

PUNTOS CRÍTICOS DE LAS FUNCIONES SUAVES Y DE LAS HOMOLOGÍAS

§ 15. Funciones de Morse y complejos celulares

Supongamos, que en una variedad compacta suave M sea dada una función de Morse (o sea, todos sus puntos críticos son no degenerados). Estudiaremos la estructura de las superficies de nivel $f_c = \{f(x) = c\}$ y de dominios de menores valores $M_c = \{f(x) \leq c\}$.

LEMA 1. (M. Morse). Sean: $f(x)$, una función suave sobre M ; x_0 , un punto estacionario no degenerado o crítico para f . Es posible hallar tales coordenadas locales y^1, \dots, y^n en el entorno del punto x_0 , que en estas coordenadas la función f se escribirá así: $f(y^1, \dots, y^n) = -(y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$. (El número λ se llama índice del punto crítico.)

DEMOSTRACION. Al principio, hagamos la demostración cuando $n = 2$; para n mayores los razonamientos son completamente análogos.

En virtud del carácter local de la afirmación del lema, es posible considerar, que $f(x_1, x_2)$ es dada en un disco $D_\varepsilon^2(0)$ de radio $\varepsilon > 0$, $f(0) = 0$, donde 0 es un punto crítico para f . Existen funciones suaves g_1, g_2 tales, que $f = x^1 g_1 + x^2 g_2$; $g_i(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x^i}$.

En realidad, tiene lugar la igualdad:

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = f(1 \cdot x) - f(0 \cdot x) = f(x).$$

Luego

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha} x^\alpha dt = x^\alpha \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha} dt = x^\alpha g_\alpha(x),$$

donde

$$g_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha} dt.$$

Está claro que $g_\alpha(0) = 0$, puesto que el grad $f(0) = 0$. Por consiguiente, existen funciones suaves $h_{\alpha\beta}(x)$ tales, que $g_\alpha(x) = x^\beta h_{\alpha\beta}(x)$. Así: $f(x) = x^\alpha x^\beta h_{\alpha\beta}(x)$, donde se puede considerar, que $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$. Luego: $h(0) = \|h_{\alpha\beta}(0)\| = \left\| \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right\|$. En realidad:

$$\begin{aligned} g_\alpha(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x^\alpha} dt = x^\beta \int_0^1 \frac{\partial g_\alpha(tx)}{\partial x^\beta} dt = \\ &= x^\beta \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\int_0^1 \frac{\partial f(t\tau x)}{\partial x^\alpha} d\tau \right) dt = \\ &= x^\beta \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f(t\tau x)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} d\tau dt = h_{\alpha\beta}(x) \cdot x^\beta. \end{aligned}$$

De aquí

$$h_{\alpha\beta}(0) = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}.$$

Luego hagamos la demostración del lema con $n = 2$. En las coordenadas locales (x^1, x^2) la función f es de la forma:

$$f = (x^1)^2 h_{11} + 2x^1 x^2 h_{12} + (x^2)^2 h_{22}.$$

Se puede considerar que $h_{11}(0) \neq 0$. En efecto, la matriz $\|h_{\alpha\beta}(0)\|$ es simétrica y regular y por eso es posible, mediante cambio lineal de coordenadas, reducirla a la forma diagonal. Ya que desde el principio se hubiesen podido considerar las coordenadas (x^1, x^2) tales, que $\|h_{\alpha\beta}(0)\|$ es de forma diagonal, y se puede decir que $h_{11}(0) \neq 0$. Entonces $h_{11}(x) \neq 0$ también en algún entorno abierto del punto 0, y en este entorno tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= h_{11} \left((x^1)^2 + 2x^1 x^2 \frac{h_{12}}{h_{11}} + (x^2)^2 \frac{h_{12}^2}{h_{11}^2} \right) + (x^2)^2 \left(h_{22} - \frac{h_{12}^2}{h_{11}} \right) = \\ &= h_{11} \left(x^1 + \frac{h_{12}}{h_{11}} x^2 \right)^2 + (x^2)^2 \left(h_{22} - \frac{h_{12}^2}{h_{11}} \right). \end{aligned}$$

Puesto que $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \neq 0$ en algún entorno del punto 0 (la matriz $\|h_{\alpha\beta}(0)\|$ es regular), entonces, efectuando el reemplazo

$$y^1 = \sqrt{|h_{11}|} \left(x^1 + \frac{h_{12}}{h_{11}} x^2 \right); \quad y^2 = \sqrt{\left| h_{22} - \frac{h_{12}^2}{h_{11}} \right|} x^2,$$

obtenemos:

$$\tilde{f}(y^1, y^2) = \pm (y^1)^2 \pm (y^2)^2.$$

Debido a que el cambio de coordenadas es sin duda localmente regular, el lema queda demostrado.

Demos la demostración del lema de Morse en el caso de un n arbitrario

Recordemos, que es simétrica la matriz $\|h_{\alpha\beta}(0)\|$ arriba introducida. En adelante pasamos a la demostración por inducción. Sea que la función f en las coordenadas y^1, y^2, \dots, y^n ya tiene la forma

$$f(y) = \pm (y^1)^2 \pm \dots \pm (y^{k-1})^2 + \sum_{\alpha, \beta \geq k} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta}(y),$$

donde las funciones $P_{\alpha\beta}(y)$ forman una matriz simétrica y regular en el punto 0. Está claro, que cuando $k = 1$ se cumple este supuesto de inducción (véase la construcción de la matriz $\|h_{\alpha\beta}\|$, que desempeña el papel de la matriz $\|P_{\alpha\beta}\|$ cuando $k = 1$). Reescribimos la función $f(y)$ de la siguiente manera:

$$f(y) = \pm (y^1)^2 \pm \dots \pm (y^{k-1})^2 + P_{kk}(y)(y^k)^2 + \sum_{\alpha, \beta \geq k} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta}(y) \quad (\alpha \neq \beta \text{ cuando } \beta = k)$$

la matriz $(n \times n) \|P_{\alpha\beta}(y)\|$ está representada en la fig. 49. Puesto que $\|P_{\alpha\beta}\|$ es simétrica y regular, existe un cambio lineal de varia-

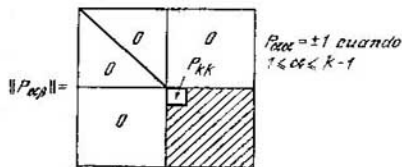


Fig. 49.

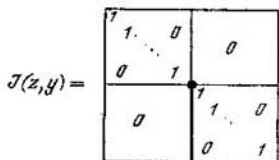


Fig. 50.

bles y^k, y^{k+1}, \dots, y^n tal, que en un punto (en el origen de coordenadas) la matriz $\|P_{\alpha\beta}(0)\|$ se reducirá a la forma diagonal; en particular, se puede considerar que las coordenadas y^k, \dots, y^n son escogidas exactamente de esta manera y, por consiguiente, $P_{kk}(0) \neq 0$. Consideremos la función $q(y) = \sqrt{|P_{kk}(y)|}$ y efectuemos el cambio de las variables: $(y^i) \rightarrow (z^i)$ por fórmulas

$$z^i = y^i \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq k-1; \quad k+1 \leq i \leq n,$$

$$z^k = q(y) \left(y^k + \sum_{i>k} y^i \frac{P_{ik}(y)}{P_{kk}(y)} \right).$$

Hallemos el jacobiano de cambio $(y) \rightarrow (z)$ en el punto 0 (vease la fig. 50). Es evidente que $\left. \frac{\partial z^k}{\partial y^k} \right|_0 = q(0) = \sqrt{|P_{kk}(0)|} \neq 0$, o sea $\det I(z, y) = \frac{\partial z^k}{\partial y^k} \neq 0$. Según el teorema sobre las funciones implí-

citadas, las funciones (z^1, \dots, z^n) son coordenadas locales en algún entorno suficientemente pequeño del punto 0 (lo que es evidente, en virtud de que la matriz del cambio de coordenadas es triangular). Así, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(z) = & \sum_{i \leq h-1} \pm (z^i)^2 + P_{hh} \frac{(z^h)^2}{q^2(y)} - 2P_{hh} \frac{z^h}{q(y)} \sum_{i>h} y^i \frac{P_{ih}}{P_{hh}} + \\ & + P_{hh} \left(\sum_{i>h} y^i \frac{P_{ih}}{P_{hh}} \right)^2 + 2 \left(\frac{z^h}{q(y)} - \sum_{i>h} y^i \frac{P_{ih}}{P_{hh}} \right) \sum_{i>h} y^i P_{ih} + \\ & + \sum_{\alpha, \beta > h+1} y^\alpha y^\beta P_{\alpha\beta} = \pm (z^1)^2 \pm \dots \pm (z^h)^2 + \sum_{\alpha, \beta \geq h+1} z^\alpha z^\beta \tilde{P}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

El paso de la inducción ha concluido, lo que demuestra la afirmación necesaria para un n arbitrario.

OBSERVACIÓN. El lema demostrado no es muy importante para el estudio de las superficies de nivel de la función $f(x)$ en un entorno del punto crítico. Está claro de antemano que la topología de los niveles se define por la forma d^2f a causa de su regularidad.

LEMA 2. Sea $f(x)$ una función suave sobre una variedad compacta cerrada M^m y que el segmento $[a, b]$ (donde $a < b$) no contenga valores críticos de la función f (es decir, en el conjunto $f^{-1}[a, b]$ no hay puntos críticos). Entonces, la variedad f_a es difeomorfa a f_b y la variedad M_a (con borde) es difeomorfa a M_b .

DEMOSTRACIÓN. En virtud de compacidad de M se tiene un $\varepsilon > 0$ tal, que el segmento $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ tampoco contiene valores críticos de la función $f(x)$. Se puede considerar, que en M es dada una métrica positiva de Riemann; entonces vamos a examinar un campo vectorial $\text{grad } f(x) = v(x)$. Este campo no tiene singularidades en la variedad (con borde) $f^{-1}[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ y $v(x)$ es ortogonal respecto a las hipersuperficies de nivel $f^{-1}(\alpha)$, $a \leq \alpha \leq b$. Consideremos las trayectorias integrales del campo $v(x)$, que comienzan en $f^{-1}(b)$ y terminan en $f^{-1}(a)$, véase la fig. 51.

En virtud de la compacidad de M , es posible realizar la deformación suave de la superficie $f^{-1}(b)$ a lo largo de las trayectorias integrales del campo $v(x)$ sobre la superficie $f^{-1}(a)$. Es evidente, que $f^{-1}(b)$ y $f^{-1}(a)$ son difeomorfas. Por analogía se determina el difeomorfismo entre M_a y M_b , ya que la preimagen completa $f^{-1}[a, b]$ es difeomorfa a $f_a \times I$, donde I es un segmento. El lema queda demostrado.

Ahora consideremos la conducta de las superficies de nivel cerca de los puntos críticos de la función $f(x)$.

Sea $x_0 \in M^n$ un punto crítico no degenerado para $f(x)$, donde $f(x_0) = 0$. Entonces, en vigor del lema 1 (de Morse), en un entorno bastante pequeño $U(x_0)$ del punto x_0 se pueden introducir unas

coordenadas curvilíneas x^1, \dots, x^n tales, que $f(x) = -(x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2$. Consideramos que el centro O del entorno $U(x_0)$ está ubicado en x_0 , y que $f(O) = 0$. Examinemos tres hipersuperficies: $f_0, f_\varepsilon, f_{-\varepsilon}$, donde $\varepsilon > 0$ es bastante pequeño. Estas se dan por las ecuaciones (en el dominio U)

$$(-(x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2) = \begin{cases} 0 \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{cases}$$

Aquí λ es un índice del punto crítico. Es evidente, que en las coordenadas (x^1, \dots, x^n) la superficie f_0 es un cono con un vértice en O , y ambas superficies $f_{\pm\varepsilon}$ son hiperboloides (véase la fig. 52).

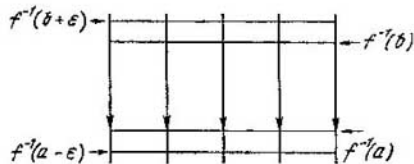


Fig. 51.

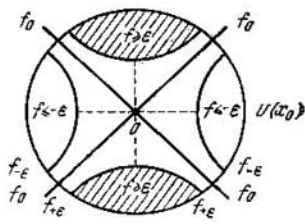


Fig. 52.

LEMA 3. En el caso, cuando $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon] = M_{+\varepsilon} \setminus M_{-\varepsilon}$ contiene sólo un punto crítico del índice λ , la variedad $M_{+\varepsilon}$ es de tipo homotópico de un complejo celular, que se obtiene de $M_{-\varepsilon}$ al pegar a $M_{-\varepsilon}$ una célula σ^λ (de dimensión λ , donde λ es un índice del punto crítico x_0) a la frontera $f_{-\varepsilon} = \partial M_{-\varepsilon}$.

DEMOSTRACIÓN. Construimos la deformación $\varphi_t: M_{+\varepsilon} \rightarrow M_{+\varepsilon}$, donde $\varphi_0 = 1$, y $\varphi_1: M_{+\varepsilon} \rightarrow M_{-\varepsilon} \cup \sigma^\lambda$ idéntica en $M_{-\varepsilon}$; la existencia de tal deformación demuestra el lema. Consideremos un campo vectorial $v(x) = -\text{grad } f(x)$ y, en calidad de φ_t consideremos la deformación de puntos x fuera de $M_{-\varepsilon}$ y fuera del entorno U a lo largo de las trayectorias integrales del campo $v(x)$. En el entorno U , en calidad de φ_t , consideremos la deformación mostrada en la fig. 53. Aquí el segmento AB representa condicionalmente un disco $D^\lambda(x^1, \dots, x^\lambda)$, cuya frontera (la esfera $S^{\lambda-1}$) está sumergida suavemente en el borde $f_{-\varepsilon}$ del dominio $M_{-\varepsilon}$ (en el dibujo $\lambda = 1$ y la frontera —la esfera S^0 — es un par de los puntos A y B). El resultado de deformación se muestra en la fig. 54. El lema queda demostrado.

TEOREMA 1. Cualquier variedad suave compacta conexa cerrada M^n es del tipo homotópico de un complejo celular, en el cual a cada punto

crítico P_λ del índice λ le corresponde una célula de dimensión λ , donde $\{P_\lambda\}$ son puntos críticos de cierta función de Morse sobre M .

DEMOSTRACION. Consideremos la función de Morse sobre M , donde en cada nivel crítico f se halla exactamente un punto crítico. Hay muchas de estas funciones (véase [1], p. II, § 10). De manera que el teorema se deduce de los lemas anteriores y del teorema 5 del § 10, p. II del libro [1].

En una serie de casos las propiedades analíticas de la función f restringen los índices de los puntos críticos.

PROBLEMA 1. Si $f = \operatorname{Re} F(z^1, \dots, z^n)$ es una parte real de la función complejo-analítica en \mathbb{C}^n , entonces el índice es igual a n en cualquier punto crítico no degenerado $(z_0^1, \dots, z_0^n) = z_0$.

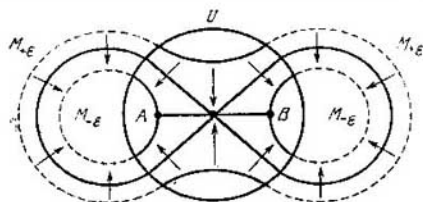


Fig. 53.

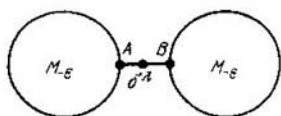


Fig. 54.

PROBLEMA 2. Si f es una función armónica en \mathbb{R}^n , entonces el índice de un punto crítico no degenerado no puede ser igual a 0 o n (principio del máximo).

Pero no hay funciones armónicas y analíticas sobre una variedad compacta. Indiquemos una aplicación topológica del resultado del problema 1: sea M^{2n} una subvariedad compleja compacta en $\mathbb{C}P^N = \mathbb{C}^N \cup \mathbb{C}P_\infty^{N-1}$. Entonces la «parte finita» V de la variedad M^{2n} se halla en \mathbb{C}^N . La intersección $W = \mathbb{C}P^{N-1} \cap M^{2n}$ es «sección hiperplana». La parte real de una de coordenadas complejas en \mathbb{C}^N da una función de Morse f en una parte finita V de la variedad M^{2n} . Todos los puntos críticos para f tienen un índice n . De aquí y del teorema es fácil deducir, que la variedad M^{2n} es homotópicamente equivalente a un complejo celular $[W \cup \sigma_1^n \cup \dots \cup \sigma_k^n] \cup \sigma^{2n}$, donde k es el número de los puntos críticos de la función f en la parte finita $V \subset \mathbb{C}^n$. (Demostrarlo meticulosamente). De aquí se deducen las igualdades

$$\begin{aligned} \pi_i(W) &= \pi_i(M^{2n}), & i < n-1, \\ H_i(W) &= H_i(M^{2n}), & i < n-1 \text{ ó } n < i < 2n. \end{aligned}$$

La inmersión (el encaje $H_{n-1}(W) \rightarrow H_{n-1}(M^{2n})$) es un homomorfismo sobre (epimorfismo).

§ 16. Desigualdades de Morse

Hay una estrecha ligazón entre el número de los puntos estacionarios (críticos) de las funciones $f(x)$ sobre la variedad suave cerrada M^n y las invariantes topológicas de variedad, o sea, grupos de homología, característica de Euler, etc.

En el § 15, p. II del libro [1] fue dado el teorema de que el número $\sum_{\lambda \geq 0} (-1)^\lambda \mu_\lambda(f)$ no depende de la función de Morse f sobre M^n y coincide con la característica de Euler. Aquí $\mu_\lambda(f)$ es el número de los puntos críticos del índice λ para f . Utilizando los resultados del § 15 obtenemos la siguiente afirmación:

TEOREMA 1. *Si $b_\lambda(M^n)$ son rangos de los grupos de homología de la variedad M^n (con cualquier campo de coeficientes), entonces tienen lugar las desigualdades (de Morse) para cualquier función (de Morse) f sobre M^n (o sea, la cual tiene sólo puntos críticos no degenerados): $\mu_\lambda(f) \geq b_\lambda(M^n)$ para todo $\lambda = 0, 1, \dots, n$.*

DEMOSTRACIÓN. Según el teorema 15.1 de este capítulo la función f engendra sobre la variedad M^n una estructura de espacio celular. Esto significa, que la variedad M^n es homotópicamente equivalente a un espacio celular K , que se obtiene mediante sucesivas pegaduras de las células $K_{i+1} = K_i \cup \sigma^{i+1}$, al mismo tiempo el número sumario de las células de dada dimensión λ es igual precisamente al número $\mu_\lambda(f)$ de los puntos críticos del índice λ . Como ya está demostrado en el § 4 (véase el teorema 4.1), semejante espacio celular es equivalente homotópicamente a un complejo celular \tilde{K} con el número de células $\mu_\lambda(f)$ de dimensión λ . De manera que \tilde{K} es equivalente homotópicamente a M^n y $H_q(\tilde{K}) = H_q(M^n)$ para todo q y todos los coeficientes G . Ya que el rango del grupo de homología $H_\lambda(\tilde{K})$ siempre es no mayor que el número de células de dimensión λ , el teorema está demostrado.

Este teorema, sin embargo, no da un juego completo de relaciones entre los números $\mu_\lambda(f)$, que están identificados simplemente con los números de células del complejo $\tilde{K} \sim M^n$, y los números de Betti $b_\lambda(M^n) = (\text{rango } H_\lambda(M^n))$. Conocemos una relación más (véase el § 2).

$$\sum_{\lambda \geq 0} (-1)^\lambda b_\lambda = \sum_{\lambda \geq 0} (-1)^\lambda \mu_\lambda(f). \quad (1)$$

El juego completo de estas relaciones es cómodo expresar algebraicamente así: formamos las funciones generadores $P(M^n, t) = \sum b_\lambda t^\lambda$ (polinomio de Poincaré de la variedad M^n) y $Q(M^n, f, t) = \sum \mu_\lambda(f) t^\lambda$ (polinomio de Poincaré de la función f definido de hecho para cual-

quier complejo celular \tilde{K} , donde μ_λ es el número de células de dimensión λ). Entonces de (1) se deduce, haciendo $t = -1$, que la diferencia $Q - P$ se divide por $(1 + t)$. Resulta que la razón $(Q - P)/(1 + t)$ tiene coeficientes no negativos (enteros). La demostración será dada más abajo en un aspecto más general. Es cómodo también generalizar las desigualdades de Morse en una función con puntos críticos degenerados.

Sea $f(x)$ una función infinitamente diferenciable.

DEFINICIÓN 1. El punto $x_0 \in M$ se llama *punto topológicamente regular* para la función $f(x)$, si se tiene un entorno abierto $U = U(x_0)$ homeomorfo al producto directo de la superficie de nivel por un segmento $\{f^{-1}(a)\} \times I[-\varepsilon, \varepsilon]$ (donde $a = f(x_0)$), (véase

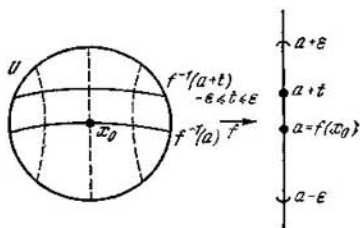


Fig. 55.

la fig. 55). Al mismo tiempo, es necesario, que este homeomorfismo realice un homeomorfismo de fibras, para que las superficies $(f^{-1}(a), t)$ coincidan con las superficies de nivel $f^{-1}(a + t)$ en el entorno U .

DEFINICIÓN 2. Al punto $x_0 \in M$ se le llamará *punto bifurcacional* (punto de bifurcación) para la función f , si x_0 no es un punto topológicamente no degenerado.

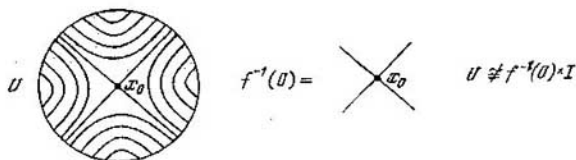


Fig. 56.

Consideremos ejemplos. Si $x_0 \in M$ es un punto crítico no degenerado de la función de Morse $f(x)$ sobre M , entonces, evidentemente, x_0 es un punto bifurcacional (véase la fig. 56).

Pero el punto crítico degenerado x_0 de la función suave f no siempre es un punto bifurcacional.

EJEMPLO. Consideremos $M = \mathbb{R}^1(x)$, $f(x) = x^3$, $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^1$. Entonces, x_0 es un punto crítico degenerado para f , pero, al mismo tiempo, x_0 es un punto topológicamente no degenerado (no bifurcacional) para f (véase la fig. 57).

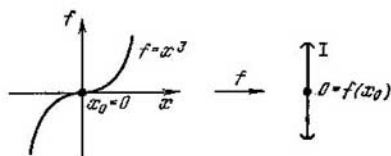


Fig. 57.

Sea M^n una variedad suave compacta cerrada y sea tolerable la función suave $f(x)$, es decir, que tiene un número finito de puntos bifurcacionales (por ejemplo, f es la función de Morse sobre M).

Sean c_1, c_2, \dots, c_N ($N < \infty$) valores críticos para la función f (o sea, $f^{-1}(c_\alpha)$ tiene por lo menos un punto bifurcacional). Como f tiene sólo un número finito de los puntos bifurcacionales, todos ellos son aislados. Sea $\{x\}_\alpha$ un conjunto de puntos bifurcacionales en nivel $\{f(x) = c_\alpha\}$. Consideremos $M_{c_\alpha} = \{f(x) \leq c_\alpha\}$. Los grupos relativos de homología $H_h(M_{c_\alpha} = M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ son los importantísimos invariantes de puntos bifurcacionales de la función f . (Al grupo $H_h(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ es posible comprenderlo, a causa del aislamiento de los puntos $\{x\}_\alpha$, como el grupo $H_h(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \bigcup \{x\}_\alpha)$, donde $\bigcup \{x\}_\alpha$ es un juego de entornos abiertos bastante pequeños de los puntos $\{x\}_\alpha$).

DEFINICIÓN 3. Al polinomio de Poincaré de la función $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ lo llamaremos polinomio $Q(M, f, t) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{h=0}^n b_h(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha) t^h$, donde $b_h(X, Y) = \dim H_h(X, Y)$.

TEOREMA 2. Sean $P(M, t)$ y $Q(M, f, t)$ los polinomios de Poincaré arriba introducidos. Entonces, la diferencia $Q - P$ se divide en $1 + t$, y la razón $(Q - P)/(1 + t)$ tiene coeficientes enteros no negativos.

LEMA 1. Sean $a < b$ dos números del dominio de los valores de la función $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ tales, que en el segmento $[a, b]$ no hay valores críticos de f . Entonces, M_a se contrae a M_b , y $H_*(M_a, M_b) = 0$.

La demostración del lema fue dada en el § 15 para las funciones de Morse. La demostración general la omitimos.

LEMA 2. Tiene lugar la igualdad

$$b_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha) = b_k(M_{c_{\alpha+\varepsilon}}, M_{c_{\alpha-\varepsilon}})$$

para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar que son isomorfos los mismos grupos $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ y $H_k(M_{c_{\alpha+\varepsilon}}, M_{c_{\alpha-\varepsilon}})$. Esta última afirmación se deduce de la definición de grupo $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ y del lema precedente. Consideremos ahora tres polinomios del tipo de Poincaré de forma especial: $P(M_a) = \sum_{(h)} b_h(M_a) t^h$; $P(M_b, M_a) = \sum_{(h)} b_h(M_b, M_a) t^h$, donde $a < b$ (o sea, $M_b \supset M_a$); $P(\text{Im } \partial) = \sum_{(h)} \dim(\text{Im } \partial_{h+1}) t^h$, donde el operador $\partial_{h+1}: H_{h+1}(M_b, M_a) \rightarrow H_h(M_a)$ es un operador de frontera en la sucesión exacta del par (M_b, M_a) (véase el § 5).

LEMA 3. Tiene lugar la igualdad

$$P(M_b, M_a) - \{P(M_b) - P(M_a)\} = (1+t)P(\text{Im } \partial).$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la sucesión exacta homológica del par (M_b, M_a) :

$$H_{k+1}(M_b, M_a) \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(M_a) \xrightarrow{i} H_k(M_b) \xrightarrow{j} H_k(M_b, M_a) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(M_a).$$

De la exactitud de la sucesión se deduce el siguiente sistema de relaciones;

$$b_k(M_b, M_a) = \dim(\text{Im } (j)) + \dim(\text{Im } (\partial_k));$$

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } (j)) &= b_k(M_b) - \dim I(i) = \\ &= b_k(M_b) - \{b_k(M_a) - \dim(\text{Im } (\partial_{k+1}))\} = \\ &= \{b_k(M_b) - b_k(M_a)\} + \dim(\text{Im } (\partial_{k+1})); \end{aligned}$$

$$b_k(M_b, M_a) - \dim(\text{Im } (j)) = b_k(M_b, M_a) - \{b_k(M_b) - b_k(M_a)\} - \dim(\text{Im } (\partial_{k+1})) = R_k - \dim(\text{Im } (\partial_{k+1})) - \dim(\text{Im } (\partial_k)).$$

donde $R_k = b_k(M_b, M_a) - \{b_k(M_b) - b_k(M_a)\}$.

Así: $R_k = \dim(\text{Im } (\partial_{k+1})) + \dim(\text{Im } (\partial_k))$,

$$t^k R_k = t^k \dim(\text{Im } (\partial_{k+1})) + t(t^{k-1} \dim(\text{Im } (\partial_k))),$$

o sea, $\sum_{(h)} t^h R_h = (1+t)P(\text{Im } \partial)$, lo que demuestra el lema.

Ahora pasemos directamente a la demostración del teorema. Consideremos todos los valores críticos c_1, c_2, \dots, c_N ($N < \infty$) para

la función $f(x)$ (o sea tales, que en $f^{-1}(c_i)$ hay por lo menos un solo punto de bifurcación de la función f). Luego consideremos los números $a_0, a_1, \dots, a_N, a_{N+1}$ tales, que $a_0 < c_1, a_i < c_{i+1} < a_{i+1}, c_N < a_{N+1}$ (o sea, los valores no críticos $\{a_i\}$ dividen a los valores críticos $\{c_i\}$; véase la fig. 58).

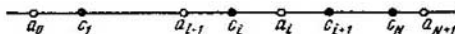


Fig. 58.

De los lemas precedentes obtenemos:

$$P(M_{a_{i+1}}, M_{a_i}) - \{P(M_{a_{i+1}}) - P(M_{a_i})\} = (1+t)P(\text{Im } \partial)_i.$$

Sumando estas igualdades según i , desde 0 hasta $N+1$, obtenemos, evidentemente:

$$Q(M, t) - P(M_{a_{N+1}}) - P(M_{a_0}) = (1+t)K(t),$$

donde el polinomio $K(t)$ tiene los coeficientes no negativos. Con esto, hemos aprovechado el hecho de que

$$P(M_{a_{i+1}}, M_{a_i}) = P(M_{c_i}, M_{c_i} \setminus \{x\}_i)$$

(esto se deduce de los lemas precedentes). Ahora notemos, que $P(M_{a_{N+1}}) \equiv P(M)$, ya que a_{N+1} es posible considerarlo tan grande, que $a_{N+1} > \max_{x \in M} f(x)$, y por eso $M_{a_{N+1}} = M$; luego: $P(M_{a_0}) = 0$, puesto que a a_0 es posible considerarlo escogido de tal modo, que $a_0 < \min_{x \in M} f(x)$, o sea, $M_{a_0} = \emptyset$, y en la definición del polinomio de Poincaré la sumación por k comienza desde $k = 0$. Así, definitivamente, $Q(M, f) - P(M) = (1+t)K(t)$, lo que demuestra el teorema.

Ahora consideremos los corolarios de este teorema. Sea tomado en calidad del grupo de coeficientes G un grupo \mathbb{R} de números reales. Entonces, los números $b_k = \text{rang}(H_k)$ se llaman números de Betti del espacio M . Sea f una función suave tolerable sobre la variedad M ; escribimos el polinomio de Poincaré para $f(x)$ en forma $Q(M, f) = \sum_{k \geq 0} \mu_k t^k$, y el polinomio de Poincaré para M en forma $P(M) = \sum_{k \geq 0} b_k t^k$. Los números μ_k los denominamos «números de Morse» de la función suave f ; (una interpretación particularmente clara de estos números surge en el caso, cuando f es una función de Morse sobre M). Entonces, en virtud del teorema arriba demostrado obtenemos:

$$Q(M, f) - P(M) = \sum_{(k)} (\mu_k - b_k) t^k = (1+t)K(t).$$

De aquí obtenemos que el polinomio $\sum_{(k)} (\mu_k - b_k) t^k$ tiene los coeficientes no negativos, o sea, $\mu_k \geq b_k$. De manera que los números de Betti b_k de la variedad M estiman por abajo los números de Morse μ_k . Luego, $\sum_{(k)} \mu_k t^k = \sum_{(k)} b_k t^k + (1+t) K(t)$; para $t = -1$, obtenemos $\sum_{(k)} (-1)^k \mu_k = \sum_{(k)} (-1)^k b_k$, donde en el segundo miembro se encuentra la característica de Euler de la variedad M (suma de alternación de los números de Betti: $\chi(M) = \sum_{(k)} (-1)^k b_k$). De manera que la suma de alternación de los números de Morse para la función arbitraria tolerada f sobre M resulta un invariante homotópico de la variedad M (en particular, ella es la misma para la función arbitraria suave f).

Luego desarrollemos en serie $(1+t)^{-1}$ respecto a t :

$$(1+t)^{-1} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\alpha} t^{\alpha};$$

entonces

$$\left(\sum_{(k)} (\mu_k - b_k) t^k \right) \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\alpha} t^{\alpha} > 0,$$

es decir, la serie del primer miembro tiene por sus coeficientes (después de la reducción de términos semejantes) los números no negativos. De aquí, fijando cierto λ , obtenemos el sistema de las siguientes desigualdades:

$$(\mu_0 - b_0) (-1)^{\lambda} + (\mu_1 - b_1) (-1)^{\lambda-1} + \\ + (\mu_2 - b_2) (-1)^{\lambda-2} + \dots + (\mu_{\lambda} - b_{\lambda}) \geq 0,$$

es decir,

$$\mu_{\lambda} - \mu_{\lambda-1} + \mu_{\lambda-2} - \dots \pm \mu_0 \geq b_{\lambda} - b_{\lambda-1} + b_{\lambda-2} - \dots \pm b_0.$$

Sea ahora $f(x)$ la función de Morse sobre una variedad compacta M . En este caso los números $\{\mu_k\}$ adquieren un sentido particularmente geométrico. Sea x_0 un punto crítico no degenerado (y, por consiguiente, bifurcacional) para la función $f(x)$ (sea (índice x_0) = λ). Hallamos las dimensiones de los grupos $H_*(M_c, M_c \setminus \{x_0\}) = H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon})$, donde $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño, $c = f(x_0)$ es un valor crítico; además, sea x_0 un punto crítico único en un nivel crítico $f^{-1}(c)$.

Puesto que se cumple la identidad $H_*(X, Y) \cong H_*(X/Y, *)$ para un par de complejos celulares (X, Y) (donde Y es un subcomplejo del complejo X), entonces $H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon}) \cong H_*(M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon}, *)$. En virtud de la equivalencia homotópica anteriormente estudiada

$M_{c+\varepsilon} \sim M_{c-\varepsilon} \cup \sigma^\lambda$ (donde σ^λ es un célula de dimensión λ), tenemos, que $H_*(M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon}, *) \cong H_*(\bar{\sigma}^\lambda/\partial\sigma^\lambda, *) \cong H_*(S^\lambda, *)$, donde $\sigma^\lambda/\partial\sigma^\lambda = S^\lambda$ es una esfera de dimensión λ . Así,

$$H_k(M_c, M_c) \setminus (x_0) \cong H_k(S^\lambda, *) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k = \lambda, \\ 0, & \text{si } k \neq \lambda. \end{cases}$$

Consideremos algunos ejemplos instructivos, cuando x_0 es un punto crítico degenerado para $f(x)$. Sea, por ejemplo, $f(x, y) = \text{Re}(z^n)$, donde $z = x + iy$. En la fig. 59 se muestra la conducta de los niveles de f . De manera que $M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon} \cong S^1 \vee S^1$.

