciada la podemos formular con más exactitud así:

Las variedades de curvatura constante, y sólo ellas, admiten tales desplazamientos congruentes de sus porciones suficientemente pequeñas (es decir, tales aplicaciones isométricas de una sobre otra) que el conjunto de estos desplazamientos es transitivo respecto a los elementos lineales. Para cerciorarse de ello, el lector tiene que acudir al § 227, donde se ha demostrado una aserción justamente igual para las superficies. Como los razonamientos del § 227 estaban enmarcados exclusivamente en la esfera de conceptos de la geometría interior de la superficie, son aplicables directamente a variedades metrizadas abstractas.

Además, a base de los resultados obtenidos en el § 227, podemos afirmar que cada variedad de una curvatura constante  $K$  localmente, para  $K = 0$ , tiene la geometría de Euclides; para  $K < 0$ , la de Lobachevski, y, para  $K > 0$ , tiene la geometría sobre la esfera.

De tal modo, las variedades abstractas de curvatura constante, al igual que las superficies, al ser estudiadas localmente, se dividen en tres clases solamente.

Mas, al estudiar estas variedades «en total», descubriremos una enorme riqueza de diferencias en su naturaleza, la cual sería inconcebible si siguiéramos ateniéndonos a la teoría elemental de las superficies.

## 2. Formas espaciales parabólicas

§ 239. *Cada variedad geométrico-diferencial completa de curvatura constante se llama forma espacial de la geometría de una curvatura constante dada* (la condición de completitud se ha enunciado en el § 237). Convengamos en considerar equivalentes dos formas espaciales de la geometría de una curvatura dada, si tienen igual tipo topológico, es decir, si admiten una aplicación biunívoca y continua en ambos sentidos de una sobre otra. Desde el punto de vista de la clara evidencia, esto quiere decir que admitimos deformaciones de la forma espacial que excluyan «rupturas» y «pegaduras».

Con tal condición se obtiene una distribución natural de todas las formas espaciales en un conjunto fácilmente visible de clases de formas equivalentes entre sí; cada clase se caracteriza con la indicación de algún representante.

Si proponernos dar una clasificación topológica completa de las variedades bidimensionales, señalaremos solamente que todas las variedades bidimensionales se dividen en *abiertas* y *cerradas*. Una variedad se llama cerrada, si de cualquier conjunto infinito de sus puntos se puede elegir una sucesión convergente (es decir, si para esta variedad es válido el principio de Bolzano-Weierstrass).

La variedad que no sea cerrada, se llama abierta.

Ejemplos de variedades cerradas: la esfera, el toro. Ejemplos de variedades abiertas: el plano, cualquier dominio sobre un plano, cualquier dominio sobre una esfera que no la cubra por entero.

En lo sucesivo, llamaremos *parabólica* a la geometría de curvatura constante  $K$ , si  $K = 0$ ; *elíptica*, si  $K > 0$ , e *hiperbólica*, si  $K < 0$ .

§ 240. Entre las formas espaciales parabólicas, en primer lugar, debe señalarse el *plano euclidiano* (como ejemplos de formas equivalentes a él, pueden mencionarse el cilindro parabólico, la porción convexa del cilindro hiperbólico, la esfera del espacio de Lobachevski, etc.).

Además del plano euclidiano (y de las formas equivalentes a él) existen cuatro formas espaciales de geometría parabólica más; sus representantes topológicos son: el cilindro ordinario, el cilindro unilateral, el toro y el toro unilateral. Considerémoslos en el orden citado.

Partamos un plano en franjas iguales mediante un sistema de rectas paralelas  $\{a\}$  (fig. 169) y asignemos una dirección en el plano, por ejemplo, perpendicular a las rectas  $\{a\}$  (se excluye la asignación de la dirección de las mismas rectas  $\{a\}$ ). En alguna franja tomemos un punto arbitrario  $M$ . Desplazando la franja elegida en la dirección dada, podemos superponerla sobre cualquier otra; en este caso el punto  $M$  ocupará cierta nueva posición; aquí lo designaremos nuevamente con la letra  $M$ . El conjunto de todos los puntos que se obtienen de tal modo a partir del punto  $M$ , lo denotaremos con el símbolo  $\{M\}$ . Convendremos en considerar cada conjunto de puntos  $\{M\}$  como un elemento («punto») del nuevo conjunto  $R$ . En el conjunto  $R$  introduciremos una métrica: si  $x = \{M\}$  e  $y = \{N\}$  son dos puntos de  $R$ , entonces, por concepto de distancia  $\rho(x, y)$  asignaremos un mínimo de distancias euclídeas entre los puntos del conjunto  $\{M\}$  y los del conjunto  $\{N\}$ . Según la definición,  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ . Convengámonos de que  $\rho(x, y)$  satisface todos los axiomas del espacio métrico (véase el § 235).

1) Si los conjuntos  $\{M\}$  y  $\{N\}$  son idénticos, entonces la distancia euclídea mínima de los puntos  $\{M\}$  hasta los puntos  $\{N\}$  es igual a cero, por consiguiente, para  $x = y$  tenemos  $\rho(x, y) = 0$ .

2) Si los conjuntos  $\{M\}$  y  $\{N\}$  son diferentes, entonces la distancia euclídea mínima de los puntos  $\{M\}$  hasta los puntos  $\{N\}$  es superior a cero; a consecuencia de esto y según la definición de la función  $\rho(x, y)$  para  $x \neq y$ , tenemos  $\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0$ .

3) Sean  $x = \{M\}$ ,  $y = \{N\}$  y  $z = \{P\}$  tres puntos arbitrarios del espacio  $R$ . Denotemos con  $N_1$  algún punto de  $\{N\}$ ; en los conjuntos  $\{M\}$  y  $\{P\}$  existen respectivos puntos  $M_1$  y  $P_1$

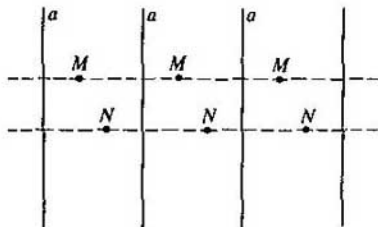


Fig. 169

tales que  $\rho(x, y) = M_1N_1$  y  $\rho(y, z) = N_1P_1$ , donde  $M_1N_1$  y  $N_1P_1$  son distancias euclídeas. Para las distancias euclídeas tenemos:  $M_1N_1 + N_1P_1 \geq M_1P_1$ ; pero  $M_1P_1 \geq \rho(x, z)$ , por consiguiente,  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ .

Con esto mismo queda establecido que  $R$  es un espacio métrico.

La función  $\rho(x, y)$  está definida de modo que un  $\varepsilon$ -entorno suficientemente pequeño de un punto arbitrario  $x = \{M\}$  del espacio  $R$  es isométrico a un  $\varepsilon$ -entorno de un punto  $M$  del plano euclídiano; de aquí se deduce que  $R$  es una variedad bidimensional de curvatura nula.

Por fin, dada la completitud del plano euclídiano, la variedad  $R$  también es completa. De tal modo,  $R$  es cierta forma espacial parabólica.

