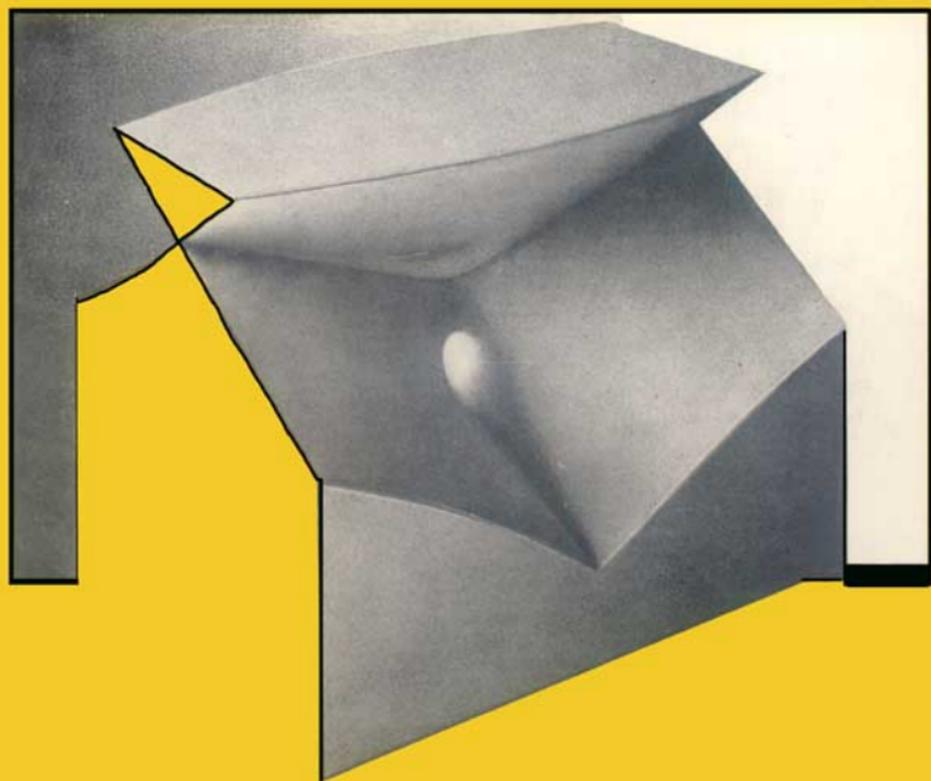


B. Dubrovin, S. Nóvikov, A. Fomenko

GOMETRÍA moderna

MÉTODOS DE LA TEORÍA DE HOMOLOGÍAS



EDITORIAL MIR MOSCÚ

GEOMETRÍA moderna

Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко

СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МЕТОДЫ ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ

Москва «Наука» Главная редакция
физико-математической литературы

B. Dubrovin, S. Nóvikov, A. Fomenko

GEOMETRÍA moderna

MÉTODOS DE LA TEORÍA DE HOMOLOGÍAS



EDITORIAL MIR MOSCÚ

Traducido del ruso por L. Popova

Impreso en la URSS

На испанском языке

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1984

© traducción al español, editorial Mir, 1987

INDICE

PREFACIO	7
CAPÍTULO 1. HOMOLOGÍAS Y COHOMOLOGÍAS, RECETAS DE SU CÁLCULO	9
§ 1. Grupos de cohomologías como clases de las formas diferenciales cerradas. Su invariación homotópica	9
§ 2. Homologías de los complejos algebraicos	24
§ 3. Complejos simpliciales. Sus homologías y cohomologías. Clasificación de las superficies bidimensionales cerradas	30
§ 4. Operación de pegadura de célula a un espacio topológico. Espacios celulares. Teoremas sobre reducción de los espacios celulares. Homologías y el grupo fundamental de superficies y algunas otras variedades	46
§ 5. Homologías y cohomologías singulares. Invariación homotópica de ellas. Sucesión exacta del par. Homologías relativas	62
§ 6. Homologías singulares de los complejos celulares. La coincidencia de ellas con las homologías celulares. Dualidad de Poincaré para las homologías simpliciales	74
§ 7. Homologías del producto directo. Multiplicación en las cohomologías. Cohomologías de los H -espacios y de los grupos de Lie. Cohomologías del grupo unitario	84
§ 8. Homología de productos oblicuos (espacios fibrados)	96
§ 9. Problema de prolongación de aplicaciones, homotopías y secciones. Clase obstaculizadora de las cohomologías	108
§ 10. Homologías y métodos de cálculo de los grupos homotópicos. Teorema de Cartan-Serre. Operaciones cohomológicas. Espacios fibrados vectoriales	114
§ 11. Homologías y grupo fundamental	146
§ 12. Cohomologías de las superficies de Riemann hiperelípticas. Toros de Jacobi. Geodésicas en los elipsoides poliaxiales. Relación con los potenciales de zonas finitas	151
§ 13. Las propiedades más simples de las variedades de Kahler. Toros abelianos	165
§ 14. Homologías con coeficientes en los haces	170
CAPÍTULO 2. PUNTOS CRÍTICOS DE LAS FUNCIONES SUAVES Y DE LAS HOMOLOGÍAS	177
§ 15. Funciones de Morse y complejos celulares	177
§ 16. Desigualdades de Morse	183
§ 17. Función regular de Morse-Smale. Asas. Superficies.	190
§ 18. Dualidad de Poincaré	202

§ 19. Puntos críticos de las funciones suaves y categoría de Lusternik-Shnirelman	207
§ 20. Variedades críticas y desigualdades de Morse. Funciones con simetría	221
§ 21. Puntos críticos de las funcionales y topología del espacio de las curvas ΩM	228
§ 22. Aplicaciones del teorema sobre el índice	241
§ 23. Problema periódico del cálculo de variaciones	248
§ 24. Funciones de Morse sobre las variedades tridimensionales y diagramas de Heegard	257
§ 25. Periodicidad unitaria de Bott y problemas de variación multidimensionales	262
§ 26. Teoría de Morse y algunos movimientos en el problema plano de n cuerpos	284
CAPÍTULO 3. COBORDISMOS Y ESTRUCTURAS SUAVES.	298
§ 27. Números característicos. Cobordismos. Ciclos y subvariedades. Signatura de las variedades	298
§ 28. Estructuras suaves en la esfera heptadimensional. El problema de clasificación de las variedades suaves (invariantes normales). Torsión de Reidemeister y la hipótesis principal de la topología combinatoria	322
Bibliografía	334
Suplemento 1. Teoría análogo de la de Morse para las funciones multiformes. Algunas propiedades de las paréntesis de Poisson. (S. P. Nóvikov)	339
Suplemento 2. Problema de Plateau, bordismos y superficies globales minimales en las variedades de Riemann. (A. T. Fomenko)	353
Índice de materias	373

PREFACIO

Tradicionalmente, la teoría de homología desempeña un papel fundamental en la exposición de los principios de la topología. A partir de H. Poincaré, quien fundó las bases de la topología, la teoría de homología se considera como una base inicial de los métodos de la topología algebraica. En la teoría de homotopías sólo el grupo fundamental y los cubrimientos se refieren, por tradición, a estos principios. Prácticamente, todos los manuales clásicos iniciales de topología (entre los cuales el mejor es, a juicio de los autores, el libro «Lehrbuch der Topologie» de H. Seifert y W. Threlfall) comienzan con exponer la teoría de homología de una u otra clase de los complejos. Solo en una etapa posterior (además, desde el punto de vista de la teoría de las homología), se consideran la teoría de los espacios fibrados y el problema general sobre la clasificación de las clases homotópicas de aplicaciones (teoría de las homotopías). Al mismo tiempo, los métodos de la topología de variedades diferenciables, que comenzaron a desarrollarse intensivamente desde los años 30 (Whitney y otros), permiten reconstruir por completo la exposición de los principios fundamentales de la topología moderna. Desde un nuevo punto de vista más próximo al análisis clásico, resulta primaria la teoría elemental de las variedades suaves para basar en ella luego la teoría de las homotopías *) y de los espacios fibrados suaves. Más aún, durante los años 70 se aclaró que precisamente este complejo de las ideas y de los métodos topológicos tiene aplicaciones fundamentales en distintas partes de la física moderna. Por eso los autores consideran como necesarios los materiales didácticos de topología en primer lugar, precisamente los principios de la teoría de las variedades suaves, la teoría de las homotopías y los espacios fibrados. Estos materiales han sido inclui-

* Por lo visto, las primeras nociones sobre topología pertenecientes a Gauss, Riemann y Poincaré, surgieron también sobre esta base. Por en aquel entonces resultó imposible tal construcción de la topología. Poincaré descubrió la teoría de homología de los complejos simpliciales que permitió dar completamente otra construcción exacta de los fundamentos de la topología algebraica.

dos en el manual de B. A. Dubrovin, S. P. Nóvikov, A. T. Fomenko «Geometría moderna», parte II. En este libro, suponemos conocidos estos materiales.

La resolución de problemas más complejos de la misma topología (cálculo de los grupos homotópicos, clasificación de las variedades suaves, etc.), al igual que numerosas aplicaciones de la técnica algebraico-topológica a los problemas de la geometría algebraica y del análisis complejo, exige un desarrollo de largo alcance, precisamente de los métodos de la teoría de homología. En la literatura especializada actual sobre topología no hay libros que posibiliten el complejo aprendizaje de los métodos de la teoría de homología en sus aplicaciones intratopológicas arriba mencionadas. El presente libro tiene por objeto llenar parcialmente esta laguna.

Al exponer la teoría de homología, los autores han tratado de evitar, en la medida de lo posible, el lenguaje abstracto del álgebra homológica, para que el lector siempre tenga presente que homología, ciclos y fronteras son imágenes geométricas concretas. En algunos casos, por ejemplo en la parte dedicada a la sucesión espectral, esta restricción voluntaria lleva a algunos defectos en la exposición difíciles de superar. Pero una sucesiva exposición del lenguaje y de los métodos del álgebra homológica moderna, como demuestra la experiencia, lleva a peores defectos, complicando la comprensión del sentido geométrico de la teoría de las homología. Algunos métodos fundamentales de la topología algebraica moderna (la técnica de las sucesiones espectrales y de las operaciones cohomológicas) se han expuestos sin explicaciones exhaustivas que llevarían al aumento del volumen de la obra. Recordemos que el empleo de estos métodos se basa sólo en las propiedades formalmente algebraicas de las magnitudes que forman parte de ellos, y no se utilizan construcciones explícitas de estas magnitudes, dadas en el proceso de la argumentación. Al final del libro se aplican los métodos de la topología algebraica al estudio de las propiedades profundas de clases características y estructuras suaves en las variedades. Según la idea de los autores, esta obra debe permitir e inducir al lector a recurrir a la literatura topológica moderna.

CAPÍTULO 1

HOMOLOGÍAS Y COHOMOLOGÍAS RECETAS DE SU CÁLCULO

§ 1. Grupos de cohomologías como clases de formas diferenciales cerradas. Su invariación homotópica.

Uno de los más importantes invariantes homotópicos de variedad son sus grupos de homologías que ya fueron utilizados en el § 19 y §§ 24, 25, parte II del libro [1]. Pasemos ahora a sus definiciones sistemáticas.

Hay varios métodos para determinar los grupos de homologías. Al principio, examinemos la determinación de las homologías por las formas diferenciales (véase [1], parte II, § 25).

Examinemos las formas diferenciales cerradas del grado k sobre una variedad M^n (recordemos: el índice n muestra la dimensión de la variedad), que tienen localmente la forma:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad d\omega = 0. \quad (1)$$

Se llama exacta (o cohomológica cero) una forma diferencial cerrada, si $\omega = d\omega'$, donde ω' es una forma de grado $k - 1$ (recordemos que $d(d\omega') = 0$ ([1], parte I, § 25)).

DEFINICIÓN 1*). Se llama grupo (espacio lineal) de cohomologías $H^k(M^n; \mathbb{R})$ el grupo cociente de todas las formas cerradas del grupo k por el subgrupo de formas exactas. En otras palabras, $H^k(M^n; \mathbb{R})$ son clases de equivalencia de las formas cerradas con exactitud hasta las exactas:

$$\omega_1 \sim \omega_2 \quad \text{si} \quad \omega_1 - \omega_2 = d\omega'. \quad (2)$$

La propiedad más simple de los grupos de cohomologías es la siguiente.

AFIRMACIÓN 1. Para cualquier variedad M^n el grupo $H^0(M^n; \mathbb{R})$ es un espacio lineal de dimensión g , igual al número de trozos conexos (componente) de los cuales consta la variedad.

*) Encontraremos en adelante varias definiciones de grupos de homologías y cohomologías con unos u otros coeficientes. Ya que estas definiciones llevan al mismo resultado (Véase más abajo §§ 6, 14), no introducimos conscientemente ningún índice que muestre el origen de unas u otras homologías.

DEMOSTRACION. Las formas del grado 0 son funciones escalares $f(x)$ sobre una variedad. Si la forma del grado 0 es cerrada, entonces $df(x) = 0$. Esto significa que la función $f(x)$ es localmente constante, es decir, es constante en cada trozo conexo de la variedad. Las formas cerradas de grado 0 son simplemente un conjunto de q constantes, donde q es el número de trozos. La afirmación queda demostrada, ya que aquí no hay formas exactas.

Si hay una aplicación suave de las variedades $f: M_1 \rightarrow M_2$, entonces está determinada tal aplicación de las formas $\omega \rightarrow f^*(\omega)$ que $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$ ([1], parte I, § 25). Por eso está determinada la aplicación de los grupos de cohomología

$$f^*: H^k(M_2; \mathbb{R}) \rightarrow H^k(M_1; \mathbb{R}), \quad (3)$$

porque las clases de equivalencia pasan de uno a otro (por medio de la aplicación f^* las formas cerradas quedan cerradas y las exactas, exactas). La aplicación f^* es un homomorfismo de los grupos de cohomología.

Tiene lugar el siguiente

TEOREMA 1. Si son dadas dos aplicaciones suaves

$$f_1: M_1 \rightarrow M_2 \quad \text{y} \quad f_2: M_1 \rightarrow M_2,$$

y estas aplicaciones son homotópicas, entonces las aplicaciones de grupos de cohomología f_1^* y f_2^* coinciden: $f_1^* = f_2^*: H^k(M_2; \mathbb{R}) \rightarrow H^k(M_1; \mathbb{R})$.

DEMOSTRACION. Sea dada una homotopía suave $F: M_1 \times I \rightarrow M_2$, donde I es un segmento, $1 \leq I \leq 2$, y $F(x, 1) = f_1(x)$, $F(x, 2) = f_2(x)$. Cualquiera forma diferenciada Ω de grado k sobre $M \times I$ puede ser escrita así

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt, \quad \Omega|_{t=t_0} = \omega_1(t_0), \quad (4)$$

donde ω_1 es una forma de grado k que no contiene entre las diferenciales dt , y ω_2 una forma de grado $k-1$, que no contiene entre las diferenciales dt (las coordenadas locales en $M_1 \times I$ se eligen siempre en forma $(x^1, \dots, x^n, t) \equiv (x, t)$, donde (x^1, \dots, x^n) son coordenadas locales sobre M). Sea ω cualquier forma de grado k sobre la variedad M_2 . Entonces, la forma $F^*(\omega) = \Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$, donde tenemos localmente

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} a_{i_1 \dots i_{k-1}}(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}, \\ \omega_1 &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} b_{j_1 \dots j_k}(x, t) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}. \end{aligned}$$

Definimos la forma $D\Omega$ del grado $k - 1$ por la siguiente fórmula (localmente):

$$D\Omega = \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} \left(\int_1^2 a_{i_1 \dots i_{k-1}}(x, t) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} = \int_1^2 \omega_2 dt. \quad (5)$$

$D\Omega$ es la forma de grado $k - 1$ sobre la variedad $M_1 \times I$. Tiene lugar el importante

LEMA 1. *Es justa la fórmula de la «homotopía algebraica» (véase el § 2):*

$$d(D(F^*(\omega))) \pm D(d(F^*(\omega))) = F_2^*(\omega) - f_1^*(\omega). \quad (6)$$

DEMOSTRACIÓN. Mostremos que para cualquiera forma Ω sobre $M_1 \times I$ es justa la fórmula

$$dD(\Omega) \pm D(d\Omega) = \Omega|_{t=2} - \Omega|_{t=1}. \quad (7)$$

Calculemos $dD(\Omega)$, donde $\Omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dt$. Tenemos localmente, por definición

$$\begin{aligned} dD\Omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} \sum_j \left(\int_1^2 \frac{\partial a_{i_1 \dots i_{k-1}}}{\partial x^j} dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}, \\ Dd\Omega &= D(d\omega_1) + D(d\omega_2 \wedge dt) = \\ &= D \left(\sum_{j_1 < \dots < j_k} \sum_p \frac{\partial b_{j_1 \dots j_k}}{\partial x^p} dx^p \wedge \dots \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j_1 \dots j_k} \frac{\partial b_{j_1 \dots j_k}}{\partial t} dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right) + \\ &\quad + D \left(\sum_{i_1 \dots i_{k-1}} \sum_p \frac{\partial a_{i_1 \dots i_{k-1}}}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dt \right). \end{aligned}$$

De aquí vemos que

$$\begin{aligned} dD\Omega + (-1)^{k+1} Dd\Omega &= \pm \sum_{j_1 < \dots < j_k} (b_{j_1 \dots j_k}(x, 2) - \\ &\quad - b_{j_1 \dots j_k}(x, 1)) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = \Omega|_{t=2} - \Omega|_{t=1}. \end{aligned}$$

La fórmula (7) queda demostrada. Si ahora $\Omega = F^*(\omega)$, entonces $\Omega|_{t=2} = f_2^*(\omega)$, $\Omega|_{t=1} = f_1^*(\omega)$. El lema queda demostrado.

Volvamos a la demostración del teorema. Sea dada una forma cerrada ω sobre M_2 (es decir, $d\omega = 0$). Entonces tiene lugar la igualdad

$$f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega) = dDF^*(\omega) \pm DdF^*(\omega).$$

Sin embargo, $dF^*(\omega) = F^*(d\omega) = 0$. Por eso tenemos $f_2^*(\omega) - f_1^*(\omega) = dDF^*(\omega)$, es decir, la diferencia de las formas es exacta. Esto significa, por definición, que los homomorfismos

$$f_1^*: H^k(M_2; \mathbb{R}) \rightarrow H^k(M_1; \mathbb{R}) \quad \text{y} \quad f_2^*: H^k(M_2; \mathbb{R}) \rightarrow H^k(M_1; \mathbb{R})$$

coinciden sobre las clases de equivalencia (de cohomología). El teorema queda demostrado.

Recordemos (véase [1], parte II, § 17), que dos variedades se llaman homotópicamente equivalentes, si existen tales aplicaciones (suaves) $f: M_1 \rightarrow M_2$, $g: M_2 \rightarrow M_1$, que ambas superposiciones $fg: M_2 \rightarrow M_2$ y $gf: M_1 \rightarrow M_1$ son homotópicas a las aplicaciones idénticas:

$$M_1 \rightarrow M_1 (x \mapsto x), \quad M_2 \rightarrow M_2 (y \mapsto y).$$

Por ejemplo, el espacio euclídeo \mathbb{R}^n (o el disco $D^n = \left\{ \sum_{\alpha=1}^n (x^\alpha)^2 \leq R^2 \right\}$) es equivalente homotópicamente a un punto.

La demostración consiste en que \mathbb{R}^n (o D^n) está deformando por sí hacia un punto. Esto significa exactamente que una aplicación idéntica $1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $x \mapsto x$, es homotópica a la aplicación constante $\mathbb{R}^n \rightarrow 0$ (en un punto).

TEOREMA 2. *Las variedades homotópicamente equivalentes tienen iguales grupos de cohomología.*

DEMOSTRACIÓN. Sea que las aplicaciones $f: M_1 \rightarrow M_2$, $g: M_2 \rightarrow M_1$ establezcan una equivalencia homotópica. Consideremos las aplicaciones $f^*: H^k(M_2) \rightarrow H^k(M_1)$ y $g^*: H^k(M_1) \rightarrow H^k(M_2)$. Como las aplicaciones fg y gf son homotópicas a las idénticas, los homomorfismos $(fg)^* = g^*f^*$ y $(gf)^* = f^*g^*$ son exactamente homomorfismos idénticos de los grupos de cohomología, según el teorema 1:

$$\begin{aligned} 1 &= g^*f^*: H^k(M_2) \rightarrow H^k(M_2), \\ 1 &= f^*g^*: H^k(M_1) \rightarrow H^k(M_1). \end{aligned}$$

De aquí se deduce, que los mismos homomorfismos f^* y g^* son isomorfismos, además, recíprocamente inversos: $f^* = (g^*)^{-1}$. El teorema queda probado.

OBSERVACIÓN. Según el teorema demostrado, se pueden determinar los grupos de cohomología para todos los espacios de X ,

para los cuales existe una variedad $M \supset X$, que se anuda hacia este espacio, tomando

$$H^k(X; \mathbb{R}) \cong H^k(M^n; \mathbb{R}). \quad (8)$$

Por ejemplo, el ocho no es una variedad, pero para él se puede determinar los mismos grupos de cohomologías, que, por definición, para un campo $\mathbb{R}^2 \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ (véase la figura 1).

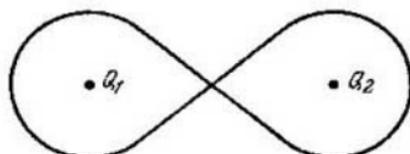


Fig. 1.

COROLARIO 1. *Los grupos de cohomologías de un espacio euclídeo \mathbb{R}^n o de un disco D^n son los mismos que los de un punto, es decir, $H^k(\mathbb{R}^n)$ es trivial, si $k > 0$, $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ es un espacio lineal unidimensional.*

De aquí se deduce el llamado «lema de Poincaré»: localmente, en una región cerca de cualquier punto sobre una variedad M^n , toda forma cerrada ω ($d\omega = 0$) es exacta: $\omega = d\omega'$, $\text{deg } \omega > 0$. En efecto, elijamos un disco D^n en coordenadas locales con centro en un punto Q : $\left\{ \sum_{\alpha=1}^n (x^\alpha - x_0^\alpha)^2 \leq \varepsilon \right\}$ y empleemos en el disco el corolario 1 de que $H^k(D^n) = 0$, para $k > 0$.

Para $k = 1$ el lema de Poincaré es bien conocido del curso de análisis matemático. Para 1-formas $\omega = \sum_{h=1}^n f_h dx^h$, $d\omega = 0$, tenemos $\omega = dF$, donde $F(P) = \int_Q^P f_h dx^h$, por un camino que va del punto Q al punto P en el disco D^n .

Calculemos ahora las cohomologías de una circunferencia S^1 .

Afirmación 2. *Los grupos de cohomologías de la circunferencia S^1 son*

$$\begin{aligned} H^k(S^1; \mathbb{R}) &= 0, & k > 1; \\ H^1(S^1; \mathbb{R}) &= \mathbb{R}; & H^0(S^1; \mathbb{R}) &= \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (9)$$

DEMOSTRACION. Es evidente, que las cohomologías de S^1 son triviales (iguales a cero), si $k > 1$. Luego, $H^0(S^1) = \mathbb{R}$, porque la circunferencia es conexa. Para calcular un grupo $H^1(S^1)$ introducimos una coordenada φ , donde φ y $\varphi + 2\pi n$ representan un punto de la circunferencia para n enteros. La forma del grado 1 es una forma del tipo $a(\varphi) d\varphi = \omega$, donde $a(\varphi)$ es una función periódica $a(\varphi + 2\pi) = a(\varphi)$. Siempre $d\omega = 0$, ya que la dimensión de la circunferencia es igual a 1. ¿Cuándo es exacta la forma $a(\varphi) d\varphi$? Esto significa que

$a(\varphi) d\varphi = dF$, donde $F(\varphi)$ es una función periódica. Es evidente que $F(\varphi) = \int_0^{\varphi} a(\psi) d\psi + \text{const.}$ Así, la función $F(\varphi)$ es periódica

si y sólo si se cumple la condición $\int_0^{2\pi} a(\psi) d\psi = 0$, ó $\int_{S^1} \omega = 0$.

De esta manera, la forma del grado 1 $\omega = a(\varphi) d\varphi$ sobre la circunferencia es exacta si y sólo si se cumple la condición $\int_{S^1} \omega = 0$.

Por eso, dos formas $\omega_1 = a(\varphi) d\varphi$ y $\omega_2 = b(\varphi) d\varphi$ determinan la misma clase de cohomologías cuando y sólo cuando $\int_{S^1} \omega_1 = \int_{S^1} \omega_2$.

Así tenemos $H^1(S^1; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. La afirmación está demostrada.

COROLARIO *Los grupos de cohomologías de un plano euclídeo sin el punto $\mathbb{R}^2 \setminus Q$ (o sin anillo) son los mismos que tiene la circunferencia y del tipo*

$$H^k(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = 0, \quad k > 1; \quad H^1(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = H^0(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = \mathbb{R}. \quad (10)$$

OBSERVACION. Indiquemos un método más de cálculo de cohomologías de una circunferencia. A cada forma $\omega(\varphi) = a(\varphi) d\varphi$ le confrontemos una forma «media»

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\varphi + \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} a(\varphi + \tau) d\tau \right] d\varphi.$$

AFIRMACIÓN 3. *La forma ω es cohomológica a la forma $\hat{\omega}$.*

DEMOSTRACION. La forma $\omega(\varphi + \tau)$ es inducida por la aplicación $\varphi \rightarrow \varphi + \tau$ de la circunferencia S^1 en sí misma. Esta aplicación es homotópica a la idéntica. Por eso $\omega(\varphi) \sim \omega(\varphi + \tau)$. La suma integral para $\hat{\omega}$ se de tipo

$$\frac{1}{2\pi} \sum_i \omega(\varphi + \tau_i) \Delta\tau_i \sim \omega(\varphi). \quad \frac{1}{2\pi} \sum_i \Delta\tau_i = \omega(\varphi). \quad (11)$$

Por lo tanto, cada suma integral de este tipo es cohomológica a ω . La afirmación queda demostrada. La forma $\hat{\omega}$ es de tipo $\hat{\omega}(\varphi) = \alpha d\varphi$,

donde $\alpha = \text{const} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\psi) d\psi$. En realidad:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} a(\varphi + \tau) d\tau \right] d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\varphi}^{2\pi + \varphi} a(\psi) d\psi \right] d\varphi = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} a(\psi) d\psi \right] d\varphi. \end{aligned}$$

(En este caso se dice, que la forma ω (φ) es invariante respecto a las rotaciones: $\hat{\omega}(\varphi + \varphi_0) = \hat{\omega}(\varphi)$.)

Así, a cada clase de cohomologías ω le confrontamos una forma invariante (respecto a las rotaciones) $\hat{\omega}$, es decir, un número real. Es evidente, que ésta es una correspondencia biunívoca, y obtenemos $H^1(S^1) = \mathfrak{R}$.

Más abajo se mostrará, cómo se puede generalizar el razonamiento citado para calcular cohomologías de los espacios homogéneos compactos.

AFIRMACIÓN 4. *La variedad orientada cerrada de Riemann M^n tiene un grupo de cohomologías $H^n(M^n)$ no trivial.*

DEMOSTRACIÓN. Examinemos un elemento de volumen Ω , donde (localmente) tenemos: $\Omega = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Si el conjunto de los dominios de coordenadas locales se elige según la orientación (es decir, todos los jacobianos de las funciones de la transición son positivos), entonces Ω es la forma de grado n diferencial, y, con eso, tenemos $\int_{M^n} \Omega > 0$ (es volumen de la variedad M^n). Es evidente que $d\Omega = 0$, porque el grado de forma Ω es igual a n . Si fuera $\Omega = d\omega$, entonces tendríamos, según la fórmula de Stokes

$$\int_{\partial M^n} \omega = \int_{M^n} d\omega = \int_{M^n} \Omega = 0. \quad (12)$$

(puesto que M^n es cerrada y no tiene frontera). Obtenemos una contradicción. La afirmación queda demostrada.

OBSERVACION. Si la variedad cerrada M^n es no orientable (por ejemplo, $M^2 = \mathfrak{R}P^2$), entonces, el grupo $H^n(M^n; \mathfrak{R})$ es trivial; esto se demostrará en el § 3. En particular, un elemento de volumen $\Omega = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ en el caso del cambio con un jacobiano negativo, no se manifiesta como una forma diferencial.

Sea $H^*(M^n) = \sum_{k=0}^n H^k(M^n)$ una suma directa de grupos de cohomologías. Introduzcamos en el grupo $H^*(M^n)$ una estructura de anillo.

AFIRMACIÓN 5. *Sean ω_1, ω_2 formas cerradas. Entonces, las formas $\omega_1 \wedge \omega_2$ y $(\omega_1 + d\omega') \wedge \omega_2$ son cerradas y cohomológicas.*

DEMOSTRACIÓN. Según la fórmula de Leibniz (véase [1], parte I, § 25), tenemos:

$$d(\omega' \wedge \omega_2) = d\omega' \wedge \omega_2 \pm \omega' \wedge d\omega_2 = d\omega' \wedge \omega_2. \quad (13)$$

Por eso

$$(\omega_1 + d\omega') \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + d(\omega' \wedge \omega_2). \quad (14)$$

La afirmación queda demostrada.

Conforme a esta afirmación, el producto exterior de las formas determina correctamente la multiplicación en $H^*(M^n)$. De esta manera, obtenemos un *anillo de cohomologías de la variedad M^n* . Si $\omega_1 \in H^p(M^n)$, $\omega_2 \in H^q(M^n)$, entonces el producto $\omega_1 \omega_2$ se encuentra en el espacio $H^{p+q}(M^n)$. Este producto tiene la siguiente propiedad de anticonmutatividad:

$$\omega_2 \omega_1 = (-1)^{pq} \omega_1 \omega_2. \quad (15)$$

Aclaremos el sentido geométrico de los grupos de cohomologías; las definiciones exactas las daremos en los siguientes párrafos.

Si M^n es una variedad arbitraria y ω es una forma de grado k cerrada, entonces sus «integrales por ciclos» son determinadas. Esto se puede comprender, por ejemplo, así. Sea M^k una variedad cerrada orientable k -dimensional. Como «ciclo» en la variedad M^n comprendemos, por ahora, una aplicación suave $f: M^k \rightarrow M^n$, es decir, el par (M^k, f) .

DEFINICIÓN 2. Al período de la forma ω por el ciclo (M^k, f) lo denominaremos con la integral $\int_{M^k} f^* \omega$.

Sea N^{k+1} una variedad arbitraria orientable con borde $M^k = \partial N^{k+1}$. El borde es una variedad cerrada orientable (consistente, posiblemente, en varios trozos). Como «película» comprendamos una aplicación $F: N^{k+1} \rightarrow M^n$. Tiene lugar el siguiente

TEOREMA 3 a) Para cualquier ciclo (M^k, f) el período de la forma exacta $\omega = d\omega'$ es igual a cero.

b) Si el ciclo (M^k, f) es una frontera de la película (N^{k+1}, F) , donde M^k es una frontera de N^{k+1} y $F|_{M^k} = f$, entonces, el período de cualquier forma cerrada por tal ciclo (M^k, f) es igual a cero.

DEMOSTRACIÓN a) Si $\omega = d\omega'$, entonces, según la fórmula de Stokes, tenemos

$$\int_{M^k} f^* \omega = \int_{M^k} f^*(d\omega') = \int_{M^k} d(f^* \omega') = \int_{\partial M^k} f^* (\omega') = 0, \quad (16)$$

ya que la variedad M^k no tiene frontera.

b) Si M^k es una frontera de N^{k+1} (tomando en cuenta las orientaciones) y $F|_{M^k} = f$, entonces, según la fórmula de Stokes, tenemos

$$\int_{M^k} f^* \omega = \int_{N^{k+1}} dF^*(\omega) = \int_{N^{k+1}} F^*(d\omega) = 0. \quad (17)$$

El teorema queda demostrado.

Mostramos, sin demostrar, un importante hecho: si los períodos de una forma cerrada por todos los ciclos son iguales a cero, entonces, la forma es exacta (véase abajo el § 14).

EJEMPLO. Si $M^n = S^n$ es una esfera, entonces, $H^k(S^n) = 0$ cuando $k \neq 0, n$.

DEMOSTRACION. Si $k > n$, la afirmación es evidente por definición. Si $0 < k < n$ y (M^k, f) es un ciclo cualquiera, entonces, por el teorema de Sard ([1], parte II, § 10), la imagen $f(M^k)$ no cubre siquiera, un punto $Q \in S^n$. Por eso, el ciclo (M^k, f) se encuentra, de hecho, en $R^n = S^n \setminus Q$. Ya sabemos (lema de Poincaré) que en R^n cualquier forma es exacta. Por eso todos los períodos son iguales a cero, si $0 < k < n$. De ahí que $H^k(S^n) = 0$, cuando $0 < k < n$.

Otra conclusión de este hecho puede ser obtenida del razonamiento análogo al cálculo de cohomologías de la circunferencia S^1 (más arriba). Utilizando un grupo de movimientos $SO(n+1)$ sobre una esfera S^n se puede reducir cualquier clase de cohomologías a una forma cerrada invariante con relación a $SO(n+1)$ sobre la esfera S^n . La forma invariante ω se determina por el valor en un punto de la esfera y en este punto tiene que ser invariante con relación a un grupo estacionario $SO(n) \subset SO(n+1)$. Tales formas de ω no existen, excepto las dimensiones cero y n (¡compruébesel!).

De manera análoga calculamos las cohomologías de grupos de Lio y los espacios simétricos.

Recordemos (véase [1], parte II, § 6), que un espacio homogéneo M de un grupo G con un grupo de isotropía H se llama simétrico, si en el grupo G es dada una «involución», es decir, un automorfismo $I: G \rightarrow G, I^2 = 1$ tal, que $I|_H = 1$ (los puntos del subgrupo H son inmóviles respecto al automorfismo I). Con esto, la ecuación $I(x) = x$ para los x próximos a 1, da solamente los elementos del subgrupo H .

Sobre tal variedad homogénea M se determina la «simetría» s_x con relación a cualquier punto x , donde $s_x^2 = 1$. La aplicación s_x de la variedad M en sí misma se da así: sea $g(x)$ un punto cualquiera de M ; hacemos

$g(x) \rightarrow s_x(g(x)) = I(g)(x); \quad s_x(x) = x$ (cuando $g = 1$); (18)
donde g es un elemento cualquiera del grupo G que actúa en M .

La aplicación s_x para cualquier punto x se determinó correctamente, al mismo tiempo $(s_x)_*$ es una aplicación de un espacio tangente en el punto x respecto al origen de las coordenadas (véase [1], parte II, § 6). En particular, cada grupo compacto de Lie G es un espacio simétrico del grupo $G \times G$. La acción del grupo $G \times G$ se determina así:

$$T_{(g,h)}(x) = gxh^{-1}. \quad (19)$$

La involución H tiene la forma: $I(g, h) = (h, g)$. El subgrupo H es una diagonal $\{(g, g)\}$. La simetría s_x con relación a la unidad del grupo $G, x = e$, se determina por la fórmula

$$s_e(g) = g^{-1}. \quad (19')$$

En cualquier espacio homogéneo se eligen tales formas invariantes diferenciales, que $g^*\omega = \omega$; g es cualquier elemento de G .

La diferencial $d\omega$ de una forma invariante otra vez se representa como una forma invariante:

$$g^* d\omega = dg^*\omega = d\omega. \quad (20)$$

El producto $\omega_1 \wedge \omega_2$ de dos formas invariantes es invariante también:

$$g^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = g^*\omega_1 \wedge g^*\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (21)$$

Por eso se determina el anillo de las formas invariantes del espacio homogéneo M . Resulta que para cualquier espacio homogéneo de un grupo compacto de Lie conexo el anillo de cohomología puede ser calculado sólo con ayuda de las formas invariantes. Al mismo tiempo, para los espacios simétricos tiene lugar una afirmación más fuerte:

TEOREMA 4. *Sea M un espacio compacto simétrico de un grupo compacto de Lie G . Entonces:*

- cualquier forma invariante sobre M es cerrada;*
- cualquier forma cerrada sobre M es cohomológica a la invariante;*

c) una forma invariante (no nula) nunca es cohomológica a cero.

DEMOSTRACION. a) Sea ω una forma invariante de rango k . Consideremos la forma $s_x^*\omega = \hat{\omega}$. Mostremos que forma ω es también invariante. Por la igualdad (18) tenemos:

$$s_x T_g = T_{I_g} s_x \quad (T_g \leftrightarrow g) \quad (22)$$

En realidad, si $y = T_h(x)$, entonces

$$T_{I_g} s_x T_h(x) = T_{I_g} T_{I_h}(x) = T_{I(g_h)}(x),$$

y

$$s_x T_g T_h(x) = s_x T_{gh}(x), \\ s_x T_{gh}(x) = T_{I(gh)}(x) \leftarrow s_x T_g(y) = T_{I_g} s_x(y).$$

Entonces

$$T_g^* \hat{\omega} = T_g^* s_x^* \omega = (s_x T_g)^* \omega = s_x^* T_{I_g}^* \omega = \hat{\omega},$$

es decir, la forma $\hat{\omega}$ es invariante.

Como s_x determina la aplicación sobre un espacio tangente en un punto x , entonces, $\hat{\omega}|_x = (-1)^k \omega|_x$.

Como las formas $\hat{\omega}$ y ω son invariantes, la última igualdad es justa para cualquier punto x :

$$\hat{\omega} = (-1)^k \omega \quad (23)$$

Por eso $d\hat{\omega} = (-1)^k d\omega$. Pero las formas $d\hat{\omega}$ y $d\omega$ de rango $k + 1$ son también invariantes, mientras que $s_x^* d\omega = d\hat{\omega}$. Por eso

$$d\hat{\omega} = (-1)^{k+1} d\omega \quad (24)$$

debido a los mismos razonamientos expuestos arriba (el rango de estas formas es igual a $k + 1$). En consecuencia $d\omega = 0$; la primera parte del teorema queda demostrada.

b) Sea cerrada la forma ω sobre una variedad M : $d\omega = 0$. Sobre el grupo G , debido a la compacidad, existe una métrica invariante (métrica de Killing) (véase [1], parte I, § 24 y parte II § 8). Esta métrica determina un elemento invariante de volumen que designemos por $d\mu(g)$:

$$d\mu(hg) = d\mu(g). \quad (25)$$

Normalicemos un elemento de volumen sobre el grupo G de tal manera que el volumen de todo el grupo sea igual a 1:

$$\int_G d\mu(g) = 1 \quad (26)$$

Determinamos por la forma ω la forma $\tilde{\omega}$, haciendo

$$\tilde{\omega} = \int_G T_g^* \omega d\mu(g). \quad (27)$$

Comprobemos que la forma $\tilde{\omega}$ es invariante y cohomológica a la forma ω . Calculemos la forma $T_h^* \tilde{\omega}$. Tendremos

$$T_h^* \tilde{\omega} = \int_G T_{hg}^* \omega d\mu(g) = \int_G T_{hg}^* \omega d\mu(hg) = \int_G T_{g'}^* \omega d\mu(g') = \tilde{\omega}, \quad (28)$$

donde hacemos $g' = hg$, tal sustitución de variables es suave e invertible.

Así, la forma $\tilde{\omega}$ es invariante. Mostremos que las formas $\tilde{\omega}$ y ω son cohomológicas. La aplicación T_g de la variedad M en sí misma es homotópica a la idéntica. En efecto, sea $g(t)$ una curva en un grupo G , que liga un punto g con una unidad del grupo (recordemos, que el grupo G es conexo). Entonces, $T_{g(t)}$ es la homotopía buscada. Por eso las formas $T_g^* \omega$ y ω son cohomológicas en virtud del teorema 1: $T_g^* \omega \sim \omega$. Por consiguiente,

$$\tilde{\omega} = \int_G T_g^* \omega d\mu(g) \sim \int_G \omega d\mu(g) = \omega \int_G d\mu(g) = \omega. \quad (29)$$

La segunda parte queda demostrada.

c) Vamos a demostrar ahora, que una forma invariante sobre un espacio compacto simétrico no puede ser cohomológica a cero (si ella es no nula). Recordemos, que sobre la variedad M puede ser introducida una métrica de Riemann (h_{ij}) que es invariante con relación a la acción del grupo G (véase [1], parte II, § 8). La métrica de Riemann sobre una variedad determina el producto escalar de las formas sobre esta variedad. El cuadrado escalar de la forma ω es igual a

$$\langle \omega, \omega \rangle = \int_M \omega \wedge * \omega. \quad (30)$$

Este valor siempre es mayor que cero si $\omega \neq 0$. En efecto, si $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, entonces

$$\int \omega \wedge * \omega = \int h^{i_1 j_1} \dots h^{i_k j_k} a_{i_1 \dots i_k} a_{j_1 \dots j_k} \sqrt{|h|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n > 0$$

(aquí h^{ij} es una matriz inversa a h_{ij} , $h = \det(h_{ij})$, $n = \dim M$).

Sea ω una forma invariante. En vigor de invariación de la métrica (h_{ij}) todos los operadores T_g^* conmutan con el operador $*$. Por eso la forma $*\omega$ es invariante también y, por consiguiente, es cerrada: $d*\omega = 0$.

Supongamos $\omega = d\omega'$. Entonces, $d(\omega' \wedge *\omega) = d\omega' \wedge *\omega \pm \pm \omega' \wedge d*\omega = \omega \wedge *\omega$. Por eso, según la fórmula de Stokes, tenemos

$$\langle \omega, \omega \rangle = \int_M \omega \wedge * \omega = \int_M d(\omega' \wedge *\omega) = 0. \quad (31)$$

Entonces, la forma ω es un cero idéntico. El teorema queda totalmente demostrado.

Consideremos ahora algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. El toro $T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$, donde Γ es un retículo entero numérico en \mathbb{R}^n , engendrado por n vectores linealmente independientes. El toro es un grupo de Lie abeliano compacto.

Sean x^1, \dots, x^n coordenadas euclídeas en \mathbb{R}^n . Todas las formas del tipo $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ son las formas invariantes (respecto a los desplazamientos) sobre \mathbb{R}^n . Por eso ellas determinan las formas invariantes sobre el toro T^n . Si la forma $\omega = a_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ sobre el toro es invariante, esto significa que

$$a_{i_1 \dots i_k}(x+y) = a_{i_1 \dots i_k}(x), \quad (32)$$

es decir, los coeficientes de la forma ω son constantes:

$$a_{i_1 \dots i_k} = \text{const.} \quad (33)$$

Así, cualquier forma invariante sobre T^n es una combinación lineal con los coeficientes constantes de los productos exteriores de las formas dx^1, dx^2, \dots, dx^n .

DEDUCCIÓN. El anillo de cohomologías del toro $H^*(T^n)$ es un álgebra exterior $\Lambda(e_1, \dots, e_n)$ con las generatrices e_1, \dots, e_n de grado 1. Aquí e_i es una clase de cohomologías de la forma dx^i .

EJEMPLO 2. Un grupo de Lie compacto. Las formas invariantes sobre G son formas bilateralmente invariantes diferenciales sobre un grupo (respecto a los desplazamientos a la izquierda y a la derecha). Consideremos, al principio, las formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda sobre el grupo G . Demos un ejemplo de una 1-forma invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda con valores vectoriales que toma valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo G : $\omega(g) = g^{-1}dg$. Para un grupo matricial G , donde $g = (g_{ih})$, $dg = (dg_{ih})$ es una matriz con elementos dg_{ih} , φ es también una matriz de las 1-formas, $\omega = (\omega_{ih})$.

Otra construcción de la misma forma ω no emplea la realización matricial del grupo y por eso conviene para cualquier grupo G . Sea el vector ξ tangente del grupo G en un punto g . Actuando sobre ξ con un desplazamiento a la izquierda $(L_{g^{-1}})_*$, obtenemos un vector de un espacio tangente en la unidad del grupo, es decir, del álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Todo componente de la forma ω es invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda:

$$\omega(hg) = g^{-1}h^{-1}d(hg) = g^{-1}dg = \omega(g). \quad (34)$$

Sea $\theta^1, \dots, \theta^N$ una base en un espacio de las 1-formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda. Para un grupo matricial en calidad de las formas θ^i pueden ser tomados los componentes de la forma $\omega = (\omega_{ih}) = g^{-1}dg$ escogiendo entre ellos los linealmente independientes. Por ejemplo, para un grupo $G = SO(n)$, donde la matriz (ω_{ih}) es antisimétrica, en calidad de base pueden ser tomadas las formas ω_{ih} , donde $i < k$.

LEMA 2. El número N , o sea la dimensión del espacio de las 1-formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda, es igual a la dimensión de un grupo.

DEMOSTRACIÓN. Cualquier 1-forma invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda θ se determina totalmente por su valor sobre un espacio tangente en la unidad del grupo, además, este valor puede ser arbitrario. El lema queda demostrado.

COROLARIO. El espacio de las 1-formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda, coincide con el espacio \mathfrak{g}^* de todas las junctiones lineales sobre el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo G .

Aquí el álgebra de Lie se considera como un espacio tangente en la unidad del grupo.

LEMA 3. *Cualquier k -forma invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda ω posee la forma*

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k}, \quad (35)$$

donde $a_{i_1 \dots i_k}$ son constantes.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del lema 2 la forma ω en la unidad del grupo puede ser escrita así:

$$\omega(e) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \theta^{i_1}(e) \wedge \dots \wedge \theta^{i_k}(e). \quad (36)$$

Según la invariación respecto a los desplazamientos a la izquierda de las formas ω y θ^i , la igualdad (36) es justa en cualquier punto del grupo. El lema queda demostrado.

COROLARIO. *El álgebra de las formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda sobre el grupo de Lie G es isomorfa al álgebra exterior $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ por encima del espacio \mathfrak{g}^* de las funciones lineales sobre el álgebra de Lie \mathfrak{g} . En otras palabras, esta álgebra coincide con un espacio de las funciones antisimétricas multilineales sobre el álgebra de Lie \mathfrak{g} .*

Aclaremos qué formas invariantes respecto a los desplazamientos a la izquierda son, al mismo tiempo, formas invariantes respecto a los desplazamientos a la derecha. Señalemos, que con los desplazamientos a la derecha por h^{-1} , la forma $\omega = g^{-1}dg$ se transforma de la manera siguiente:

$$\omega \mapsto (gh^{-1})^{-1} d(gh^{-1}) = h\omega h^{-1}.$$

De aquí es justo el

LEMA 4. *La función antisimétrica multilineal $\varphi(X_1, \dots, X_k)$ de $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ responde a la forma invariante respecto a los desplazamientos a la derecha si, y sólo si, es justa la igualdad:*

$$\varphi(hX_1h^{-1}, \dots, hX_kh^{-1}) = \varphi(X_1, \dots, X_k) \quad (37)$$

para cualquier elemento h del grupo G .

DEDUCCIÓN. El anillo de cohomologías de un grupo de Lie compacto conexo G coincide con el anillo $\Lambda_{\text{inv}}(\mathfrak{g}^*)$ de las funciones antisimétricas multilineales sobre el álgebra de Lie \mathfrak{g} invariantes respecto a los automorfismos interiores.

Sea que $(,)$ significa una forma de Killing sobre el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo G . Determinemos la función 3-lineal $\Omega(X, Y, Z)$ sobre el álgebra de Lie \mathfrak{g} , haciendo

$$\Omega(X, Y, Z) = ([X, Y], Z). \quad (38)$$

Esta forma es antisimétrica, debido a la invariación de la forma de Killing (véase [1], parte I, § 24). Además, en virtud de la igualdad $[hXh^{-1}, hYh^{-1}] = h[X, Y]h^{-1}$, la forma Ω es invariante respecto a los automorfismos interiores del grupo G . Por eso es justa la

AFIRMACIÓN 6. *El grupo $H^3(G)$ es no trivial para cualquier grupo de Lie compacto G con una forma regular de Killing (es decir, para un grupo no abeliano).*

EJEMPLO 3. Sea M un espacio simétrico del grupo G ; H , un grupo de isotropía. Fijando un punto x en la variedad M , obtenemos una aplicación $G \xrightarrow{p} M$, donde un elemento del grupo g pasa a $p(g) = T_g(x)$. Todo el subgrupo H (y sólo él) pasa al punto x . Si ω es una forma sobre la variedad M , entonces se determina una forma $p^*\omega$ sobre el grupo G . Esta forma se anula sobre el espacio tangente al subgrupo H . Cualquier clase derecha contigua $\{gH\}$ por el subgrupo H pasa a un punto, al aplicarse p . Por eso la forma $p^*\omega$ es invariante respecto a los desplazamientos a la derecha con ayuda de los elementos del grupo H .

Sea ω una forma invariante sobre la variedad M . Entonces la forma $p^*\omega$ sobre el grupo G es invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda.

TEOREMA 5. *El anillo de las formas invariantes diferenciales sobre el espacio homogéneo M del grupo G con el grupo de isotropía H es isomorfo al álgebra exterior $\Lambda_{\text{inv}}((g/h)^*)$ (aquí h es el álgebra de Lie del subgrupo H), es decir, al álgebra de las funciones antisimétricas multilineales sobre \mathfrak{g} , anuladas sobre h , invariantes respecto a los automorfismos interiores con ayuda de los elementos de H .*

DEMOSTRACIÓN. A cada forma invariante ω sobre M le confrontemos la forma $p^*\omega$ sobre el grupo G . La forma $p^*\omega$ es invariante respecto a los desplazamientos a la izquierda y se anula sobre h , por eso determina cierto elemento de $\Lambda((g/h)^*)$. La forma $p^*\omega$ es invariante también respecto a los desplazamientos a la derecha en los elementos del grupo H . Es suficiente para esto, en virtud de la invariación respecto a los desplazamientos a la izquierda, que la forma $p^*\omega$ sea invariante respecto a los automorfismos interiores en los elementos del grupo H . El teorema queda demostrado.

EJEMPLO 4 Calculemos el anillo de cohomologías de un espacio complejo proyectivo:

$$\mathbb{C}P^n = U(n+1)/U(1) \times U(n). \quad (39)$$

$\mathbb{C}P^n$ es un espacio compacto simétrico. El grupo $U(n+1)$ también es conexo y compacto. Por eso, el anillo de cohomologías $\mathbb{C}P^n$ se determina por las formas invariantes diferenciales.

Sean (z^0, \dots, z^n) coordenadas homogéneas sobre $\mathbb{C}P^n$, es decir, coordenadas sobre $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$, determinadas con exactitud hasta un

factor complejo no nulo. Consideremos en $\mathbb{C}P^{n+1}$ una 2-forma real diferencial

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_h dz^h \wedge d\bar{z}^h. \quad (40)$$

A la restricción de esta forma sobre la esfera S^{2n+1} : $\sum_{h=0}^n |z^h|^2 = 1$ también la designemos por Ω . La forma Ω es invariante respecto al grupo $U(n+1)$. Mostremos que esta forma se obtiene de cierta forma Ω sobre $\mathbb{C}P^n$: $\Omega = p^*\omega$, donde $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ es una proyección natural.

Hay que verificar que con las transformaciones

$$z^h \rightarrow e^{i\varphi} z^h, \quad dz^h \rightarrow e^{i\varphi} (dz^h + iz^h d\varphi), \quad (41)$$

$$\bar{z}^h \rightarrow e^{-i\varphi} \bar{z}^h, \quad d\bar{z}^h \rightarrow e^{-i\varphi} (d\bar{z}^h - i\bar{z}^h d\varphi). \quad (41')$$

La forma Ω pasa en sí misma. Sobre la esfera S^{2n+1} , donde $\sum_{h=0}^n z^h \bar{z}^h = 1$, tenemos $\sum z^h d\bar{z}^h + \sum \bar{z}^h dz^h = 0$; por eso

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \sum dz^h \wedge d\bar{z}^h &\rightarrow \frac{i}{2} \sum dz^h \wedge d\bar{z}^h + \\ &+ i d\varphi \wedge \sum (z^h d\bar{z}^h + \bar{z}^h dz^h) = \frac{i}{2} \sum dz^h \wedge d\bar{z}^h. \end{aligned}$$

Así obtenemos la 2-forma invariante ω sobre el espacio simétrico $\mathbb{C}P^n$. Todos sus grados exteriores ω^k son distintos de cero cuando $k \leq n$, ya que los grados correspondientes de la forma Ω también son distintos de cero (verifíquese!).

DEDUCCIÓN. El álgebra de cohomología $H^*(\mathbb{C}P^n)$ del espacio complejo proyectivo $\mathbb{C}P^n$ contiene en sí el álgebra de polinomios $\mathbb{C}[\omega]$ de la generatriz ω de dimensión 2, además, $\omega^{n+1} = 0$.

En el § 4 se mostrará, que no hay otros elementos en $H^*(\mathbb{C}P^n)$.

§ 2. Homología de los complejos algebraicos

DEFINICIÓN 1. Se llama complejo (complejo de cadenas o cocadenas) un grupo abeliano C escrito aditivamente, si:

1) El grupo C se representa como una suma directa $C = \sum_{h \geq 0} C_h$ de sus subgrupos C_h de la dimensión o del grado h (se dice que el grupo C es graduado).

2) Es dado un operador lineal (homomorfismo) $\partial: C_h \rightarrow C_{h \pm 1}$ tal, que $\partial\partial = 0$; el homomorfismo ∂ aumenta (o reduce) la dimensión en 1 simultáneamente para todos los h : $\partial(C_h) \subset C_{h+1}$ o $\partial(C_h) \subset C_{h-1}$. Si $\partial C_h \subset \partial C_{h+1}$, se trata de un complejo de «cocadenas». Si $\partial C_h \subset C_{h-1}$, se trata de un complejo de «cadenas».

DEFINICION 2. El grupo k -dimensional de homologías $H_k(C)$ del complejo de cadenas C se denomina grupo cociente del grupo de ciclos k -dimensionales $Z_k = \text{Ker } \partial$ (o sea $\partial Z_k = 0$) por un subgrupo de fronteras $B_k = \text{Im } \partial = \partial C_{k+1}$ ($B_k \subset Z_k$):

$$H_k(C) = Z_k/B_k \quad (1)$$

Al grupo de cohomologías del complejo de cocadenas se lo llamará grupo cociente de los cociclos $Z^k = \text{Ker } \partial$ por cofronteras $B^k = \partial C_{k-1}$:

$$H^k(C) = Z^k/B^k. \quad (2)$$

Al grupo completo de homologías $H_*(C)$ o de cohomologías $H^*(C)$ se lo llamará suma directa: $H_*(C) = \sum_{h>0} H_h(C)$, o $H^*(C) = \sum_{h>0} H^h(C)$.

EJEMPLO 1. El complejo de formas diferenciales $C = \sum_{k=0}^n C_k$ sobre la variedad M^n es conexo con cada variedad M^n . Aquí C_k son todas las k -formas (suaves) sobre la variedad M^n ; el operador $\partial: C_k \rightarrow C_{k+1}$ es un operador de la diferenciación exterior $d = \partial$. Las homologías de tal complejo se denominaban en el § 1 cohomologías de variedad.

EJEMPLO 2. Se determina un complejo de las formas invariantes diferenciales sobre un grupo de Lie o sobre un espacio simétrico. Todas estas formas son cerradas, por eso el operador $\partial = d$ es trivial, o sea, nulo. Del teorema 1.4 se deduce que las homologías de este complejo coinciden (para un espacio simétrico) con las homologías del complejo de todas las formas diferenciales.

En los párrafos siguientes encontraremos una serie de ejemplos de los complejos.

Sean dados dos complejos $(C^{(1)}, \partial^{(1)})$, $(C^{(2)}, \partial^{(2)})$.

DEFINICION 3. El homomorfismo $f: C^{(1)} \rightarrow C^{(2)}$ que conserva la graduación, se denomina homomorfismo de complejos, si él conmuta con la operación de las diferenciales:

$$f\partial^{(1)} = \partial^{(2)}f, \quad f(C_k^{(1)}) \subset C_k^{(2)}, \quad k=0, 1, \dots \quad (3)$$

Tiene lugar la sencilla

AFIRMACION 1. Un homomorfismo f de los complejos algebraicos, induce un homomorfismo j de los grupos de homologías:

$$f: H_k(C^{(1)}, \partial^{(1)}) \rightarrow H_k(C^{(2)}, \partial^{(2)}), \quad k=0, 1, \dots \quad (4)$$

DEMOSTRACION. El homomorfismo f traslada los ciclos $Z_k^{(1)}$ a los ciclos $Z_k^{(2)}$ y las fronteras $B_k^{(1)}$ a las fronteras $B_k^{(2)}$ para cualquier k . Por eso él determina correctamente el homomorfismo de los grupos de homologías. La afirmación queda demostrada.

Por ejemplo, una aplicación suave de variedades $f: M \rightarrow N$ determina una aplicación f^* de los complejos de las formas diferenciales sobre estas variedades, que actúa al lado inverso:

$$f^*: C(N) \rightarrow C(M).$$

Esta aplicación es lineal y conmutada con la diferencial: $f^*d\omega = df^*\omega$ para cualquier forma ω . Por eso f^* es un homomorfismo de los complejos de formas diferenciales.

DEFINICIÓN 4. Sean $f: C^{(1)} \rightarrow C^{(2)}$, $g: C^{(1)} \rightarrow C^{(2)}$ dos homomorfismos de los complejos algebraicos. Estos homomorfismos se llaman (algebraicamente) homotópicos, si es dado un homomorfismo $D: C^1 \rightarrow C^{(2)}$ tal, que) δ

$$D\delta^{(1)} \pm \delta^{(2)}D = f - g. \quad (5)$$

Si los operadores $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$ aumentan (reducen) la graduación, entonces la aplicación D reduce (aumenta) la graduación:

$$D(C_k^1) \subset \overline{C}_{k-1}^{(2)} \quad \text{o} \quad D(C_k^1) \subset \overline{C}_{k+1}^{(2)}. \quad (6)$$

Afirmación 2. Las aplicaciones homotópicas de los complejos inducen iguales homomorfismos de los grupos de homología:

$$f = g: H_k(C^{(1)}, \delta^{(1)}) \rightarrow H_k(C^{(2)}, \delta^{(2)}). \quad (7)$$

DEMOSTRACIÓN. Si $c_k \in C_k^{(1)}$ es un ciclo, $\delta^{(1)}c_k = 0$, entonces

$$f(c_k) - g(c_k) = D\delta^{(1)}c_k \pm \delta^{(2)}Dc_k = \pm \delta^{(2)}Dc_k,$$

o sea, $f(c_k) \sim g(c_k)$ en un grupo de homología $H_k(C^{(2)}, \delta^{(2)})$. La afirmación queda demostrada.

Este ejemplo de la homotopía algebraica fue dado al demostrar la invariación homotópica de cohomología en el teorema 1.1. Otros ejemplos los encontraremos en los párrafos siguientes.

DEFINICIÓN 5. Sea b_k un rango del grupo $H_k(C, \partial)$. La suma alternada del tipo

$$\chi(C, \partial) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k b_k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{rang } H_k \quad (8)$$

se denomina característica de Euler del complejo (C, ∂) .

Afirmación 3. La característica de Euler del complejo (C, ∂) es igual al número siguiente:

$$\chi(C, \partial) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{rang } C_k. \quad (9)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea z_k el rango del grupo de los ciclos Z_k ; β_k , el rango del grupo de las fronteras B_k . Entonces, para estos rangos tendremos las relaciones:

$$b_k = z_k - \beta_k, \quad (10)$$

$$\beta_k = \text{rang } C_{k+1} - z_{k+1} \quad (11)$$

(donde el operador ∂ reduce la graduación). Por eso,

$$b_k = z_k + z_{k+1} - \text{rang } C_{k+1}$$

y

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k b_k = z_0 + \sum_{k \leq 0} (-1)^{k+1} \text{rang } C_{k+1}.$$

La afirmación queda demostrada, ya que $z_0 = \text{rang } C_0$ (es evidente, que la demostración es justa también cuando el operador aumenta la graduación en 1).

Sea G un grupo abeliano arbitrario (escrito aditivamente). Es determinado el complejo $C \otimes G = \sum_{k \geq 0} C_k \otimes G$, o sea el complejo de «cadenas con coeficientes en el grupo G ». [Recordemos, que el producto tensorial de dos grupos abelianos $A \otimes B$ se compone de toda clase de sumas finitas del tipo $\sum a_i \otimes b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, mientras que para el símbolo \otimes deben cumplirse las siguientes exigencias:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) \otimes b &= a_1 \otimes b + a_2 \otimes b, \\ a \otimes (b_1 + b_2) &= a \otimes b_1 + a \otimes b_2. \end{aligned}$$

De aquí se deduce una relación útil: $ma \otimes b = a \otimes mb$, donde m es cualquier número entero.

PROBLEMA 1. Demostrar que para cualquier grupo G es justa la fórmula $G \otimes \mathbb{Z} = G$. Calcular el producto tensorial de los grupos finitos cíclicos $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$. Demostrar que el producto tensorial de cualquier grupo abeliano finito por un grupo de los números reales (o racionales) es igual a cero.]