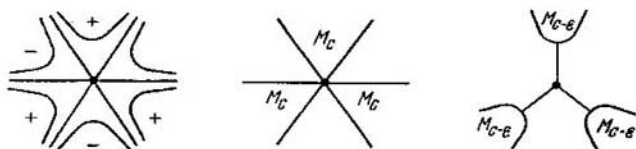


Fig. 59.

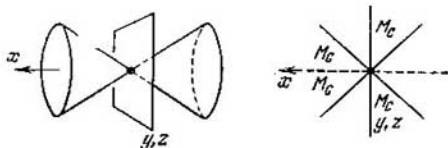


Fig. 60.

Como hemos demostrado anteriormente, mediante perturbaciones pequeñas de la función f , es posible transformar los puntos críticos degenerados en una reunión de puntos críticos no degenerados. En el ejemplo examinado, el punto 0 para $\text{Re}(z^n)$ se desintegra en la reunión $(n - 1)$ de las singularidades no degeneradas (véanse los detalles más arriba). Esta observación es el reflejo de una afirmación general: el polinomio $Q(M, f)$ no se cambia con una perturbación bastante pequeña de la función f . En efecto, $Q(M, f)$ está expresado por los términos de los grupos de homologías relativas $H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon})$ que, evidentemente, no cambian ante perturbaciones suficientemente de la función f . De manera que el polinomio $Q(M, f)$ nos comunica, que cantidad de puntos críticos no degenerados de cada índice λ surge con la desintegración de las singularidades degeneradas de la función f (para una perturbación suficientemente pequeña de la misma).

Para finalizar, consideremos un ejemplo más de la singularidad degenerada de f . Sea $f(x, y, z) = x^3 - 3x(y^2 + z^2)$.

Dejamos al lector la comprobación, utilizando la fig. 60, que para el caso $M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon} \sim S^1 \vee S^2$, y calcular las homologías $H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon})$.

§ 17. Función regular de Morse-Smale. Asas. Superficies

Es posible demostrar que en cualquier variedad cerrada conexa suave compacta, siempre existe una función de Morse que tiene un solo mínimo y un solo máximo.

Por ejemplo, para las variedades orientables bidimensionales M_g^2 es posible hallar tal función entre las funciones de la altura para las immersiones «buenas» de la superficie en \mathbb{R}^3 (véase la fig. 61).

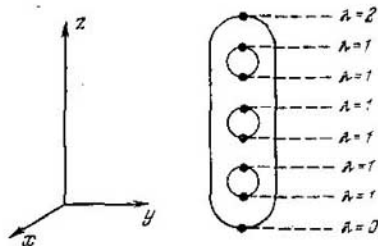


Fig. 61.

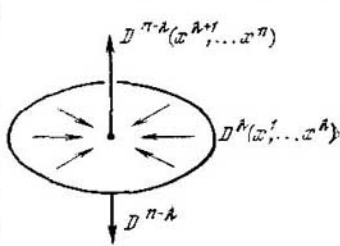


Fig. 62.

Se puede mostrar, que en una variedad siempre hay funciones de Morse con los valores críticos ordenados respecto a los índices, o sea, $f(x_\lambda) = f(x_\mu)$, donde $\lambda = \mu$ y $f(x_\lambda) > f(x_\mu)$, donde $\lambda > \mu$, λ, μ son índices de los puntos x_λ y x_μ respectivamente. A estas funciones se las denominan a veces «regulares» (o funciones de Smale). A diferencia de las funciones generales de Morse, estas funciones de Morse ya no serán densas por doquier en el espacio de todas las funciones suaves sobre M .

TEOREMA 1. *En cualquier variedad cerrada suave compacta siempre hay una función regular, que tiene exactamente un punto de máximo (punto del índice $\lambda = n = \dim M$) y exactamente un punto de mínimo (punto del índice 0).*

Si ahora, de acuerdo con el teorema del § 15, se reconstruye por la función regular de Morse la partición celular de M^n , entonces en cada paso se pegarán células de dimensión mayor que la dimensión de las células precedentes.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Introducimos una noción útil complementaria: campo semejante a gradiental para la función suave

$f(x)$ sobre M^n . Designamos por $\xi(f)$ la derivada de la función f a lo largo del campo ξ .

DEFINICION 1. Un campo vectorial suave ξ sobre M se llama *semejante a gradiental*, si: 1) $\xi(f) \neq 0$ sobre un conjunto $M \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$, donde $\{x_i\}$ son puntos críticos para la función de Morse f ; 2) para cualquier punto x_i hay un entorno abierto $U(x_i)$ tal, que en cualquier sistema de coordenadas, en el cual

$$f(x)|_{U(x_i)} = f(x_i) - \sum_{h=1}^{\lambda} (x^h)^2 + \sum_{h=\lambda+1}^n (x^h)^2,$$

el campo ξ es de forma

$$\xi(x) = (-x^1, \dots, -x^\lambda; x^{\lambda+1}, \dots, x^n).$$

Es evidente, que para cualquier función de Morse f sobre M hay tales campos ξ (por ejemplo, $\xi = \text{grad } f$ respecto a alguna métrica de Riemann sobre M).

Sean $x_i \in M$ un punto crítico para f , (índice x_i) = λ y ξ un campo semejante a gradiental para f . Consideremos así llamado diagrama de separatriz del punto x_i , o sea, el total de todas las trayectorias integrales del campo ξ , entrantes o salientes del punto x_i . Entonces, en el entorno $U(x_i)$ este diagrama tiene la forma representada en a fig. 62.

Las trayectorias entrantes llenan el disco $D^\lambda(x^1, \dots, x^\lambda)$; las salientes, el disco $D^{n-\lambda}(x^{\lambda+1}, \dots, x^n)$.

Consideremos dos esferas: $S^{\lambda-1} = D^\lambda \cap \{f(x) = f(x_i) - \varepsilon\}$; $S^{n-\lambda-1} = D^{n-\lambda} \cap \{f(x) = f(x_i) + \varepsilon\}$ para un ε suficientemente pequeño. Se puede considerar, que $S^{\lambda-1} = \partial D$, $S^{n-\lambda-1} = \partial D^{n-\lambda-1}$ en el entorno $U(x_i)$; véase la fig. 63.

Consideremos una «dilatación» de los discos $D^\lambda(x_i)$ y $D^{n-\lambda}(x_i)$ a lo largo de las trayectorias integrales del campo ξ ; entonces las esferas $S^{\lambda-1}(x_i)$ y $S^{n-\lambda-1}(x_i)$ también se deformarán suavemente de algún modo, moviéndose a lo largo de las trayectorias sin auto-secarse hasta que encuentren algún otro punto crítico x_j . (Claro que las trayectorias del campo ξ pueden intersectarse sólo en los puntos críticos de la función f .)

LEMA 1. Sea que en la fibra $M_b \setminus M_a = f^{-1}[a', b']$ hay sólo dos puntos críticos x_0 e y_0 de la función f , con esto $a' < a = f(x_0) < f(y_0) = b < b'$; sea ξ un campo semejante a gradiental para f . Supongamos que en la fibra $f^{-1}[a', b']$ se cumple la relación $D^{n-\lambda}(x_0) \cap D^{\lambda'}(y_0) = \emptyset$ (aquí $\lambda = \text{ind}(x_0)$; $\lambda' = \text{ind}(y_0)$). Entonces en la variedad M^n hay una nueva función de Morse g tal, que $f = g$ fuera de $f^{-1}[a', b']$, además g tiene sobre M los mismos puntos críticos que

la función f ; el campo ξ es semejante a gradiental también para la función g ; $g(x_0) > g(y_0)$; $g = f + \text{const}$ en los entornos $U(x_0)$, $U(y_0)$.

DEMOSTRACION. De las condiciones del lema se deduce que en la fibra $f^{-1}[a', b']$ no se intersecan los diagramas de separatriz de los

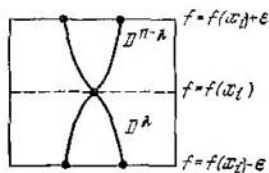


Fig. 63.

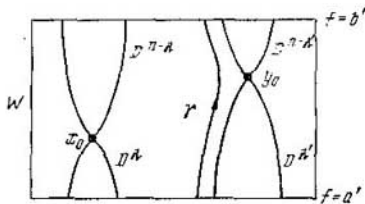


Fig. 64.

puntos x_0 e y_0 (véase la fig 64), o sea, $(D^{n-\lambda}(x_0) \cup D^{\lambda}(x_0)) \cap (D^{n-\lambda}(y_0) \cup D^{\lambda}(y_0)) = \emptyset$. Designemos: $W = f^{-1}[a', b']$;

$$A = D^{n-\lambda}(x_0) \cup D^{\lambda}(x_0); \quad B = D^{n-\lambda'}(y_0) \cup D^{\lambda'}(y_0).$$

Entonces, es evidente

$$\begin{aligned} W \setminus (A \cup B) &\cong (f^{-1}(b') \setminus ((A \cup B) \cap f^{-1}(b'))) I [a', b'] \cong \\ &\cong f^{-1}(a') \setminus ((A \cup B) \cap f^{-1}(a')) I [a', b'] \end{aligned}$$

La misma relación puede ser escrita así: el complemento $W \setminus (A \cup B)$ es difeomorfo al producto directo

$$\begin{aligned} (f^{-1}(b) \setminus (S^{n-\lambda'}(y_0) \cup S^{n-\lambda-1}(x_0))) I [a', b'] &\cong \\ &\cong (f^{-1}(a') \setminus (S^{\lambda'-1}(y_0) \cup S^{\lambda-1}(x_0))) I [a', b'], \end{aligned}$$

donde $I [a', b']$ es un segmento. (Para simplificar, consideramos que $a' = 0$; $b' = 1$.) En particular, el difeomorfismo entre la variedad $f^{-1}(b') \setminus (S^{n-\lambda'}(y_0) \cup S^{n-\lambda-1}(x_0))$ y la variedad $f^{-1}(a') \setminus (S^{\lambda'-1}(y_0) \cup S^{\lambda-1}(x_0))$ se realiza a lo largo de las trayectorias integrales y del campo ξ . Consideremos sobre $f^{-1}(a')$ una función suave $\alpha(x)$ tal, que $\alpha(x) = 0$ en un entorno suficientemente pequeño $A \cap f^{-1}(a')$ y $\alpha(x) = 1$ en un entorno bastante pequeño $B \cap f^{-1}(a')$. Es posible hacerlo, ya que $A \cap B = \emptyset$. Por la función α dada sobre $f^{-1}(a')$, vamos a construir una función suave $\alpha(x)$ en todo W , prolongando α con valores constantes a lo largo de las trayectorias integrales del campo ξ (estas trayectorias no se intersecan fuera de $A \cup B$). La función obtenida $\alpha(x)$ sobre W es constante a lo largo de cualquier

trayectoria γ , que no se incluye en un entorno abierto de $A \cup B$, $\alpha = 0$ en $U(A)$ y $\alpha = 1$ en $U(B)$.

Consideremos la función suave $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}$, dada por el gráfico de la fig. 65.

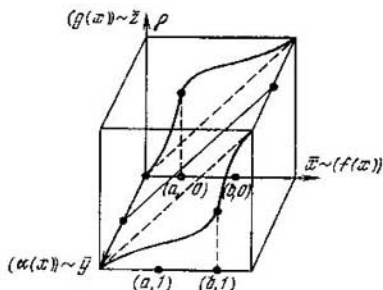


Fig. 65.

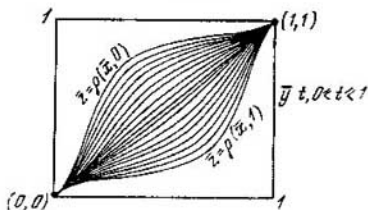


Fig. 66.

En la fig. 66 se muestra la evolución de las líneas de intersección del gráfico $\bar{z} = \rho(\bar{x}, \bar{y})$ con el plano $\bar{y} = t$ (const) con el cambio de t desde 0 hasta 1.

Escribamos de la siguiente manera las condiciones formales puestas en la función ρ :

- 1) $\frac{\partial}{\partial x}(\rho(\bar{x}, \bar{y})) > 0$ para todo (\bar{x}, \bar{y}) y $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ crece de 0 a 1, cuando \bar{x} crece de 0 a 1;
- 2) $\rho(a, 0) = b$; $\rho(b, 1) = a$;
- 3) $\frac{\partial}{\partial x}(\rho(\bar{x}, 0)) \equiv 1$ para todos \bar{x} en un entorno de a ;
 $\frac{\partial}{\partial x}(\rho(\bar{x}, 1)) \equiv 1$ para todo \bar{x} en un entorno de b (véase la fig. 67).

Definamos, ahora, la función buscada $g(x) = \rho(f(x), \alpha(x))$, $x \in W$. Entonces $g(x_0) = \rho(f(x_0), \alpha(x_0)) = \rho(a, 0) > \rho(b, 1) = \rho(f(y_0), \alpha(y_0)) = g(y_0)$. Así, $g(x_0) > g(y_0)$. De las condiciones 1) — 3) en la función ρ , se deduce que la función $g(x)$ satisface todas las exigencias formuladas en la condición del lema. El lema queda demostrado.

LEMA 2. Consideremos $W = f^{-1}[a', b']$. Sean $x_0, y_0 \in W$; $f(x_0) < f(y_0)$ y $\lambda(x_0) = (\text{índice de } f \text{ en el punto } x_0) \geq \lambda(y_0) = (\text{índice de } f \text{ en el punto } y_0)$. Entonces, sobre M hay una función g de Morse tal, que $g(x_0) > g(y_0)$; g tiene los mismos puntos críticos que f ; la función $g(x)$ satisface todas las restantes condiciones del lema precedente.

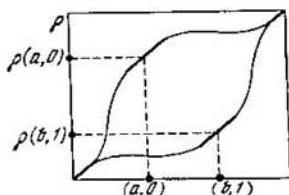


Fig. 67

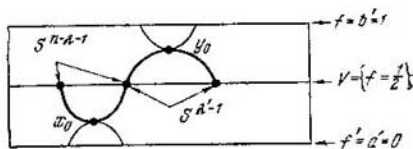


Fig. 68.

DEMOSTRACION. En el caso cuando $A \cap B = \emptyset$, el lema ya está demostrado (véase el lema precedente). En caso general, $A \cap B \neq \emptyset$. Reduzcamos este caso a la situación: $A \cap B = \emptyset$. Examinemos la superficie $\{f(x) = 1/2\} = V$ (consideramos $a' = 0$; $b' = 1$; $0 < f(x_0) < \frac{1}{2} < f(y_0) < 1$). Hacemos $\lambda = \lambda(x_0)$, $\lambda' = \lambda(y_0)$. Sea $A \cap B \neq \emptyset$. Esto significa, que $S^{n-\lambda-1}(x_0) \cap S^{\lambda'-1}(y_0) \neq \emptyset$ en la superficie V , véase la fig. 68. (En realidad, si esta intersección es vacía, entonces $A \cap B = \emptyset$.) Puesto que $1/2 \in [a', b']$ no es valor crítico, entonces V^{n-1} es una variedad suave $(n-1)$ -dimensional, y las esferas $S^{n-\lambda-1}(x_0)$ y $S^{\lambda'-1}(y_0)$ son subvariedades suaves en V .

Por cuanto $\dim S^{n-\lambda-1}(x_0) + \dim S^{\lambda'-1}(y_0) = n - \lambda - 1 + \lambda' - 1 = n - (\lambda - \lambda') - 2 < n - 1$, entonces se deduce del teorema gene-

ral sobre la t -regularidad (véase [1], p. II, § 10), que existe una isotopía de encaje (de inmersión) $i: S^{\lambda'-1} \rightarrow V$, tan pequeña como se quiera en la inmersión próxima, la cual ya tendrá una intersección vacía con la esfera $S^{n-\lambda-1}(x_0)$. Está claro, que es posible prolongar esta isotopía en un entorno pequeño de la superficie V , haciéndola (a la isotopía) idéntica fuera de este entorno. Sometiendo el

campo semejante a gradiental ξ a la isotopía buscada, obtendremos ya dos diagramas A y B de separatriz no intersecados (véase la fig. 69).

Hemos reducido la situación al caso $A \cap B = \emptyset$. El lema queda demostrado.

De este modo queda demostrada por completo la afirmación del teorema sobre la existencia de una función regular de Morse.

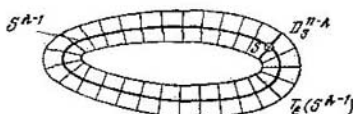


Fig. 70.

Fig. 69.

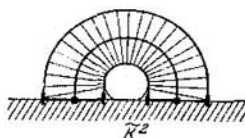
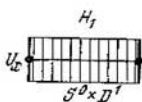
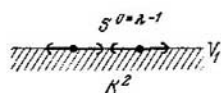


Fig. 71.

La segunda parte de la afirmación del teorema (sobre la existencia de una función regular de Morse con un máximo y un mínimo) la dejamos al lector como un ejercicio útil (y bastante simple, particularmente, para las variedades bidimensionales).

Ahora consideremos con mayores detalles el procesamiento de pegar una célula σ^λ a la frontera de la variedad $M_{-\epsilon}$ (véase más arriba). Aclaremos qué sucede con la variedad $M_{-\epsilon}$ después del levantamiento más allá del punto crítico x_λ desde el punto de vista diferencial, es decir, cómo cambia la variedad $M_{-\epsilon}$ desde el punto de vista de la llamada operación de la pegadura de asas.

Consideramos el producto directo $H_\lambda^n = D^\lambda \times D^{n-\lambda}$, donde D^q es un disco de dimensión q . La variedad (con borde) H_λ^n se llama el asa de índice λ . Claro que la frontera ∂H_λ^n es de forma $\partial H_\lambda^n = (\partial D^\lambda) \times D^{n-\lambda} \cup D^\lambda \times (\partial D^{n-\lambda}) = (S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}) \cup (D^\lambda \times S^{n-\lambda-1})$. Definamos la operación de la pegadura del asa H_λ^n a una variedad K^n con un borde $V^{n-1} = \partial K^n$. Sea $S^{\lambda-1} \subset V^{n-1}$ una esfera suavemente sumergida tal, que en un entorno tubular bastante pequeño $T_\epsilon(S^{\lambda-1})$ (de radio $\epsilon > 0$) se representa en forma del producto directo $T_\epsilon(S^{\lambda-1}) \stackrel{\text{dif}}{\cong} S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$, donde $\{s \times D^{n-\lambda}\}$, $s \in S^{\lambda-1}$ son

discos ortogonales (normales), de radio ε , a la esfera $S^{\lambda-1}$ (véase la fig. 70).

Entonces se puede construir una nueva variedad suave \tilde{K}^n con el borde $\tilde{V}^{n-1} = \partial\tilde{K}^n$, considerando la pegadura de K^n con H_λ^n por la aplicación $\chi: S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \rightarrow T_\varepsilon(S^{\lambda-1}) \cong_{\text{dif}} S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$, la cual es un difeomorfismo de $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ (que es una parte de la frontera ∂H_λ^n) en el entorno tubular $T_\varepsilon(S^{\lambda-1})$. La operación de la pegadura del asa H_1^n con $n=2$ se muestra en la fig. 71.

Suavizando los "ángulos" surgidos en los puntos $x \in \partial T_\varepsilon(S^{\lambda-1}) = S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$, obtenemos una variedad suave \tilde{K}^n con un borde suave \tilde{V}^{n-1} . (Esta suavización es mostrada con punteado en la fig. 72.)

En la fig. 72 se indica la operación de pegadura del asa H_1^2 a K^3 .

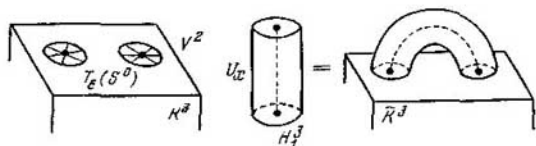


Fig. 72.

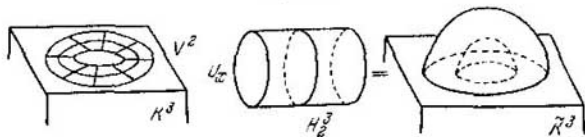


Fig. 73.

En la fig. 73 se muestra la operación de pegadura del asa H_2^3 a K^3 .

TEOREMA 2. *Cualquier variedad suave compacta conexa cerrada M^n es difeomorfa a una reunión de asas $\{H_\lambda^n\}$, donde P_λ son puntos críticos de alguna función de Morse sobre M^n ; λ es índice de P_λ y a cada punto P_λ le corresponde un asa H_λ^n .*

DEMOSTRACION. Puesto que M_a es difeomorfa a M_b con $a < b$, si en el segmento $[a, b]$ no hay valores críticos de la función $f(x)$, resulta suficiente con examinar el cambio de $M_{-\varepsilon}$ al pasar por el punto crítico P_λ . Consideremos una deformación suave $M_\varepsilon \rightarrow M_{-\varepsilon}$ (véase el lema 15.3), pero ahora la cambiemos del modo mostrado en la fig. 74.

El resultado de la deformación se indica en la fig. 75.

Está claro, que el «eje» del asa H_λ^n es un disco $D^\lambda(x^1, \dots, x^\lambda)$ compuesto de las trayectorias integrales del campo $v(x) = -\text{grad } f(x)$ salientes de un punto singular del campo $v(x)$. El teorema queda demostrado.

Si, por el contrario, se da la descomposición de la variedad M en la suma de asas $\{H_\lambda^n\}$, entonces es posible reconstruir una función

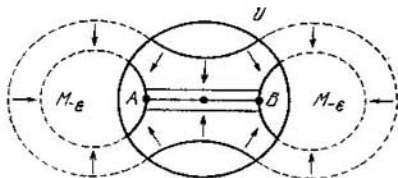


Fig. 74.

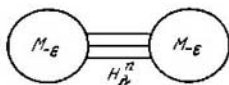


Fig. 75.

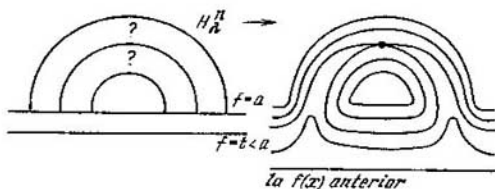


Fig. 76.

de Morse $f(x)$ sobre M^n tal, que la descomposición de M en suma de asas, asociada con ella, coincide con la partición inicial de M en una reunión de asas $\{H_\lambda^n\}$. La demostración se hace por inducción según el número de asas y sus índices. Las asas $\{H_\lambda^n\}$ se pueden identificar con los discos D^n , cuyos centros se pueden declarar puntos críticos de índice 0, construimos la función $f(x)$, presentando sus superficies suaves de nivel f_c (la función $f(x)$ será definida no unívocamente). Entonces, en calidad de superficies $\{f_c\}$ en los discos $\{D^n\} = \{H_0^n\}$ tomamos las esferas concéntricas con centro en los mínimos locales de la función $f(x)$. Sea $f(x)$ ya construida en una variedad suave $\{f \leq a\}$ con un borde $V^{n-1} = \{f = a\}$ y sea que el asa H_λ^n está pegada al borde V^{n-1} . Se requiere prolongar $f(x)$ en el asa H_λ^n . La prolongación se muestra en la fig. 76.

La función obtenida $g(x)$ de nuevo resultó constante en el borde de la variedad $\{f \leq a\} \cup H_\lambda^n$, por eso es posible prolongar el procesamiento.

Consideremos las variedades bidimensionales $\{M^2\}$ y sus descomposiciones en sumas de asas $\{H_i^1\}$, en concordancia con los teoremas arriba demostrados. Al mismo tiempo demostraremos una vez más el teorema de clasificación de las superficies bidimensionales (véase el § 3).

Examinemos sobre M^2 una función regular de Morse $f(x)$; sean: x_0 , un punto de mínimo (el único punto de índice 0); x_1, \dots, x_N , los puntos de índice 1; x_{N+1} , el punto de máximo (el único punto de índice 2), además, $f(x_i) < f(x_{i+1})$, $0 \leq i \leq N$. Supongamos, que $0 \leq f(x) \leq N+1$ y $f(x_i) = i$. Entonces, un conjunto $0 \leq f \leq \varepsilon < 1$ es un asa H_0^2 (homotópicamente equivalente a un punto σ^0 , que es célula de dimensión nula). Al pasar por el valor crítico $f(x_1) = 1$, surge la pegadura del asa H_1^2 (véase la fig. 77).

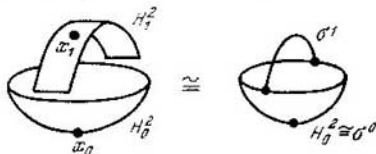


Fig. 77.

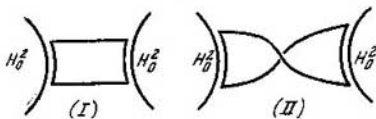


Fig. 78.

Cuando $n = 2$, hay sólo dos métodos de pegar el asa H_1^2 a H_0^2 (véase la fig. 78).

Ambos métodos son homotópicamente equivalentes pero distintos, si se consideran los difeomorfismos de las variedades con borde obtenidas: $H_0^2 \cup_{\text{dif}} H_1^2 \cong S^1 \times D^1$ (cilindro); $H_0^2 \cup_{\text{dif}} H_1^2$ (cinta de Moebius). En el primer caso, se obtiene una superficie orientable (con borde), en el segundo, no orientable.

Prosiguiendo el procesamiento y pasando a los puntos x_2, x_3, \dots, x_N , pegamos en cada paso una célula unidimensional σ_i^1 , $1 \leq i \leq N$; y en los términos de asas: o bien pegamos $S^1 \times D^1$, o bien pegamos la cinta de Moebius. Al pasar por un punto x_N ($f(x_N) = N$), desde el punto de vista homotópica, obtenemos un ramo de circunferencias: $\bigvee_{i=1}^N S_i^1$; cada circunferencia $S_i^1 = \sigma_i^1 \cup \sigma_0$ corresponde a un punto crítico x_i (de índice 1). El último paso consiste en pegar el

asa $H_2^2 \cong D^2$, o sea, de una célula bidimensional σ^2 , homeomorfa al disco D^2 . De manera que M^2 es homotópicamente equivalente a un complejo celular $\sigma^0 \cup \sigma_1^1 \cup \dots \cup \sigma_N^1 \cup \sigma^2$, y difeomorfa a: $H_0^2 \cup \underbrace{H_1^2 \cup \dots \cup H_1^2}_N \cup H_2^2$. La pegadura de la célula (asa) $D^2 = H_2^2$

a la obtenida en el $(N + 1)$ -ésimo paso de la variedad K^2 con borde $S^1 = \partial K^2$, puede ser realizada ya de una sola manera: por una aplicación idéntica $1_{S^1}: \partial D^2 \rightarrow \partial K^2$.

La célula $\sigma^2 \cong D^2$ puede ser identificada con un polígono fundamental W , obtenido por nosotros anteriormente en la demostración del teorema de clasificación de $\{M^2\}$, y el ramo $\bigvee_{i=1}^N S_1^1$ se lo puede identificar con una frontera del polígono W , en la cual todos los vértices ya están identificados en un vértice.

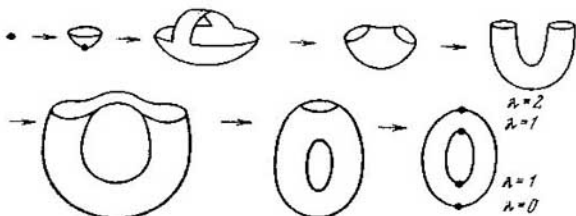


Fig. 79.

En la fig. 79 se muestra el procesamiento sucesivo para reconstruir el toro $T^2 = M_{g=1}^2$ para una inmersión (encaje) estándar en \mathbb{R}^3 tal, que $f(P) = z$ (función de altura) es una función de Morse con 4 puntos críticos: x_0 (mín); x_1, x_2 ensilladuras de índice 1); x_3 (máx). Para $g > 1$ la función de altura análoga en M_g^2 tiene $2g + 2$ puntos críticos no degenerados: x_0 (mín); x_1, \dots, x_{2g} (ensilladuras); x_{2g+1} (máx).

En cualquier M_g^2 es posible construir una función de altura suave $f(x)$ en \mathbb{R}^3 con 4 puntos críticos (mín. máx y dos ensilladuras). Estas ensilladuras serán degeneradas cuando $g > 1$. La inmersión buscada $M_g^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se muestra en la fig. 80.

Las ensilladuras x_1, x_2 son degeneradas para $g > 1$, y la función de altura en un entorno de los puntos x_1, x_2 es de la misma estructura, que la función $\text{Re}(x + iy)^{1+g}$ (véase la fig. 80). Luego, en cualquier M^2 ($M_{g>0}^2$ o M_{μ}^2) hay una función suave $f(x)$ con tres puntos críticos: mín, máx ensilladura (degenerada). (Demostrar, que esta función para $M_{g>0}^2$ no puede ser realizada como función de altura con alguna inmersión $M_g^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.) En efecto, consideremos una forma canónica

simétrica M_g^2 (o M_μ^2): $W = a_1 \dots a_N a_1^{-1} \dots a_{N-1} a_N^{\pm 1}$ (véase el § 3 sobre la existencia de tal forma). La función buscada $f(x)$ está dada en la fig. 81 por sus líneas de nivel (no unívocamente): a la izquierda

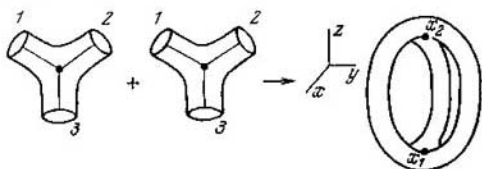


Fig. 80.

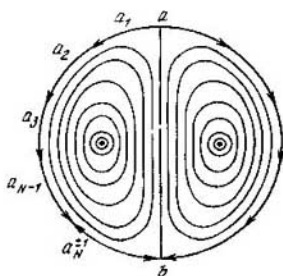


Fig. 81.

de ab está el máx, a la derecha, el mín; la ensilladura degenerada — en el vértice del polígono fundamental. La función $f(x)$ en un entorno pequeño de esta ensilladura degenerada es de forma $\text{Re}(x + iy)^k$ (hallar k como función de g o de μ). La desintegración de este punto singular en la reunión de las singularidades no degeneradas se muestra en la fig. 82. La desintegración la demostraremos en términos de un correspondiente campo vectorial de grad f ; los puntos críticos de f coinciden con las singularidades del campo de grad f .

Supongamos $f(x, y) = \text{Re}(z^k)$ (donde $z = x + iy$). Entonces el punto $0 \in \mathbb{R}^2(x, y)$ es un punto crítico degenerado de f (y la singularidad degenerada para el campo $v(x, y) = \text{grad} \times \text{Re}(z^k)$). En la fig. 82 se indica el cuadro de las trayectorias integrales del campo v .

Consideremos una perturbación pequeña $f(x, y) \rightarrow \text{Re} \prod_{\alpha=1}^k (z - \varepsilon_\alpha)$, donde $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ para $i \neq j$. En la fig. 82 se observa la desintegración de la singularidad degenerada en la unión $k - 1$ de puntos singulares no degenerados.

OBSERVACIÓN. Al construir sobre la variedad M^2 una función suave f con tres puntos críticos, hemos utilizado la siguiente representación de M^2 : $W = a_1 a_2 \dots a_N a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{N-1}^{-1} a_N^{\pm 1}$ y hemos partido el

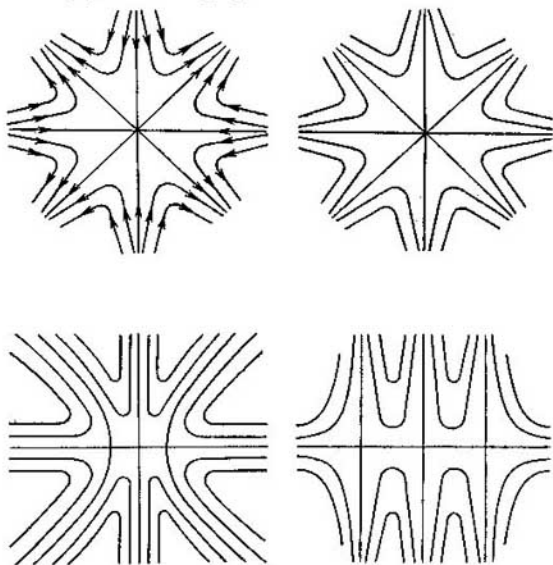


Fig. 82.

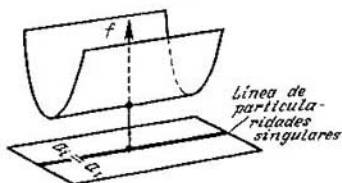


Fig. 83.

polígono W con un segmento (ab) de tal manera, que, por un lado, de (ab) no haya un par de lados enumerados con la misma letra a_i . Esto fue necesario para evitar (al construir la función) el surgimiento de una variedad continua de puntos críticos degenerados (véase la fig. 83).

§ 18. Dualidad de Poincaré

En topología, geometría algebraica y en el álgebra homológica, bajo un término general de «dualidad de Poincaré» se entiende un conjunto de afirmaciones sobre el isomorfismo de las homología y cohomología de dimensiones complementarias en diferentes situaciones. El teorema más simple (de Poincaré) afirma, que para una variedad cerrada compacta suave conexa M^n tiene lugar un isomorfismo: $H_k(M; \mathbb{R}) \cong H_{n-k}(M; \mathbb{R})$, donde $H_*(M; \mathbb{R})$ son grupos de homología con coeficientes reales, $n = \dim M^n$. Evidentemente, este isomorfismo es equivalente a la condición $b_k(M) = b_{n-k}(M)$ en los números de Betti de la variedad M . Si la variedad M es no orientable, entonces la dualidad de Poincaré tiene lugar para las homología por módulo 2: $H_k(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_{n-k}(M; \mathbb{Z}_2)$. Consideremos las variedades orientables. El caso no orientable se examina de modo análogo.