Para dar más evidencia a nuestros razonamientos, imaginémosnos que el plano, a modo de una cinta sin fin, está arrollado en un cilindro circular de manera que cada franja envuelve el cilindro justamente una vez, coincidiendo todos los puntos de cualquier conjunto  $\{M\}$  con un punto situado sobre el cilindro. Con esto mismo, se establece evidentemente que el cilindro circular es una forma espacial de la geometría parabólica, equivalente a la variedad  $R$  considerada antes.

Llegaremos al mismo resultado si convenimos simplemente en identificar todos los puntos de cada conjunto  $\{M\}$ , en particular, los que están «uno frente al otro» en distintas fronteras de una franja cualquiera. Está claro que la unión de dos en dos de los puntos pertenecientes a distintas fronteras de una franja (como se muestra en la fig. 170, donde los puntos unidos están denotados con una misma letra), da un «tubo».

Así pues, descubrimos la clase de formas espaciales de la geometría de curvatura nula, cuyo tipo topológico se concibe en forma de cilindro circular.

Volvamos nuevamente al plano partido por las rectas paralelas  $\{a\}$  en franjas iguales; asignemos una recta  $b$  más, perpendicular a las rectas  $\{a\}$  (fig. 171). Sea  $M$  un punto arbitrario tomado en alguna franja. Desplacemos la franja elegida a lo largo de la recta  $b$  de modo que coincida con una franja vecina; en este caso, el punto  $M$  ocupará una nueva posición. Apliquemos especularmente el punto obtenido respecto a la recta  $b$ , volviendo a designar su imagen con la letra  $M$ . Desarrollando este proceso, obtendremos un conjunto infinito de puntos  $\{M\}$ .

Convendremos en considerar cada conjunto de puntos  $\{M\}$  como un elemento de un nuevo espacio métrico  $R$ ; la distancia  $\rho(x, y)$  entre dos puntos  $x = \{M\}$  e  $y = \{N\}$  del espacio  $R$ , al igual que en el caso antecedente, la adoptaremos igual al mínimo de distancias euclídeas entre los puntos del conjunto  $\{M\}$  y los del  $\{N\}$ .

Es fácil comprender que  $R$  constituye una forma espacial de la geometría de curvatura nula.

Obtendremos esta misma forma espacial, si, limitándonos con una franja, identificamos sus puntos de frontera concurrentes en un mismo conjunto  $\{M\}$  (el esquema de la identificación de los puntos se ofrece en la fig. 172, donde los puntos identificados están denotados con letras iguales). La variedad que se obtiene de tal modo, se llama *cilindro unilateral*.

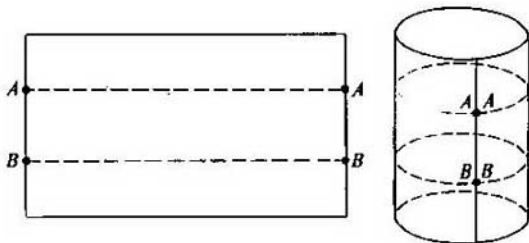


Fig. 170



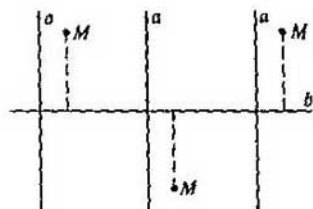


Fig. 171

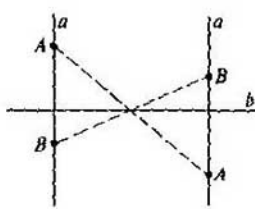


Fig. 172

Ahora, en lugar de una franja sin fin de un plano, consideremos un conjunto de puntos situados dentro de cierto rectángulo  $ABCD$  y en sus lados  $AB$  y  $CD$ , excluyendo los propios puntos  $A, B, C, D$  (de tal modo, quedan excluidos totalmente los segmentos  $AD$  y  $BC$ ). Fácilmente se demuestra que tal conjunto es topológicamente equivalente a una franja sin fin del plano acotada por dos rectas paralelas (es decir, admite la aplicación biunívoca y continua en ambos sentidos sobre esta franja). Ahora, identifiquemos de dos en dos los puntos de los segmentos  $AB$  y  $CD$  situados simétricamente respecto al centro del rectángulo (con esto, el punto  $A$  se unirá con el  $C$ , el punto  $B$ , con el  $D$ ; en la fig. 173 las flechas indican la dirección de los segmentos  $AB$  y  $CD$  que deben coincidir, después de unidos estos segmentos). Así obtendremos una variedad con métrica euclidiana, topológicamente equivalente al cilindro unilateral (no obstante, no es una forma espacial, pues no satisface la condición de completitud), se la llama *cinta de Moebius*.

La unión de los lados opuestos de un rectángulo descrita arriba, se puede realizarla de hecho mediante una tira de papel, construyendo así un modelo de la cinta de Moebius (fig. 174). Valiéndonos de este modelo, nos cercioraremos fácilmente de que la superficie representada por él, es *unilateral*: no se puede pintarla de dos colores de modo que éstos se junten sólo en el canto. El modelo de la cinta de Moebius hace hasta cierto grado evidente nuestra noción sobre el cilindro unilateral, justificando también su nombre.

Así pues, descubrimos la tercera clase de formas espaciales parabólicas representadas por el cilindro unilateral y topológicamente equivalentes a la cinta de Moebius.

Ahora, sobre un plano, consideremos dos sistemas de rectas paralelas  $\{a\}$  y  $\{b\}$  que topan en rectángulos iguales (fig. 175). Tomemos un punto arbitrario  $M$  en alguno de ellos. Desplazando el rectángulo elegido según los sentidos de las rectas  $\{a\}$  y  $\{b\}$ , podemos hacerlo coincidir con cualquier otro rectángulo; con esto, el punto  $M$  ocupará un conjunto infinito de nuevas posiciones; en cada una de ellas volveremos a designarlo con la letra  $M$ . Así se obtiene un conjunto infinito de puntos  $\{M\}$ ; convengamos en considerarlo como un elemento de un conjunto  $R$ . De manera plenamente análoga con lo anterior, introducimos métrica en el conjunto  $R$ : si  $x = \{M\}$  e  $y = \{N\}$  son dos puntos de  $R$ , entonces  $\rho(x, y)$  son el mínimo de distancias euclídeas entre los puntos del conjunto  $\{M\}$  y los del  $\{N\}$ . El espacio métrico obteni-

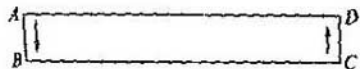


Fig. 173

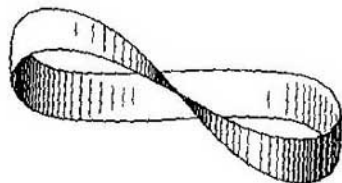


Fig. 174

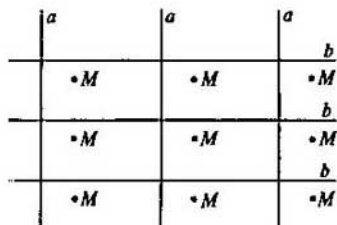


Fig. 175



Fig. 176

do de tal manera resulta ser una variedad completa de curvatura nula, es decir, una forma espacial de la geometría parabólica.