El operador ∂ en las cadenas del tipo $c_k \otimes g$, $c_k \in C_k$, $g \in G$, opera del siguiente modo: $\partial(c_k \otimes g) = \partial c_k \otimes g$. El continúa linealmente sobre todo el grupo $C \otimes G$. Aquí es evidente la correlación $\partial\partial = 0$. Las homologías del complejo $C \otimes G$ se llaman también homologías del complejo C con los coeficientes en el grupo G y se designan así:

$$H_k(C; G) = H_k(C \otimes G).$$

Sean G un grupo abeliano escrito aditivamente y (C, ∂) un complejo de cadenas. Introduzcamos un complejo conjugado de cocadenas, que son las formas lineales (homomorfismos) C^* con valor en G , designado en el álgebra por $\text{Hom}(C, G)$. Tenemos una descomposición natural en suma

$$C^* = \sum_{k \geq 0} C_k^* \quad (12)$$

(C_k^* son formas lineales sobre C_k) y el operador de frontera ∂^* conjugado con ∂ :

$$\partial^* : C_k^* \rightarrow C_{k+1}^*, \quad \partial : C_k \rightarrow C_{k-1},$$

donde

$$(\partial^* x, c) = (x, \partial c); \quad c \in C, \quad x \in C^*. \quad (13)$$

Tenemos $\partial^* \partial^* = 0$. Los grupos de cohomología $H_k(C^*, \partial^*)$ habitualmente se designan por $\tilde{H}^k(C; G)$ y se denominan cohomología del complejo C con valor en G .

Sea $G = \mathbf{k}$ un campo (por ejemplo, los números reales $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, los complejos $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, los racionales $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$ o el campo finito $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_p$ de p elementos, donde p es un número primo) y sea C un complejo de los espacios lineales de dimensión finita C_k sobre un campo \mathbf{k} . Tiene lugar el

TEOREMA 1 *Son mutuamente conjugados los espacios lineales $H^k(C; \mathbf{k})$ y $H_k(C)$: en particular, ellos tienen la misma dimensión.*

DEMOSTRACION Supongamos, que el operador ∂ reduce la graduación. Demostremos, que un elemento c^k de C_k^* es cociclo en el complejo C^* si, y sólo si, $(c^k, B_k) = 0$, donde $B_k \subset C_k$ es un subgrupo de fronteras. En efecto, para cualquier elemento \tilde{c}_{k+1} del grupo C_{k+1} obtendremos: $0 = (\partial^* c^k, \tilde{c}_{k+1}) = (c^k, \partial \tilde{c}_{k+1})$. Por otro lado, si $(c^k, \partial \tilde{c}_{k+1}) = 0$ para cualquier elemento \tilde{c}_{k+1} de C_{k+1} , entonces $\partial^* c^k$ toma valores nulos sobre cualquier elemento \tilde{c}_{k+1} .

Así obtenemos, que un espacio Z^* de cociclos del complejo C^* coincide con un espacio de formas lineales, que se anulan en un subespacio de fronteras B_k . En virtud de que cada espacio C_k tiene una dimensión finita, el complejo $(C^*)^*$ coincide con el complejo C . Por eso tenemos: un espacio de ciclos Z_k que coincide con un espacio de formas lineales sobre C_k^* , que se anulan en un subespacio de fronteras B_k^* . En otras palabras, B_k^* son todas las formas lineales que se anulan sobre Z_k .

Según lo demostrado, cada elemento c^k de C_k^* , donde $\partial^* c^k = 0$, determina una forma lineal sobre las homología $H_k(C)$. Además, las dimensiones de los espacios $H^k(C; \mathbf{k})$ y $H_k(C)$ coinciden. El teorema queda demostrado.

Vamos a definir la operación del producto tensorial $C = C^{(1)} \otimes C^{(2)}$ de dos complejos $(C^{(1)}, \partial^{(1)})$ y $(C^{(2)}, \partial^{(2)})$.

Recordemos, que al valor tensorial $A \otimes B$ de dos espacios lineales A y B con bases (a_1, \dots, a_s) , (b_1, \dots, b_p) se le llamará un espacio con base $a_i \otimes b_j$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, p$, y la condición $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \otimes b = \lambda_1 a_1 \otimes b + \lambda_2 a_2 \otimes b$ y $a \otimes (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = \lambda_1 a \otimes b_1 + \lambda_2 a \otimes b_2$. (Aquí λ_1 y λ_2 son escalares. Posiblemente, se trata de cualesquier grupos abelianos escritos adi-

tivamente A y B ; entonces, λ son únicamente números enteros (véase la pág. 27)).

Sea $C = \sum C_n$, donde

$$C_k = (C^{(1)} \otimes C^{(2)})_k = \sum_{p+q=k} C_p^{(1)} \otimes C_q^{(2)}, \quad (14)$$

$$\partial (c_p^{(1)} \otimes c_q^{(2)}) = (\partial^{(1)} c_p^{(1)}) \otimes c_q^{(2)} + (-1)^p c_p^{(1)} \otimes \partial^{(2)} c_q^{(2)}. \quad (15)$$

Es fácil verificar, que $\partial\partial = 0$.

TEOREMA 2. Sean $C^{(1)}$ y $C^{(2)}$ complejos de espacios lineales sobre cualquier campo k . Para las homologías del valor tensorial tenemos la fórmula siguiente

$$H_k(C^{(1)} \otimes C^{(2)}) = \sum_{p+q=k} H_p(C^{(1)}) \otimes H_q(C^{(2)}) \quad (16)$$

(serán importantes los casos cuando $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$).

Para demostrar el teorema probemos, al principio, una afirmación auxiliar.

LEMA. Sea $C = \sum_{n \geq 0} C_n$ un complejo de espacios lineales sobre un campo k . Entonces, en cada espacio C_n se puede elegir una base canónica $(x_{n,i}, y_{n,j}, h_{n,l})$, en la cual la acción del operador ∂ se escribe así

$$\partial x_{n,i} = y_{n-1,i}, \quad \partial y_{n,j} = 0, \quad \partial h_{n,l} = 0. \quad (17)$$

DEMOSTRACION. Es evidente de las fórmulas (17) que los vectores $y_{n,j}$ son fronteras, los vectores $h_{n,l}$ son ciclos que no se representan como fronteras y así dan una base en las homologías $H_n(C)$; por fin, los vectores $x_{n,i}$ es una base en un espacio de cadenas, y no son ciclos. Por eso, la base que necesitamos se construye fácilmente por inducción, comenzando por el espacio C_0 .

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Elijamos las bases canónicas $(x_p^{(1)}, y_p^{(1)}, h_p^{(1)})$ y $(x_q^{(2)}, y_q^{(2)}, h_q^{(2)})$ en todos los espacios $C_p^{(1)}$ y $C_q^{(2)}$ (omitimos los índices que numeran los vectores básicos de un espacio). Construimos una base canónica para el espacio $C_k = \sum_{p+q=k} C_p^{(1)} \otimes C_q^{(2)}$.

El primer grupo de los vectores (no ciclos):

$$\begin{aligned} x_{pq} &= x_p^{(1)} \otimes x_q^{(2)}; & a_{pq} &= \frac{1}{2} [x_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)} + (-1)^{p-1} y_{p-1}^{(1)} \otimes x_{p+1}^{(2)}], \\ \alpha_{pq} &= x_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}; & \beta_{pq} &= (-1)^p h_p^{(1)} \otimes x_q^{(2)} \end{aligned} \quad (18)$$

(por doquier en estas fórmulas y más abajo $p + q = k$).

La base de fronteras:

$$\begin{aligned} b_{pq} &= y_{p-1}^{(1)} \otimes x_{q+1}^{(2)} - (-1)^{p+1} x_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)}; \\ y_{pq} &= y_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)}; & \gamma_{pq} &= y_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}; & \delta_{pq} &= h_p^{(1)} \otimes y_q^{(2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Los vectores (18), (19) son linealmente independientes (¡verifíquese!) y, para obtener una base en el espacio C_h , hay que añadir los vectores del tipo $h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}$, $p + q = k$. Calculemos la acción del operador ∂ en la base construida. De las fórmulas (15), (17), obtenemos de inmediato que

$$\begin{aligned} \partial x_{pq} &= b_{pq-1}, & \partial a_{pq} &= y_{p-1q}, & \partial \alpha_{pq} &= \gamma_{p-1q}, & \partial \beta_{pq} &= \delta_{p,q-1}, \\ \partial b_{pq} &= \partial y_{pq} = \partial \gamma_{pq} = \partial \delta_{pq} = \partial (h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}) = 0. \end{aligned}$$

es decir, la base construida es realmente canónica. De tal manera, los vectores $h_p^{(1)} \otimes h_q^{(2)}$ con $p + q = k$ forman una base en el espacio $H_h(C^{(1)} \otimes C^{(2)})$, lo que debíamos demostrar.

§ 3. Complejos simpliciales. Sus homología y cohomología. Clasificación de las superficies bidimensionales cerradas

Formulemos, ahora, otro enfoque de la definición y del estudio de los grupos de homología y cohomología, que aumenta mucho las posibilidades del empleo de los mismos.

Definimos un *simplex* n -dimensional (de dimensión n). Un *simplex* 0-dimensional es un punto $\{\alpha_0\}$; un *simplex* 1-dimensional es un segmento $\{\alpha_0\alpha_1\}$; un *simplex* 2-dimensional es un triángulo $\{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\}$; un *simplex* 3-dimensional es un tetraedro $\{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}$ (fig. 2).

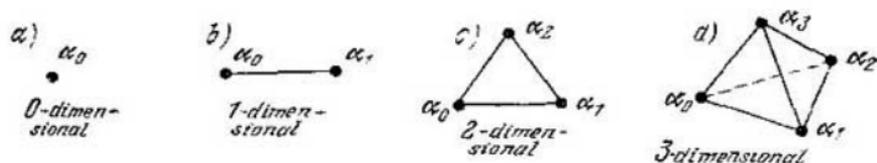


Fig. 2. Simplex.

Por inducción, si un *simplex* n -dimensional $\sigma^n = \{\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ está definido y se encuentra en un espacio n -dimensional \mathbb{R}^n , entonces, para construir un *simplex* $(n + 1)$ -dimensional, hay que tomar un vértice nuevo α_{n+1} fuera de este hiperplano $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y examinar el conjunto de todos los puntos pertenecientes a los segmentos que ligan este vértice nuevo α_{n+1} con los puntos del *simplex* $\{\alpha_0 \dots \alpha_n\}$. El cuerpo obtenido será un *simplex* $(n + 1)$ -dimensional $\{\alpha_0 \dots \alpha_{n+1}\} = \sigma^{n+1}$.

En forma más general, al *simplex* n -dimensional lo denominaremos *cápsula convexa* del $(n + 1)$ punto (vértice) de un espacio euclídeo.

Las caras de un *simplex* n -dimensional $\{\alpha_0 \dots \alpha_n\}$ son los *simplex* tendidos en los vértices $\{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}\}$, $\{\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-2}\alpha_n\}$, ...

..., $[\alpha_1 \dots \alpha_n]$. Así, la i -ésima cara se obtiene al separar el i -ésimo vértice α_i del conjunto $[\alpha_0 \dots \alpha_n]$, y ella es opuesta a este vértice: la i -ésima cara $\sigma_{(i)}^{n-1}$ del simplex σ^n es

$$[\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_n] = \sigma_{(i)}^{n-1} \quad (1)$$

(el i -ésimo vértice se ha separado).

Las caras de menor dimensión se obtienen, formalmente, de un simplex $[\alpha_0 \dots \alpha_n]$ al separar cierto número de cualesquiera vértices.

DEFINICIÓN 1. La frontera orientada del simplex $\sigma^n = [\alpha_0 \dots \alpha_n]$ es una combinación lineal formal de sus caras del tipo:

$$\begin{aligned} \partial\sigma^n &= \partial[\alpha_0 \dots \alpha_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_n] = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{(i)}^{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Por ejemplo, para los simplex 0-, 1- y 2-dimensionales tenemos:

$$\partial[\alpha_0] = 0, \quad (3)$$

$$\partial[\alpha_0\alpha_1] = [\alpha_1] - [\alpha_0], \quad (4)$$

$$\partial[\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = [\alpha_1\alpha_2] - [\alpha_0\alpha_2] + [\alpha_0\alpha_1]. \quad (5)$$

De la fig. 2 está claro, que las caras tienen signos regulares.

LEMA 1. Para un simplex n -dimensional tiene lugar la fórmula

$$\partial\partial[\alpha_0 \dots \alpha_n] = 0. \quad (6)$$

La demostración consiste en el cálculo directo. Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos

$$\partial[\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = [\alpha_1\alpha_2] - [\alpha_0\alpha_2] + [\alpha_0\alpha_1],$$

$$\partial\partial[\alpha_0\alpha_1\alpha_2] = \{[\alpha_2] - [\alpha_1]\} - \{[\alpha_2] - [\alpha_0]\} + \{[\alpha_1] - [\alpha_0]\} = 0.$$

El cálculo es análogo para todos los n : $\partial\partial\sigma^n = \partial\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{(i)}^{n-1}\right)$; en esta suma la cara $\sigma_{(i,j)}^{n-2}$ (los vértices α_i, α_j están separados) se incluye dos veces—en la frontera $\partial\sigma_{(i)}^{n-1}$ y $\partial\sigma_{(j)}^{n-1}$ —con signos opuestos.

DEFINICIÓN 2. El complejo simplicial es un conjunto de simplex de dimensión arbitraria que tiene las siguientes propiedades:

1) junto con cualquier simplex, sus caras de todas las dimensiones pertenecen a este conjunto;

2) dos simplex pueden intersectarse (tener puntos comunes) sólo por una cara entera de alguna dimensión y, con esto, en no más de una cara.

Un complejo simplicial finito se compone de un número finito de simplex.

Enumeramos de algún modo todos los vértices de un complejo simplicial finito $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$. Entonces, los simplexes r -dimensional $[\alpha_{i_0} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_r}]$ se determinan por ciertos subconjuntos de los vértices en la enumeración dada.

Sea G cualquier grupo conmutativo, donde la ley de grupo se escribe como la adición (+). Las cadenas de la dimensión k en un complejo simplicial son combinaciones finitas lineales formales del tipo $c_k = \sum_i g_i \sigma_i$, donde σ_i son diferentes simplexes k -dimensionales escritos en la numeración dada de los vértices del complejo; g_i , son elementos arbitrarios del grupo G . La adición de las cadenas se determina así: si $c_k = \sum_i g_i \sigma_i$, $c'_k = \sum_i g'_i \sigma_i$, entonces, $c_k + c'_k = \sum_i (g_i + g'_i) \sigma_i$. Las cadenas forman un grupo abeliano.

La frontera de la cadena ∂c_k es la cadena de la dimensión $k-1$, determinada por la fórmula

$$\partial c_k = \sum_i g_i \partial \sigma_i. \quad (7)$$

Es evidente la fórmula (según el lema 1): $\partial \partial c_k = 0$. Los ciclos son tales cadenas de c_k , que $\partial c_k = 0$. Los ciclos forman también el grupo Z_k . Los ciclos homológicos a cero (que son fronteras) son tales ciclos de c_k , que $c_k = \partial c_{k+1}$. Estos ciclos forman un grupo de fronteras B_k .

DEFINICIÓN 3. Al grupo de homología $H_k(M, G)$ de un complejo simplicial M lo denominaremos con un grupo cociente del grupo Z_k de todos los ciclos de la dimensión k por ciclos B_k homológicos a cero (dos ciclos son equivalentes si, y sólo si, $c'_k - c_k = \partial c_{k+1}$).

Son interesantes los casos $G = \mathbb{Q}$ (números racionales), $G = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{Z}$ (números enteros), $G = \mathbb{Z}_2$ (residuos por el módulo 2) y en general, $G = \mathbb{Z}_m$ (residuos por el módulo m , en especial, cuando m es un número primo y \mathbb{Z}_m es un campo). Cuando $G = \mathbb{R}$, todos los $H_i(M, \mathbb{R})$ son espacios lineales sobre el campo \mathbb{R} . A la dimensión b_i del espacio $H_i(M, \mathbb{R})$ se la llama i -ésimo número de Betti del complejo M .

Para un complejo simplicial finito se determina la característica de Euler:

si γ_i es el número de simplexes de dimensión i en un complejo M , entonces la característica de Euler del complejo M es igual a

$$\chi(M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \gamma_i. \quad (8)$$

TEOREMA 1 Sean b_i las dimensiones de los espacios $H_i(M; \mathbb{R})$ (números de Betti). Entonces tenemos la igualdad:

$$\chi(M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \gamma_i = \sum_{j \geq 0} (-1)^j b_j. \quad (9)$$

DEMOSTRACION. Un grupo de cadenas i -dimensionales C_i es un espacio lineal de la dimensión γ_i . Por eso la demostración se deduce de la afirmación 2.3.

OBSERVACION. La característica de Euler $\chi(M)$ puede ser determinada (véase [1], parte II, § 15) como una suma de singularidades de un campo vectorial (o de una función suave). Obtenemos la posibilidad de calcular $\chi(M)$ partiendo de las homologías.

Determinemos ahora los objetos conjugados. Una cocadena k -dimensional c^k es una función lineal sobre las cadenas k -dimensionales con los coeficientes enteros del complejo M con valores en el grupo G . De manera que la cocadena c^k compara cada simplex k -dimensional σ_i con un elemento $c^k(\sigma_i)$ del grupo G , al mismo tiempo

$$c^k(a\sigma_{i1} + b\sigma_{i2}) = ac^k(\sigma_{i1}) + bc^k(\sigma_{i2}),$$

a, b , son números enteros. La suma de estas funciones lineales es otra vez una cocadena, por eso las cocadenas forman un grupo.

Una cofrontera δc^k de cualquier cocadena c^k es una cocadena $(k+1)$ -dimensional que se determina con la igualdad

$$\delta c^k(\sigma_i) = c^k(\partial\sigma_i) \quad (10)$$

(o $\delta = \partial^*$ en las connotaciones del § 2), donde σ_i es cualquier simplex de la dimensión $k+1$. Señalemos que $\delta\delta = 0$. En realidad,

$$\delta\delta c^k(\sigma_i) = \delta c^k(\partial\sigma_i) = c^k(\partial\partial\sigma_i) = 0.$$

Los cociclos son cocadenas c^k tales, que $\delta c^k = 0$. Los cociclos equivalentes (cohomológicos) a cero son de tipo $c^k = \delta c^{k-1}$.

DEFINICION 4. Un grupo de cohomologías $H^k(M; G)$ es un grupo cociente de un grupo de cociclos por un subgrupo de cociclos, equivalentes a cero ($c^k \sim c^{k'}$, si $c^k - c^{k'} = \delta c^{k-1}$).

Un complejo de cocadenas se conjuga con un complejo de cocadenas simpliciales. Para el caso, cuando $G = \mathbf{k}$ es un campo, obtenemos del teorema 2.1 el siguiente

COROLARIO. Las dimensiones de los espacios $H_i(M; \mathbf{k})$ y $H^i(M; \mathbf{k})$, donde \mathbf{k} es un campo, coinciden.

Consideremos el caso $G = \mathbb{Z}_m$ (residuos del mod m), en especial, si $m = p$ es un número primo, cuando $G = \mathbb{Z}_p$ es un campo. Sea $x \in H_q(M; G)$ y \bar{x} una cadena con coeficientes enteros, que da un ciclo $x = \bar{x} \pmod{m}$. Tenemos

$$\bar{\partial}x = mu, \quad \text{o} \quad u = \frac{\bar{\partial}x}{m}$$

en las cadenas con coeficientes enteros. Si el elemento \bar{x} cambia en la clase de homología $x \in H_q(M, \mathbb{Z}_m)$, $\bar{x} \mapsto \bar{x} + \partial y + mz$, entonces obtenemos

$$\frac{\partial \bar{x}}{m} \mapsto \frac{\partial \bar{x}}{m} + \frac{\partial \partial y}{m} + \partial z = \frac{\partial \bar{x}}{m} + \partial z = u + \partial z.$$

Con esto, $\partial u = 0$.

De manera que surge el «homomorfismo de Bokshtein» unívoco correctamente determinado:

$$x \mapsto \frac{\partial \bar{x}}{m}, \text{ donde } \bar{x} \pmod{m} \sim x \in H_q(M; \mathbb{Z}_m), \quad (11)$$

$$H_q(M; \mathbb{Z}_m) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(M; \mathbb{Z}).$$

Análogamente, en las cohomología obtendremos un homomorfismo

$$H^q(M; \mathbb{Z}_m) \xrightarrow{\delta_*} H^{q+1}(M; \mathbb{Z}). \quad (12)$$

AFIRMACIÓN 1. Para cualquier elemento $x \in H_q(M; \mathbb{Z}_m)$ $\partial_* x = 0$ en $H_{q-1}(M; \mathbb{Z})$ si, y sólo si, x se obtiene del elemento $y \in H_q(M; \mathbb{Z})$ con ayuda de la reducción (módulo m):

$$x = y \pmod{m} \leftrightarrow \partial_* x = 0.$$

Análogamente, en las cohomología: $x = y \pmod{m} \leftrightarrow \delta_* x = 0$. (Aquí $x \in H^q(M; \mathbb{Z}_m)$, $y \in H^q(M; \mathbb{Z})$.)

DEMOSTRACIÓN. Si $x = y \pmod{m}$, entonces se puede escoger una cadencia \bar{x} de manera que $\partial \bar{x} = 0$ y $\partial_* x = \frac{\partial \bar{x}}{m} = 0$ en $H_{q-1}(M; \mathbb{Z})$.

Por el contrario, si $\partial_* x = 0$ en $H_{q-1}(M; \mathbb{Z})$, entonces $\frac{\partial \bar{x}}{m} = \partial z$ para cierta cadena z . Supongamos $y = \bar{x} - mz$. Tenemos $\partial y = 0$ e $y \pmod{m} = x$. La afirmación queda demostrada.

Así, el conocimiento de ∂_* y δ_* nos permite reconocer las imágenes de las homología con coeficientes enteros en las homología de mod m . Otro empleo: la imagen $\partial_* H_q(M, \mathbb{Z}_m)$ en los grupos $H_{q-1}(M, \mathbb{Z})$ escoge los elementos u , $u \in H_{q-1}(M, \mathbb{Z})$ tales, que $mu = 0$ (torsión).

En efecto, $\partial_*(mx) = m(\partial_* x) = 0$, por definición. Por el contrario, si $mv = 0$ para $v \in H_{q-1}(M, \mathbb{Z})$, entonces $mv = \partial \bar{x}$ para la cadena con coeficientes enteros \bar{x} , y tenemos un elemento $x = \bar{x} \pmod{m}$ tal, que $x \in H_q(M, \mathbb{Z}_m)$ y $\partial_* x = v$.

EJEMPLO. Para $M = \mathbb{R}P^2$ tenemos $x \in H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, $x \neq 0$. Al mismo tiempo, $\partial_* x \neq 0$ en $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.

PROBLEMA 1. Para todas las variedades no orientables hay un ciclo $[M^n] = x$ en el grupo $H_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$ tal, que $\partial_* x \neq 0$ y un elemento $\partial_* x \in H_{n-1}(M^n, \mathbb{Z})$ de orden 2.

Y para las cohomologías, al contrario: tenemos $u \in H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$, donde $\delta_* u \neq 0$ y tiene el orden 2 en $H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z})$.

Sea la variedad M^n dividida en simplex y transformada en un complejo simplicial. Entonces, se pueden determinar y calcular los grupos de homologías y de cohomologías.

Un simplex suave σ^k de dimensión k , es una inmersión (encaje) diferenciable de un simplex (junto con algún entorno abierto de un simplex en σ^k en un espacio \mathbb{R}^k) en la variedad M^n . Consideremos una variedad *triangulada*, si es dividida en un complejo simplicial con ayuda de los simplex suaves.

Formulemos dos casos importantes (la demostración del punto A será dada en el § 6):

A. Los grupos de homologías y de cohomologías no dependen de la triangulación de la variedad y son homotópicamente invariantes.

B. Para $G = \mathbb{R}$ los grupos de cohomologías coinciden con los que se definieron por las formas diferenciales (véase el § 14).

Aclaremos la última afirmación. Sean: σ^k , un simplex suave k -dimensional en la variedad M^n ; ω_k , una forma diferencial de grado k . Está determinada la integral de la forma ω_k por el simplex σ^k :

$$\langle \omega_k, \sigma^k \rangle = \int_{\sigma^k} \omega_k. \quad (13)$$

Si $c_k = \sum_i r_i \sigma_i^k$ es una cadena con coeficientes reales; entonces puede ser determinada la integral de la forma por la cadena c_k :

$$\langle \omega_k, c_k \rangle = \sum_i r_i \int_{\sigma_i^k} \omega_k. \quad (14)$$

En virtud de la fórmula de Stokes (véase [1], parte I, § 26) es correcta la igualdad:

$$\langle d\omega_k, c \rangle = \langle \omega, \partial c \rangle \leftrightarrow \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \quad (15)$$

Por eso cualquier forma cerrada ω , donde $d\omega = 0$, determina una función lineal sobre las clases de las homologías simpliciales: si c_1, c_2 , son ciclos homológicos, $c_1 = c_2 + \partial c'$, entonces

$$\langle \omega, c_1 \rangle = \langle \omega, c_2 \rangle + \langle d\omega, c' \rangle = \langle \omega, c_2 \rangle.$$

Cualquier forma exacta ω , donde $\omega = d\omega'$, se anula en cualquier ciclo (verifíquese).

DEDUCCIÓN. Cada clase de cohomología $H^k(M; \mathbb{R})$ determinadas por formas diferenciales, define una función lineal sobre el grupo de homología simpliciales $H_k(M; \mathbb{R})$.

La afirmación B formulada más arriba significa que así se obtiene cualquier función lineal sobre el grupo $H_k(M; \mathbb{R})$ y una forma cerrada no trivial (no exacta) siempre da una forma no trivial lineal sobre $H_k(M; \mathbb{R})$.

Sea M^n una variedad conexa cerrada. Es evidente que su triangulación cualquiera (partición en simplex) tiene la siguiente propiedad: cualquier simplex de dimensión $n-1$ es una cara justamente de dos simplex n -dimensionales.

TEOREMA 2. Tiene lugar la igualdad

$$H_n(M^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$$

(aquí \mathbb{Z}_2 es un grupo de dos elementos, residuos por el módulo 2).

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la cadena $z = \sum_i \sigma_i^n$, donde la adición se realiza por todos los simplex n -dimensionales, con todo eso, su orientación es arbitraria. Sobre el campo \mathbb{Z}_2 es justa la igualdad de las cadenas:

$$\partial \sigma^n = \sum_{i=0}^n \sigma_i^{n-1}, \quad (16)$$

donde σ_i^{n-1} son caras del simplex σ^n . En la suma $\partial z = \sum_i \partial \sigma_i^n$ cada simplex $(n-1)$ -dimensional se encuentra exactamente dos veces. Por eso $\partial z = 0$. Es evidente que aquí no hay otros ciclos no nulos n -dimensionales. El teorema está demostrada.

Y ahora sea la variedad M^n orientada.

AFIRMACIÓN 2. Para una variedad cerrada conexa orientada un grupo n -ésimo de homología $H_n(M^n; G)$ es igual a G (G es un grupo cualquiera).

DEMOSTRACIÓN. En cada punto de la variedad M^n es dada una clase de orientación de los repers (jalones) tangentes. Orientemos los simplex n -dimensionales en concordancia con la orientación de estos repers, sea que los simplex σ_1^n y σ_2^n tengan frontera por un simplex σ^{n-1} (véase la fig. 3 para $n=2$). Este simplex se incluye en las fronteras $\partial \sigma_1^n$ y $\partial \sigma_2^n$ con signos opuestos. En consecuencia la cadena $[M^n] = \sum_i \sigma_i^n$ (la suma por todos los simplex n -dimensionales) es un ciclo. Es evidente que cualquier otro ciclo n -dimensional se escribe así: $z = g [M^n]$, donde g es un elemento de un grupo G . Ya que no hay fronteras n -dimensionales, la afirmación queda demostrada.

AFIRMACIÓN 3. Sea $G = \mathbb{Z}$ un grupo de números enteros. Entonces para una variedad cerrada conexa no orientada n -dimensional tendremos:

$$H_n(M^n, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_n(M^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

DEMOSTRACIÓN. Cualquier ciclo n -dimensional debe tener el aspecto $z = \lambda \sum_i \sigma_i^n$, donde $\lambda \neq 0$ es un número entero y los σ_i^n están orientados de manera conveniente. Si los σ_1^n y σ_2^n tienen frontera por el σ^{n-1} , entonces este σ^{n-1} se incluye en $\partial\sigma_1^n$ y $\partial\sigma_2^n$ con los signos opuestos si, y sólo si, los σ_1^n y σ_2^n son orientados igualmente en la variedad M^n (verifíquese).

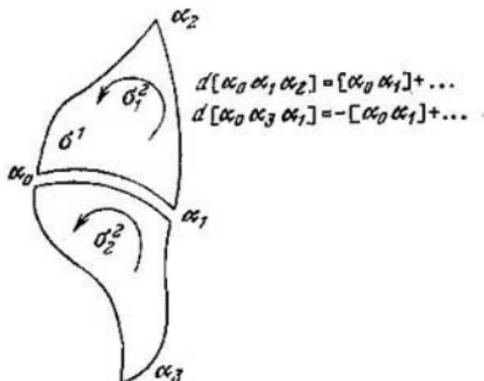


Fig. 3.

Por eso $\partial z = 0$ si, y sólo si, en todos los σ_i^n puede ser escogida la única orientación, es decir, si la variedad M^n es orientable. La afirmación queda demostrada.

COROLARIO. Sea $[M^n] = \sum_i \sigma_i^n$ la suma de todos los σ_i^n n -dimensionales de la variedad no orientable M^n (generatriz en el grupo $H_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$). Entonces

$$\partial_* [M_n] \neq 0 \text{ en el grupo } H_{n-1}(M^n, \mathbb{Z}) \text{ y } 2\partial_* [M^n] = 0.$$

Pasamos ahora a la triangulación de las variedades suaves bidimensionales y a su clasificación con ayuda de los complejos simpliciales.

Clasifiquemos las variedades bidimensionales suaves compactas cerradas conexas. De aquí en adelante vamos a considerar sólo tales variedades, y por eso no mencionaremos cada vez las restricciones impuestas a la variedad, enumeradas más arriba.

LEMA 2. *Cualquier variedad suave bidimensional M^2 se puede triangular suavemente (es decir, partir con curvas suaves en triángulos suaves tales, que dos triángulos cualesquiera de esta división no se intersecan, tienen un vértice común, o bien un lado común).*

DEMOSTRACIÓN. Sumergimos (encajamos) M^2 en un espacio euclídeo de dimensión finita (véase [1], parte II, § 9). Entonces

sobre M^2 surge una métrica de Riemann inducida. Para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño dos puntos cualesquiera $x, y \in M^2$, para los cuales $\rho(x, y) < \varepsilon$ (ρ es una distancia sobre M^2 engendrada por la métrica de Riemann), se unen por la única geodésica más corta $\gamma_{x,y}$. Vamos a recubrir M^2 con un sistema finito de discos de radio $< \varepsilon/2$: D_1, D_2, \dots, D_N . El disco D_1 puede ser triangulado suavemente con ayuda de las geodésicas. Para difundir la triangulación en los discos que tienen una intersección no vacía con D_1 (por ejemplo, sobre D_2), es suficiente notar que la geodésica perteneciente a $D_1 \cap D_2$, construida antes en D_1 , también se presenta como una geodésica desde el punto de vista del disco D_2 y por eso la triangulación puede ser prolongada en el disco D_2 (anteriormente desmenuzando, probablemente, la triangulación sobre D_1). El proceso se concluye dentro de un número finito de pasos. El lema queda demostrado.

Al principio describamos todos los tipos de variedades bidimensionales. La primera serie es una esfera con g asas M_g^2 ; g es el género

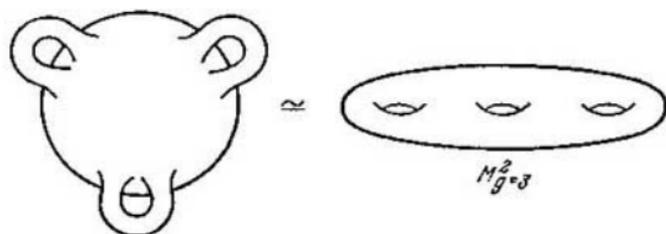


Fig. 4. Esfera con g asas $S^2 + (g) = M_g^2$ (en la figura, $g = 3$).

de la superficie. Por ejemplo, estas variedades aparecen al estudiar las superficies de Riemann de las funciones algebraicas de tipo $w = \pm \sqrt{P_n(z)}$ (el polinomio P_n no tiene raíces múltiples). Recordemos que M_g^2 es igual al conjunto de los ceros de la ecuación $w^2 - P_{2g+1}(z) = 0$ en $CP^2(z, w)$. Estas variedades se puede realizar suavemente en \mathbb{R}^3 como las superficies mostradas en la fig. 4 (véase más detalladamente [1], parte II, § 4).

La segunda serie de las variedades (vamos a designarlas por M_μ^2) se obtiene, si de una esfera S^2 se excluyen los discos D^2 no intersecados de par en par, y en la frontera de cada agujero recubido se identifican los puntos opuestos diametralmente (véase la fig. 5, a). Esta operación se llama «pegadura de la esfera S^2 con μ cintas de Moebius».

En particular, si $\mu = 1$, la superficie M_1^2 es un plano real proyectivo RP^2 (fig. 5, b), si $\mu = 2$, la superficie M_2^2 se llamará superficie (botella) de Klein. Notemos, que en [1], parte II, § 18, la superficie de Klein fue definida como un factor del plano por algún grupo

de movimientos discreto. La coincidencia de su realización con $M_{\mu=2}^2$ es evidente de la fig. 5, c.

A priori tendría derecho a una existencia independiente también una serie «mezclada»: una esfera S^2 a la que están unidas g asas y μ cintas de Moebius. Pero esta serie «mezclada» se contiene íntegramente en la serie M_{μ}^2 . En efecto, consideremos S^2 a la que están unidas un asa y una cinta de Moebius (véase la fig. 6). Pero para la superficie de Klein tiene lugar el difeomorfismo representado en la fig. 7.

De manera que la pegadura a S^2 de un asa y una cinta de Moebius es equivalente a la pegadura a S^2 de tres cintas de Moebius (véase la fig. 8). Por consiguiente, en presencia de por lo menos una cinta de Moebius cada asa puede ser reemplazada difeomorficamente con dos cintas de Moebius.

Como vamos a demostrarlo rigurosamente ahora, las variedades M^2 , en realidad, se escriben íntegramente con esas dos series infinitas: M_2^2 y M_{μ}^2 .

Consideremos una M^2 arbitraria (véase las restricciones al principio de la parte) con una triangulación suave (véase el lema). Cortemos M^2 a lo largo de todas las aristas de esta triangulación, poniendo, de antemano, en ambos lados de cada corte las mismas letras (diferentes para distintos cortes) y fijando la misma orientación en ambas orillas del corte (véase la fig. 9).

De manera que hemos transformado M^2 en un conjunto de triángulos, cuyos lados están designados con letras y está dada la dirección; cada letra se incluye en este conjunto exactamente dos veces, además, dos letras iguales pertenecen a diferentes triángulos. Comencemos un proceso inverso de la pegadura de M^2 , exigiendo, sin embargo, que cada vez después de pegar un nuevo triángulo a una región ya obtenida, esta última permanezca plana. Es evidente que, como resultado de este procedimiento (y de las propiedades indicadas de la numeración de los lados) obtendremos un polígono plano conexo, cuyos lados son connotados con letras y poseen orientaciones (cada letra se encuentra exactamente dos veces). A este polígono lo denominamos polígono fundamental (está definido por una triangulación dada no unívocamente). Fijemos una orientación sobre un polígono W y confrontémosle una palabra, que aparece naturalmente al rondar la frontera de W (comenzando desde cualquier vértice): apuntando consecutivamente las letras que numeran los lados de W , al mismo tiempo, poniendo en la palabra la letra en el grado $+1$, si la orientación del lado coincide con la inducida por la orientación de W , y en el grado -1 , en el caso contrario. Véase el ejemplo en la fig. 10.

Así, hemos confrontado a cada M^2 (no unívocamente) una palabra $W = a_{i_1}^{\epsilon_1} a_{i_2}^{\epsilon_2} \dots a_{i_k}^{\epsilon_k}$; k es un número par de los lados de W ; cada letra a_{α} se incluye en W exactamente dos veces. Estas «palabras»

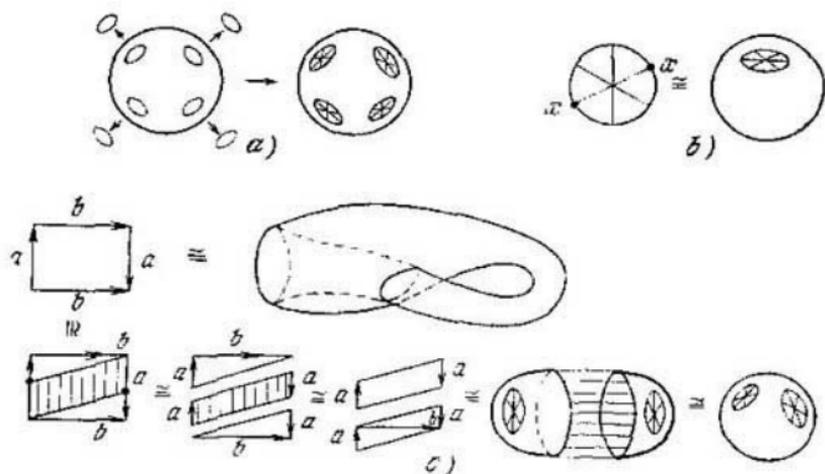


Fig. 5 a) La variedad $M_{\mu}^2 = S^2 + (\mu)$ (en la figura $\mu = 4$), obtenida con la pegadura de la esfera S^2 con μ películas de Moebius;
 b) $M_{\mu=1}^2 = RP^2$, plano proyectivo real;
 c) $M_{\mu=2}^2$ superficie (botella) de Klein.

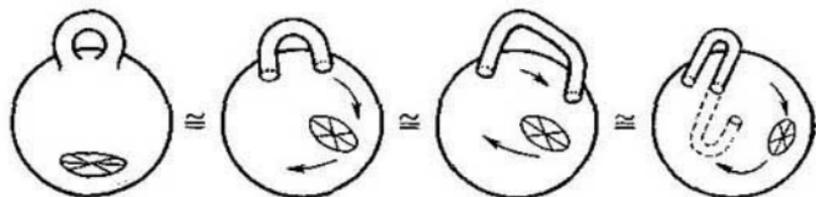


Fig. 6.

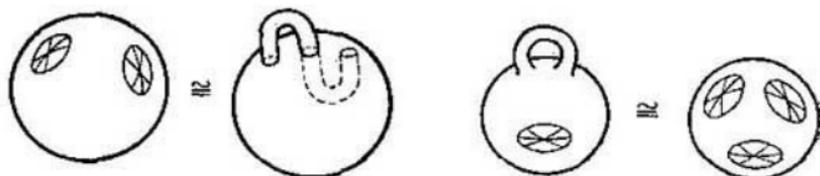


Fig. 7. La esfera S^2 con el asa «vuelta del revés».

Fig. 8.

codifican $\{M^2\}$; a cada M^2 le corresponde un conjunto infinito de tales códigos. Ahora reconstruiremos estos códigos con operaciones elementales (generadores de los homeomorfismos de M^2), para reducirlos a la forma canónica. Resulta que hay sólo tres formas canónicas (precisamente ellas dan clasificación a $\{M^2\}$).

LEMA 3. *La palabra W puede ser reconstruida de tal modo, que todos los vértices de W (es decir, los vértices del polígono) se peguen en un solo punto.*

DEMOSTRACION. Supongamos, que existen por lo menos dos clases de equivalencia no vacías de los vértices: $\{P\}$ y $\{Q\}$. Es posible

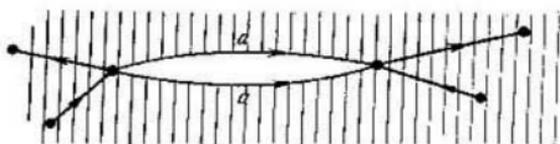


Fig. 9.

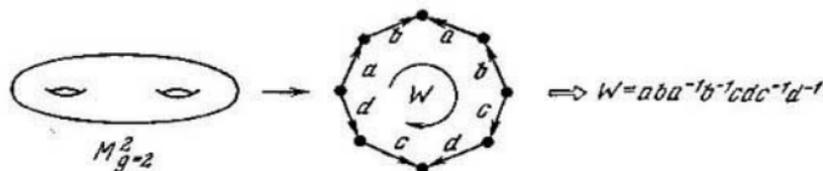


Fig. 10.

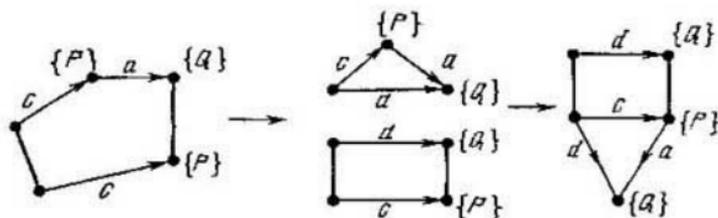


Fig. 11.

considerar que existe tal arista $a \in \partial W$, que sus puntos finales pertenecen a distintas clases: $\{P\}$ y $\{Q\}$. Efectuamos la siguiente operación elemental (véase la fig. 11). (Con segmentos en negrilla están designadas las aristas de ∂W que no nos interesan ahora.)

Es evidente, que esta operación de volver a pegar el polígono W corresponde a un homeomorfismo de M^2 . Por otra parte, esta reconstrucción disminuyó el número de vértices, representantes de la clase $\{P\}$, en uno y aumentó el número de vértices, representantes de la

clase $\{Q\}$, en uno: $(\{P\}, \{Q\}) \rightarrow (\{P\} - 1; \{Q\} + 1)$. De manera que extirminamos paulatinamente la clase $\{P\}$, «pasando» los vértices de esta clase a otras. El último paso será la operación del exterminio del último vértice de la clase $\{P\}$ (véase la fig. 12). (Notemos, que en el proceso del exterminio de la clase $\{P\}$, las clases $\{Q\}$, a los cuales se pasan los vértices de la clase $\{P\}$, pueden transformarse.) El polígono (o la palabra) W que tiene sólo una clase de vértices, se llama, habitualmente, «reducido».

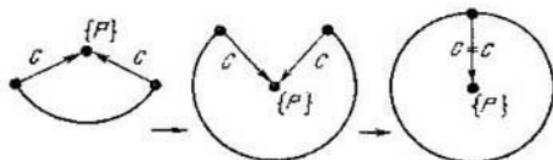


Fig. 12.

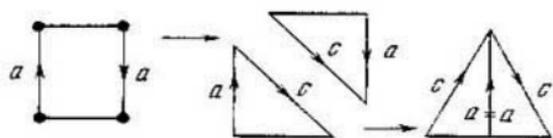


Fig. 13.

LEMA 4. Sea que la palabra W tiene la forma $W = -aa^{-1} -$. Entonces existe un homeomorfismo que transforma la palabra W en una palabra equivalente $W' = -1 -$.

DEMOSTRACIÓN. Véase la fig. 12.

LEMA 5. $W = -a - a - \simeq W' = -aa -$.

DEMOSTRACIÓN. Véase la fig. 13. Queda volver a designar a c por a . El lema queda demostrado.

LEMA 6. $W = -a - b - a^{-1} - b^{-1} - \simeq W' = -aba^{-1}b^{-1} -$.

DEMOSTRACIÓN. Véase la fig. 14. El lema está demostrado.

LEMA 7. Si $W = -a \alpha a^{-1} -$, donde el conjunto de letras $\alpha \neq \emptyset$, entonces existe un $b \in \alpha$ tal, que $b^{-1} \notin \alpha$:

$$W = - \underbrace{a - b - a^{-1}}_{\alpha} - b^{-1} -$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario: sea para cualquier $b \in \alpha$, $b^{-1} \in \alpha$. Pero entonces, en un conjunto de vértices de W aparecen, por lo menos, dos clases de vértices no equivalentes, ya que los vértices $\in \alpha$, interactúan (pegan) sólo con los vértices $\in \alpha$ (véase la fig. 15). Como $\alpha \neq \emptyset$ y $W \setminus \{a \cup a^{-1}\} \neq \emptyset$ (véase el lema 4), obtenemos una contradicción con la afirmación del lema 3, según

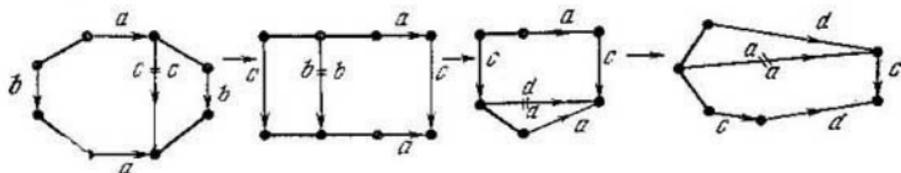
el cual consideramos W un polígono reducido. El lema queda demostrado.

LEMA 8. $W = -aba^{-1}b^{-1} - cc - \simeq W' = -a^2 - b^2 - c^2$

DEMOSTRACION. Véase la fig. 16. El lema 8 se deduce definitivamente del lema 5.

Así hemos demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 3 (sobre la clasificación de las superficies bidimensionales). *Cualquiera variedad M^2 bidimensional suave compacta conexa*



$$\begin{array}{c}
 W' = -dca^{-1}c^{-1}- \\
 \parallel \quad \downarrow \downarrow \\
 \tilde{W}' = -aba^{-1}b^{-1}-
 \end{array}$$

Fig. 14.

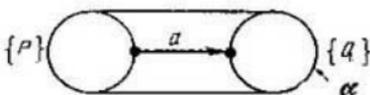


Fig. 15.

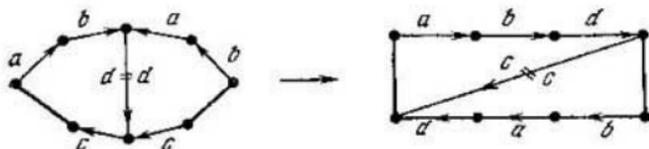


Fig. 16.

cerrada es difeomorfa a una de las variedades determinadas con las siguientes palabras (códigos) W :

- 1) $W = aa^{-1}$;
- 2) $W = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}, a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$;
- 3) $W = c_1^2c_2^2 \dots c_\mu^2$.

Cualquier variedad suave bidimensional conexa compacta con borde, se obtiene de un disco bidimensional D^2 según las siguientes operaciones: a) con exclusión de un número finito de puntos (es decir, de un número finito de discos con radios suficientemente pequeños);

b) con pegadura de un número finito de asas; c) con pegadura de un número finito de cintas de Moebius. Con todo esto, las operaciones enumeradas no deben tocar la frontera del disco inicial D^2 .

Describamos más detalladamente la estructura de las variedades M^2 en concordancia con esta clasificación.



Fig. 17.

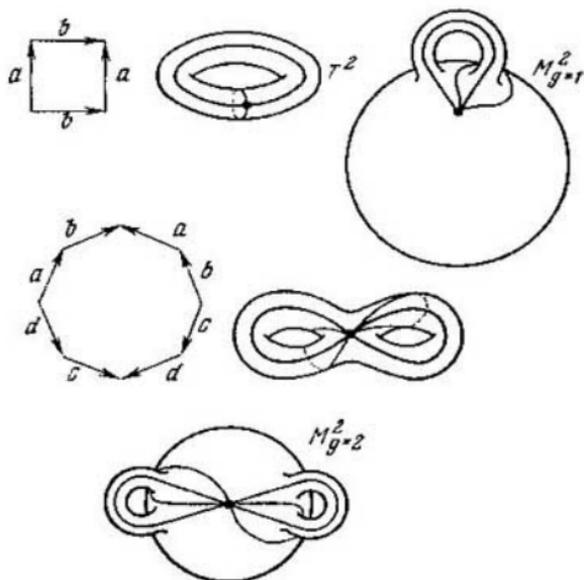


Fig. 18.

La variedad del tipo 1) es difeomorfa a la esfera S^2 (véase la fig. 17).

La variedad del tipo 2) es difeomorfa a la esfera S^2 con g asas (las variedades orientables M_g^2). Véase la fig. 18.

La variedad del tipo 3) es difeomorfa a la esfera S^2 con cintas de Moebius (las variedades no orientables M_μ^2). Véase la fig. 19.

OBSERVACION 1. El cálculo de los grupos de homología de las variedades del tipo 1), 2), 3) (por ejemplo, con coeficientes enteros)

es un ejercicio elemental. El cálculo muestra que todas las formas canónicas enumeradas no son homeomorfas entre sí.

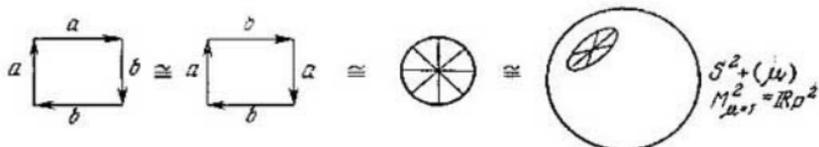


Fig. 19.

OBSERVACION 2. También hay otros métodos cómodos para codificar $\{M^2\}$. Cualquier M^2 puede ser representada de la siguiente forma:

$$W = a_1 a_2 \dots a_N a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{N-1}^{-1} a_N^\varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

donde $\varepsilon = -1$ si, y sólo si, $M^2 = M_g^2$ es una variedad orientable (entonces $N = 2g$ es par); $\varepsilon = +1$ (para cualquier N) si, y sólo si, $M^2 = M_\mu^2$ es no orientable.

DEMOSTRACION. Consideremos el caso $M_g^2: W = a_1 \dots a_N a_1^{-1} \dots a_{N-1}^{-1} a_N^{-1}; N = 2g$. Con ayuda de transformaciones elementales

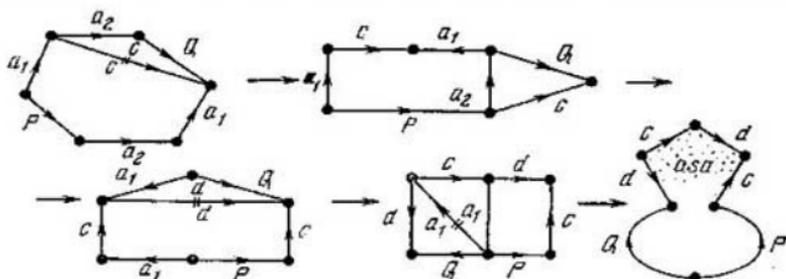


Fig. 20.

(véanse más arriba los lemas 3—8) llevamos W a la forma canónica M_g^2 (véase el teorema precedente). Esta reducción la realizamos desmenujando consecutivamente las asas estandarizadas del tipo $aba^{-1}b^{-1}$. Consideremos

$$W = a_1 a_2 a_3 \dots a_N a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} \dots a_N^{-1}.$$

$\begin{array}{ccccccc}
 \parallel & \parallel & \underbrace{\quad \quad \quad} & \parallel & \parallel & \underbrace{\quad \quad \quad} & \\
 a & b & Q & a^{-1} & b^{-1} & P & \\
 \end{array}$

Luego véase la fig. 20.

De manera que destacamos la primera asa en forma explícita: $a^{-1}cd c^{-1}$ pero cambiando, al mismo tiempo, los segmentos P y Q .

Siguiendo la operación de destacar las asas y recordando que $N = 2g$ es par, obtenemos una palabra $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \simeq \simeq M_g^2$. Así presentamos todas las variedades orientables. Para el «caso orientado» el teorema queda demostrado. Para el «caso no orientable» la demostración es completamente análoga (véase los lemas 3—8), y por eso la dejamos a cargo del lector.

§ 4. Operación de pegadura de célula a un espacio topológico. Espacios celulares. Teoremas sobre reducción de los espacios celulares. Homología y el grupo fundamental de superficies y algunas otras variedades.

Sean: X , un espacio topológico; D^n , un disco n -dimensional; $S^{n-1} = \partial D^n$, su frontera, una esfera $(n - 1)$ -dimensional. Consideramos fijada la orientación del disco D^n ; esta orientación induce la orientación de la frontera S^{n-1} . Sea dada la aplicación de esta esfera en el espacio X :

$$f: S^{n-1} \rightarrow X \quad (1)$$

Construimos un nuevo espacio $D^n \cup_f X$, identificando cada punto x sobre la esfera S^{n-1} con un punto $f(x)$ en el espacio X . Se dice que el espacio $D^n \cup_f X$ se obtiene del espacio X mediante pegadura de una célula n -dimensional (D^n, f) .

La topología se introduce en el espacio $D^n \cup_f X$ de la siguiente manera. Al conjunto $K \subset D^n \cup_f X$ lo llamaremos cerrado, si su intersección $K \cap X$ es cerrada y una preimagen completa $K \cap D^n$ es cerrada en el disco D^n .

EJEMPLO 1. La esfera S^n se obtiene de un punto $*$ mediante la pegadura de una célula n -dimensional: $S^n = D^n \cup_f *$, donde $f: S^{n-1} \rightarrow *$, es una aplicación en un punto.

EJEMPLO 2. Un espacio real proyectivo $\mathbb{R}P^n$ puede ser considerado como un disco D^n que tiene pegados los puntos diametralmente opuestos en la frontera S^{n-1} . Nótese que la esfera S^{n-1} con los puntos identificados diametralmente opuestos, es $\mathbb{R}P^{n-1}$. Por consiguiente, $\mathbb{R}P^n$ puede considerarse como $\mathbb{R}P^{n-1}$ con una célula n -dimensional pegada

$$\mathbb{R}P^n = D^n \cup_{f_n} \mathbb{R}P^{n-1}. \quad (2)$$

Aquí la aplicación $f_n: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ es un cubrimiento estándar.

Lema 1. Si las aplicaciones $f, g: S^{n-1} \rightarrow X$ son homotópicas, entonces los espacios $D^n \cup_f X$ y $D^n \cup_g X$ son equivalentes homotópicamente.

DEMOSTRACIÓN. Que la aplicación $F: S^{n-1} \times I \rightarrow X$ de la homotopía de las aplicaciones f y g , donde I es un segmento unidad. Pega-

mos al espacio X el producto $D^n \times I$ por la aplicación F de una parte de su frontera:

$$\hat{X} = (D^n \times I) \cup_F X. \quad (3)$$

Entonces los espacios $D^n \cup_f X$ y $D^n \cup_g X$ se encuentran en \hat{X} :

$$D^n \cup_f X = ((D^n \times 0) \cup_F X) \subset \hat{X}, \quad D^n \cup_g X = ((D^n \times 1) \cup_F X) \subset \hat{X}. \quad (4)$$

Sea φ_t una homotopía, que aprieta $D^n \times I$ sobre $D^n \cup S^{n-1} \times I$ por los rayos trazados del punto $*$ (véase la fig. 21). La homotopía

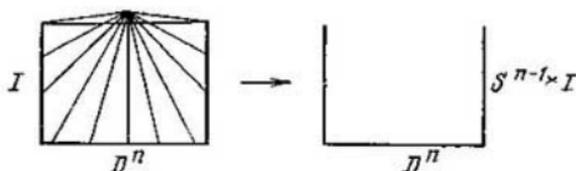


Fig. 21.

φ_t es constante sobre $D^n \cup S^{n-1} \times I$, por eso determina una equivalencia homotópica $\hat{X} \sim D^n \cup_f X$. Análogamente, $\hat{X} \sim D^n \cup_g X$. El lema queda demostrado.

DEFINICIÓN 1. Al espacio X se lo llamaremos *celular*, si el mismo está obtenido de un conjunto finito de puntos mediante la iteración de la operación de pegar las células de diferentes dimensiones.

El conjunto inicial de puntos también puede considerarse como células 0-dimensionales.

OBSERVACIÓN. Para los espacios celulares con un número de células infinito, exigiremos que tengan un número finito de células en cada dimensión.

DEFINICIÓN 2. Un espacio celular X se denomina *complejo celular*, si cada célula está pegada a células de una dimensión menor.

A la unión de todas las células de dimensión $k \leq n$ la llamaremos *armazón celular n -dimensional* del complejo X . Designamos el *armazón celular n -dimensional* del complejo X mediante X_n . Obtenemos un sistema de los armazones sumergidos (encajados)

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \dots \subset X. \quad (5)$$

OBSERVACIÓN. Un complejo simplicial es un caso particular de un complejo celular. Un *armazón n -dimensional* de un complejo simplicial, es el conjunto de todos sus *simplex* hasta una dimensión n inclusive.

TEOREMA 1. *Cualquier espacio celular es equivalente homotópicamente a un complejo celular.*

DEMOSTRACION. Basta mostrar que cada aplicación de una esfera S^k en un complejo celular Y es homotópica a la aplicación de S^k en su armazón k -dimensional Y_k . Entonces, en vigor del lema 1, el resultado de cada pegadura de una célula será homotópicamente equivalente a un complejo celular.

Así, sean: Y , un complejo celular; $f: S^k \rightarrow Y$ una aplicación. La imagen de la esfera S^k al aplicar f se interseca sólo con un número finito de células. Si la imagen $f(S^k)$ se interseca con el interior de alguna célula D^n , donde $n > k$, entonces esta parte de la imagen puede ser desplazada en la frontera. Efectivamente, la aplicación f

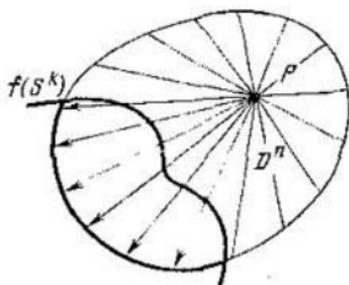


Fig. 22.

sobre una preimagen entera del interior de la célula $f^{-1}(D^n)$ puede ser sustituida por una aplicación suave, homotópica a ella (véase [1], parte II, § 12), y por el teorema de Sard esta imagen no cubre por lo menos un punto interior P en D^n . Al proyectar $D^n \setminus P$ del punto P en la frontera, desplazamos una parte de la imagen $f(S^k)$ en la frontera, o sea, en el armazón Y_{n-1} (véase la fig. 22).

Repetiendo este razonamiento para todas las células con una dimensión mayor que k , al fin y al cabo apretaremos la imagen $f(S^k)$ en el armazón Y_k del complejo Y . Así el teorema está demostrado íntegramente.

DEFINICIÓN 3. Una aplicación $f: X \rightarrow Y$ de los complejos celulares se llama *celular*, si traslada un armazón k -dimensional X_k de un complejo X en un armazón k -dimensional Y_k de un complejo Y (para cualquier k).

TEOREMA 2. *Cualquier aplicación continua de los complejos celulares es homotópica a una aplicación celular.*

La demostración de este teorema (teorema sobre la «aproximación celular») es totalmente análoga a la del teorema 1, por eso la dejamos al lector como ejercicio.

Sean: X , un complejo celular; X_{k-1} y X_{k-2} , sus armazones $(k-1)$ -dimensional y $(k-2)$ -dimensional. Nótese que el espacio X_{k-1}/X_{k-2} , donde X_{k-2} está identificado en un punto, es simplemente

un ramo de esferas $(k-1)$ -dimensionales (una para cada célula D^{k-1}). A la pegadura de una célula k -dimensional (D^k, f) le corresponde la aplicación

$$S^{k-1} \xrightarrow{f} X_{k-1} \rightarrow X_{k-1}/X_{k-2} \quad (6)$$

de la esfera S^{k-1} en el ramo de las esferas $(k-1)$ -dimensionales.

Sean $\sigma^k = (D^k, f)$, $\sigma_i^{k-1} = (D^{k-1}, f_i)$ células de dimensiones k y $(k-1)$. Definimos el "coeficiente de incidencia" o sea el número $[\sigma^k : \sigma_i^{k-1}]$ para el par de células σ^k y σ_i^{k-1} , como el grado de la aplicación (6) sobre el i -ésimo sumando del ramo X_{k-1}/X_{k-2} (la esfera S_i^{k-1} , correspondiente a la célula σ_i^{k-1}).

Definimos ahora un complejo de cadenas celulares del complejo X designado por $C(X; G) = \sum_{h \geq 0} C_h(X; G)$. Una cadena celular de la dimensión k es una combinación de células formal lineal: $c_k = \sum_i g_i \sigma_i^k$, donde σ_i^k son células de la dimensión k , g_i son elementos de un grupo G abeliano arbitrario escrito aditivamente. Definimos un operador de frontera por la fórmula

$$\partial \sigma^k = \sum_i [\sigma^k : \sigma_i^{k-1}] \sigma_i^{k-1}, \quad \partial : C_k(X; G) \rightarrow C_{k-1}(X; G). \quad (7)$$

(El operador ∂ se prolonga linealmente en cualesquiera cadenas.)

OBSERVACIÓN 1. Si X es un complejo simplicial, entonces el operador ∂ definido aquí coincide con un operador de frontera del § 3 (verifíquese).

OBSERVACIÓN 2. Para $G = \mathbb{Z}$ (cadenas con coeficientes enteros) tenemos una aplicación $\pi_k(X_k, X_{k-1}) \xrightarrow{\alpha} C_k(X; \mathbb{Z})$ sobre todo el grupo de cadenas.

LEMA 2. $\partial \partial = 0$.