La dualidad se basa en lo siguiente.

Construiremos dos particiones celulares: K y \tilde{K} de la variedad M^n , duales entre sí. Más exactamente, confrontemos a cada célula $\sigma^i \in K$ (con ayuda de cierta correspondencia $D: K \rightarrow \tilde{K}$) alguna célula $(n-i)$ -dimensional $D(\sigma^i) = \tilde{\sigma}^{n-i}$ (es decir, una célula de dimensión complementaria), con esto la correspondencia D satisfará las siguientes condiciones:

1. D es una correspondencia biunívoca entre las células del complejo K y células del complejo \tilde{K} .

2. Para cualesquiera dos células $\sigma^i, \sigma^{i-1} \in K$ su coeficiente de incidencia $[\sigma^i: \sigma^{i-1}]$ con exactitud hasta el signo, que depende sólo de la dimensión i , es igual al coeficiente de incidencia de las células $\tilde{\sigma}^{n-i}, \tilde{\sigma}^{n-i+1}$, correspondientes a las células iniciales con la correspondencia D ; o sea, $[\sigma^i: \sigma^{i-1}] = \pm [\tilde{\sigma}^{n-i+1}: \tilde{\sigma}^{n-i}]$. Recordemos que consideramos un caso orientable. Pero en el caso de la variedad no orientable, es necesario tomar el coeficiente de incidencia por módulo 2, o sea, en el caso no orientable se cumplirá la igualdad $[\sigma^i: \sigma^{i-1}] = [\tilde{\sigma}^{n-i+1}: \tilde{\sigma}^{n-i}] \pmod{2}$.

Consideremos en M^n una función regular de Morse $f(x)$, cuyos puntos críticos están ordenados respecto a sus índices, o sea, $f(x_i) \geq f(x_j)$, si $\lambda_i > \lambda_j$. La existencia de tal función «regular» de Morse fue demostrada más arriba.

Damos orientación en M^n y consideramos junto con la función f otra función $-f = g$. Claro está, que si x_i es un punto crítico para f de índice λ_i , entonces x_i es un punto crítico también para $g = -f$ de índice $n - \lambda_i$.

Tomemos en calidad de partición celular K de la variedad M , una partición engendrada por la función f (véase más arriba), y en

calidad de \tilde{K} una partición engendrada por la función $-f$. Consideremos más atentamente la conexión entre los complejos K y \tilde{K} . Tenemos un entorno pequeño $U(x_i)$ del punto x_i , y su descomposición mediante las funciones f y $-f$ (véase la fig. 84).

Ahora construimos la correspondencia buscada (aplicación de las células) D , donde $D: K \rightarrow \tilde{K}$. Tomamos $D(\sigma^\lambda) = \tilde{\sigma}^{n-\lambda}$ (véase la

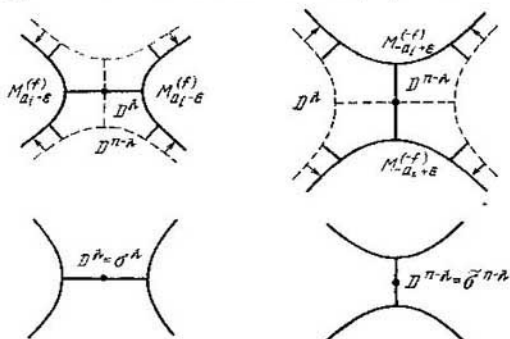


Fig. 84.

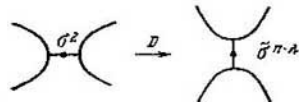


Fig. 85.

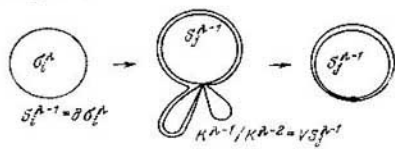


Fig. 86.

fig. 85). Las células σ^λ para la función f y $\tilde{\sigma}^{n-\lambda}$ para la función $g = -f$, fueron definidas en el § 15.

Estudiemos ahora la conexión entre los coeficientes de incidencia: $[\sigma^\lambda : \sigma^{\lambda-1}]$ y $[\tilde{\sigma}^{n-\lambda+1} : \tilde{\sigma}^{n-\lambda}]$.

Consideremos una célula σ_i^λ (i es el número de la célula) y una célula $\sigma_j^{\lambda-1}$; el número $[\sigma_i^\lambda : \sigma_j^{\lambda-1}]$ es, por definición, el grado de una aplicación $p_{ij}^\lambda: S_i^{\lambda-1} \rightarrow S_j^{\lambda-1}$, donde $S_i^{\lambda-1} = \partial(\sigma_i^\lambda)$ (o sea, frontera de la célula σ_i^λ); p_{ij}^λ coincide con la composición de la aplicación característica $\partial\sigma_i^\lambda \rightarrow K^{\lambda-1}$, acotada de σ_i^λ en su frontera $\partial\sigma_i^\lambda$, y la proyección del complejo cociente $K^{\lambda-1}/K^{\lambda-2} = \sqrt{S_j^{\lambda-1}}$ en el j -ésimo sumando de este ramo $S_j^{\lambda-1}$ (véase la fig. 86).

El número obtenido (véase [1], p. II, § 15) coincide con el índice de intersección de la esfera $S_i^{\lambda-1} = \partial\sigma_i^\lambda$ con la célula $\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ (véase la fig. 87).

Claro que el índice de intersección de la esfera $S_i^{\lambda-1}$ con la célula $\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ es igual al coeficiente de enganche de la esfera $S_i^{\lambda-1}$ con la esfera $\tilde{S}_j^{n-\lambda} = \partial\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ (aquí omitimos la designación de la

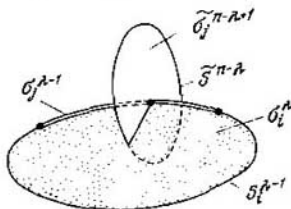


Fig. 87.

aplicación característica). Connotamos a este coeficiente de enganche con $w(S_i^{\lambda-1}; \tilde{S}_j^{n-\lambda})$. De este modo, queda demostrado que $[\sigma_i^\lambda; \sigma_j^{\lambda-1}] = w(S_i^{\lambda-1}; \tilde{S}_j^{n-\lambda})$. Por analogía obtenemos, que $[\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}; \tilde{\sigma}_i^{n-\lambda}] = w(S_j^{n-\lambda}; S_i^{\lambda-1})$. Comparando las dos últimas fórmulas obtenemos definitivamente, que los complejos \tilde{K} y K son duales, o sea, $[\sigma^\lambda; \sigma^{\lambda-1}] = \pm [\tilde{\sigma}^{n-\lambda-1}; \sigma^{n-\lambda}]$.

De manera que el operador de dualidad $D: K \rightarrow \tilde{K}$ tiene tal propiedad, que las células σ_j^λ y $\tilde{\sigma}_j^{\lambda-1} = D\sigma_j^\lambda$ se intersecan sólo en un punto interior y, con esto, transversalmente (para las variedades orientables M^n con orientación escogida de las células, este índice de intersección es igual a $+1$). Los demás pares de células no se intersecan jamás. Las células dan una base de los grupos con coeficientes enteros (y otros) de cadenas $C_\lambda(K)$ y $C_\mu(\tilde{K})$. De este modo entre los grupos de cadenas se establece un producto no degenerado bilineal escalar $a \circ b$, llamado «índice de intersección»: si $a \in C_\lambda(K)$ y $b \in C_{n-\lambda}(\tilde{K})$, entonces

$$\sigma_i^\lambda \circ D\sigma_j^{\lambda-1} = \delta_{ij}, \quad a \circ b = \sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i^\lambda \circ \tilde{\sigma}_j^{n-\lambda})$$

(en un caso no orientable por módulo 2); aquí

$$a = \sum_i a_i \sigma_i^\lambda, \quad b = \sum_j b_j \tilde{\sigma}_j^{n-\lambda}.$$

Fue demostrada la propiedad de conjugación

$$(\partial a) \circ b = a \circ (\partial b),$$

donde $a \in C_k(K)$, $b \in C_{n-k-1}(\tilde{K})$, porque $[\sigma_i^\lambda : \sigma_j^{\lambda-1}] = [D\sigma_i^\lambda : D\sigma_j^{\lambda-1}]$.

De manera que el complejo $(C(\tilde{K}), \partial)$ está conjugado al complejo $(C(K), \partial)$. De aquí se deduce el siguiente teorema

Teorema 1. Tiene lugar un «isomorfismo de dualidad de Poincaré» canónico:

$$H_k(M^n) \cong H^{n-k}(M^n),$$

donde M^n es una variedad suave orientable cerrada. En particular, tenemos para los números de Betti

$$b_k = b_{n-k}$$

(los rangos H_k, H_{n-k} , coinciden). Entre las homología de dimensiones complementarias H_k y H_{n-k} , se ha construido una forma no degenerada bilineal (para las homología con coeficientes enteros, unimodular), denominada «índice de intersección de los ciclos». Si $n = 2k$, entonces $n - k = k$, y tenemos una forma no degenerada en $H_k(M)$: $a \circ b = (-1)^k b \circ a$.

La demostración del teorema se deduce inmediatamente de la conclusión precedente con una nota complementaria, que ambos complejos K y \tilde{K} son homotópicamente equivalentes a M^n y por eso tienen iguales homología y cohomología, según los resultados del § 5.

EJEMPLO 1. Para cualquier variedad conexa orientable M^n tenemos $H_0 = \mathbb{Z} = H_n(M^n)$.

Para una variedad no orientable tenemos $H_0(M^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (siempre), pero $H_n(M^n, \mathbb{Z}) = 0$. Por el módulo 2 tenemos $H_0(M^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 = H_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$.

EJEMPLO 2. Sean: $n = 2$, y M^2 , orientable. El grupo $H_1(M^2, \mathbb{Z})$ es de forma no degenerada antisimétrica, o sea, índice de intersección. Por eso la dimensión de b_1 es par y hay una base canónica de ciclos $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$, donde

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}.$$

El grupo $H_1(M^2; \mathbb{Z})$ no tiene torsión, y es posible escoger todos los ciclos a_i, b_i con coeficientes enteros.

EJEMPLO 3. Sea $M^2 = \mathbb{R}P^2$ (no orientable). El grupo $H_1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ con una generatriz x (la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$). De la no degeneración de la forma $a \circ b \pmod{2}$ en el grupo $H_1(M^2, \mathbb{Z}_2)$, obtenemos

$$x \circ x = 1 \pmod{2}.$$

EJEMPLO 1. Sea M^4 orientable. En la variedad $M^n \times M^n$ tenemos un ciclo $\Delta = (x, x)$ — diagonal, $\Delta \in H_n(M^n \times M^n)$. El índice de intersección $\Delta \circ \Delta$ es igual a una característica de Euler, ya que este número $\Delta \circ \Delta$ coincide con una singularidad sumaria de un campo vectorial (véase [1], p. II, § 15). En los grupos $H_k(M^n \times M^n, \mathbb{R}) = \sum_{q+l=k} H_q(M^n) \otimes H_l(M^n)$ hay una base de ciclos $z_i \otimes z_j$, donde $\{z_i\}$ es una base en el grupo $H_*(M^n)$. Aquí el índice de intersección es de la forma

$$(z_i \otimes z_j) \circ (z'_h \otimes z'_l) = (z_i \circ z'_h) (z_j \circ z'_l);$$

él es no trivial sólo si $\dim z_i + \dim z'_h = n$, $\dim z_j + \dim z'_l = n$ (inverificarlo!).

PROBLEMA 1. Sea dada una aplicación $f: M^n \rightarrow M^n$ y sean conocidas todas las aplicaciones $f_{h,*}: H_h(M^n, \mathbb{R}) \rightarrow H_h(M^n, \mathbb{R})$. Calcular índice de intersección $\Delta \circ \Delta_f$ en $M^n \times M^n$, donde $\Delta_f = (x, f(x))$ es un gráfico. Demostrar la fórmula de Lefschetz $\Delta \circ \Delta_f = \sum_{k=0}^n (-1)^k \text{Sp } f_{k,*}$. (Para las variedades no orientables es necesario reemplazar \mathbb{R} por \mathbb{Z}_2 .)

La expresión $\Delta \circ \Delta_f$ da un número algebraico de puntos inmóviles de la aplicación f (véase [1], p. II, § 15). Al principio, consideremos los casos más simples: $M^n = S^n$, $M^n = T^n$, $M^n = \mathbb{R}P^n$, $M^n = M_g^2$. En particular, si f es homotópica a la aplicación en un punto, entonces $f_{k,*} = 0$ para $k > 0$ y $f_{0,*}$ es idéntica. En este caso $\Delta \circ \Delta_f = 1 = \text{Sp } f_{0,*}$, lo que coincide con el resultado del § 15, p. II del libro [1].

PROBLEMA 2. Demostrar que la dualidad de Poincaré en las cohomologías $H^*(M^n)$ es dada por una multiplicación cohomológica. Esto significa, exactamente, que la forma

$$(ab, [M^n]) = (a, b)$$

es no degenerada: aquí $a \in H^q(M^n)$, $b \in H^{n-q}(M^n)$, son coeficientes o campo. Si se trata de homologías y cohomologías con coeficientes enteros $H^*(M^n; \mathbb{Z})$ y $H_*(M^n; \mathbb{Z})$, donde hay una torsión, entonces aquí es cómodo obtener la ley sobre la dualidad de Poincaré de un «operador de tallado» (véase § 7)

$$Da = a \cap [M^n], \quad (1)$$

donde $a \in H^h(M^n; \mathbb{Z})$ y $a \cap [M^n] \in H_{n-h}(M^n; \mathbb{Z})$. Para los campos de coeficientes, en virtud de la fórmula

$$((a \cap [M^n]), b) = (ab, [M^n]), \quad (2)$$

y en virtud de la conjugación recíproca H_q y H^q la fórmula (1) no da nada de nuevo y substancial.

PROBLEMA 3. Sea $M \supset K$, al mismo tiempo sean M y K complejos celulares finitos y $M \setminus K$ una variedad orientable suave abierta. Demostrar las igualdades:

$$H_i(M, K; \mathbb{Z}) \cong H_i(M/K; \mathbb{Z}) \cong H^{n-i}(M \setminus K; \mathbb{Z}), \quad i > 0,$$

$$H^i(M, K; \mathbb{Z}) \cong H^i(M/K; \mathbb{Z}) \cong H_{n-i}(M \setminus K; \mathbb{Z}), \quad i > 0$$

(la dualidad de Lefschetz). Examinar un caso especial: $i = 0$.

PROBLEMA 4. Sea $K^m \subset S^n$ ($m < n$) una inmersión (encaje de un complejo celular finito K^m en una esfera S^n). Demostrar las igualdades

$$H_i(K^m; \mathbb{Z}) \cong H^{n-i-1}(S^n \setminus K^m; \mathbb{Z}), \quad i > 0,$$

$$H^i(K^m; \mathbb{Z}) \cong H_{n-i-1}(S^n \setminus K^m; \mathbb{Z}), \quad i > 0$$

(la dualidad de Alexander). Examinar un caso especial: $i = 0$.

PROBLEMA 5. Sea M^n una variedad orientable cerrada compacta suave $H_k(M^n; \mathbb{Z}) = R_k \oplus T_k$ una descomposición de los grupos H_k en suma directa de los grupos abelianos libres R_k y de los grupos abelianos de orden finito T_k . Entonces se tienen los siguientes isomorfismos: $R_k = R_{n-k}$, $T_k = T_{n-k-1}$.

OBSERVACION. Las relaciones $R_k \cong R^k$, $T_k \cong T^{k+1}$ se cumplen para cualquier complejo celular finito.

Recordemos, que se denomina característica de Euler de la variedad M^n a una suma alternada: $\sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i = \chi(M^n)$, donde $n = \dim M^n$; $\beta_i = \dim H_i(M^n; \mathbb{Z}_2)$ son números de Betti de mod 2 de la variedad M^n . De la dualidad de Poincaré (para las variedades cerradas) obtenemos: $\beta_i = \beta_{n-i}$, y por eso tenemos para variedades de dimensión impar M^{2k+1} : $\chi(M^{2k+1}) = \sum (-1)^i \beta_i \equiv 0$ (para las M^n orientables es posible utilizar los números de Betti con $G = \mathbb{R}$).

§ 19. Puntos críticos de las funciones suaves y categoría de Lusternik—Shnirelman

Si f una función de Morse, es decir, sobre la variedad M no son degenerados los puntos críticos, entonces el número de puntos críticos de la función f , como ya lo sabemos del § 16, se estima inferiormente: $\mu_k \geq b_k$, donde μ_k es el número de puntos críticos del índice k y b_k es un número de Betti: $b_k = \dim H_k(M; G)$, donde $G = \mathbb{R}$, o bien $G = \mathbb{Z}_2$ (o bien \mathbb{Z}_p , p es primo). Así, por ejemplo, en cualquier superficie bidimensional de tipo M_g^2 cualquier función de Morse tiene no menos de $(2g + 2)$ puntos críticos. Pero la situación se complica bruscamente, si tratamos de estimar inferiormente el número de puntos críticos para una función suave arbitraria f , que no necesariamente tiene que ser función de Morse. Como muestran algunos ejemplos elementales, el número de las singularidades degeneradas puede ser considerablemente menor. Tal como fue indicado

anteriormente, al deformarse la función f en un espacio de funciones suaves, las singularidades no degeneradas pueden reunirse, formando singularidades degeneradas. Tales uniones mutuas disminuyen el número de puntos críticos. Mientras una función de Morse en M_g^2 debe tener no menos de $2g + 2$ puntos críticos, en cualquier M_g^2 existe una función suave con tres puntos críticos, de los cuales uno es degenerado (y se desintegra en $2g$ no degenerados con una perturbación conveniente), y otros dos son puntos de mínimo y de máximo. Están cumplidas las desigualdades de tipo $\sum_{(h)} \mu_h \geq \sum_{(h)} b_h$ (véase

el § 16) en el caso, cuando f no es una función de Morse; pero ahora los números μ_k no tienen el sentido, que obtenían en un caso no degenerado (o sea, números de singularidades no degeneradas de índice k). Ahora los números μ_h describen el «grado de complejidad» de los puntos críticos, el cual ya no se relaciona directamente con la cantidad de los mismos. Es más, como fue mostrado anteriormente, no cada punto crítico (degenerado) debe ser necesariamente punto de bifurcación (véase más arriba el § 16), y por eso las desigualdades $\sum_{(h)} \mu_h \geq \sum_{(h)} b_h$ pueden no tomar en cuenta ciertas singularidades degeneradas. De manera que esto no da posibilidad de estimar inferiormente el número de singularidades de una función suave arbitraria f sobre una variedad M^n dada. Resulta que hay cierta invariante topológica de la variedad M^n (llamada categoría de Lusternik—Shnirelman) — $\text{cat}(M^n)$ — que estima inferiormente el número de puntos críticos de la función f . Pasemos a describir esta invariante.

Sean: X , un espacio topológico (de Hausdorff); $A \subset X$, un subconjunto cerrado arbitrario en X .

DEFINICIÓN 1. *A la categoría $\text{cat}_X(A)$ de un subconjunto cerrado A respecto a un espacio X se denomina número minimal k para el cual existen tales subconjuntos cerrados A_1, \dots, A_k en X , que $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, y cada subconjunto A_i se contrae en un punto por el espacio X .*

OBSERVACION. No se supone la conexión de subconjuntos $\{A_i\}$. El propio espacio X lo suponemos, para simplificar, conexo. Si $A = X$, consideramos (por definición), que $\text{cat}_X(X) = \text{cat}(X)$. Este número se llama categoría de Lusternik—Shnirelman. La categoría $\text{cat}_X(A)$ puede tomar los valores: 1, 2, 3, ...

Enumeremos y demostremos las propiedades fundamentales de $\text{cat}_X(A)$.

LEMA 1. *Si $A \subset B \subset X$, entonces $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(B)$.*

DEMOSTRACION. Sea $q = \text{cat}_X(B)$, es decir, existen subconjuntos cerrados B_i , $1 \leq i \leq q$, tales, que $B = \bigcup_{i=1}^q B_i$ y cada B_i se contrae por X en un punto. Consideremos los subconjuntos cerrados $A_i =$

$= A \cap B_i, 1 \leq i \leq q$. Entonces, es evidente que $A = \bigcup_{i=1}^q A_i$ y cada A_i se contrae por X en un punto. En consecuencia, $\text{cat}_X(A) \leq q = \text{cat}_X(B)$, lo que se quería demostrar.

LEMA 2. Sean A y B dos subconjuntos cerrados arbitrarios en X . Entonces $\text{cat}_X(A \cup B) \leq \text{cat}_X(A) + \text{cat}_X(B)$.

DEMOSTRACIÓN. Sean, $A = \bigcup_{i=1}^h A_i$ y $B = \bigcup_{j=1}^p B_j$; entonces $A \cup B = \bigcup_{\alpha=1}^{p+h} C_\alpha$, donde $C_\alpha = A_\alpha$, para $1 \leq \alpha \leq h$, y $C_\alpha = B_{\alpha-h}$, para $h+1 \leq \alpha \leq h+p$. Puesto que A_i y B_j se contraían por X en un punto, entonces C_α se contrae en un punto y la $\text{cat}_X(C) \leq h+p = \text{cat}_X(A) + \text{cat}_X(B)$. El lema queda demostrado.

LEMA 3. Sean $A \subset B$ subconjuntos cerrados en X . Entonces $\text{cat}_X(\overline{B \setminus A}) \geq \text{cat}_X(B) - \text{cat}_X(A)$, donde por $\overline{B \setminus A}$ se designa la clausura del subconjunto $B \setminus A$ en X .

DEMOSTRACIÓN. Como $B = A \cup \overline{B \setminus A}$, entonces, en virtud del lema 2, obtenemos $\text{cat}_X(B) \leq \text{cat}_X(A) + \text{cat}_X(\overline{B \setminus A})$. El lema queda demostrado.

LEMA 4. Sean $A \subset B$ dos subconjuntos cerrados en X y que el conjunto B se deforme continuamente en el subconjunto A (es decir, hay una homotopía φ_t de la aplicación de inmersión $i: B \rightarrow X$ en tal aplicación $\varphi_1: B \rightarrow X$, con la cual $\varphi_1(B) \subseteq A$). Entonces $\text{cat}_X(A) \geq \text{cat}_X(B)$. (El conjunto $\varphi_1(B) \subset X$ puede ser no homeomorfo a B .)

DEMOSTRACIÓN. Sea $\text{cat}_X(A) = k$. Consideremos el recubrimiento $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, donde todos los A_i se contraen por X en un punto. Como $\varphi_1(B) \subseteq A$, es posible considerar $R_j = \varphi_1(B) \cap A_j, 1 \leq j \leq k$. En virtud de la condición del lema, hay una aplicación continua $\alpha: i(B) \rightarrow \varphi_1(B)$, donde el subconjunto $i(B)$ es homeomorfo a B . Supongamos que $B_j = \alpha^{-1}(R_j), 1 \leq j \leq k$. Está claro, que $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$. Luego, aplicando a B_j la homotopía φ_t , deformamos B_j por X en un subconjunto $\varphi_1(B_j) = R_j \subset A_j$, o sea, R_j se contrae por X en un punto; con lo cual cada B_j se contrae en un punto por X ; por consiguiente, $\text{cat}_X(B) \leq k$. El lema queda demostrado. Véase la fig. 88.

LEMA 5. Sean $A \subset X, A$ es compacto y X una variedad. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal, que $\text{cat}_X(U_\varepsilon A) = \text{cat}_X(A)$, donde con $U_\varepsilon(A)$ se designa un ε -entorno cerrado de un subconjunto $A \subset X$. El número ε depende de A .

DEMOSTRACIÓN. Como $A \subset U_\varepsilon A$, entonces por el lema 1 obtenemos: $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(U_\varepsilon A)$. Demostremos la desigualdad inversa.

Sean: $\text{cat}_X(A) = k$, y $A = \bigcup_{i=1}^h A_i$, donde cada A_i se contrae por X en un punto. Puesto que X es una variedad, entonces, evidentemente, existe un $\varepsilon > 0$ tal, que $U_\varepsilon(A_i)$ se contrae (tras de A_i) en un punto por X ($1 \leq i \leq k$). Como $U_\varepsilon(A) = \bigcup_{i=1}^h U_\varepsilon(A_i)$, entonces $\text{cat}_X(U_\varepsilon(A)) \leq k = \text{cat}_X(A)$. El lema queda demostrado.

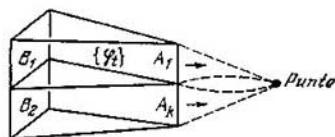


Fig. 88.

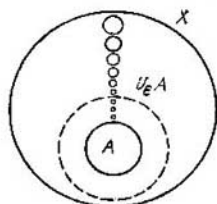


Fig. 89.

OBSERVACION. Si X no es una variedad, el lema 5 no es justo (véase la fig. 89).

LEMA 6. Supongamos que X es una variedad. Sean A, B_n ($n = 1, 2, \dots$) subconjuntos cerrados en X , y $A = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$, es decir, $\rho(A, B_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde X se supone que es un espacio métrico; $\rho(C, D) = \sup_{x \in C} (\inf_{y \in D} \rho(x, y)) + \sup_{y \in D} (\inf_{x \in C} \rho(x, y))$; $\rho(x, y)$ es la distancia entre los puntos x e y en X . Supongamos que $\text{cat}_X(B_n) \geq k$. Entonces también $\text{cat}_X(A) \geq k$.

DEMOSTRACION. En virtud del lema 5, existe un $\varepsilon > 0$ tal, que $\text{cat}_X(U_\varepsilon A) = \text{cat}_X(A)$. Puesto que $\rho(A, B_n) \rightarrow 0$, entonces hay un número N tal, que $B_n \subset U_\varepsilon A$ para todos los $n > N$. De este modo, tenemos: $k \leq \text{cat}_X(B_n) \leq \text{cat}_X(U_\varepsilon A) = \text{cat}_X(A)$. El lema queda demostrado.

TEOREMA 1. Sean M^n una variedad suave, compacta, conexa, cerrada, y $f(x)$ una función suave en M^n . Entonces se cumple la desigualdad $k \geq \text{cat}(M^n)$, donde k es el número de los puntos críticos distintos de la función f . (En particular, k puede ser infinito.)

De hecho el teorema es justo para los puntos de bifurcación de la función f , o sea, $p \geq \text{cat}(M^n)$, donde p es igual al número de puntos bifurcacionales distintos de la función f . Al principio, examinemos una analogía, que se tiene entre la conducta de la categoría de un conjunto de los puntos críticos de la función f y la conducta de los números propios de una forma bilineal en \mathbb{R}^n .

Consideremos la inmersión (el encaje) estándar de una esfera S^{n-1} en $\mathbb{R}^n (x^1, \dots, x^n)$, es decir, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$. Sea $B(x, y)$ una forma simétrica bilineal real en \mathbb{R}^n . Examinemos la función suave $f(x)$ asociada a ella en la esfera S^{n-1} , dada por la fórmula $f(x) = B(x, x)$, $|x| = 1$. Hallemos todos los puntos críticos de la función f . Sean $x \in S^{n-1}$, $\bar{a} \in T_x(S^{n-1})$; consideremos la derivada $\left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_x$ de la función f en un punto x según la dirección \bar{a} . Sea $x(t)$ cualquier curva suave en la esfera S^{n-1} tal, que $x(0) = x$, $\dot{x}(0) = \bar{a}$; entonces

$$\left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_x = \left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} B(x(t), x(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \langle Bx(t), x(t) \rangle \right|_{t=0},$$

donde con $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se designa un operador simétrico (respecto a un producto escalar euclideo \langle, \rangle), asociado a una forma B . Luego

$$\left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_x = \left. \frac{d}{dt} \langle Bx(t), x(t) \rangle \right|_{t=0} = \langle B\dot{x}, x \rangle + \langle Bx, \dot{x} \rangle = 2 \langle Bx, \bar{a} \rangle.$$

Por consiguiente, el punto $x_0 \in S^{n-1}$ es crítico si, y sólo si, $\langle Bx_0, \bar{a} \rangle \equiv 0$ para cualquier vector $\bar{a} \in T_{x_0}S^{n-1}$. Esta condición es equivalente a la siguiente: el vector Bx_0 es ortogonal a un plano $T_{x_0}S^{n-1}$, o sea, $Bx_0 = \lambda x_0$, donde λ es un número real.

Sean $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ vectores propios de la forma B , y $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ los números propios correspondientes. En virtud de la simetría del operador B todos los vectores e_0, e_1, \dots, e_{n-1} son ortogonales de par en par (los consideramos unidades), y los números $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ son reales. Recordemos, que $f(e_\alpha) = \langle Be_\alpha, e_\alpha \rangle = \langle \lambda_\alpha e_\alpha, e_\alpha \rangle = \lambda_\alpha \langle e_\alpha, e_\alpha \rangle = \lambda_\alpha$. Vamos a considerar, que los números λ_α (también los vectores e_α) están en orden creciente, o sea, $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$.

Examinemos en la esfera S^{n-1} todos los posibles ecuadores i -dimensionales S^i , es decir, secciones de la esfera S^{n-1} con los planos de dimensión $i+1$, que pasan por el origen de las coordenadas. Designemos al conjunto de todos estos «ecuadores» por M_i (o sea, $M_i = \{S^i\}$). Fijamos un ecuador arbitrario $S^i \subset S^{n-1}$ y consideremos el $\max_{x \in S^i} f(x)$. Se sabe muy bien de la teoría de las

formas cuadráticas, que tiene lugar la igualdad $\lambda_i = \inf_{M_i} (\max_{x \in S^i} f(x))$;

$0 \leq i \leq n-1$. (Proponemos al lector demostrar esta relación por su cuenta.) Está claro, que la fórmula arriba dada concuerda con la ordenación fijada: $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$. Notemos, que el grupo $SO(n)$ actúa transitivamente en cada clase M_i (cualquier ecuador S^i se obtiene de un ecuador fijado S_0^i mediante alguna torsión $g \in SO(n)$).

PROPOSICIÓN 1. *El número de los puntos críticos distintos de la función $f(x) = \langle Bx, x \rangle$ en la esfera S^{n-1} , no es menor que el número duplicado de clases $\{M_i\}$, o sea, que el número $2n$.*

DEMOSTRACIÓN. Si todos los números propios $\{\lambda_\alpha\}$ de la forma B son distintos, entonces los puntos críticos de la función f son exactamente puntos $\{\pm e_\alpha\}$ (o sea, extremos de los vectores $\pm e_\alpha$, $0 \leq \alpha \leq n-1$). Puesto que el número de estos puntos es igual a $2n$, luego n es igual al número de clases $\{M_i\}$, $0 \leq i \leq n-1$. Si existe tal par de índices $i < j$, que $\lambda_i = \lambda_j$, entonces la esfera S^{j-1} se compone completamente de puntos degenerados críticos de la función f y, ya que hay continuo de estos puntos, la afirmación buscada, evidentemente, se cumple.

OBSERVACIÓN. Como la función $f(x) = \langle Bx, x \rangle$ es invariante respecto a la aplicación $x \rightarrow -x$, entonces $f(x)$ es de hecho la función \tilde{f} en un espacio proyectivo $\mathbb{R}P^{n-1}$; para la función \tilde{f} la propuesta arriba demostrada se reformula así: el número de puntos críticos distintos de la función \tilde{f} en $\mathbb{R}P^{n-1}$ no es menor que el número de clases $\{M_i\}$, o sea, que el número n .

Después de estas notas preliminares examinemos los puntos críticos de la función suave f sobre una variedad arbitraria suave compacta cerrada M^n . Efectuamos los siguientes cambios en la construcción arriba expuesta.

Cambiamos la esfera S^n por la variedad M ; la forma $B(x, x)$ por la función arbitraria suave $f(x)$, $x \in M$; en vez de las torsiones $g \in SO(n)$, que conservaban cada clase M_i (véase más arriba), examinamos las homotopías continuas que, como será mostrado, conservan algunas clases de subconjuntos cerrados, análogos de clases M_i ; en lugar de los números propios λ_i de la forma B trataremos ciertos análogos suyos, contruidos por las clases de subconjuntos cerrados. Pasemos a una exposición detallada.

Sea M^n una variedad suave compacta conexa cerrada. Con M_i designemos a la clase de todos los subconjuntos cerrados $X \subset M^n$ tales, que $\text{cat}_M(X) \geq i$. Está claro, que $M_i \supseteq M_{i+1}$. Connotemos con $\theta(M^n)$ al espacio de todos los subconjuntos cerrados en la variedad M^n . El espacio $\theta(M^n)$ se transforma en un espacio métrico mediante la introducción de la métrica

$$\rho(X, Y) = \sup_{x \in X} (\inf_{y \in Y} \rho(x, y)) + \sup_{y \in Y} (\inf_{x \in X} \rho(x, y)),$$

donde ρ es una distancia en M^n . Digamos, que $Y = \lim_{p \rightarrow \infty} X_p$ si $\lim_{p \rightarrow \infty} \rho(Y, X_p) = 0$; $Y, X_p \in \theta$.

LEMA 7. *Cada clase de subconjuntos $M_i \subset \theta(M^n)$ es cerrada respecto a la operación del paso al límite \lim y respecto a la homotopía de subconjuntos por la variedad M .*

DEMOSTRACIÓN. Sean $X_p \in M_i$; $p = 1, 2, 3, \dots$; $X = \lim_{p \rightarrow \infty} X_p$; $\text{cat}_{M^n}(X_p) \geq i$ (por definición de clase M_i). Es necesario demostrar, que $\text{cat}_{M^n}(X) \geq i$. Esto se deduce inmediatamente del lema 6. Luego: sean $X \in M_i$ e $Y = \varphi_1 X \subset M^n$ un subconjunto, obtenido de X mediante una deformación continua $\varphi_1: X \rightarrow M^n$. Puesto que $\text{cat}_{M^n}(X) \geq i$, entonces, en virtud del lema 4, $\text{cat}_{M^n}(Y) \geq i$, o sea, $Y \in M_i$, lo que se quería demostrar. El lema queda demostrado.