Una idea clara de esta forma la da un rectángulo con los puntos identificados de dos en dos de sus lados opuestos (fig. 176, donde las flechas indican los sentidos de los lados, que deben coincidir al ser identificados dichos lados; como todos los vértices del rectángulo se unen en un mismo punto, están designados con unas mismas letras). Ahora, hagamos notar que al ser identificados dos lados opuestos del rectángulo, se forma un «tubo»; la identificación ulterior de los otros dos lados proporciona un toro (fig. 177).

De tal modo, *el tipo topológico de la nueva clase de formas espaciales viene representado por el toro (por eso se llaman anulares).*

Volvamos al plano partido en rectángulos iguales por las rectas  $\{a\}$  y  $\{b\}$ , pero, tracemos complementariamente una línea media entre dos rectas vecinas  $\{b\}$  en cada franja (fig. 178). Sea  $M$  un punto arbitrario de algún rectángulo; desplazando el rectángulo elegido a lo largo de la franja entre dos rectas  $\{a\}$  y superponiéndolo sucesivamente sobre todos los demás rectángulos de dicha franja, obtendremos una serie infinita de nuevas posiciones del punto  $M$ ; denotemos con la letra  $M$  todos estos puntos. Ahora, cada rectángulo de la franja en cuestión lo desplazaremos a lo largo de las rectas  $\{b\}$  a una franja vecina, aplicando especularmente el punto señalado en él, respecto a la línea media del rectángulo (que pasa entre las rectas  $\{b\}$ ); volveremos a designar con la letra  $M$  todos los puntos obtenidos. Iremos efectuando infinitamente este proceso. Los conjuntos de puntos  $\{M\}$  obtenidos de tal forma convendremos en considerarlos como elementos de un nuevo espacio métrico  $R$ , cuya métrica es determinada justamente por la misma condición que en todos los casos antecedentes.

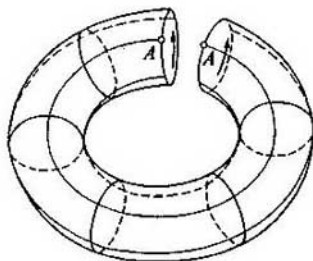


Fig. 177

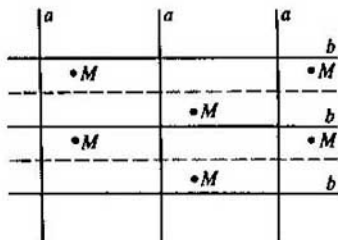


Fig. 178



Fig. 179

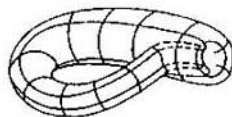


Fig. 180

Llegamos a una forma espacial parabólica que se concibe en forma de rectángulo con puntos de los lados opuestos, identificados de dos en dos, según el esquema de la fig. 179. Esta variedad se llama *toro unilateral*.

Tratemos de hacer un modelo de un toro unilateral.

Uniendo dos lados horizontales del rectángulo representado en la fig. 179, obtenemos un «tubo»; pero, para unir luego los lados verticales del rectángulo así, como lo exige el esquema de la fig. 179, tendremos que hacer pasar un extremo de este tubo a través de la pared y unirlo con el otro extremo por dentro (fig. 180). Es imposible concebir en el espacio un toro unilateral en forma de una superficie sin puntos múltiples.

*Las formas espaciales parabólicas representadas por el toro unilateral se llaman unilateralmente anulares.*

Acabamos de establecer que existen variedades de curvatura nula, topológicamente equivalentes tanto al toro ordinario como al unilateral. Este resultado se ha obtenido sólo merced a que habíamos introducido el concepto de variedad geométrico-diferencial abstracta. Ninguna superficie regular del espacio euclidiano que tenga el tipo topológico de toro ordinario o unilateral, puede tener una métrica natural de curvatura nula en todo punto. De tal modo, no habríamos podido descubrir formas parabólicas anulares si hubiéramos seguido ateniéndonos a la teoría euclidiana de las superficies.

§ 241. Descubrimos cinco clases de formas espaciales de la geometría parabólica, cuyos representantes topológicos son:

- 1) el plano,
- 2) el cilindro circular,
- 3) el cilindro unilateral,
- 4) el toro,
- 5) el toro unilateral.

Entre las variedades enumeradas existen tres variedades abiertas (primera, segunda y tercera) y dos cerradas (cuarta y quinta); al mismo tiempo, entre ellas tenemos tres variedades bilaterales (primera, segunda y cuarta) y dos unilaterales (tercera y quinta). En la topología se demuestra que todas estas variedades son topológicamente diferentes.

Además de las cinco variedades enumeradas, no hay otras variedades bidimensionales que puedan llevar geometría parabólica, es decir, no pueden ser metrizadas parabólicamente, con la observación de la exigencia de completitud. La demostración de esta afirmación se ha trazado sucintamente en el libro de Klein «Geometría no euclidiana», capítulo IX (Klein, «Nicht-Euklidische Geometrie»). Desde luego, todo dominio de un plano, un cilindro, etc. es una variedad metrizada con geometría de curvatura nula, sin embargo, en todos estos casos no se satisface la exigencia de completitud. Todas las formas parabólicas, por su definición misma, localmente, tienen la misma geometría que el plano euclidiano. Mas, en general, a cada forma espacial le corresponde un sistema geométrico, en el cual son puntos los elementos de la variedad de una forma dada, siendo rectas sus líneas geodésicas. Las relaciones recíprocas entre los puntos y las rectas se subordinan a todos los axiomas de Hilbert solamente en el sistema geométrico de la primera de las cinco formas espaciales parabólicas enumeradas. En los sistemas

geométricos de las cuatro formas restantes tienen lugar proposiciones completamente distintas, en su mayoría diferentes de las euclidianas.

Por ejemplo, en la geometría del cilindro, cuyas geodésicas son las hélices y circunferencias ortogonales respecto a las generatrices, es inválida la aserción de que a través de dos puntos pasa sólo una recta.

### 3. Formas espaciales elípticas

§ 242. Existen dos clases de formas espaciales elípticas; sus representantes son: 1) la esfera, 2) el plano elíptico.

El hecho de que la esfera es una forma espacial de la geometría elíptica, se percibe de inmediato, pues la curvatura total de una esfera de un radio  $r$  es igual a  $\frac{1}{r^2}$  en todos sus puntos. De tal modo, la esfera como una superficie del espacio euclidiano, tiene métrica natural de una curvatura positiva constante.

Ahora, vamos a demostrar que existe una variedad geométrico-diferencial completa de una curvatura positiva constante que es topológicamente inequivalente a la esfera.

Sea dada en el espacio euclidiano una esfera  $S$  de un radio  $r$ .

Consideremos un conjunto  $R$ , cuyos elementos son pares de puntos diametralmente opuestos de la esfera  $S$ . Introduciremos una métrica en el conjunto  $R$ ; a saber, si  $x = \{M_1, M_2\}$  e  $y = \{N_1, N_2\}$  son dos elementos del conjunto  $R$  (aquí  $M_1, M_2$  y  $N_1, N_2$  son pares de puntos diametralmente opuestos de la esfera  $S$ ), entonces, por concepto de distancia  $\rho(x, y)$  asignaremos el mínimo de distancias sobre la esfera entre los puntos del par  $\{M_1, M_2\}$  y los del  $\{N_1, N_2\}$ .