DEMOSTRACION. Se puede considerar que cada célula $\sigma_i^k : D^k \rightarrow X_k$ representa un elemento $[\sigma_i^k]$ de un grupo relativo $\pi_k(X_k, X_{k-1})$ (véase [1], parte II, § 24). El operador de frontera ∂ está engendrado por el homomorfismo de frontera de la sucesión exacta del par (X_k, X_{k-1})

$$\partial : \pi_k(X_k, X_{k-1}) \rightarrow \pi_{k-1}(X_{k-1}) \quad (8)$$

y por el homomorfismo $j : \pi_{k-1}(X_{k-1}) \rightarrow \pi_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2})$ (véase [1], parte II, § 24). Tenemos para σ_i^k , que es una cadena de $C_k(X; \mathbb{Z})$:

$$\partial(\sigma_i^k) = \alpha(j\partial[\sigma_i^k]) \in C_{k-1}(X; \mathbb{Z}). \quad (9)$$

En vigor de la identidad $\partial j \equiv 0$ obtenemos $\partial \partial \equiv 0$ para las cadenas con coeficientes enteros. Las células σ_i^h dan una base también para las cadenas con cualquier grupo de coeficientes G . El lema queda demostrado.

Ahora es posible determinar las homología y cohomología de un complejo de las cadenas celulares de una manera ordinaria. Obtendremos las homología y cohomología celulares. Para los complejos simpliciales estas homología coinciden con las simpliciales.

Ejemplos de los complejos celulares.

EJEMPLO 1. Esfera S^n . Ya hemos visto que la esfera S^n se obtiene mediante la pegadura de una célula n -dimensional σ^n a otra de dimensión nula σ^0 . Aquí tenemos: $\partial \sigma^0 = 0$, $\partial \sigma^n = 0$. Lo último es evidente para todos los $n > 1$. Para $n = 1$ la frontera de una célula σ^1 es una esfera de dimensión nula S^0 (un par de puntos), además, estos dos puntos son de signo distinto.

Da aquí obtenemos:

$$\begin{aligned} H_0(S^n; G) &= G, & n \geq 1, \\ H_n(S^n; G) &= G, \\ H_k(S^n; G) &= 0, & k \neq 0, n. \end{aligned} \quad (10)$$

Si hay un ramo q de las esferas S_j^n , $n \geq 1$, $j = 1, 2, \dots, q$, unidas en un punto, entonces hay un vértice σ^0 y q células n -dimensionales $\sigma_1^n, \dots, \sigma_q^n$, donde $\partial \sigma_i^n = 0$. A tal ramo se reduce un dominio obtenido de un espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} mediante la exclusión de un conjunto de q puntos. Designemos a este ramo por K_q^n . Tenemos:

$$\begin{aligned} H_0(K_q^n; G) &= G, \\ H_n(K_q^n; G) &= G + G + \dots + G \text{ (} q \text{ piezas)} \\ H_l(K_q^n; G) &= 0, & l \neq 0, n. \end{aligned} \quad (11)$$

EJEMPLO 2. La partición celular del toro. Aquí tenemos células $\sigma^0, \sigma_1^1, \sigma_2^1, \sigma^2$ (véase la fig. 23), además, $\partial \sigma^0 = \partial \sigma_1^1 = \partial \sigma_2^1 = \partial \sigma^2 = 0$;

$$H_0(T^2) = G, \quad H_1(T^2) = G + G, \quad H_2(T^2) = G. \quad (12)$$

EJEMPLO 3. La superficie (botella) de Klein tiene las siguientes células: $\sigma^0, \sigma_1^1, \sigma_2^1, \sigma^2$ (véase la fig. 24), al mismo tiempo $\partial \sigma^0 = \partial \sigma_1^1 = \partial \sigma_2^1 = 0$, $\partial \sigma^2 = 2\sigma_1^1$

$$\begin{aligned} H_0(K^2; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}, & H_2(K^2; \mathbb{Z}) &= 0, & H_1(K^2; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2; \\ & & H_2(K^2; \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2. \end{aligned} \quad (13)$$

EJEMPLO 4. La superficie proyectiva $\mathbb{R}P^2$. Aquí tenemos 3 células: $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2$; $\partial\sigma^0 = \partial\sigma^1 = 0, \partial\sigma^2 = 2\sigma^1$ (véase la fig. 25), $H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2, H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = 0$. (14)

EJEMPLO 5. Una superficie orientable del género g : tenemos un $4g$ -ágono (véase la fig. 26 para $g = 2$). Las células: $\sigma^0, \sigma_1^1, \dots, \dots, \sigma_{2g}^1, \sigma^2$. Son nulas las fronteras de todas las células. Tenemos

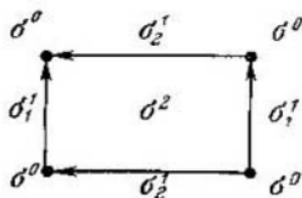


Fig. 23. Toro.

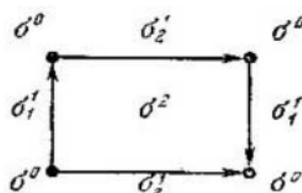


Fig. 24. Superficie de Klein.

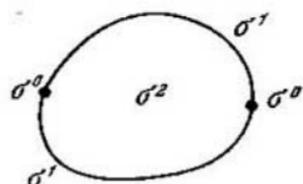


Fig. 25. Plano proyectivo.

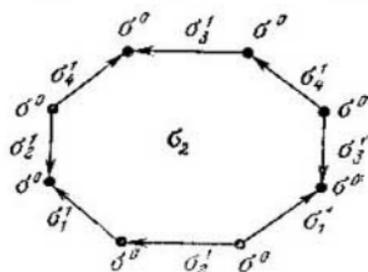


Fig. 26. Rosquilla.

las homologías ($G = \mathbb{Z}$): $H_0 = \mathbb{Z}, H_1 = \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}$ ($2g$ sumandos).

EJEMPLO 6. Un espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$. Hemos visto más arriba que $\mathbb{R}P^n = D^n \cup_{f_n} \mathbb{R}P^{n-1}$, donde $f_n: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ es un cubrimiento estándar. Obtenemos por una célula $\sigma^k = (L_k, f_k)$ en cada dimensión k : $\sigma^0, \dots, \sigma^n$. Mostremos que $\partial\sigma^{2h+1} = 0, \partial\sigma^{2h} = 2\sigma^{2h-1}$. La aplicación de la frontera S^m de una célula σ^{m+1} en un armazón m -dimensional de un espacio proyectivo, es un cubrimiento estándar $S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$. Por eso es necesario calcular el grado de la aplicación

$$S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^m/\mathbb{R}P^{m-1} = S^m. \quad (15)$$

Esta aplicación se representa en la figura 27. Es una suma (en el sentido del grupo $\pi_m(S^m)$) de dos aplicaciones S^m en S^m . Para m impar estas dos aplicaciones tienen grado $+1$, por eso $\partial\sigma^{m+1} = 2\sigma^m$. Si m es par, los signos de los grados son opuestos y $\partial\sigma^{m+1} = 0$.

Así obtenemos una forma de homología del espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ para $G = \mathbb{Z}$ y $G = \mathbb{Z}_2$:

$$a) H_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \mathbb{Z}, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad (16)$$

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & k = 2l \\ \mathbb{Z}_2, & k = 2l + 1, \text{ donde } 0 < k < n. \end{cases}$$

$$b) H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (17)$$

EjemPlo 7. El espacio complejo proyectivo $\mathbb{C}P^n$. Sean (z_0, \dots, z_n) coordenadas homogéneas en $\mathbb{C}P^n$. La ecuación $z_0 = 0$

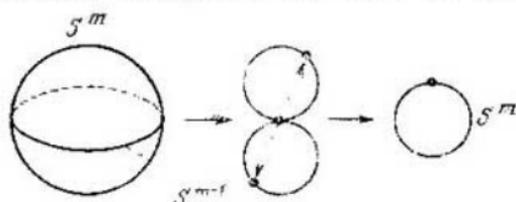


Fig. 27.

determina en $\mathbb{C}P^n$ una subvariedad coincidente con $\mathbb{C}P^{n-1}$. La diferencia $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$ es un espacio complejo n -dimensional \mathbb{C}^n (con las coordenadas $z_1/z_0, \dots, z_n/z_0$). Por eso la diferencia $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$ determina una célula $2n$ -dimensional σ^{2n} . Continuando este proceso obtendremos la partición del espacio complejo proyectivo $\mathbb{C}P^n$ en las células de dimensión par $\sigma^0, \sigma^2, \dots, \sigma^{2n}$. Es evidente que aquí todas las fronteras son nulas. Por eso $H_{2k}(\mathbb{C}P^n; G) = G$, $0 \leq k \leq n$, $H_{2k+1}(\mathbb{C}P^n; G) = 0$.

Los complejos celulares convienen para calcular homotopías. Recordemos que a un espacio X lo llamaremos n -conexo, si es linealmente conexo y todos los grupos $\pi_i(X) = 0$, cuando $i \leq n$.

TEOREMA 3. Todo complejo celular n -conexo K es equivalente homotópicamente a un complejo celular \tilde{K} con vértice único σ^0 y sin las células de dimensiones $1, 2, \dots, n$.

Antes de demostrar el teorema consideremos dos ejemplos.

EjemPlo 8. Sea $n = 0$. La reducción del complejo linealmente conexo K al \tilde{K} con un vértice es así: si se tiene una arista σ_1^1 (una célula unidimensional), cuya frontera $\partial\sigma_1^1 = \sigma_{1i}^0 \cup \sigma_{2i}^0$ se compone de dos vértices distintos, $\sigma_{1i}^0 \neq \sigma_{2i}^0$, entonces ponemos la identificación, reduciendo toda la arista σ_1^1 a un punto $\tilde{\sigma}_{1i}^0 = \tilde{\sigma}_{2i}^0$ que será un vértice. Las demás células no las cambiamos. Se obtiene un nuevo complejo K' con un menor número de vértices, etc., hasta que lleguemos a un complejo con un vértice. Los complejos K y K' son homotó-

picamente equivalentes (la demostración se da más abajo). Como resultado, obtenemos el complejo \tilde{K} con un vértice $\tilde{\sigma}^0$, 1-célula $\tilde{\sigma}_1^1$ y 2-célula $\tilde{\sigma}_2^2$. El 1-armazón \tilde{K}_1 es un ramo de circunferencias $\tilde{\sigma}_i^1$: $\tilde{K}_1 = S^1 \vee \dots \vee S^1_N$, donde N es un número 1-célula $\tilde{\sigma}_i^1$, $i = 1, \dots, N$. Un grupo $\pi_1(\tilde{K}_1)$ es libre con generatrices $\{\tilde{\sigma}_i^1\} = a_i$ (véase [1], parte II, § 19). Las células $\tilde{\sigma}_i^2$ se pegan mediante las aplicaciones de una frontera $S^1 = \partial\tilde{\sigma}_i^2 \rightarrow \tilde{K}_1$, que dan algunos elementos V_j de un grupo libre $\pi_1(\tilde{K}_1)$ con las generatrices a_1, \dots, a_N . Así, el grupo $\pi_1(K)$ es dado por las generatrices a_1, \dots, a_N y las relaciones $V_j = 1$ para todas las σ_i^2 2-celulares en el complejo \tilde{K} (con un vértice). Pasando a un grupo $H_1(K; \mathbb{Z})$ obtenemos los ciclos básicos $[a_1], \dots, [a_N]$ y las relaciones $V_j = 0$ (en una escritura aditiva) en un grupo conmutado. De este modo se verifica la definición del grupo de homologías $H_1(K; \mathbb{Z}) = \pi_1(K)/[\pi_1(K), \pi_1(K)]$ dada en [1], parte II, § 19.

EJEMPLO 9. Si $n > 0$, entonces los grupos $H_{n+1}(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ y $\pi_{n+1}(\tilde{K})$ son conmutativos. Ellos son dados por las mismas generatrices a_i , es decir, por las $\tilde{\sigma}_i^{n+1}$ ($n+1$)-células en \tilde{K} ($i = 1, \dots, N$) y por las relaciones iguales de las fronteras de las σ_i^{n+2} ($n+2$)-células. Obtenemos el:

COROLARIO (teorema de Hurewicz). *Tiene lugar la igualdad $\pi_{n+1}(K) = H_{n+1}(K, \mathbb{Z})$ para un complejo n -conexo ($n > 0$).*

DEMOSTRACION. Cada aplicación de una esfera ($n+1$)-dimensional en un complejo celular K , es homotópica a una aplicación en un armazón ($n+1$)-dimensional (véase el teorema 2). Por eso, cualquiera aplicación de este tipo se representa en forma de combinación lineal con los coeficientes enteros de las células σ_i^{n+1} en K ($i = 1, \dots, N$). Cada relación $\sum \lambda_i \sigma_i^{n+1} \sim 0$ en el grupo $\pi_{n+1}(K)$ es una aplicación de un disco D^{n+2} en un complejo K tal, que su restricción en la frontera S^{n+1} es una combinación lineal $\sum \lambda_i \sigma_i^{n+1}$.

Semejante aplicación es homotópica a una aplicación que traslada D^{n+2} a un armazón de dimensión $n+2$; además la homotopía es constante en la frontera S^{n+1} (la demostración es completamente análoga a la del teorema 1). Por eso, cada relación de la forma $\sum \lambda_i \sigma_i^{n+1}$ es homotópica a cero en el grupo $\pi_{n+1}(K)$, es equivalente a la relación $\sum \lambda_i \sigma_i^{n+1}$ es homológica a cero en el grupo $H_{n+1}(K; \mathbb{Z})$. El corolario queda demostrado.

PROBLEMA 1. Demuestre la afirmación inversa. Sea K un complejo celular conexo, simplemente conexo. Si $H_n(K; \mathbb{Z}) = 0$,

cuando $0 < k < n$, entonces $\pi_k(K) = 0$ con los mismos k y $\pi_n(K) = H_n(K; \mathbb{Z})$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3. Fijamos un vértice σ^0 y lo unimos con los demás vértices σ_i^1 mediante las vías (curvas) γ_i . Se puede considerar que todas estas vías se encuentran en un armazón unidimensional del complejo K . Peguemos al complejo K semicírculos por cada vía γ_i . Obtendremos un nuevo complejo celular \hat{K} , que contiene al complejo K y, además, las células σ_i^1 y σ_i^0 (véase la fig. 28). Los interiores de las células σ_i^1 no se intersecan, por eso la

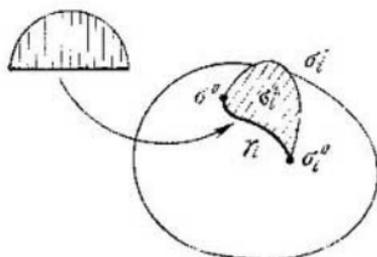


Fig. 28.

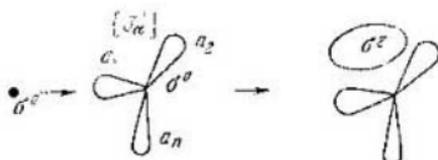


Fig. 29.

unión de ellas está contraída en \hat{K} . Así, un espacio cociente $\tilde{K} = \hat{K} / \bigcup_i \sigma_i^1$ obtenido mediante contracción de todas las células σ_i^1 en σ^0 es equivalente homotópicamente a \hat{K} . Por otro lado, el complejo \hat{K} se contrae en K (el semicírculo se contrae en el diámetro), por eso $K \sim \hat{K} \sim \tilde{K}$. El complejo \tilde{K} tiene exactamente una célula 0-dimensional (vértice).

Luego, sea que el complejo K tiene un vértice y ya no contiene células de dimensión 1, 2, ..., $k-1$, $k < n$. Entonces un armazón k -dimensional del complejo K es un ramo de esferas k -dimensionales S_i^k . Cada esfera S_i^k es homotópica a cero en K en virtud de la n -conexión, por eso es posible pegarla por un disco D^{k+1} (se puede considerar que el disco D^{k+1} se encuentra en un armazón $(k+1)$ -dimensional del complejo K). Peguemos a la aplicación del disco D^{k+1} un disco D^{k+2} (por la mitad de la frontera). De este modo obtendremos un complejo \hat{K} equivalente homotópicamente a K , que contiene por una célula excesiva σ_i^{k+1} y σ_i^{k+2} en cada célula k -dimensional en K . El conjunto de las células σ_i^{k+1} es contraíble en \hat{K} , por eso $\tilde{K} = \hat{K} / \bigcup_i \sigma_i^{k+1} \sim \tilde{K} \sim K$. El complejo \tilde{K} es equivalente homotópicamente a K y no tiene células de la dimensión 1, 2, ..., $k-1$, k . El teorema 3 queda demostrado.

El teorema de la clasificación de las superficies cerradas (véase el § 3) permite indicar una representación estándar M^2 en forma de un conjunto de células: $M^2 = \sigma^0 \cup (\bigcup_{\alpha} S_{\alpha}^1) \cup \sigma^2$, donde σ^0 es un punto; a él está pegado un ramo de circunferencias $\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^1$ y después a este ramo, en concordancia con una palabra W , se pega el disco D^2 (una célula bidimensional σ^2) (véase la fig. 29). Un caso especial de M_g^2 cuando $g = 1$ se muestra en la fig. 30.

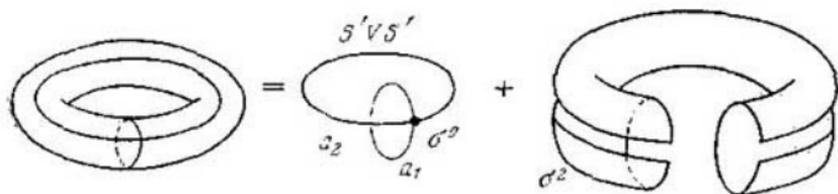


Fig. 30.

De manera que las circunferencias $\{S_{\alpha}^1\}$ se pueden numerar con las letras a_1, a_2, \dots, a_n ($n = 2g$ para M_g^2 y $n = \mu$ para M_{μ}^2) y un polígono fundamental W se puede identificar con una célula bidimensional σ^2 . Como un grupo $\pi_1(\bigvee_{\alpha=1}^n S_{\alpha}^1)$ es libre con generatrices a_1, \dots, a_n , la pegadura de una célula σ^2 por la palabra $W = a_{i_1}^{e_1} \dots a_{i_n}^{e_n}$ introduce una única relación en $\pi_1(M^2)$.

Así, un grupo fundamental $\pi_1(M^2)$ admite la siguiente representación por las generatrices y relaciones:

$$\pi_1(M^2) = \begin{cases} 1 \text{ para } S^2; \\ a_1, b_1, \dots, a_g, b_g; \\ W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \text{ para } M_g^2, \\ a_1, \dots, a_{\mu}; \quad W = a_1^2 a_2^2 \dots a_{\mu}^2 = 1 \text{ para } M_{\mu}^2. \end{cases} \quad (18)$$

PROBLEMA 2. Demostrar el isomorfismo de los siguientes grupos, correspondientes a diferentes representaciones de $\pi_1(M^2)$:

1. a) $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g; \quad W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$.
- b) $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \dots, \bar{a}_g \bar{b}_g; \quad \bar{W} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_g \bar{b}_1 \dots \bar{b}_g \bar{a}_1^{-1} \bar{b}_1^{-1} \dots \bar{a}_g^{-1} \bar{b}_g^{-1}$.
2. a) $a_1, \dots, a_{\mu}; \quad W = a_1^2 \dots a_{\mu}^2$.
- b) $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \dots, \bar{a}_k, \bar{b}_k; \quad \bar{W} = \bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{a}_1^{-1} \bar{b}_1^{-1} \dots \bar{a}_k \bar{b}_k \bar{a}_k^{-1} \bar{b}_k^{-1}, \quad k = \mu/2, \quad \mu \text{ es par.}$
- c) $\mu \text{ es arbitrario; } \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{\mu}; \quad \bar{W} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_{\mu} \bar{a}_1^{-1} \dots \bar{a}_{\mu-1}^{-1} \bar{a}_{\mu}$.

PROBLEMA 3. Demostrar que para diferentes superficies, los grupos $\pi_1(M^2)$, e incluso $(H_1(M^2) = \pi_1/[\pi_1, \pi_1])$ son no isomorfos.

PROBLEMA 4. Clasificar todas las superficies bidimensionales suaves conexas (no compactas).

PROBLEMA 5. Demostrar que la igualdad a cero del índice de la intersección de cualesquiera dos ciclos unidimensionales es la condición necesaria y suficiente para la realización de una variedad bidimensional orientable suave conexa M^2 (abierta o con frontera) en forma de un dominio plano. (La variedad bidimensional plana es orientable automáticamente).

PROBLEMA 6. Para que la variedad bidimensional abierta M^2 sea homeomorfa a un dominio abierto en una variedad bidimensional compacta cerrada, es necesario y suficiente que un grupo $H_1(M^2; \mathbb{Z})$ (o $\pi_1(M^2)$) tenga un número finito de generatrices. Demuéstrelo.

PROBLEMA 7. Demostrar que cualquiera variedad abierta conexa bidimensional M^2 tiene un grupo fundamental libre, y que tal variedad M^2 es equivalente homotópicamente a un ramo finito $\bigvee_{i=1}^k S^1$ ($k < \infty$), o bien a un ramo infinito de las circunferencias $\bigvee_{i=1}^{\infty} S^1$.

OBSERVACION. Se puede introducir una métrica de Riemann de curvatura constante sobre cada variedad compacta conexa suave cerrada bidimensional. Con esto, sobre la esfera S^2 y el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ se puede introducir una métrica de curvatura constante positiva (esta afirmación es evidente); sobre el toro y sobre la superficie de Klein se puede introducir una métrica de curvatura nula. La existencia de semejante métrica sobre el toro sigue de la representación: $T^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$, donde el grupo $\Gamma = \mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b)$ tiene dos generatrices a, b , que actúan sobre \mathbb{R}^2 como traducciones. Está claro que el grupo Γ está representado por las isometrías de un plano euclídeo \mathbb{R}^2 . Una situación análoga tiene lugar también en el caso de la superficie de Klein, que admite la representación de la forma \mathbb{R}^2/Γ , donde un grupo de movimientos Γ está engendrado por las transformaciones

$$T_1(x, y) = (x, y + 1), \quad T_2(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}, -y\right),$$

unidas por la relación $T_2^{-1}T_1T_2T_1 = 1$.

Sobre todas las demás variedades bidimensionales (conexas compactas suaves cerradas) se puede introducir una métrica de Riemann de curvatura constante negativa. Para estas variedades M^2 existe una representación: $M^2 = L_2/\Gamma$, donde L_2 es un plano de Lobachevski (provisto, por consiguiente, de una métrica de curvatura constante negativa), Γ es un grupo isomorfo a $\pi_1(M^2)$ y que actúa sobre L_2 por las isometrías (movimientos) (véase [1], parte II, § 20).

Realizamos una acotación útil a propósito de las operaciones antedichas de pegadura de asas y de la cinta de Moebius. Resulta que estas operaciones son casos particulares de una operación más general, llamada «suma conexas de dos variedades de igual dimensión». Describamos esa operación más detalladamente.

Sean M_1^n y M_2^n dos variedades suaves cerradas de igual dimensión. Encajemos las variedades M_1^n y M_2^n en un espacio euclídeo \mathbb{R}^N , donde N es bastante grande, y coloquemos M_1^n y M_2^n en \mathbb{R}^N de tal manera que un par de puntos: $x \in M_1$ e $y \in M_2$ tengan una distancia ε entre sí, donde $\varepsilon > 0$ es bastante pequeño, además, sus planos tangentes T_x y T_y son paralelos entre sí. Con esto se puede considerar que M_1 y M_2 no se intersecan en \mathbb{R}^N , por ejemplo, se encuentran a diferentes lados de un hiperplano $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ (fig. 31).

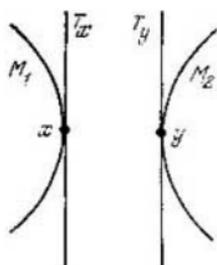


Fig. 31.

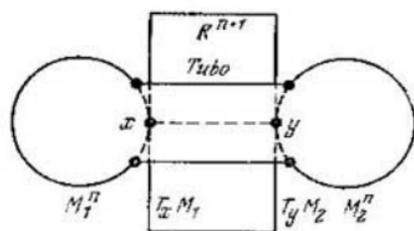
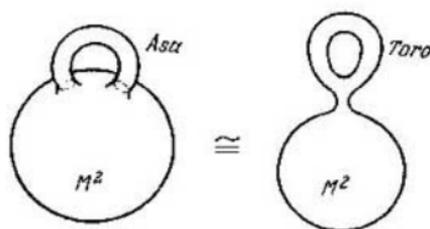


Fig. 32.

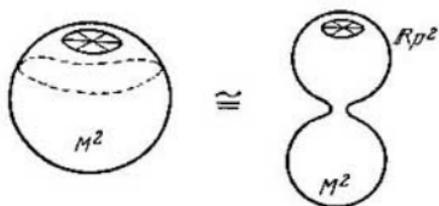


Fig. 33.

En vigor del paralelismo de los planos T_x y T_y estos dos planos n -dimensionales se pueden incluir en un subespacio euclídeo $(n + 1)$ -dimensional $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^N$, y se puede considerar que el segmento $[x, y]$, que une los puntos x e y en \mathbb{R}^{n+1} , es ortogonal a T_x (en el punto x) y a T_y (en el punto y). Ahora podemos examinar un cilindro de radio suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$ con un eje $[x, y]$, cuyas bases —esferas S^{n-1} — se encuentran en T_x y T_y (los puntos x e y son los centros de las esferas). Vamos a construir una nueva variedad n -dimensional (designémosla por $M_1 \# M_2$), al cortar M_1 y M_2 discos de radio ε con centro en x y con el centro en y , uniendo las

esferas n -dimensionales obtenidas mediante el cilindro arriba construido (véase la fig. 32).

Nótese, que la variedad obtenida $M_1 \# M_2$ está determinada unívocamente (si M_1 y M_2 son conexas) en el siguiente sentido: al cambiar los puntos x , y por otros puntos $x' \in M_1$, $y' \in M_2$, la variedad $M_1 \# M_2$ es reemplazada por otra difeomorfa. Claro está, que la operación $\#$ es asociativa: $(M \# N) \# Q \approx M \# (N \# Q)$ (difeomorfismo). Además, la operación $\#$ es conmutativa.

Consideremos ahora desde el punto de vista de la operación de tomar una suma conexa, las operaciones de pegar el asa y la cinta de Moebius, introducidas antes. Es evidente que la operación de pegar un asa estándar $aba^{-1}b^{-1}$ es equivalente a la toma de una suma conexa de la variedad inicial M^2 y del toro T^2 . Luego, la operación de pegar la cinta de Moebius es equivalente a la toma de una suma conexa de la variedad inicial M^2 y un plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ (véase la fig. 33)

Es evidente que $M^2 \# S^2 \approx M^2$ (difeomorfismo); $M_g^2 \# M_g^2 \approx M_{g+g}^2$; $M_{\mu_1}^2 \# M_{\mu_2}^2 \approx M_{\mu_1+\mu_2}^2$; $M^2 \# M_{g=1}^2 \# M_{\mu=1}^2 \approx M^2 \# M_{\mu=3}^2$.

Así, por ejemplo, la superficie de Klein es una suma conexa de dos planos proyectivos $\mathbb{R}P^2$ (véase más arriba).

De manera que un conjunto de clases de las variedades difeomorfas M^2 (las variedades se suponen compactas cerradas conexas) se transforma en un semigrupo abeliano P con dos generatrices: a (el toro T^2) y b (el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$) entre las cuales existe sólo la relación: $a \# b = b \# b \# b$. (Demuestre que no hay otras relaciones.) Como elemento nulo en el semigrupo P actúa una esfera bidimensional.

Utilizando particiones celulares de las superficies arriba obtenidas, es fácil calcular las homología de todas las superficies bidimensionales cerradas y también el grupo fundamental:

1 ESFERA S^2 . Sus homología ya fueron calculadas: $H_0(S^2; \mathbb{Z}) = H_2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_1 = 0$. Luego, sabemos que $\pi_1(S^2) = 0$ y $\pi_2(S^2) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

2 SUPERFICIES ORIENTABLES M_g^2 . En vigor de la orientabilidad tenemos: $H_2(M_g^2; \mathbb{Z}) = H_0(M_g^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. En este caso un grupo fundamental se da por $2g$ generatrices $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$, y por la relación $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$. Esta relación desaparece en el grupo conmutado $H_1(M_g^2; \mathbb{Z}) = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ y obtenemos $H_1(M_g^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}$ ($2g$ sumandos).

3 SUPERFICIES NO ORIENTABLES M_μ^2 . En virtud de no orientabilidad (véase § 3), $H_0(M_\mu^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_2(M_\mu^2; \mathbb{Z}) = 0$. En un grupo fundamental $\pi_1(M_\mu^2)$ se tienen μ generatrices a_1, \dots, a_μ , unidas por la relación $a_1^2 a_2^2 \dots a_\mu^2 = 1$. En las homología $H_1(M_\mu^2; \mathbb{Z}) = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ las generatrices a_1, \dots, a_μ conmutan y están unidas mediante la relación $2(a_1 + \dots + a_\mu) = 0$. Por eso $H_1(M_\mu^2; \mathbb{Z}) =$

$= \underbrace{\mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}}_{\mu-1} + \mathbb{Z}_2$. Aquí las generatrices en los grupos \mathbb{Z} ,

son $a_1, \dots, a_{\mu-1}$; la generatriz en el grupo \mathbb{Z}_2 es $a_1 + \dots + a_{\mu}$.

Consideremos ahora el llamado «espacio lenticular» L_p , que se obtiene de la esfera S^3 : $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ mediante la factorización por la acción del grupo \mathbb{Z}_p :

$$(z_1, z_2) \sim \left(z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2 e^{\frac{2\pi i}{p}} \right). \quad (19)$$

Cuando $p = 2$, obtenemos un espacio tridimensional proyectivo $\mathbb{R}P^3$.

Para construir la partición celular del espacio lenticular L_p partamos, primeramente, la esfera S^3 de la manera siguiente: sea $q=0, \dots, p-1$. Las células σ_q^3 son tales puntos (z_1, z_2) , que $z_2 = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $\frac{2\pi q}{p} < \varphi < \frac{2\pi(q+1)}{p}$; σ_q^2 son tales puntos (z_1, z_2) , que $z_2 = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $\varphi = \frac{2\pi q}{p}$; σ_q^1 son tales puntos $(z_1, 0)$, que $z_1 = e^{i\varphi}$, $\frac{2\pi q}{p} < \varphi < \frac{2\pi(q+1)}{p}$; σ_q^0 son puntos $\left(e^{\frac{2\pi i q}{p}}, 0 \right)$.

Esta partición celular está representada esquemáticamente en la fig. 34, donde la esfera S^3 se identifica con un espacio tridimensional, compactado por un punto infinitamente alejado ($p = 3$).

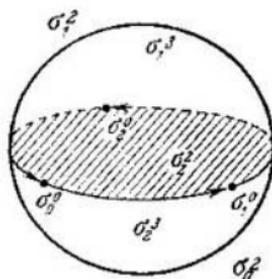


Fig. 34.

Con una orientación necesaria de estas células obtendremos:

$$\partial\sigma_q^3 = \sigma_{q+1}^2 - \sigma_q^2, \quad \partial\sigma_q^2 = \sigma_0^1 + \dots + \sigma_p^1, \quad \partial\sigma_q^1 = \sigma_{q+1}^0 - \sigma_q^0. \quad (20)$$

(Aquí $(q+1)$ se reduce por el módulo p). Después de la identificación por la acción del grupo \mathbb{Z}_p , las células $\sigma_q^3, \sigma_q^2, \sigma_q^1, \sigma_q^0$ con diferentes q se pegarán en una sola. Obtendremos la partición celular de la lente L_p , compuesta de cuatro células: $\sigma^3, \sigma^2, \sigma^1, \sigma^0$, además, de las fórmulas (20) se deduce que $\partial\sigma^3 = 0, \partial\sigma^2 = p\sigma^1, \partial\sigma^1 = 0$.

De aquí se deduce:

$$\begin{aligned} H_3(L_p; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = H_0(L_p; \mathbb{Z}), \quad H_2(L_p; \mathbb{Z}) = 0, \\ H_1(L_p; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p. \end{aligned} \quad (21)$$

Para los coeficientes \mathbb{Z}_p tendremos:

$$H_i(L_p; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

PROBLEMA 8. Hallar los grupos de cohomología $H^i(L_p; \mathbb{Z})$.

La variedad general de lente de dimensión $2n - 1$ se denomina factor de la esfera S^{2n-1} por la acción de un grupo \mathbb{Z}_m , donde la acción de la generatriz tiene la forma

$$(z_1, \dots, z_n) \rightarrow \left(e^{\frac{2\pi i}{m}} z_1, e^{\frac{2\pi i q_1}{m}} z_2, \dots, e^{\frac{2\pi i q_{n-1}}{m}} z_n \right). \quad (23)$$

Con esto, todos los números q_1, \dots, q_{n-1} deben ser recíprocamente primos con m , para que un espacio cociente sea una variedad (verifíquese). Esta variedad se designa así:

$$S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m = L^{2n-1}(q_1, \dots, q_{n-1}). \quad (24)$$

Evidentemente, tenemos $\pi_1(L^{2n-1}) = \mathbb{Z}_m$.

PROBLEMA 9. Construya sobre la esfera S^{2n-1} una partición celular para que el grupo \mathbb{Z}_m actúa trasladando libremente las células (es decir, engendra la partición celular de la lente). Calcule las homología de las variedades lenticulares.

PROBLEMA 10. Muestre, que para $q_1 = q_2 = \dots = q_{n-1} = 1$ un espacio lenticular es un espacio fibrado suave con base $\mathbb{C}P^{n-1}$ y con fibra, que es la circunferencia S^1

$$L^{2n-1}(1, \dots, 1) \xrightarrow{p} \mathbb{C}P^{n-1}, \quad F = S^1. \quad (25)$$

PROBLEMA 11. Calcule el anillo de cohomología de los espacios lenticulares (con los coeficientes en el grupo $G = \mathbb{Z}_m$).

Es interesante la partición de una serie de espacios fibrados suaves. Consideremos aquí los casos más simples, cuando una fibra F es la esfera S^{n-1} partida en las células $\sigma_F^0 \cup \sigma_F^{n-1} = S^{n-1}$. Un ejemplo importante es una variedad de los elementos lineales:

$$M^{2n-1} \xrightarrow{p} M^n, \quad \text{la fibra } F = S^{n-1}.$$

Si la base M^n está partida en las células σ_j^q , entonces las células en un espacio fibrado M^{2n-1} se determinan de la condición

$$p^{-1}(\sigma_j^q) = \sigma_j^q \times F = \sigma_j^q \times (\sigma_F^0 \cup \sigma_F^{n-1}), \quad (26)$$

ya que el espacio fibrado sobre un disco es trivial (producto directo), véase [1, parte II, § 24. Así, tenemos en M^{2n-1} las células

$$\sigma_j^q \times \sigma_F^0, \quad \sigma_j^q \times \sigma_F^{n-1}, \quad (27)$$

donde σ_j^q es una célula arbitraria (de dimensión q) en la base M^n . Pero es difícil calcular un operador de la frontera de estas células. Consideremos un ejemplo: un espacio M^3 de los elementos lineales hacia una superficie cerrada M_g^2 del género $g > 0$, con una partición celular estándar (véase más arriba):

$$M_g^3 = \sigma^0 \cup \{\sigma_j, \dots, j = 1, \dots, 2g\} \cup \sigma^2. \quad (28)$$

En el espacio M^3 obtendremos las células de dimensión 0, 1, 2, 3

$$\begin{aligned} \sigma^0 \times \sigma_F^0, \quad \sigma_j^1 \times \sigma_F^0, \quad \sigma^2 \times \sigma_F^0, \\ \sigma^0 \times \sigma_F^1, \quad \sigma_j^1 \times \sigma_F^1, \quad \sigma^2 \times \sigma_F^1. \end{aligned} \quad (29)$$

Un vértice es una $\sigma^0 \times \sigma_F^0$, todas las células unidimensionales son ciclos. La variedad M^3 es orientable. Por eso la célula tridimensional $\sigma^2 \times \sigma_F^0$ es un ciclo. Verifíquese que la célula $\sigma_j^1 \times \sigma_F^0$ en una fibra es también un ciclo en las homologías; pero en $\pi_1(M^3)$ la frontera $\partial(\sigma_j \times \sigma_F^0)$ da un conmutador de las curvas σ_j^1 y σ_F^1 . La célula $\sigma^2 \times \sigma_F^0$ no es un ciclo. Tiene lugar la fórmula

$$\partial(\sigma^2 \times \sigma_F^0) = [(\partial\sigma^2) \times \sigma_F^0] \cup [\sigma^0 \times (\sigma_F^1)^{2-2g}]. \quad (30)$$

El símbolo $(\sigma_F^1)^{2-2g}$ significa que en la frontera de la célula $\sigma^2 \times \sigma_F^0$ se incluye el ciclo unidimensional σ_F^1 repetido $2 - 2g$ veces (con una orientación conveniente). Eligiendo una de las particiones en la base M_g^2 , tenemos para $\partial\sigma^2$:

$$\partial\sigma^2 = \prod_{i=1}^g (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = W(a, b), \quad (31)$$

donde las curvas a_i están representadas por las células σ_i^1 , y las curvas b_i , por las células σ_{g+i}^1 en la base M_g^2 .

PROBLEMA 12. Demuestre la fórmula (30) para la frontera de la célula $\sigma^2 \times \sigma_F^0$, utilizando un campo vectorial sobre M_g^2 , que tiene exactamente un punto singular con el grado $2 - 2g$ (véase [1], parte II, § 15).

Para el grupo $\pi_1(M^3)$ tenemos las generatrices $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, \gamma$ (aquí γ es una fibra $F = S^1$) y las relaciones

$$[a_i, \gamma] a_i \gamma a_i^{-1} \gamma^{-1} = 1, \quad [b_i \gamma] = b_i \gamma b_i^{-1} \gamma^{-1} = 1, \quad (32)$$

$$\gamma^{2-2g} = W(a, b) = \prod_{i=1}^g (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = \prod_{i=1}^g [a_i, b_i]. \quad (33)$$

Verificar que las homologías $H_i(M^3)$ tienen la forma:

$$H = \mathbb{Z}, \quad H_1 = \underbrace{\mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}}_{2g \text{ piezas}} + \mathbb{Z}_{2g-2}, \quad H_2 = \underbrace{\mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}}_{2g \text{ piezas}}, \quad H_3 = \mathbb{Z}. \quad (34)$$

§ 5. Homologías y cohomologías singulares. Invariación homotópica de ellas. Sucesión exacta del par. Homologías relativas.

El método más general para la determinación homotópicamente invariante de las homologías y cohomologías, que vamos a utilizar aquí, no exige la estructura de variedad, ni del complejo simplicial o del celular

Sea X cualquier espacio topológico.

DEFINICIÓN 1. Un *simplex singular k -dimensional* se denomina par (σ^k, f) , donde $f: \sigma^k \rightarrow X$ es una aplicación continua de un simplex estándar k -dimensional $\sigma = [\alpha_0 \dots \alpha_k]$ en un espacio X . Cadena singular k -dimensional se denomina la operación formal finita lineal $c_k = \sum_i g_i (\sigma_i^k, f_i)$, donde g_i son elementos de un grupo abeliano escrito aditivamente G , y (σ_i^k, f_i) son simplex regulares de dimensión k .

A la frontera de un simplex singular se la llama combinación formal lineal del tipo

$$\partial(\sigma^k, f) = \sum_q (-1)^q (\sigma_q^{k-1}, f|_{\sigma_q^{k-1}}),$$

donde $\sigma_q^{k-1} = [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_q \dots \alpha_k]$ es la q -ésima cara de un simplex estándar, $f|_{\sigma_q^{k-1}}$ es la restricción de la aplicación f sobre la cara σ_q^{k-1} (la cara de un simplex singular, es también un simplex singular). La frontera de una cadena singular tiene, por definición, la forma:

$$\partial c_k = \sum_i g_i \partial(\sigma_i^k, f_i).$$

Del lema 3.1 se deduce que $\partial \partial c_k = 0$. Un ciclo singular es una cadena c_k tal, que $\partial c_k = 0$. Una frontera singular es una cadena c_k tal, que $c_k = \partial c_{k+1}$. La frontera singular es un ciclo. Los grupos de homologías singulares (simpliciales) $H_k(X; G)$ son clases de equivalencia de los ciclos k -dimensionales con exactitud hasta las fronteras.

Los grupos de cohomologías singulares $H^k(X; G)$ se determinan como en el § 2: las cocadenas son formas lineales en las cadenas y un operador δ está conjugado a ∂ . La comodidad en la utilización de las homologías singulares consiste en que para cualquiera aplicación continua de los espacios $\varphi: X \rightarrow Y$ los homomorfismos inducidos φ_* y φ^* de los grupos de homologías y cohomologías singulares

$$\varphi_*: H_k(X; G) \rightarrow H_k(Y; G), \quad (1)$$

$$\varphi^*: H^k(Y; G) \rightarrow H^k(X; G) \quad (1')$$

se construyen de una manera evidente. Aquí la cadena singular $c_h = \sum g_i (\sigma_i^h, f_i)$ pasa a ser una cadena singular $\varphi_*(c_h) = \sum g_i (\sigma_i^h, \varphi \circ f_i)$. Las cohomologías se aplican en el lado opuesto: $\varphi^*: H^h(Y; G) \rightarrow H^h(X; G)$, donde la cocadena c^h pasa a ser $\varphi^*(c^h)$, además $(\varphi^*(c^h), \tilde{c}_h) = (c^h, \varphi_*(\tilde{c}_h))$ por definición. Las aplicaciones φ_* y φ^* sobre las cadenas y cocadenas son conmutativas con un operador de frontera y por eso son definidas sobre las clases de homologías y cohomologías.

De la definición de las homologías singulares (cohomologías), se deduce con evidencia que los espacios equivalentes topológicamente (homeomorfos) tienen iguales homologías y cohomologías. Demostremos una afirmación más fuerte: la invariación homotópica de las homologías singulares (para las cohomologías todos los razonamientos son los mismos).

TEOREMA 1. Sean $\varphi_0: X \rightarrow Y$, $\varphi_1: X \rightarrow Y$, aplicaciones homotópicas. Entonces, los homomorfismos inducidos de los grupos de homologías $\varphi_{0*}, \varphi_{1*}: H_h(X; G) \rightarrow H_h(Y; G)$ coinciden: $\varphi_{0*} \equiv \varphi_{1*}$ (para las cohomologías $\varphi_0^* \equiv \varphi_1^*$).

DEMOSTRACIÓN. Sean: I , un segmento $[0, 1]$; Φ , una homotopía, que une las aplicaciones φ_0 y φ_1 :

$$\Phi(x, t): X \times I \rightarrow Y, \quad \Phi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \Phi|_{t=1} = \varphi_1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x \in X. \quad (2)$$

Para cualquier simplex singular (σ, f) está determinada la aplicación de un cilindro $\sigma \times I$ en un espacio Y :

$$\Phi(f \times 1)(\sigma, t) = \Phi(f(\sigma), t): \sigma \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y. \quad (3)$$

Partimos el cilindro $\sigma \times I$ en simplex: si $\sigma = [\alpha_0 \dots \alpha_h]$, los vértices en el cilindro $\sigma \times I$ tendrán una forma α_0^q (base inferior) y α_i^1 (base superior). Los simplex del cilindro $\sigma \times I$ tienen la forma

$$\sigma_q = [\alpha_0^q \dots \alpha_q^0 \alpha_q^1 \alpha_{q+1}^1 \dots \alpha_h^1], \quad q = 0, \dots, k \quad (4)$$

(véase la fig. 35 para $k = 1, 2$). La aplicación $\Phi(f \times 1) = \tilde{f}$ determina una $(k+1)$ -cadena singular simplicial $D(\sigma, f)$:

$$D(\sigma, f) = (-1)^{h-1} \sum_{q=0}^h (-1)^q (\sigma_q, \tilde{f}). \quad (5)$$

Obtenemos un homomorfismo de los grupos de las cadenas singulares:

$$D: C_h(X) \rightarrow C_{h+1}(Y). \quad (6)$$

LEMA 1. Tiene lugar la identidad:

$$D \circ \partial + (-1)^{h-1} \partial \circ D = \varphi_{1*} - \varphi_{0*}. \quad (7)$$

DEMOSTRACIÓN. Designemos por $d[\alpha_0 \dots \alpha_k]$ a la suma de los simplex del tipo (4):

$$d[\alpha_0 \dots \alpha_k] = (-1)^{k-1} \sum_{q=0}^k (-1)^q [\alpha_0^q \dots \alpha_q^0 \alpha_q^1 \dots \alpha_k]. \quad (8)$$

Además,

$$\partial[\alpha_0 \dots \alpha_k] = \sum_{i=0}^k (-1)^i [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_k]. \quad (9)$$

Entonces,

$$d\partial[\alpha_0 \dots \alpha_k] + (-1)^{k-1} \partial d[\alpha_0 \dots \alpha_k] = [\alpha_0^1 \dots \alpha_k^1] - [\alpha_0^0 \dots \alpha_k^0]. \quad (10)$$

Esta igualdad es geoméricamente evidente: la frontera del cilindro $[\alpha_0 \dots \alpha_k] \times I$ consta de un cilindro sobre la frontera del simplex $\partial[\alpha_0 \dots \alpha_k]$ y de las bases inferior y superior tomando en cuenta el signo. De esta igualdad se deduce la afirmación del lema.

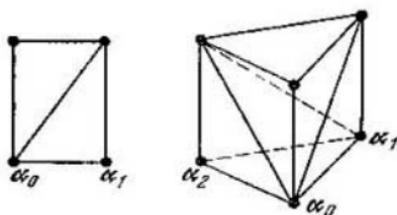


Fig. 35. Partición de cilindros en simplex.

Del lema resulta (véase el § 2), que los homomorfismos de los grupos de homología φ_{α^*} , $\alpha = 0, 1$ coinciden (para cualquier ciclo z_k tenemos $\varphi_{\alpha^*} z_k - \varphi_{1^*} z_k = \partial D z_k$). El teorema queda demostrado.

COROLARIO. Los espacios homotópicamente equivalentes tienen los grupos isomorfos de homología (cohomología) singulares (simpliciales).

EJEMPLO 1. Cualquier espacio contractable (por sí mismo) X es equivalente homotópicamente a un punto. Determinemos las homología singulares simpliciales de un punto ($X = *$):

Los k -simplex singulares del punto $* = X$:

$$f: \sigma^k \rightarrow *; \quad (11)$$

tenemos un simplex singular para cada dimensión k (ya que hay sólo una aplicación f). La frontera de un simplex (σ^k) tiene la forma:

$$\partial(\sigma^k) = \sum_{q=0}^k (-1)^q (\sigma_q^{k-1}). \quad (12)$$

Por eso tenemos:

$$\partial(\sigma_k, f) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ es impar o } k=0; \\ (\sigma^{k-1}, f), & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases} \quad (13)$$

De aquí: $H_0(*; G) = G$, $H_k(*; G) = 0$ si $k > 0$ (el ciclo σ^{k-1}, f) si k son pares, es la frontera de la cadena (σ^k, f) .

EJEMPLO 2. Si el espacio X es linealmente conexo, entonces $H_0(X; G) = G$. En efecto, todas las cadenas 0-dimensionales son ciclos. La cadena del tipo $\sum g_i(\sigma^0, f_i)$, $f_i(\sigma^0) = x_i \in X$ es una frontera si, y sólo si, $\sum g_i = 0$. Dos simplexes cualesquiera 0-dimensionales (σ^0, f) y (σ^0, g) , $f(\sigma^0) = x_1$, $g(\sigma^0) = x_2$, son homológicos: si $\varphi: [0, 1] \rightarrow X$ es una curva que une los puntos x_1 y x_2 , entonces

$$(\sigma^0, g) - (\sigma^0, f) = \partial(\sigma^1, \varphi). \quad (14)$$

Por eso el ciclo $\sum g_i(\sigma^0, f_i)$ es homológico al ciclo $(\sum g_i)(\sigma^0, f)$ por consiguiente, $H_0(X; G) = G$.

De modo análogo se demuestra que para el espacio X que consta de n componentes de conexión lineal, el grupo $H_0(X; G)$ es una suma directa de n ejemplares del grupo G .

Para algunos objetivos conviene más las homologías y cohomologías singulares cúbicas. Demos su definición

Un cubo n -dimensional estándar unidad I^n es un conjunto de puntos (x_1, \dots, x_n) en un espacio \mathbb{R}^n , que satisface la relación $0 \leq x_i \leq 1$. Si $n = 0$, entonces I^0 es un punto. La cara del cubo $\lambda_i^\varepsilon I^n$ ($i = 1, \dots, n$, $\varepsilon = 0, 1$) es un cubo I^{n-1} , donde $x_i = \varepsilon$. En total, el cubo tiene $2n$ caras $\lambda_i^\varepsilon I^n$.

Un n -cubo singular en el espacio X , es un par (I^n, f) , donde $f: I^n \rightarrow X$ es una aplicación continua.

Las caras del cubo singular (I^n, f) tienen, por definición, la forma

$$\lambda_i^\varepsilon(I^n, f) = (\lambda_i^\varepsilon I^n, f), \quad i = 1, \dots, n, \varepsilon = 0, 1. \quad (15)$$

Ellas se denominan caras i -inferior ($\varepsilon = 0$) e i -superior del cubo singular (I^n, f) . Cuando $i < j$, tiene lugar una identidad simple:

$$\lambda_i^\varepsilon \lambda_j^\eta = \lambda_{j-1}^\eta \lambda_i^\varepsilon, \quad \varepsilon, \eta = 0, 1. \quad (16)$$

Sea $\hat{C}_n(X; G)$ un grupo de cadenas singulares cúbicas de dimensión n con coeficientes en un grupo G , es decir, un grupo de combinaciones formales finitas lineales de forma

$$c_n = \sum g_i(I^n, f_i), \quad g_i \in G. \quad (17)$$

La frontera del cubo singular es de tipo

$$\partial(I^n, f) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [\lambda_i^A(I^{n-1}, f) - \lambda_i^0(I^{n-1}, f)]. \quad (18)$$

El operador ∂ se prolonga en todas las cadenas linealmente. De la identidad (16) se deduce, que $\partial\partial(I^n, f) = 0$. Un n -cubo singular (I^n, f) se denomina *degenerado*, si la aplicación $f: I^n \rightarrow X$ se descompone en la superposición de la proyección sobre una cara $I^n \rightarrow I^{n-1}$ y las aplicaciones $g: I^{n-1} \rightarrow X$.

Las combinaciones lineales de los cubos n -dimensionales singulares forman un subgrupo $D_n(X; G)$ en un grupo de cadenas $\hat{C}_n(X; G)$. Puesto que un operador transforma un cubo degenerado de nuevo en un cubo degenerado, es posible, factorizando por los cubos degenerados singulares, determinar un grupo de cadenas cúbicas singulares «normalizadas» $C_n(X; G)$, suponiendo

$$C_n(X; G) = \hat{C}_n(X; G) / D_n(X; G), \quad (19)$$

y el operador de frontera $\partial: C_n(X; G) \rightarrow C_{n-1}(X; G)$ (que será designado también por la letra ∂). Como antes, $\partial\partial = 0$. Por eso es posible definir un grupo de homología singulares cúbicas como un grupo de ciclos normalizados con exactitud hasta los ciclos homológicos a cero (de forma análoga se definen las cohomología).

Mostremos, que los grupos de homología construidos son también homotópicamente invariantes.

TEOREMA 2. *Las aplicaciones homotópicas $\varphi_0, \varphi_1: X \rightarrow Y$ de los espacios topológicos, inducen iguales homomorfismos $\varphi_{0*}, \varphi_{1*}: H_n(X; G) \rightarrow H_n(Y; G)$ de los grupos de homología singulares cúbicas e iguales homomorfismos de los grupos de cohomología cúbicas $\varphi_0^* = \varphi_1^*$.*

La demostración de este teorema es igual a la demostración del teorema análogo para un caso simplicial (más arriba). Es necesario construir un operador D de homotopía algebraica, que confronta a cada cubo n -dimensional singular en el espacio X un cubo $(n+1)$ -dimensional singular en el espacio Y . Si $\Phi: I \times X \rightarrow Y$ es una homotopía entre las aplicaciones φ_0, φ_1 , entonces el operador D se determina así:

$$D(I^n, f) = (I^{n+1}, \Phi(1 \times f)),$$

ya que

$$I^{n+1} = I \times I^n, \quad 1 \times f: I^{n+1} \rightarrow I \times X.$$

El operador D transforma los cubos degenerados una vez más en degenerados (verifíquese). Por eso está definido también sobre un grupo de cadenas normalizadas.

La igualdad

$$D\partial \pm \partial D = \varphi_{1*} - \varphi_{0*}$$

se demuestra íntegramente por analogía al lema 1. La demostración se concluye lo mismo que en el caso de las homologías singulares simpliciales.

EJEMPLO 3. Calculemos homologías singulares cúbicas del punto $X = *$ (y, de este modo, de la homología de cualquier espacio contractable).

En cada dimensión n tenemos exactamente por un cubo (I^n, f_n) , donde $f_n(I^n) = *$. Si $n > 0$ todos estos cubos son degenerados. Por eso los grupos de las cadenas normalizadas cúbicas tienen la forma

$$C_0(X; G) = G = H_0(X; G), \quad C_n(X; G) = 0 \quad \text{si } n > 0.$$

Quiere decir que las homologías cúbicas de un punto son las mismas que las homologías simpliciales arriba construidas.

OBSERVACION. Si se construye las homologías $\hat{H}_n(X; G)$, partiendo de los grupos completos de cadenas singulares cúbicas $\hat{C}_n(X; G)$, entonces, las homologías de un punto en esta teoría serán no triviales.

PROBLEMA 1. a) Determinar un grupo $\hat{H}_n(*; \mathbb{Z})$; b) demostrar que $\hat{H}_n(X; \mathbb{Z}) = \sum_{h \geq 0} H_{n-h}(X, \hat{H}_h(*, \mathbb{Z}))$ para cualquier espacio X .

Definamos ahora las homologías relativas singulares. Las definiciones aquí son iguales que para las variantes simplicial y cúbica.

Sean: X , un espacio topológico; Y , su subespacio. Entonces, los grupos de cadenas singulares $C_h(Y)$ se encuentran en los grupos $C_h(X)$. Consideremos un grupo de cadenas relativas $C_h(X, Y) = C_h(X)/C_h(Y)$ (no escribimos explícitamente aquí los coeficientes de G , el grupo G es arbitrario). El operador de frontera ∂ transforma $C_h(Y)$ en $C_{h-1}(Y)$, por eso él determina cierto operador de frontera

$C_h(X, Y) \rightarrow C_{h-1}(X, Y)$ para los grupos cocientes. Este homomorfismo lo designamos también con ∂ . Tenemos un complejo de cadenas relativas y un complejo conjugado de cocadenas.

Como antes, definimos los ciclos relativos $Z_h(X, Y)$, para los cuales $\partial c_h = 0$. Las fronteras relativas $B_h(X, Y) \subset Z_h(X, Y)$ tienen la forma $c_h = \partial c_{h+1}$. Al grupo cociente $H_h(X, Y) = Z_h(X, Y)/B_h(X, Y)$ se le llamará grupo de homologías relativas (de dimensión h).

Un grupo de homologías $H_h(X)$ tiene una aplicación natural en un grupo de homologías relativas: cada ciclo de $H_h(X)$ se puede considerar como relativo. Obtenemos los homomorfismos

$$H_h(X) \xrightarrow{j} H_h(X, Y), \quad H^h(X, Y) \xrightarrow{j} H^h(X). \quad (20)$$

Además, la inmersión (el encaje) de los espacios $Y \xrightarrow{i} X$ designado por la letra i determina un «homomorfismo de inmersión»

$$H_k(Y) \xrightarrow{i_*} H_k(X), \quad H^k(X) \xrightarrow{i^*} H^k(Y). \quad (21)$$

Construimos ahora un homomorfismo de frontera ∂_* , que aplica el grupo $H_k(X, Y)$ en un grupo $H_{k-1}(Y)$ (para las cohomología un homomorfismo δ_* , que aplica $H^{k-1}(Y) \rightarrow H^k(X, Y)$). Sea $c_k \in C_k(X, Y)$, un ciclo relativo. Es posible considerarlo como una cadena ordinaria (o «absoluta»), es decir, como un elemento de $C_k(X)$, determinada con exactitud hasta una cadena arbitraria de $C_k(Y)$. La frontera $c_{k-1} = \partial c_k$ es un ciclo $(k-1)$ -dimensional en Y . Entonces $\partial_*(c_k)$ corresponde a una clase de homología del ciclo

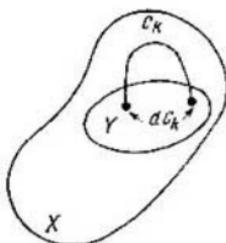


Fig. 36.

$c_{k-1} = \partial c_k$ por definición (véase la fig. 36). La clase de homología $\partial_* c_k$ no depende de la elección del representante en la clase c_k (verifíquese). Obtenemos un homomorfismo definido correctamente

$$\partial_* : H_k(X, Y) \rightarrow H_{k-1}(Y). \quad (22)$$

Combinando homomorfismos i_* , j y ∂_* , obtenemos una sucesión de homomorfismos

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial_*} H_k(Y) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j} H_k(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(Y) \xrightarrow{i_*} \dots \\ \dots \rightarrow H_0(Y) \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X, Y) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (23)$$

TEOREMA 3. La sucesión (23) es exacta, es decir a) $\text{Ker } i_* = \text{Im } \partial_*$, b) $\text{Ker } j = \text{Im } i_*$, c) $\text{Ker } \partial_* = \text{Im } j$.

DEMOSTRACION. a) Verifiquemos que el núcleo $\text{Ker } i_*$ coincide con la imagen $\text{Im } \partial_*$. Sea $c_{k-1} \in C_{k-1}(Y)$ un ciclo tal, que $i_*(c_{k-1}) = 0$. Esto significa que en el espacio X se encontrará una cadena $c_k \in C_k(X)$ tal, que $\partial c_k = c_{k-1}$. La cadena c_k es un ciclo relativo y la clase de homología del ciclo c_{k-1} coincide con $\partial_*(c_k)$ por definición. El punto a) queda demostrado.

b) Sea c_k un ciclo en el espacio X tal, que $j(c_k) = 0$. Esto significa que $\partial c_k = 0$ y se encontrarán una cadena c_{k+1} en el espacio X y una cadena \tilde{c}_k en el espacio Y tales, que

$$\tilde{c}_k + \partial c_{k+1} = c_k.$$

Entonces, $\partial c_k = \partial \tilde{c}_k = 0$, por eso \tilde{c}_k es un ciclo en el espacio Y homológico al ciclo c_k . Hemos mostrado que la clase de homología del ciclo c_k tiene un representante en el espacio Y , o sea, $c_k \in \text{Im } i_*$.

c) Sea c_k un ciclo relativo en $C_k(X, Y)$, además, $\partial_* c_k = 0$ en un grupo $H_{k-1}(Y)$. Esto significa, que el ciclo ∂c_k es homológico a cero en el espacio Y : $\partial c_k = \partial \tilde{c}_k$; \tilde{c}_k es una cadena en $C_k(Y)$. Entonces, la cadena $c_k - \tilde{c}_k$ es un ciclo «absoluto» en el espacio X y da un elemento equivalente al ciclo c_k en un grupo relativo $H_k(X, Y)$. De manera que el ciclo $c_k \sim c_k - \tilde{c}_k$ se encuentra en una imagen del homomorfismo j . Verifique la exactitud en el término $H_0(X, Y)$. El teorema queda demostrado íntegramente. Para las cohomologías son análogas la secuencia de los razonamientos y la verificación de la exactitud.

La sucesión (23) se denomina sucesión exacta (homológica) del par (X, Y) .

Observemos que si Y es un subcomplejo simplicial (celular) en un complejo simplicial (celular) X , entonces los homomorfismos de la sucesión homológica (y cohomológica) del par para las homologías simpliciales y celulares se determinan de una manera evidente. Le dejamos como ejercicio al lector la verificación de la exactitud de las sucesiones obtenidas, que es totalmente análoga a la demostración del teorema 3.

COROLARIO. De la sucesión exacta del par se deduce la igualdad

$$\begin{aligned} H_k(X, *) &= H_k(X), & k > 0, \\ H_0(X, *) &= 0, & k = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

donde X es un espacio linealmente conexo.

DEMOSTRACION. Realmente, si $k > 0$ tenemos:

$$H_k(*) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, *) \rightarrow H_{k-1}(X) \rightarrow \dots$$

Si $k - 1 = 0$, la inmersión $H_0(*) \rightarrow H_0(X)$ es un isomorfismo, como se mostraba antes. Por eso para todo $k > 0$ tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow H_k(X) \xrightarrow{j} H_k(X, *) \rightarrow 0. \quad (25)$$

Esto da de inmediato un isomorfismo de estos grupos, ya que $\text{Ker } j = 0$ e $\text{Im } j = H_k(X, *)$.

Para $k = 0$ tenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(*) & \xrightarrow{i} & H_0(X) & \rightarrow & H_0(X, *) & \rightarrow & 0, \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ G & & G & & & & \end{array} \quad (26)$$

donde i_* es un isomorfismo. Por eso el corolario queda demostrado.