De manera que los M_i son subconjuntos cerrados en $\theta (M^n)$.

Sea fijada la clase M_i y sea $X \in M_i$. Consideremos un número $\lambda_i = \inf_{x \in M_i} (\max_{x \in X} f(x))$. Esta definición de los números λ_i reproduce el teorema correspondiente de la teoría de formas cuadráticas (véase más arriba).

Designemos por N a la categoría de M^n : $\text{cat}(M^n) = N$. Claro que $N < \infty$. De la definición de las clases M_i obtenemos: $\theta = M_0 = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_N$. Aquí $\theta = M_0 = \{X \in \theta; \text{cat}_{M^n}(X) \geq 0\}$; claro que $\text{cat}_{M^n}(X) \geq 0$ para cualquier $X \in \theta$. Es evidente la coincidencia de las clases M_0 y M_1 ; en particular, $\lambda_0 = \lambda_1$. La clase M_N contiene la variedad M^n . La cadena de subconjuntos $\{M_i\}$ se rompe en la clase M_N .

Cada función suave f en la variedad M^n define un juego de funciones f_0, f_1, \dots, f_N , donde la función f_i ($0 \leq i \leq N$) está definida en la variedad M_i y es dada por la fórmula: $f_i(X) = \max_{x \in X} f(x)$, donde $X \in M_i$. Entonces $\lambda_i = \inf_{X \in M_i} (f_i(X))$. Puesto que $M_i \supseteq M_{i+1}$,

con el crecimiento de i , los números λ_i sólo pueden aumentarse: $\lambda_0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$; aquí $N = \text{cat}(M^n)$. Como las clases $M_i \subset \theta$ son cerradas respecto a un paso al límite (véase el lema 7), entonces en cada M_i ($0 \leq i \leq N$) hay un elemento X_i^0 tal, que $f_i(X_i^0) = \lambda_i$. En otras palabras, X_i^0 es un subconjunto cerrado en M^n tal, que $\lambda_i = \max_{x \in X_i^0} f(x)$.

LEMA 8. Consideremos una superficie de nivel $f_{\lambda_i} = \{x \in M^n \mid f(x) = \lambda_i\}$. Entonces sobre la superficie f_{λ_i} hay por lo menos un punto crítico de la función f .

Demostración. Supongamos lo inverso que en la superficie f_{λ_i} no hay puntos críticos de la función f . Consideremos la clase M_i y sea $X_i^0 \in M_i$ tal subconjunto cerrado en M^n , que $\max_{x \in X_i^0} f(x) = \lambda_i$,

es decir, $f_i(X_i^0) = \lambda_i$. En virtud del carácter cerrado de X_i^0 existe un punto $x_i^0 \in X_i^0$ tal, que $f(x_i^0) = \lambda_i$, o sea, $x_i^0 \in f_{\lambda_i}$. Como por suposición, el grad $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in f_{\lambda_i}$, entonces, (en virtud de la compacidad de M^n) existe una deformación bastante pequeña de la superficie f_{λ_i} a lo largo de las trayectorias integrales de un

campo vectorial ($-\text{grad } f$) (consideramos, que en M^n está dada una métrica de Riemann) en un dominio de los valores de la función f , menores que λ_i (véase la fig. 90).

Como M^n es una variedad suave compacta, existe una isotopía suave M^n por sí misma, constante fuera de un entorno pequeño de fibra: $\lambda_i - \varepsilon \leq f(x) \leq \lambda_i$ y que pasa de $\{f = \lambda_i\}$ a $\{f = \lambda_i - \varepsilon\}$. Sea \tilde{X}_i^0 una imagen del subconjunto X_i^0 respecto a esta deformación

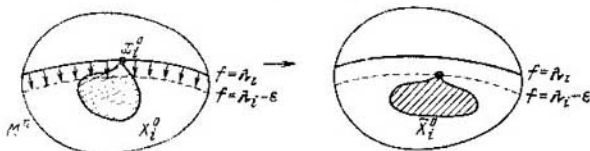


Fig. 90.

Como \tilde{X}_i^0 ha sido obtenida de X_i^0 mediante una homotopía por M^n entonces, en virtud del lema, $\text{cat}_{M^n}(\tilde{X}_i^0) \geq \text{cat}_{M^n}(X_i^0)$ (en realidad tiene lugar la igualdad). Por consiguiente, $\text{cat}_{M^n}(\tilde{X}_i^0) \geq i$, o sea, $\tilde{X}_i^0 \in M_i$. De aquí obtenemos, que $\sup_{x \in \tilde{X}_i^0} f(x) \leq \lambda_i - \varepsilon < \lambda_i$, lo

que significa, que $\inf_{x \in M_i} (\sup_{x \in X} f(x)) \leq \sup_{x \in \tilde{X}_i^0} f(x) \leq \lambda_i - \varepsilon < \lambda_i$, y esto es imposible, según la definición de λ_i . El lema queda demostrado.

LEMA 9. Supongamos, que $\lambda_i = \lambda_{i+p}$, donde $p > 0$. Designemos con S al conjunto de los puntos críticos de la función en una superficie de nivel $f_{\lambda_i} = \{f = \lambda_i\}$. Entonces, $\text{cat}_{M^n}(S) \geq p + 1$.

Demostración. Cabe subrayar aquí la analogía con la conducta de los puntos críticos de la función $\langle Bx, x \rangle$ en la esfera S^{n-1} : si $\lambda_i = \lambda_{i+p}$, entonces un elipsoide de forma B , que es un elipsoide de torsión a lo largo de sus propias direcciones $e_i, e_{i+1}, \dots, e_{i+p}$, engendra el conjunto de los puntos críticos de la función f , homeomorfo a la esfera S^p . Pasemos a demostrar el lema. Puesto que S es cerrado, existe un $\varepsilon > 0$ tal, que $\text{cat}_{M^n}(S) = \text{cat}_{M^n}(U_\varepsilon S)$ (véase el lema 5). Supongamos lo inverso: $\text{cat}_{M^n}(S) \leq p$. Examinemos la cadena de las clases $M_i \supset M_{i+1} \supset \dots \supset M_{i+p}$. Sea $X_{i+p}^0 \in M_{i+p}$ tal subconjunto cerrado, que $\sup_{x \in X_{i+p}^0} f(x) = \lambda_{i+p} = \lambda_i$.

Consideremos el conjunto cerrado $X^0 = \overline{X_{i+p}^0 \setminus (X_{i+p}^0 \cap U_\varepsilon S)}$ (véase la fig. 91). Entonces

$$\begin{aligned} \text{cat}_{M^n}(X^0) &\geq \text{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0) - \text{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0 \cap U_\varepsilon S) \geq \text{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0) - \\ &\quad - \text{cat}_{M^n}(U_\varepsilon S) = \text{cat}_{M^n}(X_{i+p}^0) - \text{cat}_{M^n}(S) \geq i + p - p = i. \end{aligned}$$

De manera que $\text{cat}_{M^n}(X^0) \geq i$, o sea, $X^0 \in M_i$. Luego

$$\lambda_i = \lambda_{i+p} = \sup_{x \in X_{i+p}^0} (f(x)) \sup_{x \in X^0} (f(x)) \lambda_i = \lambda_{i+p} = \sup_{x \in X_{i+p}^0} (f(x)).$$

De manera que queda demostrado, que $\sup_{x \in X^0} (f(x)) = \lambda_i$, y por eso el conjunto X^0 se puede considerar como uno de los compactos X_i^q en la clase M_i . De otro lado, $X_i^q \cap S = \emptyset$ (donde $X^0 = X_i^q$) por

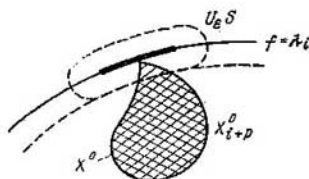


Fig. 91.

construcción de X^0 . Esto contradice el lema 8, según el cual el conjunto X_i^q debe contener por lo menos un punto crítico $x_i^q \in S$ (o sea, en la superficie f_{λ_i}). La contradicción obtenida demuestra el lema.

Demostración del teorema fundamental.

Y bien, sea $f(x)$ una función suave en una variedad suave compacta M^n . Es necesario demostrar, que el número de puntos críticos distintos de la función f es no menor que $\text{cat}(M^n)$. Consideremos la cadena de las clases: $\emptyset = M_0 = M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_N$, donde $N = \text{cat}(M^n)$. En principio, examinemos el caso, cuando $\lambda_0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$, o sea, $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq N$. Entonces, en virtud del lema 8, en cada nivel crítico de f_{λ_i} , $1 \leq i \leq N$, hay por lo menos un punto crítico de la función $f(x)$; por consiguiente, (ya que las superficies críticas f_{λ_i} son distintas para $1 \leq i \leq N$), el número de los puntos críticos es no menor que $N = \text{cat}(M^n)$. Así, para el supuesto $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($1 \leq i, j \leq N$), el teorema queda demostrado.

Ahora consideremos el caso general: sea que hay números coincidentes entre los $\{\lambda_i\}$; por ejemplo, $\lambda_i = \lambda_{i+p}$. «Cuántos puntos críticos (distintos) es posible escoger en la superficie $f_{\lambda_i} = f_{\lambda_{i+p}}$? Del lema 9 obtenemos que $\text{cat}_{M^n}(S) \geq p + 1$, donde S es el conjunto de puntos críticos en la superficie f_{λ_i} . Como $\text{cat}_{M^n}(S) \geq p + 1$, en S se puede escoger por lo menos $p + 1$ puntos distintos ($S = \bigcup_{\alpha=1}^{p+1} S_\alpha$, donde cada S_α se contrae por M^n en un punto; es suficiente escoger un punto en cada conjunto S_α). De manera que un valor «de una vez» de λ_j (o sea tal que $\lambda_{j-1} < \lambda_j < \lambda_{j+1}$) aporta

por lo menos un punto crítico, y cada valor «de $(p + 1)$ veces» λ_i (o sea, $\lambda_{i-1} < \lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+p} < \lambda_{i+p+1}$) aporta por lo menos un $(p + 1)$ -ésimo punto crítico. Esto demuestra el teorema en un caso general.

Como se ve de la demostración, es justa una afirmación análoga también para los puntos bifurcacionales de la función suave f en M^n . Dejamos al lector los razonamientos en detalles.

Pasamos a considerar algunos ejemplos concretos. El primer problema que debe ser examinado, es el siguiente: si es o no la mejor la estimación arriba obtenida (en el caso general), es decir, si existen tales funciones f y tales variedades M^n , para las cuales el número de los puntos críticos es igual a la categoría $\text{cat}(M^n)$. Los ejemplos más simples ya muestran, que existen tales pares (M^n, f) .

PROPOSICIÓN 2. Sea M^2 una variedad bidimensional suave compacta cerrada. Entonces la $\text{cat}(M^2) = 2$, si M^2 es homeomorfa a S^2 , y la $\text{cat}(M^2) = 3$, si M^2 no es homeomorfa a una esfera.

DEMOSTRACIÓN. Si M^2 es homeomorfa a la esfera, la afirmación es obvia. Sea ahora M^2 no homeomorfa a la esfera. Consideremos una

partición celular de M^2 de la forma $\sigma^0 \cup (\bigcup_{\alpha=1}^q \sigma_\alpha^1) \cup \sigma^2$, o sea, a un

ramo de circunferencias $\bigcup_{\alpha=1}^q S_\alpha^1$ está pegada una célula σ^2 . Designe-

mos por $U_\varepsilon(\bigcup_{\alpha} S_\alpha^1)$ a un ε -entorno bastante pequeño de un armazón

unidimensional $\bigcup_{\alpha} S_\alpha^1$ en la variedad M^2 , y sea $\bar{D}^2 = M^2 \setminus U_\varepsilon(\bigcup_{\alpha} S_\alpha^1)$ un disco cerrado (véase la fig. 92).

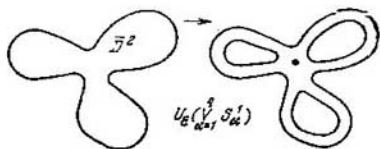


Fig. 92.

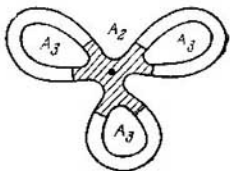


Fig. 93.

Representemos M^2 en forma de reunión de tres subconjuntos cerrados: $M^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde $A_1 = D^2$ (se contrae por sí mismo en un punto), y los conjuntos A_2 y A_3 se muestran en la fig. 93. Aquí $A_2 = U_\varepsilon(\bigcup_{\alpha} S_\alpha^1) \cap W_\eta(\sigma^0)$, donde $W_\eta(\sigma^0)$ es un disco de radio η con centro en el punto σ^0 (se supone bastante pequeño el número η); $A_3 = \overline{U_\varepsilon(\bigcup_{\alpha} S_\alpha^1)} \setminus A_2$ (clausura).

Claro que A_2 se contrae por sí mismo en un punto, y A_3 se contrae por sí mismo en un juego de q puntos, y por eso se contrae en un punto según M^2 . Así, la afirmación queda demostrada.

Es fácil verificar, que si $\text{cat}(M^2) = 2$, entonces M^2 es homeomorfa a la esfera.

Ahora, consideremos las funciones suaves f en M^2 . Para la esfera S^2 la función estándar de altura tiene exactamente dos puntos críticos, lo que equivale a la categoría de la esfera. Si M^2 es no homeomorfa a la esfera, entonces, como fue mostrado más arriba, en M^2 hay una función suave f con tres puntos críticos, lo que equivale a la categoría $\text{cat}(M^2)$. Así, hemos demostrado, que se obtiene una cota inferior, $\text{cat}(M^n)$.

El cálculo de $\text{cat}(M^n)$ es un problema no trivial; este invariante se somete con gran dificultad al cálculo exacto. Por lo común, el obtener estimaciones superiormente (por arriba) en $\text{cat}(M^n)$ no es difícil para una variedad concreta M^n , es suficiente con presentar algún recubrimiento contractable concreto $M^n = \bigcup_{i=1}^N A_i$. El problema más difícil es obtener estimaciones inferiores en $\text{cat}(M^n)$. Ofrecemos un modo de estimación inferiormente (por abajo) de $\text{cat}(M^n)$.

Consideremos el anillo de cohomologías $H^*(M^n; \mathbb{Z})$. Todas las siguientes construcciones se repiten literalmente para un anillo $H^*(M^n; \mathbb{Z}_p)$. El número k se llama «longitud cohomológica de la variedad M^n », si k es el máximo de todos los números p con la siguiente propiedad: existen los elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in H^*(M^n; \mathbb{Z})$ tales, que el producto $\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p$ es distinto de cero en $H^*(M^n; \mathbb{Z})$. Comprendemos bajo el «producto» aquí una multiplicación ordinaria en el anillo de cohomologías.

PROPOSICIÓN 3. *Tiene lugar una desigualdad: $\text{cat}(M^n) \geq k + 1$, donde k es la longitud cohomológica de la variedad M^n .*

DEMOSTRACION. Sea $D: H^k(M^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-k}(M^n; \mathbb{Z})$ dualidad de Poincaré, que establece isomorfismo entre los grupos indicados. Recordemos, que si $\alpha, \beta \in H^k(M^n; \mathbb{Z})$ son dos cociclos y $\alpha \cdot \beta$ es su producto en el anillo $H^*(M^n; \mathbb{Z})$, entonces $D(\alpha \cdot \beta) = D(\alpha) \cap D(\beta)$, donde por $D(\alpha) \cap D(\beta)$ se designa la intersección de los ciclos $D(\alpha)$ y $D(\beta)$ (la operación de la intersección es dual a la multiplicación cohomológica). Para mayor evidencia, es posible imaginar, que los ciclos $\gamma_1 = D(\alpha)$ y $\gamma_2 = D(\beta)$ están realizados en M^n en forma de subvariedades (o subvariedades con singularidades); entonces el ciclo $\gamma_1 \cap \gamma_2$ se hace como una intersección de estas subvariedades (después de reducirlas a una posición general; véase la fig. 94). Consideremos un producto $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k \neq 0$ de la longitud k en $H^*(M^n; \mathbb{Z})$ y sea $\gamma_i = D(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq k$. Entonces $D(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k) = \gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \dots \cap \gamma_k = \gamma$, donde el ciclo γ no es homológico a cero (recordemos, que D es un isomorfismo). Ahora supongamos, que $\text{cat}(M^n) \leq k$. Esto significa que existen tales

subconjuntos cerrados A_1, \dots, A_s ($s \leq k$) en M^n , que $M^n = \bigcup_{i=1}^k A_i$ y cada A_i se contrae por M^n en un punto. Sin restricción de generalidad, es posible considerar, que $M^n = \bigcup_{i=1}^k A_i$, donde todos los A_i se contraen en un punto por M^n . Es suficiente en calidad de A_{s+1}, \dots, A_k (si $s < k$) tomar $(k - s)$ puntos arbitrarios en M^n . Luego, consideremos que $s = k$. A cada ciclo γ_i ($1 \leq i \leq k$) le confrontemos

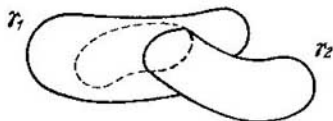


Fig. 94.

un subconjunto A_i . Ya que A_i se contrae en un punto por M^n , entonces $H_*(M; \mathbb{Z})$ se sumerge en $H_*(M, A_i; \mathbb{Z})$ (donde $* > 0$).

De aquí obtenemos, que cada ciclo γ_i es homológico al ciclo $\tilde{\gamma}_i \subset M \setminus A_i$, $1 \leq i \leq k$ (o sea, el ciclo $\tilde{\gamma}_i$ se puede "quitar" del subconjunto $A_i \subset M$). Pero en tal caso $\bigcap_{i=1}^k \tilde{\gamma}_i$ por un lado es homológico a $\bigcap_{i=1}^k \gamma_i = \gamma$, por otro lado $\bigcap_{i=1}^k \tilde{\gamma}_i \subset \bigcap_{i=1}^k (M \setminus A_i) = M \setminus (\bigcup_{i=1}^k A_i) = \emptyset$, ya que $M = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Esto significa, que γ es homológico a cero, lo que contradice las condiciones del teorema. La demostración está terminada.

Apliquemos la afirmación demostrada al problema de un cálculo concreto de $\text{cat}(M^n)$. Así, por ejemplo, si una variedad bidimensional cerrada compacta M^2 no es homeomorfa a la esfera, entonces $\text{cat}(M^2) \geq 3$. La demostración sigue inmediatamente de la información ya conocida por nosotros sobre la construcción de $H^*(M^2; \mathbb{Z})$ y $H^*(M^2; \mathbb{Z}_2)$.

Demostremos, que $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) = n + 1$. Obtendremos, al principio, una estimación superior: $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) \leq n + 1$. Consideremos una descomposición estándar $\mathbb{R}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$, donde A_i son discos n -dimensionales abiertos, definidos así: $A_i = \{\lambda(x^1, \dots, x^i, \dots, x^{n+1}); x^i \neq 0\}$, donde $\{x^\alpha\}$, $1 \leq \alpha \leq n + 1$, son coordenadas homogéneas en $\mathbb{R}P^n$ (véase [1], p. II, § 2). Como $\{A_i\}$ es un recubrimiento abierto $\mathbb{R}P^n$, es posible inscribir en cada conjunto A_i tal disco cerrado A_i , que su reunión será, como antes, un recubri-

miento $\mathbb{R}P^n$ (es suficiente disminuir un poco los discos A_i). Como cada disco A_i se contrae por sí mismo en un punto, obtenemos la estimación buscada superior.

Ahora demostremos que $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) \geq n + 1$. Para esto basta con demostrar, que la longitud cohomológica $\mathbb{R}P^n$ (con coeficientes en \mathbb{Z}_2) es igual a n . Realmente, $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x_1]/(x_1^{n+1})$, es decir, el anillo de cohomologías es isomorfo al anillo de polinomios truncados de la generatriz x_1 (el grado de x_1 es igual a 1); por (x_1^{n+1}) está designado el ideal, engendrado por el elemento x_1^{n+1} . De manera que el producto $x_1^n = x_1 \cdot \dots \cdot x_1$ (n veces) es distinto de cero. Así, $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) = n + 1$.

Demostremos que $\text{cat}(T^n) = n + 1$, donde T^n es un toro n -dimensional. Puesto que $H^*(T^n; \mathbb{Z}) = \Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un álgebra exterior de las generatrices unidimensionales x_i , $1 \leq i \leq n$, entonces el producto $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ es distinto de cero y, por consiguiente, $\text{cat}(T^n) \geq n + 1$. Demostremos que $\text{cat}(T^n) \leq n + 1$. Como $T^n = S^1 \times T^{n-1}$, entonces T^n se puede presentar en forma $T^n = (S^1 \vee T^{n-1}) \cup S^n$. Afirmación general: $\text{cat}(X \vee S^n) = \text{cat}(X)$, si $\text{cat}(X) \geq 2$, donde $X \vee S^n$ es un «ramo» de la esfera S^n y un complejo celular linealmente conexo arbitrario X . Efectivamente, sean $\text{cat}(X) = k$ y $X = \bigcup_{i=1}^k A_i$, donde cada A_i se contrae por X en un punto. Sea $x_0 \in X$ un punto, en el cual está hecha la pegadura del ramo: $X \vee S^n$.

Representemos S^n en forma de la reunión de dos discos cerrados: $S^n = D_1^n \cup D_2^n$, donde $x_0 \in D_1^n$; $x_0 \notin D_2^n$. Consideremos un A_{i_0} tal,

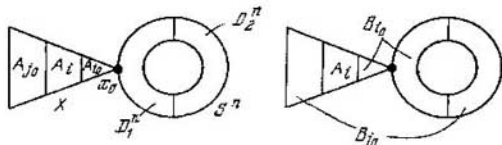


Fig. 95.

que $x_0 \in A_{i_0}$; hacemos $B_\alpha = A_\alpha$, donde $\alpha \neq i_0$ y $\alpha \neq j_0$, donde j_0 es cualquier índice fijado, distinto de i_0 ; $B_{i_0} = A_{i_0} \cup D_1^n$; $B_{j_0} = A_{j_0} \cup D_2^n$. Notemos, que $A_{j_0} \cap D_2^n = \emptyset$ (véase la fig. 95).

De este modo, $X \vee S^n = \bigcup_{i=1}^n B_i$, donde cada B_i se contrae por $X \vee S^n$ en un punto. Así: $\text{cat}(X \vee S^n) = \text{cat}(X)$. Como un ejercicio elemental dejamos al lector la demostración de la siguiente afirmación más general: $\text{cat}(X \vee Y) = \max(\text{cat } X, \text{cat } Y)$, donde X e Y son espacios linealmente conexos arbitrarios. La fórmula

$\text{cat}(X \vee S^n) = \text{cat}(X)$ (si $\text{cat}(X) \geq 2$) es un caso particular de esta afirmación. Volviendo al cálculo de $\text{cat}(T^n)$, obtenemos: $\text{cat}(T^n) = \text{cat}((T^{n-1} \vee S^1) \cup \sigma^n) \leq \text{cat}(T^{n-1} \vee S^1) + 1$. Puesto que $\text{cat}(T^{n-1} \vee S^1) = \text{cat}(T^{n-1})$, y como $\text{cat}(T^2) = 3$, entonces, por inducción, obtenemos: $\text{cat}(T^{n+1}) \leq n + 1$, lo que se quería demostrar.

Sea $p: E \rightarrow B$ un espacio fibrado con una fibra F en sentido de Serre, o sea, se cumple el axioma sobre la existencia de una homotopía cubriente.

PROPOSICIÓN 4. *Tiene lugar la desigualdad: $\text{cat}(E) \leq \text{cat}_E(F) \times \text{cat}(B)$, donde $F \subset E$ es una fibra del espacio fibrado $p: E \rightarrow B$.*

DEMOSTRACION. La afirmación necesaria la obtenemos como un caso particular de una afirmación general: sean: $Y \subset B$, un subconjunto cerrado en la base B ; $p^{-1}(Y) \subset E$, su preimagen completa en E ; entonces se cumple la desigualdad: $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(Y)$. Claro que al suponer $B = Y$, obtenemos la afirmación buscada.

Consideremos en principio el caso, cuando $\text{cat}_B(Y) = 1$. Hay que verificar la desigualdad $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leq \text{cat}_E(F)$. Contrayendo Y por base B en un punto, podemos (por axioma sobre la homotopía cubriente) cubrir esta deformación con una deformación del subconjunto $p^{-1}(Y)$ por E en la fibra F . En virtud del lema 4, $\text{cat}_E(p^{-1}(Y)) \leq \text{cat}_E(F)$, lo que se requería.

Ahora consideremos un caso general: sea $\text{cat}_B(Y) = k$. Entonces $Y = \bigcup_{i=1}^k A_i$, donde cada A_i se contrae por B en un punto. Supongamos $\tilde{Y} = \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$; $A = A_k$; entonces $Y = \tilde{Y} \cup A$, donde $\text{cat}_B(\tilde{Y}) \leq k-1$, $\text{cat}_B(A) = 1$. Es necesario verificar la desigualdad: $\text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y} \cup A)) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_E(\tilde{Y} \cup A)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y} \cup A)) &= \text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y}) \cup p^{-1}(A)) \leq \\ &\leq \text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) + \text{cat}_E(p^{-1}(A)). \end{aligned}$$

La desigualdad buscada se deducirá de la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) + \text{cat}_E(p^{-1}(A)) &\leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(\tilde{Y} \cup A) = k \cdot \text{cat}_E(F). \end{aligned}$$

Ya que $\text{cat}_E(p^{-1}(A)) \leq \text{cat}_E(F)$ (A se contrae por B en un punto), entonces, basta con demostrar una desigualdad más fuerte $\text{cat}_E(p^{-1}(\tilde{Y})) + \text{cat}_E(F) \leq \text{cat}_E(F) \cdot k$, o sea, $\text{cat}_{E_1}(p^{-1}(\tilde{Y})) \leq \text{cat}_E(F) \cdot (k-1)$. A su vez, esta desigualdad se deduce de una desigualdad aún más fuerte: $\text{cat}_E \times (p^{-1}(\tilde{Y})) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}_B(\tilde{Y})$, ya que $\text{cat}_B(\tilde{Y}) \leq k-1$. Pero la última desigualdad se puede con-

siderarla cumplida en virtud de la suposición de la inducción, donde la inducción se realiza por $\text{cat}_B(Y)$ (el primer paso de la inducción $\text{cat}_B(Y) = 1$ fue examinado anteriormente). La afirmación está demostrada.

Hay espacios fibrados $p: E \xrightarrow{F} B$, para los cuales la desigualdad $\text{cat}(E) \leq \text{cat}_E(F) \cdot \text{cat}(B)$ se transforma en una igualdad. Por ejemplo, consideremos un espacio fibrado de Hopf: $p: S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$; entonces, $2 = 1 \cdot 2$, donde $\text{cat}(S^3) = 2$, $\text{cat}(S^2) = 2$, $\text{cat}_{S^1}(S^1) = 1$ (ya que la fibra S^1 se contrae por S^2 en un punto).

§ 20. Variedades críticas y desigualdades de Morse. Funciones con simetría

Un caso importante de los puntos críticos de las funciones suaves f en la variedad M^n son las llamadas «variedades críticas no degeneradas». Esto significa lo siguiente: a) la ecuación $\text{grad } f = 0$ debe dar un juego de las subvariedades suaves $W_k \subset M^n$ de dimensiones α_k ; b) es necesario complementariamente, que la diferencial d^2f en cualquier punto de la subvariedad W_k sea forma cuadrática de rango $n - \alpha_k$, es decir, la forma d^2f debe ser no degenerada en un espacio lineal de vectores, normales a W_k en M^n en alguna métrica de Riemann (positiva).

Naturalmente, las funciones de tal tipo surgen en caso en que en la variedad actúa un grupo de Lie y la función es invariante respecto a las transformaciones del grupo. Otro ejemplo lo dan las funciones f obtenidas de las variedades de menores dimensiones con la aplicación $M^n \xrightarrow{\psi} M^{n-q}$, como las funciones de tipo $f(x) = g(\psi(x))$ para las funciones de Morse $g(x)$ en la variedad M^{n-q} , si el rango $\varphi = n - q$.

DEFINICIÓN 1. Se llama *índice de la variedad crítica conexa* W_k un número λ de los cuadrados negativos de la forma d^2f (que no depende de un punto de W_k en virtud de la no degeneración de la forma d^2f en un plano normal).

Lo mismo como en el § 16 de este capítulo, los invariantes principales de una variedad crítica (suponiendo, que en el mismo nivel se encuentra sólo una variedad crítica conexa) son números de Betti locales: rangos de homologías relativas

$$b_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j) = \text{rango } H_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j),$$

donde M_a es un dominio de menores valores $f(x) \leq a$; W_j es una variedad crítica en el nivel $f(x) = a_j$. Como en el § 16 tenemos

$$b_k(M_{a_j+z}, M_{a_j-z}) = b_k(M_{a_j}, M_{a_j} \setminus W_j),$$

si en un intervalo de valores $[a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon]$ no hay otros puntos críticos salvo W_j . Las desigualdades de tipo de Morse ya fueron deducidas en el § 16:

$$\sum_j b_k(M_{a_j+\varepsilon}, M_{a_j-\varepsilon}) \geq b_k(M^n).$$

En caso de las variedades críticas no degeneradas estas desigualdades se hacen efectivas, si es conocida la topología de las mismas variedades críticas W_j y sus índices λ_j .

TEOREMA 1 a) Tiene lugar la igualdad

$$b_k(W_j) = b_{k+\lambda_j}(M_{a_j+\varepsilon}, M_{a_j-\varepsilon}) \quad (1)$$

(se toman los números de Betti por módulo 2).

b) Si la variedad M^n es orientable y la variedad crítica W_j es simplemente conexa, entonces la igualdad (1) es justa para los números de Betti con coeficientes reales \mathbb{R} .

Para demostrar el teorema, hay que imaginarse más exactamente el cuadro topológico correspondiente a una variedad crítica $W_j \subset M^n$. Un ε -entorno bastante pequeño de la variedad W_j designada por $U(W_j)$, es difeomorfo a un espacio fibrado normal (véase [1], p. 11, § 7) sobre

$$U(W_j) \xrightarrow{p} W_j$$

con una fibra, el disco $D^{n-\alpha_j}$ (de radio ε). En cada fibra, del plano normal $R_x^{n-\alpha_j}$ respecto a cualquier punto $x \in W_j$, la forma cuadrática d^2f tiene un subespacio positivo R_x^+ de dimensión a y negativo R_x^- de dimensión b , donde $b = \lambda_j$ y $a + b = n - \alpha_j$. Tenemos descomposiciones de un espacio fibrado normal respecto a W_j en la suma directa

$$R_x^{n-\alpha_j} = R_x^+ \oplus R_x^-, \quad b = \lambda_j - \dim R_x^-.$$

A la unión de los dominios de radio ε alrededor del cero, en cada fibra de un espacio fibrado con fibra R_x^- , la designemos por $U^-(W_j)$, y en un espacio fibrado con fibra R_x^+ , por $U^+(W_j)$. Tenemos una inmersión (encaje) natural

$$U^-(W_j) \subset U^+(W_j) \subset \bar{M}^n.$$

La restricción de la función f en $U^-(W_j)$ tiene el máximo en misma $W_j \subset U^-(W_j)$ sumergida como una sección nula (0 en cada fibra R_x^-). En forma completamente análoga al teorema del § 15 de este capítulo se demuestra el siguiente lema.

LEMA 1. Para un pequeño $\delta > 0$, una variedad $M_{a_j+\delta}$ se contrae a un complejo $M_{a_j-\delta} \cup_{\varphi} U^-(W_j)$, suponiendo que en los niveles

$[a_j - \delta, a_j + \delta]$ no haya otros puntos críticos salvo W_j . La pegadura se realiza por la aplicación $\varphi: \partial U^-(W_j) \rightarrow M_{\alpha_j - \delta}$.

La demostración del lema repite el razonamiento del § 15. En vez de pegar una célula σ^{λ_j} en un punto crítico no degenerado aislado x_j de índice λ_j , aquí se pega toda una variedad $U^-(W_j)$ que representa, por definición, una familia α_j — paramétrica (el parámetro es un punto de W_j) de las células σ^{λ_j} , donde λ_j es un índice de la variedad crítica W_j . El lema 1 del § 15 sobre la posibilidad de la reducción exacta (localmente) de la función f a una forma cuadrática no es importante para los resultados del § 15. Es más importante el hecho que, en virtud de la regularidad de la forma d^2f , la topología de las superficies de nivel de la función f cerca del punto crítico se define por la forma d^2f , lo que es evidente. En el caso dado la no degeneración de la forma d^2f en todos los planos normales respecto a W_j asegura todas las propiedades topológicas de los niveles de la función en el dominio $U(W_j)$ de una manera completamente análoga.

La frontera $\partial U^-(W_j)$ se representa como un espacio fibrado con fibra-esfera $S^{\lambda_j - 1}$. Esto es una familia de fronteras de células σ^{λ_j} , que depende de un parámetro que pasa por todos los puntos de W_j . Los espacios fibrados U^- y ∂U^- con las fibras D^{λ_j} y $S^{\lambda_j - 1}$ pueden ser no triviales. Si la base de W_j es simplemente conexa, estos espacios fibrados son orientables (y la misma W_j es orientable, por ser simplemente conexa). Precisamente esto será utilizado en la demostración del punto b).

OBSERVACIÓN. De hecho es posible en la formulación del teorema cambiar la condición del punto b) por la condición de orientabilidad de W_j y $U^-(W_j)$.

Demostremos la siguiente afirmación.