Es fácil demostrar (mediante razonamientos análogos a los aducidos al comienzo del § 240) que la función  $\rho(x, y)$  satisface los axiomas 1 — 3 del § 235, es decir, que  $R$  es un espacio métrico.

Luego, es evidente que para cada punto  $x = \{M_1, M_2\}$  del espacio  $R$  existe un  $\varepsilon$ -entorno isométrico al  $\varepsilon$ -entorno del punto  $M_1$  (o  $M_2$ ) sobre la esfera  $S$ . Consiguientemente,  $R$  es una variedad geométrico-diferencial de curvatura positiva constante. Por fin, de la completitud de la esfera  $S$  se deduce la de la variedad  $R$ .

De tal modo,  $R$  es una forma espacial de la geometría de curvatura constante. Esta forma (al igual que todas las formas equivalentes a ella) se llama *plano elíptico*.

Topológicamente, la esfera y el plano elíptico no son equivalentes. Para convencernos de ello, notemos que la esfera tiene la propiedad siguiente: cada curva cerrada simple que esté sobre la esfera, la divide en dos partes. Esta propiedad debe conservarse, cualquiera que sea la aplicación topológica de la esfera, es decir, para la aplicación biunívoca y continua en ambos sentidos de la esfera sobre una otra variedad. Mientras tanto, el plano elíptico carece de tal propiedad. En rigor, consideremos un conjunto de pares de puntos diametralmente opuestos de un círculo grande de la esfera  $S$ ; denotémoslo con  $L$ . El conjunto  $L$ , como un subconjunto de  $R$ , topológicamente equivale a la circunferencia. Por consiguiente, sobre el plano elíptico  $R$ , el conjunto  $L$  es una simple curva cerrada. Mas, la curva  $L$  no divide  $R$  en dos partes, pues dos pares cualesquiera de puntos diametralmente opuestos de la esfera, que no pertenezcan al conjunto  $L$  (es decir, dos puntos cualesquiera de  $R$ , que no pertenezcan a  $L$ ), pueden pasar continuamente uno en el otro, sin pasar por  $L$ . Precisamente de aquí se deduce que la esfera y el plano elíptico son topológicamente diferentes.

Así pues, descubrimos dos formas espaciales de la geometría de curvatura constante, que determinan dos clases diferentes de formas; ambas formas son cerradas.

No existen otras formas elípticas. Sin embargo, la demostración de esta afirmación no es fácil, y no la vamos a aducir aquí.

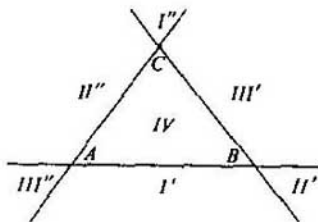


Fig. 181

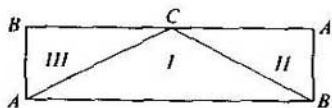


Fig. 182

§ 243. Aquí vamos a describir dos nuevas representaciones del plano elíptico.

1) Designemos con  $T$  un conjunto, cuyos elementos son todas las rectas que pasen por el centro de la esfera  $S$  (es decir, un haz de rectas concéntrico con  $S$ ). En el conjunto  $T$  introduciremos una métrica, suponiendo  $\rho(x, y) = \alpha r$ , donde  $\alpha$  es el ángulo mínimo entre dos rectas  $x$  e  $y$ ,  $r$  es el radio de la esfera  $S$ .

Si a cada recta de  $T$  le asignamos un par de puntos diametralmente opuestos de la esfera  $S$ , en los cuales esta recta interseca la esfera, obtendremos una aplicación isométrica de  $T$  sobre  $R$ . De aquí sigue que el haz  $T$  con la métrica establecida es una nueva representación del plano elíptico.

2) Completemos el espacio euclidiano con elementos infinitamente alejados así, como se hace en la geometría proyectiva (véase el § 80). En el espacio tomemos un plano arbitrario  $\alpha$ , considerándolo como un plano proyectivo, es decir, tomando en consideración los puntos infinitamente alejados. Introduciremos métrica en el plano proyectivo  $\alpha$ .

Con este objeto, tomemos algún haz de rectas  $T$ , cuyo centro no se halle en el plano  $\alpha$ . Con cada recta  $u$  del haz  $T$  confrontemos un punto  $x$  del plano  $\alpha$ , situado en la recta  $u$ . La confrontación resulta ser biunívoca (aquí es importante lo que el plano está completado por puntos infinitamente alejados; gracias a esto, a las rectas del haz, paralelas al plano  $\alpha$ , les corresponden sus puntos infinitamente alejados). Como distancia entre dos puntos  $x, y$  del plano  $\alpha$  asignemos el número  $\rho(x, y)$  igual a la distancia entre aquellos elementos del haz  $T$  que corresponden a los puntos  $x, y$  (la métrica del haz  $T$  se ha determinado más arriba). Está claro que con tal definición de distancias sobre el plano  $\alpha$ , es isométrica la correspondencia entre los puntos del plano  $\alpha$  y rectas del haz  $T$ . Consiguientemente, un plano proyectivo metrizado del modo referido es una forma espacial equivalente a  $T$ . Obtenemos una nueva representación del plano elíptico, en forma de un plano proyectivo metrizado.

§ 244. Trátemos de hacer un modelo topológico del plano proyectivo en forma de una superficie del espacio euclidiano, topológicamente equivalente a él.

Sobre un plano euclidiano  $\alpha$ , tomemos tres rectas que no pasen por un mismo punto; las mismas parten el plano  $\alpha$  en siete dominios marcados con  $I', I'', II', II'', III', III'', IV$  en la fig. 181. Adicionados los puntos infinitamente alejados al plano  $\alpha$ , los dominios  $I'$  y  $I''$ , inicialmente diferentes, se unen conformando un único dominio conexo; lo designaremos con la cifra romana I y lo denominaremos triángulo, pues está acotado por segmentos de tres rectas. Análogamente, los dominios  $II'$  y  $II''$  se unen conformando un triángulo II, y los  $III'$  y  $III''$ , un triángulo III. De tal modo, el plano completado por puntos infinitamente alejados, con sus tres rectas queda partido en cuatro triángulos I, II, III, IV. Ahora, notemos que si eliminamos el triángulo IV de la variedad en cuestión, el dominio que se queda será topológicamente equivalente a la cinta de Moebius.

Esto quedará evidentemente claro si representamos los triángulos I, II, III así, como lo muestra la fig. 182. El lector se cerciorará de que el esquema de la unión recíproca de los triángulos I, II, III de la fig. 182 no se diferencia del de la unión de los triángulos anotados con las

mismas cifras en la fig. 181. Además, los vértices  $A$  y  $B$  del triángulo II han de considerarse unidos con los vértices designados con las mismas letras en el triángulo III. Es evidente que con tal unión los triángulos I, II, III conforman la cinta de Moebius, cuyo contorno consta de los lados rectilíneos  $CA$ ,  $AB$ ,  $BC$ . El plano completado con puntos infinitamente alejados se obtiene mediante la unión del contorno de la cinta de Moebius con el del triángulo IV.