Una propiedad extraordinariamente importante de las homología relativas es su «naturalidad» con las aplicaciones continuas de los pares

$$(X, X') \xrightarrow{f} (Y, Y'), \quad (27)$$

donde $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ y $f(X') \subset Y'$, tenemos las aplicaciones

$$f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y), \quad f^*: H^k(Y) \rightarrow H^k(X), \quad (28)$$

$$f_*: H_k(X, X') \rightarrow H_k(Y, Y'), \quad f^*: H^k(Y, Y') \rightarrow H^k(X, X'), \quad (29)$$

$$f_*: H_k(X') \rightarrow H_k(Y'), \quad f^*: H^k(Y') \rightarrow H^k(X'). \quad (30)$$

Todas las construcciones de los homomorfismos de la sucesión exacta eran «naturales»: conmutaban con las aplicaciones continuas. Por eso se tiene un homomorfismo de sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccccc} \xrightarrow{\partial_*} & H_k(X') & \xrightarrow{i_*} & H_k(X) & \xrightarrow{j} & H_k(X, X') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(X') & \rightarrow & & \\ & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & & \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_k(Y') & \xrightarrow{i_*} & H_k(Y) & \xrightarrow{j} & H_k(Y, Y') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(Y') & \rightarrow & & \end{array} \quad (31)$$

Para las cohomología tenemos análogamente:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \xrightarrow{\delta_*} & H^k(X, X') & \xrightarrow{j} & H^k(X) & \xrightarrow{i^*} & H^k(X') & \xrightarrow{\delta_*} & H^{k+1}(X, X') & \rightarrow & & \\ & \uparrow f_* & & \uparrow f_* & & \uparrow f_* & & \uparrow f_* & & & \\ \xrightarrow{\delta_*} & H^k(Y, Y') & \xrightarrow{j} & H^k(Y) & \xrightarrow{i^*} & H^k(Y') & \xrightarrow{\delta_*} & H^{k+1}(Y, Y') & \rightarrow & & \end{array} \quad (32)$$

Esta propiedad es muy útil. Por ejemplo, tiene lugar tal

AFIRMACION 1. *Que se tenga la aplicación de los pares*

$$f: (X, X') \rightarrow (Y, Y'), \quad (33)$$

donde el homomorfismo f_* es un isomorfismo para

$$H_k(X) \xrightarrow{f_*} H_k(Y) \quad \text{y} \quad H_k(X') \xrightarrow{f_*} H_k(Y') \quad (34)$$

Entonces, los grupos relativos $H_k(X, X')$ y $H_k(Y, Y')$ son isomorfos también y f_* es su isomorfismo (análogicamente para las cohomología).

DEMOSTRACION. Consideremos el diagrama (31). Si $\alpha \in H_k(X, X')$ y $f_*\alpha = 0$, entonces, tenemos

$$f_*\partial_*\alpha = \partial_*f_*\alpha = 0. \quad (35)$$

Por eso $f_* (\partial_* \alpha) = 0$, donde $\partial_* \alpha \in H_{h-1} (X')$. De la condición (sabemos, que $f_*: H_{h-1} (X') \rightarrow H_{h-1} (Y')$ es un isomorfismo) obtenemos $f_* (\partial_* \alpha) = 0 \Rightarrow \partial_* \alpha = 0$. Por eso $\alpha = j (\beta)$. Puesto que $f_* (\alpha) = 0$, tenemos $f_* j (\beta) = j (f_* (\beta)) = 0$ y por eso $f_* (\beta) = i_* (\gamma)$. Consideremos $\delta = f_*^{-1} (\gamma) \in H_h (X')$. Entonces $\beta = i_* (\delta)$ y $\alpha = j i_* (\delta) = 0$. Por eso, $\alpha = 0$, si $f_* (\alpha) = 0$.

Demostremos que cualquier elemento γ del grupo $H_h (Y, Y')$ tiene la forma $\gamma = f_* (\delta)$. Si $\partial_* \gamma = 0$, entonces $\gamma = j (\beta)$. Consideremos un elemento $j f_*^{-1} (\beta) = \alpha$. Tenemos $f_* (\alpha) = \gamma$. Si $\partial_* \gamma \neq 0$, entonces, introducimos el elemento $f_*^{-1} \partial_* (\gamma) = \partial_* \beta$. Entonces, la imagen $f_* (\beta)$ será tal, que $\partial_* (f_* (\beta) - \gamma) = 0$. De esta manera la afirmación queda demostrada.

OBSERVACIÓN. La afirmación y su demostración siguen siendo correctas en la siguiente forma: si se exige un isomorfismo de aplicaciones en las homologías en cualquier par de los tres grupos $H_* (X)$, $H_* (X')$, $H_* (X, X')$, entonces, la tercera aplicación en las homologías también será un isomorfismo. Para las cohomologías todo esto es análogo.

Más adelante se demostrará que las homologías singulares coinciden con las celulares y simpliciales para los complejos celulares y simpliciales, utilizando las propiedades formales de las homologías, demostradas más arriba, y una importante propiedad que ahora vamos a demostrar.

Tiene lugar el siguiente

TEOREMA 4. Sean: K , un complejo celular; L , su subcomplejo. Entonces, es correcta la igualdad

$$H_h (K, L) = H_h (K/L), \quad k > 0. \quad (36)$$

Con K/L designamos un espacio cociente, obtenido mediante contracción de todo L en un punto. Notemos, que K/L es equivalente homotópicamente

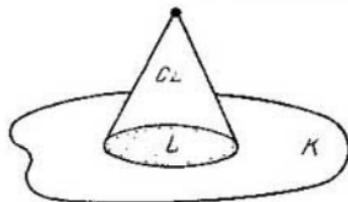


Fig. 37. $K \cup CL$.

mente a un complejo celular $K \cup CL$ (véase la fig. 37), donde CL es un cono sobre L , obtenido de $L \times I$ mediante la contracción de la base superior en un punto.

Damos la demostración para las homologías simpliciales (singulares). Introducimos un operador de subpartición baricéntrica.

Definimos la subpartición de un simplex $[\alpha_0 \dots \alpha_k] = \sigma^k$. A la subpartición de un simplex unidimensional se la llama su partición en dos con un vértice nuevo en el centro. Para subpartir un simplex bidimensional $[\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2]$ (triángulo), vamos a subpartir, primeramente, todas las caras unidimensionales. Después tomamos el vértice nuevo en el centro del triángulo y lo unimos con todos los vértices en las caras, los antiguos y los nuevos (véase la fig. 38).



Fig. 38.

Luego obramos análogamente: tomemos un punto en el centro de un simplex k -dimensional; las caras ya están subpartidas. El conjunto de rayos que unen este vértice nuevo con un simplex σ_i^{k-1} en la frontera, da nuevos simplex σ_i^k en una subpartición baricéntrica.

Sea (σ^k, f) un simplex singular en el espacio X . Sean $\sigma_1^k, \dots, \sigma_N^k$ todos los simplex k -dimensionales de una subdivisión baricéntrica de un simplex σ^k . Designamos por $\beta(\sigma^k, f)$ a una cadena de forma

$$\beta(\sigma^k, f) = \sum_{i=1}^N (\sigma_i^k, f|_{\sigma_i^k}) \quad (37)$$

(se toma la suma por todos los simplex de la subpartición σ^k). El operador β se prolonga linealmente en todo el grupo de las cadenas singulares simpliciales $C_k(X)$:

$$\beta: C_k(X) \rightarrow C_k(X), \quad k=0, 1, \dots \quad (38)$$

Tiene lugar

LEMA 2 *El operador β conmuta con el homomorfismo de frontera ∂ y es homotópico algebraicamente a un operador idéntico.*

DEMOSTRACION. La igualdad $\partial\beta = \beta\partial$ es evidente (caras «interiores» de la subpartición del simplex se incluyen en la cadena $\partial\beta$ dos veces con diferentes signos). Construiremos una homotopía algebraica D tal, que $\partial D \pm D\partial = \beta - 1$. Determinamos para esto una triangulación del producto directo $\sigma^k \times I$ del simplex σ^k sobre un segmento I tal, que $\sigma^k \times 0$ es un simplex y $\sigma^k \times 1$ es una subpartición baricéntrica σ^k . Para $k=0, 1, 2$ la triangulación $\sigma^k \times I$ se indica en la fig. 39. En el caso general, la triangulación $\sigma^k \times I$ se construye así: sea construida la triangulación de un simplex $\sigma^{k-1} \times I$; de esta manera, las caras laterales en $\sigma^k \times I$ ya están trianguladas.

La base inferior de $\sigma^h \times I$ la dejamos sin cambios; en la base superior tomamos una subpartición baricéntrica. Ahora ya está triangulada toda la frontera $\partial(\sigma^h \times I)$. Uniendo el centro de la base superior con todos los vértices de la triangulación de la frontera $\partial(\sigma^h \times I)$ obtenemos la triangulación $\sigma^h \times I$.

Sea (σ^h, f) un simplex singular en el espacio X . Está definida una aplicación «trivial»:

$$\hat{f}: \sigma^h \times I \rightarrow X, \quad \hat{f}(x, t) = f(x). \quad (39)$$

Designamos por $D(\sigma^h, f)$ la cadena $(k+1)$ -dimensional $(\sigma^h \times I, \hat{f}) = D(\sigma^h, f)$, donde $\sigma^h \times I$ está triangulado así, como se indica más

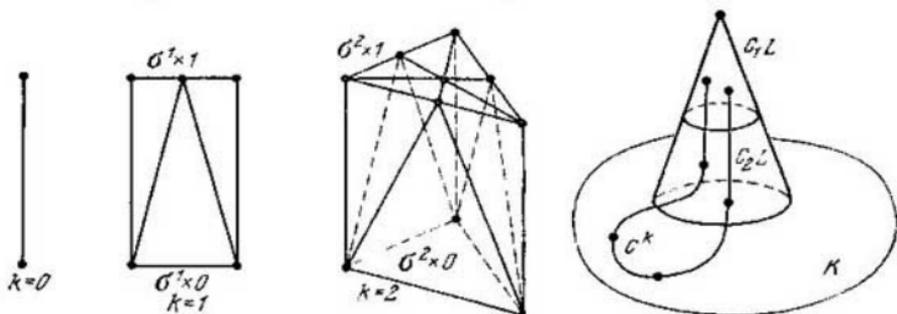


Fig. 39

Fig. 40.

arriba. El operador D , por construcción, da una homotopía buscada. El lema queda demostrado.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. En virtud de la invariación homotópica de homologías, tenemos la igualdad:

$$H_k(K \cup CL, CL) = H_k(K \cup CL, *),$$

puesto que el cono CL se contrae en un punto. Además,

$$H_k(K \cup CL, *) = H_k(K \cup CL) = H_k(K/L)$$

cuando $k > 0$ (véase el corolario del teorema 3). Es suficiente con demostrar, que

$$H_k(K \cup CL, CL) = H_k(K, L). \quad (40)$$

Sea c^k cualquier ciclo k -dimensional relativo en $H_k(K \cup CL, CL)$. Construimos un ciclo homológico a c^k que se encuentra en un grupo $H_k(K, L)$.

Partimos el cono CL en dos mitades C_1L y C_2L (véase la fig. 40). En virtud del lema 2 se puede reemplazar el ciclo c^k por un ciclo $\beta^N c^k$ homológico a él, con simplex pequeños. Aumentando N (ite-

rando la subpartición), obtenemos que el simplex que se interseca con C_1L , se encuentra íntegramente en el cono CL . Excluyamos todos los simplexes, que se intersecan con C_1L . Con esto no cambiamos la clase de las homología relativas (modulo CL) del ciclo $\beta^N c^k \sim c^k$.

El ciclo obtenido \hat{c}^k ya se encuentra en el grupo $H_k(K \cup C_2L, C_2L) = H_k(K, L)$ (ya que C_2L se contracta en L). Por lo tanto se ha construido un ciclo \hat{c}^k en el grupo $H_k(K, L)$, homológico al ciclo c^k .

Si el ciclo c^k para el par (K, L) es homológico a cero en el grupo $H_k(K \cup CL, CL)$, entonces el razonamiento idéntico se utiliza para «quitar» una cadena limitante de vértice superior del cono, subpartiendo c^k y la cadena que lo limita.

El teorema queda demostrado.

§ 6. Homología singulares de complejos celulares.

Coincidencia de ellas con las homología celulares.

Dualidad de Poincaré para las homología simpliciales

Calculemos las homología singulares de las esferas S^n , $n = 1, 2, \dots$. Por doquier en este párrafo vamos a tomar en calidad de grupo de coeficientes al grupo de los números enteros.

TEOREMA 1. Para $n > 0$ tiene lugar la igualdad

$$H_i(S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0, \quad i=n, \\ 0, & i \neq 0, \quad n. \end{cases} \quad (1)$$

DEMOSTRACION. Sea $n = 1$. Calculemos homología de una circunferencia S^1 de una sucesión exacta del par $(D^1, \partial D^1)$, donde $\partial D^1 = S^0$ son dos puntos, con esto $H_k(D^1, S^0) = H_k(S^1)$ en virtud del teorema 5.4. Tenemos:

$$H_1(D^1) \rightarrow H_1(D^1, S^0) \rightarrow H_0(S^0) \rightarrow H_0(D^1) \rightarrow 0 \quad (2)$$

Pero $H_1(D^1) = 0$, $H_0(D^1) = \mathbb{Z}$, $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, porque S^0 consta de dos componentes conexos. Por eso la sucesión (2) obtiene la forma

$$0 \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (3)$$

de donde $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Si $k > 1$, tenemos

$$H_k(D^1) \rightarrow H_k(D^1, S^0) \rightarrow H_{k-1}(S^0), \quad (4)$$

donde $H_k(D^1) = H_{k-1}(S^0) = 0$, eso es, $H_k(D^1, S^0) = H_k(S^1) = 0$. Las homología de la circunferencia están calculadas.

Ya ha sido demostrado el teorema para las homología de una esfera S^{n-1} . De la sucesión exacta del par (D^n, S^{n-1}) obtendremos

$$\dots \rightarrow H_k(D^n) \rightarrow H_k(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(D^n) \rightarrow \dots \quad (5)$$

Si $k > 1$ obtenemos una sucesión exacta de forma

$$0 \rightarrow H_k(S^n) \rightarrow H_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0, \quad (6)$$

de donde $H_k(S^n) = H_{k-1}(S^{n-1})$, $k > 1$. Si $k = 1$, obtenemos una sucesión

$$H_1(D^n) \rightarrow H_1(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(D^n) \rightarrow 0,$$

o sea,

$$0 \rightarrow H_1(D^n, S^{n-1}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

En virtud de la exactitud de esta sucesión, el homomorfismo $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo por eso $H_1(D^n, S^{n-1}) = H_1(S^n) = 0$. De aquí se desprende la corrección de la afirmación del teorema también para la esfera S^n . El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Identifiquemos un simplex n -dimensional σ^n con un disco D^n ; entonces, la aplicación idéntica $\sigma^n \rightarrow \sigma^n$ determina un ciclo relativo singular en el grupo $H_n(D^n, S^{n-1}) = H_n(S^n)$. Este ciclo es una generatriz en un grupo de homología singulares $H_n(S^n)$.

PROBLEMA 1. Sean $\sigma^n = [\alpha_0 \dots \alpha_n]$ un simplex n -dimensional; P es una permutación de los vértices $\alpha_0 \dots \alpha_n$. P determina la aplicación $\sigma^n \rightarrow \sigma^n$. Calcular un elemento correspondiente en el grupo $H_n(S^n)$.

COROLARIO 1. Las homología singulares de un ramo de esferas n -dimensionales S_1^n, \dots, S_N^n tienen la forma:

$$H_k(\bigvee_i S_i^n) = 0, \quad k \neq 0, n, \quad H_0(\bigvee_i S_i^n) = \mathbb{Z}, \quad H_n(\bigvee_i S_i^n) = \underbrace{\mathbb{Z} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}}_{N \text{ veces}}$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el par: $(\bigcup_i D_i^n = K, \bigcup_i \partial D_i^n = L)$.

Evidentemente tenemos $H_j(K, L) = \sum H_j(D^n, \partial D^n)$. Si $j > 0$, según el teorema, tenemos $H_j(D^n, \partial D^n) = H_j(S^n)$. El corolario queda demostrado.

COROLARIO 2. La aplicación $f: S^n \rightarrow S^n$ del grado $\deg f$ determina un homomorfismo $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$, que es multiplicación por el número $\deg f$.

DEMOSTRACIÓN. La aplicación f del grado $k = \deg f$ de la esfera S^n en sí misma, es posible construirla del modo señalado en la fig. 41 (cualquier otra aplicación de grado k es homotópica a ésta). Aquí todas las esferas del ramo se aplican en una sola, idénticamente en cada sumando. La aplicación de esfera en el ramo de k esferas transforma la generatriz del grupo $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ en la suma de todas las generatrices del ramo. La aplicación del ramo de esferas en una esfera transforma cada generatriz de homología n -dimensionales del ramo

en una generatriz del grupo $H_n(S^n)$. Por eso la aplicación pasante $H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ multiplica la generatriz del grupo $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ en $k = \text{deg } f$. De aquí se deduce el corolario requerido.

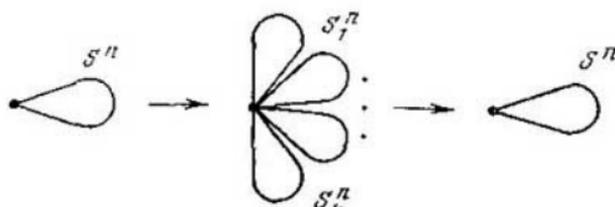


Fig. 41.

COROLARIO 3. Para un complejo celular K tenemos

$$H_j(K_n K_{n-1}) = \begin{cases} 0, & j \neq n, \\ \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}, & j = n, \end{cases} \quad (7)$$

donde el número de sumandos es igual al número de células n -dimensionales.

La demostración se deduce inmediatamente del corolario 1 y el teorema 1.

TEOREMA 2. Las homología singular de un complejo celular coinciden con las homología celulares.

COROLARIO. Las homología celulares son homotópicamente invariantes. Las homología simpliciales son un caso particular de las celulares y por eso coinciden también con las singulares, y son homotópicamente invariantes.

Primero demostraremos el teorema para los complejos simpliciales, que se deduce muy simplemente de hechos ya demostrados. Cada simplex puede ser considerado como un simplex singular (σ^k, f) . Esto da un encaje (inmersión) de un complejo de cadenas simpliciales en las singulares

$$C^{\text{simp}}(K) \rightarrow C^{\text{sing}}(K), \quad (8)$$

que, evidentemente, conmuta con un operador de frontera ∂ . Por eso tenemos la aplicación de homología

$$H_k^{\text{simp}}(K) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(K). \quad (9)$$

Si L es un subcomplejo simplicial en K , entonces tenemos la aplicación de grupos relativos

$$H_k^{\text{simp}}(K, L) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(K, L) \quad (10)$$

y de toda la sucesión exacta del par (K, L) . Sea que está demostrado, por inducción, el teorema para los complejos de dimensión $\leq n - 1$.

Para los complejos n -dimensionales K_n tenemos la aplicación de sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{j+1}^{\text{simpl}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_j^{\text{simpl}}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_j^{\text{simpl}}(K^n) & \rightarrow & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \rightarrow H_{j+1}^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) & \rightarrow & H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}) & \rightarrow & H_j^{\text{sing}}(K^n) & \rightarrow & \\
 & & \rightarrow H_j^{\text{simpl}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{j-1}^{\text{simpl}}(K^{n-1}) & \rightarrow & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \rightarrow H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{j-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) & \rightarrow & \quad (11)
 \end{array}$$

Sabemos lo siguiente: a) por inducción $H_j^{\text{simpl}}(K^{n-1}) \approx H_j^{\text{sing}}(K^{n-1})$;

$$b) \quad H_j^{\text{simpl}}(K^n, K^{n-1}) = H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) = \begin{cases} 0, & j \neq n, \\ \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}, & j = n \end{cases}$$

(el número de los sumandos es igual al número de los simplex de dimensión n), como se muestra más arriba. Por consiguiente, teniendo la aplicación de sucesiones exactas (11), concluimos, que la aplicación

$$H_j^{\text{simpl}}(K^n) \rightarrow H_j^{\text{sing}}(K^n) \quad (12)$$

es un isomorfismo para todas las j (véase la afirmación 5.1).

El teorema queda demostrado para los complejos simpliciales.

DEMOSTRACION. Sean: K , un complejo celular general; K^n , su armazón n -dimensional, fo sea, la reunión de todas las células de dimensión no superior a n . Entonces, K^n/K^{n-1} es un ramo de esferas n -dimensionales, con una esfera en cada célula n -dimensional. De lo teorema 5.4 y 1 obtenemos:

$$H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K), \quad H_i(K^n, K^{n-1}) = 0, \quad i \neq n \quad (13)$$

(coeficientes enteros), donde $C_n(K)$ es un grupo de cadenas celulares.

Queda determinado el homomorfismo $\partial = j \cdot \partial_*$

$$C_n(K) \approx H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \approx C_{n-1}(K) \quad (14)$$

como una superposición

$$H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{j} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$$

LEMA 1. El operador $\partial: C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$, dado por la fórmula $\partial = j\partial_*$, coincide con un operador de frontera en un complejo de cadenas celulares.

DEMOSTRACIÓN. Sea σ^n una célula n -dimensional en el complejo K . Ella es generatriz en el grupo $H_n(\sigma^n, \partial\sigma^{n-1}) \subset H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K)$. Con un homomorfismo de frontera $H_n(\sigma^n, \partial\sigma^n) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$, la σ^n pasará a ser la generatriz del grupo $H_{n-1}(S^{n-1})$. Su imagen en el grupo $H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) = C_{n-1}(K)$ es de forma

$$\partial\sigma^n = \sum_i [\sigma^i : \sigma_i^{n-1}] \sigma_i^{n-1} \quad (15)$$

(suma por todas las células de dimensión $n-1$), en virtud del corolario 2 del teorema 1. Aquí $[\sigma^i : \sigma_i^{n-1}]$ es un coeficiente de incidencia de células, calculable como grado de la aplicación $\partial\sigma^n \rightarrow K^{n-1}/K^{n-2}$ en el i -ésimo sumando. (véase el § 5). La fórmula (15) coincide con un operador de frontera en las cadenas celulares, determinado antes en el § 4. El lema queda demostrada.

Las homología celular poseen las siguientes propiedades:

- son iguales a cero en dimensiones mayores que la dimensión del complejo $H_j^{\text{cel}}(K^n) = 0$, $j > n$.
- el grupo $H_n^{\text{cel}}(K^n)$ es isomorfo a un grupo de ciclos $Z_n^{\text{cel}} \subset C_n(K^n)$, ya que no hay fronteras.
- el grupo $H_j^{\text{cel}}(K^n)$ depende sólo del armazón K^{j+1} , o sea, es el mismo grupo para K^{j+1} , K^{j+2} , ..., K^{n-1} , K^n .

Sea que está demostrada, por inducción, la coincidencia de homología celular y singulares para los complejos de dimensión $\leq n-1$. Consideremos el par (K^n, K^{n-1}) :

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\partial_*} H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}) &\xrightarrow{i_*} H_j^{\text{sing}}(K^n) \xrightarrow{j} \\ &\xrightarrow{j} H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{j-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) \rightarrow. \end{aligned} \quad (16)$$

Tenemos $H_j^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) = 0$ si $j \neq n$. Por eso, de (16) deducimos que

$$H_j^{\text{sing}}(K^n) = H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}) \quad \text{si } j \neq n-1, n. \quad (17)$$

De aquí tenemos

$$H_j^{\text{sing}}(K^n) = \begin{cases} 0, & j \geq n+1, \\ H_j^{\text{sing}}(K^{n-1}) = H_j^{\text{cel}}(K^{n-1}), & j \leq n-2. \end{cases} \quad (18)$$

Quedan las dimensiones $j = n, n-1$.

De (16) tenemos:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_n^{\text{sing}}(K^n) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) &\xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ 0 \rightarrow H_n^{\text{sing}}(K^n) \rightarrow C_n^{\text{cel}}(K^n) &\xrightarrow{\partial} Z_{n-1}^{\text{cel}}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \\ \rightarrow H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n) \rightarrow H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) & \\ \parallel & \parallel \\ H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n) \rightarrow 0. & \end{aligned}$$

De aquí, utilizando el lema 1 sobre la coincidencia de un homomorfismo ∂ en las cadenas celulares con el homomorfismo

$$j\partial_* : H_n^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sing}}(K^{n-1}) \xrightarrow{j} H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n, K^{n-1}),$$

llegamos a la conclusión de que:

a) el grupo $H_n^{\text{sing}}(K^n)$ se halla en $C_n^{\text{cel}}(K^n)$ como un núcleo de ∂ o sea, coincide con $H_n^{\text{cel}}(K^n)$.

b) el grupo $H_{n-1}^{\text{sing}}(K^n)$ coincide con $Z_{n-1}^{\text{cel}}/\text{Im } \partial$ y por eso coincide con $H_{n-1}^{\text{cel}}(K^n)$.

El teorema queda demostrado.

La demostración del teorema para las cohomologías es totalmente análoga.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE. Para la demostración dada aquí del teorema de coincidencia de las homología celular con las singulares simpliciales la construcción explícita de estas homología no es esencial. Son importantes sólo las propiedades formales de estas teorías de homología. La separación de estas propiedades puras permite dar una definición «axiomática» a la teoría de homología (Steenrod—Eulenberg). Esta definición es la siguiente.

a) Se llamará teoría de homología a una «función» (de otro modo: «functor»), que confronta a cada complejo celular K (o a cada par (K, L) , donde $L \subset K$ es un subcomplejo) un surtido de grupos abelianos $H_i(K)$ (o $H_i(K, L)$), $i = 0, 1, 2, \dots$, y a cada aplicación continua (puede considerársela celular) de complejos $f: K \rightarrow K'$ (o $f: (K, L) \rightarrow (K', L')$, donde $f(L) \subset L'$) es un surtido de homomorfismos

$$\begin{aligned} f_* : H_i(K) &\rightarrow H_i(K'), & i = 0, 1, 2, \dots \\ f_* : H_i(K, L) &\rightarrow H_i(K', L'), \end{aligned}$$

Se requiere que a la superposición de aplicaciones le corresponda la superposición de homomorfismos

$$(fg)_* = f_*g_*; \tag{19}$$

a la aplicación idéntica le debe corresponder el homomorfismo idéntico: $1_* = 1$.

b) La teoría de homología introducida debe tener las siguientes propiedades («axiomas de la teoría de homología»):

1. *Invariación homotópica.* Si las aplicaciones f y g son homotópicas, entonces los homomorfismos f_* y g_* coinciden:

$$f \sim g \Rightarrow f_* = g_*.$$

2. *Están determinados los operadores de frontera*

$$\partial : H_m(K, L) \rightarrow H_{m-1}(L), \quad m = 1, 2, \dots,$$

donde L es un subcomplejo en el complejo K , que conmuta con las aplicaciones continuas de pares de complejos, o sea,

$$\partial f_* = f_* \partial; \quad f: (K, L) \rightarrow (K', L'), \quad f(L) \subset L'.$$

3. *Exactitud.* Designemos por i, j los encajes evidentes

$$L \overset{i}{\subset} K \overset{j}{\subset} (K, L).$$

Se requiere que sea exacta la sucesión de los grupos y homomorfismos

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{m+1}(K, L) \xrightarrow{\partial} H_m(L) \xrightarrow{i_*} H_m(K) \xrightarrow{j_*} \\ \rightarrow H_m(K, L) \xrightarrow{\partial} H_{m-1}(L) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

4. *Corte.* $H_m(K, L) = H_m(K/L, *)$, donde L es un subcomplejo en K ; K/L es un complejo cociente, donde L está contraído en un punto $*$.

5. *Normación.* $H_m(*) = 0$ si $m > 0$ (aquí $*$ es un punto).

PROBLEMA 2. Demostrar que la teoría de homología está determinada por las propiedades enumeradas unívocamente, si $H_0(*) = \mathbb{Z}$ es un grupo dado.

Para las homología celular y singular todas estas propiedades se cumplen (véanse los §§ 4, 5); precisamente por eso coinciden entre sí. En el § 5 también se examinó un ejemplo de homología singular cúbica (no reducida), donde no se cumple el axioma de normación (las homología del punto son no triviales en las dimensiones positivas).

Si se excluye de la teoría de homología la condición de normación, entonces obtendremos la definición de la *teoría extraordinaria de las homología*. Las homología singular cúbica es un ejemplo «trivial» de la teoría extraordinaria de las homología (véase el problema en el § 5). Otro ejemplo más complicado (y más importante) de la teoría extraordinaria de las homología (la teoría de los bordismos) se encontrará en el capítulo 3.

Por analogía con la definición de la teoría de homología se da una definición axiomática de la teoría de cohomología una formulación exacta de los axiomas y la demostración del teorema de unicidad de la teoría de cohomología se las dejamos al lector en calidad de ejercicios). En este camino es posible obtener la demostración de la coincidencia de las cohomología, definidas en el § 1 mediante formas diferenciales, con otros tipos de cohomología. Sólo hay que transformar cualquier complejo en una variedad, tomando un pequeño entorno de su encaje en un espacio euclídeo. No damos aquí tales consideraciones, ya que en el § 14 será indicado otro camino más constructivo de la demostración de coincidencia de cohomología, definidas por las formas, con otros tipos de cohomología.

Indiquemos otra aplicación del operador de la subpartición baricéntrica del complejo simplicial en el caso de variedades («dualidad de Poincaré»), véase también el § 18. Sea triangulada una aplicación suave, es decir, transformada en un complejo simplicial compuesto por simplex suaves. Supongamos que la subpartición es bastante pequeña (si es necesario, efectuamos repetidas subparticiones baricéntricas). Sea σ_α^k un simplex en M^n . Definimos los poliedros duales $D(\sigma_\alpha^k) = \bar{\sigma}_{\alpha^{n-k}}$, que son células de dimensión $n - k$.

a) a un simplex n -dimensional σ_α^n le es dual un vértice $D\sigma_\alpha^n$ de una subpartición baricéntrica, que se encuentra en el centro de un simplex σ_α^n ;

b) a un simplex 0-dimensional σ_α^0 le es dual una célula n -dimensional (poliedro) $D\sigma_\alpha^0$, que es la suma de todos los simplex de una

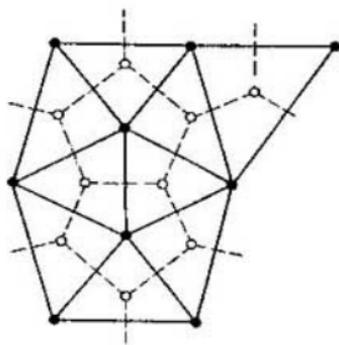


Fig. 42. Triangulación inicial de M^2 indicada con líneas continuas; la partición dual, con líneas de trazos discontinuos.

subpartición baricéntrica con un vértice σ_α^0 (véase la fig. 42 para $n = 2$);

c) a una arista σ_α^1 en M^n , le corresponde una célula $(n - 1)$ -dimensional $D\sigma_\alpha^1$, que es la suma de todos los simplex de la dimensión $n - 1$ de una subpartición baricéntrica, que tienen el centro de la arista σ_α^1 como su vértice y que son adyacentes transversalmente a esta arista;

d) a una cara σ_α^{n-1} en M^n , le corresponde una célula 1-dimensional $D\sigma_\alpha^{n-1}$, que se compone de todos los simplex 1-dimensionales (en el caso dado, de dos) de una subpartición baricéntrica, que tienen el centro σ_α^{n-1} como su vértice y que son adyacentes transversalmente a σ_α^{n-1} (véase la fig. 42).

e) Es evidente la generalización sucesiva: a un simplex σ_α^k en M^n le es dual una célula $D\sigma_\alpha^k$ de dimensión $n - k$, que es la suma de todos los simplex que tienen el centro σ_α^k como su vértice y son

adyacentes transversalmente a este centro. Las células $D\sigma_s^k$ parten a M^n en un complejo (de poliedros).

Propiedades del operador D .

- 1) La intersección $\sigma_s^k \cap D\sigma_s^k$ es un punto (el centro σ_s^k).
- 2) Si no se toman en cuenta los signos es justa la igualdad

$$(\partial\sigma_s^k) \cap D\sigma_s^{k-1} = \sigma_s^k \cap (\partial D\sigma_s^{k-1}) \pmod{2}. \quad (20)$$

Las propiedades 1) y 2) son evidentes directamente para las dimensiones $n = 1, 2, 3$. Es fácil comprender, que son justas para todas las $n > 3$.

La propiedad 1) nos permite definir el producto bilineal escalar $a \circ b$, donde $a \in C_j(M^n)$ es una cadena, $b \in C_D^{n-j}(M^n)$ es una cocadena sobre un complejo dual de las células $D\sigma_\alpha^j$, $a = \sum_i \lambda_i \sigma_i^j$, $b = \sum_k \mu_k D\sigma_k^j$. (En la última igualdad se sobreentiende que a la célula $D\sigma_k^j$ se le confronta una cocadena designada por el mismo símbolo, que tiene el valor 1 en esta célula y 0 en las demás. Tales cocadenas $D\sigma_k^j$ forman una base en el grupo C_D^{n-j}).

Sean λ y μ residuos módulo 2. Supongamos

$$\sigma_i^j \circ D\sigma_k^j = \delta_{ik} \pmod{2}, \quad (21)$$

$$a \circ b = \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k \delta_{ik}. \quad (22)$$

De la propiedad 2) se deduce, por definición,

$$(\partial a) \circ b = a \circ (\partial b), \quad (23)$$

es decir, los operadores de frontera son conjugados. De (23) se deduce:

$$H_j(M^n; \mathbb{Z}_2) \stackrel{D}{=} H^{n-j}(M^n; \mathbb{Z}_2), \quad (24)$$

ya que ambos complejos son las particiones celulares de la misma variedad M^n y tienen iguales homología en cada dimensión. Esto es corolario del teorema sobre la invariación homotópica de las homología celulares. Al isomorfismo (24) se lo llama «dualidad de Poincaré». Para las variedades orientables las igualdades (23) y (24) se cumplen sobre \mathbb{Z} . Más abajo (véase el § 18) la dualidad de Poincaré se deducirá de una manera algo distinta.

Utilizamos varias veces, antes de definir exactamente los grupos de homología, los términos «ciclo k -dimensional» y «película $(k+1)$ -dimensional» en la variedad M^n , comprendiendo lo siguiente:

«ciclo» se da como (M^h, f) , donde M^h es una variedad orientada cerrada y su aplicación $f: M^h \rightarrow M^n$.

«película» (W^{h+1}, f) se da como una variedad orientada compacta W^{h+1} con borde y la aplicación $f: W^{h+1} \rightarrow M^n$. La «película» tiene la frontera

$$\partial(W^{h+1}, f) = (\partial W^{h+1}, f|_{\partial W^{h+1}}) \quad (25)$$

«El grupo de ciclos» son las sumas formales de «ciclos»

$$\sum_i (M_i^h, f_i). \quad (26)$$

Factorizando por los ciclos equivalentes a cero, o sea, por las fronteras (25), obtendremos grupos a manera de homologías, llamados «bordismos» y designados por $\Omega_h(M^n)$. Es posible definir los bordismos para cualquier complejo $\Omega_h(X)$, naturalmente se introducen los «bordismos relativos» $\Omega_h(X, Y)$. Para los bordismos es justo el teorema sobre la invariación homotópica, tiene lugar la sucesión exacta del par (X, Y) y hasta la propiedad $\Omega_*(X, Y) = \Omega_*(X/Y)$. Pero para los espacios contractables (por ejemplo, el punto $*$) los bordismos resultan no triviales en las dimensiones positivas. La causa es muy simple: no cada variedad cerrada M^h , ni mucho menos, es frontera de una variedad con borde $(h+1)$ -dimensional. Por ejemplo, si la variedad M^1 es un borde de la cinta W^2 , entonces la clase $p_1(M^1) = 0$. En particular, $\mathbb{C}P^2$ no es un borde (véanse los detalles en el § 27).

De forma análoga se definen los «bordismos por el módulo 2» o «bordismos no orientables», donde los ciclos (M^h, f) son las aplicaciones $M^h \rightarrow X$ de todas las variedades cerradas (no sólo orientadas), y las películas se toman también no orientadas. Ellos se designan por $N_h(X)$.

PROBLEMA 3 Demostrar que $\mathbb{R}P^2$ no es borde de ninguna variedad tridimensional. Demostrar que todos sus productos directos en sí mismos $\mathbb{R}P^2 \times \dots \times \mathbb{R}P^2$ tampoco son bordes.

PROBLEMA 4. Demostrar, que si la variedad M^h es un borde, o sea, $M^h = \partial W^{h+1}$, entonces la característica de Euler $\gamma(M^h)$ es par.

Se tienen los homomorfismos naturales

$$\Omega_h(X) \rightarrow H_h(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_h(X; \mathbb{R}), \quad N_h(X) \rightarrow H_h(X; \mathbb{Z}_2). \quad (27)$$

Se dice, que la clase de homologías de la imagen de estos homomorfismos son «ciclos realizables como una imagen continua de la variedad», es decir, lo mismo que hemos comprendido antes como ciclo. Pero el estudio de los mismos bordismos y de los problemas donde se utilizan, es más difícil (véase el § 27)

§ 7. Homología del producto directo. Multiplicación en las cohomología. Cohomología de los H-espacios y de los grupos de Lie. Cohomología del grupo unitario.

Sean K_1 y K_2 complejos celulares. El producto directo de los mismos $K_1 \times K_2$ es también un complejo celular, sus células son productos de las células de los complejos K_1 y K_2 . Por eso, el grupo de las cadenas con coeficientes enteros celulares $C_n(K_1 \times K_2; \mathbb{Z})$ es del tipo

$$C_n(K_1 K_2; \mathbb{Z}) = \sum_{h+l=n} C_h(K_1; \mathbb{Z}) \otimes C_l(K_2; \mathbb{Z}).$$

La frontera del producto de dos células $\sigma^i \times \sigma^j$ se obtiene por la fórmula

$$\partial(\sigma^i \times \sigma^j) = (\partial\sigma^i) \times \sigma^j \cup (-1)^i \sigma^i \times (\partial\sigma^j)$$

(el signo $(-1)^i$ tiene en cuenta la orientación). De aquí obtenemos:

AFIRMACIÓN 1. *El complejo de las cadenas con coeficientes enteros del producto directo $K_1 \times K_2$ de los complejos celulares, es el producto tensorial de los complejos $C(K_1; \mathbb{Z})$ y $C(K_2; \mathbb{Z})$:*

$$C(K_1 \times K_2; \mathbb{Z}) = C(K_1; \mathbb{Z}) \otimes C(K_2; \mathbb{Z})$$

(véase el § 2).

Evidentemente, este hecho es correcto también en el caso cuando en vez de los números enteros, en calidad de coeficientes, se toma un anillo conmutativo arbitrario con unidad, en particular, un campo. Aplicando el teorema 2.2, obtenemos:

COPOLARIO. *Para las homología con coeficientes en un campo k es justa la igualdad*

$$H_m(K_1 \times K_2; k) = \sum_{m+l=n} H_m(K_1; k) \otimes H_l(K_2; k).$$

En general, para cualquier anillo G está definido el homomorfismo (no isomorfismo), dado por la multiplicación tensorial de los ciclos

$$\sum_{h+l=m} H_h(K_1; G) \otimes H_l(K_2; G) \rightarrow H_m(K_1 \times K_2; G). \quad (1)$$

Aquí los ciclos $c_1 = \sum_i a_i \sigma_i^h$, $c_2 = \sum_j b_j \sigma_j^l$ se transforman en el ciclo

$c_1 \otimes c_2 = \sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i^h \vee \sigma_j^l)$. Tenemos:

$$\partial(c_1 \otimes c_2) = \partial c_1 \otimes c_2 + (-1)^h c_1 \otimes \partial c_2$$

Por eso la cadena $c_1 \otimes c_2$ es un ciclo. Al cambiar c_1 por $c_1 + \partial c$, sustituimos el ciclo $c_1 \otimes c_2$ por el homológico $(c_1 + \partial c) \otimes c_2 = c_1 \otimes c_2 + \partial(c \otimes c_2)$. La aplicación construida (1) es correcta.

Si $G = k$ es un campo, entonces, la multiplicación tensorial da un isomorfismo.

De forma análoga se define la multiplicación tensorial en las cohomologías con los coeficientes en el anillo:

$$\sum_{h+i=m} H^h(K_1; G) \otimes H^i(K_2; G) \rightarrow H^m(K_1 \times K_2; G)$$

(isomorfismo, si $G = k$ es un campo).

La aplicación diagonal $\Delta: K \rightarrow K \times K$, donde x se transforma en (x, x) , induce el homomorfismo de cohomologías:

$$H^*(K \times K; G) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(K; G).$$

TEOREMA 1. Sea G un anillo asociativo conmutativo con unidad. Entonces, la aplicación pasante

$$\begin{aligned} \Delta^*(a \otimes b) = ab: H^h(K; G) \otimes H^i(K; G) &\rightarrow \\ &\rightarrow H^{h+i}(K \times K; G) \xrightarrow{\Delta^*} H^{h+i}(K; G) \end{aligned}$$

da en la suma directa de los grupos de cohomologías $H^*(K; G) = \sum_{i \geq 0} H^i(K; G)$ una estructura del anillo asociativo anticonmutativo con unidad, $1 \in H^0(K; G)$, $ba = (-1)^{hi}ab$.

DEMOSTRACIÓN. La asociatividad y la anticonmutatividad se deducen de las siguientes propiedades evidentes del producto tensorial:

a) Asociatividad. Si $c_1 \in H^h(K_1; G)$, $c_2 \in H^i(K_2; G)$, $c_3 \in H^m(K_3; G)$, entonces los elementos $(c_1 \otimes c_2) \otimes c_3$, $c_1 \otimes (c_2 \otimes c_3)$ en el grupo $H^{h+i+m}(K_1 \otimes K_2 \otimes K_3; G)$ coinciden.

b) Anticonmutatividad. Si $c \in H^h(K)$, $c' \in H^i(K)$ y $f: K \times K \rightarrow K \times K$ es una aplicación $f(x, y) = (y, x)$, que permuta los factores, entonces, $f^*(c \otimes c') = (-1)^{hi}c' \otimes c$. Hay que aprovechar el hecho que al permutar las células $\sigma^h \times \sigma^i \rightarrow \sigma^i \times \sigma^h$, la orientación del producto cambia por el factor $(-1)^{hi}$.

Como la unidad en el anillo $H^*(K; G)$ será un elemento $1 \in G = H^0(*; G)$. Realmente, la proyección de la diagonal Δ en un factor

$$K \xrightarrow{\Delta} K \times K \xrightarrow{p} K, \quad p(x, y) = x$$

es una aplicación idéntica. Por eso $\Delta^*(a \otimes 1) = a$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACION 1. Para las formas diferenciales sobre las variedades M_1 y M_2 todo es análogo: si están dados dos formas $\bar{\omega} = \sum f_{i_1 \dots i_h} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_h}$, $\bar{\omega}' = \sum g_{j_1 \dots j_l} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_l}$,

entonces su producto tensorial $\bar{\omega} \otimes \bar{\omega}$ está definido como una forma sobre $M_1 \times M_2$,

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \otimes \bar{\omega} &= p_1^*(\bar{\omega}) \wedge p_2^*(\bar{\omega}) = \\ &= \left(\sum f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \wedge \left(\sum g_{j_1 \dots j_l} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_l} \right), \end{aligned}$$

donde $p_1: M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$, $p_2: M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ son proyecciones. Cualquier forma suave sobre $M_1 \times M_2$ puede ser desarrollada en una serie convergente de los productos de formas sobre los factores M_1 y M_2 . El producto tensorial de dos formas cerradas está cerrado en $M_1 \times M_2$; el producto tensorial de una forma cerrada en la exacta es una forma exacta. La definición de la multiplicación exterior de las formas se puede comprender así: si $M_1 = M_2$, entonces, tenemos una diagonal $\Delta = \{(x, x)\} = M_1 \subseteq M_1 \times M_1$ y una acotación en la diagonal $\Delta^*(\bar{\omega} \otimes \bar{\omega}) = \bar{\omega} \wedge \bar{\omega}$ (en M_1), $\bar{\omega} \wedge \bar{\omega} = (-1)^{kl} \bar{\omega} \wedge \bar{\omega}$.

OBSERVACION 2. Para los complejos finitos simpliciales K la multiplicación de las cocadenas simpliciales se puede definir así: ordenemos todos los vértices del complejo K : $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. Cualquier simplex $\sigma^h \subset K$ se escribe, por eso, en forma de un juego ordenado de los vértices

$$\sigma^h = (\alpha_{j_0} \dots \alpha_{j_h}), \quad \text{donde } j_0 < j_1 < \dots < j_h.$$

Sean: α , una cocadena de dimensión k ; β , una cocadena de dimensión l (o sea, las funciones numéricas de los simplex de dimensiones k y l , correspondientemente). Se define la cocadena de dimensión $k+l$ de la manera siguiente:

$$(\alpha \cup \beta, \sigma^{k+l}) = (\alpha, \sigma_1^k) (\beta, \sigma_2^l), \quad (2)$$

donde $\sigma^{k+l} = (\alpha_{j_0} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_{k+l}})$,

$$\sigma_1^k = (\alpha_{j_0} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_k}), \quad \sigma_2^l = (\alpha_{j_k} \alpha_{j_{k+1}} \dots \alpha_{j_{k+l}}).$$

La unidad de esta multiplicación de cocadenas $\alpha \cup \beta$ es una cocadena, que tiene el valor $1 \in G$ en cada vértice (G es un anillo conmutativo con unidad). Evidentemente, esto es un cociclo. La multiplicación de las cocadenas no es anticonmutativa.

PROBLEMA 1. Verifíquese la igualdad (fórmula de Leibniz):

$$\delta(\alpha \cup \beta) = (\delta\alpha) \cup \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \cup (\delta\beta).$$

PROBLEMA 2 Demuestren, que la siguiente diferencia de dos productos es cohomológica a cero, si α y β son cociclos:

$$\alpha \cup \beta - (-1)^{kl} \beta \cup \alpha = \delta\gamma, \quad k = \deg \alpha, \quad l = \deg \beta, \quad \delta\alpha = \delta\beta = 0.$$

Por eso obtenemos un anillo anticonmutativo de cohomologías (con unidad $1 \in H^0(K; G) = G$) $H^*(K; G) = \sum_{q \geq 0} H^q(K; G)$.

PROBLEMA 3. Demostrar, que esta multiplicación en las cohomologías coincide con la introducida más arriba.

La multiplicación de las cadenas con coeficientes enteros permite definir una operación importante, de tallado (o corte). Si z_{h+l} es una cadena de $C_{h+l}(K; \mathbb{Z})$, α y β son cocadenas correspondientes de $C^h(K; \mathbb{Z})$ y $C^l(K; \mathbb{Z})$, entonces hacemos por definición,

$$(\alpha^h \cup \beta^l, z_{h+l}) = (\alpha^h \cap z_{h+l}, \beta^l). \quad (3)$$

La fórmula (3) para todos los β^l con los α^h y z_{h+l} dados, define una cocadena de dimensión l :

$$z_l = \alpha^h \cap z_{h+l} \in C_l(K; \mathbb{Z}).$$

PROBLEMA 4. Demostrar, que la operación de tallado \cap del ciclo z_{h+l} por un cociclo α^h es correctamente definida sobre los grupos de homología

$$H^h(K; \mathbb{Z}) \cap H_{h+l}(K; \mathbb{Z}) \subset H_l(K; \mathbb{Z}).$$

PROBLEMA 5. Demostrar, que con las aplicaciones continuas de los complejos $K \xrightarrow{i} L$ tenemos (en homología)

$$f_* (f^* (\alpha) \cap z) = \alpha \cap f_* (z).$$

PROBLEMA 6. Demostrar, que el operador D (véase el § 6) se da por tallado $\alpha \rightarrow \alpha \cap [M^n]$, donde $[M^n] = z$ es la suma de todos los simplex n -dimensionales.

En el caso cuando un grupo de coeficientes G es un campo, los espacios H^h y H_h son conjugados y la operación de tallado se representa como una multiplicación en las homología. Pero para las homología con coeficientes enteros ésta es útil.

EJEMPLO. Calculemos un anillo de cohomología de un espacio complejo proyectivo $\mathbb{C}P^n$ con coeficientes reales. Las homología $\mathbb{C}P^n$ ya las conocemos (véase el § 1), por eso tenemos:

$$\begin{aligned} H^{2h+1} &= H_{2h+1} = 0, \\ H^{2h}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}) &= H_{2h}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad k \leq n. \end{aligned} \quad (4)$$

En el § 1 fue indicada una 2-forma c_1 , que engendra un anillo de polinomios de una generatriz $c_1 \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R})$ con una relación $c_1^{n+1} = 0$. En virtud de (4) este subanillo coincide con todo el anillo $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R})$. Así obtenemos: para $\mathbb{C}P^n$ el anillo $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R})$ son «polinomios truncados» de una generatriz c_1 de dimensión 2

$$H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[c_1] / c_1^{n+1} = 0, \quad \deg c_1 = 2. \quad (5)$$

Sea $f: K \rightarrow L$ una aplicación continua. La misma puede ser considerada como celular, en virtud del teorema 4.2. Ella engendra la aplicación de los productos directos

$$F = f \times f: K \times K \rightarrow L \times L,$$

suponiendo $F(x, y) = (f(x), f(y))$. La aplicación F conserva la diagonal $F(\Delta) \subset \Delta$ y transforma un producto tensorial de las clases de homología (cohomología) en un producto tensorial de sus imágenes. De aquí se deduce una conclusión importante: como la multiplicación en las cohomología está definida por la fórmula $ab = \Delta^*(a \otimes b)$ en ambos complejos K y L , entonces la aplicación continua f conmuta con la operación de la multiplicación de las clases de cohomología, o sea

$$f^*(ab) = f^*(a) f^*(b).$$

De manera que $f^*: H^*(L) \rightarrow H^*(K)$ es un homomorfismo de los anillos de cohomología.

Apliquemos este resultado al estudio de los anillos de cohomología de los grupos de Lie (y, de modo más general, de H -espacios). Recordemos (véase [1], parte II, § 22), que un H -espacio general X tiene una multiplicación continua $x \circ y = \psi(x, y) \in X$ (o $\psi: X \times X \rightarrow X$) con «unidad homotópica», es decir, con un elemento destacado $x_0 \in X$ tal, que las aplicaciones del producto sobre x_0

$$\begin{aligned} \psi(x_0, x): X &\rightarrow X, \\ \psi(x, x_0): X &\rightarrow X \end{aligned}$$

ambas son homotópicas a una aplicación idéntica. Introduzcamos definiciones algebraicas útiles.

DEFINICIÓN 1. Sea $H = \sum_{h \geq 0} H^h$ un álgebra graduada anticonmutativa con unidad $H^h H^l \subset H^{h+l}$, $yx = (-1)^{hl} xy$, donde $x \in H^h$, $y \in H^l$. A H se la denomina «álgebra de Hopf», si es dado un homomorfismo, que conserva la dimensión

$$\lambda: H \rightarrow H \otimes H \quad \lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + x_1 \otimes y_1 + \dots + x_k \otimes y_k,$$

donde $0 < \deg x_i, \deg y_i < \deg x$. Este homomorfismo λ se denomina frecuentemente la «diagonal» de álgebra H .

EJEMPLO 1. Sea $H = \mathbb{R}[x]$ un álgebra de polinomios con coeficientes reales de la generatriz x . Consideremos que la dimensión del elemento x es par y positiva. Obtenemos un álgebra graduada que, evidentemente, cumple la condición de anticonmutatividad. Damos sobre H una estructura del álgebra de Hopf, tomando $\lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Entonces, es obvio que

$$\lambda(x^h) = x^h \otimes 1 + 1 \otimes x^h + \sum_{i=1}^{h-1} C_{k,i}^i x^i \otimes x^{h-i}.$$

EJEMPLO 2. Sea $H = \bigwedge [y]$ un álgebra exterior de una generatriz y , donde la dimensión y es impar y positiva. Esta también es un álgebra graduada anticonmutativa. La estructura del álgebra de Hopf es dada por la fórmula $\lambda(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y$.

EJEMPLO 3. Se llama álgebra anticonmutativa libre aquella, donde en una base conveniente no existen relaciones no triviales; tales son los ejemplos 1 y 2 del álgebra de polinomios y del álgebra exterior. Un álgebra general libre anticonmutativa graduada $H = \sum_{h \geq 0} H_h$, donde todos los H_h son espacios lineales de dimensión finita y H_0 es un campo de coeficientes ($H_0 = \mathbb{R}$), tiene la forma

$$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_h, \dots] \otimes \bigwedge [y_1, \dots, y_s, \dots],$$

donde las dimensiones $\deg x_i$ de las generatrices x_i son pares, y las dimensiones $\deg y_i$ son impares. O sea, tenemos sencillamente las generatrices (x_j, y_q) y ninguna relación no trivial excepto la anticonmutatividad, de donde se deduce que

$$y_q^2 = -y_q^2 = 0,$$

$$y_i y_j = -y_j y_i, \quad y_i x_j = x_j y_i, \quad x_i x_j = x_j x_i.$$

Es necesario, que sea finito el número de las generatrices de dimensión dada. En semejante álgebra H se puede determinar la estructura del álgebra de Hopf con ayuda de muchos procedimientos*); tomamos para las generatrices

$$\lambda(x_j) = x_j \otimes 1 + 1 \otimes x_j + \sum_i \bar{u}_j^{(i)} \otimes \bar{v}_j^{(i)},$$

$$\lambda(y_q) = y_q \otimes 1 + 1 \otimes y_q + \sum_i \bar{u}_q^{(i)} \otimes \bar{v}_q^{(i)},$$

donde $\deg \bar{u}_j^{(i)}, \deg \bar{v}_j^{(i)}, \deg \bar{u}_q^{(i)}, \deg \bar{v}_q^{(i)} > 0$ y $\deg \bar{u}_j^{(i)} + \deg \bar{v}_j^{(i)} = \deg x_j$, $\deg \bar{u}_q^{(i)} + \deg \bar{v}_q^{(i)} = \deg y_q$ (por lo demás, los elementos $\bar{u}_j^{(i)}, \bar{v}_j^{(i)}, \bar{u}_q^{(i)}, \bar{v}_q^{(i)}$ son arbitrarios). Ya que el álgebra H es libre, entonces, de las condiciones de multiplicatividad y aditividad del homomorfismo λ , se deduce que los elementos $\lambda(x)$, $\lambda(y)$ definen el homomorfismo $H \rightarrow H \otimes H$.

TEOREMA 2 (de Hopf). *Un álgebra de cohomologías del H -espacio K es álgebra de Hopf, o sea, se tiene un homomorfismo*

$$\lambda: H^*(K, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(K, \mathbb{R}) \otimes H^*(K, \mathbb{R}),$$

donde

$$\lambda(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum_i x^{(i)} \otimes y^{(i)},$$

$$\deg x^{(i)}, \deg y^{(i)} > 0$$

* Recordemos, que no exigimos la «asociatividad» de la aplicación diagonal λ .

para cualquier elemento $x \in H^q(K, \mathbb{R})$, $q > 0$. (Consideramos que un H -espacio es un complejo celular.)

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $H^*(K \times K; \mathbb{R}) \approx H^*(K; \mathbb{R}) \otimes H^*(K; \mathbb{R})$, entonces, la multiplicación $\psi: K \times K \rightarrow K$ define un homomorfismo

$$\psi^*: H^*(K; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(K; \mathbb{R}) \otimes H^*(K; \mathbb{R}).$$

Tomamos $\lambda = \psi^*$ y verificamos sus propiedades. Tenemos $\psi^*x = x^{(0)} \otimes 1 + 1 \otimes y^{(0)} + \sum x^{(i)} \otimes y^{(i)}$, donde $\deg x^{(i)}$, $\deg y^{(i)} > 0$. Consideremos el encaje $1 \times i: K \times x_0 \subset K \times K$. Como $\psi(x, x_0)$ es homotópica a una aplicación idéntica, entonces, $(1 \times i)^* \psi^*x = x = x^{(0)} \otimes 1$. Por consiguiente, $x^{(0)} = x$; por analogía, $y^{(0)} = x$. El teorema queda demostrado.

La aplicación de este teorema está basada en la siguiente afirmación algebraica, que describe la estructura de las álgebras de Hopf sobre los números reales.

TEOREMA 3. *Cualquier álgebra de Hopf sobre un campo de característica nula, es decir, de números racionales complejos reales, es un álgebra libre anticonmutativa (véase el ejemplo 3 más arriba).*

COROLARIO. *El álgebra de cohomologías de cualquier grupo de Lie (de dimensión finita) es una álgebra exterior $\wedge[y_1, \dots, y_n]$.*

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Consideremos las generatrices libres (x_j, y_q) . Si se tiene aunque sea una sola de dimensión par, entonces, en el álgebra hay elementos de dimensión tan grande como se quiera. Esto no puede suceder en las cohomologías de un complejo de dimensión finita (de una variedad). El corolario queda demostrado.

EJEMPLO 1. La circunferencia S^1 es un grupo de Lie. Tenemos:

$$H^*(S^1, \mathbb{R}) = \wedge[y_1], \quad \deg y_1 = 1$$

EJEMPLO 2. Calculemos cohomologías de un grupo unitario $U(n)$. Mostremos que tiene lugar la igualdad

$$H^*(U(n), \mathbb{R}) = \wedge[y_1, y_3, \dots, y_{2n-1}]. \quad \deg y_i = i$$

DEMOSTRACIÓN. Un grupo unitario es equivalente (como una variedad) a un producto directo $U(n) = S^1 \times SU(n)$ (véase [1], par II, § 22), por eso es suficiente demostrar, que

$$H^*(SU(n), \mathbb{R}) = \wedge[y_3, \dots, y_{2n-1}]. \quad (6)$$

Cuando $n = 2$, el grupo $SU(2)$ como una variedad, coincide con una esfera S^3 , por eso en este caso es evidente la igualdad (6).

Tenemos un espacio fibrado estándar $SU(n) \xrightarrow{SU(n-2)} S^{2n-1}$, donde la esfera S^{2n-1} es un espacio homogéneo del grupo $SU(n)$ y la fibra $SU(n-1)$ es un grupo de isotropía.

Construimos una partición celular del espacio $SU(n)$, basando en la partición de la esfera S^{2n-1} y de la fibra $SU(n-1)$. Al principio, consideremos el caso $n=3$. Tenemos un espacio fibrado

$SU(3) \xrightarrow{SU(2)} S^5$. Fijemos un vértice σ^0 sobre la esfera S^5 . En la preimagen entera de este punto, la fibra $SU(2) = S^3$, tomamos las células estándares $S^3 = \sigma^0 \cup \sigma^3$. Es trivial el espacio fibrado sobre el complemento de este punto $S^5 \setminus \sigma^0$ (véase [1], parte II § 24), es decir, se puede introducir sobre él las coordenadas del producto directo: $p^{-1}(S^5 \setminus \sigma^0) = (S^5 \setminus 0) \times SU(2)$. Pero $S^5 \setminus \sigma^0$ es un disco 5-dimensional D^5 , por eso $p^{-1}(S^5 \setminus \sigma^0) = D^5 \times S^3$. Este producto se parte en células de la siguiente manera: $D^5 \times S^3 = \sigma^5 \cup \sigma^6$, donde $\sigma^5 = D^5 \times D^3$. Así, la partición celular del grupo $SU(3)$ consiste de cuatro células: $SU(3) = \sigma^0 \cup \sigma^3 \cup \sigma^5 \cup \sigma^6$. Por eso tenemos en las cohomologías de este espacio: $H^0(SU(3), \mathbb{R}) = H^3 = H^5 = H^6 = \mathbb{R}$, las demás cohomólogas son nulas.

Según el teorema de Hopf, es posible escoger las generatrices $y_3 \in H^3(SU(3), \mathbb{R})$, $y_5 \in H^5(SU(3), \mathbb{R})$ tales, que $y_3^2 = y_5^2 = 0$ e $y_3 y_5 = -y_5 y_3 \neq 0$ son generatrices en el grupo $H^8(SU(3), \mathbb{R})$.

Ahora consideremos un caso general. Sea que está ya demostrada la igualdad (6) para las homología $H^*(SU(n-1), \mathbb{R})$. La partición celular del grupo $SU(n)$ está engendrada por un espacio fibrado $SU(n) \xrightarrow{p} S^{2n-1}$ con una fibra $F = SU(n-1)$, partida en células

σ_F^α con un vértice σ_F^0 en la fibra. Las células en la base son σ^0 y σ^{2n-1} . Ya que $p^{-1}(\sigma^0) = F$ y $p^{-1}(\sigma^{2n-1}) = \sigma^{2n-1} \times F$, tenemos las células en $SU(n)$

$$\sigma_F^\alpha \times \sigma^0, \quad \sigma_F^\alpha \times \sigma^{2n-1}. \quad (7)$$

Tenemos por inducción: el número de células en $SU(n-1)$ es igual al número de los cociclos linealmente independientes, y también:

$$H^*(SU(n-1), \mathbb{R}) = \Lambda [y_3, \dots, y_{2n-3}].$$

Mostremos, que las células $\sigma_F^\alpha \times \sigma^0$ y $\sigma_F^\alpha \times \sigma^{2n-1}$ son todos los cociclos. Para $(\sigma_F^\alpha \times \sigma^0)$, que representan los elementos y_i en la fibra, es obvio, ya que una célula nueva aparece en la dimensión $2n-1$. Las demás células en la fibra representan sus productos (por inducción).