LEMA 2. Sea $U^-(W_j)$ un espacio fibrado con fibra D^{λ_j} y base W_j . Para las homología relativas $(U^-, \partial U^-)$ tienen lugar las igualdades

$$\begin{aligned} H^{\lambda_j + q}(U^-, \partial U^-) &= H^q(W_j), \\ H_{\lambda_j - q}(U^-, \partial U^-) &= H_q(W_j). \end{aligned} \quad (2)$$

Si U^- y W_j son orientables, la igualdad (2) se cumple también para $G = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos los siguientes homomorfismos de la dualidad de Poincaré (véase el § 18):

$$1) D_U: H^q(U^-) \cong H_{\alpha_j + \lambda_j - q}(U^-, \partial U^-) \quad (\text{véase el problema 4}).$$

2) $D_W: H_q(W_j) \cong H^{\alpha_j - q}(W_j)$ (véase el teorema 18.1) (la dimensión de W_j es α_j , la dimensión de U^- es $\alpha_j + \lambda_j$). Consideremos la superposición $D_U D_W$. Obtenemos el isomorfismo:

$$D_U D_W: H_q(W_j) \cong H_{\lambda_j + q}(U^-, \partial U^-)$$

El lema queda demostrado, teniendo en cuenta el isomorfismo $H_*(U^-) \cong H_*(W_j)$.

Del teorema 4 del § 5 obtenemos («teorema de factorización» o de «cortes»):

$$H_*(M_{\alpha_j - \delta} \cup_{\phi} U^-, M_{\alpha_j - \delta}) = H_*(U^-, \partial U^-).$$

Puesto que $H_*(M_{\alpha_j + \delta}, M_{\alpha_j - \delta}) = H_*(U^-, \partial U^-)$, obtenemos de los lemas también la demostración del teorema.

EJEMPLO 1. Sea dada una superficie de la torsión M^2 en \mathbb{R}^3 alrededor del eje z , y sea f una función de altura (coordinada z en M^2). Las variedades críticas W_j son circunferencias S^1 , donde $\alpha_j = 1$. El número λ_j es ora 0 (mínimo local), ora 1 (máximo local). Pueden ser tales puntos críticos aislados (mínimos o máximos locales), si se encuentran en el mismo eje z .

EJEMPLO 2. Consideremos espacios fibrados cuya base es la esfera S^n de forma (véase [1], p. II, § 24):

$$1) SO(n+1) \xrightarrow{p} S^n \text{ (fibra } SO(n));$$

$$2) U(n) \xrightarrow{p} S^{2n-1} \text{ (fibra } U(n-1));$$

$$3) Sp(n) \xrightarrow{p} S^{4n-1} \text{ (fibra } Sp(n-1)).$$

Tomemos la función $g(x)$ con un mínimo x_0 y un máximo x_1 en las esferas S^n, S^{2n-1}, S^{4n-1} . En los espacios fibrados 1), 2), 3) surge la función

$$f(x) = g(p(x)).$$

Tendremos dos variedades críticas para f de forma $W_0 = p^{-1}(x_0)$ y $W_1 = p^{-1}(x_1)$, de índices $\lambda_1 = n$ (ó $2n-1, 4n-1$, respectivamente) y $\lambda_0 = 0$ (máximo). Del teorema 1 obtenemos:

$$b_j(SO(n+1)) \leq b_{j-n}(SO(n)) + b_j(SO(n));$$

$$b_j(U(n)) \leq b_{j-(2n-1)}(U(n-1)) + b_j(U(n-1)); \quad (3)$$

$$b_j(Sp(n)) \leq b_{j-(4n-1)}(Sp(n-1)) + b_j(Sp(n-1)).$$

Verificar que aquí todo es orientable (véanse las observaciones para la demostración del teorema, más arriba), y que las desigualdades (3) son utilizables no sólo para $G = \mathbb{Z}_2$, sino que también para $G = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$.

PROBLEMA 1. Demostrar, que las desigualdades (3) son igualdades para $j < n$ para $SO(n+1)$, $j < 2n-1$ para $U(n)$ y $j < 4n-1$ para $Sp(n)$.

De los resultados más exactos del § 7 se deduce que para U y Sp las desigualdades (3) son igualdades para todos los j . Un problema más difícil: las desigualdades (3) son igualdades para SO con $G = \mathbb{Z}$, (siempre) y con $G = \mathbb{R}$ (para n impares).

EJEMPLO 3. Consideremos un espacio homogéneo de Riemann M^n con un grupo de movimiento D , donde $M^n = D/H$, y H es un subgrupo estacionario del punto $x_0 \in M^n$, $Hx_0 = x_0$.

Examinemos la función $f(x) = \rho^2(x, x_0)$, donde $\rho(x, x_0)$ es la distancia de Riemann del punto x al punto x_0 . Es evidente que la función $f(x)$ es invariante respecto al grupo H : $f(Hx) = f(x)$.

PROBLEMA 2. Estudiar las variedades críticas de la función $f(x) = \rho^2(x, 1)$ para $M^n = SO(n)$ o $U(n)$, $Sp(n)$. Aquí el grupo $D = SO(n) \cdot SO(n)$ para una métrica invariante bilateral ρ .

$$D: x \rightarrow g_1 x g_2^{-1}, \quad (g_1, g_2) \in D.$$

La función $f(x)$ es invariante respecto a las transformaciones del subgrupo $H = SO(n) = (g, g) \subset D$, ya que con $x_0 = 1$ tenemos $g x_0 g^{-1} = x_0$. De manera que la función $\rho^2(x, 1) = f(x)$ es invariante respecto a los automorfismos interiores $f(g x g^{-1}) = f(x)$.

EJEMPLO 4. Sean Q un grupo de Lie y $T: Q \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ su representación matricial. El carácter tiene la forma $f(x) = \chi_T(x) = Sp(Tx)$, $x \in Q$.

El carácter $\chi_T(x) = f(x)$ da otro ejemplo de función invariante respecto a los automorfismos interiores $f(g x g^{-1}) = f(x)$.

PROBLEMA 3. Estudiar las variedades críticas de la función $f(x)$ para $Q = SO(n)$ o $U(n)$, $Sp(n)$ y sus representaciones irreducibles. Considerar los casos $Q = SO(3)$, $SO(4)$, $SU(3)$. Para el grupo $SO(2)$ todas las representaciones irreducibles reales no triviales son bidimensionales y tienen la forma

$$T_n(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos(n\varphi) & \operatorname{sen}(n\varphi) \\ -\operatorname{sen}(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{vmatrix},$$

$$f_n(\varphi) = \chi_T(\varphi) = 2 \cos(n\varphi).$$

Considerando los problemas de los ejemplos 3 y 4, es útil, comprender en principio, qué órbitas tiene el grupo de automorfismos interiores para $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$. Para los grupos $SU(2) = Sp(1)$ y el grupo $SO(3)$, el asunto es simple.

PROBLEMA 4. Demostrar que todas las órbitas del grupo de automorfismos interiores son S^2 , salvo el centro (el centro es igual a 1 para $SO(3)$ e igual a $(1, -1)$ para $SU(2) = Sp(1)$). La órbita del punto central es de un punto.

Para el grupo $U(n)$ puede ser diagonalizada cada matriz $A \in U(n)$ mediante un automorfismo interior $A \rightarrow g A g^{-1}$ para $g \in U(n)$. Para las matrices diagonales todo depende, evidentemente, del número de distintos valores propios coincidentes.

Sea descompuesta la matriz en bloques de forma donde $\lambda_j = \exp(2\pi i \varphi_j)$ y λ_j se encuentra l_j veces, $l_2 + \dots + l_n = n$.

$$A = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} \lambda_1 \dots \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_1 \dots \lambda_1 \end{array}} \quad 0 \\ \begin{array}{c} 0 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{c} \lambda_2 \dots \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_2 \dots \lambda_2 \end{array}} \quad \begin{array}{c} 0 \end{array} \\ \dots \\ \begin{array}{c} 0 \end{array} \quad \dots \quad \boxed{\begin{array}{c} \lambda_h \dots \lambda_h \\ \dots \\ \lambda_h \dots \lambda_h \end{array}} \end{array} \quad (4)$$

PROBLEMA 5. Demostrar que la órbita gAg^{-1} de la matriz A de forma (4) es así: $U(n)/U(l_1) \times \dots \times U(l_h)$.

Obtenemos la órbita de la posición general, cuando todos los números propios son distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_h$. En este caso $U(l_j) = U(1) = S^1$, y la órbita es de forma

$$U(n)/U(1) \times \dots \times U(1) = U(n)/T^n.$$

De manera que en estos ejemplos tenemos funciones con la simetría continua, el grupo Q de transformaciones $M^n \rightarrow M^n$, que deja la función f invariable: $f(gx) = f(x)$. Distintas órbitas del grupo son no difeomorfas entre sí, por eso el espacio cociente $M \xrightarrow{p} M/Q$ no es una variedad. Aunque la función $f(x)$ se obtenga como $f(x) = \varphi(px)$ de alguna función φ en M/Q , no es posible utilizar las desigualdades de tipo de Morse en M/Q , ya que este espacio no es una variedad.

EJEMPLO 5. Una clase interesante de los ejemplos de este género con el grupo discreto Q , la obtenemos de los llamados grupos cristalográficos (véase [1], p. I, § 20). Sea K cierto subgrupo discreto de una parte conexa del grupo de movimientos G_n de un espacio euclídeo \mathbb{R}^n (grupo cristalográfico para $n = 3$). Según el teorema conocido (véase [1], p. I, § 20), en el grupo K hay un divisor normal N de índice finito, compuesto de translaciones. El grupo G_n es un producto semidirecto de $SO(n)$ por \mathbb{R}^n , además, las translaciones $\mathbb{R}^n \subset G_n$ son un divisor normal, y $SO(n) = G_n/\mathbb{R}^n$ (véase [1], p. I, § 4). Un subgrupo discreto $K \subset G_n$ y su divisor normal $N \subset \mathbb{R}^n$, donde $N = K \cap \mathbb{R}^n$, definen un grupo cociente finito $D_h = K/N$, que representa todas las torsiones en torno a distintos puntos de \mathbb{R}^n , existentes en K . Tenemos una variedad compacta, el toro $T^n = \mathbb{R}^n/N$ (N es un grupo abeliano libre, de rango n), y la acción de un grupo finito D_h en el toro T^n : $g(x) = gxg^{-1} \pmod{N}$ para $g \in K$.

A cualquier función f en \mathbb{R}^n , invariante respecto al grupo cristalográfico $K \subset G_n$, le corresponde (la misma) función, considerada en el toro $T^n = \mathbb{R}^n / N$, designada por $f(y)$, $y \in T^n$. Con esto, la función $f(y)$ en el toro T^n es invariante respecto a las transformaciones del grupo finito D_h . Llegamos al siguiente problema: se tienen un espacio de Riemann compacto M^n , un grupo finito de movimientos $D: M^n \rightarrow M^n$ y una función de Morse $f(x)$ en M^n , invariante respecto al grupo D . ¿Cómo es posible precisar las desigualdades de Morse para la situación dada?

LEMA 3. Sea $W_d \subset M^n$ una subvariedad en M^n compuesta de un componente conexo entero de conjunto de todos los puntos inmóviles del elemento $d \in D$, $d \neq 1$. Restringimos la función f en W_d . Si el punto $x_0 \in W_d$ es crítico para f en W_d , entonces el mismo punto es crítico también para f en todo M^n .

DEMOSTRACION. Consideremos $\xi(x) = \text{grad } f(x)$ como un vector en M^n , utilizando la métrica. De la invariación de la métrica respecto a los movimientos del grupo D , se deduce que la transformación $d \in D$ pasa el vector $\xi(x) = \text{grad } f(x)$ al vector $\text{grad } f(dx)$: $\xi(x) \rightarrow \xi(dx)$. Si $x \in W_d$, entonces $x = dx$. Descomponemos el vector $\xi(x)$ en la suma $\xi_1 + \xi_2 = \xi$, donde ξ_1 es tangente a W_d y ξ_2 es normal a W_d . Es evidente que $d: \xi_1 \rightarrow \xi_1$. Por el contrario, $d(\xi_2) \neq \xi_2$, si $\xi_2 \neq 0$. De otro modo, la variedad W_d no agotaría todo el componente del conjunto de puntos inmóviles del elemento $d \in D$, ella se dilataría en dirección del vector ξ_2 . Por eso el vector $\xi(x) = \xi_1(x) = \text{grad } f(x)$ es tangente a W_d . El lema queda demostrado.

La precisión de las desigualdades de Morse al examinar la variedad concreta (M^n, D) y la función f , exige conocimientos de las variedades inmóviles de los elementos $d \in D$, de las interrelaciones de estas variedades para distintos d y de un homomorfismo de inmersión de sus homologías en M^n . En particular, si x_0 es un punto inmóvil aislado del elemento $d \in D$, entonces el punto x_0 es un punto crítico de la función $f(x)$ en M^n .

Examinando un elemento $d \in D$, $d \neq 1$, tenemos una variedad inmóvil W_d . En virtud de las desigualdades de Morse para W_d , tenemos para $f_{W_d} = f|_{W_d}$:

$$\sum \mu_h(f_{W_d}) \geq \sum t_h(W_d)$$

Notemos que los índices del punto crítico en W_d y en M^n pueden no coincidir. Hasta un grupo cíclico D de orden m con una generatriz d , las desigualdades de Morse pueden ser mejoradas, si se conocen las inmersiones (encajes)

$$W_d \subset W_{d^2} \subset \dots \subset M^n = W_{d^m} \quad d^m = 1.$$

Un ejemplo singular obtendremos en el caso en que $D = \mathbb{Z}_2$, y la variedad inmóvil W_d del elemento $d \neq 1$ tiene dimensión $n - 1$

y divide la variedad M^n en dos partes difeomorfas, $M^n = M_1 \cup M_2$ donde $\partial M_1 = \partial M_2 = W_d$. La acción del elemento d es la siguiente:

$$\begin{aligned} d: M_1 &\rightarrow M_2, \\ d: M_2 &\rightarrow M_1, \quad d/\partial M_1 \equiv d/\partial M_2 \equiv 1. \end{aligned}$$

Consideremos la sucesión exacta del par (M, W) :

$$\xrightarrow{j_*} H_{q+1}(M, W) \xrightarrow{\partial} H_q(W) \xrightarrow{i_*} H_q(M_1) \xrightarrow{j_*} H_q(M_1, W) \xrightarrow{\partial} \dots$$

Definimos los números

$$\bar{b}_k(M_1, W) = b_k(M_2) + \text{rango } (H_k(M_1, W)/\text{Im } j_*).$$

PROBLEMA 6. Demostrar que el número de los puntos críticos de la función f de índice k en M_1 (incluyendo W) no es menor que $\bar{b}_k(M_1, W)$.

§ 21. Puntos críticos de las funcionales y topología del espacio de las curvas ΩM

Una teoría natural análoga a la teoría de Morse y de Lusterik — Shnirelman surge en las variedades suaves de dimensión infinita M^∞ . Por ejemplo, una de tales «variedades» es el espacio de las curvas suaves a trozos $\Omega(M, p, q)$, que van del punto p al punto q en una variedad M de dimensión finita. Es posible examinar en la variedad M^∞ una función $F(\gamma)$, donde $\gamma \in M^\infty$. A tales funciones se las llaman habitualmente funcionales. La noción de «punto crítico» γ_0 para $F(\gamma)$ es natural, pero el «índice del punto crítico» necesita de argumentación.

Aquí no vamos a estudiar la teoría de variedades de dimensión infinita y nos limitamos a un espacio de curvas $\Omega(p, q, M)$ del punto p al punto q .

Sean $p, q \in M$, dos puntos dados: $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$, una curva (camino) suave a trozos, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, o sea, hay una subpartición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ del segmento $[0, 1]$ tal, que $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ ($0 \leq i \leq k-1$) es una aplicación suave, pero en total γ es continuo. Al conjunto de tales curvas (caminos) lo designemos por $\Omega(M, p, q)$. La suavidad a trozos (pero no la suavidad) de las trayectorias consideradas $\gamma(t)$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ resulta útil desde el punto de vista técnico para la demostración del teorema sobre la descomposición del espacio Ω en suma de «células», por analogía con lo que sucede en un caso de dimensión finita. Con cada punto $\gamma \in \Omega(M, p, q)$ relacionamos cierto espacio lineal de dimensión infinita $T_\gamma \Omega$, al cual es posible naturalmente imaginarse como un «espacio tangente» respecto a Ω en el «punto $\gamma \in \Omega$ ».

DEFINICIÓN 1. Denominaremos espacio tangente $T_\gamma\Omega$ respecto a Ω en el punto γ , al espacio lineal de todos los campos vectoriales suaves a trozos v a lo largo de la curva γ , para los cuales $v(0) = 0$, $v(1) = 0$.

llamamos variación por parámetro u , $-\varepsilon \leq u \leq \varepsilon$, de la curva (camino) γ , que deja los puntos p y q inmóviles, a una aplicación de un segmento $\tilde{\alpha}: (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \Omega$ ($\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño) tal, que $\tilde{\alpha}(0) = \gamma$; hay una subpartición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, para la cual $\alpha(u, t)$ definido por la fórmula $\alpha(u, t) = \tilde{\alpha}(u)(t)$, en cada franja $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ es una aplicación suave en M (véase la fig. 96).

Puesto que con cada u ($-\varepsilon \leq u \leq \varepsilon$) fijado obtenemos una curva suave a trozos $\tilde{\alpha}(u)(t)$, entonces $\tilde{\alpha}$ se puede considerar como una

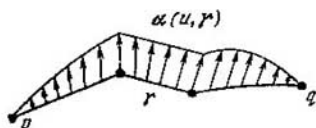


Fig. 96.

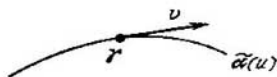


Fig. 97.

trayectoria en el espacio Ω (véase la fig. 97). Por eso es posible examinar un vector de velocidad de la trayectoria $\tilde{\alpha}(u)$ en el punto $\gamma = \tilde{\alpha}(0)$. Por definición, tomamos $v = \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial u}(0, t)$. El campo $v = v(t)$ es un campo vectorial suave a trozos a lo largo de $\gamma(t)$ y, por consiguiente (por definición del espacio tangente $T_\gamma\Omega$), pertenece a $T_\gamma\Omega$. Es fácil de verificar lo contrario: si es dado un campo arbitrario $v \in T_\gamma\Omega$ (o sea un campo $v(t)$ a lo largo de $\gamma(t)$), entonces siempre hay una trayectoria $\tilde{\alpha}(u) \in \Omega$ tal, que $\frac{\partial}{\partial u} \tilde{\alpha}(0, t) = v(t)$. En el cálculo de variaciones, el campo $v(t)$ se designa habitualmente por δ_γ .

Sea $F(\gamma)$ una función con valores reales en Ω . Examinemos la curva $\gamma \in \Omega$ y el campo $v = \delta_\gamma \in T_\gamma\Omega$. Consideremos la derivada $\frac{\partial}{\partial u} F(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0}$, suponiendo que exista tal derivada. En los ejemplos concretos de las funcionales $F(\gamma)$, con los cuales vamos a tratar, será evidente la existencia de la derivada. Notemos, que la definición de la derivada $\frac{\partial}{\partial u} F(\tilde{\alpha}(u))$ dada más arriba es copiada exactamente de la definición de «dimensión finita» de la derivada en dirección de una función suave en una variedad de dimensión finita. Siguiendo, esta analogía en adelante, definimos de la curva crítica (el camino crítico) para $F(\gamma)$. Diremos que la curva $\gamma_0 \in \Omega$ es crítica

para $F(\gamma)$, si $\frac{\partial}{\partial u} F(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} \equiv 0$ para cualquier variación $\tilde{\alpha}(u)$ de la curva γ_0 (o la derivada variacional $\frac{\delta F}{\delta \gamma}$ es igual a cero).

Ahora nos interesarán las funcionales completamente concretas en Ω . Esto es la acción de la curva (del camino): $E(\gamma) = \int_0^1 \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 dt$

y la longitud de la curva (del camino): $L(\gamma) = \int_0^1 \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt$, ya estudiadas en el libro [1] (véase [1] p. I, cap. 5). Con esto, consideramos, que M es una variedad de Riemann. Entre las funcionales L y E existe la siguiente relación: $L^2 \leq E$, al mismo tiempo, la igualdad se obtiene si, y sólo si, $|\dot{\gamma}| \equiv \text{const}$, o sea si el parámetro t (en $\gamma(t)$) es proporcional a la longitud de arco (al parámetro natural).

Ahora recordemos algunos datos sobre las derivadas variacionales de las funcionales $L(\gamma)$ y $E(\gamma)$. Sean $\tilde{\alpha}(u)$ una variación de la curva γ ; $v = v(t) = \frac{d\alpha}{du}(0, t)$ un campo vectorial δ_γ de la variación $\tilde{\alpha}(u)$ (a lo largo de $\dot{\gamma}(t)$); $\dot{\gamma}(t)$ es el vector de velocidad de la trayectoria $\gamma(t)$; $a(t) = \nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma})$ es el vector de aceleración de la trayectoria, $\Delta \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t^+) - \dot{\gamma}(t^-)$, es decir, el salto del vector de velocidad en el punto t . Es justo el siguiente teorema (fórmula de la primera variación) — véase [1], p. I, § 31.

TEOREMA 1. Tiene lugar igualdad:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{du} E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} = - \sum_{(t)} \langle v(t), \Delta \dot{\gamma}(t) \rangle - \int_0^1 \langle v(t), a(t) \rangle dt,$$

donde $a(t)$ es la derivada variacional de la funcional; E es una función suave

En virtud de la suavidad a trozos de la curva $\gamma(t)$ tenemos: $\Delta \dot{\gamma}(t) \equiv 0$ para todo t salvo un número finito de valores de t (puntos de discontinuidad de la derivada).

Como lo hemos notado anteriormente, de la fórmula de la primera variación se deduce la siguiente afirmación.

TEOREMA 2. $\gamma_0 \in \Omega$ es un punto crítico para la funcional $E(\gamma)$ si, y sólo si, γ_0 es una geodésica.

En realidad, si $\gamma_0(t)$ es una geodésica, entonces $\Delta \dot{\gamma}(t) \equiv 0$, $a(t) \equiv 0$ o sea, $\frac{d}{du} E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} \equiv 0$. Al contrario: sea $\frac{d}{du} E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} \equiv 0$

para cualquier variación $\tilde{\alpha}(u)$ de la curva (del camino) $\gamma_0(t)$. Consideremos un campo vectorial $v(t) = g(t) \cdot a(t)$ a lo largo de $\gamma_0(t)$, donde la función $g(t) \geq 0$, además $g(t) = 0$ sólo en tales puntos $t_i \in [0, 1]$, donde $\Delta \dot{\gamma}(t_i) \neq 0$. Así:

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{du} E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} = - \int_0^1 \langle a(t), a(t) \rangle g(t) dt,$$

o sea, $a(t) \equiv 0$ a lo largo de $\gamma_0(t)$. Puesto que $a(t) = \nabla_{\dot{\gamma}_0}(\dot{\gamma}_0)$, esto significa que cada segmento suave de la trayectoria $\gamma_0(t)$ es una geodésica. Ahora escogemos $\tilde{\alpha}(u)$ de tal manera, que $v(t_i) = \Delta \dot{\gamma}(t_i)$; entonces

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{du} E(\tilde{\alpha}(u))|_{u=0} = - \sum_{(t_i)} \langle \Delta \dot{\gamma}(t_i), \Delta \dot{\gamma}(t_i) \rangle,$$

es decir, $\Delta \dot{\gamma}(t_i) = 0$ para todo i , y por eso $\gamma_0(t)$ es una trayectoria suave (no tiene puntos de fractura). El teorema queda demostrado.

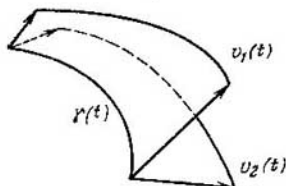


Fig. 98.

Ahora recordemos la fórmula de la segunda variación (véase [1], p. I, § 36) para la funcional E . Sean $v_1, v_2 \in T_{\gamma} \Omega$ dos campos vectoriales.

Consideremos una variación biparamétrica $\alpha: U \times [0, 1] \rightarrow M$, donde $U(u_1, u_2)$ es un entorno abierto del punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2(u_1, u_2)$; $t \in [0, 1]$; $\alpha(0, 0, t) = \gamma(t)$; $\frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(0, 0, t) = v_1(t)$; $\frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(0, 0, t) = v_2(t)$. Es fácil verificar, que para cualquier par de campos $v_1, v_2 \in T_{\gamma} \Omega$ existe tal variación (véase la fig. 98).

Llamamos hessiano de la funcional E en un punto crítico $\gamma_0(t) \in \Omega$ a la expresión de forma:

$$d^2 E(v_1, v_2) = \frac{\partial^2 E(\tilde{\alpha}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{u_1=u_2=0}.$$

Aquí $\tilde{\alpha}(u_1, u_2)(t) = \alpha(u_1, u_2, t)$. Es justa la siguiente fórmula de la segunda variación de la funcional E (véase [1], p. I, § 36).

TEOREMA 3. Sean: $\gamma_0 \in \Omega$, una geodésica (es decir, un punto crítico para $E(\gamma)$), y $\tilde{\alpha}(u_1, u_2)$, una variación biparamétrica de la curva (de camino) γ_0 ; $v_i = \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial u_i}(0, 0)$, $i = 1, 2$. Entonces

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(\tilde{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = - \sum_{(i)} \langle v_2(t_i), \Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t_i)) \rangle - \int_0^1 \langle v_2(t), \nabla_{\dot{\gamma}_0} \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t) + R(\dot{\gamma}_0, v_1) \dot{\gamma}_0 \rangle dt,$$

donde $\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t)) = \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t^+) - \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t^-)$ es un salto de la derivada $\nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1(t)$ en uno de sus puntos de discontinuidad; R es tensor de curvatura.

Fue mostrado más arriba que las geodésicas $\gamma_0(t)$ no tienen puntos de fractura, y por eso es posible limitarse a las variaciones $\tilde{\alpha}$, para las cuales $v_1(t)$ y $v_2(t)$ no tienen puntos de fractura. Entonces:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(\tilde{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0) = - \int_0^1 \langle v_2, \nabla_{\dot{\gamma}_0} \nabla_{\dot{\gamma}_0} v_1 + R(\dot{\gamma}_0, v_1) \dot{\gamma}_0 \rangle dt.$$

Recordemos que el campo vectorial $v(t)$ a lo largo de la geodésica γ_0 se llama de Jacobi, si satisface la ecuación diferencial de Jacobi: $(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v) \dot{\gamma}_0 = 0$ (véase [1], p. I, § 36). Es conveniente escribir esta ecuación en coordenadas en la siguiente base: escojamos a lo largo de $\gamma_0(t)$ n campos vectoriales que son ortonormales (para cada t) y paralelos a lo largo de γ_0 : $e_1(t), \dots, e_n(t)$ (o sea, $\nabla_{\dot{\gamma}_0} e_i(t) \equiv 0$). Entonces, $v(t) = v^j e_j(t)$, y obtendremos:

$$\frac{d^2 v^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^n R_j^i(t) v^j(t) = 0, \text{ donde } R_j^i(t) = \langle R(\dot{\gamma}_0, e_j) \dot{\gamma}_0, e_i \rangle.$$

De manera que el campo de Jacobi (como solución de este sistema se determina unívocamente por los siguientes datos iniciales: $v(0)$, $\nabla_{\dot{\gamma}_0} v(0) \in T_{\dot{\gamma}_0}(0)(M^n)$. Ahora recordemos la definición de los puntos conjugados a lo largo de la geodésica $\gamma_0(t)$. Sea que para un par de puntos $A, B \in \gamma_0(t)$ exista un campo de Jacobi no nulo $v(t)$ a lo largo de $\gamma_0(t)$ tal, que $v|_A = v|_B = 0$ (es decir, el campo $v(t)$ se anula en los puntos A y B). Entonces los puntos A y B se llaman

conjugados a lo largo de la geodésica γ_0 . A la dimensión del espacio lineal de todos estos campos de Jacobi (a lo largo de γ_0) se la denomina multiplicidad de un par de puntos conjugados A y $B \in \gamma_0$ (a lo largo de γ_0).

Consideremos $d^2E(v_1, v_2)$; sea $W_{\gamma_0} \subset T_{\gamma_0} \Omega$ un subespacio lineal en $T_{\gamma_0} \Omega$, compuesto de todos aquellos campos vectoriales v_1 tales, que $d^2E(v_1, v_2) \equiv 0$ para cualquier $v_2 \in T_{\gamma_0} \Omega$. A veces al subespacio W_{γ_0} se lo denomina subespacio nulo del hessiano d^2E en el punto $\gamma_0 \in \Omega$, o núcleo del hessiano d^2E . Se llama grado de degeneración del hessiano d^2E , el $\dim W_{\gamma_0}$ (en el punto crítico $\gamma_0 \in \Omega$).

TEOREMA 4. Sea γ_0 una geodésica en M del punto p al punto q ; entonces, $v \in W_{\gamma_0}$ (es decir, pertenece al núcleo del hessiano d^2E) si, y sólo si, v es un campo de Jacobi a lo largo de γ_0 (en particular, $v|_p = v|_q = 0$).

De manera que el núcleo W_{γ_0} del hessiano d^2E es distinto de cero si, y sólo si, los extremos p y q de la geodésica γ_0 son conjugados a lo largo de γ_0 . La dimensión del núcleo W_{γ_0} (o sea, el grado de degeneración del hessiano d^2E) es igual a la multiplicidad de los puntos p y q a lo largo de γ_0 .

DEMOSTRACION. Sea v un campo de Jacobi a lo largo de γ_0 tal, que $v|_p = v|_q = 0$. Entonces, $v \in T_{\gamma_0} \Omega$. Puesto que γ_0 es una trayectoria suave, entonces $\Delta(\nabla \cdot v(t)) = 0$ (no hay fracturas). Como $v(t)$ es un campo de Jacobi, entonces $(\nabla \cdot)^2 v(t) + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 \equiv 0$ y, por consiguiente, de la fórmula de la segunda variación de la funcional E , obtenemos:

$$d^2E(v, \tilde{v}) = \sum_{(i)} \langle \tilde{v}(t), 0 \rangle + \int_0^1 \langle \tilde{v}(t), 0 \rangle dt \equiv 0.$$

Así, $v \in W_{\gamma_0}$ (al núcleo de d^2E). Por el contrario: sea $v \in W_{\gamma_0}$. Es necesario demostrar, que $v(t)$ es un campo de Jacobi a lo largo de $\gamma_0(t)$. Ya que el campo $v(t)$ es suave a trozos, entonces es posible partir el segmento $[0, 1]$ mediante un número finito de puntos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ en los intervalos (t_{i-1}, t_i) , en los cuales el campo $v(t)$ es suave. Como antes construimos una función suave $f(t)$ en $[0, 1]$ igual a cero en los puntos $\{t_i, 0 \leq i \leq k\}$ y positiva en los restantes puntos. Consideremos el campo $q = f((\nabla \cdot)^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0)$. Sustituyéndolo en d^2E , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} (0, 0) &= d^2E(v, q) = \\ &= - \sum_{(i)} \langle q, \Delta(\nabla \cdot, v) \rangle + \int_0^1 f \cdot |(\nabla \cdot)^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0|^2 dt = 0. \end{aligned}$$

Como $g(t_i) = 0$, $0 \leq i \leq k$, entonces el primer sumando es igual a cero, y en vista de que $f(t) > 0$ para $t \neq t_i$, $0 \leq i \leq k$, entonces $(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 \equiv 0$ en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. De manera que v es un campo de Jacobi a lo largo de cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Demostremos que v es un campo de Jacobi a lo largo de toda la trayectoria γ_0 . Para eso es suficiente demostrar, que $\nabla_{\dot{\gamma}_0} v$ no tiene puntos de discontinuidad en el segmento $[0, 1]$. Realmente, supongamos lo contrario: sean $\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v)_{t_i} = \nabla_{\dot{\gamma}_0} v(t_i^+) - \nabla_{\dot{\gamma}_0} v(t_i^-)$, saltos en los puntos t_i ; entonces, es posible considerar un campo vectorial $g(t)$ a lo largo de $\gamma_0(t)$ tal, que $g(t_i) = \Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v)_{t_i}$. Entonces obtenemos:

$$\frac{1}{2} d^2 E(v, q) = \sum_{i=1}^{k-1} |\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v)_{t_i}|^2 + \int_0^1 \langle g, (\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 \rangle dt = 0$$

en virtud de que $v \in \text{Ker}(d^2 E)$. El segundo sumando en esta suma es igual a cero (véase más arriba) y por eso $\sum |\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v)_{t_i}|^2 = 0$, o sea, $\Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v)_{t_i} = 0$ para todo i . Así, $\nabla_{\dot{\gamma}_0} v$ no tiene puntos de discontinuidad y, por consiguiente, v es un campo de Jacobi a lo largo de toda la trayectoria γ_0 .

OBSERVACIÓN. Siempre es finita la dimensión del núcleo del Hessiano $d^2 E$, puesto que ella es igual a un número de los campos de Jacobi linealmente independientes a lo largo de γ_0 (que se anulan en los puntos p y q).

Entre varias variaciones de las trayectorias γ_0 se destaca una clase de las llamadas variaciones geodésicas, o sea, de tales aplicaciones suaves $\alpha: (-\varepsilon, +\varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$, con las cuales $\alpha(0, t) = \gamma_0(t)$ y cada trayectoria $\tilde{\alpha}(u)$ (recordemos, que $\tilde{\alpha}(u)(t) = \alpha(u, t)$) es una geodésica (o sea, en el proceso de perturbación de la geodésica γ las trayectorias perturbadas quedan geodésicas, como antes). Examinemos el «vector de velocidad» de tales trayectorias $\tilde{\alpha}$ en el espacio Ω , es decir, un campo vectorial $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ a lo largo de γ_0 . Afirmamos que esto es un campo de Jacobi a lo largo de γ_0 .