Es sabido que el triángulo es topológicamente equivalente a aquella porción de la esfera que queda después de abrirse en la esfera algún orificio redondo. De tal modo, la unión del contorno  $CABC$  de la cinta de Moebius con el del triángulo IV da una superficie topológicamente equivalente a la que resulta con la pegadura de la esfera con un orificio mediante la cinta de Moebius. Esta superficie es unilateral. En el espacio euclidiano tridimensional, es imposible realizar la referida construcción de la superficie sin puntos múltiples. La representación del plano proyectivo en forma de una esfera con un orificio pegado por la cinta de Moebius, permite interpretar claramente las particularidades de la disposición mutua de las rectas proyectivas sobre el plano proyectivo. A base de esto, por ejemplo, se percibe fácilmente que una recta proyectiva no divide el plano proyectivo en dos partes.

Nos cercioraremos de esto si cortamos un círculo pequeño en el plano proyectivo, sin tocar la recta dada  $a$ ; la parte del plano proyectivo que se quede, será cinta de Moebius, a la que pertenece la recta  $a$ ; para mayor evidencia nos imaginaremos que esta recta  $a$  coincide con la línea media de dicha cinta de Moebius, mas, el corte cerrado de la cinta de Moebius no la divide en dos partes según la línea media, lo cual se revela con un sencillo modelo de papel.

§ 245. A dos formas espaciales elípticas les corresponden dos sistemas geométricos: la geometría sobre la esfera y la geometría sobre el plano elíptico. La geometría sobre el plano elíptico no es sino la geometría bidimensional de Riemann (véanse los §§ 63 — 67). Correspondientemente a ello, el plano elíptico se llama también plano de Riemann.

#### 4. Formas espaciales hiperbólicas

§ 246. A diferencia de la geometría elíptica que tiene dos clases de formas espaciales equivalentes topológicas, y la parabólica, en la cual existen cinco clases, la geometría hiperbólica puede realizarse con la observación del principio de completitud en un conjunto infinito de variedades bidimensionales topológicamente diferentes. Incluso entre las variedades cerradas existe infinidad de tales variedades, en las cuales puede darse la métrica de curvatura constante  $K < 0$ .

A base de los resultados expuestos en los §§ 216 — 222 y 227 — 228, podemos afirmar que en el espacio de Lobachevski axiomáticamente determinado, cada plano constituye una variedad geométrico-diferencial de curvatura negativa constante; esta variedad es completa, lo cual se demuestra exactamente del mismo modo que la completitud del plano euclidiano (empleando solamente axiomas de la geometría absoluta). Por consiguiente, podemos concluir que *el plano de Lobachevski es una de las formas espaciales hiperbólicas. La clase determinada por ella se caracteriza de la manera siguiente: sus representantes son variedades geométrico-diferenciales completas de curvatura negativa constante, topológicamente equivalentes al plano ordinario (euclidiano). Todas estas variedades se llaman planos hiperbólicos.*

§ 247. Considerando dado cierto plano hiperbólico, mostraremos cómo hay que construir un conjunto infinito de otras formas hiperbólicas. Ante todo, ocupémonos de las formas cerradas.

Nos valdremos de un método de construir variedades bidimensionales cerradas conocido en la topología elemental. Durante cierto tiempo nos atenderemos a un punto de vista netamente topológico, es decir, admitiremos cualesquiera deformaciones continuas de figuras, aunque alteren sus propiedades métricas. Además, para facilitar la exposición, nos valdremos de métodos evidentemente descriptivos.

Imaginémonos un cuadrado hecho de película de goma fina (fig. 183). Uniendo sus lados designados con la letra  $a$  de modo que coincidan las direcciones de estos lados indicadas por

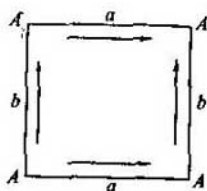


Fig. 183

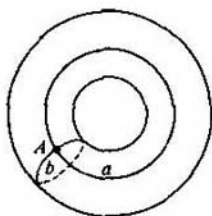


Fig. 184

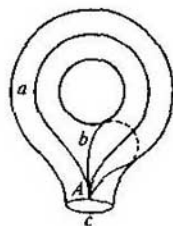


Fig. 185

las flechas, convertiremos este cuadrado en un tubo. Además, uniendo las fronteras de las bocas del tubo, obtendremos un toro (fig. 184). De tal manera, el toro puede estimarse como un cuadrado con los lados opuestos pegados de dos en dos, coincidiendo sus direcciones indicadas por las flechas en la fig. 183 y uniéndose los cuatro vértices en un punto (en la fig. 183, los lados unidos están denotados con una misma letra: los cuatro vértices están designados con una misma letra  $A$ ; en la fig. 184, donde está representado un toro hecho, las designaciones corresponden a las usadas en la fig. 183).

Imaginémonos que en el toro se ha hecho un orificio, de forma que dicho toro se convierte en un «asa» (fig. 185). Pase por el punto  $A$  el borde de este orificio. Entonces, en el cuadrado inicial el borde del orificio se representará en forma de una línea cerrada  $c$  que pasa por el punto  $A$  (fig. 186). Rompiendo la línea  $c$  en el punto  $A$  y produciendo cierta deformación de la figura representada en la fig. 186, podemos convertirla en pentágono dado en la fig. 187. A la inversa, pegando los lados de este pentágono marcados con la letra  $a$  de manera que coincidan sus direcciones señaladas con las flechas; pegando análogamente los lados denotados con la letra  $b$ , y dejando libre el lado  $c$  como frontera de la figura, nuevamente obtendremos un asa.

Pegando las fronteras de dos asas, obtendremos un «bollo» (fig. 188). Al mismo tiempo, se podrá considerarlo, evidentemente, como un octángulo, cuyos lados están pegados según el esquema mostrado en la fig. 189, donde los lados a unir vienen designados con letras iguales, y las flechas marcan las direcciones que han de coincidir. En efecto, tal octángulo surge de dos pentágonos que representan asas, al ser empalmados sus lados libres.

Análogamente a que el toro es una superficie del género 1 engendrada por la unión de dos en dos de los lados de un cuadrado, el bollo es una superficie del género 2 engendrada por la

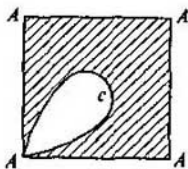


Fig. 186

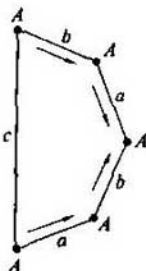


Fig. 187

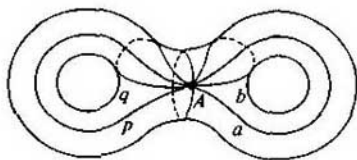


Fig. 188

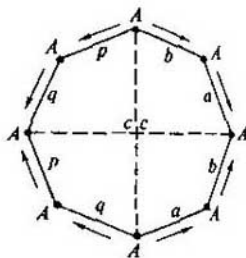


Fig. 189

unión de dos en dos de los lados de un octángulo, cada superficie bilateral cerrada del género  $p$  puede obtenerse mediante la unión de dos en dos de los lados de un  $4p$ -ágono regular según un determinado esquema, el cual se muestra para un caso particular  $p = 3$  en las figs. 190, 191.