Sea $y_{2n-1} = (\sigma_F^0 \times \sigma^{2n-1})$ una cocadena, concentrada en esta nueva célula. Si $\delta y_{2n-1} \neq 0$ en $C^*(SU(n))$, entonces, en el álgebra $H^*(SU(n), \mathbb{R})$ obtendríamos una correlación no trivial entre las generatrices exteriores y_3, \dots, y_{2n-3} . Esto contradice el teorema de Hopf. Por consiguiente, en virtud de este teorema, el álgebra $H^*(SU(n), \mathbb{R})$ contiene un álgebra exterior $\Lambda [y_3, \dots, y_{2n-1}]$.

El rango de esta álgebra en cada dimensión coincide con el número de las células (7). Por eso $H^*(SU(n), \mathbb{R}) = \wedge\{y_1, \dots, y_{2n-1}\}$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3. Sean x_1, x_2, \dots elementos homogéneos del álgebra H , $x_i \in H^{\deg x_i}$, donde $0 < \deg x_i \leq \leq \deg x_j$, $i \leq j$; $\{x_j\}$ sea un sistema minimal de generatrices del álgebra de Hopf H . Esto significa, que cualquier elemento del álgebra H se representa en forma de un polinomio $P(x_1, x_2, \dots)$ de las generatrices (es posible, que no unívocamente), al mismo tiempo, ninguno de los elementos x_k no puede ser representado en forma de un polinomio de los menores x_j ; $x_k \neq P(x_1, \dots, x_{k-1})$. Para un elemento constituyente x_i consideremos sus grados x_i^j .

Sea s_i un número minimal tal, que $x_i^{s_i} = 0$. Por ejemplo, para cualquier elemento de dimensión impar x_i tenemos: $s_i = 2$. Si cualquier grado del x_i constituyente es distinto de cero, consideraremos que $s_i = \infty$.

Primero demostremos que en el álgebra de Hopf no pueden haber otras relaciones, excepto las de forma $x_i^{s_i} = 0$ y correlaciones, deducidas de la anticonmutatividad.

LEMA. Los monomios de forma $x_h^{r_h} x_{h-1}^{r_{h-1}} \dots x_1^{r_1}$, donde $0 \leq r_i < s_i$, son independientes linealmente y forman una base de un espacio vectorial H .

DEMOSTRACION. Es posible reducir cualquier monomio a la forma indicada en el lema, en virtud de anticonmutatividad. A estos monomios se los denominaremos con normales. El grado (dimensión) de un monomio normal se define por la expresión $n = r_h \deg x_h + \dots + r_1 \deg x_1$.

A la combinación lineal de los monomios normales se la llamaremos un polinomio normal. Es necesario demostrar, que un polinomio normal no trivial no es igual a cero. La demostración la vamos a realizar mediante la inducción por el grado de polinomios. Supongamos, que para los grados $< n$ ya está demostrada la afirmación sobre la independencia de los monomios normales en H . De aquí se deduce, en particular, que los productos tensoriales de forma $a \otimes b$ en el álgebra $H \otimes H$, donde a y b son monomios normales del grado menor que n , son también linealmente independientes.

Sea $P(x_h, \dots, x_1)$ un polinomio normal del grado n . Recolectemos juntos los términos con el mayor grado de la variable x_h y saquemos este grado del paréntesis. Obtendremos:

$$P(x_h, \dots, x_1) = x_h^r Q(x_{h-1}, \dots, x_1) + R(x_h, \dots, x_1), \quad (8)$$

donde en el polinomio R la variable x_h se contiene ya en un grado menor.

Supongamos, que tenemos una relación de forma $P(x_h, \dots, x_1) = 0$, donde r es el mínimo posible. Demostremos que

$r = 1$, $Q = \text{const.}$ Sea I_{h-1} un ideal en el álgebra H , engendrado por los elementos x_1, \dots, x_{h-1} . Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda(x_h^r Q(x_{h-1}, \dots, x_1)) &\equiv \\ &\equiv x_h^r \otimes Q + \sum_{i=0}^{r-1} (C_r^i x_h^i \otimes x_h^{r-i}) (1 \otimes Q) \pmod{I_{h-1} \otimes H}, \end{aligned}$$

al mismo tiempo $\lambda(R(x_h, \dots, x_1))$ no contiene términos de forma $x_h^i a \otimes x_h^j b$, donde $i + j = r$. Si $\text{deg } Q > 0$, entonces $\text{deg } x_h^r$ y $\text{deg } Q$ son menores que n , por eso las expresiones, que se contienen en $\lambda(P(x_h, \dots, x_1))$, son linealmente independientes según por supuesto de inducción. Así, $\text{deg } Q = 0$; es posible considerar, que $Q = 1$, $r \text{ deg } x_h = n$. Si $r > 1$, entonces en la expresión

$$\lambda(x_h^r) = \sum_{i=1}^r C_r^i x_h^i \otimes x_h^{r-i} \pmod{I_{h-1} \otimes H}$$

se incluyen términos linealmente independientes, que no pueden abreviarse con nada en $\lambda(R(x_h, \dots, x_1))$. Así, $r = 1$, y la relación (8) tiene la forma $x_h = -R(x_{h-1}, \dots, x_1)$, lo que no es posible en virtud de la condición de minimal del sistema de generatrices. El lema queda demostrado.

Ahora mostremos que si el grado $\text{deg } x_h$ es par, entonces $x_h^i \neq 0$ para cualquier s . Realmente, si ya está demostrado, que $x_h^{s-1} \neq 0$, entonces, en la expresión $\lambda(x_h^s)$ se incluyen términos de la forma $C_s^i x_h^i \otimes x_h^{s-i}$, distintos de cero, para $0 < i < s$. Estos términos son independientes y no pueden abreviarse junto con los demás sumandos en $\lambda(x_h^s)$ (verifíquese).

Así, hemos demostrado que para el sistema minimal de generatrices en el álgebra de Hopf H no hay otras relaciones, excepto la anticonmutatividad. Las generatrices de dimensión par engendran en H una subálgebra de polinomios $\mathbb{R}[x_1^2, x_2^2, \dots]$; las impares a una subálgebra exterior $\wedge[x_1^2, x_2^2, \dots]$. Toda el álgebra H , evidentemente, es su producto tensorial. El teorema está demostrado.

Indiquemos otros ejemplos de H -espacios.

EJEMPLO 1. Si K es un complejo, entonces es posible definir un espacio de curvas $\Omega(K, x_0) = X$, que comienzan y terminan en un punto x_0 (véase [1], parte II, § 22). Aquí se tiene la multiplicación de curvas, una unidad homotópica x_0 . Es más, esta multiplicación es «asociativa homotópicamente» y tiene un «elemento homotópicamente inverso» $x \rightarrow \bar{x}$;

a) aplicaciones $(x \circ y) \circ z: X \times X \times X \rightarrow X$ y $x \circ (y \circ z): X \times X \times X \rightarrow X$ son homotópicas; b) aplicación $x \rightarrow x \circ \bar{x}: X \rightarrow X$ es homotópica a una aplicación constante $X \rightarrow x_0$.

EjemPlo 2. Además de los grupos de Lie, la ley de multiplicación con unidad se puede introducir sobre una esfera hepta-dimensional S^7 , partiendo de los llamados números de Cayley: un espacio \mathbb{R}^8 es un álgebra con división (pero no asociativa). La multiplicación bilineal se da así: si (q_1, q_2) es un par de cuaternios, (q'_1, q'_2) es otro par, entonces, supongamos

$$(q_1, q_2) \cdot (q'_1, q'_2) = (q_1 q'_1 - \bar{q}_2 q'_2, q'_2 q_1 + q_2 \bar{q}'_1),$$

$$(q_1, q_2)^{-1} = \frac{(\bar{q}_1, -q_2)}{|q_1|^2 + |q_2|^2}.$$

Además de los grupos de Lie G y los productos $G \times S^7 \times \dots \times S^7$ no son conocidos otros ejemplos de los H -espacios simplemente conexos de dimensión finita. Por ejemplo, si se tiene una multiplicación en la esfera S^{n-1} con unidad $x \in S^{n-1}$, entonces tenemos una aplicación de multiplicación:

$$S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{\psi} S^{n-1}, \quad (x, y) \rightarrow x \circ y.$$

Sucesivamente,

$$S^{2n-1} = (D^n \times S^{n-1}) \cup (S^{n-1} \times D^n)$$

(la pegadura por una frontera común $S^{n-1} \times S^{n-1}$). La aplicación ψ es posible prolongarla hasta la aplicación

$$j(\psi) : S^{2n-1} = (D^n \times S^{n-1}) \cup (S^{n-1} \times D^n) \rightarrow S^n,$$

donde S^{n-1} es un ecuador en S^n (efectúe esta operación).

Consideremos un complejo

$$K_n = S^n \cup_{j(\psi)} D^{2n}$$

con células $\sigma^0, \sigma^n, \sigma^{2n}$. Por eso

$$H^j(K_n) = \begin{cases} 0, & j \neq 0, n, 2n, \\ \mathbb{Z}, & j = 0, n, 2n. \end{cases}$$

Sean $u_n \in H^n(K_n, \mathbb{Z}_2)$, $u_{2n} \in H^{2n}(K_{2n})$, clases básicas de cohomología (mod 2).

PROBLEMA 7. Mostrar, que $u_n^2 = u_{2n}$, si la multiplicación tiene unidad, o sea, $\psi : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ tiene el grado +1 en cada factor.

Conocemos ejemplos de multiplicación sobre las esferas S^{n-1} para $n = 1, 2, 4, 8$ (números reales \mathbb{R} , complejos \mathbb{C} , cuaternios \mathbb{H} y números de Cayley \mathbb{K}). Se tiene un teorema difícil (Adams) de que para otros $n \neq 1, 2, 4, 8$ tales complejos K_n no existen y ($K_1 = \mathbb{R}P^2$, $K_2 = \mathbb{C}P^2$, $K_4 = \mathbb{H}P^2$, $K_8 = \mathbb{K}P^2$).

Demos un empleo más de la multiplicación cohomológica. Demostremos, que un grupo $\pi_{2n-1}(S^n)$ es infinito para n pares.

Consideremos $S^n \times S^n$, donde n es par. En el anillo $H^*(S^n \times S^n)$ escogemos una base $1, 1 \otimes u, u \otimes 1, u \otimes u$, donde $u \in H^n(S^n)$ es un elemento básico. Consideremos una aplicación de un ramo φ :

$$S^n \vee S^n \subset S^n \times S^n, \quad S^n \vee S^n = (S^n \times x_0) \cup (x_0 \times S^n),$$

$$\varphi: S^n \vee S^n \rightarrow S^n$$

de grado λ en el primer sumando y de grado μ en el segundo.

Tenemos $\varphi^*(u) = \lambda(u \otimes 1) + (1 \otimes u)\mu$.

Como $u^2 \neq 0$, obtenemos, que con $\mu, \lambda \neq 0$ la aplicación φ no se prolonga hasta la aplicación $\hat{\varphi}: S^n \times S^n \rightarrow S^n$, ya que de la condición $u^2 = 0$ se deduciría $\hat{\varphi}^*(u^2) = 0$. Pero $\hat{\varphi}^*(u^2) = 2\lambda\mu u \otimes u \neq 0$. La partición celular $S^n \times S^n$ es la siguiente:

$$S^n \times S^n = (\sigma^0 \cup \sigma^n \cup \sigma^n \cup \sigma^{2n}) = (S^n \vee S^n) \cup D^{2n}.$$

La aplicación $S^{2n-1} = \partial D^{2n} \rightarrow S^n \vee S^n \xrightarrow{\varphi} S^n$ no es homotópica a cero con cualesquiera $\mu, \lambda \neq 0$, ya que, de otra forma, la aplicación se prolongaría sobre un disco D^{2n} y, de este modo, sobre todos los $S^n \times S^n$.

PROBLEMA 8. Demostrar, que el número $\lambda\mu$ es un invariante aditivo de una clase homotópica de una aplicación construida $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ para cualesquiera n pares.

PROBLEMA 9. Construir una aplicación $\psi: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ para cualesquiera n pares con $\lambda = 2, \mu = -1$.

PROBLEMA 10. Sea $S^{2n-1} \xrightarrow{f} S^n$ es correcto en los puntos $x_0, x_1 \in S^n$ (véase [1], parte II, § 10) y $M_1^{n-1} = f^{-1}(x_0), M_2^{n-1} = f^{-1}(x_1)$ son subvariedades cerradas. Sea $\{M_1^{n-1}, M_2^{n-1}\}$ su coeficiente de enganche (véase [1], parte II, § 15)*). Supongamos

$$\gamma = \{M_1^{n-1}, M_2^{n-1}\}.$$

Demostrar, que para las aplicaciones arriba construidas $f = f \circ \gamma$ tiene lugar la igualdad $\gamma = 2\lambda\mu$.

Demostrar, que para un complejo $K = S^n \cup D^{2n}$, donde la pegadura está hecha por la aplicación $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$, tenemos $u_n^2 = \gamma u_{2n}$ en el anillo $H^*(K, \mathbb{Z})$.

PROBLEMA 11. Demostrar, que para cualquier espacio fibrado suave

$$S^{2n-1} \xrightarrow{f} S^n$$

el coeficiente $\gamma = \pm 1$.

*) El coeficiente de enganche en [1] fue definido sólo para las curvas cerradas en \mathbb{R}^3 . Pero de modo análogo se define un coeficiente de enganche para las subvariedades M_1^h, M_2^h en \mathbb{R}^{2h+1} (o en S^{2h+1}) como un índice de intersección de una de ellas con una película, que está tendida sobre la otra.

§ 8. Homologías de productos oblicuos [espacios fibrados]

La relación de las homologías de fibra, base y espacio para los espacios fibrados es inconmensurablemente más compleja que para un producto directo. Consideremos los coeficientes como un campo, sin mencionarlo en adelante. Supongamos que se tiene un espacio

fibrado $E \xrightarrow{p} B$ con una fibra F , donde todos los E , B , F son complejos celulares o son homotópicamente equivalentes a ellos. La partición celular del espacio E ya fue indicado más arriba (§ 7):

si σ_F^j son células de la fibra F y σ_B^q son células de base, entonces, una preimagen $p^{-1}(\sigma_B^q)$ es un producto directo $\sigma_B^q \times F$, y tenemos las células en E

$$\sigma_E^{j+q} = \sigma_B^q \times \sigma_F^j.$$

De manera que una partición celular formalmente es la misma, que en un producto directo. Pero el operador de frontera está arreglado con mayor complejidad. Ya hemos dado un ejemplo (véase § 4) de un espacio de elementos lineales hacia una superficie de género g , donde son evidentes estas complejidades. Vamos a enumerar las propiedades simples del operador de frontera en E .

1) Si σ_B^0 es un vértice en la base, entonces para las células $\sigma_E^j = \sigma_B^0 \times \sigma_F^j$ tenemos una igualdad evidente:

$$\partial \sigma_E^j = \sigma_B^0 \times (\partial \sigma_F^j).$$

2) Si $\sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times \sigma_F^j$, entonces, la frontera es de forma

$$\partial \sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times (\partial \sigma_F^j) + \Delta, \quad (1)$$

donde Δ son células de una preimagen entera $p^{-1}(\overline{\partial \sigma_B^q})$, además, bajo $\overline{\partial \sigma_B^q}$ se entiende la clausura topológica de la imagen de la esfera S^{q-1} que es la frontera $\partial \sigma_B^q$ en la base B . En todo caso, $\Delta \subset p^{-1}(B^{q-1})$, donde B^{q-1} es un armazón de la base de dimensión $q-1$.

PROBLEMA 1. Sea que la base B simplemente conexa, tiene un vértice σ_B^0 y no tenga células de dimensión 1. Entonces, es correcta la fórmula

$$\partial \sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times (\partial \sigma_F^j) + (-1)^j (\partial \sigma_B^q) \times \sigma_F^j + \Delta_1, \quad (2)$$

donde $\Delta_1 \subset p^{-1}(B^{q-2})$.

Vamos a suponer en adelante, que se consideran los espacios fibrados $E \xrightarrow{p} B$, donde es correcta la fórmula (2). Por ejemplo, esta fórmula es correcta, evidentemente, en el caso cuando la base no tiene células de dimensión $q-1$. Esto es correcto para $B = S^n$ ($n > 1$), $B = \mathbb{C}P^n$, $B = \mathbb{H}P^n$, y también, si B es una varie-

dad compleja de Grassmann, ramo de esferas, producto directo de esferas y una serie de otros.

OBSERVACION. En realidad, los razonamientos que hacemos y las deducciones que se formulan serán correctos (después de algunas complicaciones) en un caso más general: un grupo $\pi_1(B)$ debe actuar trivialmente en los grupos $H_*(F)$. Para los espacios fibrados de elementos lineales esto significa, por ejemplo, que la base es una variedad orientable (la fibra es una esfera). Si la fibra es una esfera, entonces esta condición siempre será cumplida para $H_*(F, \mathbb{Z}_2)$ sin depender de la orientabilidad de la base y del espacio fibrado, ya que $H_*(S^n, \mathbb{Z}_2)$ nunca tiene automorfismos no triviales. Las correcciones surgidas en el caso cuando $\pi_1(B)$ actúa no trivialmente en $H_*(F)$, serán indicadas en el § 11 (más abajo).

Así, estudiamos una clase de espacios fibrados para los cuales es correcta la fórmula (2).

Desarrollemos en serie la frontera respecto a los armazones de base:

$$\partial \sigma_E^{q+j} = \sigma_B^q \times (\partial \sigma_F^j) + (-1)^j (\partial \sigma_B^j) \times \sigma_F^j + \partial_2 + \partial_3 + \dots,$$

donde $\partial_k = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \sigma_{B, \alpha}^{q-k} \times \sigma_{F, \alpha}^{j+k-1}$, (λ_{α} son números) se compone de productos de células $(q-k)$ -dimensionales de base por células $(j+k-1)$ -dimensionales de fibra. Por definición, tenemos:

$$\begin{aligned} \partial \sigma_E^{q+j} &= \partial_0 + \partial_1 + \partial_2 + \dots, \\ \partial_0 &= \sigma_B^q \times (\partial \sigma_F^j), \quad \partial_1 = \pm (\partial \sigma_B^j) \times \sigma_F^j. \end{aligned}$$

Para un complejo de cadenas tenemos

$$C_n(E) = \sum_{q+j=n} C_q(B) \otimes C_j(F).$$

El operador de frontera es de forma

$$\partial_{\mathbb{E}}(a \otimes b) = a \otimes \partial_F b \pm (\partial_B a) \otimes b + \partial_2(a \otimes b) + \dots, \quad (3)$$

donde

$$\partial_k(a \otimes b) \in C_{q-k}(B) \otimes C_{j+k-1}(F)$$

para $a \in C_q(B)$, $b \in C_j(F)$.

Prestemos atención a que los operadores ∂_0 y ∂_1 son los mismos que en el producto directo $E_0 = B \times F$. Los operadores ∂_k con $k \geq 2$ en el producto directo son iguales a cero. Ellos caracterizan los grados de «deformación» del operador de frontera en un complejo $C(E)$ en comparación con el producto directo $E_0 = B \times F$.

Para estudiar las homologías $H_*(E)$ se utiliza el «método de cernido» o «método de aproximaciones sucesivas» sucesivamente por

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ (llamado sucesión espectral de Leray). La esencia de este método consiste en lo siguiente:

PASO 0. Puesto que $\partial_0^2 = 0$, podemos calcular «homologías de aproximación nula» respecto sólo a este «operador de frontera en aproximación nula» ∂_0 . Obtenemos:

$$H_n(C(E), \partial_0) = \sum_{q+j=n} C_q(B) \otimes H_j(F) = \sum_{j+q=n} E_{q,j}^{(1)}.$$

De este modo, $H_n(C, d_0)$ son cadenas en la base B con valor en las homologías de fibra F : $E_{p,j}^{(1)} = C_q(B, H_j(F))$.

PASO 1. En los d_0 -ciclos por módulo de fronteras $\text{Im } d_0$ (o sea, en los grupos $H_*(C, d_0)$) está determinado correctamente el operador d_1 , que tiene la propiedad $d_1^2 = 0$. Tenemos un complejo

$$E^{(1)} = \sum E_{q,j}^{(1)}, \quad d_1: E_{q,j}^{(1)} \rightarrow E_{q-1,j}^{(1)}.$$

En nuestras hipótesis las homologías en una primera aproximación, es decir para un complejo $(E^{(1)}, d_1)$, coinciden con las homologías del producto directo (véanse las formas ∂_0 y ∂_1):

$$\begin{aligned} H_n(E^{(1)}, d_1) &= \sum_{q+j=n} H_q(B, H_j(F)) = \\ &= \sum H_q(B) \otimes H_j(F) = H_*(B \otimes F). \end{aligned}$$

El operador d_1 es un operador de frontera en las cadenas en la base B con coeficientes en $H_*(F)$.

Se tiene una descomposición directa evidente

$$H_n(E^{(1)}, d_1) = \sum_{q+j=n} H_q(B) \otimes H_j(F),$$

donde los sumandos están representados por los d_1 -ciclos $z \in E_{q,j}^{(1)} = C_q(B, H_j(F))$ con exactitud hasta las d_1 -fronteras $\text{Im } d_1$. Los grupos de d -homologías $H_n(E^{(1)}, d_1)$ se designan por

$$E_n^{(2)} = \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(2)} = \sum H_q(B) \otimes H_j(F) = H_n(B \otimes F).$$

Para un producto directo $E_0 = B \times F$ todo el procedimiento se termina aquí. Para un producto oblicuo aparecen los siguientes pasos, que utilizan $\partial_2, \partial_3, \dots$

PASO 2. El operador ∂_2 engendra un operador de frontera d_2 en las homologías de la «primera aproximación» $E^{(2)} = H_*(E^{(1)}, d_1)$ y tiene la propiedad $\partial_2^2 = 0$. Aparecen las homologías de «segunda aproximación»

$$E_n^{(3)} = H_n(E^{(2)}, d_2) = \sum_{q+j=n} H_{q,j}(E^{(2)}, d_2),$$

$$E_n^{(3)} = \sum_{n \geq 0} E_n^{(3)}, \quad E_n^{(3)} = \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(3)}.$$

Tenemos

$$d_2 : E_{q,j}^{(2)} \rightarrow E_{q-2,j+1}^{(2)}, \quad E_{q,j}^{(2)} = H_q(B) \otimes H_j(F).$$

Los elementos de los grupos $E_{q,j}^{(3)} = H_{q,j}(E^{(2)}, d_2)$ están representados por los elementos (d_2 -ciclos) $z \in E_{q,j}^{(2)} = H_q(B) \otimes H_j(F)$ con exactitud hasta las d_2 -fronteras.

Esta sucesión de "cernidos" se prolonga en adelante: aparecen complejos $E^{(r)} = \sum E_{q,j}^{(r)}$ con un operador de frontera

$$d_r : E_{q,j}^{(r)} \rightarrow E_{q-r,j+r-1}^{(r)} \quad \text{y} \quad E^{(r+1)} = \sum E_{q,j}^{(r+1)} = H_*(E^{(r)}, d_r).$$

Es obvio, que todos los grupos $E_{q,j}^{(r)}$ con $q < 0$ o con $j < 0$ son iguales a cero para todos los $r \geq 0$. Por eso el operador $d_r \equiv 0$ en los grupos $E_{q,j}^{(r)}$, si $q < r$. En este caso tenemos

$$E_{q,j}^{(r)} = E_{q,j}^{(r+1)} \equiv E_{q,j}^{(r+2)} \equiv \dots \equiv E_{q,j}^{(\infty)}, \quad q < r.$$

Estos grupos se designan por $E_{q,j}^{(\infty)}$.

Teorema (de Leray) *).

1) Todas las diferenciales d_r están definidas correctamente y $d_r^2 \equiv 0$.

2) La suma directa $E_n^{(\infty)} = \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)}$ es isomorfa al grupo $H_n(E)$ para un campo de coeficientes.

3) Los grupos $E_{q,j}^{(3)}$ son isomorfos a los grupos $H_q(B) \otimes H_j(F)$.

Así, como resultado de «pasar por estos filtros» hemos obtenido los ciclos en un espacio E (como núcleos de todos los homomorfismos d_r por el módulo de las imágenes precedentes), con exactitud hasta las fronteras.

COROLARIO. En un producto oblicuo los rangos de grupos de homologías, hablando en general, son menores, que en el directo (o sea, los números de Betti $b_k(E) \leq b_k(E_0)$ para todos los k , $E_0 = B \times F$). Esto se deduce del hecho de que ya $E_n^{(2)} = H_n(E_0)$; después se realiza «el filtrado» de una parte de los ciclos mediante los operadores d_2, d_3, \dots , escogiendo sólo sus núcleos (d_r -ciclos), factorizando por d_r -fronteras, pasando después a d_{r+1} , etc.

Damos la definición de los operadores d_n en los grupos $E_{q,j}^{(2)}$. Como $\partial_E = \partial_0 + \partial_1 + \partial_2 + \dots$ y $\partial_E \partial_E \equiv 0$, obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned} 0 = \partial_E^2 &= \partial_0^2 + (\partial_0 \partial_1 + \partial_1 \partial_0) + (\partial_1^2 + \partial_0 \partial_2 + \partial_2 \partial_0) + \\ &\quad + (\partial_1 \partial_2 + \partial_2 \partial_1 + \partial_0 \partial_3 + \partial_3 \partial_0) + \\ &\quad + (\partial_2^2 + \partial_3 \partial_1 + \partial_1 \partial_3 + \partial_0 \partial_4 + \partial_4 \partial_0) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

*) De todos los materiales utilizados en este libro, este teorema nos da un primer caso importante, cuando es imposible la demostración sin recurrir al lenguaje riguroso del álgebra homológica.

Aplicando la igualdad general (4) a los grupos $C_{q,j}(E)$ por separado, obtendremos una cadena de igualdades

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_0^2: C_{q,j} \rightarrow C_{q,j-2}, \\ 0 &= \partial_0 \partial_1 + \partial_1 \partial_0: C_{q,j} \rightarrow C_{q-1,j-1}, \\ 0 &= \partial_1^2 + \partial_0 \partial_2 + \partial_2 \partial_0: C_{q,j} \rightarrow C_{q-2,j}, \\ 0 &= \partial_1 \partial_2 + \partial_2 \partial_1 + \partial_0 \partial_3 + \partial_3 \partial_0, \\ 0 &= \partial_2^2 + \partial_1 \partial_3 + \partial_3 \partial_1 + \partial_0 \partial_4 + \partial_4 \partial_0. \end{aligned} \quad (5)$$

1) Consideremos un operador ∂_1 en d_0 -ciclos ($\partial_0 = \partial_0$) mod d_0 -fronteras, es decir, en las d_0 -homología $E_{q,j}^{(d)}$.

Si $\partial_0 x = 0$, entonces tenemos

$$\partial_1(x + \partial_0 \bar{x}) = \partial_1 x + \partial_1 \partial_0 \bar{x} = \partial_1 x - \partial_0(\partial_1 x).$$

De esta manera, d_1 está definido correctamente en d_0 -ciclos mod d_0 -fronteras. Por consiguiente, tenemos de (5)

$$\partial_1^2 x = -\partial_0 \partial_2 x - \partial_2 \partial_0 x = -\partial_0 \partial_2 x,$$

ya que $\partial_0 x = 0$. Por eso obtenemos

$$\partial_1^2 x \equiv 0 \pmod{\text{Im } d_0}, \quad d_1^2 \equiv 0 \text{ en } E_*^{(d)}.$$

Así, d_1 está definido correctamente, y $d_1^2 = 0$ en los grupos $H_*(E^{(d)}, d_0)$.

2) Construir un operador d_2 en los grupos $H_*(E^{(d)}, d_1) = E^{(2)}$. Consideremos en las cadenas $C_*(E)$ un representante x de un elemento de $E_{q,j}^{(2)}$; tal, que

$$\partial_0 x = 0, \quad \partial_1 x = 0 \pmod{\text{Im } \partial_0}$$

ora

$$\partial_1 x = \partial_0 y. \quad (6)$$

La cadena $\partial_2 x$ puede no tener la propiedad (6). Tenemos

$$\begin{aligned} \partial_0 \partial_2 x &= -\partial_2 \partial_0 x - \partial_1 \partial_1 x = -\partial_1 \partial_0 y = \partial_0 \partial_1 y, \\ \partial_1 \partial_2 x &= -\partial_2 \partial_1 x - \partial_0 \partial_3 x - \partial_3 \partial_0 x = \\ &= -\partial_2 \partial_0 y + \text{Im } \partial_0 = \partial_0 \partial_2 y + \partial_1^2 y + \text{Im } \partial_0 \end{aligned} \quad (7)$$

($\partial_3 \partial_0 x = 0$). De las correlaciones (7) se deduce, que un elemento

$$\partial_2 x - \partial_1 y = d_2 x$$

ya satisface las condiciones (6). Así obtenemos:

$$d_2 x = \partial_2 x - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 x + [\text{Im } \partial_0 + \partial_1 (\text{Ker } \partial_0)].$$

Con esto

$$\partial_1 \partial_2 x = \partial_0 (\partial_2 y - \partial_3 x).$$

Corrección de la definición de d_2x :

que $x \rightarrow x + \partial_0z + \partial_1v = \tilde{x}$ ($\partial_0v = 0$); entonces

$$\begin{aligned} d_2\tilde{x} - \partial_1^{-1}\partial_0\partial_1^{-1}\tilde{x} &= \partial_2x + \partial_2\partial_0z + \partial_2\partial_1v = \\ &= (\partial_2x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1x) - \partial_0\partial_2z - \partial_1^2z - \partial_1^2\partial_2v - \\ &- \partial_0\partial_3v - \partial_3\partial_0v + \partial_1^2z + \partial_1(\partial_0^{-1}\partial_0\partial_2v + \partial_0^{-1}\partial_2\partial_0v) = \\ &= (\partial_2x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1x) + \text{Im } \partial_0 + \partial_2(\text{Ker } \partial_0) \end{aligned}$$

($\partial_3\partial_0v = \partial_0\partial_0^{-1}\partial_2\partial_0v = 0$). De manera que d_2 está definido correctamente en $E_{q,j}^{(2)}$. Verifiquemos la igualdad $d_2d_2 = 0$ en $E_{q,j}^{(2)}$. Si $\partial_0x = 0$, $\partial_0y = \partial_1x$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} d_2x &= \partial_2x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1x, \\ d_2^2x &= \partial_2(\partial_2x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_2x) = \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1(\partial_2x - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1x) = \\ &= -\partial_0\partial_4x - \partial_4\partial_0x - \partial_1\partial_3x - \partial_3\partial_0y - \partial_2\partial_1y - \partial_1(\partial_2y - \partial_3x) = \\ &= -\partial_0(\partial_4x + \partial_3y) = \text{Im } \partial_0 \end{aligned}$$

($\partial_4\partial_0x = 0$). De este modo, el operador $d_2 = \partial_2 - \partial_1\partial_0^{-1}\partial_1$ está definido correctamente en los grupos $E_{q,j}^{(2)}$ y tiene la propiedad $d_2d_2 = 0$.

3) El operador d_3 en los grupos $E_{q,j}^{(3)} = H_{q,j}(E^{(2)}, d_2)$ se define de la misma manera, partiendo del operador ∂_3 en tales cadenas $x \in C_{q,j}(E)$, donde $\partial_0x = 0$, $\partial_1x = \partial_0y$, $\partial_2x - \partial_1y = \partial_0z + \partial_1w$ y donde $\partial_0w = 0$ (d_2 -ciclos), con exactitud hasta la unificación de las imágenes d_i , $i \leq 2$, de las fronteras de todos los anteriores operadores d_i . Sin calcular, apuntamos que todos los operadores d_r pueden ser definidos correctamente, corrigiendo el operador ∂_r , que actúa de $C_{q,j}$ en $C_{q-r,j+r-1}$, en las adiciones de las imágenes $\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_{r-1}$, por analogía con d_2 . Con esto tendremos $\bar{d}_r d_r = 0$ y $d_r: E_{q,j}^{(r)} \rightarrow E_{q-r,j+r-1}^{(r)}$ por definición. No nos importa la forma exacta del operador d_r .

Aclaremos la idea de demostración del teorema de Leray (dado más arriba) para un caso particular, cuando todos los ∂_i con $i \geq 3$ son triviales. Aquí se puede verificar todo hasta el fin sin recurrir al lenguaje del álgebra homológica, mediante cálculo directo. Ya se ha comprobado la corrección del operador d_2 . Hay que demostrar que las homologías $H_*(E^{(2)}, d_2) = H_*^{(2)} = E_*^\infty$ coincidirán con las homologías $H_*(E)$ sobre un campo de coeficientes.

Sea x un elemento de $H_n(E)$, representado por un ciclo que es la cadena $\bar{x} \in C_n(E) = \sum_{q+j=n} C_{q,j}(E)$. Llamaremos «filtración» del elemento $x \in H_*(E)$ a tal número minimal q , que x puede ser realizado por un ciclo \bar{x} de una preimagen completa $p^{-1}(B^q)$ de un arma-

zón q -dimensional de base y no puede ser realizado por una cadena de $p^{-1}(B^{q-1})$:

$$\bar{x} = x_q + x_{q-1} + \dots + x_0 = x_q + \Delta, \quad \Delta \in p^{-1}(B^{q-1}),$$

donde

$$x_q \in C_{q,j}, \quad x_{q-1} \in C_{q-1,j+1}, \quad \dots, \quad x_0 \in C_{0,n}.$$

Como $\partial_E \bar{x} = 0$, tenemos la $(\partial_E = \partial_0 + \partial_1 + \partial_2)$ descomposición de $\partial_E x$ respecto a los grupos $C_{q,j}$:

$$\begin{aligned} \partial_E \bar{x} = \partial_0 x_q + (\partial_1 x_q + \partial_0 x_{q-1}) + \\ + (\partial_2 x_q + \partial_1 x_{q-1} + \partial_0 x_{q-2}) + \\ + (\partial_2 x_{q-1} + \partial_1 x_{q-2} + \partial_0 x_{q-3}) + \dots = 0. \end{aligned}$$

De la condición $\partial_E \bar{x} = 0$ nos queda

$$\partial_0 x_q = 0, \quad \partial_1 x_q = -\partial_0 x_{q-1}, \quad \partial_2 x_q = -\partial_1 x_{q-1} - \partial_0 x_{q-2}.$$

De aquí deducimos, que la cadena x_q es un ciclo de las diferenciales d_0, d_1, d_2 , ya que

$$\begin{aligned} d_0 = \partial_0(x_q) = 0, \quad d_1 = \partial_1(x_q) = -\partial_0(x_{q-1}), \\ d_2 x_q = \partial_2 x_q - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 x_q = \partial_2 x_q + \partial_1 x_{q-1} = -\partial_0 x_{q-2}. \end{aligned}$$

Así, al ciclo x de la filtración q le corresponde la cadena $x_q \in C_{q,j}(E)$, que define el ciclo de todas las diferenciales $d_r, r = 0, 1, 2, \dots$. Por eso x_q queda en los grupos $E_{q,j}^{(\infty)}$ (en nuestro caso $E^{(\infty)} = E^{(3)}$). Mostremos, que x_q no es frontera de ninguna de las diferenciales $d_r (r = 0, 1, 2)$, y por lo tanto, da un elemento no nulo en $E_{q,j}^{(\infty)}$. Si $x_q = \partial_0 z = d_0 z$ para $z \in C_{q,j+1}(E)$, entonces la filtración del elemento $\tilde{x} = x - \partial_E z$ es menor que q , ya que

$$\tilde{x} = (x_q - \partial_0 z) + (x_{q-1} - \partial_1 z) + \dots,$$

además, $x_{q-1} - \partial_0 z = 0$. Por eso $x_q \neq \partial_0 z$, ya que, por condición, q es minimal, y el ciclo x no es posible sacarlo del armazón B^q . Sea $x_q = d_1 v$, donde $\partial_0 v = 0$ y $v \in C_{q+1,j}$. Se verifica fácilmente, que un ciclo $x - \partial_E v$ tendría filtración $< q$. Por eso $x_q \neq d_1$ ($\text{Ker } d_0$). Luego, si $x_q = d_2 w = \partial_2 w - \partial_1 \partial_0^{-1} \partial_1 w$ para $w \in C_{q+2,j-1}$ (donde $\partial_0 w = 0, \partial_2 w = \partial_0 u$), entonces, sacamos \tilde{x} del armazón q -dimensional $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x} - \partial_E w$. Esta contradicción muestra, que el ciclo de todas las diferenciales $x_q \in C_{q,j}(E)$ pasa a ser $E_{q,j}^{(\infty)}$ y es distinta de cero en $E_{q,j}^{(\infty)}$, si la filtración de la clase de homología $x \in H_{q+j}(E)$ es exactamente q .

Tenemos el encaje

$$H_n(E) \rightarrow \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)}.$$

Por el contrario, que se dé un ciclo de todas las diferenciales d_r : $x_q \in C_{q,j}(E)$, no igual a cero en $E_{q,j}^{(\infty)}$. Conocimos lo siguiente (que todos los $\partial_i = 0$ con $i \geq 3$):

$$\begin{aligned} \partial_0 x_q &= 0, & \partial_1 x_q &= \partial_0 y, \\ \partial_2 x_q - \partial_1 y &= \partial_0 z + \partial_1 w, & \partial_0 w &= 0, \\ z \in C_{q-2, j+2}, & y \in C_{q-1, j+1}, & w \in C_{q-1, j+1}. \end{aligned}$$

Tomemos

$$\tilde{x} = x_q + x_{q-1} + x_{q-2} + x_{q-3} + \dots,$$

donde $x_{q-1} = -(y + w)$, $x_{q-2} = -z$,

$$\begin{aligned} \partial_E \tilde{x} &= \partial_0 x_q + (\partial_1 x_q - \partial_0 y - \partial_0 w) + \\ &\quad + (\partial_2 x_q - \partial_0 z - \partial_1 y - \partial_1 w) + \Delta = \Delta, \end{aligned}$$

donde $\Delta \in p^{-1}(B^{q-3})$. Cambiando al representante x_q , y también a y , w , z , obtenemos, en virtud de las relaciones (4) y (5), un ciclo \tilde{x} de filtración q , con la condición de que $\partial_i \tilde{x} = 0$, $i \geq 3$.

Así, cada elemento de los grupos $E_n^{(\infty)} = \sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)}$ representa un elemento de $H_n(E)$.

Complementos (sin demostración)

1) Los elementos de filtración $q = 0$ siempre son ciclos de todos los d_r , $r \geq 1$; los grupos $E_{0,n}^{(1)}$ son isomorfos a $H_n(E)$. Los grupos $E_{0,n}^{(\infty)}$ son grupos cocientes; el homomorfismo $H_n(F) \rightarrow E_{0,n}^{(\infty)} \subset H_n(E)$ coincide con el homomorfismo de encaje de fibra $i: F \rightarrow E$.

2) Los elementos de filtración n ($j = 0$) no pueden ser fronteras; aquí $E_{n,0}^{(1)} = H_n(B)$ y $E_{n,0}^{(\infty)} \subset H_n(B)$.

El homomorfismo de proyección en un sumando $j = 0$

$$\sum_{q+j=n} E_{q,j}^{(\infty)} = H_n(E) \rightarrow E_{n,0}^{(\infty)} \subset H_n(B)$$

coincide con la proyección en la base

$$p_*: H_n(E) \rightarrow H_n(B).$$

3) Para las cohomologías todo es análogo: se tiene una sucesión $(E_r^{q,j}, \delta_r)$, donde

a) $\delta_r: E_r^{q,j} \rightarrow E_r^{q+r, j-r+1}$, $\delta_r \delta_r = 0$, $E_{r+1}^* = H^*(E_r, \delta_r)$;

b) $\sum_{q+j=n} E_r^{q,j} = H^n(B \times F) = \sum H^q(B) \otimes H^j(F)$;

c) $\sum_{q,j} E_{\infty}^{q,j} = H^*(E)$ (como un grupo);

d) todos los grupos E_r^* y los operadores δ_r son conjugados con (E_r^*, d_r) en las homología. Pero aquí se tienen una nueva propiedad importante:

e) todos los $E_r^* = \sum E_r^{q,j}$ son anillos anticonmutativos, además, $H^*(B \times F) = E_2^*$ como un anillo; si $\alpha \in E_r^{q,j}$, $\beta \in E_r^{\tilde{q},\tilde{j}}$ entonces, $\alpha\beta \in E_r^{q+\tilde{q},j+\tilde{j}}$, $\alpha\beta = (-1)^{(q+j)(\tilde{q}+\tilde{j})}\beta\alpha$: para δ_r tiene lugar la fórmula de Leibniz

$$\delta_r(\alpha\beta) = (\delta_r\alpha)\beta \pm \alpha(\delta_r\beta)$$

(notemos, que el anillo E_{∞}^* no es isomorfo al anillo $H^*(E)$, hablando en general; la excepción es un caso, cuando E_{∞}^* es un álgebra libre anticonmutativa; entonces, esto es justo también para $H^*(E)$).

Estos hechos no los demostraremos, aunque los utilizaremos (en especial, el e)) más abajo, en los cálculos.

Consideremos algunos ejemplos de la aplicación del teorema de Leray. Como será visto, la construcción de los operadores d_r , $r \geq 2$, no tiene importancia alguna en los cálculos, son importantes sólo sus propiedades formales.

EJEMPLO 1. Sea $E = S^{2n+1} \rightarrow CP^n = B$ con fibra $F = S^1$ un espacio fibrado estándar (véase [1], parte II, § 24). Calculemos un anillo $H^*(CP^n)$, utilizando información sobre $H^*(S^1)$ y $H^*(S^{2n+1})$ y condición $\pi_1(B) = 0$.

j	0	0	0	0	0	0	0
1	u	0	$u \otimes v$	0	$u \otimes v^2$	0	$u \otimes v^3$
0	1	0	$H^2(CP^n)$	$H^3(CP^n)$	$H^4(CP^n)$	$H^5(CP^n)$	$H^6(CP^n)$
			\parallel	\parallel	\parallel	\parallel	
			0	0	0	0	
	0	1	2	3	4	5	6

Aquí $H^1 = 3$

Fig. 43.

En el término $E_2^* = H^*(B) \otimes H^*(F)$, véase la fig. 43 (todas las células no nulas de $E_3^{q,j}$ las tenemos para $j = 0, 1$). Aquí $H^*(S^1) = \Lambda[u]$, $u^2 = 0$, $\deg u = 1$ y $H^*(B)$ es incógnita, salvo la condición $\pi_1 = 0$. Los grupos $E_3^{q,j}$ son no triviales sólo cuando $j = 0, 1$. Por eso sólo $\delta_2 \neq 0$; cuando $i \geq 3$ todos los $\delta_i \equiv 0$ por razonamientos de dimensión, puesto que $\delta_r E_3^{q,j} \subset E_3^{q+r, j-r+1}$. Los grupos $E_3^{q,0}$ son ciclos de todos los δ_r , $r \geq 2$. El elemento $\delta_2(u) \in H^2(CP^n) = E_2^{2,0}$ engendra un grupo $H^2(CP^n)$; de otro

modo, tendríamos $H^1(E) = H^1(S^1) \neq 0$, o bien $H^2(E) \neq 0$, lo que es imposible. Sea $v = \delta_2(u) \neq 0$. Para uv tenemos

$$\delta_2(uv) = v^2, \quad \delta_2(uv^k) = v^{k+1}.$$

De la condición $H^i(E) = 0$ con $i \leq 2n$, deducimos: $H^{2j+1}(CP^n) = 0$. $H^{2j}(CP^n)$ es un espacio unidimensional, engendrado por un elemento v^j para $j \leq n$. Aquí utilizamos la estructura circular de la diferencial δ_2 (véase la fig. 43).

EJEMPLO 2. Sea $E \xrightarrow{p} S^n$ un espacio fibrado de Serre con fibra $F = \Omega(S^n, x_0)$ (nudos en la esfera). Aquí E es contraíble y $H_*(E) = 0$. Para la base $B = S^n$ tenemos, que $H_0(S^n)$ y $H_n(S^n)$ son espacios unidimensionales; los demás $H_j(S^n) = 0$, $j \neq 0, n$. Las homologías de la fibra F por ahora son incógnitas.

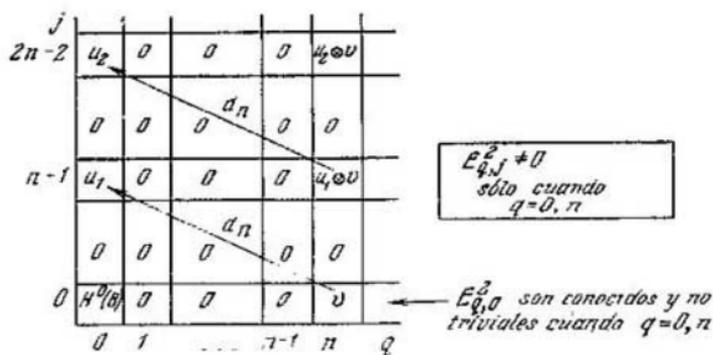


Fig. 44.

En el término $E_{q,j}^{(2)} = H_q(B) \otimes H_j(F)$ (véase la fig. 44) tenemos una diferencial no trivial única

$$\begin{aligned} d_n : v &\rightarrow u_1, \\ d_n : v \otimes u_1 &\rightarrow u_2, \\ &\dots \dots \dots \\ d_n : v \otimes u_{k-1} &\rightarrow u_k. \end{aligned} \tag{8}$$

La forma de diferencial d_n (véase (8)) se obtiene inmediatamente del teorema de Leray junto con condición $H_*(E) = 0$ y una forma de homologías de la base $B = S^n$. Por eso las homologías $H_*(F)$ tienen la forma:

$H_{n(n-1)}(F)$, que es un espacio unidimensional,

$$H_j(F) = 0, \quad j \neq n(n-1).$$

PROBLEMA 2. Demostrar, utilizando la multiplicación cohomológica (los coeficientes, es un campo $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$) que:

- a) $H^*(\Omega S^n)$ es un anillo de los polinomios de una generatriz u de dimensión $n-1$, si n es impar;
 b) $H^*(\Omega(S^n)) = \Lambda[u] \otimes \mathbb{R}[v]$, $\deg u = n-1$, $\deg v = 2n-2$, n es par.

PROBLEMA 3. Demostrar, que si en la tríada de espacios (E, F, B) cualesquiera dos tienen una de las siguientes propiedades, entonces, el tercero también la tiene (se supone, que un espacio fibrado $E \xrightarrow{p} B$ satisface las condiciones del teorema de Leray):

- a) los grupos de homología H_* con coeficientes en algún campo, son iguales a cero;
 b) los grupos de homología H_* tienen un número finito de generatrices en cada dimensión;
 c) todos los grupos de homología con coeficientes enteros son grupos finitos (es decir, las homología con coeficientes en \mathbb{R}, \mathbb{Q} o \mathbb{C} son iguales a cero);
 d) todos los grupos de homología con coeficientes enteros son finitos y no tienen elementos de orden p , donde p es un número primo (es decir, las homología con coeficientes en un campo \mathbb{Z}_p son iguales a cero).

PROBLEMA 4. Estudiar las diferenciales d_r, δ_r en los espacios fibrados:

- a) $\mathbb{R}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ (la fibra S^1) con coeficientes en los campos $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p, p > 2, \mathbb{R}$ o \mathbb{Q} ;
 b) $SU(n) \rightarrow S^{2n-1}$ (fibra $SU(n-1)$);
 c) $SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ (fibra $SO(n-1)$);
 d) $S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ (fibra S^3);
 e) $V_{n,h} \rightarrow S^{n-1}$ (fibra $V_{n-1, h-1}$);
 f) $V_{n,h}^{\mathbb{C}} \rightarrow G_{n,h}^{\mathbb{C}}$ (fibra $U(k)$);
 g) $V_{n,h}^{\mathbb{R}} \rightarrow G_{n,h}^{\mathbb{R}}$ (fibra $SO(k)$).

Utilice la estructura circular en las cohomología para los ejemplos b) -g).

PROBLEMA 5. Demostrar los siguientes hechos:

- a) Si todas las homología de un complejo simplemente conexo K son finitas (es decir, si $H_q(K, \mathbb{R}) = 0$ para $q > 0$), entonces, todos los grupos homotópicos son finitos;
 b) todos los grupos $\pi_{n+i}(S^n)$ son finitos (excepto $i=0$ e $i=n-1$, si n es par).

INDICACION. Considere un espacio fibrado de Serre $E \xrightarrow{p} K$ con una fibra $\Omega(K, k_0)$, donde E es contractable. Itere este espacio fibrado. Para estudiar los grupos $\pi_i(K)$ utilice la igualdad $\pi_i(K) = \pi_{i-1}(\Omega(K)) = \dots$ Para el primer grupo no trivial homotó-

pico utilice la igualdad: si $\pi_q(X) = 0$, $q < i$, entonces $\pi_i(X) = H_i(X, \mathbb{Z})$. Pase al cubrimiento universal, si se encuentra un grupo π_1 (véase el problema 7 más abajo).

Se tiene un procesamiento de «transformación de la aplicación en un espacio fibrado», que conserva tipos homotópicos:

a) si $K \subset L$ es un encaje, entonces se toma un espacio $E(K, L)$ de las curvas (rutas) que se comienzan en K y se terminan donde se quiera en L . Evidentemente, $E(K, L) \sim K$ (se contrae a K). Tenemos una aplicación $(E(K, L) \xrightarrow{p} L)$, que confronta a la curva su extremo. Esto es el espacio fibrado de Serre (demuéstrelo);

b) para una aplicación general $K \xrightarrow{f} L$ es necesario considerar un «cilindro» $C_f = (K \times I(0, 1)) \cup_f L$, donde $(x, 1) \cong f(x)$. Es evidente, que $C_f \sim L$. Luego, $C_f \supset K \times 0 = K$. Aplicando al par $(C_f, K \times 0)$ la construcción a), obtendremos un espacio fibrado

$$K \sim E(K, L) \xrightarrow{p} G_f \sim L.$$

Es fácil ver, que p es homotópico a f . Utilizando estas construcciones, resuelva los problemas siguientes.

PROBLEMA 6. Demostrar, que si la aplicación f de los complejos simplemente conexos induce un homomorfismo de los grupos de homologías $H_*(K, \mathbb{R}) \cong H_*(L, \mathbb{R})$, entonces, la aplicación f induce un isomorfismo de grupos de homotopías

$$\pi_i K \otimes \mathbb{R} \cong \pi_i(L) \otimes \mathbb{R}.$$

Aplicarlo al caso, cuando $K = S^3 \times S^5 \times \dots \times S^{2n-1}$ y $L = SU(n)$. Construya la aplicación $K \rightarrow L$, utilizando la multiplicación en $SU(n)$.

PROBLEMA 7. Si X es un H -espacio (por ejemplo, $X = \Omega(K)$), entonces para todo $q > 0$ demostrar la igualdad

$$H_q(\hat{X}, \mathbb{R}) = H_q(X, \mathbb{R}),$$

donde \hat{X} es un cubrimiento universal. Sea $D = \pi_1(X)$ y $K(D, 1) = B$ un espacio tal, que $\pi_1(B) = D$ y $\pi_i(B) = 0$, $i > 1$ (véase el § 10 más abajo). Considerar una aplicación $X \xrightarrow{f} B$, $\pi_1(X) \cong \pi_1(B) = D$.

Transformarla en un espacio fibrado. Hallar la fibra.

PROBLEMA 8. Considerar un encaje (inmersión) natural $S^n \vee \vee S^n \rightarrow S^n \times S^n$. Transformarla en un espacio fibrado. Hallar las homologías de la fibra F . Hallar los grupos homotópicos $\pi_i(S^n \vee \vee S^n) \otimes \mathbb{R} = ?$

PROBLEMA 9. Sean: X , simplemente conexo, y $H^*(X, \mathbb{R})$, un álgebra libre (anticonmutativa). Hallar los grupos $\pi_i(X) \otimes \mathbb{R}$.

PROBLEMA 10. Sea $\pi_i(X) = 0$ con $i \leq n-1$. Demostrar la igualdad $H_j(X, \mathbb{R}) \cong \pi_j(X) \otimes \mathbb{R}$ para $j < 2n-1$.

§ 9. Problema de prolongación de aplicaciones, homotopías y secciones. Clase obstaculizadora de cohomología.

A. Planteamos el siguiente problema: sean dados un complejo celular K y su subcomplejo $L \subset K$ (por ejemplo, $L = K^{i-1}$ es un armazón del complejo K). Sea dada una aplicación $L \xrightarrow{f} X$. Para simplificar la parte algebraica, suponemos que X es un espacio simplemente conexo (u homotópicamente simple, tal, que $\pi_1(X)$ es un grupo abeliano y actúa trivialmente en todos los grupos $\pi_i(X)$).

¿Es posible prolongar la aplicación $f: L \rightarrow X$ hasta la aplicación $F: K \rightarrow X$?

Sea σ^i una célula en K tal, que $\partial\sigma^i \subset L$. En la frontera $\partial\sigma^i$ ya tenemos una aplicación $f: L \rightarrow X$. Esta aplicación define un elemento $\alpha(\sigma^i, f) \in \pi_{i-1}(X)$:

$$S^{i-1} \rightarrow \partial\sigma^i \xrightarrow{f} X.$$

Es evidente que la aplicación f se puede prolongar en una célula σ^i si, y sólo si, $\alpha(\sigma^i, f) = 0$ en el grupo $\pi_{i-1}(X)$. En particular, siempre es posible prolongarla, si $\pi_{i-1}(X) = 0$. Si $\alpha(\sigma^i, f) \neq 0$, entonces es imposible prolongar la aplicación f en la célula σ^i (α es un «obstáculo»).

En el caso general, habiendo comenzando a prolongar una aplicación con primera dimensión tal, que se tienen células en K , que no se encuentran en L , para un cierto i tropezaremos con un «obstáculo» no trivial.

$$\sigma^i \rightarrow \alpha(\sigma^i, f) \in \pi_{i-1}(X).$$

Esto es una cocadena en (K, L) o en un grupo de cocadenas $C^i(K, L, \pi_{i-1}(X))$. Designemos a esta cocadena por α_f .

Tiene lugar el

LEMA 1. *La cocadena α_f es un cociclo.*

DEMOSTRACIÓN Por definición, tenemos: $\delta\alpha_f(\sigma^{i+1}) = \alpha_f(\partial\sigma^{i+1})$. Demostremos que la cocadena α_f se anula en $\partial\sigma^{i+1}$. Recordemos, que $\alpha_f(\sigma^i)$ fue definido por una aplicación $\partial\sigma^i \rightarrow X$. Para simplificar, sean K y L complejos simpliciales; entonces, $\partial\sigma^{i+1}$ y $\partial\sigma^i$ son esferas, que se encuentran en K , donde σ^q es un simplex de dimensión q . Surge la siguiente situación universal: para un simplex σ^{i+1} hay una aplicación de su armazón $(i-1)$ -dimensional en X ($\pi_1(X) = 0$ o π_1 no actúa en los grupos π_{i-1}). Sea representado $\alpha_f \in \pi_{i-1}(X)$ por una aplicación de la frontera de la cara con el número j : si $\sigma^{i+1} = (0, \dots, i+1)$, entonces, la cara j -ésima es $(0, 1, \dots, j, \dots, i+1)$ (el número j está borrado).

PROBLEMA 1. Demostrar la igualdad

$$\sum_{j=0}^{i+1} \alpha_j (-1)^j = 0 \in \pi_{i-1}(X) \quad (1)$$

para cualquier x .

En efecto, el hecho es que cada cara de dimensión $i - 1$ se incluye dos veces en la suma (1) y, además, con signos opuestos (el grupo $\pi_{i-1}(X)$ es abeliano). Al mismo tiempo, de nuestras condiciones se deduce que el punto inicial en la definición de $\pi_{i-1}(X)$ es insignificante. Por eso α_j es un cociclo.

LEMA 2. Si $\alpha_f = \delta\beta$ para cierta cocadena $\beta \in C^{i-1}(K, L, \pi_{i-1}(X))$, entonces es posible transformar una aplicación f en un armazón $(i - 1)$ -dimensional K^{i-1} , no transformándola en un armazón $(i - 2)$ -dimensional K^{i-2} y en todo el L de tal modo, que para una nueva aplicación \tilde{f} tendrá lugar $\alpha_{\tilde{f}} = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Con las condiciones del lema, sustituimos la aplicación f en la célula σ^{i-1} por una nueva aplicación $\tilde{f}: \sigma^{i-1} \rightarrow X$, de manera que ellas coinciden en $\partial\sigma^{i-1}$; con esto, un par de aplicaciones f, \tilde{f} de la célula σ^{i-1} definen juntas una aplicación $S^{i-1} \rightarrow X$, que da un elemento $-\beta$ (σ^{i-1}) en el grupo $\pi_{i-1}(X)$. Después de semejante transformación de la aplicación f obtendremos para la nueva aplicación \tilde{f} , el hecho que $\alpha_{\tilde{f}} = \alpha_f - \delta\beta \equiv 0$.

El lema queda demostrado.

Como resultado de los lemas 1 y 2 obtenemos

CONCLUSIÓN: Está definido «el primer obstáculo» para prolongar la aplicación $\alpha_f \in H^i(K, L; \pi_{i-1}(X))$ al intentar la prolongación de la aplicación f del subcomplejo $L \cup K^{i-1}$ en el complejo $L \cup K^i$. Su igualdad a cero es suficiente para la prolongación (véase el lema 2). Evidentemente, es posible la prolongación, si $\pi_{i-1}(X) = 0$.

PROBLEMA 2. Sean: $\pi_q(X) = 0$ con $i < q$, y $f: K^q \rightarrow X$, una aplicación de un armazón q -dimensional. Sea que X no tiene células de dimensiones $0 < p < q - 1$ (un complejo reducido, véase § 4). Entonces, cualquiera célula σ^q del complejo K define el elemento $\beta(\sigma^q) \in \pi_q(X)$ mediante la aplicación $\sigma^q \rightarrow X$. Demostrar que el obstáculo para prolongar esta aplicación en el armazón K^{q+1} es una cocadena $\alpha_f = \delta\beta$. En particular, la aplicación f se prolonga en K^{q+1} , si β es un cociclo.

B. Consideremos un «obstáculo para la homotopía» de dos aplicaciones f y $g: K \rightarrow X$, que ya coinciden en el armazón K^{q-1} . En cualquiera célula $\sigma^q \subset K^q$ del armazón K^q tenemos dos aplicaciones $f, g: \sigma^q \rightarrow X$, que coinciden en la frontera: $f|_{\partial\sigma^q} = g|_{\partial\sigma^q}$. Conjuntamente f y g dan una aplicación de la esfera $S^q \rightarrow X$. Este es un «elemento distintivo» $\alpha(\sigma^q, f, g) \in \pi_q(X)$. Así, tenemos una «cocadena distintiva»

$$\alpha(\sigma_q, f, g) \in \pi_q(X).$$

PROBLEMA 3. Mostrar, que $\delta^\alpha = 0$. Mostrar que para un caso $\alpha = \delta\beta$ es posible cambiar la homotopía entre f y g en un armazón K^{q-1} , sin tomar el armazón K^{q-2} , y después tendremos $\alpha \equiv 0$. Por eso la distintiva se encuentra en $H^q(K, \pi_q(X))$.

PROBLEMA 4. Sea que tenemos un par (K, L) , $L \subset K$ y sea dada una aplicación $f: L \rightarrow T^n$ en un toro n -dimensional. La condición necesaria de la prolongación de la aplicación f de L sobre K es la siguiente: si $\gamma \in \pi_1(L)$ y el encaje $i: L \rightarrow K$ transforma este elemento en la unidad, $i_*(\gamma) = 1$, entonces debe ser $f_*(\gamma) = 1$ en el toro T^n . Demostrar que esta condición es suficiente para la prolongación. Demostrar que para prolongar la aplicación es también suficiente una condición análoga en las homología, o sea para $\gamma \in H_1(L)$. Tal situación surge, por ejemplo, en la teoría de nudos (véase [1], parte II, § 26).

PROBLEMA 5. Hallar un conjunto $\pi(K, T^n)$ de clases homotópicas de aplicaciones $K \rightarrow T^n$ (particularmente, para $n = 1$ en S^1). Con mayor generalidad: sea $X = K(D, n)$ un espacio tal («complejo de Eulenberg-MacLane»), que $\pi_i(X) = 0$, $i \neq n$, y $\pi_n(X) = D$ es un grupo abeliano. Demostrar que $\pi(K, X) = H^n(K, D)$. Verificar para $n = 1$, que $H^1(K, D)$ y $\pi(K, X)$ se determinan por los homomorfismos $\pi_1(K) \rightarrow D$. Este resultado sobre $\pi(K, X)$ es justo para los grupos no abelianos D con $n = 1$. Ejemplos:

$$n = 1: D = \mathbb{Z}, K(\mathbb{Z}, 1) = S^1,$$

$$D = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}, K(D, 1) = T^n,$$

$$D = \pi_1(M_g^2), K(D, 1) = M_g^2 \text{ (superficie del género } g \geq 1),$$

$$D = \mathbb{Z}_m, K(D, 1) = S^\infty / \mathbb{Z}_m \text{ (para } m = 2 \text{ tenemos } K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{R}P^\infty \text{ o } \mathbb{R}P^N, N \rightarrow \infty),$$

$$D = F \text{ (grupo libre), } K(F, 1) = S^1 \vee \dots \vee S^1 \text{ (ramo de circunferencias).}$$

Hay muchísimos ejemplos de espacios $K(D, 1)$ con distintos grupos $D = \pi_1(X)$. El único espacio, que se construye simplemente, $K(D, 2)$ es el caso $n = 2$, $D = \mathbb{Z}$, $K(D, 2) = \mathbb{C}P^\infty = S^\infty / S^1$ (véase [1], p. II, § 24).