Realmente, ya que todas las trayectorias $\tilde{\alpha}(u)$ son geodésicas, entonces $\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) = 0$; por consiguiente, es igual a cero la siguiente expresión:

$$\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial u}} \left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \right) = \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial u}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \right) + R \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

Como $\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial u}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) = \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)$, entonces

$$\left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \right)^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) + R \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0,$$

o sea, el campo $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ es de Jacobi.

Es justa la afirmación contraria: se puede obtener cualquier campo de Jacobi a lo largo de la geodésica γ_0 con ayuda de cierta variación geodésica. En efecto, supongamos, en principio, que la geodésica γ_0 une dos puntos bastante cercanos p' y q' que se encuentran en un disco $D^n \subset M^n$ de radio suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$. Entonces es posible considerar, que cualquier par de puntos $\alpha, \beta \in D^n$ se une con la única geodésica contenida en el dominio D^n . Al principio demosetremos la existencia de un campo de Jacobi a lo largo de γ_0 (de p' y q'), que tiene en los puntos p' y q' valores dados arbitrarios (véase la fig. 99). Examinemos en los puntos p' y q' los vectores tangentes arbitrarios a y b respecto a M y vamos a construir un campo de Jacobi a lo largo de γ_0 con los datos iniciales; a en el punto p' y b en el punto q' . Por el punto p' trazamos una curva suave $a(u)$ tal, que $\frac{da(u)}{du} = a$; análogamente, por el punto q' trazamos una trayectoria $b(u)$ tal, que $\frac{db(u)}{du} = b$. La familia buscada de las geodésicas la obtendremos uniendo por geodésicas los puntos $a(u)$ y $b(u)$ (esta geodésica es única). Reemplazando u , obtenemos una perturba-

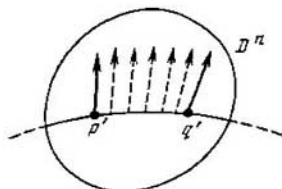


Fig. 99.

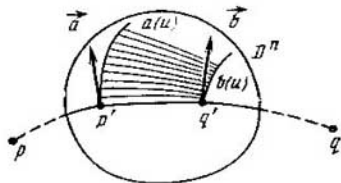


Fig. 100.

ción buscada de la geodésica γ_0 del punto p' al punto q' con valores iniciales dados a y b (véase la fig. 100). El campo de Jacobi buscado a lo largo de γ_0 desde p' hasta q' se obtiene mediante la diferenciación respecto al parámetro u de la variación geodésica arriba construida. Puesto que el campo de Jacobi se define unívocamente por sus valores en los puntos p' y q' , entonces es posible obtener de manera indicada cualquier campo de Jacobi a lo largo de γ_0 desde el punto p' hasta el punto q' . Notemos que el espacio lineal de todos los campos de Jacobi a lo largo de γ_0 , desde p' hasta q' , es isomorfo a un espacio

lineal $(2n)$ -dimensional: $T_{p'}(M^n) \times T_{q'}(M^n)$. En general evidentemente, es justa la afirmación más amplia: un campo de Jacobi a lo largo de γ_0 desde el punto p hasta el punto q (donde p y q no son necesariamente cercanos) es definido unívocamente por dos valores suyos en dos puntos no conjugados (a lo largo de γ_0).

Ahora demostramos la existencia de una variación geodésica, que engendra un campo de Jacobi dado v ya en toda la geodésica γ_0 desde p hasta q . Consideremos para esto un par de puntos $p', q' \in \gamma_0$, que se encuentran dentro de una esfera bastante pequeña D^n , y demos en los puntos p' y q' los siguientes vectores: $a = v|_{p'}$, $b = v|_{q'}$. Luego, construyamos una variación geodésica que engendra un campo de Jacobi v a lo largo de γ_0 desde el punto p' hasta el punto q' (véase la construcción más arriba), y prolonguemos la familia construida de las geodésicas fuera de los límites del disco D^n , lo que da la variación geodésica buscada ya a lo largo de toda la geodésica γ_0 .

Estudiamos la relación entre los puntos conjugados a lo largo de γ_0 y las propiedades del hessiano d^2E . Recordemos, que el índice λ del hessiano d^2E es una dimensión máxima de los subespacios en $T_{\gamma_0}\Omega$, en los cuales la forma d^2E es definida negativamente. Tiene lugar la siguiente afirmación importante.

TEOREMA 5. *El índice de una forma cuadrática d^2E en un punto crítico $\gamma_0 \in \Omega$ es igual al número de los puntos en la geodésica $\gamma_0(t)$, $0 < t < 1$, conjugados a lo largo de $\gamma_0(t)$ a un punto inicial $p = \gamma_0(0)$ (cada punto $\gamma_0(t)$ conjugado con $\gamma_0(0) = p$, es tenido en cuenta tantas veces, como sea el número de su multiplicidad). El índice $\lambda = \lambda(\gamma_0)$ es finito siempre.*

OBSERVACIÓN. Si los puntos p y q no son conjugados a lo largo de γ_0 , entonces es posible examinar toda la trayectoria $\gamma_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$. En este caso $\text{Ker}(d^2E) = 0$ y $\gamma_0 \in \Omega$ es un punto crítico no degenerado de índice λ .

En particular, se deduce del teorema que cada segmento de la geodésica γ_0 contiene sólo un número finito de puntos conjugados con el punto $p = \gamma_0(0)$.

Antes de pasar a la demostración formal del teorema, demos una explicación clara que muestra que los puntos conjugados definen tales variaciones $\tilde{\alpha}(u)$ en el espacio Ω , que a lo largo de ellas se disminuye una parte cuadrática de la funcional E . Consideremos que en la variedad M está dada una métrica de Riemann definida positivamente y que ∇ es una conexión de Riemann concordada con esta métrica.

Sea $x_0 \in \gamma_0$ un punto conjugado con $p = \gamma_0(0)$ a lo largo de $\gamma_0(t)$. Entonces, a lo largo del segmento $[p, x_0]$ de la geodésica γ_0 existe $\lambda(x_0)$ campos de Jacobi ($\lambda(x_0) \geq 1$), que se anulan en los puntos p y x_0 . (Estos campos, sin duda, pueden anularse también en

ciertos puntos interiores del segmento $[p, x_0]$.) Consideremos una variación geodésica $\tilde{\alpha}(u)$ del segmento $[p, x_0]$ en la dirección de algún campo de Jacobi a lo largo de $[p, x_0]$ que se anula en p y x_0 . Esto significa, que hay una «torsión» infinitamente pequeña de la geodésica $[p, x_0]$, que deja inmóviles los puntos p y x_0 (véase la fig. 101).

Examinemos las geodésicas $\tilde{\alpha}(u)(t)$, que definen esta variación geodésica, $0 \leq t \leq t_0$, donde t_0 corresponde al punto $x_0 \in \gamma_0$. Entonces, es posible examinar la siguiente curva suave $\tilde{\varphi}(u)$ en el espacio



Fig. 101.

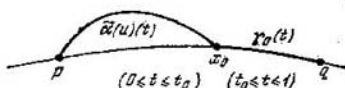


Fig. 102.

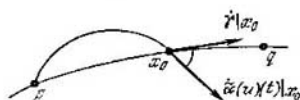


Fig. 103.

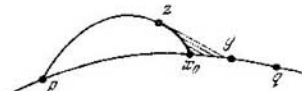


Fig. 104.

$\Omega : \tilde{\varphi}(u)(t) = \tilde{\alpha}(u)(t)$ con $0 \leq t \leq t_0$; $\tilde{\varphi}(u)(t) = \gamma_0(t)$ con $t_0 \leq t \leq 1$ (véase la fig. 102).

En virtud de la elección de $\tilde{\varphi}(u)$ se puede considerar, en la primera aproximación, que la longitud de γ_0 desde p hasta q es igual a la longitud de $\tilde{\alpha}(u)(t)$ desde p hasta x_0 más la longitud de γ_0 desde x_0 hasta q , o sea, se puede considerar, que la funcional E no cambia con un desplazamiento bastante pequeño a lo largo de la trayectoria $\tilde{\varphi}(u)$, $0 \leq u \leq \varepsilon$.

Puesto que el campo de Jacobi es definido completamente por sus datos iniciales, en el punto x_0 el ángulo entre los vectores de velocidades de la trayectoria γ_0 y la trayectoria $\tilde{\alpha}(u)(t)$ es distinto de cero (véase la fig. 103).

Ahora construimos la nueva trayectoria $\tilde{\psi}(u)$ en el espacio Ω , que sale del punto γ_0 a lo largo del cual una parte cuadrática de la funcional E decrecerá estrictamente, o sea, el vector de velocidad $\dot{\tilde{\psi}}(u)|_{u=0}$ pertenecerá a un subespacio, donde está definido negativamente el hessiano d^2E . La construcción de la variación $\tilde{\psi}(u)$ se muestra en la fig. 104.

Ya que en un triángulo suficientemente pequeño x_0 , y y z se cumple una desigualdad estricta: la longitud de (x_0, y) + la longitud de $(x_0, z) >$ longitud de (z, y) , entonces, la longitud de la trayectoria $\tilde{\psi}(u)(t)$ ($\tilde{\psi} = (pz) + (zy) + (yq)$) estrictamente es menor de la longitud de $\varphi(u)(t)$, o sea, la longitud de γ_0 (desde p hasta q). Aquí utilizamos, claro está, la definidad positiva de la métrica de Riemann. Así, cada campo de Jacobi en el segmento px_0 , que se anula en los puntos p y x_0 , da un aporte unitario en el índice de hessiano d^2E en el punto γ_0 .

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Consideremos tal partición (bastante pequeña) del segmento $[0, 1]$ mediante los puntos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, para que cada segmento $[\gamma_0(t_{i-1}), \gamma_0(t_i)]$ de la geodésica γ_0 sea un segmento geodésico mínimo, que una los puntos $\gamma_0(t_{i-1})$ y $\gamma_0(t_i)$ en una esfera bastante pequeña que estos puntos los contiene.

Sea $T_{\gamma_0}\{t_i\} \subset T_{\gamma_0}$ un subespacio vectorial en T_{γ_0} , consistente en todos los campos vectoriales $v(t)$ a lo largo de $\gamma_0(t)$ con las siguientes

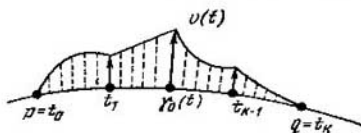


Fig. 105.

propiedades: a) el campo $v(t)$ es de Jacobi a lo largo de γ_0 en cada segmento $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq k$; b) $v(0) = 0$, $v(1) = 0$ (véase la fig. 105).

Con otras palabras, $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ es un espacio de todos los campos quebrados de Jacobi a lo largo de la trayectoria $\gamma_0(t)$ (los puntos de fractura son $\{t_i\}$). Junto con un subespacio $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ consideremos en $T_{\gamma_0}\Omega$ otro espacio más, Q_{γ_0} , compuesto de todos los campos $v(t)$, para los cuales $v(t_i) = 0$, $0 \leq i \leq k$.

LEMA. Un espacio tangente $T_{\gamma_0}\Omega$ se descompone en la suma directa de sus dos subconjuntos: $T_{\gamma_0}\Omega = T_{\gamma_0}\{t_i\} \oplus Q_{\gamma_0}$. al mismo tiempo los subconjuntos $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ y Q_{γ_0} son ortogonales respecto a un producto escalar, que se da en $T_{\gamma_0}\Omega$ por el hessiano d^2E (o sea, $d^2E(v_1, v_2) = 0$, si $v_1 \in T_{\gamma_0}\{t_i\}$, $v_2 \in Q_{\gamma_0}$). Luego, está definida positivamente la restricción del hessiano d^2E en el subespacio Q_{γ_0} , es decir, el índice de d^2E en $T_{\gamma_0}\Omega$ es igual al índice de d^2E en $T_{\gamma_0}\{t_i\}$. Puesto que $T_{\gamma_0}\{t_i\}$ es un espacio lineal de dimensión finita, el índice del hessiano d^2E es siempre finito.

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in T_{\gamma_0}$; consideremos los vectores $v(t_i)$, $1 \leq i \leq k$; entonces hay, y es único, un campo de Jacobi quebrado v'

tal, que $v(t_i) = v'(t_i)$, $1 \leq i \leq k$; por consiguiente, $(v - v')(t_i) = 0$, o sea, $v'' = v - v' = Q_{\gamma_0}$. Así, para cualquier $v \in T_{\gamma_0}$ hay, y es única, una descomposición de forma $v = v' + v''$, donde $v' \in T_{\gamma_0} \{t_i\}$, y $v'' \in Q_{\gamma_0}$. Así T_{γ_0} se descompone en la suma directa de dos subespacios: $T_{\gamma_0} \{t_i\}$ y Q_{γ_0} . Demostremos la ortogonalidad de los mismos. Tenemos de la fórmula de la segunda variación:

$$\frac{1}{2} d^2E(v', v'') = - \sum_{(i)} \langle v'', \Delta(\nabla_{\dot{\gamma}_0} v') \rangle - \int_0^1 \langle v'', \Theta \rangle dt = 0,$$

lo que se quería demostrar.

Ahora demostremos, que la restricción de d^2E en Q_{γ_0} es una forma definida positivamente, o sea, $d^2E(v, v) \geq 0$, si $v \in Q_{\gamma_0}$ con esto la igualdad a cero tiene lugar si, y sólo si, $v = 0$. Consideremos la variación $\tilde{\alpha}(u)$ de la curva γ_0 , que engendra el campo $v \in Q_{\gamma_0}$. Como

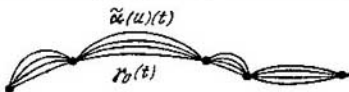


Fig. 106.

el campo $v(t)$ se anula en los puntos t_i , $1 \leq i \leq k$, entonces, evidentemente se puede considerar, que $\tilde{\alpha}(u)(t_i) = 0$ para cualquier u , $1 \leq i \leq k$ (véase la fig. 106).

Puesto que cada segmento de la geodésica γ_0 desde el punto $\gamma_0(t_{i-1})$ hasta el punto $\gamma_0(t_i)$ ($1 \leq i \leq k$) es mínimo, entonces para el correspondiente segmento de la curva $\tilde{\alpha}(u)(t)$ desde el valor t_{i-1} , hasta el valor t_i se cumple la desigualdad: $E_{t_{i-1}}^{t_i}(\tilde{\alpha}(u)(t)) \geq E_{t_{i-1}}^{t_i}(\gamma_0(t))$; por consiguiente: $E(\tilde{\alpha}(u)(t)) \geq E(\tilde{\alpha}(0)(t))$. Ya que es posible interpretar el valor de $d^2E(v, v)$ como la segunda derivada de $E(\tilde{\alpha}(u)(t))$ en el punto $u = 0$, entonces, por lo tanto, la existencia de un mínimo local para $E(\tilde{\alpha}(u)(t))$, significa que $d^2E(v, v) \geq 0$.

Queda para demostrar que $d^2E(v, v) > 0$, si $v \neq 0$ y $v \in Q_{\gamma_0}$. Supongamos que $d^2E(v, v) = 0$. Demostremos que entonces $d^2E(\varphi, \varphi) = 0$ para cualquier $\varphi \in T_{\gamma_0}$. Puesto que $\varphi = \varphi' + \varphi''$, donde $\varphi' \in T_{\gamma_0} \{t_i\}$, y $\varphi'' \in Q_{\gamma_0}$, entonces

$$d^2E(\varphi' + \varphi'', v) = d^2E(\varphi', v) + d^2E(\varphi'', v) = d^2E(\varphi'', v).$$

Puesto que $d^2E(\varphi', v) = 0$ (recordemos, que los subespacios $T_{\gamma_0} \{t_i\}$ y Q_{γ_0} son ortogonales respecto a la forma d^2E). Puesto que $(\alpha\varphi'' + v) \in Q_{\gamma_0}$ para cualquier α real, entonces tenemos: $d^2E(\alpha\varphi'' + v,$

$\alpha\varphi'' + v) \geq 0$, o sea, $\alpha^2 d^2 E(\varphi'', \varphi'') + d^2 E(v, v) + 2\alpha d^2 E(\varphi'', v) = \alpha^2 d^2 E(\varphi'', \varphi'') + 2\alpha d^2 E(\varphi'', v) \geq 0$, o sea en virtud de la arbitrariedad de α obtenemos: $d^2 E(\varphi'', v) = 0$. Así, $d^2 E(\varphi, v) \equiv 0$ con cualquier $\varphi \in T_{\gamma_0}$, es decir, $v \in \text{Ker}(d^2 E)$. Al mismo tiempo $\text{Ker}(d^2 E)$ consta sólo de los campos de Jacobi, y como el subconjunto Q_{γ_0} contiene sólo un campo de Jacobi nulo, entonces obtenemos definitivamente $d^2 E(v, v) > 0$ en Q_{γ_0} . El lema queda demostrado.

El lema demostrado permite limitarse, al calcular el índice de $d^2 E$ a lo largo de γ_0 , sólo a los campos de Jacobi quebrados, correspondientes a una partición bastante pequeña $\{t_i\}$ del segmento $[0, 1]$.



Fig. 107.

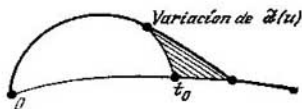


Fig. 108.

Consideremos una geodésica $\gamma_0(t)$ en un intervalo desde 0 hasta t_0 , donde $0 \leq t_0 \leq 1$. Designemos por $\lambda(t_0)$ al índice del hessiano $d^2 E$ a lo largo del segmento de la geodésica $[0, t_0]$. Es claro que $\lambda(t_0)$ es una función monótona, o sea, $\lambda(t_0) \leq \lambda(t'_0)$, si $t_0 < t'_0$. Esto se deduce del hecho que cualquier campo de Jacobi en $[0, t_0]$ se anula en el punto $t = 0$ y en el punto $t = \alpha$, donde $\alpha \leq t_0$, y por eso cada uno de estos campos se prolongan hasta un campo de Jacobi a lo largo del segmento $[0, t'_0]$, si lo suponemos igual a cero en el segmento $[\alpha, t'_0]$ (véase la fig. 107). Luego, puesto que la geodésica $\gamma_0(t)$ es mínima localmente, de aquí se deduce, que $\lambda(t_0) = 0$ para t_0 suficientemente pequeños. Si t_0 no es un punto conjugado en $\gamma_0(t)$, entonces la función $\lambda(t)$ es localmente constante en un entorno bastante pequeño de t_0 , ya que el conjunto de los puntos no conjugados a lo largo de $\gamma_0(t)$ es un conjunto abierto. De manera que los saltos de la función $\lambda(t)$ pueden realizarse sólo en tales puntos t_0 , conjugados con el punto $\gamma_0(0) = p$. El carácter de este salto lo hemos estudiado anteriormente. Este salto es igual al número de campos de Jacobi linealmente independientes que se anulan en los puntos $\gamma_0(0)$ y $\gamma_0(t_0)$ (o sea, a un índice de un punto conjugado $\gamma_0(t_0)$). En realidad, cada uno de estos campos de Jacobi define la variación $\tilde{\alpha}(u)$ de la trayectoria $\gamma_0(t)$ en el espacio Ω , a lo largo del cual el hessiano $d^2 E$ está definido negativamente. Hemos mostrado anteriormente este efecto: aquí solamente vamos a recordarlo (véase la fig. 108). De manera que pasando por cada punto conjugado t_0 , añadimos a la función $\lambda(t)$ el índice de este punto conjugado, por consiguiente, al llegar al punto $q = \gamma_0(1)$ (que se supone no conjugado con $p = \gamma_0(0)$) obtenemos definitivamente que el valor de $\lambda(1)$ es exactamente:

igual a la suma de los índices (o sea, de la multiplicidad) de todos los puntos conjugados con el punto $p = \gamma_0(0)$ a lo largo de la geodésica $\gamma_0(t)$.

Queda así demostrado el teorema sobre el índice de la funcional E .

§ 22. Aplicaciones del teorema sobre el índice

Ahora vamos a utilizar el teorema demostrado en el § 21 (sobre el índice) para estudiar la estructura topológica de un espacio de bucles $\Omega(M)$, donde M^n es una variedad suave compacta. Actuamos por analogía con la teoría de la dimensión finita, que permite por una función dada en una variedad de dimensión finita construir la partición celular de esta variedad. Ahora, en vez de una variedad de dimensión finita, tomemos una «variedad de dimensión infinita» $\Omega(M) = \Omega(M, p, q)$ de las curvas (camino) suaves a trozos del punto p al punto q .

Consideremos una funcional de acción $E(\gamma)$, donde $\gamma \in \Omega M$; esta funcional será una «función de Morse», si todos sus puntos críticos (o sea, las geodésicas del punto p al punto q) son no degenerados. Como ya hemos aclarado, esto sucederá si, y sólo si, los puntos p y q no son conjugados entre sí (a lo largo de cualquier geodésica que une p y q). Luego, en cada punto crítico de $\gamma_0 \in \Omega M$ de la funcional E surge un número entero, el índice de este punto crítico, o sea, el índice de la geodésica γ_0 (desde el punto p hasta el punto q). Por consiguiente, análogamente al caso de dimensión finita, es posible esperar que en cada punto crítico (es decir, en cada geodésica γ_0) «colgará» una célula de dimensión igual al índice de este punto crítico (o sea, al índice de la geodésica γ_0). De manera que surge la partición celular del espacio ΩM en células, cuyos número y dimensión son definidos por el número y los índices de las geodésicas, que unen los puntos p y q (si p y q no son conjugados).

Puesto que consideremos variedades de Riemann M^n , es posible determinar la distancia entre cualesquiera dos curvas $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega M^n$

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{0 \leq t \leq 1} \rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + \left(\int_0^1 \left(\frac{ds_1(t)}{dt} - \frac{ds_2(t)}{dt} \right)^2 dt \right)^{1/2},$$

donde $s_1(t), s_2(t)$ son las longitudes de los arcos a lo largo de $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$; $\rho(x, y)$ es la distancia en M^n entre los puntos x e y (en una métrica de Riemann dada). Consideremos para cada $a > 0$ un dominio $\Omega^a \subset \Omega M$, o sea, el conjunto de todos los puntos $\gamma \in \Omega M$, para los cuales $E(\gamma) \leq a$. Resulta, que es posible aproximar el conjunto Ω^a mediante una variedad suave de dimensión finita (en cierto sentido exacto).

Fijemos una partición del segmento $[0, 1]$ mediante los puntos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ y designemos por $\Omega(t_0, \dots, t_k)$ a un

subespacio en ΩM , consistente en todas las geodésicas suaves a trozos y que tienen puntos de fractura sólo para valores de los parámetros t iguales a t_0, t_1, \dots, t_k . Connotamos con $\Omega^a(t_0, t_1, \dots, t_k)$ a la intersección $\Omega^a \cap \Omega(t_0, \dots, t_k)$; es decir, todas las líneas geodésicas a trozos a lo largo de las cuales $E \leq a$, son puntos de $\Omega^a(t_0, \dots, t_k)$.

LEMA 1. *Sea M^n una variedad compacta y $\Omega^a \neq \emptyset$. Entonces, para todas las particiones suficientemente pequeñas (t_0, \dots, t_k) del segmento $[0, 1]$, es posible dar al conjunto $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E < a)$ una estructura de variedad suave de dimensión finita.*

DEMOSTRACION. Sea $\varepsilon > 0$ un número pequeño tal, que para cualquier par de puntos con una distancia entre sí no superior a ε , hay una única geodésica que los une en una esfera de radio ε . Escojamos la partición (t_0, \dots, t_k) de tal manera, que para todo i : $t_i - t_{i-1} < \varepsilon^2/a$. Entonces cada geodésica $\gamma \in \Omega^a(t_0, \dots, t_k)$ es definida unívocamente por un juego de $k-1$ puntos: $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{k-1})$. La aplicación $\gamma \rightarrow (\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{k-1}))$ establece un homeomorfismo entre $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E < a)$ y un subconjunto abierto del producto directo $M \times \dots \times M$ ($k-1$) veces. El lema queda demostrado.

Consideremos una función E' , que es la restricción de la funcional E del espacio Ω^a en una variedad suave de dimensión finita $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E < a)$.

LEMA 2. *La función E' es una función suave de Morse en la variedad de dimensión finita $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E < a)$. Los puntos críticos de esta función son exactamente puntos críticos de la funcional E en $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E < a)$, o sea, las geodésicas (sin fracturas) que van de p a q y tienen una longitud menor que \sqrt{a} . El índice de un punto crítico de la función es exactamente igual a la geodésica correspondiente. Para cualquier $b < a$ la variedad $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E \leq b)$ es un retracto de deformación del conjunto $\Omega^b = (E \leq b)$.*

DEMOSTRACION. Presentemos la deformación $r: (E \leq b) \rightarrow \Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E \leq b)$. Sean $\gamma \in (E \leq b)$ y (t_0, \dots, t_k) una partición fijada más arriba (bastante pequeña) de $[0, 1]$; consideremos los puntos $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_k)$, y sea $r(\gamma)$ la única geodésica suave a trozos perteneciente a $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E \leq b)$, definida por los puntos $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_k)$. La construcción de una retracción de deformación buscada está mostrada en la fig. 109. Luego, de la fórmula de la primera variación se deduce la afirmación de que los puntos críticos de E' en $\Omega(t_0, \dots, t_k) \cap (E \leq b)$ son exactamente las geodésicas (sin fracturas) que van de p a q . La coincidencia de los índices para E' y E se deduce del carácter local de la definición del campo de Jacobi a lo largo de la geodésica: coinciden los espacios de los campos de Jacobi para la función E' y la funcional E . El lema queda demostrado.

De manera que obtenemos la siguiente afirmación.

COROLARIO. *Sea M^n una variedad compacta (además, en lugar de la compacidad se podría suponer sólo la completitud de la variedad M^n); $p, q \in M^n$ es un par de puntos no conjugados a lo largo de ninguna longitud geodésica que no sobrepasa \sqrt{a} . Entonces el conjunto $\Omega^a = (E \leq a)$ es homotópicamente equivalente a un complejo celular finito,*

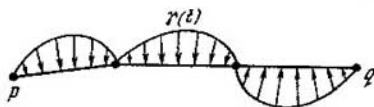


Fig. 109.

en el cual cada célula de dimensión λ corresponde biunívocamente a una geodésica (cuya longitud que no sobrepasa \sqrt{a}), de índice λ .

Tendiendo a $A \rightarrow \infty$ (hacia infinito), obtenemos, que todo el espacio Ω es homotópicamente equivalente a un complejo celular, en el cual cada célula corresponde biunívocamente a una geodésica de p a q , y la dimensión de la célula es igual al índice de esta geodésica.

OBSERVACIÓN. Aquí no vamos a examinar más formalmente el paso al límite $a \rightarrow \infty$, porque este examen exigiría introducir una noción topológica tal, como límite directo de los espacios dilatantes.

Ahora examinamos el espacio $\Omega^*(M, p, q)$ de todas las curvas continuas en la variedad M^n , que van del punto p al punto q . Resulta que los espacios $\Omega^* M$ y ΩM son homotópicamente equivalentes, y por eso la partición celular de ΩM engendra también la partición celular del espacio $\Omega^* M$. Consideremos una inmersión (encaje) natural $i: \Omega \rightarrow \Omega^*$. Suponemos que la topología en el espacio Ω^* se introduce con ayuda de una métrica $\max_{0 \leq t \leq 1} \rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.

donde $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega^*$, y ρ es una distancia en la variedad de Riemann M^n (A veces a esta topología se la llama topología compacto-abierta). De la comparación de las topologías en Ω y Ω^* (véase más arriba) se deduce fácilmente, que la aplicación de la inmersión i es continua.

LEMA 3. *Los espacios Ω y Ω^* son homotópicamente equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Construyamos en Ω^* una función continua $g, 0 \leq g(\gamma) \leq 1$, tal, que de la desigualdad $|t - t'| < 2g(\gamma)$ se deduce que los puntos $\gamma(t)$ y $\gamma(t')$ están unidos por la única geodésica minimal. Sea $f: M^n \rightarrow [0, 1]$ una función continua arbitraria en la variedad compacta M^n , que toma valores de 0 a 1. Designemos por $\varepsilon_1(r)$ (donde $r \in [0, 1]$) a un número máximo real tal, que cualquier par de puntos de $f^{-1}[0, r]$, con una distancia entre sí no mayor de $\varepsilon_1(r)$, están unidos con una única geodésica minimal. Claro que con el crecimiento de r , $\varepsilon_1(r)$ es una función monótona no creciente.

Consideremos una función $\varepsilon_2(r)$ tal, que $0 \leq \varepsilon_2(r) < \varepsilon_1(r)$. Supongamos $\varepsilon(\gamma) = \varepsilon_2(\max f \gamma(t))$; obtenemos una aplicación continua $\varepsilon: \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$. Por construcción de la función ε_2 tenemos, que cualquier par de puntos en una curva $\gamma \subset M^n$, con una distancia entre sí no mayor de $\varepsilon(\gamma)$, está unido con una geodésica minimal única. Consideremos una nueva función:

$$\tau(\gamma, \alpha) = (\alpha - 1)\varepsilon(\gamma) + \max_{|t-t'| \leq \alpha} \rho(\gamma(t), \gamma(t'));$$

aquí $\tau: \Omega^* \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. La función τ crece en forma estrictamente monótona al cambiarse el argumento α desde 0 hasta 1 y $\tau(\gamma, 0) < 0 \leq \tau(\gamma, 1)$. Por consiguiente, para cada $\gamma \in \Omega^*$ hay un único $\alpha_0 \in (0, 1)$ tal, que $\tau(\gamma, \alpha_0) = 0$. Definitivamente, supongamos $\alpha_0 = 2g(\gamma)$. Si $\alpha = |t - t'| \leq \alpha_0 = 2g(\gamma)$, entonces $\tau(\gamma, \alpha) \leq \tau(\gamma, \alpha_0) = 0$, o sea, $\tau(\gamma, \alpha) = (\alpha - 1)\varepsilon(\gamma) + \max_{|t-t'| \leq \alpha} \rho(\gamma(t), \gamma(t')) \leq 0$, es decir, $\rho(\gamma(t), \gamma(t')) \leq (1 - \alpha)\varepsilon(\gamma) \leq \varepsilon(\gamma)$, por lo tanto, $\gamma(t)$ y $\gamma(t')$ están unidos por una geodésica minimal

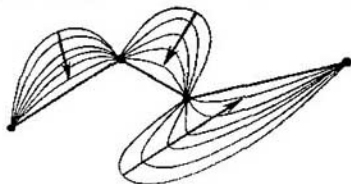


Fig. 110.

única (véase más arriba la definición de $\varepsilon(\gamma)$). La construcción de la función $g(\gamma)$ ha concluido. Definamos la aplicación continua $r: \Omega^* \rightarrow \Omega$, haciendo: $r(\gamma)$, una curva unívocamente definida tal, que $r(\gamma)$ coincide con γ para valores del parámetro $t = 0, g(\gamma), 2g(\gamma), \dots, k \cdot g(\gamma)$ y para aquí $k = [1/\varepsilon(\gamma)]$ (parte entera); la trayectoria $r(\gamma)$ es una geodésica en cada intervalo $[p \cdot g(\gamma), (p+1)g(\gamma)]$, $0 \leq p \leq k-1$. Al igual que más arriba, se verifica directamente que las aplicaciones ir y ri son homotópicas a las aplicaciones idénticas (véase la fig. 110). El lema queda demostrado.

Así, ha sido demostrado definitivamente el siguiente teorema.

TEOREMA 1. Sea M^n una variedad de Riemann compacta (o entera); sea p y q un par de puntos en M^n no conjugados a lo largo de ninguna geodésica. Entonces, el espacio de las curvas continuas $\Omega^*(M^n, p, q)$ (que es equivalente homotópicamente al espacio $\Omega(M^n, p, q)$), tiene un tipo homotópico de un complejo celular numerable, en el cual a cada

geodésica del punto p al punto q con índice λ le corresponde exactamente una célula de dimensión λ .

OBSERVACION. Si está fijada la geodésica γ_0 , entonces surge una célula correspondiente σ^λ (λ es índice de γ_0) como un conjunto de trayectorias que se obtienen de γ_0 mediante perturbaciones de γ_0 en dirección hacia todos los campos de Jacobi a lo largo de γ_0 (véase la fig. 111).

Veamos algunas aplicaciones del teorema demostrado. Apliquemos este teorema al problema de cálculo de los grupos de las homología (y cohomología) con coeficientes enteros de un espacio de bucles ΩS^n , donde S^n es una esfera n -dimensional. Introduzcamos

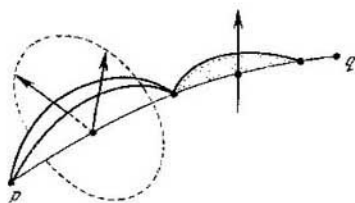


Fig. 111. Índice $\lambda = 3$. Esta geodésica γ_0 corresponde a la célula tridimensional σ_3 .

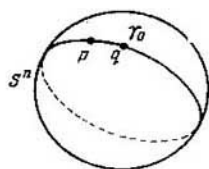


Fig. 112.

en la esfera S^n una métrica de Riemann estándar, y sean p y q dos puntos suficientemente cercanos en una esfera S . Entonces es posible considerar, que p y q no están conjugados a lo largo de ninguna geodésica en S^n (por ejemplo, con el punto p está conjugado sólo un punto en la esfera, el punto diametralmente opuesto $-p$). Entonces los puntos p y q están unidos con un número numerable de las geodésicas $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$, donde γ_0 es un arco más corto de un círculo máximo en el cual se hallan los puntos p y q (véase la fig. 112). Designemos a la circunferencia del círculo máximo por d ; entonces $\gamma_1 = d + \gamma_0$; $\gamma_2 = d + d + \gamma_0$; $\gamma_3 = d + d + d + \gamma_0$, etc. Claro que el índice $\lambda(\gamma_k)$ de la geodésica γ_k es igual a $k(n-1)$. Aquí hemos utilizado el hecho de que los puntos p y $-p$ son conjugados con una multiplicidad $n-1$: existen $n-1$ variaciones geodésicas (giros) del arco del círculo máximo que une los puntos p y $-p$. Se deduce del teorema anteriormente demostrado, que el subconjunto de bucles ΩS^n tiene un tipo homotópico del complejo celular, que posee en cada de las dimensiones $0, n-1, 2(n-1), 3(n-1), \dots$ exactamente una célula (no hay células en otras dimensiones). De aquí podemos obtener la información sobre las homología $H_*(\Omega S^n; \mathbb{Z})$.