Ahora, ocupémonos de la construcción de formas espaciales cerradas de la geometría hiperbólica. Ante todo, demostramos que existe una forma topológicamente equivalente a la superficie de género  $p = 2$  (es decir, al «bollo» en forma de 8).

Consideremos cierto punto  $O$  sobre el plano de Lobachevski, trazando cuatro rectas a través de él de modo que constituyan una estrella regular. Trazando en cada una de estas rectas segmentos congruentes de longitud  $r$  en ambos sentidos a partir del punto  $O$ , y uniendo con segmentos rectilíneos sus extremos, obtendremos un octágono regular  $P_8$ . Excluyamos de la consideración los puntos del plano de Lobachevski exteriores respecto a este triángulo, identificando de dos en dos sus lados, siguiendo el esquema dado en la fig. 189. Además, se supone que, al ser identificados dos lados, se identifican de dos en dos los puntos que dividen estos lados en proporciones iguales. Designemos con  $R$  un conjunto, cuyos elementos son: 1) los puntos interiores del octágono  $P_8$ ; 2) los pares de puntos identificados de los lados; 3) los ocho vértices (identificados). Suponiendo que todos los puntos del plano de Lobachevski que representen cierto elemento  $x$  del conjunto  $R$ , están denotados con la letra  $M$ , escribiremos este elemento simbólicamente en forma de  $x = \{M\}$ . Convengamos en designar la distancia entre los puntos  $P$  y  $Q$  del plano de Lobachevski con  $d(P, Q)$ .

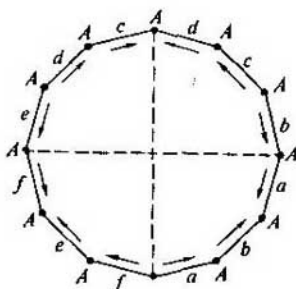


Fig. 190

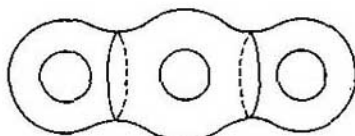


Fig. 191



Introduciremos métrica en el conjunto  $R$ . A saber, si  $x = \{M\}$  e  $y = \{N\}$  son dos elementos de  $R$ , entonces por  $\rho(x, y)$  elijeremos el menor de los dos números:

$$d_1 = d(M, N),$$

$$d_2 = \min [d(M, T_1) + d(N, T_2)],$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  son dos puntos identificados cualesquiera. De este modo,  $R$  se convierte en un espacio métrico topológicamente equivalente al «bollo». Podemos concebir  $R$  en forma de un «bollo», sobre el cual viene dada una métrica artificial mediante la superposición del octógono  $P_8$  sobre el «bollo» (es decir, mediante cierta aplicación del octógono  $P_8$  sobre el «bollo»). Esta métrica será la métrica ordinaria de Lobachevski en cada entorno suficientemente pequeño de cualquier punto del «bollo», menos, tal vez, el entorno de aquel punto en el cual coinciden todos los vértices del octógono.

El punto señalado será un punto particular del «bollo» metrizado si la suma de los ángulos internos del octógono se diferencia de cuatro ángulos rectos. Para que la métrica dada en el «bollo» sea regular en todo punto, debemos usar un octógono tal en el cual la suma de los ángulos internos sea igual a cuatro rectos.

De tal modo, la cuestión de la posibilidad de metrización hiperbólica regular del «bollo» se reduce al problema de la existencia de un octógono regular con la suma requerida de ángulos en la geometría de Lobachevski. Este problema se resuelve fácilmente en el sentido positivo.

En rigor, sea  $S(r)$  la suma de los ángulos internos del octógono  $P_8$ ; con  $r$  está designada la distancia del vértice del octógono hasta su centro (esta magnitud fue citada durante la construcción de  $P_8$ ). Notemos que sobre el plano de Lobachevski la suma de los ángulos internos de un triángulo que disminuye infinitamente, tiende a  $\pi$ . Por ende,  $S(r) - 6\pi$  para  $r \rightarrow 0$  (es decir,  $S(r)$  tiende a la suma de los ángulos internos del octógono de Euclides). De aquí se deduce que, siendo suficientemente pequeño,  $r = r_0 S(r_0) > 2\pi$ . De otro lado, si designamos con  $\beta(r)$  el valor de la mitad de un ángulo del octógono  $P_8$ , y con  $\delta = \delta(r)$ , la mitad del lado del referido octógono entonces, evidentemente,  $\beta(r) < \Pi(\delta(r))$ , donde  $\Pi$  es la función de Lobachevski.

Como para  $r \rightarrow \infty$  también  $\delta(r) \rightarrow \infty$  (véase el lema II del § 30), y para  $\delta \rightarrow \infty$   $\Pi(\delta) \rightarrow 0$ , entonces, a consecuencia de la desigualdad antecedente para  $r \rightarrow \infty$   $\beta(r)$  tiende a cero. De aquí, si  $r \rightarrow \infty$  tenemos  $S(r) = 16\beta(r) \rightarrow 0$ . De tal modo, para  $r$  suficientemente grandes debe ser

$$S(r) < 2\pi.$$

En virtud de la continuidad de la función  $S(r)$ , existe  $r = r_1$  tal que  $S(r_1) = 2\pi$ . Con esto queda demostrado lo que se necesitaba.

Al notar que sobre el plano de Lobachevski todo cuadrilátero tiene una suma de los ángulos internos inferior a  $2\pi$ , es fácil comprender que con nuestro método es imposible construir una métrica hiperbólica determinada en todo punto del toro. Se puede probar que el toro (el cual es una superficie del género  $p = 1$ ), en general, no es un representante topológico de las formas espaciales de la geometría hiperbólica.

Al contrario, cada superficie cerrada bilateral del género  $p > 2$ , al igual que en el caso considerado del  $p = 2$ , puede ser hiperbólicamente metrizada. Esto se deduce de inmediato de que sobre el plano de Lobachevski existe un  $4p$ -polígono regular con la suma de los ángulos internos igual a  $2\pi$ .

Consideraciones análogas permiten establecer que cada superficie cerrada unilateral, salvo el plano proyectivo y el toro unilateral, también admite la metrización hiperbólica<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Las superficies cerradas unilaterales se engendran a base de  $2n$ -polígonos regulares mediante la identificación de dos en dos de sus lados según un esquema especial; en un caso particular  $n = 2$  mostramos este esquema en el § 240 al construir un toro unilateral. Una información sucinta, pero suficiente para el problema dado, sobre la topología de las superficies cerra-

Todo lo expuesto en este párrafo lo resumimos con el teorema siguiente.

*Existe infinidad de diferentes clases de formas espaciales hiperbólicas cerradas; sus representantes topológicos son todas las superficies cerradas, excepto aquellas que representen formas espaciales parabólicas y elípticas.*

§ 248. Diremos sólo unas cuantas palabras acerca de las formas espaciales abiertas de la geometría hiperbólica. Existe también un conjunto infinito de tales formas. Para que todo esté claro, basta mostrar unos cuantos ejemplos.