PROBLEMA 6. Sea K^n un complejo de dimensión n . Hallar las clases homotópicas de aplicaciones $K^n \rightarrow S^n$. Demostrar la igualdad

$$\pi(K^n, S^n) = H^n(K^n, \mathbb{Z}).$$

C. Es completamente análogo el problema de construcción y de homotopía de secciones de espacios fibrados $E \xrightarrow{p} B$ con fibra F , donde la base B está representada en forma de un complejo simplicial o celular. Otra vez, para hacerlo más fácil, suponemos que la base B es simplemente conexa (o, más débilmente, $\pi_1(B)$ no actúa en los grupos $\pi_1(F)$ mediante traslaciones) y la fibra F es también simplemente conexa u homotópicamente simple.

Sea dada una sección φ en un armazón $B^{q-1} \subset B$. Sobre un simplex $\sigma^q \subset B^q$ se tiene un producto directo $p^{-1}(\sigma^q) = \sigma^q \times F$. En la frontera $\partial\sigma^q = S^{q-1}$ se tiene una sección $\varphi: \partial\sigma^q \rightarrow \partial\sigma^q \times F$, donde $p\varphi = 1$. Por eso está definida la aplicación $\partial\sigma^q = S^{q-1} \rightarrow F$, que da un elemento $\alpha(\sigma^q, \varphi) \in \pi_{q-1}(F)$ (cocadena obstaculizadora).

PROBLEMA 7. Demostrar que $\delta_\alpha = 0$.

PROBLEMA 8. Demostrar que para $\alpha = \delta\beta$ es posible transformar la sección en el armazón B^{q-1} , no tocándola en B^{q-2} , que $\alpha \equiv 0$. De manera que $\alpha \in H^q(B, \pi_{q-1}(F))$.

PROBLEMA 9. Sea que la fibra es una esfera $S^{q-1} = F$. Mostrar que el obstáculo $\alpha \in H^q(B, \pi_{q-1}(F))$ es una «clase de Euler» de espacio fibrado, (véase [1], parte II, § 25), definida con ayuda de conexión en un espacio fibrado con impares $q - 1$ para los espacios fibrados con un grupo $G = SO(q)$ como un elemento de $H^q(B, \mathbb{R})$.

PROBLEMA 10. Consideremos un obstáculo para la homotopía de dos secciones φ_1 y $\varphi_2: B \rightarrow E$, donde $p\varphi_1 = p\varphi_2 = 1$. Sea que coinciden las secciones en un armazón $B^{q-1} \subset B$. Determinar el obstáculo para la homotopía y estudiar sus propiedades

$$\alpha(\varphi_1, \varphi_2) \in H^q(B, \pi_q(F)).$$

EJEMPLO 1. Sea contractable la fibra, $\pi_i(F) = 0$ para todo i ; entonces, siempre existe la sección, y todas las secciones son homotópicas. Por ejemplo:

a) F es un conjunto de métricas de Riemann positivas (en un punto dado) sobre una variedad M^n . Sabemos (véase [1], parte II, § 8), que siempre existe la sección (métrica) y que dos secciones (dos métricas positivas) son homotópicas, y entonces es posible unirlos con una curva. Si la métrica es indefinida (por ejemplo, de forma (p, q)), entonces, este resultado no es correcto. ¿Cuáles son los grupos $\pi_i(F)$ para este caso? Notemos, que $F = GL(n, \mathbb{R})/O(p, q)$, $p + q = n$.

b) F es un conjunto de «superficies horizontales» en un punto dado de espacio $E \rightarrow B$ o de conexiones (véase [1], parte II, § 24), donde fue demostrada la existencia de la conexión).

EJEMPLO 2. Sea $E \xrightarrow{p} B$ un espacio fibrado con un grupo $G = O(n)$ y una fibra \mathbb{R}^n . Consideremos un espacio fibrado asociado de k -jalones (ortonormalizados): $E_n \xrightarrow{p} B$, la fibra $F_k = V_{n,k}$ (variedad de Stiefel de k -jalones en \mathbb{R}^n). En particular, para $k = n$, tenemos $F_n = O(n)$, y para $k = 1$, tenemos $F_1 = S^{n-1}$. Los conocimientos sobre los grupos homotópicos de fibra los obtenemos de [1], parte II, § 24:

$$\pi_i(V_{n,k}) = 0, \quad i < n - k,$$

$$\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n - k \text{ es impar,} \\ \mathbb{Z}_2, & n - k \text{ es par.} \end{cases}$$

La clase obstaculizadora de cohomología para construir secciones de estos espacios fibrados tiene forma («el primer obstáculo»)

$$\alpha_k \in H^{n-k+1}(B, \pi_{n-k}(V_{n,k}))$$

para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

DEFINICIÓN 1. La clase $\alpha_k \pmod{2}$ se denomina «clase de Stiefel—Witney» de espacio fibrado y se designa por

$$W_q = \alpha_{n-q+1} \pmod{2} \in H^q(B, \mathbb{Z}_2), \quad q = 1, \dots, n.$$

Por definición, se supone $W_0 = 1$ y se forma un «polinomio de Stiefel—Witney»

$$W(t) = 1 + W_1 t + \dots + W_q t^q + \dots$$

donde t es una variable formal. A las clases de Stiefel—Witney de una variedad suave M^n las llamaremos clases de espacio fibrado tangente.

PROBLEMA 11. Demostrar, que la igualdad $W_1 = 0$ es necesaria y suficiente para orientabilidad de la variedad M^n . Mostrar, que W_n es una característica de Euler $\pmod{2}$.

PROBLEMA 12. Demostrar, que para los productos directos de variedades (o para los productos directos de espacios fibrados) tenemos

$$W(t) = \overline{W}(t) \overline{\overline{W}}(t)$$

(el producto en un anillo de cohomología $H^*(, \mathbb{Z}_2)$ y \overline{W} , $\overline{\overline{W}}$ son polinomios de Stiefel—Witney de los factores).

PROBLEMA 13. Demostrar, que para un espacio fibrado no trivial unidimensional estándar η sobre $\mathbb{R}P^n$ («cinta de Moebius», véase [1], parte II, § 24) tenemos

$$W(t) = 1 + W_1 t, \quad W_1 \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad W_1 \neq 0.$$

Calcular un polinomio de Stiefel—Witney de un espacio fibrado tangente τ sobre $\mathbb{R}P^n$, utilizando el siguiente resultado: $\tau \oplus 1 = \eta \oplus \dots \oplus \eta$ (véase el problema 1 de [1], parte II, § 24).

PROBLEMA 14. Examinar k campos vectoriales η_1, \dots, η_k sobre una variedad M^n (en posición general). Surge un «ciclo de singularidades», donde los campos son linealmente dependientes. Mostrar, que esto es un ciclo $\pmod{2}$ en un grupo $H_{k-1}(M^n, \mathbb{Z}_2)$, dual, según Poincaré, a una clase de Stiefel—Witney W_{n-k+1} .

EJEMPLO 3. Consideremos un espacio fibrado complejo $E \xrightarrow{p} B$ con fibra \mathbb{C}^n y un grupo $G = U(n)$, y los espacios fibrados asociados de k -jalones unitarios (complejos) en él $E_k \xrightarrow{p} B$, fibra $F_k = V_{n,k}^{\mathbb{C}}$. Conocemos los grupos homotópicos (véase [1], parte II, § 24):

$$\pi_i(V_{n,k}^{\mathbb{C}}) = 0, \quad i \leq 2(n-k), \quad \pi_{2(n-k)+1}(V_{n,k}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}.$$

El primer obstáculo para construir la sección del espacio fibrado $E_h \xrightarrow{p} B$ es un elemento de cohomologías con coeficientes enteros

$$c_{n-h+1} \in H^{2n-2h+2}(B, \pi_{2n-2h+1}(V_{n,h}^{\mathbb{C}})) = H^*(B, \mathbb{Z}).$$

DEFINICIÓN 2. La clase \bar{c}_q se denomina «clase de Chern» ($q = 1, \dots$) del espacio fibrado $E \xrightarrow{p} B$. Si $B = M^{2n}$ es una variedad compleja, entonces, las clases de Chern del espacio fibrado tangente se llaman clases de esta variedad. Se introduce el «polinomio de Chern»

$$c(t) = 1 + c_1 t + \dots + c_q t^q + \dots,$$

donde t es una variable formal.

PROBLEMA 15. Demostrar que para el producto de espacios fibrados (o variedades) es justa la fórmula

$$c(t) = \bar{c}(t) \bar{\bar{c}}(t),$$

donde \bar{c} , $\bar{\bar{c}}$ son polinomios de Chern de factores.

PROBLEMA 16. Mostrar, que para un U_1 -espacio fibrado estándar η sobre $\mathbb{C}P^n$ tenemos

$$c(t) = 1 + c_1 t,$$

donde $c_1 \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ es un elemento básico.

□ Hallar el polinomio de Chern de un espacio fibrado tangente τ sobre $\mathbb{C}P^n$, utilizando el hecho de que $\tau \oplus 1 = \eta \oplus \dots \oplus \eta$ (ídemuéstrelo!, véase [1], parte II, § 24).

PROBLEMA 17. Mostrar que para variedades complejas M^{2n} la clase c_n coincide con la característica de Euler. Hallar los polinomios de Chern de las superficies de Riemann.

PROBLEMA 18. Mostrar que es posible reducir un grupo estructural del $U(n)$ -espacio fibrado a $SU(n)$ si, y sólo si, $c_1 = 0$.

PROBLEMA 19. Para un espacio fibrado complejo-conjugado $\bar{\xi}$ a un espacio fibrado ξ con base B (véase [1], parte II, § 24) demostrar la igualdad

$$c(t, \bar{\xi}) = c(-t, \xi)$$

o

$$c_{2i}(\xi) = c_{2i}(\bar{\xi}),$$

$$c_{2i+1}(\xi) = -c_{2i+1}(\bar{\xi}).$$

PROBLEMA 20. Demostrar que las clases de Chern c_q , consideradas en el grupo $H^{2q}(B, \mathbb{R})$, coinciden con las definidas mediante conexiones en los espacios fibrados (véase [1], parte II, § 25). Esto resulta, especialmente fácil para la clase c_1 . De manera que las clases, anteriormente definidas como expresiones del tensor de curvatura (des-

pués de normación) tienen siempre integrales con coeficientes enteros por ciclos en cualquier espacio fibrado.

PROBLEMA 21. Demostrar, que el polinomio de Chern (mod 2) de un espacio fibrado complejo ξ define el polinomio de Stiefel - Witney del mismo espacio fibrado como real, o como espacio fibrado $r\xi$, donde r es una operación de «materialización» — véase [1], parte II, § 24.

EJEMPLO 4. Consideremos un $O(n)$ -espacio fibrado real η . Es posible «complexificar» este espacio fibrado (véase [1], p. II, § 24):

$$\eta \rightarrow c\eta = \xi.$$

El espacio fibrado $\xi = c\eta$ tiene un grupo $G = U(n)$ y está «autoconjugado». Esto significa que los espacios fibrados ξ y $\bar{\xi}$ son isomorfos: $\xi \approx \bar{\xi}$ (comprobarlo).

DEFINICIÓN 3. Las clases de Chern de $(-1)^i c_{2i}$ espacio fibrado complejo $\xi = c\eta$ se denominan *clases características* (de Pontriaguin) de un espacio fibrado real η y se designan por $p_i(\eta) \in H^{4i}(B, \mathbb{Z})$.

Del isomorfismo $\xi \approx \bar{\xi}$ obtenemos

$$\begin{aligned} c_{2i}(\bar{\xi}) &= c_{2i}(\xi) = p_i(\eta), \\ c_{2i+1}(\bar{\xi}) &= -c_{2i+1}(\xi), \end{aligned}$$

y, debido a ello, $2c_{2i+1} = 0$. Por eso, no se consideran las clases c_{2i+1} en el caso real.

PROBLEMA 22. Calcular las clases $p_i(\mathbb{C}P^n)$.

PROBLEMA 23. Hallar la clase $p_1(M_{(n)}^4)$ para una variedad no singular M^4 , dada en $\mathbb{C}P^3$ por una ecuación (en un dominio finito $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{C}P^3$) de grado n .

PROBLEMA 24. Demostrar la coincidencia de las clases p_i con las clases, definidas mediante conexiones en los espacios fibrados (véase [1], parte II, § 25).

PROBLEMA 25. Demostrar que si una variedad orientable M_4 es un borde de una variedad orientable, o sea, $M_4 = \partial W^5$, entonces $p_1(M^4) = 0$. En forma general: si $M^n = \partial W^{n+1}$, entonces cada polinomio de dimensión n de las clases W_q y p_s es trivial (para un caso no orientable, sólo de W_q). Expresar las clases p_s (mod 2) mediante W_q .

§ 10. Homología y métodos de cálculo de los grupos homotópicos. Teoremas de Cartan-Serre. Operaciones cohomológicas. Espacios fibrados vectoriales.

I. Noción de operación cohomológica. Ejemplos

Es muy difícil el problema de cálculo de los grupos homotópicos de variedades y de complejos finitos. Este problema es insoluble algorítmicamente en el más fuerte sentido de la lógica mate-

mática para los complejos no conexos simplemente, donde un grupo π_1 actúa sobre todos los π_i . Incluso para un caso más importante y simple de los complejos simplemente conexos (por ejemplo, esferas) el cálculo concreto de los grupos homotópicos resulta un problema muy difícil, no resuelto. Los métodos geométricos directos permiten obtener algunos resultados sobre los grupos homotópicos (véase [1], parte II) en ciertos casos particulares. Se consigue formular métodos regulares de cálculo de grupos homotópicos basándose en la teoría homológica de los espacios fibrados junto con la teoría de las homotopías, formuladas más arriba. Mostraremos aquí un modo de obtener información sobre las partes infinitas de grupos homotópicos $\pi_i(K) \otimes \mathbb{Q}$, donde \mathbb{Q} es el campo de los números racionales para los complejos simplemente conexos, lo que ya fue examinado parcialmente en los problemas del § 8. Notemos que el cálculo de la parte finita (torsión) de los grupos homotópicos $\pi_i(K)$, como se verá más abajo, exige desarrollar métodos incomparablemente más complejos. La base de todos los métodos algebraicos para calcular los grupos homotópicos, salvo ya formulada teoría de las homologías, son las llamadas, «operaciones cohomológicas», es decir, aplicaciones $\theta: H^q(K, L; G_1) \rightarrow H^p(K, L; G_2)$, que tienen las siguientes propiedades:

a) La aplicación θ está definida para todos los complejos K, L y es homotópicamente invariante;

b) la aplicación θ es «natural» (otros términos son «functorial» o «covariante»); esto significa que ella conmuta con aplicaciones continuas $f: (K, L) \rightarrow (K', L')$

$$\theta f_* = f_* \theta.$$

EJEMPLO 1. $\theta(x) = x^m$, donde $x \in H^q(K, L; G_1)$. Aquí $p = mq$. Para $G_2 = G_1 = \mathbb{Z}_p$, donde $m = p$ es un número primo, tenemos $\theta(x + y) = x^p + y^p$, $\theta(\lambda x) = \lambda \theta(x)$, ya que $\lambda^p = \lambda$. En este caso θ es una aplicación lineal. Para el campo racional $\mathbb{Q} = G_1 = G_2$ la aplicación θ no es un homomorfismo.

EJEMPLO 2. $\theta(x) = \delta_*(x)$, donde $x \in H^q(K, L; \mathbb{Z}_p)$, $\delta_*(x) \in H^{q+1}(K, L; \mathbb{Z}_p)$.

La definición del homomorfismo δ_* fue dada en el § 3: si el elemento x se representa por una cocadena con coeficientes enteros $\bar{x} \in C^p(K, L; \mathbb{Z})$, $x = \bar{x} \bmod p$, entonces $\delta_* x = \left(\frac{1}{p} \delta \bar{x}\right) \bmod p$.

Se tiene una generalización natural $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ de un homomorfismo $\delta_1 = \delta_*$: si $x \in \text{Ker } \delta_*$, o sea, la cocadena $\left(\frac{1}{p} \delta \bar{x}\right) \bmod p$ es cohomológica a cero, entonces, $\frac{1}{p} \delta \bar{x} = py + \delta z$. Por eso está definida la relación

$$y \bmod p = \delta_2(\bar{x}) = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} \delta x - \delta z \right).$$

PROBLEMA 1. Verificar que δ_2 es un homomorfismo correctamente definido

$$H^q(K, L; \mathbb{Z}_p) \subset \text{Ker } \delta_1 \xrightarrow{\delta_2} H^{q+1}(K, L; \mathbb{Z}_p) / \text{Im } \delta_1,$$

que conmuta con las aplicaciones continuas, o sea, $f^* \delta_2 = \delta_2 f^*$. Construir, por analogía, homomorfismos superiores

$$\delta_k: \bigcap_{i < k} \text{Ker } \delta_i \rightarrow H^{q+1} / \bigcup_{i < k} \text{Im } \delta_i.$$

Los homomorfismos δ_k , si $k \geq 2$, no están definidos por doquier y son multiformes. Por eso a ellos se los llama operaciones cohomológicas «superiores» o «parciales». El valor de los homomorfismos δ_k es el siguiente: si conocemos la estructura de $H^*(K, L; \mathbb{Z}_p)$ y la acción de los operadores δ_k , entonces podemos reconstruir un grupo de cohomologías con coeficientes enteros $H^*(K, L; \mathbb{Z})/\Gamma_p$, donde Γ_p es una parte periódica del orden, primos entre sí con p .

PROBLEMA 2. El núcleo de todos los δ_k sobre $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$ es el resultado de la reducción del mod p de un grupo con coeficientes enteros $H^*(K; \mathbb{Z})$.

PROBLEMA 3. Si $x = \delta_k y$ y $x \neq \delta_q z$ cuando $q < k$, entonces el elemento x representa un elemento generatriz $\tilde{x} \in H^*(K; \mathbb{Z})$ de orden p^k .

De este modo, el conocimiento de los operadores δ_k para todos los p en las cohomologías $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$ (o en las homologías $H_*(K; \mathbb{Z}_p)$, donde están conjugadas a las cohomológicas) permite reconstruir las homologías y cohomologías con coeficientes enteros.

Los operadores δ_k tienen las siguientes propiedades:

- están definidos en todos los grupos H^q para todos los q (o en sus subgrupos) y son homomorfismos;
- conmutan con un homomorfismo δ de la sucesión exacta del par (comprobarlo)

$$H^q(K, L; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(K, L; \mathbb{Z}_p), \quad \delta \delta_k = \delta_k \delta.$$

Si $k = 1$, la operación $\delta_1 = \delta_*$ está definida por doquier y es unívoca.

DEFINICIÓN 1. Las operaciones θ , que tienen las propiedades a) y b) se llaman «estables».

La causa principal, que facilita los cálculos de los grupos homotópicos $\pi_i(k) \otimes \mathbb{Q}$, es la ausencia de operaciones cohomológicas no triviales (que no se reducen a una operación de elevación a potencia) en las cohomologías racionales $H^*(; \mathbb{Q})$ (esto será demostrado más abajo). La única operación cohomológica «estable» en las cohomologías racionales (reales, complejas) es la de multiplicación por un número (escalar):

$$\theta(x) = \lambda x: H^q \rightarrow H_q.$$

El ejemplo del operador δ_* muestra, que las cohomologías $H^*(; \mathbb{Z}_p)$ tienen operaciones cohomológicas estables no triviales. Sin demostración, indiquemos que hay muchas operaciones estables no triviales en las cohomologías de módulo p (véase [45]).

TEOREMA 1. (Steenrod). 1) Sea $p = 2$. Para cualquier número $i \geq 0$ se tiene una operación cohomológica estable θ , designada por Sq^i , que da un homomorfismo

$$Sq^i: H^q(K, L; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{q+i}(K, L; \mathbb{Z}_2)$$

para todos los q . La operación Sq^i tiene las siguientes propiedades

- $Sq^i(x) = 0$, si $q < i$;
- $Sq^0 \equiv 1$;
- $Sq^i(x) = x^2$, $q = i$;
- $Sq_p(xy) = \sum_{j+h=i} Sq^j(x) Sq^h(y)$;
- $Sq^1(x) = \delta_* x$.

2) Sea $p > 2$. Para cualquier $i \geq 0$ están definidas las operaciones estables St_p^i

$$St_p^i: H^q(K, L; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{q+2i(p-1)}(K, L; \mathbb{Z}_p)$$

tales, que

- $St_p^i(x) = 0$, $q < 2i$;
- $St_p^0 \equiv 1$;
- $St_p^i(x) = x^p$, $q = 2i$;
- $St_p^i(xy) = \sum_{h+j=i} St_p^h(x) St_p^j(y)$.

Todas las operaciones estables se expresan por medio de productos (superposición) de operaciones de Steenrod (es un teorema difícil). Hay entre ellas relaciones algebraicas no triviales: como se aclarará más adelante, toda esta estructura crea un proceso complicado para calcular la parte finita de los grupos homotópicos. Notemos, que la más simple ilustración de tal empleo es la estructura de un complejo bicelular: el elemento $x \in \pi_{h+q}(S^q)$ define un complejo bicelular

$$K_x = D^{h+q+1} \cup_x S^q$$

tal, que

$$H^z(K_x; G_1) = G_1, \quad H^{h+q+1}(K_x; G_2) = G_2$$

(que forman, correspondientemente, z y w). Para el caso $q = n$, $h + q + 1 = 2n$, este complejo se examinó en el § 7.

LEMA 1. Si se halla una operación cohomológica no trivial $\theta: H^q(; G_1) \rightarrow H^{q+h+1} (; G_2)$ tal, que $\theta(z) \neq 0$, entonces el elemento $x \neq 0$, donde $x \in \pi_{h+q}(S^q)$.

DEMOSTRACIÓN. El tipo homotópico de un complejo K_x para $x=0$ tiene forma de ramo $K_x \sim S^{q+h+1} \vee S^q$. Consideremos la aplicación $K_x \xrightarrow{\pi} S^q$, idéntico en un sumando S^q y que proyecta el segundo S^{h+q+1} en un punto. Puesto que $S^q \subset K_x$, tenemos una proyección $K_x \xrightarrow{\pi} K_x$ tal, que

$$\pi^* = 1 : H^q \rightarrow H^q, \quad \pi^* = 0 : H^{q+h+1} \rightarrow H^{q+h+1}.$$

Puesto que $\theta(\pi^* z) = \pi^* \theta(z)$, por definición de operación cohomológica, tenemos que $0 = \theta(\pi^* z) = \pi^* \theta(z)$. El lema queda demostrado.

Un ejemplo trivial: $q = n$. x , es la multiplicación por $2^s \in \mathbb{Z} = \pi_n(S^n)$; $\theta = \delta_s : H^n(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+1}(K; \mathbb{Z}_2)$.

II. Complejos de Eulenberg—MacLane y operaciones.

Ya introdujimos «complejos de Eulenberg—MacLane» $K(D, n) = K$ tales, que

$$\pi_n(K) = D, \quad \pi_j(K) = 0, \quad j \neq n$$

(véase el § 9). Tomemos como un hecho que tales complejos existen (véase [45]) para todos los (D, n) y que son celulares o homotópicamente equivalentes a ellos.

Es evidente lo siguiente:

$$K(D_1 \times D_2, n) = K(D_1, n) \times K(D_2, n), \\ \Omega(K(D, n)) = K(D, n-1).$$

Efectivamente, utilicemos la siguiente igualdad (véase [1] parte II, § 24): $\pi_j(\Omega(X)) = \pi_{j+1}(X)$.

Tiene lugar el siguiente

TEOREMA 2. Para cualquier complejo celular X la clase homotópica de la aplicación $f: X \rightarrow K(D, n)$ es definida completamente por cierto elemento de un grupo de cohomologías $x \in H^n(X; D)$; es justo el isomorfismo canónico $[X; K(D, n)] \approx H^n(X; D)$.

DEMOSTRACIÓN. a) Sea dada una cocadena $\bar{x} \in C^n(X; D)$. Damos la aplicación del armazón X^{n-1} en un punto. Demos la aplicación en el armazón X^n así: a una célula $\sigma^n \subset X^n$ le corresponde un elemento $\bar{x}(\sigma^n) \in \pi_n(K(D, n)) = D$. La frontera $\partial\sigma^n$ ya está aplicada en un punto. Apliquemos la célula $\sigma^n \rightarrow K(D, n)$ en concordancia con el elemento $\bar{x}(\sigma^n)$ de $\pi_n(K(D, n))$. Prolonguemos la aplicación en un armazón X^{n+1} . Este es posible si, y sólo si, $\delta\bar{x} = 0$ (véase el § 9). En adelante, suponemos por inducción, que en el armazón X^{n+1} ya está construida la aplicación $f: X^{n+1} \rightarrow K(D, n)$. Ya que $\pi_j(K(D, n)) = 0$ cuando $j \neq n$, el obstáculo para prolongar la aplicación f es igual a cero, y prolongamos las aplicaciones por los armazones sobre todos los X .

b) Sean dadas dos aplicaciones $f: X \rightarrow K$, $g: X \rightarrow K$, construidas por dos ciclos cohomológicos \bar{x} , \bar{x} , $\bar{x} - \bar{x} = \delta y$; es posible, en concordancia con el § 9 transformar la aplicación f en el armazón de dimensión $n - 1$ de tal modo, que $\bar{x} \rightarrow \bar{x} - \delta y$. Después obtendremos $\bar{x} \equiv \bar{x}$. Se deduce de la igualdad de todos los grupos $\pi_j(K)$ para $j > n$, que las aplicaciones son homotópicas.

El teorema 2 queda demostrado.

TEOREMA 3. *El conjunto de todas las operaciones cohomológicas $\theta: H^n(M, L; D) \rightarrow H^p(M, L; G)$ está en correspondencia natural recíprocamente unívoca con los elementos del grupo $H^p(K; G) = H^p(K(D, n); G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un elemento «canónico» $u \in H^n(K(D, n); D)$, que se define así: por el teorema de Hurewicz tenemos que $H_n(K(D, n), \mathbb{Z}) = \pi_n = D$. Luego, $H^n(K; G_1) = \text{Hom}(D, G_1)$, donde $\text{Hom}(D, G_1)$ son homomorfismos de un grupo abeliano D en G_1 . Si $D = G_1$, entonces en un conjunto $\text{Hom}(D, D)$ se tiene un elemento «unidad» $u \in \text{Hom}(D, D)$ o sea, un homomorfismo idéntico. De la demostración del teorema 2, vemos, que la correspondencia $H^n(X, D) \approx [X, K]$ se establece así: si está dada la aplicación f , entonces

$$[f] \leftrightarrow f^*(u) \in H^n(X; D).$$

Demostremos el teorema 3. Si se da la operación cohomológica θ , entonces queda definido el elemento $\theta(u) \in H^p(K; G)$. Tenemos la correspondencia $\theta \rightarrow \theta(u)$.

Sean dados el elemento $\theta(u) \in H^p(K; G)$ y cualquier complejo X . Fijamos el elemento $x \in H^n(X; D)$. En virtud del teorema 2 tenemos una aplicación $f: X \rightarrow K$, donde $f^*u = x$. Suponemos, que $\theta(x) = \theta(f^*u) = f^*\theta(u)$. El teorema 3 queda demostrado.

TEOREMA 4. *Para cualquier grupo abeliano finitamente engendrado D el anillo de cohomologías $H^*(K(D, n); \mathbb{Q})$ es un álgebra anticommutativa, engendrada por las generatrices de un espacio lineal $D^* = \text{Hom}(D, \mathbb{Q}) = H^n(K; \mathbb{Q})$.*

DEMOSTRACIÓN. El grupo D es una suma directa de los grupos cíclicos $D = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \dots$. Demostremos ahora para $D = \mathbb{Z}_m$, que $H^q(K(D, n); \mathbb{Q}) = 0$, $q > 0$. Para $K = K(D; 1)$ esto fue establecido en el § 9, ya que

$$K(D, 1) = S^\infty/\mathbb{Z}_m = L_m^{2N-1}(1, \dots, 1), \quad N \rightarrow \infty.$$

Sea que esto ya está demostrado para $p < n$.

Consideremos el espacio fibrado de Serre.

$$E \rightarrow K(D, n), \quad F = K(D, n-1),$$

$\pi_j(E) = 0, j > 0$. De la sucesión espectral en las cohomologías $H^*(; \mathbb{Q})$ tenemos $E_{2,q}^{p,q} = 0$, si $q > 0$, $E_{2,0}^{p,q} = H^q(B; \mathbb{Q})$. Por eso todos los $d_2 \equiv 0$ con $r \geq 2$ y $E_{\infty,0}^{p,q} = E_{2,0}^{p,q} = H^q(E; \mathbb{Q}) = 0$. Por eso $E_{2,0}^{p,q} = H^q(B) = H^q(K(D, n)) = 0$. Para $D = \mathbb{Z}_m$, y por eso para $D = \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_h}$, tenemos $H^q(K(D, n); \mathbb{Q}) = 0$ para todos los $q > 0$.

Sea $D = \mathbb{Z}$. Consideremos un espacio fibrado de Serre, suponiendo por inducción, que el teorema esté demostrado para todos los $p < n$. Tenemos dos casos:

a) n es par, $H^*(K(D, n-1); \mathbb{Q}) = \Lambda [u_{n-1}]$;

b) n es impar, $H^*(K(D, n-1); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[u_{n-1}]$.

Debemos deducir de esto y de la condición $H^q(E; \mathbb{Q}) = 0$ con $q > 0$, que la sucesión espectral tiene una de las dos formas siguientes:

(a)

$n-1$	u	0	uv	0	uv^2
		0		0	
0	1	0	v	0	v^2
	0		n		

$$d_i = 0, \quad i \geq 2, \quad i \neq n;$$

$$d_n(u) = v; \quad d_n(v) = 0.$$

b)

$2n-2$	u^2		u^2v
		0	
$n-1$	u		uv
0	1		v

$$d_i = 0, \quad i \geq 2, \quad i \neq n;$$

$$d_n(u) = v, \quad d_n(v) = 0.$$

Aquí se utiliza sustancialmente la multiplicación cohomológica en la sucesión espectral. Después el resultado necesario ya casi está evidente de las tablas indicadas, ya que en ambos casos tenemos $E_{2,q}^{p,q} = 0$ para todos los p, q .

Como $D = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}$, el teorema 4 queda demostrado.

III. Cálculo de los grupos homotópicos $\pi_1 \otimes \mathbb{Q}$

TEOREMA 5. (Cartan—Serre). *Sea que un anillo de cohomologías de un espacio simplemente conexo (u homotópicamente simple) X sobre \mathbb{Q} hasta la dimensión k es isomorfo a un álgebra libre anticonmutativa con generatrices libres $x_j \in H^{\alpha_j}(X; \mathbb{Q})$, donde $\alpha_j < k$. Entonces, son justas las siguientes afirmaciones:*

a) el homomorfismo de Hurewicz

$$H: \pi_1(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_1(X; \mathbb{Q})$$

tiene un núcleo nulo para todos los $i < k - 1$.

b) la imagen $H(\pi_1(X) \otimes \mathbb{Q})$ tiene un producto escalar nulo con todos los elementos $x \in H^*(X; \mathbb{Q})$, los que se descomponen no trivialmente en los productos $x = yz$, $\deg y > 0$, $\deg z > 0$.

c) el grupo $\pi_1(X) \otimes \mathbb{Q}$ es isomorfo (conjugado) a un factor $H^1(X; \mathbb{Q})/\Gamma$, donde Γ se compone exactamente de todos los elementos descomponibles no trivialmente en el producto, $i < k - 1$.

DEMOSTRACION. En virtud del teorema 4 es justa nuestra afirmación para los complejos $K(D, n)$, y por lo tanto, para cualesquiera productos directos (aquí $k = \infty$):

$$K = K(D_1, \alpha_1) \times K(D_2, \alpha_2) \times K(D_3, \alpha_3) \times \dots, (*)$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$$

Demos una aplicación $X \xrightarrow{f} K$, donde K está construido en forma (*) para un juego de los grupos abelianos libres D_j de los rangos, iguales al número de generatrices libres x_j en la dimensión α_j . En virtud del teorema 2 tomamos una aplicación f tal, que $f^*: H^* \times (K; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$ es un isomorfismo hasta la dimensión k , según condiciones del teorema. En concordancia con el procedimiento indicado en el § 8, transformemos la aplicación f en un espacio fibrado $f: \tilde{X} \rightarrow K$, la fibra F , donde \tilde{X} es homotópicamente equivalente a X .

Puesto que f^* es un isomorfismo en dimensiones menor que k , se deduce de la sucesión espectral de este espacio fibrado inmediatamente: $H^*(F; \mathbb{Q}) = 0$ en dimensiones menores, que $k - 1$. Para X simplemente conexos es posible considerar, que el grupo D_1 no es abeliano libre, sino que coincide exactamente con el primer grupo homotópico no trivial del complejo X . Por eso f^* es un isomorfismo en un grupo $\pi_2(X) \rightarrow \pi_2(K)$. Así, tendremos $\pi_1(F) = 0$, de la sucesión exacta de espacio fibrado (véase [1], parte II, § 22).

LEMA. Si las cohomologías $H^q(F; \mathbb{Q})$ de un espacio simplemente conexo F son triviales con $q < k - 1$, entonces $\pi_i(F) \otimes \mathbb{Q} = 0$ con $i < k - 1$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Por el teorema de Hurewicz el primer grupo no trivial $\pi_{\alpha_2}(F)$ es finito. Consideremos una aplicación (espacio fibrado) $f: F \rightarrow K(\pi_{\alpha_2}(F), 2)$ con fibra F_3 . Puesto que $H^*(K(\pi_{\alpha_2}(F), 2); \mathbb{Q}) = 0$, de la sucesión espectral resulta que $H^*(F_3; \mathbb{Q}) = H^*(F; \mathbb{Q})$. Con esto, el espacio F_3 ya tiene un grupo nulo $\pi_{\alpha_2}(F_3) = 0$, $\pi_j(F_3) = 0$, $j \leq \alpha_2$. Por inducción, reducimos el lema al teorema corriente de Hurewicz. El lema queda demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE CARTAN - SERRE. Del lema obtenemos, que $\pi_i(F) \otimes \mathbb{Q} = 0$ para todos los $i < k - 1$. El teorema sobre el isomorfismo de los grupos $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \approx \pi_i(K) \otimes \mathbb{Q}$ se deduce ahora de la sucesión exacta de los grupos homotópicos de un espacio fibrado.

COROLARIO 1. Para cualquier grupo de Lie son no triviales los grupos homotópicos $\pi_i(G) \otimes \mathbb{Q}$ sólo con $i = 2q - 1$ impares, y corresponden exactamente a las generatrices libres del anillo $H^*(G; \mathbb{Q}) = \bigwedge [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$.

COROLARIO 2. Para una esfera S^n tenemos

$$\begin{aligned} n = 2k: \pi_n(S^n) \otimes \mathbb{Q} &= \mathbb{Q}, & \pi_{2n-1}(S^n) \otimes \mathbb{Q} &= \mathbb{Q}, \\ \pi_j(S^n) \otimes \mathbb{Q} &= 0, & j \neq n, & 2n - 1. \\ n = 2k + 1: \pi_n(S^n) \otimes \mathbb{Q} &= \mathbb{Q}, \\ \pi_j(S^n) \otimes \mathbb{Q} &= 0, & j \neq n. \end{aligned}$$

De la demostración del corolario 2 se deduce del siguiente hecho (véase el § 7):

$$H^*(\Omega(S^n), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}[x_{n-1}], & n = 2k + 1, \\ \bigwedge [x_{n-1}] \otimes \mathbb{Q}[x_{2n-2}], & n = 2k. \end{cases}$$

COROLARIO 3. Si X es un complejo $(n - 1)$ -conexo (o sea, $\pi_j(X) = 0$ para $j < n$), entonces para todos los grupos $\pi_q(X)$ para $q < 2n - 1$, tenemos el isomorfismo

$$H: \pi_q(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_q(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

La demostración se reduce al hecho de que los productos de cohomologías pueden surgir sólo en la dimensión $2n$. Por eso el anillo $H^*(X; \mathbb{Q})$ para un complejo $(n - 1)$ -conexo es siempre libre, hasta la dimensión $2n - 1$.

PROBLEMA 4. Calcular los grupos homotópicos de los ramos de esferas $S^k \vee S^q$, $\pi_i(S^k \vee S^q) \otimes \mathbb{Q}$.

En todos los casos, el cálculo de los grupos $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ para los complejos simplemente conexos se reduce al cálculo de las homolo-

gías racionales $H^*(\Omega(X); \mathbb{Q})$, ya que este anillo es un álgebra anti-conmutativa libre, en virtud del § 7.

COROLARIO 4. Si X tiene un tipo homotópico de un H -espacio hasta la dimensión N , entonces $H^*(X; \mathbb{Q})$ es un álgebra libre hasta la dimensión $N - 1$ y tiene lugar el isomorfismo

$$\left(\sum_{i \leq N-2} \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \right)^* = \sum_{i \leq N-2} H^i(X; \mathbb{Q})/\Gamma,$$

donde Γ consta de todos los elementos descomponibles en productos no triviales y M^* es un espacio conjugado a M .

IV. Aplicación a los espacios fibrados vectoriales. Clases características.

Consideremos una aplicación natural $G_{k,N} \times G_{l,M} \xrightarrow{\psi} G_{k+l, N+M}$, engendrada por una suma directa de los espacios lineales. Aquí $G_{k,N}$ es una de las variedades de Grassmann reales, complejas y cuaternias. Cuando $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, obtendremos la aplicación

$$G_{k,\infty} \times G_{l,\infty} \xrightarrow{\psi} G_{k+l,\infty}$$

o (véase [1], parte II, § 24)

$$BG_k \times BG_l \xrightarrow{\psi} B(G_{k+l}),$$

donde BG_n es un espacio clasificador (universal) del grupo G_n y G_n es uno de los grupos $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$. Ahora notemos, que, según los resultados [1], parte II, § 24, con encajes $O(n) \subset O(n+1)$, $SO(n) \subset SO(n+1)$, $U(n) \subset U(n+1)$, $Sp(n) \subset Sp(n+1)$, el tipo homotópico «se estabiliza»: exactamente esto significa, que para cualquier complejo X de dimensión $\leq N$ hay un isomorfismo de clases homotópicas de aplicaciones $[X, BG]$

$$[X, G_{k,\infty} - [X, G_{k+l,\infty}],$$

donde $N = k$ para $G = O(n)$, $SO(n)$,

$$N = 2k \text{ para } G = U(n), SU(n),$$

$$N = 4k \text{ para } G = Sp(n).$$

Hablando en rigor, en [1], parte II, § 24, esto fue demostrado para $[X, G]$. Puesto que $\pi_i(G) = \pi_{i+1}(BG)$, de la igualdad $\pi_i(G_1, G_2) = 0$ para un encaje (de grupo) $G_2 \subset G_1$ se deduce

$$\pi_{i+1}(BG_1, BG_2) = 0$$

para los mismos valores de i . Por eso el encaje $BG_1 \rightarrow BG_2$ para los pares indicados (G_1, G_2) estabiliza el tipo homotópico.

Es posible introducir un «límite» $G_\infty = O, SO, U, SU, Sp$:

$$\begin{aligned} O &= \lim_{N \rightarrow \infty} O(1) \subset O(2) \subset \dots \subset O(N) \subset \dots, \\ SO &= \lim_{N \rightarrow \infty} SO(1) \subset SO(2) \subset \dots \subset SO(N) \subset \dots, \\ U &= \lim_{N \rightarrow \infty} U(1) \subset U(2) \subset \dots \subset U(N) \subset \dots, \\ SU &= \lim_{N \rightarrow \infty} SU(1) \subset SU(2) \subset \dots \subset SU(N) \subset \dots, \\ Sp &= \lim_{N \rightarrow \infty} Sp(1) \subset Sp(2) \subset \dots \subset Sp(N) \subset \dots \end{aligned}$$

Para los grupos G_∞ los espacios universales BG_∞ ya son H -espacios

$$\begin{aligned} G_\infty \times G_\infty &\rightarrow G_\infty \text{ (suma directa),} \\ BO \times BO &\xrightarrow{\psi} BO, \\ BSO \times BSO &\xrightarrow{\psi} BSO, \\ BU \times BU &\xrightarrow{\psi} BU, \\ BSU \times BSU &\xrightarrow{\psi} BSU, \\ BSp \times BSp &\xrightarrow{\psi} BSp, \end{aligned}$$

donde el papel de «unidad de H -espacio» $x_0 \in BG_\infty$ lo desempeña cualquier punto fijado (¡verifíquese!). Es posible decir de otra manera: el $BO(n)$ tiene un tipo homotópico de H -espacio hasta la dimensión $N = n$, el $BSO(n)$, hasta $N = n$; el $BU(n)$ y el $BSU(n)$, hasta la dimensión $N = 2n$; el $BSp(n)$, hasta la dimensión $N = 4n$. Más adelante (véase § 25) se mostrará, que $BU \cong \Omega(U)$, $BSp \cong \Omega(\Omega(\Omega(SO)))$, $BSO \cong \Omega(\Omega(\Omega(Sp)))$.

Conocemos los anillos $H^*(G, \mathbb{C})$ para $G = SO, U, SU, Sp$, véase § 7. De manera que, en virtud del teorema de Cartan — Serre, conocemos los grupos $\pi_i(G) \otimes \mathbb{C}$, véase el corolario 1 más arriba. De este modo, los grupos $\pi_{i+1}(BG) \otimes \mathbb{C} \approx \pi_i(G) \otimes \mathbb{C}$ son también conocidos para nosotros. Al mismo tiempo, la base de los espacios conjugados $(\pi_j(BG) \otimes \mathbb{C})^*$ hasta la dimensión N , coincide con la base multiplicativa del anillo $H^*(BG; \mathbb{C})$ hasta la dimensión N (véase más arriba), ya que BG tiene un tipo homotópico de H -espacio en estas dimensiones.

Además, los anillos $H^*(BG; \mathbb{C})$ siempre y en todas las dimensiones son álgebras anticonmutativas libres, incluso si BG no es un H -espacio. Esto se deduce del siguiente problema (teorema de Borel):

PROBLEMA 5 Sea dado un espacio fibrado de Serre $E \rightarrow B$, la fibra $F = \Omega(B)$, donde E es contractable y B es simplemente conexo. Si $H^*(F; \mathbb{Q})$ es un álgebra exterior, entonces $H^*(B; \mathbb{Q})$ es un álgebra de polinomios. Para el caso $H^*(F; \mathbb{Q}) = \wedge [x]$ este teorema fue demostrado más arriba. Demostrar, al principio, este hecho para $H^*(F; \mathbb{Q}) = \wedge [x_1, x_2]$, después para $\wedge [x_1, x_2, x_3]$ etc.

Para los grupos G tenemos:

$$\begin{aligned} H^*(BSO(2k); \mathbb{Q}) &= \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_{k-1}, \chi], & \deg p_i &= 4i, \\ & & \deg \chi &= 2k, \\ & & p_k &= \chi^2; \\ H^*(BSO(2k+1); \mathbb{Q}) &= \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_k], & \deg p_i &= 4i; \\ H^*(BU(k); \mathbb{Q}) &= \mathbb{Q}[c_1, \dots, c_k], & \deg c_i &= 2i; \\ H^*(BSU(k); \mathbb{Q}) &= \mathbb{Q}[c_2, \dots, c_k], & \deg c_i &= 2i; \\ H^*(BSp(k); \mathbb{Q}) &= \mathbb{Q}[\gamma_1, \dots, \gamma_k], & \deg \gamma_i &= 4i. \end{aligned}$$

Con esto, de una construcción explícita de clases características de Chern c_i (y la construcción explícita de todas las demás clases que de ella se deduce, véase el § 9) sabemos, que las clases c_i, χ, p_i, γ_i tienen coeficientes enteros, es decir, pertenecen a una imagen $H^*(BG; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(BG; \mathbb{Q})$. Siguiendo el análogo homotópico de la técnica ordinaria de la teoría de grupos de Lie, ligada a un subgrupo de Cartan (maximal conmutativa), consideremos también el caso de toro maximal $T^n \subset G$:

$$\begin{aligned} T^n &\overset{i}{\subset} SO(2k), \\ T^n &\overset{i}{\subset} SO(2k+1), \\ T^n &\overset{i}{\subset} U(k), \\ T^{n-1} &\overset{i}{\subset} SU(k), \\ T^n &\overset{i}{\subset} Sp(k). \end{aligned}$$

Para $G_n = T^n$ tenemos, según los resultados del § 7 (más arriba): $BG_n = BT^n = \mathbb{C}P^\infty \times \dots \times \mathbb{C}P^\infty$ y $H^*(BT^n; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n], t_i \in H^2(BT^n; \mathbb{Z})$.

PROBLEMA 6. Demostrar que la aplicación

$$H^*(BG; \mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^*(BT^n; \mathbb{Q})$$

no tiene núcleo (homomorfismo) y la imagen $\text{Im } i^*$ se compone exactamente de polinomios invariantes respecto al grupo de Weyl. Para $U(n)$ el grupo de Weyl se compone de todas las permutaciones de las generatrices t_i . Para $SO(2n)$ el grupo de Weyl también contiene reflexiones de los pares $(t_i, t_j) \mapsto (-t_i, -t_j)$. Para $SO(2n+1)$ el grupo de Weyl contiene también todas las reflexiones $t_i \mapsto -t_i$.

Para $Sp(n)$ el grupo de Weyl es el mismo que para $SO(2n+1)$.

Así, la imagen $\text{Im } i^*(H^*(BG; \mathbb{Q})) \subset H^*(BT^n; \mathbb{Q})$ es de la forma:

$$a) SO(2k), i^*(p_q) = \sum_{i_1 < \dots < i_q} t_{i_1}^2 \dots t_{i_q}^2, i^*(\chi_h) = t_1 \dots t_h;$$

$$b) SO(2k+1), i^*(p_q) = \sum_{i_1 < \dots < i_q} t_{i_1}^2 \dots t_{i_q}^2;$$

$$c) U(k), i^*(c_j) = \sum_{i_1 < \dots < i_j} t_{i_1} \dots t_{i_j}, c_k = \chi;$$

$$d) Sp(k), i^*(\gamma_j) = \sum_{i_1 < \dots < i_j} t_{i_1}^2 \dots t_{i_j}^2.$$

Comparar estas fórmulas con [1], parte II, § 25, donde se escogió la base de los «polinomios de Newton»: $\sum t_i^n = \tilde{c}_n$.

PROBLEMA 7. Deducir las fórmulas de la relación entre las clases c_i y \tilde{c}_m . Hallar las fórmulas para las clases p_j ($r\xi$) para hacer real un U -espacio fibrado ξ mediante las clases c_q (ξ).

PROBLEMA 8. Deducir los hechos indicados sobre las cohomologías $H^*(BG; \mathbb{Q})$ de las sucesiones espectrales, escogiendo los espacios fibrados necesarios.

PROBLEMA 9. Demostrar, que para un complejo X de dimensión $< N$, las clases homotópicas de las aplicaciones $[X, BG_n]$, o las clases de equivalencia de los espacios fibrados vectoriales «estables» con fibra $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^n$ (los \mathbb{H} son cuaternios), forman grupos abelianos, puesto que BG es un H -espacio ($N = n$ para O, SO ; $N = 2n$ para U, SU ; $N = 4n$ para Sp). La adición de las aplicaciones $X \rightarrow BG$ se engendra mediante la multiplicación ψ en BG (o mediante la suma directa de espacios fibrados, véase más arriba).

Demostrar las igualdades

$$[X, BG_n] \otimes \mathbb{Q} \approx \text{Hom}(H^*(BG_n; \mathbb{Q}), H^*(X; \mathbb{Q}))$$

(se tienen en cuenta los homomorfismos de los anillos) o, lo que es lo mismo: en un grupo $[X, BG_n]$ los espacios fibrados vectoriales son definidos completamente por las clases características, con exactitud hasta los elementos de orden finito.

La suma directa de espacios fibrados se define por el encaje de bloque (análogicamente para O, SO, SU, Sp):

$$U(m) \times U(n) \subset U(m+n).$$

Con esto los toros maximales se multiplican directamente. Los juegos de las generatrices $t'_1, \dots, t'_m \in H^2(BT^m; \mathbb{Q})$ para $U(m)$ y $t''_1, \dots, t''_n \in H^2(BT^n; \mathbb{Q})$ para $U(n)$ forman un juego de generatrices $t_1, \dots, t_{m+n} \in H^2(BT^{m+n}; \mathbb{Q})$ para el grupo $U(m+n)$. Aquí $t_i = t'_i$ para $1 \leq i \leq m$ y $t_{j+m} = t''_j$ para $1 \leq j \leq n$.

Descomponiendo un polinomio simétrico elemental $c_i(t_1, \dots, t_{m+n})$ mediante $c_j(t'_1, \dots, t'_m) = c'_j$ y $c''_q = c_q(t''_1, \dots, t''_n)$ obtenemos las fórmulas de adición, indicadas en el § 9 sin demostración:

$$c_i = \sum_{j+q=i} c'_j c''_q.$$

O, para la magnitud $c(z) = \sum c_i z^i$, $c'(z) = \sum c'_j z^j$, $c''(z) = \sum c''_q z^q$, $c_0 = 1$, tenemos:

$$c(z) = c'(z) c''(z). \tag{1}$$

Ahora consideremos el «carácter de Chern» ($G = U(n)$):

$$\text{ch } \xi = \sum_{i=1}^n \exp(zt_i) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(zt_i)^m}{m!} \right).$$

Para la suma $\xi \oplus \eta$ tenemos

$$\text{ch } (\xi + \eta) = \text{ch } \xi + \text{ch } \eta. \tag{2}$$

PROBLEMA 10. Deducir formalmente (2) de (1) y viceversa, sin recurrir a las generatrices t_i en un toro maximal.

El producto tensorial de espacios fibrados $\xi \otimes \eta$ se determina mediante el encaje (análogamente que para O, SO)

$$U(m) \times U(n) \rightarrow U(mn).$$

Con esto, los toros maximales están relacionados de una forma más compleja: se tiene una aplicación de toros

$$\begin{aligned} T^m \times T^n &\xrightarrow{\varphi} T^{mn}, \\ BT^m \times BT^n &\xrightarrow{\varphi} BT^{mn} \end{aligned}$$

tal, que

$$\varphi^*(t_{jk}) = t'_j + t''_k, \tag{3}$$

donde

$$\begin{aligned} t_{jk} &\in H^2(BT^{mn}; \mathbb{Q}), \quad t'_j \in H^2(BT^m; \mathbb{Q}), \\ t''_k &\in H^2(BT^n; \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

La fórmula (3) se deduce inmediatamente de la fórmula explícita para la aplicación φ en las matrices diagonales (¡verifíquese!).

De la fórmula (3) se deduce que

$$\text{ch}(\xi \otimes \eta) = \text{ch} \xi \text{ ch } \eta, \quad (4)$$

por cuanto

$$\begin{aligned} \text{ch} \xi \text{ ch } \eta &= \left(\sum_{i=1}^m \exp(z t_i) \right) \left(\sum_{j=1}^n \exp(z t_j) \right) = \\ &= \sum_{i,j} \exp[z(t_i + t_j)] = \varphi^* \left(\sum_{i,j} \exp(z t_{ij}) \right). \end{aligned}$$

Para los espacios proyectivos complejos $\mathbb{C}P^n$ tenemos (véase el problema en [1], parte II, § 24)

$$\tau(\mathbb{C}P^n) \oplus 1 = \eta \oplus \dots \oplus \eta \quad (n+1 \text{ sumandos}), \quad (5)$$

donde $c_1(\eta) = t \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$, $\tau(\mathbb{C}P^n)$, es un espacio fibrado tangente. De la fórmula (5) junto con (1) obtenemos

$$\begin{aligned} c(z) &= (1 + zt)^{n+1} = 1 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \\ p(z) &= (1 - z^2 t^2)^{n+1} = 1 + p_1 z^2 + \dots + p_k z^{2k} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Aquí $t_1 = t_2 = \dots = t_{n+1} = t$ para un espacio fibrado $\tau \oplus 1$ y $p_i(\tau) = (-1)^i c_{2i}(\tau \oplus \bar{\tau})$; por definición de clases $p_i(\gamma) = (-1)^i c_{2i}(c\gamma)$; pero para $\gamma = r\xi$ tenemos $c\gamma = cr\xi = \xi \oplus \bar{\xi}$ (véase [1], parte II, § 24). Como $c_i(\bar{\xi}) = (-1)^i c_i(\xi)$, obtenemos:

$$p_i(\eta) = -c_2(\eta \oplus \bar{\eta}) = t^2, \quad p_i(\eta) = 0, \quad i > 1.$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} p_i(\tau) &= (-1)^i c_{2i}(\tau \oplus \bar{\tau}), \\ (1 + \sum p_i(\tau) z^{2i}) &= (1 - z^2 t^2)^{n+1} = p(\mathbb{C}P^n). \end{aligned} \quad (7)$$

PROBLEMA 11. Hallar el carácter de Chern de los grados simétricos $S^i \xi$ y de los grados exteriores $\Lambda^i \xi$ del U -espacio fibrado ξ .

PROBLEMA 12. Hallar las clases y el carácter de Chern para los productos directos $\mathbb{C}P^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}P^{n_s}$.

PROBLEMA 13. Examinar la clase c_1 para variedades X_k^{n-1} , dadas en $\mathbb{C}P^n$ por una ecuación algebraica (no singular) de grado k . Demostrar que la condición $c_1(X_k^{n-1}) = 0$ es equivalente a $k = n + 1$.

PROBLEMA 14. Hallar la característica de Euler $\chi(X_k^{n-1})$ y el número $[c_1^{n-1}, [X_k^{n-1}]]$.

PROBLEMA 15. Investigar los casos $k = 4$, $k = 3$. Hallar las homología X_4^2 .

PROBLEMA 16. Demostrar que las hipersuperficies dadas por la ecuación no singular en $\mathbb{C}P^n$, son simplemente conexas.

V. Clasificación de las operaciones de Steenrod en las dimensiones pequeñas

Trataremos de mostrar un método de cálculo de los grupos homotópicos de esferas, basado en el hecho de la existencia de la sucesión espectral con sus propiedades formales (véase el teorema de Leray), la existencia y las propiedades formales de las operaciones de Steenrod Sq^i y St_p^i , y también de los complejos de Eilenberg — MacLane $K(\pi, n)$ para $\pi = \mathbb{Z}$, \mathbb{Z}_p^n (y de este modo para todos los grupos abelianos con un número finito de generatrices). Para esto es necesario calcular, al principio, todas las operaciones cohomológicas de mod p . Construimos un complejo $K = K(\pi, n)$ para cualquier grupo abeliano, según el siguiente esquema:

- a) se tiene sólo una célula $\sigma^0 \in K(\pi, n)$;
- b) no hay células de dimensión i , donde $1 \leq i \leq n - 1$;
- c) las células σ_j^n están en correspondencia biunívoca con las generatrices $x_j \in \pi$;
- d) las células σ_k^{n+1} se pegan al armazón K^n ya construido conforme a las relaciones γ_k entre las generatrices x_j de un grupo π ,

$$K^{n+1} = \left(\bigcap_k \sigma_k^{n+1} \right) \cup_{\gamma_k} K^n,$$

$\gamma_k = \left\{ \sum_j \lambda_{jk} x_j = 0, \lambda_{jk} \text{ son números enteros} \right\}$, $\gamma_k : \partial \sigma_k^{n+1} \rightarrow K^n$. Para el armazón K^{n+1} obtenemos

$$\begin{aligned} \pi_j(K^{n+1}) &= 0, & j < n, \\ \pi_n(K^{n+1}) &= \pi. \end{aligned}$$

Escogemos alguna base de las generatrices $\alpha_j \in \pi_{n+1} \times (K^{n+1})$ y hagamos pegadura de célula (véase el § 4)

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_j \sigma_j^{n+2} \right) \cup_{\alpha_j} K^{n+1} &= K^{n+2}, \\ \alpha_j : \partial \sigma_j^{n+2} &\rightarrow K^{n+1}. \end{aligned}$$

Obtendremos un armazón K^{n+2} . De los teoremas generales de la aproximación celular tenemos, según el § 4:

$$\begin{aligned} \pi_j(K^{n+2}) &= \pi_j(K^{n+1}), & j \leq n, \\ 0 &= \pi_{n+1}(K^{n+2}) = \pi_{n+1}(K^{n+1}) / (\alpha_1, \alpha_2, \dots). \end{aligned}$$

Iterando esta construcción, «matamos» los grupos $\pi_{n+2}(K^{n+2})$, pasando a K^{n+3} , después matamos $\pi_{n+3}(K^{n+3})$, pasando a K^{n+4} , etc. En el límite $n + q \rightarrow \infty$ obtendremos un complejo celular infinito $K(\pi, n)$.

Pero la misma construcción $K(\pi, n)$ no nos importa, lo importante, es que este complejo existe. Sabemos lo siguiente:

a) $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$, $H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[t]$, $t \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_p)$ para todos los $p \geq 2$.

b) $K(\mathbb{Z}_{p^h}, 1) = S^\infty / \mathbb{Z}_p^n = \lim_{N \rightarrow \infty} L_p^{2N+1}(1, 1, \dots, 1)$.

Tenemos el espacio fibrado (véase el § 4)

$$L_p^{2N+1}(1, 1, \dots, 1) \xrightarrow{S^1} \mathbb{C}P^N, \quad (8)$$

que se obtiene de un espacio fibrado generalizado de Hopf ([1], parte II, § 2)

$$S^{2N+1} \xrightarrow{S^1} \mathbb{C}P^N$$

mediante factorización de la esfera $S^{2N+1} = \{z_0, \dots, z_N, \sum |z_j|^2 = 1\}$ por un grupo \mathbb{Z}_{p^h} : $(z_0, \dots, z_N) \rightarrow (\exp[2\pi i/p^h] z_0, \dots, \exp[2\pi i/p^h] z_N)$. Calculando las cohomologías de un espacio fibrado (8) de la sucesión espectral sobre \mathbb{Z} , tenemos

1	u	0	uv	0	uv^2	0	$d_2: u \rightarrow p^h v, \quad v \rightarrow 0, \quad uv \rightarrow p^h v^2,$
0	1	0	v	0	v^2	0	$uv^h \rightarrow p^h v^{h+1},$
	0	1	2	3	4	...	

Por eso

$$H^{2q}(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{p^h}, \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

$$H^{2q+1}(K; \mathbb{Z}) = 0, \quad q > 0.$$

Tenemos sobre un campo \mathbb{Z}_p :

$$d_2 u = 0, \quad d_2 v = 0, \quad E_2^{p, q} = E_7^{p, q} = E_\infty^{p, q}$$

Tenemos:

$$H^*(K(\mathbb{Z}_{p^h}, 1), \mathbb{Z}_p) = \Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}_p[v],$$

un álgebra libre (puesto que el álgebra adjunta E_∞^* es libre, entonces la propia $H^*(K, \mathbb{Z}_p)$ es libre). Según la información sobre las cohomologías con coeficientes enteros, tenemos en $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$:

$$\delta_j(uv^h) = 0, \quad j < h, \quad \delta_q(v^h) = 0 \quad (\text{para todos los } a).$$

$$\delta_h u = v, \quad \delta_h(uv^h) = v^{h+1}$$

A propósito, notemos la propiedad

$$\delta_p (uv) = (\delta_h u) v \pm u (\delta_h v),$$

si ambos $\delta_h (u)$, $\delta_h (v)$ están determinados. Esta propiedad se deduce inmediatamente de la definición de δ_h mediante un operador de frontera sobre las cocadenas con coeficientes enteros.

PROBLEMA 17. Utilizando la información arriba mencionada demostrar, que $H^*(K(\mathbb{Z}_p^h, n), \mathbb{Z}_q) \equiv 0$, p y q son primos entre sí.