Al principio supongamos que $n > 2$; entonces cada célula de las arriba indicadas $\{\sigma^{k(n-1)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ es un (co)ciclo (ya

que dos dimensiones vecinas no contienen células en absoluto), o sea,

$$H_p(\Omega S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p = k(n-1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{para los restantes valores de } p. \end{cases}$$

En particular, $H_p(\Omega S^n; \mathbb{Z}) \cong H^p(\Omega S^n; \mathbb{Z})$. Se hacen un poco más complicados los razonamientos para $n = 2$. En este caso en cada dimensión: 0, 1, 2, 3, 4, ... hay exactamente una célula, por eso la trivialidad de un operador de frontera $\sigma: C_p \rightarrow C_{p-1}$ ya no se deduce de las consideraciones anteriormente dadas. Vamos a estudiar con más detalle la estructura del armazón tridimensional $(\Omega)^{(3)}$ de un espacio de bucles $\Omega(S^2)$. Obtenemos de lo demostrado más arriba: $(\Omega S^2)^{(3)} = \sigma^0 \cup \sigma^1 \cup \sigma^2 \cup \sigma^3$. Recordemos que de un espacio fibrado estándar $E \rightarrow S^2$ (donde E es un espacio de curvas en S^2 , salientes de un punto fijado en S^2), se deduce la relación: $\pi_i(S^2) = \pi_{i-1}(\Omega)$, $i \geq 1$. Como se señala en el § 21 de la parte II del libro [1], $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$, o sea, $\pi_1(\Omega) = \mathbb{Z}$. Luego (véase [1], p. II, § 22), $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ (o sea, $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z}$). Ya que $H_1(\Omega; \mathbb{Z}) = \{\text{grupo conmutado } \pi_1(\Omega)\}$, entonces $H_1(\Omega; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Consiguientemente, la frontera de la célula σ^2 se contrae por $S^1 = \sigma^0 \cup \sigma^1$ en un punto, es decir, el armazón bidimensional $(\Omega)^{(2)}$ es equivalente homotópicamente al ramo $S^1 \vee S^2$ (véase § 4). Puesto que $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z}$, entonces una célula tridimensional σ^3 al pegarse a $S^1 \vee S^2$ debe suprimir la acción del grupo fundamental $\pi_1(S^1)$ en $\pi_2(S^2 \vee S^1) = \mathbb{Z}$, por consiguiente, $(\Omega)^{(3)}$ es equivalente homotópicamente al producto $S^1 \times S^2$. Puesto que las (co)homologías bidimensionales de ΩS^2 son definidas completamente por un armazón tridimensional $(\Omega S^2)^{(3)}$, entonces obtenemos, que $H_2(\Omega S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $H^2(\Omega; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Designemos a las generatrices de los grupos de cohomología $H^1(\Omega; \mathbb{Z})$ y $H^2(\Omega; \mathbb{Z})$ por a y b respectivamente ($\deg(a) = 1$; $\deg(b) = 2$). Claro que $a^2 = 0$ en el anillo $H^*(\Omega; \mathbb{Z})$.

Recordemos la definición del H -espacio. Un espacio topológico Y se denomina H -espacio, si está definida la operación de multiplicación $\mu: Y \times Y \rightarrow Y$, que tiene una unidad «homotópica» (véase el § 7). Examinemos las aplicaciones

$$Y \xrightarrow{j_1} Y \vee Y \xrightarrow{\mu} Y,$$

$$Y \xrightarrow{j_2} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y.$$

Aquí $j_1(y) = (y, y_0)$, $j_2(y) = (y_0, y)$, $y_0 \in Y$ es una «unidad homotópica». Las aplicaciones μ_{j_α} son homotópicas a la aplicación idéntica $Y \rightarrow Y$.

Recordemos también, que el espacio de bucles ΩM es un H -espacio. La aplicación $\mu: \Omega M \times \Omega M \rightarrow \Omega M$ se da mediante el producto de las curvas (véase el § 7)

$$f \circ g = \mu(f, g).$$

es decir, a dos bucles se les pone en correspondencia un bucle, obtenido mediante un paso sucesivo de ambos bucles.

Según el teorema de Hopf (véase el § 7), el álgebra de cohomologías de cualquier H -espacio sobre el campo de los números racionales es isomorfa al producto tensorial $\Lambda(x_1, \dots, x_t) \otimes \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_s]$, donde $\Lambda(x_1, \dots, x_t)$ es un álgebra exterior de las generatrices de dimensiones impares x_1, \dots, x_t ; $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_s]$ es un álgebra de polinomios de las generatrices de dimensiones pares y_1, \dots, y_s . En particular, si el H -espacio es de dimensión finita, entonces su álgebra de cohomologías es isomorfa al álgebra $\Lambda(x_1, \dots, x_t)$.

Puesto que el espacio $\Omega(S^2)$ es un H -espacio, entonces $H^*(\Omega(S^2)) \cong \Lambda(x_1, \dots, x_t) \otimes \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_s]$. Ya hemos presentado dos generatrices: $x_1 = a$ ($\deg(a) = 1$), $y_1 = b$ ($\deg(b) = 2$); por consiguiente, todos los grados de b^k , $k = 1, 2, 3, \dots$, son distintos de cero en el álgebra $H^*(\Omega(S^2))$ y, de esta manera, $H^*(\Omega(S^2))$ contiene la siguiente subálgebra: $\Lambda(a) \otimes \mathbb{Q}[b]$. Afirmamos, que esta subálgebra coincide completamente con el álgebra $H^*(\Omega(S^2))$. Realmente, la subálgebra $\Lambda(a) \otimes \mathbb{Q}[b]$ contiene en cada dimensión una generatriz aditiva: b^q (en las dimensiones de tipo $2q$, $q = 1, 2, 3, \dots$) o $a \cdot b^q$ (en las dimensiones de tipo $2q + 1$, $q = 0, 1, 2, 3, \dots$). De otro lado, fue mostrado anteriormente que la partición celular del espacio $\Omega(S^2)$ contiene exactamente una célula en cada dimensión; por eso los cociclos más arriba presentados agotan completamente el álgebra $H^*(\Omega(S^2))$. De aquí en particular se deduce para las homologías con coeficientes enteros: $H_p(\Omega(S^2); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ para cualquier $p = 0, 1, 2, 3, \dots$, porque todas las células σ^i son ciclos:

La respuesta definitiva es:

$$1) H^p(\Omega(S^n); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } p = k(n-1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{para los } p \text{ restantes;} \end{cases}$$

$$2) H^*(\Omega(S^{2n+1}); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[b_{2n}];$$

$$H^*(\Omega(S^{2n}); \mathbb{Q}) = \Lambda(a_{2n-1}) \otimes \mathbb{Q}[b_{4n-2}].$$

También demostraremos cómo la información sobre las homotopías y homologías de la variedad M permite formular opiniones completamente determinadas sobre la conducta (y existencia) de las geodésicas sobre una variedad de Riemann M^n . Por ejemplo, utilicemos la información arriba obtenida sobre las homologías del espacio de bucles $\Omega(S^n)$; $n \geq 2$.

PROPOSICIÓN 1. *Sea M^n una variedad de Riemann homotópicamente equivalente a una esfera S^n , $n \geq 2$. Entonces, cualesquiera dos puntos $p, q \in M^n$ están unidos por un sinnúmero de geodésicas.*

Esta proposición se deduce inmediatamente del teorema arriba demostrado sobre la estructura del espacio de bucles ΩM^n y de la información sobre las homologías de este espacio.

OBSERVACION. Las geodésicas, cuya existencia es establecida en el presente teorema, son distintos puntos del espacio funcional ΩM^n , pero geoméricamente (después de su realización en forma de curvas suaves en M^n) algunas de ellas pueden coincidir (véase, por ejemplo, las geodésicas en la esfera S^n). Hablando en general, el problema sobre la obtención del número de geodésicas geoméricamente distintas exige un examen complementario.

Sea M^n una variedad suave compacta y sea $i > 0$ el primer número de un grupo $\pi_i(M^n)$ tal, que $\pi_i(M^n) \neq 0$. Entonces para cualesquiera dos puntos no conjugados, $p, q \in M^n$ hay una geodésica de índice i que los une. En realidad, ya que $\pi_i(M^n) = \pi_{i-1}(\Omega M^n)$, entonces el grupo $H_{i-1}(\Omega(M^n))$ es distinto de cero; por consiguiente, según el teorema sobre la descomposición celular del espacio de bucles, obtenemos que la funcional E en ΩM^n debe tener, por lo menos, un punto crítico (es decir, geodésico) de índice i . La afirmación queda demostrada.

Si la variedad tiene una curvatura negativa (no positiva) por todas las direcciones bidimensionales, entonces (como será mostrado en el § 23) todos los puntos críticos de la funcional E en $\Omega(M^n, p, q)$ tienen el índice 0 (mínimos locales).

PROBLEMA 1. Deducir de aquí que las geodésicas que unen los puntos p y q , están en correspondencia biunívoca natural con los elementos del grupo $\pi_1(M^n)$.

§ 23. Problema periódico del cálculo de variaciones

Ya hemos examinado en detalle un problema unidimensional de variaciones en una variedad de Riemann M^n , relacionado con las funcionales de longitud $L(\gamma)$ y de la acción (operación) $E(\gamma)$, donde $\gamma \in \Omega(M^n, p, q)$, p, q , son dos puntos dados en M^n . Este problema de variaciones se llama «problema con los extremos sujetos», puesto que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $\gamma \in \Omega(M^n; p, q)$. Un significado importante tienen los llamados «extremos cerrados», que ahora pasamos a estudiar. El estudio de este problema se diferencia un poco del «problema con los extremos fijados».

El problema periódico se plantea de la siguiente manera. Consideremos una variedad de Riemann suave compacta M^n ; con $\Pi(M^n)$ designamos al espacio de todas las curvas suaves cerradas en M^n , es decir, un punto del espacio $\Pi(M^n)$ es una aplicación suave $\gamma: S^1 \rightarrow M^n$, donde $S^1 = S^1(t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$ es una circunferencia perteneciente a una coordenada angular estándar t , con esto no se fija un punto inicial.

OBSERVACION. El espacio $\Pi(M^n)$ (la topología se introduce en éste de la misma manera que en el espacio $\Omega(M^n, p, q)$, véase más arriba) se diferencia del espacio $\bigcup_p \Omega(M^n; p, p) = \tilde{\Pi}(M)$, o sea, $p = q$;

hay una aplicación (¡no espacio fibrado!) $\Pi(M^n, p, p) \rightarrow \Pi(M^n)$, donde la preimagen del punto es una circunferencia. El conjunto de los componentes linealmente conexos del espacio $\Pi(M^n)$ es, por definición, el conjunto de las clases homotópicas «libres» de las aplicaciones $S^1 \rightarrow M^n$. Según el § 17 de la parte II del libro [1], las clases homotópicas se determinan por las clases de los elementos conjugados en el grupo $\pi_1(M^n)$.

CONCLUSION. Las funcionales tolerables en las curvas de la variedad M^n tienen necesariamente mínimos en cada componente linealmente conexo del espacio $\Pi(M^n)$. Por consiguiente, el número de mínimos es no menor que el número de clases de conjugación en el grupo $\pi_1(M^n)$.

En este párrafo utilizaremos mucho los métodos desarrollados más arriba para estudiar extremales en el espacio $\Omega(M^n, p, q)$, y por eso no repetiremos las construcciones análogas.

El espacio $\Pi(M^n)$, al igual que el espacio $\Omega(M^n, p, q)$, puede ser convertido de una manera natural en una «variedad de dimensión infinita»; si $\gamma \in \Pi(M^n)$ es una trayectoria cerrada (recordemos, que bajo el término «trayectoria» comprendemos una trayectoria con parametrización; es decir, las trayectorias con distintas parametrizaciones son distintos puntos del espacio $\Pi(M)$), entonces, un «espacio tangente» $T_\gamma \Pi(M)$ respecto a una «variedad» $\Pi(M)$ en un punto $\gamma \in \Pi(M)$ se compone de todos los campos vectoriales suaves a lo largo de γ (o sea, de los campos vectoriales periódicos). En el espacio $\Pi(M)$ ambas funcionales: $L(\gamma)$ y $E(\gamma)$ (longitud y acción de la curva o camino) están definidas lo mismo que en el caso del espacio $\Omega(M, p, q)$. Vamos a estudiar las extremales de las funcionales E y L .

LEMA 1. Si $\gamma_0 \in \Pi(M)$ es una extremal cerrada de la funcional E , entonces γ_0 es una geodésica cerrada perteneciente a un parámetro que es proporcional a un parámetro natural.

La demostración se deduce inmediatamente de los teoremas correspondientes para las extremales del espacio $\Omega(M, p, q)$. Si $\gamma(t)$ es una extremal periódica para una funcional de longitud L , entonces todas las trayectorias $\gamma(t')$ obtenidas de $\gamma(t)$ con ayuda de los cambios suaves del parámetro $t \rightarrow t'$, también son extremales de la funcional L . Por consiguiente, los puntos críticos de la funcional L no están aislados en el espacio $\Pi(M)$; en particular, ellos no pueden ser en ningún sentido puntos críticos «aislados y no degenerados» para la funcional E .

Por eso (al igual que en el caso del espacio $\Omega(M, p, q)$) prestamos mucha atención al estudio de las extremales de la funcional E . Notemos que la geodésica cerrada $\gamma_0(t) \in \Pi(M)$ puede ser múltiple, en el sentido de que con el cambio de t desde 0 hasta 1 el conjunto $\{\gamma(t)\} \subset M^n$, que es una curva suave, está recorrido varias veces; véase la fig. 113. Las geodésicas $\gamma(t)$ representadas en M^n por una

curva suave que está recorrido una vez, se llaman geodésicas simples (de multiplicidad uno).

Por el contrario, si se da cierta geodésica cerrada simple, ella define una sucesión discreta infinita de las geodésicas cerradas obtenidas de una geodésica inicial mediante un recorrido repetido (con velocidades mayores que la velocidad de recorrido de la geodésica inicial). Todas estas trayectorias son distintos puntos del espacio $\Pi(M)$. Por ejemplo, si una trayectoria inicial $\gamma_0(t)$ definía un

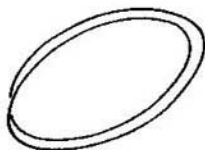


Fig. 113. Geodésica de multiplicidad 2.

elemento no nulo de un grupo fundamental $\pi_1(M)$ (más exactamente: su clase de conjugación es distinta de un elemento unidad), entonces las trayectorias de mayor multiplicidad a él, pertenecen ya a otras clases de la conjugación del grupo $\pi_1(M)$.

Al igual que en el caso de las geodésicas con extremos fijados, es posible confrontar a cada geodésica cerrada cierto número entero que, por analogía con el caso precedente, lo llamaremos grado de degeneración de la geodésica. Ahora daremos la definición; pero si el grado de degeneración es igual a cero, entonces la geodésica se llamará no degenerada.

Para definir correctamente el grado de degeneración de una geodésica cerrada, consideremos un hessiano d^2M (véase su definición y sus propiedades más arriba, en el párrafo dedicado al estudio de las geodésicas con los extremos fijados). Anteriormente hemos demostrado la llamada «fórmula de la segunda variación» que tiene la siguiente forma

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(\tilde{\alpha})}{\partial u_1 \partial u_2} (0, 0) = - \int_0^1 \langle v_2, \nabla_{\dot{\gamma}_0} \nabla_{\dot{\gamma}_2} v_1 + R(\dot{\gamma}_0, \dot{\gamma}_1) \dot{\gamma}_0 \rangle dt,$$

donde: R , es un tensor de curvatura de Riemann; $\dot{\gamma}_0$, es un vector de velocidad de la geodésica; $\dot{\gamma}_0$, y los campos vectoriales v_1 y v_2 , circunscriben una variación biparamétrica, es decir, un par de los «vectores tangentes» respecto a una variedad de dimensión infinita HM en el punto $\dot{\gamma}_0$. Como fue señalado más arriba, los campos vectoriales v_1 y v_2 están definidos a lo largo de toda la trayectoria $\dot{\gamma}_0$ y son

suaves y periódicos. Puesto que el hessiano d^2E define una forma simétrica bilineal en un espacio tangente $T_{\gamma_0}(\Pi M)$, entonces, por consiguiente, es posible dar esta forma unívocamente mediante un operador diferencial lineal correspondiente a ella, el cual evidentemente, es del tipo: $D = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 - R(\dot{\gamma}_0) \dot{\gamma}_0$. Aquí procedemos por analogía con el caso de dimensión finita, cuando el hecho de dar una forma bilineal significa dar un operador D con cuya ayuda la forma buscada B se define por la fórmula $B(x, y) = \langle x, Dy \rangle$.

En nuestro caso la acción del operador D en los «vectores tangentes» $v \in T_{\gamma_0}(\Pi M)$ (es decir, en los campos suaves periódicos definidos a lo largo de la geodésica cerrada γ_0), se realiza según la siguiente fórmula:

$$D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v) \dot{\gamma}_0 = -[(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 + R(\dot{\gamma}_0) \dot{\gamma}_0](v).$$

Recordemos, que un «vector tangente» v (o sea, un campo vectorial periódico) se llama de Jacobi, si este campo es anulado por el operador D , es decir, si es solución de la siguiente ecuación diferencial: $D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v) \dot{\gamma}_0 = 0$. Claro que esta definición imita completamente la situación de las geodésicas con extremos fijados. De manera que los campos de Jacobi («vectores tangentes» de Jacobi) son elementos del núcleo del operador lineal D que actúa en el espacio tangente $T_{\gamma_0}(\Pi M)$.

DEFINICIÓN 1. Al grado de degeneración de la geodésica cerrada γ_0 se le llamará dimensión del núcleo del operador D .

Al igual que en el caso, de las geodésicas con extremos sujetos, se demuestra que este número es finito (véase más arriba).

DEFINICIÓN 2. A una geodésica cerrada la llamaremos no degenerada, si su grado de degeneración es igual a cero.

Para simplificar, nos limitamos básicamente en adelante al examen de las geodésicas cerradas no degeneradas. Resulta que a cada geodésica de este tipo le corresponde naturalmente un número entero llamado «índice de la geodésica». Para su definición recurrimos de nuevo al operador D . El índice puede ser definido de una manera un poco distinta. En efecto, puesto que el índice era igual al número de los cuadrados negativos después de la reducción a la forma canónica del hessiano d^2E en un plano tangente $T_{\gamma_0}(\Pi M)$ entonces, por consiguiente, esta forma está definida negativamente a lo largo de cada «vector tangente» $v \in T_{\gamma_0}(\Pi M)$ correspondiente a uno de los cuadrados negativos de la forma d^2E , de esta manera este «vector tangente» es valor propio del operador D con número propio $\lambda < 0$. Así, el índice del hessiano d^2E se podría definir simplemente como un número de soluciones linealmente independientes de la siguiente ecuación

diferencial: $D(v) = \lambda v$, $\lambda < 0$ (es un sistema de las ecuaciones diferenciales con el parámetro λ , que es un número propio). Por eso las soluciones de la ecuación $D(v) = \lambda v$, $\lambda < 0$, son campos vectoriales periódicos suaves a lo largo de la geodésica γ_0 (si es que estas soluciones existen en general). Aquí la situación es distinta a la del caso de los «vectores tangentes» de Jacobi, pues allí siempre existe por lo menos una solución nula de un sistema homogénea; si $\lambda < 0$ puede no haber solución: en este caso diremos, que el índice de una geodésica cerrada es igual a cero.

DEFINICIÓN 3 Se denomina índice de una geodésica cerrada no degenerada, el número de las soluciones linealmente independientes del sistema de ecuaciones diferenciales

$$D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = 0.$$

Esta definición es también aplicable al caso de geodésicas con extremos sujetos.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE. Por supuesto el índice de la geodésica cerrada que hemos definido está relacionado también con la distribución a lo largo de esta geodésica de los puntos conjugados a un punto inicial en la misma, pero esta relación es de un carácter más complicado que en el caso de las geodésicas con los extremos sujetos; y por eso no vamos a entrar en detalles.

PROBLEMA 1. Demostrar que el índice es no menor que el número de los puntos conjugados (pero puede ser no igual).

En cierto sentido, el estudio del «problema periódico del cálculo de las variaciones» es más complicado que el estudio de las geodésicas con extremos sujetos. El carácter de las dificultades surgidas es ilustrado en medida suficiente con la presencia de las geodésicas múltiples; por ejemplo, el problema sobre el cálculo de la cantidad de las geodésicas cerradas simples (o sea, no múltiples) no es trivial ni mucho menos.

Para simplificar el problema del estudio de las geodésicas cerradas, consideremos aquí sólo un ejemplo: el caso de las variedades de Riemann de curvatura negativa, es decir, de tales variedades en las cuales todas las curvaturas por todas las direcciones bidimensionales son negativas. Conocemos ejemplos de tales variedades: el plano de Lobachevski con una métrica estándar de curvatura negativa constante; las variedades cerradas suaves bidimensionales obtenidas por la factorización del plano de Lobachevski según la acción de grupos discretos que actúan con las isometrías en el plano de Lobachevski y son isomorfos a los grupos fundamentales de las superficies (véase [1], p. II, § 20 sobre los grupos cristalográficos en el plano de Lobachevski). Para simplificar, supongamos a veces la compacidad de la variedad estudiada.

TEOREMA 1. *Sea M una variedad compacta suave de Riemann de curvatura negativa. Entonces, en cada clase unidimensional homotópica libre hay una geodésica única cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos alguna clase de los bucles cerrados libres recíprocamente homotópicos entre sí. Supongamos que estudiamos sólo trayectorias cerradas suaves; a cada trayectoria le confrontemos el valor de la funcional en la misma; tomemos un número c igual a la cota inferior de todos estos valores; hablando en general, existe una sucesión infinita de bucles cerrados cuyas longitudes convergen al número c . En virtud de la compacidad de variedad, es posible escoger de esta sucesión una sucesión de curvas, las cuales convergen punto a punto a cierta curva suave γ_0 , la cual, como es fácil verificarlo, será una geodésica cerrada, y el valor de la funcional E en esta geodésica, igual al número c . Queda por demostrar la unicidad de esta geodésica. Para esto necesitamos de un lema importante, cuyo significado no se agota sólo por la demostración de nuestro teorema.

LEMA 2. *Sea γ_0 una geodésica cerrada en una variedad M de curvatura negativa (aquí es posible no suponer compacta la variedad M). Entonces, esta geodésica es no generada y su índice es igual a cero, o sea, en otras palabras, las ecuaciones diferenciales $D(v) = \lambda v$, $\lambda < 0$, no tienen ni una sola solución y la ecuación $D(v) = 0$ tiene sólo una solución nula.*

DEMOSTRACIÓN. Al principio consideremos un caso de la ecuación $D(v) = 0$. Es necesario demostrar que ella no tiene soluciones no nulas. Sea v una solución no nula. Entonces, tenemos:

$(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0 = 0$, de aquí $\langle (\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v, v \rangle = -\langle R(\dot{\gamma}_0, v)\dot{\gamma}_0, v \rangle > 0$, ya que la magnitud $\langle R(\dot{\gamma}_0, v) \times \dot{\gamma}_0, v \rangle$ es precisamente curvatura por la dirección bidimensional dada en cada punto de la trayectoria γ_0 por dos vectores: $\dot{\gamma}_0$ y v . De aquí

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle &= \nabla_{\dot{\gamma}_0} \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle = \\ &= \langle (\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v, v \rangle + \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, \nabla_{\dot{\gamma}_0} v \rangle = \langle (\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v, v \rangle + |\nabla_{\dot{\gamma}_0} v|^2 > 0, \end{aligned}$$

es decir, la función $\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle$ crece monótona y estrictamente con el crecimiento de t a lo largo de $\gamma_0(t)$.

Consideremos en la trayectoria $\gamma_0(t)$ un punto fijado arbitrario, por ejemplo, punto $\gamma_0(0)$. La solución $v(t)$ es una función del parámetro t ; estudiemos la conducta de esta solución con el cambio de t . Primer caso: en el punto $\gamma_0(0)$ se cumple la desigualdad $\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle|_{t=0} \geq 0$. Entonces tenemos:

$$\frac{d}{dt} \langle v, v \rangle = \nabla_{\dot{\gamma}_0} \langle v, v \rangle = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle > 0 \text{ para todo } t > 0,$$

puesto que $\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle$ es una función monótona y estrictamente creciente. Segundo caso: en el punto $\gamma_0(0)$ se cumple la desigualdad $\langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v, v \rangle|_{t=0} < 0$. Entonces consideremos en lugar de la trayectoria $\gamma_0(t)$ una trayectoria $\gamma_0(-t)$, cambiando el parámetro t ; con esto en cada punto el vector de velocidad $\dot{\gamma}_0$ se cambiará por el opuesto $-\dot{\gamma}_0$; por consiguiente

$$\frac{d}{dt} \langle v, v \rangle|_{t \rightarrow -t} = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0(-t)} v; v \rangle - 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}_0} v; v \rangle > 0$$

para todo $t > 0$. De manera que es posible considerar, que bien a lo largo de la trayectoria $\gamma_0(t)$ (o sea con dirección positiva del parámetro), o bien a lo largo de la trayectoria $\gamma_0(-t)$ (o sea con dirección negativa del parámetro) el módulo del vector v crece monótona y estrictamente pero, puesto que la trayectoria es cerrada, dentro de algún tiempo volveremos al punto inicial, pero con un mayor módulo del vector v ; puesto que se supuso suave la función v a lo largo de γ_0 , entonces obtenemos una contradicción. El lema está demostrado para la ecuación $D(v) = 0$. Ahora consideremos la ecuación: $D(v) = \lambda v$, $\lambda < 0$. Como $D(v) = -(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v - R(\dot{\gamma}_0; v) \dot{\gamma}_0 = \lambda v$, entonces

$$(\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v + R(\dot{\gamma}_0, v) \dot{\gamma}_0 = -\lambda v;$$

$$\langle (\nabla_{\dot{\gamma}_0})^2 v, v \rangle = -\langle R(\dot{\gamma}_0, v) \dot{\gamma}_0, v \rangle - \lambda \langle v, v \rangle > 0,$$

puesto que $\lambda < 0$. Precisamente aquí hemos utilizado el hecho que $\lambda < 0$. Los razonamientos sucesivos repiten exactamente los precedentes; de aquí se deduce, que la ecuación $Dv = \lambda v$ no tiene soluciones. El lema queda completamente demostrado.

Volvamos a la demostración del teorema. Consideremos una geodésica cerrada γ_0 en la clase libre dada homotópica (véase la demostración más arriba). Del lema demostrado se deduce que esta geodésica es no degenerada; en particular, es aislada. Puesto que, en virtud del lema, su índice es igual a cero, por consiguiente, la funcional E que se considera como una función en un espacio de curvas cerradas, tiene en el punto γ_0 un mínimo local. Supongamos que en la clase homotópica dada hay varios mínimos locales (o sea, varias geodésicas cerradas). Escogamos cualesquiera dos geodésicas cerradas: γ_0 y γ'_0 . Puesto que ambas son no degeneradas, entonces son aisladas, y la funcional E tiene en ellas su mínimo local estricto (véase la fig. 114). Puesto que γ_0 y γ'_0 pertenecen a una clase homotópica libre, entonces hay una trayectoria τ , que une estos dos puntos en el espacio ΠM , o sea, hay una homotopía que transforma γ_0 en γ'_0 .

Examinemos la conducta de la funcional E acotada en la trayectoria τ . Procediendo por analogía con el caso de dimensión finita, obtenemos, que hay tal trayectoria τ , a lo largo de la cual la funcional E tiene entre los puntos γ_0 y γ'_0 otro punto de ensilladura, $-\alpha$; véase la fig. 115. Pero este punto ya no puede ser un mínimo local, lo que contradice el lema demostrado más arriba. Por consiguiente,

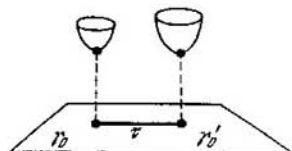


Fig. 114.

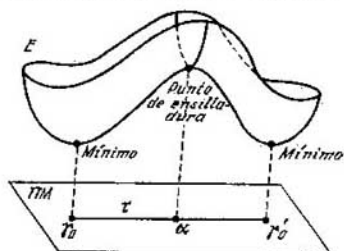


Fig. 115.

Los puntos γ_0 y γ'_0 coinciden. Por lo tanto, en la clase homotópica libre hay sólo un mínimo local; él es también mínimo absoluto, con esto no hay otras geodésicas (salvo las múltiples). El teorema queda demostrado. Del lema demostrado más arriba se deducen resultados útiles también para las variedades no compactas de curvatura negativa.

TEOREMA 2. *Sea M una variedad suave que tiene curvatura negativa por todas las direcciones bidimensionales. Entonces ningunos dos puntos de la variedad M están conjugados a lo largo de ninguna geodésica.*

DEMOSTRACIÓN. Cabe demostrar que la ecuación $D(v) = 0$ no tiene ninguna solución salvo la nula. Esto se deduce inmediatamente del lema, lo que concluye la demostración.

TEOREMA 3. *Supongamos que M sea una variedad suave simplemente conexa de curvatura negativa (por todas las direcciones bidimensionales), cuyos cualesquiera dos puntos pueden ser unidos con una geodésica. Entonces cualquier par de puntos de la variedad M está unido con la única geodésica minimal. La variedad M es difeomorfa a un espacio euclídeo.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que M es simplemente conexa, entonces es conexo el espacio $\Omega(M; p, q)$. En vista de falta de puntos conjugados (véase más arriba), cada geodésica tiene un índice igual a cero. Del teorema de Morse se deduce, que el espacio $\Omega(M; p, q)$ es de tipo homotópico de un complejo celular cuya dimensión es igual a cero, y a cada geodésica le corresponde una célula de dimensión nula (punto). En virtud de la conexión de $\Omega(M; p, q)$ hay sólo un

vértice, y por eso los puntos p y q están unidos por la única geodésica. Quiere decir, que la aplicación exponencial de un espacio tangente en la variedad es biunívoca, lo que demuestra el teorema.

Resulta que el hecho de que cierto grupo es un grupo fundamental de la variedad de curvatura negativa, pone restricciones bastante fuertes en este grupo (recordemos que cualquier grupo con un número finito de generatrices puede ser realizado como un grupo fundamental de una variedad compacta cuadrídimensional; al mismo tiempo, no cada grupo ni mucho menos puede ser un grupo fundamental de una variedad compacta tridimensional, por ejemplo, el grupo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). Tiene lugar la siguiente afirmación.

TEOREMA 4. *Sea M una variedad de curvatura negativa. Si dos elementos del grupo fundamental $\pi_1(M)$ se conmutan, entonces ambos pertenecen a un subgrupo cíclico en el grupo $\pi_1(M)$.*

DEMOSTRACION. Sean a y b dos elementos conmutadores. Si pertenecen a un subgrupo cíclico, la afirmación queda demostrada.

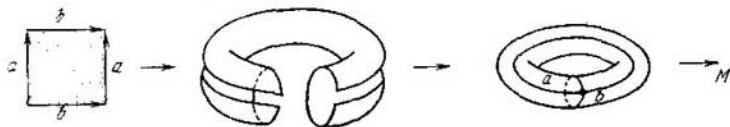


Fig. 116.

Que no pertenezcan a un subgrupo cíclico. Entonces es posible construir una aplicación suave en la variedad M de un toro bidimensional T^2 , que realice la condición de conmutación de dos elementos indicados a y b . Efectivamente, la condición de conmutatividad escrita en forma $aba^{-1}b^{-1} = 1$, define la aplicación del toro T^2 en M (véase la fig. 116). Con esto los elementos conmutadores a y b resultan ser el meridiano y el paralelo de este toro (sumergidos ordinariamente en el mismo). Resulta que la condición de curvatura negativa permite realizar una deformación suave de este toro en tal toro, que estará sumergido en M como una subvariedad completamente geodésica. Hay que examinar para esto tal posición del toro en M , con el cual éste tiene un área mínima. Este teorema sobre la existencia de un toro minimal (o mínimo) lo aceptamos sin demostrar, puesto que el hecho de existir una solución minimal es lo suficiente no trivial y forma el contenido del conocido problema de Plateau. La posición minimal más arriba mencionada la dará el toro como una subvariedad minimal bidimensional en M ; puesto que el toro es bidimensional, es posible escoger en éste coordenadas conformes, respecto a las cuales la aplicación de la inmersión (encaje) del toro en M será una aplicación armónica (es una particularidad de las variedades

bidimensionales para las cuales tiene lugar el teorema de uniformización). De aquí es bastante fácil comprender que el toro será sumergido en M como una subvariedad completamente geodésica, o sea, como tal subvariedad, en la cual cada geodésica (en una métrica de Riemann inducida) es, al mismo tiempo, una geodésica también en una variedad de Riemann abrazadora. Como la variedad abrazadora tenía curvatura negativa, y puesto que el toro es por completo geodésico, por consiguiente, hemos obtenido en el toro bidimensional una métrica de Riemann inducida de curvatura negativa gaussiana (recordemos, que la curvatura gaussiana de una superficie bidimensional es un invariante interior y coincide con su curvatura escalar; o sea, en el caso dado, con la curvatura por dirección bidimensional coincidente con la dirección tangente hacia este toro). Pero no es posible introducir tal métrica en el toro bidimensional, porque entonces la integral de la curvatura gaussiana por el toro sería distinto de cero, lo que contradice la fórmula de Gauss — Bonnet, según la cual esta integral coincide con la característica de Euler del toro (después de la división de la integral por 2π), la cual es igual a cero. La contradicción obtenida demuestra el teorema.