Sobre el plano de Lobachevski consideremos una franja infinita  $P_1$  acotada por dos rectas PARALELAS. Sea  $P_2$  una otra franja exactamente igual. Si identificamos las rectas que acotan la franja  $P_1$ , con las que acotan la  $P_2$ , considerando diferentes los puntos internos de estas franjas, entonces resultará una variedad homeomorfa a cilindro, con una métrica hiperbólica determinada en todos los puntos de ella. En este caso se cumple con clara evidencia la condición de completitud.

Se puede proceder de otra manera: tomar dos ejemplares de una franja del plano de Lobachevski acotada por dos rectas DIVERGENTES, superponerlos uno sobre el otro e identificar las fronteras coincidentes. Entonces de nuevo se engendrará un cilindro hiperbólicamente metrizado.

A propósito, las variedades hiperbólicamente metrizadas obtenidas por los dos métodos referidos, localmente, tienen una misma geometría interior, un mismo tipo topológico, siendo completas las dos, pero, en general, sus propiedades métricas son sustancialmente diferentes (una de estas variedades es un tubo que se ensancha infinitamente en un sentido, estrechándose infinitamente en el otro; la otra variedad es un tubo que se ensancha infinitamente en ambos sentidos).

Si consideramos dos «triángulos» con los lados extendidos infinitamente, superpuestos uno sobre el otro (evidentemente, existen tales figuras sobre el plano de Lobachevski) e identificamos los puntos de sus fronteras, entonces resultará una variedad abierta hiperbólicamente metrizada completa de un nuevo tipo tipológico.

Se puede variar infinitamente este método. Sin embargo, con tal procedimiento no se puede obtener, por ejemplo, una métrica hiperbólica sobre la esfera; si identificáramos puntos de la frontera de dos círculos coincidentes del plano de Lobachevski, obtendríamos una esfera con la métrica hiperbólica, mas, con una línea especial. En el caso dado, el método no da una variedad con una métrica determinada en todo punto, pues el plano de Lobachevski (al igual que el de Euclides) no es simétrico respecto a la circunferencia.

§ 249. Resumamos nuestra investigación. Obtuvimos infinidad de diversas variedades que llevan geometría de curvatura constante. Todas las variedades que posean la métrica de una curvatura dada, localmente, tienen geometría común. Cada una de ellas admite desplazamientos sobre sí misma, congruentes en el sentido de su geometría, de sus porciones suficientemente pequeñas, y el conjunto de estos desplazamientos es transitivo respecto a los elementos lineales. Mas, las variedades metrizadas de tipos topológicos diferentes, en total, poseen geometrías distintas. A cada una de ellas le corresponde su sistema de teoremas que expresan propiedades pertenecientes a esta variedad de objetos. La clase de tales geometrías es una generalización natural de las geometrías de Euclides, Lobachevski y Riemann.

En esta sección nos ocupamos exclusivamente de geometrías de dos dimensiones. Las geometrías no euclidianas de la dimensión  $n \geq 3$  las puede conocer el lector en los libros de F. Klein, *Nicht-Euklidische Geometrie*, P. K. Rashevski, *Geometría de Riemann y análisis tensorial* (П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ), E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Par Élie Cartan. 2-me éd., revue et augm. P., Gauthier — Villars, 1946 (véase también la primera edición del presente libro).

das, así como fotografías de modelos de algunas superficies unilaterales cerradas en el espacio euclidiano (con puntos múltiples, por supuesto) la encontrará el lector en el libro de D. Hilbert y S. E. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, N. Y. Dover Publications, 1944.

## *Índice alfabético de materias y nombres*

- Absoluto 379, 389  
Altura de la superficie equidistante 111  
Ángulos adyacentes 55  
— no euclidianos 142  
— de paralelismo 92  
— recto 55  
Aplicación armónica 272  
— colineal 403  
— lineal 276  
— ordenada 235  
Área del domo 453  
— del triángulo 124, 373  
— Arco suave abierto 483  
— — cerrado 483  
— — a trozos 483  
Arista 95  
Arquímedes 12  
Automorfismos 368  
Axioma de Arquímedes 62, 189, 197  
— de Cantor 62, 188, 197, 199  
— de completitud 62, 197  
— Lobachevski 77, 136  
— de paralelismo 74  
— de Pasch 39, 81, 226  
Axiomas de la aritmética 190  
— de congruencia 46, 122, 137  
— de continuidad 62, 71, 122, 188, 236  
Axiomas del espacio métrico 481  
— de Euclides 10  
— de Hilbert 36  
— de incidencia 36, 120, 136, 164  
— de orden 39, 120, 136, 164  
— — lineal 39  
— proyectivos bidimensionales 301  
— — de incidencia 211  
— — de orden 223
- Baldus 385  
Base 393  
— ortonormal 408  
— de la radiación 114  
— de la superficie equidistante 111
- Beltrami 34, 460  
Bolyai 30
- Cantor 62  
Cara 95  
Cayley 35, 124  
Centro de homología 213  
— de perspectiva 213, 338  
— proyectivo del segmento 240  
— de la radiación 114  
Ciclo 102  
Cinta de Moebius 490  
Circunferencia límite 106  
Clase de la radiación 318  
Coeficientes de la aplicación 276  
Completitud del sistema de axiomas 201  
Condición de regularidad 406  
— de Dedekind 199  
Congruencia de segmentos 53  
Conjugación armónica 220  
— — de planos 222  
— — de puntos 216  
Conjunto ordenado 43  
Cono imaginario 401  
— isótropo 407  
— de luz 424  
— nulo 333  
— ordinario 333  
— real 402  
Coordenada proyectiva 245, 247, 250  
Coordenadas beitrámianas 439  
Correspondencia de perspectiva 338  
— proyectiva 259, 262, 265, 267, 367  
Cortadura de Dedekind 72, 123  
Cuadrilátero de Saccheri 127  
Cuadrivértice 216  
Curva algebraica 311  
— de distancia 102
- Chasles 208
- Dedekind 122  
Defecto del triángulo 124