En una sucesión espectral de cualquier espacio fibrado con la base simplemente conexa (véase el § 8) en las cohomologías, tenemos

$$E_2^{q,0} = H^q(B), \quad E_2^{0,q} = H^q(F).$$

Tenemos las aplicaciones $p: E \rightarrow B$, $i: F \rightarrow E$,

$$p^*: H^q(B) \rightarrow H^q(E, F) \quad \text{es una "proyección",}$$

$$i^*: H^q(E) \rightarrow H^q(F) \quad \text{es una "restricción".}$$

Es posible definir una aplicación multiforme: la transgresión

$$H^q(F) \supset A^q \xrightarrow{\tau = (p^*)^{-1} \delta} H^{q+1}(B),$$

donde

$$\delta: H^q(F) \rightarrow H^{q+1}(E, F) \quad \text{y} \quad A^q = \delta^{-1}(p^* H^{q+1}(B) \cap \text{Im } \delta)$$

es el dominio de definición de un homomorfismo multiforme, no definido por doquier. Es evidente, que $A^q \supset \text{Im } i^*$ y, con esto, $\tau(\text{Im } i^*) = 0$. La definición de transgresión mediante diferencias d_r es la siguiente:

$$A^q = \bigcap_{r \leq q} \text{Ker } d_r = E_{q+1}^{0,q} \subset H^q(F),$$

$$\tau = d_{q+1} \text{ en el grupo } A^q.$$

Puesto que todas las operaciones Sq^i , St_p^i , δ , δ_h conmutan con las aplicaciones continuas $p^* \theta = \theta p^*$, y también con el homomorfismo $\delta: H^q(F) \rightarrow H^{q+1}(E, F)$ en las \mathbb{Z}_p -cohomologías, tenemos que todas las operaciones estables δ , δ_h , Sq^i , St_p^i conmutan con la transgresión $\tau \theta = \theta \tau$. Esto significa, que para los elementos $x \in A^q$, donde está definida la transgresión (para los elementos «transgresivos»), sus imágenes se encuentran también en el dominio de definición de la transgresión (son «transgresivos»), y con esto es justa la igualdad:

$$\tau \theta = \theta \tau, \quad \theta = \delta, \delta_h, Sq^i, St_p^i. \quad (9)$$

Calculemos ahora algunas cohomologías «estables» de los complejos $K(\mathbb{Z}, n)$ y $K(\mathbb{Z}_p^h, n)$.

El caso $K = K(\mathbb{Z}, n)$, $p = 2$. Para $n = 1, 2$ es conocida la respuesta, $H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \langle u \rangle$, $\deg u = 2$. Consideremos una sucesión espectral del espacio fibrado $E \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$, $F = \Omega(B) = K(\mathbb{Z}, 2)$. En el término $E_2^{p,q}$ tenemos $E_2^{0,q} = H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ sabemos, que un elemento $u \in H^2(F; \mathbb{Z}_2)$ es transgresivo por causas triviales y, al mismo tiempo, $\tau(u) = d_3(u) = v \in H^3(B; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. En virtud de las propiedades de las operaciones Sq^i (véase el punto I de este párrafo y las propiedades de la transgresión) los elementos $Sq^2(u) = u^2$, $Sq^4 Sq^2(u) = (u^2)^2 = u^4$ son transgresivos, y con esto

$$\begin{aligned} \tau(u^4) &= Sq^2(v) \in H^5(B; \mathbb{Z}_2), \\ \tau(u^8) &= Sq^4 Sq^2(v) \in H^9(B; \mathbb{Z}_2) \end{aligned} \quad (10)$$

.....

Se deduce inmediatamente de aquí, que el álgebra $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ tiene forma de un álgebra de polinomios de las generatrices $\tau(u^{2^i})$:

$$\begin{aligned} H^*(B; \mathbb{Z}_2) &= \mathbb{Z}_2 \langle v, Sq^2 v, Sq^4 Sq^2 v, \dots \rangle \\ B_3 = B &= K(\mathbb{Z}, 3), \quad \delta_h v = 0, \quad Sq^3 v = v_2. \end{aligned}$$

Ahora pasemos a los siguientes espacios fibrados:

$$E \rightarrow B_n, \quad F = K(\mathbb{Z}, n-1), \quad B_n = K(\mathbb{Z}, n).$$

Al pasar de $F = K(\mathbb{Z}, 3)$ a $B = B_4 = K(\mathbb{Z}, 4)$ obtendremos por analogía, los viejos elementos transgresivos en $E_2^{p,q} = H^q(F; \mathbb{Z}_2)$:

$$v, Sq^2 v, \dots, Sq^{2^i} Sq^{2^{i-1}} \dots Sq^2 v,$$

y también los nuevos, logrados mediante la potenciación de forma 2^i : $v^2 = Sq^2 v$, $v^4 = Sq^4 Sq^2 v$, ... Iterando este procedimiento obtendremos las primeras cohomologías $H^{n+q}(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_2)$ para $q < n$ (las generatrices están indicadas)

$q=0$	1	2	3	4
u	0	$Sq^2 u$	$Sq^3 u$	$Sq^4 u$
$q=5$	6	7	8	9
$Sq^6 u$	$Sq^6 u$	$Sq^7 u$	$Sq^8 u$	$Sq^9 u$
	$Sq^4 Sq^2 u$	$Sq^5 Sq^2 u$	$Sq^6 Sq^2 u$	$Sq^7 Sq^2 u$
				$Sq^8 Sq^2 u$

Para $K = K(\mathbb{Z}_2, n)$ el razonamiento es completamente análogo, pero comienza con el espacio fibrado

$$E \rightarrow B = K(\mathbb{Z}_2, 2), F = K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{R}P^\infty.$$

Aquí son transgresivos los elementos

$$u \in H^1(F; \mathbb{Z}_2), Sq^1 u = \delta_* u = u^2,$$

$$Sq^2 Sq^1 u = (u^2)^2, \dots, Sq^{2^i} Sq^{2^{i-1}} \dots Sq^2 Sq^1 u = ((u^2)^2 \dots)^2.$$

Iterando este razonamiento obtendremos una tabla de los grupos «estables» $H^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$, $q < n$

$q =$	0	1	2	3	4	5	6
	u	$Sq^1 u$	$Sq^2 u$	$Sq^3 u$ $Sq^2 Sq^1 u$	$Sq^4 u$ $Sq^3 Sq^1 u$	$Sq^5 u$ $Sq^4 Sq^1 u$	$Sq^6 u$ $Sq^5 Sq^1 u$ $Sq^4 Sq^2 u$

OBSERVACION: En los cálculos sucesivos utilizaremos sólo los grupos $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_2)$ con pequeños $q < 7$, por eso no necesitamos las demostraciones de los detalles de las afirmaciones efectuadas; para pequeños $q < 7$ todas estas afirmaciones se verifican por una consideración elemental de las sucesiones espectrales (véase más arriba).

También indiquemos $H^{n+q}(K(\mathbb{Z}_{2^h}, n); \mathbb{Z}_2)$, $q < n$:

$q=0$	1	2	3	4
u	$\delta_h u$	$Sq^2 u$	$Sq^3 u$ $Sq^2 \delta_h u$	$Sq^4 u$ $Sq^3 \delta_h u$

No efectuamos el análisis completo del caso análogo $K = K(\mathbb{Z}_{p^h}, n)$ y de las cohomologías $H^*(K; \mathbb{Z}_p)$. Las soluciones son las siguientes:

Para $K = K(\mathbb{Z}, n)$ tenemos $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_p)$, $q < n$

$q=0$	1	2	...	$2p-2$	$2p-1$
u	0	0	0	$St_p^1 u$	$\delta_* St_p^1 u$

Para $K = K(\mathbb{Z}_p^h, n)$ tenemos $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_p)$, $q < n$

$q=0$	1	2	...	$2p-2$	$2p-1$
u	$\delta_h u$	0	0	$St_p^1 u$	$\delta_* St_p^1 u$ $St_p^1 \delta_h u$

(para $h = 1$ tenemos $\delta_1 = \delta^*$).

Así vemos, que todas las operaciones cohomológicas «estables» θ en dimensiones indicadas se reducen a la iteración de cuadrados y grados Sq^i , St_p^i , δ_* , donde

$$\theta: H^n(K, L; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{n+q}(K, L; \mathbb{Z}_p),$$

y conmutan con un homomorfismo de cofrontera. En cuanto a las operaciones estables de forma

$$\theta: H^n(K, L; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+q}(K, L; \mathbb{Z}_p),$$

$$\theta: H^n(K, L; \mathbb{Z}_p^h) \rightarrow H^{n+q}(K, L; \mathbb{Z}_p),$$

todas ellas se reducen a las operaciones St_p^i , Sq^i , δ_* (después de la reducción según el módulo p) y, además, a las operaciones de la misma forma efectuadas con el elemento $\delta_h u$.

La operación estable $\theta: H^n(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{n+q}(X; \mathbb{Z}_p)$ tiene, como se dice, una «dimensión» q :

$$\deg \theta = q.$$

Todas las operaciones estables forman un «álgebra de Steenrod» graduada A_p

$$A_p = A = \sum_{q=0} A^q$$

donde A^0 son escalares y A^q se compone de todas las operaciones de grado q .

De nuestros resultados (véanse las tablas más arriba) obtenemos una base de las álgebras $A_p = A$ en las dimensiones pequeñas q :

$$p=2$$

$q=0$	1	2	3	4	5	6	7
1	Sq^1	Sq^2	Sq^3 $Sq^2 Sq^1$	Sq^4 $Sq^3 Sq^1$	Sq^5 $Sq^4 Sq^1$	Sq^6 $Sq^5 Sq^1$ $Sq^4 Sq^2$	Sq^7 $Sq^6 Sq^1$ $Sq^5 Sq^2$ $Sq^4 Sq^2 Sq^1$

$$\boxed{p > 2}$$

$q=0$	1	2	...	$2p-2$	$2p-1$
1	δ_*	0	0	St_p^1	$\delta_* St_p^1$ $St_p^1 \delta_*$

Prestemos, atención a un corolario curioso de los resultados obtenidos, esencial para $p = 2$: la base de operaciones es menor que todos los posibles productos (superposiciones) de operaciones de Steenrod $Sq^1, Sq^{1a} \dots Sq^{1h}$. Esto significa que hay relaciones no triviales entre los productos de las operaciones Sq^i . La idea del hallazgo de estas relaciones es la siguiente: consideremos los productos $\mathbb{R}P_1^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P_n^\infty$ y un elemento

$$u = t_1 \dots t_n \in H^n(\mathbb{R}P_1^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P_n^\infty; \mathbb{Z}_2),$$

$$0 \neq t_i \in H^1(\mathbb{R}P_i^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

Para el elemento t_i tenemos $Sq^1 t_i = t_i^2, Sq^0 t_i = t_i, Sq^j t_i = 0$ para $j \neq 0, 1$. De aquí se deduce que cualquier operación de forma $Sq^{i_1} \dots Sq^{i_h}(u)$ puede ser calculada, partiendo sólo de las propiedades formales de las operaciones de Steenrod $Sq^i(xy) = \sum_{j+h=i} Sq^j(x) Sq^h(y)$. Al mismo tiempo resultará, que todas las operaciones básicas $\theta \in H^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$, para $q < n$, actúan no trivialmente en el elemento u : $\theta(u) \neq 0$, si $\theta \neq 0$.

Comprobamos esto directamente para $q \leq 9$:

$$q = 1: Sq^1 u = \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) u;$$

$$q = 2: Sq^2 u = \left(\sum_{i < j} t_i t_j \right) u;$$

$$q = 3: Sq^3 u = \left(\sum_{i < j < h} t_i t_j t_h \right) u;$$

$$Sq^2 Sq^1 u = \left(\sum_i t_i \right) \left(\sum_{i < j} t_i t_j \right) u = \sigma_1 \sigma_2 u.$$

(Sea $\sigma_j = \sum_{i_1 < \dots < i_j} t_{i_1} \dots t_{i_j}$ un polinomio simétrico elemental.)

$$\begin{aligned}
 q=4: \quad Sq^4 u &= \left(\sum_{i < j, k < l} t_i t_j t_k t_l \right) u \quad \sigma_4 u \\
 Sq^3 Sq^1 u &= \sigma_3 \sigma_1 u; \\
 q=5: \quad Sq^5 u &= \sigma_5 u, \quad Sq^4 Sq^1 u = \sigma_4 \sigma_1 u; \\
 q=6: \quad Sq^6 u &= \sigma_6 u, \quad Sq^5 Sq^1 u = \sigma_5 \sigma_1 u, \\
 Sq^2 u &= \sigma_4 \sigma_2 u; \\
 q=7: \quad Sq^7 u &= \sigma_7 u, \quad Sq^6 Sq^1 u = \sigma_6 \sigma_1 u; \\
 Sq^5 Sq^2 u &= \sigma_5 \sigma_2 u \quad Sq^4 Sq^2 Sq^1 u = \sigma_4 \sigma_2 \sigma_1 u; \\
 q=8: \quad Sq^8 u &= \sigma_8 u, \quad Sq^7 Sq^1 u = \sigma_7 \sigma_1 u, \\
 Sq^6 Sq^2 u &= \sigma_6 \sigma_2 u; \quad Sq^5 Sq^2 Sq^1 u = \sigma_5 \sigma_2 \sigma_1 u.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Como se ve de la tabla presentada todas las operaciones básicas $\theta \in A^q = A_2^q$ con $q \leq 8$ actúan independiente y linealmente en un elemento u :

$$\theta(u) = 0 \iff \theta = 0$$

Vemos, que para una base en el álgebra de Steenrod $A = A_2$ son suficientes los productos de forma

$$Sq^{i_k} \dots Sq^{i_1} \tag{12}$$

donde $i_k \geq 2i_{k-1}$, $i_{k-1} \geq 2i_{k-2}$, \dots , $i_2 \geq 2i_1$.

Todos los productos de forma (12) son independientes linealmente y dan una base aditiva completa en el álgebra A_2 .

Vamos a buscar las relaciones de forma

$$Sq^i Sq^j = \sum_{a \geq 2b} \lambda_{a,b}^{i,j} Sq^a Sq^b,$$

donde $a \geq 2b$, $0 < i < 2j$.

PROBLEMA 18. Hallar los coeficientes $\lambda_{a,b}^{i,j}$ para todos los q .

Para $q \leq 8$, mediante cálculo directo de la tabla (11) obtenemos $\lambda_{a,b}^{i,j} = \delta_{a+b}^{i+j} C_{j-b-1}^{i-2b}$ (esto siempre es justo). Así, tenemos la tabla de relaciones

$$\begin{aligned}
 Sq^4 Sq^1 &= \delta_{4,1}^5 = 0, \\
 Sq^1 Sq^2 &= Sq^3, \\
 Sq^1 Sq^3 &= 0 \quad Sq^4 Sq^{2a} = Sq^{2a+1} \\
 Sq^2 Sq^2 &= Sq^3 Sq^1, \quad Sq^2 Sq^4 = Sq^5 Sq^1, \\
 Sq^3 Sq^3 &= Sq^5 Sq^1
 \end{aligned} \tag{13}$$

VI. Cálculo de los primeros] grupos homotópicos estables no triviales de esferas.

Consideremos la aplicación $S^n \xrightarrow{f} K(\mathbb{Z}, n) = K$. Transformemos esta aplicación en un espacio fibrado, sin cambiar los tipos homotópicos; aquí f^* es un isomorfismo entre $H^n(S^n; \mathbb{Z})$ y $H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Para la fibra $F = F_1$ obtenemos de la sucesión exacta: $\pi_i(F) = 0, i \leq n, \pi_i(F) = \pi_i(S^n), i \geq n + 1$. En la dimensión $n + q < 2n$ la sucesión espectral del espacio fibrado se reduce a la sucesión exacta (τ es una transgresión)

$$0 \rightarrow H^{n+q}(F) \xrightarrow{\tau} H^{n+q+1}(K; \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0, \text{ si } q > 0,$$

puesto que $\sum_{p+q=m} E_2^{p,q} = E_2^{m,0} + E_2^{0,m}$ para $p+q < 2n$ y $H^{n+q}(S^n) = 0$, cuando $q > 0, H^n(S^n) \underset{j^*}{\approx} H^n(K)$.

Así tenemos:

$q > 0$

$$H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_p) \underset{\tau}{\approx} H^{n+q+1}(K; \mathbb{Z}_p).$$

donde $\tau Sq^i = Sq^i \tau$,

$$\tau \delta_h = \delta_h \tau, \quad \tau St_p^i = St_p^i \tau, \quad H^j(F; \mathbb{Z}_p) = 0, \quad j \leq n.$$

De la tabla de grupos $H^{n+q}(K; \mathbb{Z}_p)$ se deduce el resultado para $H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_p)$:

$p > 2$

$q=0$	1	...	$2p-3$	$2p-2$
0	0	0	ν	$\delta_* \nu$

CONCLUSIÓN. Para todos los $p > 2$ en los grupos $\pi_{n+q}(F) = \pi_{n+q}(S^n)$ con $0 < q < 2p - 3 < n$ no hay p -componentes no triviales; el grupo

$$\pi_{n+2p-3}^{(p)}(F) = \pi_{n+2p-3}^{(p)}(S^n) \neq 0,$$

ya que $\delta_* \nu \neq 0$; en la dimensión $2p - 3$ tenemos

$$H_{n+2p-3}^{(p)}(F; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p = \pi_{n+2p-3}^{(p)}(S^n).$$

Para $p = 2$ este razonamiento actúa de la misma manera, con esto, $\delta_* = Sq^1$ ($2p - 3 = 1$ para $p = 2$):

$$\pi_{n+1}^{(2)}(S^n) = \mathbb{Z}_2 = \pi_{n+1}(S^n), \quad \pi_{n+1}^{(p)} = 0, \quad p > 2.$$

Obtenemos cohomología $H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ junto con la acción de operaciones de Steenrod:

$$p=2$$

$$H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_2) = H^{n+q+1}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2) = A^{q+1}$$

$q =$	1	2	3	4	5	6	
	v	$Sq^1 v$	w $Sq^2 v = 0$	$Sq^1 w =$ $= Sq^2 Sq^1 v$	$Sq^4 v$ $Sq^2 w$	$Sq^3 w$ $Sq^5 v$	(14)

Aquí $\tau(v) = Sq^2 u$, $\tau(w) = Sq^4 u$. En virtud de la relación $Sq^3 Sq^2 = Sq^2 Sq^1$ tenemos junto con la condición $Sq^1 u = 0$;

$$Sq^2 v = 0. \quad (15)$$

Como $Sq^2 Sq^4 = Sq^5 Sq^1 + Sq^6$, es justa la correlación

$$Sq^2 w = Sq^6 u. \quad (16)$$

De la igualdad $Sq^2 Sq^3 = Sq^5 + Sq^4 Sq^1$ se deduce que

$$Sq^1 w = Sq^2 Sq^1 v \quad (17)$$

Pasamos al siguiente paso. Consideremos una aplicación (espacio fibrado)

$$F_1 = F \xrightarrow{f_1} K(\mathbb{Z}_2, n+1),$$

donde $f_*: \pi_{n+1}(F) \rightarrow \pi_{n+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1))$ es un isomorfismo. Obtenemos

$$\pi_j(F_2) = 0, \quad j \leq n+1,$$

$$\pi_j(F_2) = \pi_j(F_1) = \pi_j(S^n), \quad j > n+1$$

En el caso estable es cómodo representar como una sucesión exacta la sucesión espectral y la transgresión τ

$$\begin{aligned}
 H^{n+q}(F; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^{n+q}(F_2; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} A^q \xrightarrow{f^*} \\
 \rightarrow H^{n+q+1}(F; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^{n+q+1}(F_2; \mathbb{Z}_2),
 \end{aligned}$$

además, i^* y τ conmutan con las operaciones de Steenrod, $A^q = H^{n+q+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1); \mathbb{Z}_2)$. Con la aplicación f^* la clase fundamental $u \in H^{n+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1), \mathbb{Z}_2)$ pasa a v ,

$$f^*(u) = v$$

Por eso la imagen f^*A se compone de las operaciones de Steenrod empleadas para un elemento v

$$f^*A^q = A^q(v)$$

Junto con la tabla de $H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ (véase más arriba) obtenemos la tabla de homología $H^*(F_2; \mathbb{Z}_2)$

q =	2	3	4	5	6	
	x	\tilde{w} Sq^1x	$Sq^1\tilde{w} = 0$ $Sq^2x = \delta_2w$	$Sq^2\tilde{w}$ $Sq^3x = 0$	$Sq^3\tilde{w}$ Sq^4x	(18)

Aquí $\tilde{w} = i^*(w)$, y $x = \tau^{-1}(Sq^2u)$, ya que teníamos $Sq^2v = 0$ y $v = f^*(u)$, entonces $f^*(Sq^2u) = 0$. Por eso $Sq^2u = \tau(x)$, $x \in H^{n+2}(F_2; \mathbb{Z}_2)$. Por consiguiente $Sq^2(Sq^2u) = Sq^3Sq^1u \neq 0$. Por eso

$$f^*(Sq^2Sq^2u) = \tau(Sq^2x), \quad Sq^2x \in H^{n+4}(F_2; \mathbb{Z}_2)$$

La relación $Sq^1\tilde{w} = 0$ apareció en la tabla (18) como resultado de correlación $Sq^1w = Sq^2Sq^1v$ en la tabla (14), puesto que $Sq^2Sq^1v = f^*(Sq^2Sq^1u)$.

Sean: $a = Sq^3Sq^1v = Sq^1w = \delta_1w$; $b = Sq^2x = \tau^{-1}(Sq^2Sq^2u) = \tau^{-1}Sq^1(Sq^2Sq^1u)$. Tiene lugar la siguiente afirmación general:

LEMA 2. Si $a = f^*(\tilde{a}) = \delta_h w$ y $b = \tau^{-1}\delta_h(\tilde{a})$, entonces los elementos b , $\tilde{w} = i^*w$ en $H^*(F_2; \mathbb{Z}_2)$ son tales, que $b = \delta_{h+1}\tilde{w}$.

La demostración del lema se deduce de las propiedades elementales de un homomorfismo de cofróntera en un complejo de cadenas $C^*(E; \mathbb{Z})$. Los detalles se los dejamos al lector.

Basándonos en el lema 2, obtenemos: $Sq^1 = \delta_* = \delta_1$, $a = Sq^1w$, $b = Sq^2x$, $Sq^2x = \delta_2\tilde{w}$. Por eso, en particular, tenemos $Sq^3x = \delta_*\delta_2\tilde{w} = 0$.

CONCLUSIÓN. Como $Sq^1x = \delta_1x \neq 0$, obtenemos el resultado $(\pi_{n+2} \times \times (F_2) = H_{n+2}(F_2; \mathbb{Z}))$:

$$\pi_{n+2}(S^n) = \pi_{n+2}^{(2)}(S^n) = \pi_{n+2}^{(2)}(F_2) = \mathbb{Z}_2$$

Ahora pasemos al tercer paso. Consideremos una aplicación (el espacio fibrado)

$$F_2 \xrightarrow{j} K(\mathbb{Z}_2, n+2), \text{ fibra } F_3.$$

La aplicación $f_* | \pi_{n+2}(F_2)$ es un isomorfismo. Para F_3 , de la sucesión exacta de los grupos homotópicos; se deduce:

$$\begin{aligned} \pi_j(F_3) &= 0, & j &\leq n+2, \\ \pi_j(F_3) &= \pi_j(F_2) = \pi_j(S^n) & j &\geq n+3. \end{aligned}$$

En el caso estable $q < n$ la sucesión espectral otra vez se reducirá a la exacta

$$H^{n+q}(F_2; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^{n+q}(F_3; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} A^{q-1} \xrightarrow{f^*} H^{n+q+1}(F_2; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*},$$

donde $A^{q-1} = H^{n+q+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+2); \mathbb{Z}_2)$.

Por definición, $x = f^*(u)$, donde u es una clase fundamental en las cohomologías $H^{n+2}(K(\mathbb{Z}_2, n+2); \mathbb{Z}_2)$. Por consiguiente, obtenemos

$$f^*(A^{q-1}) = A^{q-1}(x).$$

Para las cohomologías $H^{n+q}(F_3; \mathbb{Z}_2)$ obtenemos la tabla

$q =$	2	3	4	5
	0	\tilde{w}	$\delta_3 \tilde{w}$	$Sq^2 \tilde{w}$

Aquí $\tilde{w} = i^* \tilde{w}$ y $\delta_3 \tilde{w} = \tau^{-1} \delta_2 \tilde{w}$ según el lema 2 (véase más arriba).

DEDUCCIÓN. El grupo

$$\pi_{n+3}^{(2)}(S^n) = \pi_{n+3}^{(2)}(F_3) = H_{n+3}^{(2)}(F_3; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_8,$$

puesto que $\delta_3 \tilde{w} \neq 0$. Como $\pi_{n+3}^{(3)}(S^n) = \mathbb{Z}_3$, $\pi_{n+3}^{(p)}(S^n) = 0$ para $p > 3$, obtenemos definitivamente el siguiente teorema

TEOREMA 6. *Los grupos homotópicos estables $\pi_{n+q}(S^n)$, para $q < n-1$, tienen los siguientes valores (para $q \leq 2$ véase también [1], parte II, § 23):*

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}, \quad \pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2, \quad \pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2, \quad \pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}_{2^4},$$

PROBLEMA 19. Calcular los grupos $\pi_{n+q}(S^n)$ para $q \leq 9$. Si $q \geq 10$ surgen dificultades más serias. La superación de estas dificultades cuesta mucho trabajo. Esto permite calcular todos los grupos $\pi_{n+q}(S^n)$ para $q \leq 30$ (aproximadamente). Pero es dudoso, que

sea posible una solución general aceptable para todos los q , aunque actualmente es probable hallar en la bibliografía especializada mucha información valiosa sobre grupos homotópicos superiores.

VII. Clases homotópicas estables de las aplicaciones de complejos celulares.

Con frecuencia surge la siguiente situación: se ha dado un complejo $(n - 1)$ -conexo celular K . Sea que el complejo K no tiene células de dimensiones $1 \leq i \leq n - 1$; se dice, que hay que calcular clases homotópicas estables de aplicaciones del complejo X en K , si $\dim X < 2n - 1$.

He aquí otra cuestión: examinar el obstáculo $\alpha(f)$ para la prolongación de la aplicación $f: X^{n+q} \rightarrow K$ sobre un armazón $(n + q + 1)$ -dimensional con $q < n - 2$. Ya hemos visto, que para los espacios fibrados $E \xrightarrow{p} B$, donde la fibra F y la base B son $(n - 1)$ -conexas, la sucesión espectral en las homologías hasta la dimensión $2n - 2$ se reduce a la exacta

$$H^*(E) \xrightarrow{i^*} H^*(F) \xrightarrow{\tau} H^*(B) \xrightarrow{p^*} H^*(E).$$

Vemos que la complejidad de la teoría de homologías del producto oblicuo en las dimensiones «estables» es la misma, que para los grupos de homotopías. Se puede decir, que en las dimensiones $k \leq 2n - 2$ la teoría de homologías del espacio fibrado $E \xrightarrow{p} B$ es la misma que la del par (E, F) , además, $B \sim E/F$, porque las células no triviales en E , que no se encuentran en B o en F , pueden aparecer por primera vez en la dimensión $2n$ (producto de células de base y de fibra). Así, todo se simplifica en las dimensiones estables.

LEMA 3. *Las clases homotópicas estables de aplicaciones forman un grupo abeliano $[X, K]$.*

DEMOSTRACION. Consideremos dos aplicaciones f, g

$$f: X \rightarrow K, \quad g: X \rightarrow K,$$

y el producto directo de las mismas

$$f \times g: X \rightarrow K \times K,$$

donde $[f \times g](x) = (f(x), g(x))$.

El complejo $K \times K$ es $(n - 1)$ -conexo; no tiene células de dimensiones $1 \leq i \leq n - 1$ y la imagen $(f \times g)(X)$ se encuentra en el armazón de dimensión $k \leq \dim X$, con aplicación celular. Cuando $k \leq 2n - 2$, la imagen $(f \times g)(X)$ pasa a pertenecer al ramo $K \vee K \subset K \times K$ porque las células «sobrantes» en $K \times K$, que no se encuentran en $K \vee K$, aparecen en la dimensión $2n$. Esto

se relaciona a la imagen en $K \times K$ de cualquiera homotopía de aplicaciones: ésta se encuentra en $K \vee K$. Se tiene la evidente aplicación de «pliegues»

$$\kappa: K \vee K \rightarrow K,$$

idéntica en cada sumando.

Definimos la suma de clases homotópicas

$$f, g \in [X, K], \quad f + g = \kappa(f \times g),$$

considerando f y g como clases celulares y la $\dim X \leq 2n - 2$. Las propiedades de grupo y la conmutatividad de esta operación son obvias (verifíquense).

LEMA 4. Sean dados la aplicación estable $f: X^{n+q} \rightarrow K$ y el obstáculo para prolongar la aplicación $\alpha(f) \in C^{n+q+1}(X^{n+q+1}, \pi_{n+q}(K))$ (véase el § 9) sobre el armazón X^{n+q+1} . Entonces, el obstáculo $\alpha(f)$ depende aditivamente del elemento $f \in [X, K]$ y $\alpha(\lambda f) = \lambda \alpha(f)$.

DEMOSTRACION. El obstáculo $\alpha(f)$ tiene significado en σ^{n+q+1} , definido mediante la aplicación

$$\partial \sigma^{n+q+1} = S^{n+q} \rightarrow K.$$

Al sumar las aplicaciones $f + g = \kappa(f \times g)$, las clases homotópicas de aplicaciones $\partial \sigma^{n+q+1} \rightarrow K$, engendradas por f y g , también se suman, por definición de adición, en grupos π_j (aquí, en situación estable, no es necesario inquietarse por un punto inicial y por la acción de π_1).

Ya hemos construido la aplicación $f: K \rightarrow \prod_{n_j \geq n}^{2n-1} K(D_j, n_j)$, que engendra un isomorfismo de \mathbb{C} -cohomologías y grupos de homotopías $\pi_j(K) \otimes \mathbb{C}$ hasta la dimensión $2n - 2$, véase más arriba, p. III. Aquí los grupos D_j son abelianos libres.

Construimos aplicación «inversa» de armazón

$$g: \left(\prod_{n_j \geq n}^{2n-1} K(D_j, n_j) \right)^{2n-2} \rightarrow K,$$

así que $f_* g_* = \lambda \neq 0$ en \mathbb{C} -cohomologías y en la homotopías $\pi_j \otimes \mathbb{C}$ con $j < 2n - 2$, es decir, $f_* g_*(x) = \lambda x$, $g_* f_*(y) = \lambda y$. Vamos a construir tal aplicación «inversa» g mediante inducción por el armazón. Formulamos una hipótesis inductiva, que un obstáculo aparecido para prolongación de ya construida aplicación g_{n+q} de un armazón $(n+q)$ -dimensional sobre un armazón $(n+q+1)$ -dimensional es una clase de cohomologías de orden finito μ . Luego, utilizando los lemas 3 y 4, pasemos a una aplicación μg_{n+q} y, cambiándolo en un armazón $(n+q)$ -dimensional, llegaremos a un obstáculo nulo (véase el § 9). Prolongando la aplicación de la clase (μg_{n+q}) sobre el arma-

zón de dimensión $n + q + 1$, obtendremos la aplicación g_{n+q+1} etc. Al fin de cuentas, llegaremos a la aplicación g . Vamos a demostrar, que el orden de clase de cohomología de obstáculo sobre el armazón $n + q$ para la aplicación g_{n+q} es finito. El armazón $(\prod_{n_j \geq n} K(D_j, n_j))^{2n-2}$ es homotópicamente equivalente al armazón del ramo $\bigvee_{n_j \geq n} (K(D_j, n_j))^{2n-2}$. Cada complejo $(K(D_j, n_j))^{2n-1}$ tiene elementos de orden infinito sólo en las cohomología de la primera dimensión no trivial n_j según los resultados del p. V sobre cohomología racionales de los complejos de forma $K(\pi, n)$. Al formar una aplicación inversa g_{n+q} , construimos todo separadamente en cada sumando del ramo $\bigvee_j (K(D_j, n_j))^{2n-2}$. Por eso encontraremos sólo un obstáculo de orden finito.

De aquí se deduce la siguiente afirmación.

TEOREMA 7. *Para cualquier complejo X las clases homotópicas estables de las aplicaciones X en un complejo $(n-1)$ -conexo K ($\dim X \leq 2n-2$) forman un grupo abeliano $[X, K]$, para el que tiene lugar la igualdad.*

$$[X, K] \otimes \mathbb{Q} \approx \text{Hom}(H^*(K; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})).$$

Esto significa lo siguiente: la clase homotópica se define por un homomorfismo de \mathbb{Q} -cohomología con exactitud hasta los elementos de orden finito; con esto cualquier homomorfismo puramente algebraico $a^*: H^*(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z})$ o $a_*: H_*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(K; \mathbb{Z})$, es posible multiplicarlo por un número no nulo $\lambda \neq 0$, $a^* \mapsto \lambda a^*$, $a_* \mapsto \lambda a_*$, así que el homomorfismo λa^* (o λa_*) se realiza mediante una aplicación continua $f: X \rightarrow K$.

§ 11. Homología y grupo fundamental

Sea que tenemos un complejo no simplemente conexo (celular o incluso simplicial) K con un grupo fundamental $D = \pi_1(K)$. Consideremos un cubrimiento universal

$$\hat{K} \rightarrow K$$

donde el grupo D actúa libre y discretamente en \hat{K} , transformando los simplex (las células) uno en otro. A cada célula σ_ν^i en K le corresponde un juego de células

$$p^{-1}(\sigma_\nu^i) = \sigma_{1\nu}^i \cup \sigma_{2\nu}^i \cup \dots$$

en un número, igual al número de elementos de $D = \pi_1(K)$. El grupo D actuando en $p^{-1}(\sigma_\nu^i)$ define la permutación de células $\sigma_{a\nu}^i$. Escogamos una célula en la preimagen $p^{-1}(\sigma_\nu^i)$ y la designemos por $\hat{\sigma}_\nu^i$.

Todas las células de \hat{K} se obtienen en forma

$$\sigma_{\alpha\gamma}^i = g(\hat{\sigma}_\gamma^i), \quad g \in D = \pi_1(K),$$

al mismo tiempo, todas las células $g(\hat{\sigma}_\gamma^i)$ son diferentes. Cualquiera cadena en \hat{K} tiene la forma

$$a = \sum_{j,\gamma} \lambda_{j\gamma} g_j(\hat{\sigma}_\gamma^i), \quad a \in C^i(\hat{K}), \quad (1)$$

donde $\lambda_{j\gamma}$, son números enteros.

Un operador de frontera ∂ en \hat{K} conmuta con la acción del grupo D en células y con la multiplicación por los números λ_j ; es natural introducir un «anillo de grupo» $\Gamma = \mathbb{Z}[D]$, cuyos elementos son sumas finitas $\sum \lambda_j g_j$, λ_j son números, $g_j \in D$, y la multiplicación tiene forma

$$\left(\sum_i \lambda_i g_i\right) \left(\sum_h \lambda'_h g'_h\right) = \sum_{i,h} \lambda_i \lambda'_h g_i g'_h.$$

Es evidente de la forma de cadenas (1) en el complejo K , que éstas son cadenas con coeficientes en un anillo Γ (posiblemente, no conmutativo, si el grupo D es no conmutativo).

Un homomorfismo $\rho: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ en cualquier anillo Γ' permite examinar un complejo de cadenas con coeficientes en Γ' para \hat{K} :

$$\rho(a) = \sum_\gamma \rho\left(\sum_j \lambda_{j\gamma} g_{j\gamma}\right) \hat{\sigma}_\gamma^i, \quad a \in C^i(\hat{K}),$$

es una cadena con coeficientes en Γ' . Luego, se permite multiplicar las cadenas $\rho(a)$ por cualesquiera elementos de Γ' ; esta multiplicación conmuta con ∂ . A las homología de este complejo las llamaremos homología con coeficientes en la representación $\rho: \Gamma \rightarrow \Gamma'$, $\Gamma = \mathbb{Z}[\pi_1(K)]$ y las designemos por $H_i^\rho(K)$.

EJEMPLO 1. Si $\Gamma' = \Gamma$ y $\rho \equiv 1$, entonces, tenemos por definición

$$H_i^\rho(K) = H_i(K).$$

EJEMPLO 2. Si $\mathbb{Z} = \Gamma'$ y $\rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ tiene la forma

$$\rho\left(\sum \lambda_j g_j\right) = \sum \lambda_j,$$

tendremos

$$H_i^\rho(K) = H_i(K).$$

Verificar esta igualdad.

EJEMPLO 3. Si K es una variedad no orientable, $K = M^n$, entonces se tiene noción de «orientación de curva», o sea, un homomorfismo

$\pi_1(K) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ (véase [1], parte II, § 17); surge un homomorfismo

$$\rho: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z},$$

donde

$$\rho(\sum \lambda_i g_i) = \sum \lambda_i \phi(g_i).$$

A las homología $H_i^{\rho}(K)$ las llamaremos «homología con coeficientes locales». Se definen de manera evidente las cohomología $H_i^{\rho}(K)$ mediante un complejo conjugado.

PROBLEMA 1. Demostrar, que tenemos $H_0^{\rho}(M^n) = \mathbb{Z}$ para una variedad cerrada M^n .

Sea que tenemos un espacio fibrado $E \xrightarrow{p} B$ con fibra F y que $\pi_1(B) = D$ actúe respecto a un grupo $H_q(F)$ mediante las traslaciones $g: H_q(F) \rightarrow H_q(F)$, $g \in D$. De manera que introducimos la acción (operación) de un anillo $\Gamma = \mathbb{Z}[D]$ en $H_q(F) = M_q$. Más generalmente: sea que los elementos del anillo Γ actúen como operadores en un espacio lineal M (o sea, dada la representación ρ del anillo en forma de transformaciones lineales $M \rightarrow M$). Definimos las homología $H_i^{\rho}(B, M)$. Sea $B = K$ y sea dado un complejo de Γ -cadenas \hat{K} (véase más arriba). Formalmente se definen las cadenas con valor en M :

$$a = \sum_j m_j \hat{\sigma}_j^i, \quad m_j \in M,$$

y la operación del anillo Γ en estas cadenas

$$g(a) = \sum_j g(m_j) \hat{\sigma}_j^i,$$

donde $g(m)$ está definido en virtud de la representación ρ . Esta actuación conmuta con una frontera ∂ , que se define naturalmente.

Surgen las homología, designadas por $H_i^{\rho}(B, M)$, donde Γ actúa en M mediante la representación ρ (o, como se dice, M es un Γ -módulo). Las cohomología $H_i^{\rho}(B, M)$ se definen, como siempre, mediante un complejo de cocadenas conjugado.

Hay Γ -módulos para los espacios fibrados $E \xrightarrow{p} B$ con fibra F del grupo $H_j(F)$ en virtud de actuación de $\pi_1(B)$ en una fibra mediante traslaciones paralelas. Tenemos las homología $H_i^{\rho}(B, H_j(F))$.

OBSERVACIÓN. En el teorema de Leray (véase el § 8) para una base no simplemente conexa $E_{q,j}^{(2)} \neq H_q(B, H_j(F))$. Es necesario cambiar esta por una base $E_{q,j}^{(2)} = H_q^{\rho}(B, H_j(F))$. La representación ρ mide la «deformación» de operador d_1 . Todo lo demás permanece cierto.

EJEMPLO. Para el cubrimiento $E \xrightarrow{p} B$ con fibra de k puntos $F = P_1 \cup \dots \cup P_k$ tenemos

$$H_q(F) = 0, \quad q \neq 0,$$

$H_0(F) = M$ tiene un rango k .

El grupo $\pi_1(B)$ actúa en la fibra F y en los grupos $M = H_0(F)$.

PROBLEMA 2. Demostrar las igualdades

$$H_q^p(B, H_0(F)) = H_q(E), \quad H_p^q(B, H^0(F)) = H^q(E).$$

PROBLEMA 3. Calcular los grupos $H_0^p(B, M)$ y $H_p^0(B, M)$, donde ρ es cualquiera representación de Γ en automorfismos de un espacio lineal.

PROBLEMA 4. Calcular las homología de un espacio lenticular (véase el § 4) $L_m^{2n-1}(q_1, \dots, q_{n-1})$ para una representación $\rho: \pi_1 \times \times (L) = \mathbb{Z}_m \rightarrow$ (raíces del grado m de la unidad, que actúan en $\mathbb{C} = M$).

Construir tales representaciones lineales

$$\rho: \mathbb{Z}_m \rightarrow GL(k, \mathbb{C}),$$

que

$$H_q^p(L_m^{2n-1}(q_1, \dots, q_{n-1})) = 0$$

para todos los $q = 0, 1, 2, \dots$. Al principio, efectuarlo para $n = 2$ (lentes tridimensionales).

PROBLEMA 5. Hallar la partición explícitamente celular de una esfera S^{2n-1} , invariante respecto a la actuación de un grupo \mathbb{Z}_m , donde una transformación básica T actúa así:

$$(z_1, \dots, z_n) \xrightarrow{T} \left(e^{\frac{2\pi i}{m}} z_1, e^{\frac{2\pi i q_1}{m}} z_2, \dots, e^{\frac{2\pi i q_{n-1}}{m}} z_n \right) \\ (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1)$$

(véase el § 4). Esta partición celular tiene para $n = 2$ las células

$$T^j \sigma^0, \quad T^j \sigma^1, \quad T^j \sigma^2, \quad T^j \sigma^3; \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

y un operador de frontera

$$\partial \sigma^0 = 0, \quad \partial \sigma^1 = (1 - T) \sigma^0, \\ \partial \sigma^2 = (1 + T + \dots + T^{m-1}) \sigma^1, \quad \partial \sigma^3 = (1 - T^q) \sigma^2.$$

Utilizando tales representaciones lineales del grupo π_1 , que todos los $H_q^p(M, \mathbb{C}^n) = 0$, construyamos un interesante invariante

topológico, la «torsión de Reidemeister» consideremos un complejo de cadenas de la representación ρ . Los grupos de cadenas son espacios lineales complejos con bases marcadas (células $\hat{\sigma}_v^q$). En virtud de la condición $H_q^0 = 0$, $q \geq 0$, tenemos la sucesión exacta de cadenas

$$0 \rightarrow C_n^0 \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^0 \rightarrow \dots \xrightarrow{\partial} C_0^0 \rightarrow 0,$$

donde en cada C_j^0 hay una base marcada $e_v^{(j)} = \{\hat{\sigma}_v^j\}$. El arbitrio en la elección de $\hat{\sigma}_v^j$ es el siguiente: $\hat{\sigma}_v^j \rightarrow \pm g(\hat{\sigma}_v^j)$, $g \in \pi_1$. Efectuamos el siguiente procesamiento: escojamos en C_{n-1}^0 otra base: su primera parte es una base en un grupo ∂C_n^0 , obtenido de $\hat{\sigma}_v^n$. La segunda parte se escoge arbitrariamente en un espacio $C_{n-1}^0 / \text{Im} \partial$.

Designemos a una base nueva en C_{n-1}^0 por \bar{e}^{n-1} . Hay un determinante de paso $\det(e^j, \bar{e}^j)$ de una base a la otra. La base \bar{e}^j en la segunda parte de $C_{n-2}^0 / \text{Im} \partial$ pas a en C_{n-2}^0 con ayuda de ∂ ; allí esta base se completa hasta una base completa en C_{n-2}^0 mediante la elección de base en $C_{n-2}^0 / \text{Im} \partial$. Aparece una base \bar{e}^{n-2} en C_{n-2}^0 . Tenemos un determinante de paso $\det(e^{n-2}, \bar{e}^j)$ de una base vieja en C_{n-2}^0 a una nueva (la base «vieja» en C_q^0 está fijada por células). Luego, pasamos a C_{n-3}^0 , etc. Obtenemos bases \bar{e}^k en todos los C_k^0 y un juego de números $\det(e^k, \bar{e}^k)$.

Consideremos el número

$$R(C, \rho) = \det(e^{n-1}, \bar{e}^{n-1}) \det(e^{n-2}, \bar{e}^{n-2})^{-1} \dots \\ \dots \det(e^{n-k}, \bar{e}^{n-k})^{(-1)^{k+1}} \dots \det(e^0, \bar{e}^0)^{(-1)^{n+1}}$$

A este número lo denominaremos «torsión de Reidemeister» R . El arbitrio en la elección de las células básicas y sus orientaciones lleva al cambio $R \rightarrow \lambda R$, donde $\lambda = \pm \det \rho(\pi_1)$.

Resulta, que este número (con exactitud hasta las multiplicaciones $R \rightarrow \lambda R$, $\lambda = \pm \det \rho(\pi_1)$) no depende de la triangulación y es un invariante topológico (lineal a trozos) del complejo invariante de difeomorfismo de una variedad. No lo demostramos (véase [63]).

PROBLEMA 6. Calcular la torsión R para las lentes tridimensionales $L_p^3(q)$, donde q es un residuo (mod p), si $\rho: \mathbb{Z}_p \rightarrow \sqrt[p]{1}$, $M = \mathbb{C}$ con actuación de \mathbb{Z}_p en forma de multiplicación por $\sqrt[p]{1}$.

Anillo de cohomologías de la lente $L_p^3(q)$ con p impar y cualquier q tiene dos generatrices $u \in H^1$, $v \in H^2$:

$$H^0(L, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p,$$

$$H^1(L, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p(u),$$

$$H^2(L, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p(v = \delta_* u \text{ mod } p),$$

$$H^3(L, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p(w)$$

($\pm w$ es una generatriz reducida mod p del grupo $H^3(L, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$).

PROBLEMA 7. Demostrar que el producto en $H^*(L, \mathbb{Z}_p)$ tiene la forma:

$$uv = qw. \quad (2)$$

Recordemos, que la lente $L = L_p^3(q)$ se construía así: $L = S^3/\mathbb{Z}_p$, donde la generatriz $g \in \mathbb{Z}_p$ actúa en la esfera S^3 así (véase el § 4):

$$(z_1, z_2) \rightarrow \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi i}{p} q} z_2 \right), \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1.$$

Como $\delta_* u = v$ y w está definido unívocamente con exactitud hasta en un signo, el arbitrio en la elección del número q surge a causa de transformaciones $u \rightarrow \lambda u$, $w \rightarrow \pm w$ (λ es recíprocamente simple con p). Al mismo tiempo, obtenemos de (2):

$$u \rightarrow \lambda u, \quad v \rightarrow \lambda v, \quad w \rightarrow \pm w, \quad uv \rightarrow \pm \lambda^2 qw.$$

CONCLUSIÓN: Como el anillo de cohomologías y operadores δ_* , ∂_* son homotópicamente invariantes, los residuos q y $\bar{q} = \pm \lambda^2 q$ son equivalentes, si se consideran los invariantes homotópicos de las lentes. Por ejemplo:

a) $p = 3$, $q = 1$ ó $\bar{q} = 2$. Los residuos de forma $\pm \lambda^2$ son 1 y 2 en \mathbb{Z}_3 ($\lambda \neq 0$).

b) $p = 5$, $q = 1, 2, 3, 4$, $\lambda^2 = (1, 4, 9 \cong 4, 4^2 = 16 \cong 1)$.

Residuos de forma $\pm \lambda^2$: (1, 4) en \mathbb{Z}_5 .

Por eso $L_5^3(1)$ y $L_5^3(2)$ son homotópicamente no equivalentes.

c) $p = 7$, $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$,

$$\lambda^2 = 1, 4, 2, 2, 4, 1,$$

$$-\lambda^2 = 6, 3, 5, 5, 3, 6.$$

Aquí un invariante homotópico ($\pm \lambda^2$) no da nada, ya que ($\pm \lambda^2$) son todos los residuos (mod 7), distintos de cero.

PROBLEMA 8. Aclarar, cuáles lentes son topológicamente distintas para $p = 7$, utilizando la torsión R . (Es interesante, que aquí aparecen por primera vez topológicamente distintas variedades coradas, homotópicamente equivalentes. Para las variedades simplemente conexas esta cuestión es más compleja.)

Las homología y cohomología con coeficientes en la representación ρ para $\Gamma = \mathbb{Z} [\pi_1]$ también aparecen en los problemas sobre la prolongación de aplicaciones del subcomplejo $L \rightarrow X$ sobre el complejo $K \supset L$, si $\pi_1(X)$ actúa en $\pi_n(X)$ y con prolongación de las secciones de espacios fibrados, véase el § 9, donde estos problemas fueron considerados en un caso simplemente conexo.

Consideremos en calidad de ejemplo interesante la cuestión sobre la construcción en una variedad n -dimensional (por ejemplo, en una variedad 4-dimensional M^4) de una métrica de signatura $(+ - - -)$. Ya que el interior de un cono de luz en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}_{1,3}$ se contrae homotópicamente a un eje unidimensional temporal mediante deformación canónica, entonces un conjunto de conos de luz posibles (es decir, de formas g_{ab} de tipo $(+ - - -)$) en \mathbb{R}^4 es equivalente homotópicamente a un conjunto de direcciones $\mathbb{R}P^3$ (para \mathbb{R}^n tenemos $\mathbb{R}P^{n-1}$). Por eso, nuestro problema es equivalente al de construcción de un campo de direcciones unidimensionales en M^4 , es decir, de sección de un espacio fibrado tangente

$$E \xrightarrow{p} M^4, \text{ fibra } F = \mathbb{R}P^3.$$

Puesto que las particularidades de un campo vectorial típico están concentradas en puntos aislados (o sea, para los campos vectoriales el obstáculo surge sólo al prolongar el campo en un armazón 4-dimensional del 3-dimensional), lo mismo es justo para los campos de direcciones. Tenemos una cocadena obstaculizadora α (véase el § 9), $\alpha \in C^4(M^4, \pi_3(F)) = C^4(M^4, \mathbb{Z})$, puesto que $\pi_3(\mathbb{Z}P^3) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Sin embargo es correcto considerar esta cocadena como una clase de cohomología del grupo $H^4_\rho(M^4, \pi_3(F))$, donde $\pi_1(M^4)$ actúa en $\pi_3(F)$.

PROBLEMA 9. Mostrar, que si $\alpha \sim 0$ en un grupo $H^4_\rho(M^4, \pi_3(F))$ es posible cambiar la sección (campo de direcciones) en un 3-armazón de base, de tal modo que $\alpha \equiv 0$ y es posible construir la sección en toda la M^4 .

Por consiguiente, tenemos dos casos.

1) La variedad M^4 es orientable y compacta. Aquí la acción de $\pi_1(M^4)$ en $\pi_3(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}$ es trivial, $H^4_\rho(M^4, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 10. Demostrar que $\alpha = \chi(M^4)$ es una característica de Euler (al igual que para los campos vectoriales).

2) La variedad M^4 es no orientable. Aquí tenemos $\alpha \in H^4_\rho \times (M^4, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, donde ρ es una representación no trivial $\pi_1(M^4)$ en $\pi_3(F) = \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 11. Demostrar que en este caso $\alpha = \chi(M^4)$. Así en ambos casos la construcción del campo de direcciones (de métrica de signatura $+ - - -$) equivale a la condición $\chi(M^4) \equiv 0$.

Para las variedades no cerradas es interesante construir en M^4 una métrica g_{ab} , la cual fuera de un conjunto compacto se aproxima

a la métrica de Minkowski. De manera que la variedad abierta M^4 (topológicamente) permite su compactación mediante un punto ∞ hasta la variedad $\bar{M}^4 \supset M^4$. En el mismo punto $\infty \in \bar{M}^4$, en virtud de propiedades de la métrica de Minkowski, tenemos un punto singular de grado 2 del campo de direcciones buscado (¡demostrarlo!). ¿Es posible construir en \bar{M}^4 un campo de direcciones con un solo punto singular de grado 2? El problema se reduce al anterior, pero es necesario que $\chi(\hat{M}^4) = 2$ ó $\chi(M^4) = 1$.

PROBLEMA 12. Demostrar que las clases homotópicas de campos de direcciones (o de métricas de forma $(n, 1)$ en la variedad M^{n+1} son definidas por los homomorfismos $\pi_1(M^{n+1}) \rightarrow \mathbb{Z}_2 = (\pm 1)$ (curvas cerradas, cuya circunvalación cambia la dirección de las flechas, y dan -1), y también por una clase de cohomología

$$\gamma \in H_p^n(M^{n+1}, \pi_n(\mathbb{R}P^n)).$$

EJEMPLO. Sean excluidos de \mathbb{R}^3 una recta y un punto. El dominio restante $U \subset \mathbb{R}^3$ tiene un tipo homotópico $S^2 \vee S^1$ (un ramo). Sea dado un campo de direcciones en el dominio U

$$U \xrightarrow{f} \mathbb{R}P^2.$$

Una clase homotópica $[f]$ es determinada por un homomorfismo $\pi_1(U) = \mathbb{Z} \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}_2 = \pi_1(\mathbb{R}P^2)$ y también por una clase de cohomología $(\pm \gamma)$

$$\pm \gamma \in H_p^2(U, \pi_2(\mathbb{R}P^2)) = H_p^2(S^2 \vee S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

donde $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$ actúa en $\pi_2(\mathbb{R}P^2)$ en virtud de que $f_*(\pi_1(U)) \subset \pi_1(\mathbb{R}P^2)$. En el caso dado, ocurre la inversión de la orientación (la acción de ρ es no trivial). El cubrimiento \hat{K} sobre $K = S^2 \vee S^1$

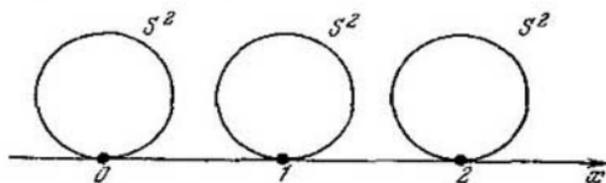


Fig. 45. La acción: $x \rightarrow x + 1$.

tiene la forma mostrada en la fig. 45. Todas las 2-cocadenas son cociclos no cohomológicos a cero. $C_p^2(K) = H_p^2(K) = \mathbb{Z}$ (verificarlo).

Consideremos como un ejemplo útil el problema sobre las clases homotópicas de aplicaciones de un toro T^2 en un plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$:

$$T^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}P^2.$$

El invariante más simple de una aplicación f es el homomorfismo inducido de grupos fundamentales

$$f_*: \pi_1(T^2) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}' \rightarrow \pi_1'(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2.$$

Si el homomorfismo f_* es trivial, la aplicación f sobre un armazón unidimensional puede ser contraído en un punto. Clases homotópicas de tales aplicaciones (donde $f_*(\pi_1) = 0$) se reducen a clases homotópicas de aplicaciones de una esfera S^2 en $\mathbb{R}P^2$ y son determinadas unívocamente por un grado de aplicación (verificarlo). Es más interesante el caso cuando el homomorfismo f_* es no trivial. Sin restringir la generalidad es posible considerar, que $f_*(a) = 1$, $f_*(b) = 0$, donde a y b son el paralelo y meridiano de un toro. Consideremos dos aplicaciones f y $g: T^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ tales, que $f_* = g_*$. Considerando el toro partido en la partición celular estándar

$$\sigma^0, \sigma_1^1 = a, \sigma_2^1 = b, \sigma^2,$$

de la condición $f_* = g_*$, mediante una homotopía llevamos las aplicaciones f y g a coincidir en un armazón unidimensional. Un par de aplicaciones f y g sobre una célula σ^2 , que coinciden en la frontera $\partial\sigma^2$, define un «elemento distintivo» del grupo $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$, designado por $\alpha = \alpha(\sigma^2, f, g) \in \mathbb{Z} = \pi_2(\mathbb{R}P^2)$, que se representa un elemento de grupo de cohomologías

$$H_p^2(T^2; \pi_2(\mathbb{R}P^2)). \quad (3)$$

Aquí $\rho = f_* = g_*$.

PROBLEMA 13. Demostrar que el grupo (3) es igual a \mathbb{Z}_2 , si ρ es no trivial.

De manera que tenemos no más de dos diferentes clases homotópicas de aplicaciones $f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ con un homomorfismo fijado f_* de grupos fundamentales.

§ 12. Cohomologías de las superficies de Riemann hiperelípticas. Toros de Jacobi. Geodésicas en los elipsoides poliaxiales. Relación con los potenciales de zonas finitas

Una superficie de Riemann hiperelíptica de género g es dada por la ecuación

$$w^2 - P_{2g+1}(z) = 0 \quad \text{ó} \quad w^2 - \tilde{P}_{2g+2}(z) = 0,$$

donde $P_{2g+1}(z)$, $\tilde{P}_{2g+2}(z)$ son polinomios sin raíces múltiples (véase [1], parte II, § 4).

En cualquier superficie de Riemann R están definidas las diferenciales holomorfas ω (diferenciales de primer género), que en coordenadas locales $z = u + iv$ tienen la forma

$$\omega = f(z) dz,$$

donde $f(z)$ es una función complejo-analítica de z . Aclararemos más abajo la forma posible de $f(z)$.

En un ejemplo importante de las superficies de Riemann R , de género $g > 0$ las diferenciales holomorfas tienen la forma

$$\omega_k = \frac{z^{k-1}}{w} dz = \frac{z^{k-1}}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}} dz, \quad k=1, 2, \dots, g, \quad (1)$$

donde la superficie está dada por un polinomio $P_{2g+1}(z) = \prod_{i=1}^{2g+1} (z-z_i)$ de grado $2g+1$.

Verifiquemos que estas diferenciales son holomorfas. Es evidente que son holomorfas fuera de los puntos $z = z_i$ (los ceros del polinomio P_{2g+1}) y $z = \infty$. En el entorno del punto $z = z_i$ es posible tomar como parámetro local $\zeta = \sqrt{z-z_i}$. Entonces $z = \zeta^2 + z_i$, $dz = 2\zeta d\zeta$, y las expresiones (1) toman la forma

$$\omega_k = 2 \frac{(\zeta^2 + z_i)^{k-1}}{\sqrt{\prod_{j \neq i}^{2g+1} (\zeta^2 + z_i - z_j)}} d\zeta, \quad (2)$$

por eso las diferenciales ω_k con $z = z_i$ son también holomorfas. En un punto infinitamente alejado $z = \infty$ sirve de parámetro local $\zeta = \frac{1}{\sqrt{z}}$, $z = \frac{1}{\zeta^2}$, $dz = -\frac{2d\zeta}{\zeta^3}$, de donde

$$\omega_k = -\frac{2\zeta^{2(g-k)}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2g+1} (1-\zeta z_i)}} d\zeta, \quad (3)$$

y ω_k son también holomorfas para $k \leq g$.

Cualquiera diferencial holomorfa ω es localmente exacta: $\omega = f(z) dz = d\tilde{f}(z)$, donde $\tilde{f}(z)$ es una función primitiva y $f(z)$ es también una función complejo-analítica. Por eso, la 1-forma ω en la superficie R es cerrada: $d\omega = 0$. Una forma no nula ω nunca es exacta, porque no hay funciones holomorfas no triviales en una superficie compacta R (véase [1], parte II, § 4). Por analogía, la forma $\bar{\omega} = \overline{f(z)} \bar{dz}$ también es cerrada y no exacta.

Las formas $\omega_1, \dots, \omega_g$ para una superficie hiperelíptica R_g son linealmente independientes (sobre los números complejos). Por eso, las formas $Re\omega_k = \frac{1}{2}(\omega_k + \bar{\omega}_k)$, $Im\omega_k = \frac{1}{2i}(\omega_k - \bar{\omega}_k)$ componen la base en un grupo de cohomologías $H^1(R_g; \mathbb{R}) = \mathbb{R} + \dots + \mathbb{R}$ ($2g$ sumandos).

OBSERVACION. El grupo de cohomologías $H^1(R; \mathbb{R})$ de cualquiera superficie de Riemann R se define mediante diferenciales holomorfas. Su existencia es un teorema difícil (véase [19]).

PROBLEMA 1. Demostrar que cualesquiera $g + 1$ diferenciales holomorfas sobre una superficie de Riemann de género g , son linealmente dependientes.

Escojamos una base de ciclos $a_i, b_i, i = 1, \dots, g$, en las homologías $H_1(R_g, \mathbb{Z})$ tal, que sus índices de intersecciones dos a dos tengan la forma (véase [1], parte II, § 15):

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0 \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, g. \quad (4)$$

Cortando la superficie R_g por estos ciclos, la transformamos en un $4g$ -ágono \tilde{R}_g (véase el § 3).

Quedan definidos los períodos de cualquiera diferencial cerrada por los ciclos a_i, b_i :

$$\oint_{a_i} \omega = A_i, \quad \oint_{b_i} \omega = B_i, \quad i = 1, \dots, g. \quad (5)$$

Sean: ω' , otra diferencial cerrada; A'_i, B'_i , sus A -y B -períodos.

LEMA 1. Es justa la relación:

$$\int_{R_g} \omega \wedge \omega' = \sum_{i=1}^g (A_i B'_i - B_i A'_i). \quad (6)$$

DEMOSTRACIÓN. En el $4g$ -ágono \tilde{R}_g la forma cerrada es exacta: $\omega = df$. Por eso $\omega \wedge \omega' = d(f\omega')$, y en virtud de la fórmula de Stokes

$$\int_{R_g} \omega \wedge \omega' = \int_{\partial R_g} f\omega.$$

Sean Q y Q' puntos en las aristas a_i y a_i^{-1} del $4g$ -ágono \tilde{R}_g , que se juntan en uno en la superficie R_g . Entonces, QQ' es un ciclo en la

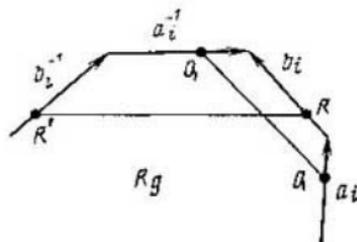


Fig. 46.

superficie R_g homológico al ciclo b_i (véase la fig. 46), por eso tenemos:

$$\int_{QQ'} \omega = f(Q') - f(Q) = \int_{b_i} \omega = B_i.$$

Análogamente, para los puntos R, R' , que se pegan en los bordes b_i, b_i^{-1} , obtendremos:

$$f(R') - f(R) = -A_i.$$

De aquí se deduce igualdad

$$\begin{aligned} & \int_{a_i + b_i + a_i^{-1} + b_i^{-1}} f\omega' = \\ & = \int_{a_i} f\omega' + \int_{b_i} f\omega' - \int_{a_i} (f + B_i)\omega' - \int_{b_i} (f - A_i)\omega' = A_i B_i' - B_i A_i', \end{aligned}$$

lo que demuestra el lema.

TEOREMA 1. *Para los períodos (A_i, B_i) y (A_i', B_i') de las diferenciales holomorfas ω, ω' se cumplen las siguientes relaciones (relaciones bilineales de Riemann):*

$$\sum_{k=1}^g (A_k B_k' - B_k A_k') = 0. \quad (7)$$

$$-\frac{1}{2i} \sum_{k=1}^g (A_k \bar{B}_k - B_k \bar{A}_k) > 0, \quad (8)$$

si la diferencial ω es distinta de cero.

DEMOSTRACIÓN. Si (localmente) $\omega = f(z) dz$, $\omega' = g(z) dz$ son diferenciales holomorfas, entonces, $\omega \wedge \omega' = fg dz \wedge dz = 0$. Por eso, en virtud del lema

$$\sum_{k=1}^g (A_k B_k' - B_k A_k') = 0.$$

La primera relación queda demostrada.

Consideremos ahora la integral $-\frac{1}{2i} \int_{R_g} \omega \wedge \bar{\omega}$. Puesto que $\omega \wedge \bar{\omega} = -2i|f|^2 dx \wedge dy$, donde $\omega = f(z) dz$, esta integral es positiva cuando $\omega \neq 0$. Por eso tendremos, utilizando el lema al caso $\omega' = \bar{\omega}$:

$$0 < -\frac{1}{2i} \int_{R_g} \omega \wedge \bar{\omega} = \int_{R_g} |f|^2 dx \wedge dy = -\frac{1}{2i} \sum (A_k \bar{B}_k - \bar{A}_k B_k).$$

El teorema queda demostrado.

Sea $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base de diferenciales holomorfas sobre la superficie hiperelíptica de Riemann R_g . Sea

$$A_{ij} = \oint_{a_j} \omega_i, \quad i, j = 1, \dots, g. \quad (9)$$

Del teorema demostrado se deduce

COROLARIO 1. *La matriz A_{ij} es no degenerada.*

DEMOSTRACION. De la fórmula (8) se deduce, que una diferencial holomorfa con los A -períodos nulos, es idénticamente igual a cero. Si la matriz A_{ij} hubiese sido degenerada, entonces se podría construir una diferencial holomorfa no nula con los períodos nulos. El corolario queda demostrado.

Según el corolario 1, es posible escoger una base nueva

$$\varphi_k = \frac{c_{1k}z^{g-1} + \dots + c_{gk}}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}} dz = \sum_{i=1}^g c_{ik} \omega_{g-i+1}, \quad k = 1, \dots, g \quad (10)$$

tal, que los A -períodos tengan la forma

$$\oint_{a_j} \varphi_i = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Sea $B_{ij} = \int_{b_j} \varphi_i$ una matriz de B -períodos, construida por esta base. Del teorema 1 se deduce el siguiente corolario.

COROLARIO 2. *La matriz B_{ij} es simétrica y tiene una parte imaginaria definida positiva.*

DEMOSTRACION. La simetría de B_{ij} se deduce de (7), para $\omega = \varphi_i$, $\omega' = \varphi_j$. Apliquemos ahora la desigualdad (8) a una diferencial holomorfa $\omega = x_1 \varphi_1 + \dots + x_g \varphi_g$, donde x_k son números reales. Para esta diferencial los períodos A_k tienen forma $A_k = x_k$, y los períodos B_k la forma $B_k = x_1 B_{1k} + \dots + x_g B_{gk}$. De aquí se deduce la desigualdad

$$\begin{aligned} 0 < \frac{i}{2} \sum_{k=1}^g \overline{\{x_k(x_1 B_{1k} + \dots + x_g B_{gk})\}} - x_k(x_1 B_{1k} + \dots + x_g B_{gk}) \} = \\ = \sum_{k,j=1}^g x_j x_k \operatorname{Im} B_{jk}, \end{aligned}$$

lo que demuestra la definición positiva de la matriz $\operatorname{Im} B_{jk}$. El corolario queda demostrado.

Construimos por la matriz (B_{ij}) en un espacio C^g , un retículo Γ sobre números enteros, engendrado por los vectores linealmente

independientes e_1, \dots, e_{2g} , donde $(e_k)^i = \delta_{ik}$, $(e_{g+h})^i = R_{ih}$, $k = 1, 2, \dots, g$.

El retículo Γ define un toro $2g$ -dimensional $T^{2g} = \mathbb{C}^g/\Gamma$ (véase [1], parte II, § 4). Llamado *toro de Jacobi* (o *variedad de Jacobi*) de la superficie de Riemann R_g .

CONCLUSION. El toro de Jacobi T^{2g} es abeliano (véase [1], parte II, § 4). Examinemos, como un ejemplo, un caso de superficies de género 1 («curvas elípticas»): $w^2 = P_3(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. En este caso hay dos ciclos a_1, b_1 (véase la fig. 47).



Fig. 47. Ciclos en la superficie elíptica de Riemann R_1 : $w^2 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Con la línea punteada se designa la parte del ciclo b_1 que descansa sobre la segunda hoja.

Aquí se tiene una diferencial holomorfa $\varphi = c dz/\sqrt{P_3(z)}$, donde el número c se escoge de la condición $\oint_{a_1} \varphi = 1$. Tomemos $\tau = B_{11} = \int_{b_1} \varphi$, donde $\text{Im } \tau > 0$. Los vectores $1, \tau$ determinan un toro bidimensional de Jacobi T^2 de la superficie de Riemann R_1 . La misma superficie R_1 es equivalente al toro (como una variedad; véase [1], parte II, § 4).

Esta equivalencia se construye así. Fijamos un punto P_0 sobre la superficie R_1 . Para un punto arbitrario P en R_1 definamos la magnitud $A(P)$, suponiendo

$$A(P) = \int_{P_0}^P \varphi = \int_{P_0}^P \frac{c dz}{\sqrt{P_3(z)}}. \quad (12)$$

La curva (el camino) de integración, que conduce en la superficie de Riemann del punto P_0 en el punto P , está definida no únicamente, con exactitud hasta añadir cualquier ciclo. Por eso $A(P)$ está definida sólo con exactitud hasta la combinación lineal con coeficientes enteros de los A - y B -períodos de la diferencial φ :

$$A(P) \sim A(P) + n \cdot 1 + m \cdot \tau, \quad n, m \text{ son enteros.} \quad (13)$$

De manera que está definida la aplicación $A(P)$ de la superficie elíptica de Riemann R_1 en su toro de Jacobi T^2 .

AFIRMACION 1. *La aplicación $A(P)$ es regular por doquier, o sea su diferencial en ninguna parte se anula.*

La demostración es evidente.

COROLARIO. *La aplicación $A(P)$ es un isomorfismo (complejo-analítico).*

DEMOSTRACION. De la anterior afirmación se deduce, que $A(P)$ es un cubrimiento. Está claro, que $A(P)$ transforma las generatrices a_j, b_j del grupo $\pi_1(R_g)$ en las generatrices del grupo $\pi_1(T^2)$. Por eso el cubrimiento $A(P)$ es trivial (véase [1], parte II, § 19). El corolario queda demostrado.

OBSERVACION. En la teoría de funciones complejo-analíticas se demuestra que cualquier toro complejo T^2 es un toro de Jacobi de la superficie elíptica de Riemann.

Para el caso de superficies hiperelípticas R_g , donde $g > 1$, para cualquier juego de puntos Q_1, \dots, Q_g de la superficie R_g , está definido el vector $A(Q_1, \dots, Q_g) = (A^1, \dots, A^g)$, donde

$$A^k(Q_1, \dots, Q_g) = \int_{Q_0}^{Q_1} \varphi_k + \dots + \int_{Q_0}^{Q_g} \varphi_k, \quad k=1, \dots, g \quad (14)$$

Aquí $\varphi_1, \dots, \varphi_g$ es una base estándar de las diferenciales holomorfas, normalizadas por la condición $\int_{\alpha_i} \varphi_k = \delta_{ik}$. Las curvas de integración desde un punto fijado Q_0 hasta los puntos Q_1, \dots, Q_g , se eligen convencionalmente. Estas curvas están definidas sólo con exactitud hasta las combinaciones con coeficientes enteros de los ciclos

$$Q_0 Q_k \sim Q_0 Q_k + \sum_{i=1}^g m_i \alpha_i + \sum_{j=1}^g n_j \beta_j. \quad (15)$$

Por eso las magnitudes $A^k(Q_1, \dots, Q_g)$ están definidas con exactitud hasta los períodos de diferenciales holomorfas:

$$A^k(Q_1, \dots, Q_g) \sim A^k(Q_1, \dots, Q_g) + \sum_i m_i \delta_{ik} + \sum_j n_j B_{kj}, \quad (16)$$

o bien

$$A(Q_1, \dots, Q_g) \sim A(Q_1, \dots, Q_g) + \sum_{i=1}^g m_i e_i + \sum_{j=1}^g n_j e_{g+j}, \quad (17)$$

donde e_1, \dots, e_{2g} son vectores construidos más arriba y generatrices del retículo Γ . Por eso el vector-función $A(Q_1, \dots, Q_g)$ toma valores en el toro de Jacobi $T^{2g} = \mathbb{C}^g / \Gamma$ de la superficie de Riemann R_g . Esta aplicación se llama *aplicación de Abel*.

AFIRMACION 2. *La aplicación de Abel es invertible, si no hay coincidentes entre los puntos Q_1, \dots, Q_g .*

DEMOSTRACION Para simplificar los cálculos, consideremos, que entre los puntos Q_1, \dots, Q_g no hay puntos de ramificación. Entonces, en el entorno de un punto Q_h es posible tomar la coordenada $z = z_h$ en calidad de un parámetro local. Calculemos jacobiano de una transformación $A(Q_1, \dots, Q_g)$ o sea, $\det(\partial A^j(Q_1, \dots, Q_g)/\partial z_h)$. El cálculo es cómodo hacerlo en la base $\omega_1, \dots, \omega_g$ (fórmula (1)). Entonces obtendremos

$$\frac{\partial A^j}{\partial z_h} = \frac{z_h^{j-1}}{\sqrt{P_{2g+1}(z_h)}}, \quad j, k = 1, \dots, g.$$

Obtendremos de aquí para el jacobiano buscado:

$$\det\left(\frac{\partial A^j}{\partial z_k}\right) = \frac{1}{\prod_{k=1}^g \sqrt{P_{2g+1}(z_k)}} \det \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1^{g-1} & \dots & z_g^{g-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{1 < j} (z_i - z_j)}{\prod_{k=1}^g \sqrt{P_{2g+1}(z_k)}}.$$

(Hemos utilizado la expresión conocida del álgebra para un «determinante de Vandermonde».) Está claro, que este jacobiano es distinto de cero, si los números z_1, \dots, z_g son diferentes de par en par. La afirmación queda demostrada.

OBSERVACION. El problema de inversión de la aplicación de Abel es conocido en la geometría de las superficies de Riemann como el «problema de inversión de Jacobi». Este problema admite una solución explícita: cualquiera función simétrica de las coordenadas z_1, \dots, z_g de los puntos Q_1, \dots, Q_g se expresa mediante una θ -función de Jacobi—Riemann (véase [1], parte II, § 4), construida por un toro (abeliano) de Jacobi T^{2g} . Damos una fórmula para calcular la suma de las coordenadas $z_1 + \dots + z_g$ de los puntos Q_1, \dots, Q_g , sin brindar aquí fórmulas generales:

$$z_1 + \dots + z_g = \frac{d^2}{dx^2} \ln \theta(y_1, \dots, y_g) + c, \quad (18)$$

donde el operador $\frac{d}{dx}$ tiene la forma

$$\frac{d}{dx} = V_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + V_g \frac{\partial}{\partial y_g}, \quad (19)$$

ademas,

$$V_k = c_{1k}, \quad k = 1, \dots, g \quad (20)$$

(las magnitudes c_{jh} están determinadas por las fórmulas (10)), c es una constante.

Los propios puntos Q_1, \dots, Q_g se determinan a partir de las ecuaciones $A(Q_1, \dots, Q_g) = y$, unívocamente, con exactitud hasta la permutación.

Utilicemos la transformación de Abel a la integración de las ecuaciones de Kovalévskaya para el movimiento de un cuerpo sólido-pesado con un punto fijado. Las ecuaciones del problema de Kovalévskaya tienen la forma (véase [31])

$$\begin{aligned} 2r &= qr, & \dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ 2\dot{q} &= -pr - \mu\gamma_3, & \dot{\gamma}_2 &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \dot{r} &= \mu\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 &= q\gamma_1 - p\gamma_2, \\ & & \mu &= \text{const.} \end{aligned} \quad (21)$$

Las ecuaciones (21) pueden ser escritas en forma de Hamilton, pero no la damos (véase más abajo Suplemento 1). Estas ecuaciones tienen las siguientes integrales:

$$H = 2(p^2 + q^2) + r^2 - 2\mu\gamma_1 \quad (\text{energía}), \quad (22)$$

$$L = 2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 \quad (\text{momento}), \quad (23)$$

$$K = (p^2 - q^2 + \mu\gamma_1)^2 + (2pq + \mu\gamma_2)^2 \quad (\text{integral de Kovalévskaya}). \quad (24)$$

Además, se cumple la condición de conexión $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Consideremos una superficie compatible del nivel de estas integrales: $H = 6h$, $L = 2l$, $K = k^2$, donde h , l , k^2 son constantes.

Si se cumple la condición de conexión $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ las ecuaciones (22) — (24) dan una superficie bidimensional (variedad invariante de un sistema dinámico (21)).

Introducimos las coordenadas s_1, s_2 en esta superficie (variables de Kovalévskaya), suponiendo

$$s_{1,2} = 3h + \frac{R(x_1, x_2) \mp \sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2},$$

donde $x_{1,2} = p \pm iq$, $R(z) = -z^4 + 6hz^2 + 4\mu lz + \mu^2 - k^2$
 $R(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2^2 + 6hx_1 x_2 + 2\mu l(x_1 + x_2) + \mu^2 - k^2$.

PROBLEMA 2. Demostrar, que en las variables s_1, s_2 las ecuaciones (21) se escribirán en forma

$$\dot{s}_1 = \pm \frac{i\sqrt{\Phi(s_1)}}{2(s_1 - s_2)}, \quad \dot{s}_2 = \mp \frac{i\sqrt{\Phi(s_2)}}{2(s_1 - s_2)}, \quad (25)$$

donde $\Phi(z)$ es un polinomio de quinto grado, que tiene la forma

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \{z[(z - 3h)^2 + \mu^2 - k^2] - 2\mu^2 l^2\} \times \\ &\quad \times (z - 3h - k)(z - 3h + k). \end{aligned} \quad (26)$$

OBSERVACION. La ecuación (25) coincide con la ecuación de conmutatividad en la superficie de nivel de dos integrales, indicada en [1], parte II, § 30.

Los segundos miembros de las ecuaciones (25) son funciones unívocas en una superficie hiperelíptica de Riemann de género 2, dada por la ecuación $w^2 = \Phi(z)$. Por eso obtenemos movimientos de un par de puntos (P_1, P_2) por esta superficie de Riemann.

Por ejemplo, sean todas las raíces del polinomio $\Phi(z)$ reales y distintas. Designémoslas por $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Si los datos iniciales para el sistema (25) se escogen reales y tales, que $a_1 \leq s_1 \leq a_2$, $a_3 \leq s_2 \leq a_4$, entonces en cualquier instante t los números $s_i(t)$ serán reales y satisfarán las mismas desigualdades. Los puntos $P_1 = P_1(t)$, $P_2 = P_2(t)$ se moverán en la superficie de Riemann por los ciclos encontrados sobre los segmentos $[a_1, a_2]$ y $[a_3, a_4]$

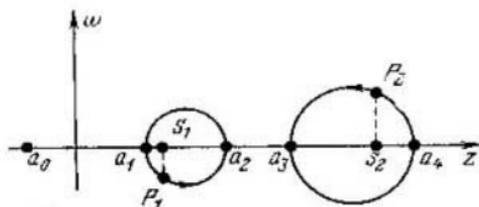


Fig. 48.

(véase la fig. 48). Estos ciclos están pegados de dos ejemplares $[a_1, a_2]^+$ y $[a_1, a_2]^-$, $[a_3, a_4]^+$ y $[a_3, a_4]^-$ por los extremos de los segmentos correspondientes. Un «punto de fase» (P_1, P_2) se mueve por un toro bidimensional (real). Para integrar las ecuaciones (25), apliquemos a ellas la transformación de Abel, construida por una curva hiperelíptica de género 2, dada por la ecuación $w^2 = \Phi(z)$. Aquí tenemos dos diferenciales holomorfas independientes $\frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}$ y

$\frac{z dz}{\sqrt{\Phi(z)}}$. Hacemos

$$A^1(P_1, P_2) = \int_{P_0}^{P_1} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}},$$

$$A^2(P_1, P_2) = \int_{P_0}^{P_1} \frac{z dz}{\sqrt{\Phi(z)}} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{z dz}{\sqrt{\Phi(z)}} \quad (27)$$

(P_0 es cualquier punto de la superficie de Riemann).

AFIRMACIÓN 3. Después de la transformación (27), las ecuaciones de Kovalévskaya (25) pasan a un sistema lineal con los coeficientes cons-

tantes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A^1(P_1(t), P_2(t)) &= 0, \\ \frac{d}{dt} A^2(P_1(t), P_2(t)) &= \frac{i}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

DEMOSTRACION. Supongamos que los puntos $P_1(t)$, $P_2(t)$ se distinguen de los puntos de ramificación a_0, \dots, a_4 . Entonces los parámetros locales en el entorno de estos puntos son s_1, s_2 . Por eso, en virtud de las ecuaciones (25) tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A^1(P_1(t), P_2(t)) &= \frac{\dot{s}_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \frac{\dot{s}_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = \\ &= \frac{i}{2} \frac{\sqrt{\Phi(s_1)}}{\sqrt{\Phi(s_1)}} - \frac{i}{2} \frac{\sqrt{\Phi(s_2)}}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = 0, \\ \frac{d}{dt} A^2(P_1(t), P_2(t)) &= \frac{\dot{s}_1 s_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \frac{\dot{s}_2 s_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

La afirmación queda demostrada.

PROBLEMA 3. Demostrar, que un sistema de la forma

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{s_2 \sqrt{\Phi(s_1)}}{s_1 - s_2}, \quad \frac{ds_2}{dt} = \frac{s_1 \sqrt{\Phi(s_2)}}{s_2 - s_1} \quad (29)$$

con una transformación de Abel también pasa a ser un sistema con los coeficientes constantes.

En vigor de la afirmación 3 tenemos:

$$\begin{aligned} A^1(P_1(t), P_2(t)) &= A^1(P_1(t_0), P_2(t_0)), \\ A^2(P_1(t), P_2(t)) &= A^2(P_1(t_0), P_2(t_0)) + \frac{i}{2}(t - t_0). \end{aligned} \quad (30)$$

De manera que después del paso a la variedad de Jacobi, el sistema de ecuaciones de Kovalévskaya se resuelve completamente. Para obtener una dependencia explícita del tiempo t de las variables s_1, s_2 , es necesario invertir el cambio de variables (27), o sea, solucionar el problema de inversión de Jacobi.

CONCLUSION. La variedad invariante $\{H = 6h, L = 2l, K = k^2, \gamma^2 = 1\}$ del problema de Kovalévskaya (al prolongarse en un dominio complejo), es un toro de Jacobi T^4 de la superficie de Riemann $\{w^2 = \Phi(z)\}$.

Ahora demos otros ejemplos de los sistemas de Hamilton, que admiten la integración con ayuda de la transformación de Abel, es decir, de tales sistemas, cuyos toros invariantes, al prolongarse en un dominio complejo, son toros de Jacobi de las superficies de Riemann.

EJEMPLO 1. Recordemos, que la «ecuación de conmutatividad» (véase [1], parte II, § 30).

$$[\mathcal{L}, A_2 + c_1 A_1 + c_2 A_2] = 0, \quad (31)$$

donde $\mathcal{L} = -d^2/dx^2 + u(x)$ es un operador de Sturm—Liouville; A_0, A_1, A_2 , son operadores diferenciales respecto a x , de los órdenes primero, tercero y quinto; c_1, c_2 , son constantes. Esta ecuación puede ser escrita en forma de Lagrange

$$\frac{\delta L}{\delta u(x)} = 0 \quad (32)$$

con lagrangiano

$$L = L(u, u', u'') = \frac{u''^2}{2} - \frac{5}{2} u'' u^2 + \frac{5}{2} u^4 + \\ + c_1 \left(\frac{u'^2}{2} + u^3 \right) + c_2 u^2 + c_3 u; \quad c_3 = \text{const.} \quad (33)$$

Las soluciones del sistema (32) son potenciales periódicos con zonas finitas (bizonales) y casi periódicos del operador \mathcal{L} (véase [1], parte II, § 30). El sistema de Hamilton correspondiente, con dos grados de libertad, tiene dos integrales independientes J_1, J_2 en involución, o sea, es integrable completamente. Las coordenadas explícitas γ_1, γ_2 en las superficies de nivel de estas integrales tiene forma (para el caso $c_1 = 0$)

$$u = -2(\gamma_1 + \gamma_2), \\ \frac{1}{8}(3u^2 - u'') = \gamma_1 \gamma_2 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j, \quad (34)$$

donde $\lambda_0, \dots, \lambda_4$ son raíces del polinomio, $P_5(\lambda_i) = 0$; la expresión de los coeficientes del polinomio $P_5(\lambda)$ por medio de las constantes c_1, c_2, c_3 y de las integrales J_1, J_2 es dada en las fórmulas (30.30) de la parte II del libro [1]. En estas coordenadas la ecuación (32) se escribe en una forma coincidente con (25) después de volver a designar $s_i \rightarrow \gamma_i, t \rightarrow x$ ([1], parte II, ecuaciones (30, 33)) y por eso también se integra por el cambio de Abel. (La superficie de Riemann de género 2 es dada, en este caso, por el polinomio $P_5(\lambda)$.)

Prestemos atención a que las fórmulas (29) describen la dependencia temporal $u(x, t)$ de las soluciones de la ecuación de $K dV$ (véase [1], parte II, § 30), donde $s_i \rightarrow \gamma_i$ (¡verifíquese!).

OBSERVACIÓN. Las ecuaciones de conmutatividad de órdenes superiores se integran también por la transformación de Abel y por eso tienen, como variedades invariantes (en un dominio complejo): los toros de Jacobi de las superficies hiperelípticas de Riemann de géneros superiores.

EjemPlo 2. En el problema de Neumann sobre el movimiento de una partícula en una esfera bidimensional

$$x^2 \equiv \sum_{i=0}^2 x_i^2 = 1 \quad (35)$$

bajo la influencia de un potencial cuadrático

$$U(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 a_i x_i^2, \quad a_i = \text{const}, \quad (36)$$

las ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\ddot{x}_i = -a_i x_i + \lambda(t) x_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (37)$$

$$x^2 \equiv \sum_{i=0}^2 x_i^2 = 1, \quad (37')$$

donde $\lambda(t)$ es un multiplicador de Lagrange, que surge a causa de la superposición de la conexión (35). El sistema (37), (37') puede ser obtenido de un flujo de Hamilton en \mathbb{R}^6 con hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 a_i x_i^2 + \frac{1}{2} (x^2 y^2 - (xy)^2) \quad (38)$$

por una acotación en la esfera $x^2 = 1$.

PROBLEMA 4. Demostrar que las funciones

$$F_k(x, y) = x_k^2 + \sum_{i \neq k} \frac{(x_k y_i - x_i y_k)}{a_i - a_k}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (39)$$

son un sistema de integrales independientes en la involución para un sistema con hamiltoniano (38).

El propio hamiltoniano H tiene la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 a_i F_i. \quad (40)$$

PROBLEMA 5. Comprobar que la transformación

$$x' = y, \quad y' = -x, \quad H' = \sum_{i=0}^2 a_i^{-1} F_i \quad (41)$$

transforma un flujo de Hamilton construido en un flujo geodésico, en un elipsoide triaxial («problema de Jacobi»)

$$\sum_{i=0}^2 \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \quad (42)$$

(las geodésicas en un elipsoide triaxial fueron halladas por Jacobi).

Mostremos que el problema de Neumann (y, por consiguiente, el problema de Jacobi) se integra por la transformación de Abel. Reducimos el problema de Neumann, siguiendo los trabajos modernos, al ya considerado problema sobre los potenciales bizonales («ecuaciones de conmutatividad» (32)).

Sean ψ_0, ψ_1, ψ_2 funciones propias de un operador $\mathcal{L} = -d^2 dx^2 + u(x)$ con propios valores a_0, a_1, a_2 , correspondientemente, o sea, soluciones de ecuaciones diferenciales

$$\mathcal{L}\psi_i = a_i\psi_i, \quad i = 0, 1, 2. \quad (43)$$

Las ecuaciones (43) vuelven a escribirse en forma

$$\psi_i'' = -a_i\psi_i + u(x)\psi_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (44)$$

que coincide con las ecuaciones (37) del problema de Neumann después de volver a designar $x \rightarrow t, \psi_i \rightarrow x_i, u(x) \rightarrow \lambda(t)$ (multiplicador de Lagrange). Queda por satisfacer la ecuación de conexión $\sum x_i^2 = 1$. Escojamos para esto un potencial bizonal $u(x)$, de tal manera, que los ceros $\lambda_0, \dots, \lambda_4$ del polinomio correspondiente $P_5(\lambda)$ (véase más arriba) tengan la forma:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = a_0 < \lambda_1 < \lambda_2 = a_1 < \lambda_3 < \lambda_4 = a_2, \\ P_5(\lambda) = \prod_{i=0}^4 (\lambda - \lambda_i) \end{aligned} \quad (45)$$

(«extremos derechos de lagunas» en el espectro del operador \mathcal{L} véase [1], parte II, § 30). Resulta que las soluciones que necesitamos de las ecuaciones (43) se expresan simplemente por las variables γ_1, γ_2 , determinadas por las igualdades (34).

PROBLEMA 6. Demostrar que las funciones de forma

$$\psi_i(x) = \alpha_i \sqrt{(a_i - \gamma_1(x))(a_i - \gamma_2(x))}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (46)$$

donde α_i son constantes y satisfacen las ecuaciones (43),

$$\text{si } u = -2(\gamma_1 + \gamma_2) + \sum_{i=0}^4 \lambda_i,$$

$$\gamma_1' = 2i \sqrt{P_5(\gamma_1)/(\gamma_1 - \gamma_2)}, \quad \gamma_2' = 2i \sqrt{P_5(\gamma_2)/(\gamma_2 - \gamma_1)}.$$

PROBLEMA 7. Demostrar, que si se escogen constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ en forma

$$\alpha_i = \left\{ \prod_{j \neq i} (a_i - a_j) \right\}^{-1/2}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (47)$$

entonces, para las funciones ψ_i de forma (46) se cumple la condición de conexión

$$\psi_0^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 = 1. \quad (48)$$

Las fórmulas (46), (47) dan una completa reducción del problema de Neumann (y, por consiguiente, del problema de Jacobi) al problema de inversión de Jacobi para la superficie de Riemann de género 2 con puntos de ramificación (45).

Es curioso notar que, a pesar de la coincidencia de los toros invariantes y los flujos en ellos (¡hasta en un dominio complejo!) para la ecuación (32) de potenciales bizonales, así como también para los problemas de Neumann y Jacobi, todos estos sistemas de Hamilton no son canónicamente equivalentes (¡verifíquese!).

Los sistemas de Neumann y Jacobi con dos grados de libertad, considerados en detalle por nosotros, casi automáticamente vuelven a escribirse para las dimensiones grandes. La integración de estos sistemas siempre puede ser reducida a potenciales de zonas finitas.

§ 13. Propiedades más simples de las variedades de Kahler. Toros abelianos

DEFINICIÓN 1. A una variedad compleja M^{2n} con una métrica hermitiana $ds^2 = g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta$, donde $\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, se la llamará de Kahler, si una 2-forma real correspondiente $\Omega = \frac{i}{2} \sum_{\alpha < \beta} g_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$

es cerrada: $d\Omega = 0$. Tiene lugar la afirmación (véase [1], parte I, §27): para una métrica de Kahler la forma $\Omega^n = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega$ (n factores) es un elemento de volumen no nulo múltiple:

$$\Omega^n = c dV = c \sqrt{\det g_{\alpha\bar{\beta}}} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n, \quad c \neq 0. \quad (1)$$

COROLARIO. Las formas Ω^i , $i = 1, \dots, n$ en una variedad compacta de Kahler no son cohomológicas a nulo. Por eso, los grupos $H^{2i}(M^{2n}, \mathbb{R})$ son no triviales.

DEMOSTRACION. Si la forma Ω es exacta, $\Omega = d\omega$, entonces la forma Ω^n es exacta, $\Omega^n = d(\omega \wedge \Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$. Pero en una variedad compacta tenemos:

$$\int_{M^{2n}} \Omega^n = c \int_{M^{2n}} dV \neq 0.$$

Esto significa que la forma Ω no es exacta. El corolario queda demostrado.

EJEMPLO 1. Cualquiera superficie de Riemann es una variedad de Kahler por razonamientos de dimensión.

EJEMPLO 2. Una métrica hermitiana en $\mathbb{C}P^n$ se obtiene de la forma

$$ds^2 = \sum_{h=0}^n dz^h d\bar{z}^h - \left(\sum_{h=0}^n z^h d\bar{z}^h \right) \left(\sum_{j=0}^n \bar{z}^j dz^j \right) \quad (2)$$

en un espacio \mathbb{C}^{n+1} , a la cual consideramos como una forma en la esfera S^{2n+1} : $|z^0|^2 + \dots + |z^n|^2 = 1$. Verifiquemos que la forma ds^2 es invariante respecto a las transformaciones

$$z^h \mapsto e^{i\varphi} z^h, \quad \bar{z}^h \mapsto e^{-i\varphi} \bar{z}^h.$$

Con la transformación indicada obtendremos:

$$dz^h \mapsto e^{i\varphi} (dz^h + iz^h d\varphi), \quad d\bar{z}^h \mapsto e^{-i\varphi} (d\bar{z}^h - i\bar{z}^h d\varphi),$$

así que

$$\begin{aligned} \sum_h dz^h d\bar{z}^h &\mapsto \sum_h dz^h d\bar{z}^h + i \left[\sum_h (z^h d\bar{z}^h - \bar{z}^h dz^h) \right] d\varphi + d\varphi^2, \\ \sum_h z^h d\bar{z}^h &\mapsto \sum_h z^h d\bar{z}^h - id\varphi, \quad \sum_j \bar{z}^j dz^j \mapsto \sum_j \bar{z}^j dz^j + id\varphi. \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \sum_h dz^h d\bar{z}^h - \left(\sum_h z^h d\bar{z}^h \right) \left(\sum_j \bar{z}^j dz^j \right) &\mapsto \\ &\mapsto \sum_h dz^h d\bar{z}^h - \left(\sum_h z^h d\bar{z}^h \right) \left(\sum_j \bar{z}^j dz^j \right). \end{aligned}$$

De manera que es posible considerar la forma ds^2 como una métrica en $\mathbb{C}P^n$. La forma Ω , definida por esta métrica, es del tipo:

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum dz^h \wedge d\bar{z}^h - \frac{i}{2} \left(\sum z^h d\bar{z}^h \right) \wedge \left(\sum \bar{z}^h dz^h \right). \quad (3)$$

En la esfera S^{2n+1} tenemos $\sum z^h \bar{z}^h = 1$, de donde $\sum z^h d\bar{z}^h + \sum \bar{z}^h dz^h = 0$. Por eso la acotación de la forma Ω en la esfera da

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum dz^h \wedge d\bar{z}^h. \quad (4)$$

Esta forma es cerrada (ha sido considerada en el § 1 al examinar un anillo de cohomología del espacio $\mathbb{C}P^n$), por eso la variedad $\mathbb{C}P^n$ es de Kahler.

EJEMPLO 3. Ahora demos un ejemplo de una variedad compleja compacta, que no admite una estructura de Kahler, o sea la variedad de Hopf. Designemos por Γ a un grupo, que actúa en el espacio $\mathbb{C}^n \setminus 0$, engendrado por la transformación $z \mapsto 2z$. Está claro, que un factor $(\mathbb{C}^n \setminus 0)/\Gamma$ por esta acción es una variedad compleja compacta, homeomorfa a un producto directo $S^1 \times S^{2n-1}$. Entonces,

$H^2(S^1 \times S^{2n-1}, \mathbb{R}) = 0$ ($n > 1$), y no es posible introducir una estructura de Kahler en esta variedad si $n \geq 1$.

Están definidas en la variedad de Kahler los períodos de la forma Ω que son sus integrales por los ciclos bidimensionales de $H_2(M^{2n}, \mathbb{Z})$. Se dice que la variedad es de Hodge, si todos los períodos de la forma Ω son enteros (o se hacen enteros después de multiplicarse por un mismo número, $\Omega \rightarrow \lambda\Omega$).

Por ejemplo, para la variedad $\mathbb{C}P^n$ sabemos que $H_2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, por eso es posible multiplicar una métrica ds^2 por un número conveniente, para que el único período de la forma Ω se vuelva un número entero.

PROBLEMA 1. La generatriz en el grupo $H_2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ es una subvariedad $\mathbb{C}P^1$, dada en $\mathbb{C}P^n$ por las ecuaciones $z^2 = \dots = z^n = 0$.

Calcular el período de la forma $\Omega = \frac{i}{2} \sum_{k=0}^n dz^k \wedge d\bar{z}^k$ por este ciclo (multiplicador normalizante).

AFIRMACION 1. Una subvariedad complejo-analítica N^{2m} de la variedad de Kahler M^{2n} , es de Kahler. Si M^{2n} es de Hodge, entonces N^{2m} también es de Hodge.

DEMOSTRACION. Sean: $f: N^{2m} \rightarrow M^{2n}$, una inmersión; ds^2 , una métrica hermitiana, que da en M^{2n} una estructura de Kahler; Ω , una forma cerrada, conexa con ella. Entonces, ds^2 induce una métrica hermitiana $f^* ds^2$ en N^{2m} y la forma conexa con ella es igual a $f^*\Omega$ y también cerrada. Por eso, la variedad N^{2m} es de Kahler. Si c es cualquier ciclo bidimensional en la variedad N^{2m} , entonces es justa la igualdad

$$\int_c f^*\Omega = \int_{f_*c} \Omega.$$

Para un ciclo con coeficientes enteros c , el ciclo f_*c es también con coeficientes enteros, por eso $\int_{f_*c} \Omega$ es un número entero para la variedad de Hodge M^{2n} . De aquí se deduce, que N^{2m} es de Hodge. La afirmación está demostrada.

En la variedad $\mathbb{C}P^n$ se destacan subvariedades complejas compactas y algebraicas. La clase más simple de estas variedades se da por un juego de ecuaciones («intersecciones completas»)

$$\left. \begin{aligned} F_1(z_0, \dots, z_n) &= 0, \\ &\dots \\ F_h(z_0, \dots, z_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

donde todas las funciones F_1, \dots, F_k son polinomios homogéneos:

$$F_i(cz_0, \dots, cz_n) = c^\alpha F_i(z_0, \dots, z_n).$$

COROLARIO. *Todas las subvariaciones complejas regulares en $\mathbb{C}P^n$ son variedades de Hodge.*

OBSERVACIÓN. Cada subvariedad de este tipo define un ciclo $N^{2m} \subset \mathbb{C}P^n$. Para las subvariedades algebraicas compactas este ciclo nunca es cohomológico a nulo. Realmente, sean: $f: N^{2m} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, una inmersión (un encaje); Ω , una forma estándar en $\mathbb{C}P^n$. Entonces, $f^*\Omega$ es una 2-forma en N^{2m} , conexa con una métrica inducida de Kahler. Por eso, $(f^*\Omega)^m$ es un múltiplo no nulo de un elemento de volumen en N^{2m} . En virtud de compactidad, tendremos:

$$\int_{N^{2m}} (f^*\Omega)^m \neq 0,$$

de donde $\int_{f_*N^{2m}} \Omega^m \neq 0$. El ciclo f_*N^{2m} no es frontera en $\mathbb{C}P^n$ porque la forma Ω^m es cerrada y su integral por cualquiera frontera es igual a cero, en virtud de la fórmula de Stokes.

Ahora consideremos el caso, cuando los toros complejos $T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$ son de Hodge, donde el retículo Γ está engendrado por $2n$ vectores linealmente independientes e_1, \dots, e_{2n} . La métrica de Kahler en el toro T^{2n} se obtiene, si tomamos en \mathbb{C}^n cualquiera métrica hermitiana con coeficientes constantes. Si en el toro T^{2n} está dada alguna métrica de Kahler, entonces, es posible hacerla media (integrarla) por el toro T^{2n} y obtener una métrica con coeficientes constantes.

PROBLEMA 2. Demostrar que si una métrica inicial es de Hodge, entonces, después de hacerla media, obtendremos una métrica de Hodge con los mismos períodos (consideramos, que el volumen del toro T^{2n} es igual a 1).

Así, es suficiente con examinar un caso de métricas con coeficientes constantes. Cada tal métrica es definida por cierto producto escalar hermitiano en $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$:

$$H(x, y) = \sum_{\alpha\beta=1}^n h_{\alpha\beta} z_1^\alpha \bar{z}_2^\beta, \quad x = (z_1^\alpha), \quad y = (z_2^\beta), \quad h_{\beta\alpha} = \bar{h}_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

$H(x, y)$ puede ser considerada como una función bilineal de valor complejo en $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$, que satisface las relaciones:

$$H(y, x) = \overline{H(x, y)}, \quad H(ix, y) = iH(x, y). \quad (7)$$

Si $H(x, y) = F(x, y) + iG(x, y)$, donde $F(x, y)$ y $G(x, y)$ son reales, entonces de las igualdades (7) se deduce, que $F(x, y) =$

$= F(y, x)$, $G(x, y) = -G(y, x)$, $F(x, y) = G(ix, y)$. Por eso, la forma $F(x, y)$ es definida como positiva y toda la forma se define por una parte imaginaria de $G(x, y)$.

AFIRMACIÓN 2. El toro $T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$ es de Hodge si, y sólo si, existe una forma antisimétrica real $G(x, y) = -G(y, x)$ tal, que:

- 1) la forma $F(x, y) = G(ix, y)$ es simétrica y definida positiva.
- 2) $G(e_\alpha, e_\beta)$ es un número entero para cualesquiera dos vectores del retículo.

A estas condiciones se las llaman relaciones de Frobenius.

DEMOSTRACIÓN. En virtud de los razonamientos arriba mencionados es suficiente con demostrar que la condición 2) es equivalente a que la métrica en el toro T^{2n} , definida por una forma hermitiana $H(x, y) = G(ix, y) + iG(x, y)$, es de Hodge. Sabemos que el rango del grupo $H_2(T^{2n}, \mathbb{Z})$ es igual a $C_{2n}^2 = n(2n - 1)$ (número de combinaciones), donde la base de los ciclos bidimensionales en T^{2n} tiene la forma $c_{\alpha\beta} = \{\lambda e_\alpha + \mu e_\beta\}$, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ ($\alpha < \beta$). La forma G es conexa con la métrica de Kähler, por eso el toro T^{2n} es de Hodge si, y sólo si, las integrales de la forma G por todos los ciclos $c_{\alpha\beta}$ son enteras.

La acotación de la forma G en el ciclo $c_{\alpha\beta}$ es igual a $G(e_\alpha, e_\beta) \times \int d\lambda \wedge d\mu$, y la integral por este ciclo es igual a $G(e_\alpha, e_\beta)$. La afirmación queda demostrada.

En el § 4 de la parte II del libro [1] fue introducida una importante clase de toros abelianos complejos. Si definimos una matriz

(B_{kj}) con las igualdades $e_{n+k} = \sum_{j=1}^n B_{kj} e_j$, $1 \leq k \leq n$, entonces,

para el toro abeliano la matriz (B_{kj}) debe ser simétrica y tener una parte imaginaria positiva. En particular, en el párrafo anterior se mostró que los toros de Jacobi de las superficies de Riemann son abelianos. Tiene lugar la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN 3. Cualquier toro abeliano es de Hodge.

DEMOSTRACIÓN. Damos una forma hermitiana $H(x, y)$ con la igualdad

$$H(x, y) = \beta_{kj} z_1^k \bar{z}_2^j, \quad x = (z_1^1, \dots, z_1^n), \quad y = (z_2^1, \dots, z_2^n). \quad (8)$$

Aquí la matriz (β_{kj}) es inversa a la matriz positiva definida $\text{Im } B$. La parte imaginaria de la forma $H(x, y)$ es del tipo

$$G(x, y) = \text{Im } H(x, y) = \frac{1}{2i} \beta_{kj} (z_1^k \bar{z}_2^j - z_2^j \bar{z}_1^k) \quad (9)$$

en virtud de la simetría de la matriz (β_{kj}) . Comprobemos, que la forma antisimétrica $G(x, y)$ toma valores enteros en la base e_1, \dots

... e_{2n} del retículo Γ . Tenemos, para $m, l \leq n$:

$$G(e_m, e_l) = \frac{1}{2i} \beta_{hj} (\delta_m^h \delta_l^j - \delta_l^h \delta_m^j) \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} G(e_m, e_{n+l}) &= \sum_j \frac{1}{2i} \beta_{hj} (\delta_m^h \bar{B}_{lj} - B_{lj} \delta_m^h) = \\ &= -\delta_m^h \sum_j \beta_{hj} (\text{Im } B)_{jl} = -\delta_m^h \delta_{hl} = -\delta_{ml} = -G(e_{n+l}, e_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(e_{n+m}, e_{u+i}) &= \sum_{h,j} \frac{1}{2i} \beta_{hj} (B_{mh} \bar{B}_{lj} - B_{lj} \bar{B}_{mh}) = \\ &= \sum_{h,j} \beta_{hj} (b_{mh}^{\prime\prime} b_{lj}^{\prime} - b_{mh}^{\prime} b_{lj}^{\prime\prime}) = b_{im}^{\prime} - b_{ml}^{\prime} = 0, \end{aligned}$$

donde se han introducido las designaciones $b_{jk}^{\prime} = \text{Re } B_{jk}$, $b_{jk}^{\prime\prime} = \text{Im } B_{jk}$. Así, la forma $G(x, y)$ es con coeficientes enteros en el toro $T^{2n} = \mathbb{C}^n / \Gamma$. Es evidente que la métrica hermitiana (8) es definida positivamente. La afirmación queda demostrada.

PROBLEMA 3. Demostrar la corrección de una afirmación inversa: cualquier toro de Hodge es abeliano.

Notemos, en conclusión, que la importancia de la clase de toros de Hodge (o abelianos) consiste en que cualquier toro abeliano puede ser realizado explícitamente con ayuda de θ -funciones como una subvariación algebraica regular en un espacio proyectivo complejo (Lefschetz). Este teorema es justo para todas las variedades de Hodge (Kodaira; véase [21]).

§ 14. Homologías con coeficientes en los haces

Es conveniente describir un tipo más de homologías, que tiene una importancia esencial en diferentes dominios de las matemáticas (pero no en los límites de los materiales de este libro).

Sea X un espacio recubierto con los dominios abiertos U_α , $\bigcup U_\alpha = X$.

Exigimos que el recubrimiento $\{U_\alpha\}$ sea «localmente finito» (es decir, sólo juegos finitos de los dominios U_α pueden intersectarse).

DEFINICIÓN 1. a) Se llama *prehaz* F a la correspondencia que a cada dominio $U \subset X$ le confronta un grupo abeliano (anillo, campo) F_U ; se exige, que a un encaje (inmersión) $U \subset V$ le corresponda un homomorfismo de «restricción»

$$i_{UV} : F_V \rightarrow F_U. \quad (1)$$

Si $U \subset V \subset W$, entonces $i_{UW} = i_{UV} i_{VW}$. El prehaz F define el prehaz $F|_U$ en cualquier dominio $U \subset X$.

b) El prehaz F se llama haz, si tiene las siguientes propiedades:

1) Sea que un dominio U se representa en forma de unión de dominios U_α :

$$U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}.$$

Entonces, si $i_{U_{\alpha}U}(f) = 0$ para todos los α , un elemento $f \in F_U$ debe ser nulo.

2) Cualquier punto tiene un entorno bastante pequeño U tal, que un juego de elementos «coordinados» $f_{\alpha} \in F_{U_{\alpha}}$ se representa como un conjunto de restricciones de un elemento común $f \in F_U$. Aquí

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}, & U_{\alpha\beta} &= U_{\alpha} \cap U_{\beta} = U_{\beta\alpha}, \\ i_{U_{\alpha\beta}U_{\beta}} f_{\beta} &= i_{U_{\beta\alpha}U_{\alpha}} f_{\alpha} \text{ («coordinación»),} \\ i_{U_{\alpha}U} f &= f_{\alpha}. \end{aligned}$$

A un conjunto vacío \emptyset le corresponde siempre un cero: $F_{\emptyset} = 0$.

Con el recubrimiento $\{U_{\alpha}\}$ se relaciona un complejo simplicial, «nervio de recubrimiento», designado por $N\{U_{\alpha}\}$:

- 1) los vértices σ_{α}^0 corresponden a dominios U_{α} ;
- 2) las aristas $\sigma_{\alpha\beta}^1$ corresponden a pares (U_{α}, U_{β}) , si la intersección es no vacía. $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$;
- 3) los triángulos $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$ corresponden al trío $(U_{\alpha}, U_{\beta}, U_{\gamma})$, donde la intersección es no vacía. $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma} \neq \emptyset$;
- 4) el simplex $\sigma_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_k}^k$ corresponde a un juego de dominios $(U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_k})$ tales, que la intersección $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ es no vacía.

Aparecen «cohomologías de recubrimiento» con coeficientes en el prehaz F : cocadenas k -dimensionales que son funciones lineales en los simplex $\sigma_{\alpha_0\dots\alpha_k}^k$ de dimensión k en el nervio $N\{U_{\alpha}\}$ con valor en los grupos $F(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k})$. Aquí las cocadenas tienen su dominio de valores en cada simplex. A una cocadena r^k le corresponde su cofrontera

$$(\delta c^k, \delta_{\alpha_0\dots\alpha_{k+1}}^{k+1}) = \sum_{q=0}^{k+1} (-1)^q i_{UV_q}(c^k, \sigma_{\alpha_0\dots\hat{\alpha}_q\dots\alpha_{k+1}}^k),$$

donde

$$\begin{aligned} (c^k, \sigma_{\alpha_0\dots\hat{\alpha}_q\dots\alpha_{k+1}}^k) &\text{ se encuentra en un grupo } F_{U_q}, \\ U &= U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_{k+1}}, \\ U &\subset U_q = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap \hat{U}_{\alpha_q} \cap \dots \cap U_{\alpha_{k+1}} \end{aligned}$$

(el dominio U_{α_q} está borrado de la intersección).

A las cohomologías de recubrimiento se las llamarán grupos cocientes de los cociclos por las cofronteras:

$$H^q(N\{U_\alpha\}, F) = \text{Ker } \delta / \text{Im } \delta = Z^q/B^q.$$

Sea que un recubrimiento $\{V_\beta\}$ está «inscrito» en $\{U_\alpha\}$: si la intersección $V_\beta \cap U_\alpha$ es no vacía, entonces V_β se encuentra íntegramente en U_α . Es fácil de verificar que surge una aplicación simplicial (un simplex pasa a ser simplex) de los nervios de estos recubrimientos:

$$N\{V_\beta\} \xrightarrow{\varphi_{UV}} N\{U_\alpha\}.$$

De manera que, utilizando (4), tenemos una aplicación de cocadenas y cohomologías:

$$H^*(N\{U_\alpha\}, F) \xrightarrow{\varphi_{UV}^*} H^*(N\{V_\beta\}, F).$$

Toda esta estructura (para los recubrimientos bastante «pequeños») describe las cohomologías con coeficientes en el haz: $H^*(X, \mathcal{F})$ es un «límite de espectro» (φ_{UV}^*) de todos los recubrimientos del espacio X .

Los elementos x de este «límite del espectro» están representados por todos los elementos posibles $x_U \in H^q(N\{U_\alpha\}, F)$ para todos los recubrimientos posibles $\{U_\alpha\}$.

Los elementos $x_U \in H(N\{U_\alpha\}, F)$ y $x_W \in H(N\{W_\gamma\}, F)$ se representan con un mismo elemento de $H^q(X, F)$ si, y sólo si, tenemos para cierto recubrimiento más pequeño V , inscrito en U y W

$$\varphi_{UV}^* x_U = \varphi_{WV}^* x_W = x_V \in H^q(N\{V_\beta\}, F).$$

EJEMPLO 1. Haz constante. Sean $F_U = G$ (un grupo abeliano, el mismo para todos los $U \neq \emptyset$) aplicaciones i_{UV} idénticas

$$i_{UV} \equiv 1 : G \approx G.$$

Si $X = M^n$ es una variedad, y un recubrimiento es tal, que todos los conjuntos $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$ son contractables (por ejemplo, U_α son figuras convexas, pequeñas por su tamaño en una métrica M^n), entonces es justa la igualdad

$$H^*(N\{U_\alpha\}, G) = H^*(M^n, G).$$

PROBLEMA 1. Demostrar que en este caso el nervio es un complejo equivalente homológicamente a M^n .

EJEMPLO 2. Hazes continuos (funcionales). Aquí F_U es un anillo (espacio lineal) de las funciones de alguna clase: continuas, suaves, holomorfas, algebraicas, etc. en el dominio $U \subset X$.

PROBLEMA 2. Demostrar que $H^0(X, F)$ son funciones de la misma clase, definidas globalmente en toda la variedad $X = M^n$ y $F_U = H^0(U, F|_U)$.

DEFINICIÓN GENERAL. A un haz \tilde{F} , definido por un prehaz F , se le llamará *nuevo prehaz* tal, que $\tilde{F}_U = H^0(U, F|_U)$ para cualquier dominio U .

El grupo $H^1(X, F)$ aparece, por ejemplo, en el siguiente problema: sea dado un juego de las «partes principales» f_α de una función f en los dominios U_α , donde $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$. Aquí $X = M^{2n}$ es una variedad compleja. Las partes principales f_α son, por ejemplo, partes de Laurent de una función incógnita f cerca de los polos. Es necesario hallar una función meromorfa f en X tal, que las funciones $(f - f_\alpha)$ son holomorfas en los dominios U_α . Está claro, que es necesaria la «coordinación» o sea, $f_\alpha - f_\beta = g_{\alpha\beta}$ son holomorfas en las intersecciones $U_\alpha \cap U_\beta$. Indicar la relación de este problema con las cohomologías $H^1(X, F)$ en un haz, donde $F(U) = H^0(U, F)$ es un espacio lineal de las funciones holomorfas en el dominio U . Demostrar que el problema es resoluble, si $H^1(X, F) = 0$.

EJEMPLO 3. Un ejemplo más de un haz: sea $X \xrightarrow{f} Y$ una aplicación continua. A un dominio $U \subset Y$ le corresponde $f^{-1}(U) \subset X$. Hagamos

$$F_U^j = H^j(f^{-1}(U)).$$

Aparecen las cohomologías $H^q(Y, F^j)$, $j \geq 0$, $q \geq 0$. En la variante más general del teorema de Leray (véase el § 8) es necesario cambiar $E_2^{q,j}$ por $H^q(Y, F^j)$. Todo lo demás sigue siendo correcto. Si $X \xrightarrow{p} Y$ es un espacio fibrado, donde la base es un complejo celular y simplemente conexa, entonces tenemos

$$H^q(Y, F^j) = H^q(Y, H^j(\tilde{F})),$$

donde $\tilde{F} = p^{-1}(y)$ es una fibra. Demostrarlo.

EJEMPLO 4. El problema sobre la clasificación de un espacio fibrado con una base X y un grupo estructural G , que fue considerado en el § 25 de la parte I del libro [1] desde otro punto de vista, da un ejemplo de haz (hablando en general, de los grupos no conmutativos). Sea dado un espacio fibrado $E \xrightarrow{p} X$ con un grupo G y una fibra \tilde{F} . Si $\{U_\alpha\}$ es un recubrimiento X , donde $p^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \tilde{F}$, entonces la estructura de un espacio fibrado es definida por las «aplicaciones de pegadura» (véase [1], parte II, § 24)

$$\lambda_{\alpha\beta}^{-1} = \lambda_{p\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G \quad (2)$$

Al mismo tiempo para $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ tenemos

$$\lambda_{\alpha\beta}\lambda_{\beta\gamma}\lambda_{\gamma\alpha} = 1. \quad (3)$$

La condición (3) significa, que el juego $(\lambda_{\alpha\beta})$ es un cociclo unidimensional en el recubrimiento $\{U_\alpha\}$ con valor en el haz F , y $F(U_\alpha)$ son funciones continuas sobre U_α con valor en G . Si un espacio fibrado es directo, entonces tendremos (es posible, que al principio haya que desmenuzar el recubrimiento) un juego de funciones $q_\alpha: U_\alpha \rightarrow G$ tal, que $\lambda_{\alpha\beta} = q_\alpha^{-1}q_\beta$. De manera que las clases del espacio fibrado son elementos de $H^1(X, F)$. Esto no es un grupo, si G es no abeliano.

PROBLEMA 3. Calcular $H^1(X, F)$, si G es un grupo abeliano.

PROBLEMA 4. Demostrar que un haz F sobre una variedad suave, donde F_u es un espacio lineal de las funciones suaves en un dominio U (más exactamente, suaves en un dominio cerrado $\bar{U} \supset U$), tiene cohomologías triviales con $q > 0$: $H^q(M^n, F) = 0$, $q > 0$; $H^0(M^n, F) = C^*(M^n)$ es un anillo de funciones sobre M^n . Sobre las variedades complejas se tiene un haz holomorfo, para el que no es cierto este hecho.

PROBLEMA 5. Por analogía, si es dado un espacio fibrado vectorial con base $B = M^n$: sean F_U secciones suaves de un espacio fibrado sobre un dominio U . Demostrar la igualdad (no será cierto esto en una variante holomorfa):

$$H^q(M^n, F) = 0, \quad q > 0,$$

$H^0(M^n, F)$ es un espacio de secciones de un espacio fibrado.

INDICACIÓN. Aprovechar el hecho de que es posible prolongar una función suave del dominio U sobre toda la variedad M^n .

PROBLEMA 6. Sean $F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)}$, tres haces, donde para todo U de forma esférica lo suficientemente pequeño, tengamos una sucesión exacta de los grupos:

$$0 \rightarrow F_U^{(0)} \xrightarrow{\alpha_U} F_U^{(1)} \xrightarrow{\beta_U} F_U^{(2)} \rightarrow 0,$$

con esto, todos los α_U y β_U conmutan con las aplicaciones $i_{UV}: F_U^{(k)} \rightarrow F_V^{(k)}$, $k=0, 1, 2$. Construir una sucesión exacta de cohomologías

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(M^n, F^{(0)}) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(M^n, F^{(1)}) & \xrightarrow{\beta} & \\ & & \xrightarrow{\beta} & H^0(M^n, F^{(2)}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(M^n, F^{(0)}) & \xrightarrow{\alpha} \\ & & & \xrightarrow{\alpha} & H^1(M^n, F^{(1)}) & \xrightarrow{\beta} & H^1(M^n, F^{(2)}) & \xrightarrow{\delta} \\ & & & & \xrightarrow{\delta} & H^2(M^n, F^{(0)}) & \xrightarrow{\alpha} & \dots \end{array}$$

EJEMPLO 1. Sean: F_U , funciones suaves reales en el dominio U ; $F_U^{(0)}$ un haz constante de forma $F_U^{(0)} = \mathbb{Z}$ y $F_U^{(2)}$ funciones con valor

en $G = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Calcular $H^1(M^n, F^{(2)})$; clasificar los espacios fibrados con el grupo $G^1 = S^1$, utilizando los problemas dados arriba.

EJEMPLO 2. Sean: $\tilde{F}_U^{(1)}$, un espacio lineal de las funciones holomorfas en el dominio U ; $\tilde{F}_U^{(0)} = \mathbb{Z}$, un haz constante; $\tilde{F}_U^{(2)}$ un grupo con operación de multiplicación de las funciones holomorfas en U , que no se anulan. La aplicación $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow F_U^{(1)}$ es una inmersión (un encaje) de las constantes, la aplicación $\beta: \tilde{F}_U^{(1)} \rightarrow \tilde{F}_U^{(2)}$ tiene la forma $f \xrightarrow{\beta} \exp(2\pi i f)$, la inscripción del haz $\tilde{F}^{(2)}$ es multiplicativa.

PROBLEMA 7. Demostrar que el grupo $H^1(M^n, \tilde{F}^{(2)})$ clasifica los 1-espacios fibrados holomorfos (véase [1], parte II, § 25). ¿Cuál es la relación del grupo $H^1(M^n, \tilde{F}^{(1)})$ con la clasificación de los espacios fibrados holomorfos, que son productos topológicamente directos (es decir, sin estructura compleja)?

EJEMPLO 3. Por definición, son tensores las secciones de diferentes potencias tensoriales de un espacio fibrado tangente de los vectores y covectores. Con los tensores están relacionados los haces, donde F_U son campos tensoriales suaves sobre el dominio $U \subset M^n$ en la base M^n . En el caso cuando se toman tensores antisimétricos (con los índices inferiores), o sea, formas diferenciales, podemos definir los haces F^i , donde F_U^i son formas sobre el dominio $U \subset M^n$. Surge una «sucesión exacta de los haces» (es decir, de los grupos F_U^i para todos los pequeños dominios de forma esférica $U \subset M^n$):

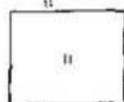
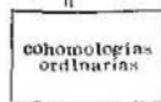
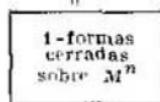
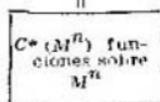
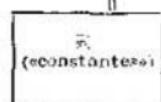
$$0 \rightarrow R \rightarrow F^0 \xrightarrow{d} F^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} F^n \rightarrow 0 \quad (4)$$

Aquí R es un haz constante (constantes) y el operador d en cualquier dominio U transforma las formas del grado i en las formas del grado $i + 1$. La exactitud de la sucesión de los haces (4) se deduce del corolario 1 del teorema 1.2, que afirma que para los dominios pequeños de forma esférica U cada forma cerrada ω con $\text{deg } \omega > 0$ es localmente exacta, o sea de $d\omega = 0$ y $\text{deg } \omega > 0$ se deduce $\omega = d\omega'$. Escojamos un haz de formas cerradas $Z_U^1 \subset F_U^1$, donde $Z_U^1 = \text{Ker } d$ (1-formas cerradas en el dominio $U \subset M^n$). Tenemos una sucesión exacta de haces, por definición:

$$0 \rightarrow R \rightarrow F^{(0)} \xrightarrow{d} Z^1 \rightarrow 0.$$

Consideremos la sucesión exacta de las cohomologías de estos haces:

$$0 \rightarrow H^0(M^n, R) \rightarrow H^0(M^n, F^0) \xrightarrow{d} H^0(M^n, Z^1) \xrightarrow{\delta} H^1(M^n, R) \rightarrow H^1(M^n, F^0)$$



Utilizando el resultado del problema 4 (véase más arriba), tenemos $H^1(M^n, F^0) = 0$. Por eso tenemos una aplicación sobre («epimorfismo»):

$$H^0(M^n, Z^1) \xrightarrow{\delta} H^1(M^n, R) \rightarrow 0.$$

El núcleo de la aplicación δ tiene forma df , f es una función suave. De aquí concluimos

$$H^1(M^n, R) = \text{Ker } d / \text{Im } d = H^0(M^n, Z^1) / (df)$$

(o sea, clases de formas cerradas por las exactas).

Complicando este razonamiento, es posible obtener ya mencionado «teorema de Rham» (véase § 6): los grupos de cohomología determinados mediante las formas diferenciales coinciden con los simpliciales $H^q(M^n, \mathbb{R})$ para todo q . Mostremos esto para $q \leq 2$.

Consideramos los haces

$$a) F^0/R = \bar{F}^0; \quad b) Z^1 = d(F^1)$$

son 2-formas cerradas.

Tenemos dos sucesiones de haces

$$a) 0 \rightarrow R \rightarrow F^0 \rightarrow F^0/R \rightarrow 0;$$

$$b) 0 \rightarrow F^0/R \xrightarrow{d} F^1 \rightarrow Z^1 \rightarrow 0.$$

De la sucesión exacta de cohomología para a) concluimos, utilizando el resultado del problema 4 (véase más arriba):

$$a) H^1(M^n, F^0/R) \cong H^2(M^n, R).$$

De la sucesión exacta b) tenemos:

$$b) H^0(M^n, Z^1)/(df) \cong H^1(M^n, F^0/R).$$

Puesto que $H^0(M^n, Z^1)$ son formas cerradas, tenemos definitivamente:

$$Z^1(M^n)/(df) \cong H^2(M^n, R).$$