- Descomposición 393  
 Desplazamiento 61  
 — paralelo 412  
 Determinante 151  
 — de la aplicación 276  
 Distancia 375  
 — entre dos puntos 382, 407  
 — entre los puntos 426  
 — entre sucesos 426  
 Doblado 465
- Ecuación general de la recta 249  
 — del luz 306  
 Ecuaciones canónicas 325  
 Eje de giro 61  
 — de homología 231  
 — de haz 265  
 — del oriciclo 107  
 — de perspectiva 213, 338  
 — de tiempo 421  
 Elemento lineal 116  
 — de primer género 273  
 — de segundo género 273  
 Entorno 229  
 Equicomposición 124  
 Equidistante 102  
 Equivalencia proyectiva 260, 270  
 Escala proyectiva 240  
 Esfera 113  
 — Espacio afín  $n$ -dimensional 394  
 — de Euclides 33  
 — lineal 391  
 — de Lobachevski 33  
 — métrico 481  
 — de Minkowski 409  
 Espacio  $n$ -dimensional 392  
 — — aritmético 393  
 — — coordenado 393  
 — — propiamente euclidiano 409  
 — — proyectivo 169, 210  
 — — pseudoeuclidiano 409  
 — — de sucesos 421  
 Euclides 9
- Gauss 30, 34  
 Generatrices rectilíneas 334  
 Generatriz de contacto 101  
 Geometría absoluta 76, 84  
 — afín 370, 405  
 — elemental de la orisfera 120, 123  
 — — de la superficie equidistante 119  
 — de Lobachevski 119, 133, 383  
 — no arquimediano 197  
 — de Riemann 163, 166, 385  
 Giro 60, 103, 105, 116  
 Grupo 360  
 — afín 369, 405  
 — de automorfismos 376  
 — general de Lorentz 415  
 — de Klein 387  
 — ortogonal 374  
 — de transformaciones 362
- Figura autopolar 323  
 Figuras mutuamente especulares 60  
 — recíprocamente polar 323  
 — simétricas 60  
 — topológicamente equivalentes 326  
 Forma métrica 463  
 — — del espacio euclidiano 407  
 Fórmula de Euler 125  
 — de Laguerre 390  
 Función de Lobachevski 92  
 —  $\pi(x)$  92
- Haz 265  
 — algebraico 311  
 — con centro impropio 209  
 — de planos 221  
 — de rectas 110  
 Hilbert 32, 119, 197, 220, 465  
 Hiper ciclo 102  
 Hiperplano 397  
 — isótropo 408
- Imagen del punto 137  
 Índice del espacio 409  
 Interpretación de los axiomas 172  
 Invariancia de los grupos armónicos 221  
 Invariación de la propiedad de conjugación armónica  
 Invariante 102, 153  
 — afín 370  
 — básico 296  
 — — del grupo afín 371  
 — — del grupo proyectivo 366  
 Invariantes de una proyección 207  
 Inversión 137  
 Involución 287  
 — elíptica 289  
 — hiperbólica 289
- Klein 35, 236
- Lambert 17, 76, 124  
 Legendre 19, 76, 124  
 Línea nula 326, 328  
 — oval 326, 328, 343  
 Líneas degeneradas 322, 326  
 Lobachevski 28, 119  
 Longitud del segmento 62
- Matriz de la aplicación lineal 276  
 Mayor 57  
 Medición 63  
 Medida de los segmentos 63

- Menor 57
- Métrica de Minkowski 426
- del plano de Lobachevski 447
- proyectiva 379, 382
- Modelo de Poincaré 147, 155
- Movimiento 59, 116, 412
- Movimientos elípticos 379
- hiperbólicos 379
- proyectivos 379
- Movimiento, tipos de 102
- Newton 319
- Norma de vector 406
- Números generalizados 191
- Operación de proyección 219
- de sección 219
- Orden cíclico 229
- lineal 236
- de la superficie 318
- Oriciclo 106, 107
- Origen de coordenadas 69
- Orisfera 111, 113
- Ortogonalidad 406
- Paralelas según Lobachevski 79
- Paralelismo 399
- Parámetro de la dirección 462
- Parámetros del grupo proyectivo 366
- normalizados 179
- Pasch 32, 39, 120
- Perpendicular al plano 95
- Plano 397
- afin 369
- de intersección 99
- isotropo 408
- de Lobachevski 495
- proyectivo 169, 210
- — complejo 316
- de Riemann 166, 495
- tangente 113
- Planos divergentes 100
- hiperbólicos 495
- paralelos 99
- Poincaré 134
- Polar 320
- Polo de la recta 322
- Poncelet 206, 324
- Postulado de Arquímedes 12
- de las paralelas 123
- — de Euclides 16, 123
- — de Lobachevski 119
- Postulado quinto 75
- — de Euclides 13, 16
- Postulados de Arquímedes 12
- de Euclides 10
- Principio de Dedekind 71, 136
- de dualidad 305, 309
- de reciprocidad de la teoría de las polares 321
- Producto de inversiones 141
- de los movimientos 61
- Propiedad de grupo 61, 260, 270
- Propiedades de las paralelas 86, 96, 84
- proyectivas 207
- Proposición de Desargues 301
- Proposiciones de la geometría absoluta 95
- Proyección central 206
- de la figura 206
- central 206
- Punto doble 351
- imaginario 315
- impropio 209
- infinito 209
- del infinito 152, 168
- medio 56
- racional binario 243
- Puntos básicos del haz 355
- cíclicos 389
- circulares 389
- diagonales 216
- dobles 235
- enteros de la escala proyectiva 237
- exteriores 39
- Puntos fijos 235
- hiperbólicos 383
- interiores 39
- unidos 235
- Radiación 113, 273
- algebraica 318
- elíptica 114
- equidistante 114
- hiperbólica 114
- Radian 69
- Radio de curvatura 167, 438
- Realización de los axiomas 172
- Realizaciones isomorfas 202
- Recta de apoyo 108
- frontera 80
- impropia 209
- imaginaria 315
- del infinito 209
- proyectiva 210
- Rectas hiperbólicas 383
- imaginarias isotropas 389
- — mínimas 389
- Región exterior 326
- interior 326
- Relación compleja de cuatro puntos 293
- Riemann 31
- Saccheri 17, 76, 124
- Secante de igual pendiente 84, 103, 105
- Seudoesfera 471
- Signatura 327

- Simetría con respecto a una circunferencia — general de Lorentz 415  
 137 — lineal fraccional 151  
 Sistema de coordenadas 69 — — — degenerada 152  
 — de referencia 418 — — — no degenerada 152  
 — — inercial 419 — ortogonal 179  
 Staudt 211 — polar 323  
 Steiner 208 — unimodular 372  
 Subgrupo 361 — — afin 373  
 Superficie algebraica 318 Transformaciones automorfas 368  
 — anular 333 — de semejanza 389  
 — convexa 426 Traducción 61  
 — de curvatura constante 467 Traslado 61  
 — de nula 469 Triangulación 126  
 — degenerada 333 Triángulo 226  
 — equidistante 111, 113 Trivértice 212  
 — nula 333 — autopolar 324  
 — oval 333  
 Teorema de Beltrami 473  
 — de Brianchon  
 — de d'Alembert 102  
 — de Desargues 213, 220, 354  
 — de Pascal 347  
 — de Staudt 262  
 Teoremas de congruencia de triángulos 51, 53  
 — de igualdad de triángulos 13  
 — sobre rectas perpendiculares y oblicuas 14  
 — de Steiner 341, 343  
 Toro 491  
 — unilateral 492  
 Tractriz 471  
 Transformación afin 369  
 — — ortogonal 374  
 — biunívoca 361  
 — idéntica 362  
 — inversa 361  
 — lineal 63  
 — de medida de longitudes 63  
 Variedad bidimensional suave 483  
 — proyectiva de dos dimensiones 273  
 Variedades bidimensionales abiertas 488  
 — — cerradas 488  
 — — de Riemann 482, 484  
 — de métrica geométrico-diferencial 482, 484  
 Variedades proyectivas de tres dimensiones 274  
 — — unidimensionales 265  
 Vector isótropo 407  
 — imaginario unitario 407  
 — unitario 407  
 Vectores 391  
 — linealmente dependientes 391  
 — — independientes 391  
 Vértices del triedro de coordenadas 255

### A nuestros lectores:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1—110, GSP, URSS.