§ 24. Funciones de Morse sobre las variedades tridimensionales y diagramas de Heegard

Consideremos una variedad cerrada conexa compacta suave tridimensional M^3 (para simplificar supongamos la orientabilidad de la variedad M^3); sea $f(x)$ una función suave de Morse sobre esta variedad que tenga exactamente un mínimo (él es absoluto), un máximo (él es absoluto) y cierto número de puntos de índices 1 y 2. Como fue demostrado más arriba, entre todas estas funciones es posible escoger una función tal, que sus puntos críticos sean ordenados en el sentido de que los valores de la función f en M recorren un segmento $[0, 1]$; $f(p) = 0$, $f(p') = 1$, donde p y p' son puntos del mínimo y del máximo respectivamente; luego, todos los puntos críticos de índice 1 se hallan en una superficie de nivel $f = 1/3$; todos los puntos críticos de índice 2 se hallan en una superficie de nivel $f = 2/3$. Designemos a los puntos críticos de índice 1 por x_1, \dots, x_{q_1} , y a los puntos de índice 2 por y_1, \dots, y_{q_2} . De la dualidad de Poincaré (para los coeficientes en el caso de una variedad orientable) se deduce inmediatamente que $q_1 = q_2$, es decir, el número de puntos críticos de índice 1 es igual al número de puntos de índice 2.

Consideremos una superficie de nivel $M^2 = \left\{ f = \frac{1}{2} \right\}$; puesto que en ésta no hay puntos críticos y su dimensión es igual a 2, entonces M^2 es difeomorfa a una variedad cerrada conexa compacta suave bidimensional. Como M^2 es una superficie de nivel y un

borde de una variedad tridimensional que se da con una desigualdad $\frac{1}{2} \leq f \leq 1$, entonces M^2 es una superficie orientable, o sea, es homeomorfa a una esfera con cierta cantidad de asas. Sea r un género (es decir, el número de asas) de la superficie M_r^2 . Por construcción, M_r^2 es una variedad que simultáneamente representa un borde de dos variedades tridimensionales: $\{1/2 \leq f \leq 1\}$ y $\{0 \leq f \leq 1/2\}$, a las cuales las designemos con Π_1 y Π_2 , respectivamente. Para mayor evidencia, se puede considerar cada variedad de Π_i (a propósito, ellas son homeomorfas) como un relleno tridimensional de la superficie bidimensional M_r^2 (de género r), que es sumergida (encajada) regularmente en un espacio euclídeo tridimensional. Así hemos demostrado la siguiente afirmación.

TEOREMA 1. *Cualquier variedad cerrada conexa compacta suave tridimensional puede ser (no unívocamente) representada en forma de «pegadura» de dos variedades tridimensionales Π_i , $i = 1, 2$, con borde, cada una de las cuales es homeomorfa a una variedad tridimensional estándar Π , que es un dominio acotado en un espacio euclídeo tridimensional con una superficie de género r (para cierto r) sumergida en él regularmente. Al mismo tiempo, la pegadura de las variedades Π_1 y Π_2 se realiza por cierto difeomorfismo α de frontera (la frontera es una superficie de género r).*

Esta representación de la variedad M^3 en forma de pegadura de Π_1 y Π_2 , $M^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$, donde $\alpha: M_r^2 \rightarrow M_r^2$, es no unívoca y, además, el número r depende también de la elección de la función de Morse en M^3 . Esta representación de M^3 en forma de pegadura de dos superficies llenadas de género r a menudo se llama «diagrama de Heegard» de la variedad M^3 ; puesto que la pegadura descrita más arriba es dada por el difeomorfismo $\alpha: M_r^2 \rightarrow M_r^2$, a veces se dice que está dado un diagrama de Heegard, si es dado el difeomorfismo α . Claro que si dos difeomorfismos α_1 y α_2 son homotópicas en una clase de difeomorfismos, entonces son difeomorfas sus correspondientes variedades tridimensionales $M^3(\alpha_1)$ y $M^3(\alpha_2)$ (obtenidas mediante la pegadura por α_1 y α_2).

Y viceversa, sean dados un diagrama de Heegard, y $M^3(\alpha)$, su correspondiente variedad tridimensional. Entonces es posible construir en esta variedad $M^3(\alpha)$ una función de Morse f , la cual definirá (véase más arriba) la partición de $M^3(\alpha)$ en la unión de dos variedades Π_1 y Π_2 coincidente con el diagrama de Heegard inicial. En realidad, puesto que $M^3(\alpha) = \Pi_1 \cup \Pi_2$, entonces es suficiente construir en Π_1 y Π_2 las funciones estándares de Morse f_1 y f_2 con puntos críticos de índices 1 y 2 respectivamente y un punto crítico de índice 0 para la función f_1 , y un punto crítico de índice 3 para la función f_2 ; con esto es necesario escoger las funciones f_1 y f_2 de tal modo, que sean constantes en los bordes de Π_1 y Π_2 . Al pegar Π_1

y Π_2 por un difeomorfismo dado, obtenemos en M^3 una función suave de Morse con todas las propiedades necesarias.

Al número r (género de la superficie M^2) se le llama género del diagrama de Heegard.

El teorema más arriba demostrado puede ser reformulado de la siguiente manera:

AFIRMACION. *Cualquier variedad compacta suave conexa tridimensional puede ser representada en forma de una unión de dos esferas tridimensionales con asas, cuyas superficies están identificadas mediante cierto homeomorfismo (difeomorfismo).*

La relación con la formulación precedente se realiza así: cada una de las variedades Π_1 y Π_2 es homeomorfa a una esfera con r asas.

En el caso, cuando $r = 0$, la variedad $M^3(\alpha)$ se obtiene mediante pegadura de dos esferas tridimensionales por el difeomorfismo α de sus fronteras, o sea, por el difeomorfismo de una esfera bidimensional en sí misma. Claro, que entonces $M^3(\alpha)$ es difeomorfa a una esfera tridimensional estándar. Consideremos otro caso aun más no trivial y describamos todos los diagramas de Heegard de género 1, es decir, describamos todas aquellas variedades tridimensionales, que se obtienen por medio de la pegadura de dos toros enteros: $\Pi_1 = S^1 \times D^2$, $\Pi_2 = S^1 \times D^2$ por cierto difeomorfismo de sus fronteras, o sea, por el difeomorfismo $\alpha: T^2 \rightarrow T^2$, donde T^2 es un toro bidimensional.

TEOREMA 2. *Cualquier variedad cerrada conexa compacta suave tridimensional que tolera el diagrama de Heegard de género 1, es homeomorfa (y, por consiguiente, difeomorfa) a una de las siguientes variedades tridimensionales: 1) a la esfera estándar S^3 ; 2) a $S^1 \times S^2$; 3) a los espacios del lente $L^3(1, k)$, donde la variedad $L^3(1, k)$ se obtiene de la esfera tridimensional S^3 mediante su factorización por una acción suave del grupo \mathbb{Z}_p , dada por la siguiente fórmula:*

$$(z, w) \rightarrow (e^{\frac{2\pi i}{p}} \cdot z; e^{\frac{2\pi i k}{p}} \cdot w);$$

aquí (z, w) son coordenadas complejas en $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$; $S^3 = \{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$. El lente $L^3(1, 1) = S^3/\mathbb{Z}_2$ es difeomorfo a un espacio proyectivo $\mathbb{R}P^3$ (para $p = 2$).

DEMOSTRACION. En virtud del teorema precedente basta dar la clasificación de todas las clases de isotopias de difeomorfismos de un toro bidimensional en sí mismo. Puesto que el toro es un espacio de tipo $K(\pi, 1)$, entonces la clasificación homotópica de las aplicaciones continuas del toro en sí mismo se da mediante un conjunto de homomorfismos del grupo fundamental $\pi(S^1 \times S^1)$ en sí mismo; como queremos limitarnos sólo a los difeomorfismos, basta con describir todos los isomorfismos del grupo $\pi_1(S^1 \times S^1)$ en sí mismo. Puesto que el grupo $\pi_1(T^2)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, entonces, por consiguiente, el conjunto de todos los difeomorfismos α del toro en sí

mismo (que conservan su orientación) es dado por las matrices unimodulares con coeficientes enteros $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $ad - bc = 1$; pero si el difeomorfismo cambia la orientación, $ad - bc = -1$. Supongamos que en el toro se han fijado paralelo y meridiano estándares que forman una base en un grupo fundamental (la misma es también un grupo de homología) respecto a la cual se escribe la matriz $\alpha_* = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Hallemos un grupo fundamental de las variedades $M^3(\alpha)$, donde $\alpha_* = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $ad - bc = 1$. Puesto que M^3 está representada en forma de pegadura de dos toros enteros, cada uno de los cuales es equivalente homotópicamente a una circunferencia, entonces el grupo fundamental M^3 se obtiene así: hay que examinar las generatrices γ_1 y γ_2 y dar la relación entre γ_1 y γ_2 que en este caso concreto tiene la forma $\gamma_1^c = \gamma_2^d = 1$ (la escritura del grupo es multiplicativa). De aquí se deduce, que $\pi_1(M^3(\alpha)) = \mathbb{Z}_c$. Así, por ejemplo, si la matriz $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ es de forma $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, entonces la variedad correspondiente M^3 es homeomorfa al producto directo $S^1 \times S^2$, pero si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, entonces M^3 es homeomorfa a la esfera S^3 . En el primer caso $\pi_1(M^3) = \mathbb{Z}$; en el segundo, $\pi_1(M^3) = 0$. Los dos homeomorfismos ahora representados son evidentes geoméricamente: en el primer caso la circunferencia S^1 corresponde a un eje de uno de los toros enteros, y surge una esfera bidimensional como resultado de la identificación de dos discos bidimensionales por una aplicación idéntica de sus fronteras (véase la matriz de pegadura), en el segundo caso dos toros enteros se pegan de tal manera, que cambian de lugares (conservando la orientación del toro); la partición correspondiente de una esfera tridimensional en la suma de dos toros enteros puede ser dada así:

$$\Pi_1 = S^3 \cap \{ |z| \geq |w| \}; \quad \Pi_2 = S^3 \cap \{ |z| \leq |w| \};$$

hay una transformación ortogonal de la esfera que pasa Π_1 a Π_2 (y viceversa) y que es dada por la fórmula $(z, w) \rightarrow (w, z)$. Así hemos hallado el grupo fundamental de variedades $M^3(\alpha)$, donde α da el diagrama de Heegard de género 1. Si el grupo $\pi_1(M^3(\alpha))$ es trivial, entonces $M^3(\alpha)$ es una esfera homotópica (lo que se deduce inmediatamente de la dualidad de Poincaré) y, siendo representada en forma de pegadura de dos toros enteros, es homeomorfa a una esfera estándar.

Si $\pi_1(M^3(\alpha)) = \mathbb{Z}$, entonces $c = 0$, o sea, $ad = 1$; de aquí, o bien $a = d = 1$, o bien $a = d = -1$ (el valor de b es poco importante). Claro que la variedad $M^3(\alpha)$ dada por una matriz con coeficientes enteros $\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ es homeomorfa a $S^1 \times S^2$.

Pero si $\pi_1(M^3(\alpha))$ es no trivial e isomorfo a \mathbb{Z}_c , donde $c \neq 0, 1$, entonces, pasando a un cubrimiento $\tilde{M}^3(\alpha)$ obtenemos, que este cubrimiento admite también el diagrama de Heegard de género 1, porque el cubrimiento sobre el toro es regular y de nuevo se presenta como un toro; puesto que, además, $\tilde{M}^3(\alpha)$ tiene un grupo fundamental trivial, entonces, en virtud del razonamiento precedente, $\tilde{M}^3(\alpha)$ es homeomorfo a una esfera estándar. De aquí se deduce, que la variedad inicial $M^3(\alpha)$ se obtiene de una esfera tridimensional estándar mediante su factorización por la acción del grupo \mathbb{Z}_c (la acción fue escrita más arriba). El teorema queda demostrado.

Una respuesta tan simple puede ser obtenida sólo para los diagramas de Heegard de género 1; pero si la variedad M^3 no admite ni un solo diagrama de Heegard de género 1, entonces, se complica bruscamente la descripción de M^3 .

Completemos la información sobre las variedades de lente $L^3(1, k)$. Como es evidente de la definición de la acción suave de \mathbb{Z}_c on S^3 , un espacio cociente es una variedad, y una proyección $S^3 \rightarrow L^3(1, k)$ es un cubrimiento (la acción del grupo \mathbb{Z}_c en S^3 es libre y efectiva). Es evidente que todas las variedades de lente admiten el diagrama de Heegard de género 1. En realidad, la ecuación $|z| = |w|$ da la partición de S^3 en la suma de dos toros enteros estándares (véase la descripción más arriba): $S^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$. Con la acción

(operación) $(z, w) \rightarrow \left(e^{\frac{2\pi i}{c}} \cdot z, e^{\frac{2\pi i k}{c}} \cdot w \right)$ del grupo \mathbb{Z}_c , el toro $|z| = |w|$ pasa a sí mismo, y por eso, con la factorización de S^3 por la acción de \mathbb{Z}_c , el toro $|z| = |w|$ se proyecta en un toro, que es toro del diagrama de Heegard de la variedad $L^3(1, k)$. Está claro que la aplicación surgida del toro en sí mismo (cubrimiento) puede ser escrita en los términos de la matriz $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Es fácil mostrar, que las variedades de lente $L^{2n-1}(p_1, \dots, p_n)$ $L^{2n-1}(p'_1, \dots, p'_n)$ (dadas por la acción del grupo \mathbb{Z}_c en S^{2n-1} por fórmula:

$$(z_1, \dots, z_n) \rightarrow \left(e^{\frac{2\pi i p_1}{c}} \cdot z_1, e^{\frac{2\pi i p_2}{c}} \cdot z_2, \dots, e^{\frac{2\pi i p_n}{c}} \cdot z_n \right)$$

son homeomorfas, si para cada i la suma $p_i + p'_i$ o la diferencia $p_i - p'_i$ es múltiplo de c .

El problema de la clasificación de todas las variedades tridimensionales no sólo no ha sido resuelto, sino que incluso se ignora, si en cierto exacto sentido es algorítmicamente resoluble (a semejanza de como es resoluble algorítmicamente el problema de la clasificación de las variedades bidimensionales).

Como fue mostrado más arriba, para hacer una lista que contenga notoriamente todas las variedades tridimensionales (este problema no coincide con el de la clasificación siendo una cuestión más simple), basta con hacer una lista de las clases de los difeomorfismos de la superficie de género r en sí misma. Resulta que es posible hacer tal lista. En la fig. 117 se representa una superficie bidimensional de

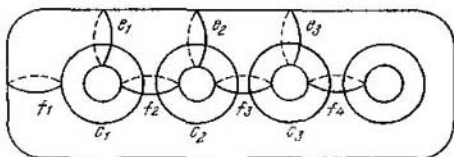


Fig. 117.

género r con tres familias orientadas de las circunferencias c_i, e_i, f_i . A la operación T_s^ε ($\varepsilon = \pm 1$), correspondiente a una circunferencia s en la superficie M_r^2 la llamaremos el siguiente difeomorfismo $T_s^\varepsilon: M_r^2 \rightarrow M_r^2$. Designamos por U_s a un λ -entorno cerrado de la circunferencia s , o sea, U_s es difeomorfo a $S^1 \times [0, 1]$. Definimos T_s^ε con una aplicación idéntica en $M_r^2 \setminus U_s$, y al difeomorfismo $T_s^\varepsilon: U_s \rightarrow U_s$ lo construimos girando una circunferencia $S^1 \times t$ en el ángulo $2\pi t$, al mismo tiempo, el signo de ε depende de la dirección de giro. Tiene lugar el siguiente hecho, muy importante y no trivial (cuya demostración omitimos): cualquier clase de difeomorfismos isotópicos de la superficie bidimensional M_r^2 en sí misma tiene un representante que se descompone en el producto (composición) de las operaciones de forma T_s^ε , donde s son cualesquiera de las circunferencias de los tres sistemas: c_i, e_i, f_i . De aquí se deduce un corolario: es posible hacer la lista de las clases de difeomorfismos isotópicos de la superficie bidimensional M_r^2 , considerando cualesquiera productos finitos de forma $\prod_{j=1}^k T_{s_j}^{\varepsilon_j}$, donde $s_j \in (\{c_i\}, \{e_i\}, \{f_i\})$.

§ 25. Periodicidad unitaria de Bott y problemas de variación multifidimensionales

En este párrafo demostraremos un hecho topológico importante llamado habitualmente «periodicidad de Bott»; para simplificar, nos detengamos sólo en el teorema de la periodicidad para un grupo unitario (la así llamada periodicidad ortogonal de Bott se

demuestra con el mismo esquema que la periodicidad unitaria, pero con mayores dificultades técnicas).

I. Teorema de la periodicidad unitaria

El teorema de la periodicidad lo demostraremos en su variante clásica en forma de periodicidad de los grupos homotópicos de un grupo unitario estable, sin examinar detenidamente el papel del teorema de la periodicidad en la teoría de los espacios fibrados vectoriales.

TEOREMA DE LA PERIODICIDAD UNITARIA. *Tiene lugar un isomorfismo:*
 $\pi_{i-1}SU_{2m} \cong \pi_{i+1}SU_{2m}$ para $1 \leq i \leq 2m$. Si $U = \lim_{(m)} U_m$ (donde $U_m \subset U_{m+1}$ es una inmersión estándar), entonces

$$\pi_{i-1}U = \pi_{i+1}U \text{ para } i \geq 1 \text{ y } \pi_{2n}U = 0; \quad \pi_{2n+1}U = \mathbb{Z}.$$

Consideremos el grupo unitario especial SU_{2m} y por $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}; -E_{2m})$ (donde $E_{2m} \in SU_{2m}$ es una transformación idéntica) designamos un espacio funcional de las curvas suaves a trozos, que van en el grupo SU_{2m} del punto E_{2m} al punto $-E_{2m}$. Por $\Omega^*(SU_{2m}; E_{2m}; -E_{2m})$ (designamos al espacio completo de todas las curvas (camino) continuas de E_{2m} a $-E_{2m}$; entonces la inmersión $\Omega \rightarrow \Omega^*$ es una equivalencia homotópica (véase más arriba los elementos de la teoría general de Morse para un espacio de bucles en una variedad suave).

Consideremos en un espacio $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ un subespacio $\tilde{\Omega}$, formado por todas las geodésicas minimales γ (o sea, con las geodésicas de menor longitud), que van del punto E_{2m} al punto $-E_{2m}$.

LEMA 1. *Un espacio $\tilde{\Omega}$ es homeomorfo a una variedad compleja de Grassmann $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$, o sea, a una variedad de las superficies complejas m -dimensionales en un espacio lineal \mathbb{C}^{2m} .*

DEMOSTRACION. Como fue demostrado en la parte I del libro [1], las geodésicas en el grupo de Lie (respecto a una conexión de Riemann concordada con una métrica invariante en el grupo) son todos los subgrupos uniparamétricos y sus desplazamientos con ayuda de algún elemento arbitrario del grupo. Por eso para describir todas las geodésicas, que unen en el grupo SU_{2m} los puntos E_{2m} y $-E_{2m}$, basta con describir todos los subgrupos uniparamétricos, que salen del punto E_{2m} y terminan en el punto $-E_{2m}$. Puesto que cualquier subgrupo unidimensional $\gamma(t)$ en SU_{2m} es de forma $\exp tX$, donde la matriz X es antihérmítica (es decir, pertenece a un álgebra de Lie su_{2m} del grupo SU_{2m}), entonces, considerando que el parámetro t varía desde 0 hasta 1, obtenemos la condición: $\gamma(0) = E_{2m}$, $\gamma(1) = \exp X = -E_{2m}$. Consideremos la acción adjunta Ad del grupo SU_{2m} en su álgebra de Lie; entonces es bien conocido (por ejemplo, del proceso clásico de ortogonalización en el caso unitario), que hay

tal transformación unitaria $g_0 \in SU_{2m}$, que $g_0 X g_0^{-1} = X_0$, donde

$$X_0 = \begin{vmatrix} i\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\varphi_{2m} \end{vmatrix}; \quad \varphi_1 + \dots + \varphi_{2m} = 0.$$

Con otras palabras, la matriz X_0 pertenece a la llamada subálgebra de Cartan del álgebra su_{2m} (es decir, a una subálgebra máxima conmutativa en su_{2m}). Aplicando la transformación Ad_{g_0} a la geodésica $\gamma(t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} g_0(\exp X) g_0^{-1} &= \exp(g_0 X g_0^{-1}) = \\ &= \begin{vmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_{2m}} \end{vmatrix} = g_0(-E_{2m}) g_0^{-1} = -E_{2m}. \end{aligned}$$

De aquí $\varphi_i = \pi k_i$, $k_i = 2l_i + 1$, $1 \leq i \leq 2m$, $l_i \in \mathbb{Z}$; $k_1 + \dots + k_{2m} = 0$. De manera que hemos descrito todas las geodésicas que unen los puntos E_{2m} y $-E_{2m}$ en SU_{2m} . Queda por escoger de ellas geodésicas de mínima longitud. Puesto que la aplicación \exp realiza la isometría con aplicación de una recta tX en la geodésica $\exp(tX)$, entonces basta hallar la longitud de un segmento correspondiente en el álgebra de Lie para calcular la distancia desde E_{2m} hasta $-E_{2m}$ a lo largo de la geodésica $\exp(tX)$. La forma de Killing en el álgebra de Lie su_{2m} es del tipo $Sp XY^T = \langle X, Y \rangle$; por consiguiente, la longitud de la geodésica $\exp(tX)$ desde E_{2m} hasta $-E_{2m}$ es igual a

$$\sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{Sp XX^{-T}} = \pi \sqrt{\sum_{i=1}^{2m} (k_i)^2}.$$

De aquí está claro, que la longitud mínima de la geodésica es igual a $\pi \sqrt{2m}$, o sea, cuando $k_i = \pm 1$. Además, puesto que $Sp X = \pi \sum_{i=1}^{2m} k_i = 0$, entonces, la matriz X tiene en la diagonal un número igual de $+1$ y de -1 . De manera que hemos mostrado que todas las matrices X son de tal forma, que el $\exp X = -E_{2m}$ y el $\exp tX$

es una geodésica mínima, que se obtienen de la matriz dada

$$X_0 = \begin{vmatrix} & i & & & & 0 \\ & & i & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & i & \\ & & & & & -i \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -i \\ 0 & & & & & & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} iE_m & 0 \\ 0 & -iE_m \end{vmatrix}$$

mediante el empleo en ella de automorfismos interiores de forma: $X_0 \rightarrow gX_0g^{-1}$, donde el elemento g recorre todo el grupo SU_{2m} . Por consiguiente, hemos establecido un homeomorfismo entre un conjunto de todas las geodésicas mínimas y un conjunto de matrices de forma gX_0g^{-1} , donde $g \in SU_{2m}$. Por otro lado, este conjunto de matrices, evidentemente, es homeomorfo a un espacio homogéneo SU_{2m}/CX_0 , donde con CX_0 se designa un subgrupo estacionario de la matriz X_0 (o sea, un subgrupo, que forma la matriz X_0 en su sitio con la acción adjunta del grupo SU_{2m}). Puesto que, evidentemente, hay un isomorfismo: $CX_0 = S(U_m \times U_m)$, entonces el espacio SU_{2m}/CX_0 es homeomorfo a una variedad compleja de Grassmann $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$. El lema queda demostrado.

LEMA 2. Cada geodésica mínima $\gamma(t)$, que une el punto E_{2m} con el punto $-E_{2m}$, es dado unívocamente por su punto medio, es decir, por el punto $\gamma(1/2)$. De tal manera, el conjunto de las geodésicas mínimas, o sea el conjunto de sus puntos medios, es homeomorfo a la variedad de Grassmann γ , por otro lado, coincide con la intersección del grupo SU_{2m} con su álgebra de Lie su_{2m} . Con esto, consideramos, que el grupo SU_{2m} , lo mismo que el álgebra de Lie su_{2m} están realizados como subconjuntos en un espacio euclídeo \mathbb{R}^{2m^2} de las matrices complejas de dimensión $m \times m$.

DEMOSTRACION. La primera parte de la afirmación, precisamente, de que cada geodésica mínima es dada unívocamente por su punto medio, se deduce de la fórmula: $\exp(tX) = (\cos \pi t) E_{2m} + (\sin \pi t) X$. Para $t = 0$ obtenemos E_{2m} , para $t = 1$, obtenemos el punto $-E_{2m}$, y para $t = 1/2$ obtenemos la matriz X . De manera que el punto medio de la geodésica $\gamma(t)$ coincide con la matriz X . Claro que el conjunto de las matrices X de tipo gX_0g^{-1} coincide con el conjunto de tales matrices antihermitianas, que además son unitarias, o sea, son soluciones de la ecuación matricial $X^2 = -E_{2m}$. En particular, de aquí es evidente que la variedad de Grassmann $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$ puede considerarse como un conjunto de todas las estructuras complejas unitarias en el espacio \mathbb{C}^{2m} . También resulta claro que la intersección del grupo unitario SU_{2m} con un subespacio lineal su_{2m} coincide con el conjunto de matrices X tales, que $X^2 = -E_{2m}$. El lema queda demostrado.

LEMA 3 Cada geodésica no mínima γ , que une el punto E_{2m} con el punto $-E_{2m}$ en el grupo SU_{2m} tiene índice no menor que $2m + 2$.

DEMOSTRACION Por definición de índice de la geodésica, debemos calcular el número de los puntos conjugados con el punto E_{2m} a lo largo de la geodésica γ (en su segmento desde E_{2m} hasta $-E_{2m}$). Partiendo de la fórmula explícita para la ecuación de Jacobi (cuyas soluciones son campos de Jacobi a lo largo de la geodésica), obtenemos que los puntos conjugados son determinados por los números propios positivos de la transformación lineal $K_X: su_{2m} \rightarrow su_{2m}$, donde el operador $K_X(Y) = R(X, Y)X = \frac{1}{4} [[X, Y], X]$ está engendrado por el operador de la curvatura de Riemann (que se reduce a conmutador triple para un caso de grupo (véase [1], p. I, §§ 30, 36). Como fue mostrado más arriba, se puede considerar que la matriz X es diagonal y tiene la forma

$$X = \begin{vmatrix} i\pi k_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & i\pi k_{2m} \end{vmatrix}, \text{ donde } k_i \geq k_{i+1}.$$

De la fórmula explícita para el conmutador obtenemos: $[X, Y] = \|\pi(k_j - k_i)y_{ji}\|$, o sea $K_X(Y) = \left\| \frac{\pi^2}{4}(k_j - k_i)^2 y_{ji} \right\|$. El cálculo directo muestra que los valores del parámetro t , con los cuales el punto $\gamma(t)$ está conjugado con el punto E_{2m} (a lo largo de γ), son dados por las fórmulas siguientes: $t = \frac{2}{k_j - k_i}, \frac{4}{k_j - k_i}, \frac{6}{k_j - k_i}, \dots$ (para cada par i, j). En el intervalo $(0, 1)$ el número de estos puntos conjugados (con i, j fijados) es igual a $\frac{k_j - k_i}{2} - 1$. Considerando que $k_j > k_i$, obtenemos que el índice de la geodésica γ es dado por la fórmula

$$\mu = \sum_{k_j > k_i} (k_j - k_i - 2).$$

De esta fórmula está claro, que para una geodésica mínima el índice es igual a 0. Sea la geodésica no mínima; examinemos, por separado, dos casos: a) entre los números k_i por lo menos $m + 1$ números tienen un signo; b) entre los números k_i se tiene exactamente m números positivos y m negativos, pero no todos ellos son iguales a ± 1 . Obtenemos, que $\mu \geq 2m + 2$. El lema queda demostrado.

Pasemos a la demostración del teorema de la periodicidad unitaria, a saber: los grupos homotópicos estables $\pi_i U$ son periódicos

con período 2. Los grupos $\pi_0 U = \pi_2 U = \pi_4 U = \dots$ son triviales, y los grupos $\pi_1 U = \pi_3 U = \pi_5 U = \dots$ son isomorfos al grupo \mathbb{Z} .

LEMA 4. Consideremos la inmersión de un conjunto de las geodésicas mínimas (homeomorfo a una variedad de Grassmann compleja $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$) en el espacio de las curvas (camino) $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$. Entonces esta inmersión (encaje) induce un isomorfismo de los grupos homotópicos en todas las dimensiones que no sobrepasan $2m$. Como tiene lugar la igualdad $\pi_i \Omega X = \pi_{i+1} X$, obtenemos definitivamente que $\pi_i G_{2m,m}^{\mathbb{C}} = \pi_{i+1} SU_{2m}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos en un espacio de curvas (camino) $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ una funcional de acción u operación; sus puntos críticos (en los cuales la funcional alcanza el valor mínimo) son geodésicas mínimas, que unen los puntos E_{2m} y $-E_{2m}$ en SU_{2m} ; por consiguiente, este conjunto de los mínimos de la funcional es homeomorfo a la variedad $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$. Al mismo tiempo, como fue demostrado más arriba, el índice de los restantes puntos de la funcional (distintos de las geodésicas mínimas) no es menor que $2m + 2$. Aplicando a esta funcional la teoría de Morse (para el caso de puntos críticos degenerados que llonan las subvariedades críticas no degeneradas), obtenemos que el espacio de curvas $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ (considerado como un complejo celular infinito) se obtiene de una variedad de los mínimos absolutos de la funcional de acción, pegando a esta variedad (homeomorfa a $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$) las células de las dimensiones no menores que $2m + 2$. De aquí se deduce que los grupos homotópicos del espacio $\Omega(SU_{2m}; E_{2m}; -E_{2m})$ de dimensiones $i \leq 2m$, coinciden con los grupos homotópicos de la variedad de los mínimos absolutos de la funcional de acción. El lema queda demostrado.

LEMA 5. Tiene lugar un isomorfismo: $\pi_{i-1} U_m = \pi_i G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$ para $i \leq 2m$.

DEMOSTRACIÓN. (véase [1], p. II, § 24). Consideremos un espacio fibrado estándar $U_{m+1} \xrightarrow{U_m} S^{2m+1}$; de su sucesión homotópica exacta obtenemos inmediatamente que $\pi_{i-1}(U_m) = \pi_{i-1}(U_{m+1})$ para $i \leq 2m$. Por otro lado, de la sucesión homotópica exacta del espacio fibrado $U_{2m} \xrightarrow{U_m} U_{2m}/U_m$ obtenemos ahora que $\pi_i(U_{2m}/U_m) = 0$ para $i \leq 2m$, lo que equivale a la afirmación del lema. La demostración ha concluido.

Ahora reuniendo todas estas afirmaciones obtenemos, en resumen, el teorema de la periodicidad unitaria:

$$\begin{aligned} \pi_{i-1} U_m &\xrightarrow[\cong]{\partial} \pi_i C_{2m,m}^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cong} \\ &\cong \pi_i \Omega^*(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m}) \cong \pi_{i+1} SU_{2m} = \pi_{i+1} U_{2m}. \end{aligned}$$

Escribamos explícitamente esta cadena de isomorfismos. Sea $f_{i-1}: S^{i-1} \rightarrow U_m$ una aplicación continua que representa una clase homotópica $[f] \in \pi_{i-1} U_m$. Construimos por esta aplicación la aplicación $f_{i+1}: S^{i+1} \rightarrow SU_{2m}$. Para ello presentemos el grupo SU_2 como un grupo de matrices $\{p\}$, donde $p = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{vmatrix}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, y destaquemos en el grupo SU_2 un subconjunto que es un disco bidimensional $'D^2$, dado por la siguiente condición: $p \in 'D^2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$. Después sumergimos (encajamos) este disco bidimensional $'D^2$ en el grupo SU_{2m} mediante la fórmula

$$j: p \rightarrow p \otimes E_m = \begin{vmatrix} \alpha E_m & \beta E_m \\ -\beta E_m & \alpha E_m \end{vmatrix}.$$

Luego consideremos en el disco $'D^2$ una curva suave $\gamma(\beta) = \{p(\alpha, \beta) \mid \alpha = i\tau, \tau \in \mathbb{R}, \tau \geq 0\}$; tomamos $\gamma(\beta) = j(\gamma(\beta))$. Vamos a representar los puntos de la variedad de Grassmann $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$ como planos invariantes que responden al valor propio $\lambda = i$ de los operadores $g: \mathbb{C}^{2m} \rightarrow \mathbb{C}^{2m}$, $g \in SU_{2m}$, $g^2 = -E_{2m}$. Entonces, para el punto $\gamma \in \gamma(\beta)$ tenemos $\gamma^2 = -E_{2m}$, es decir, $\gamma(\beta) \in G_{2m,m}^{\mathbb{C}} \subset SU_{2m}$ cuando $0 \leq \beta \leq 1$. Consideremos en $G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$ un conjunto de elementos g de la siguiente forma:

$$g = g(\sigma, i\tau, \beta) = [E_m \oplus f_{i-1}^{-1}(\sigma) \cdot [p(i\tau, \beta) \otimes E_m] \cdot [E_m \oplus \oplus f_{i-1}(\sigma)],$$

donde $\sigma \in S^{i-1}$, $f_{i-1}(\sigma) \in U_m$. Cuando $\beta = 1$, obtenemos una aplicación de la esfera S^{i-1}

$$h: \sigma \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & f_{i-1}(\sigma) \\ -f_{i-1}^{-1}(\sigma) & 0 \end{vmatrix},$$

y para $0 \leq \beta \leq 1$, el conjunto $\{g(\sigma, i\tau, \beta)\}$ se representa en forma de la imagen de una esfera S^i , además, $\{g(\sigma, i\tau, \beta)\} \in G_{2m,m}^{\mathbb{C}}$, $\partial[S^i] = [h]$ (donde $\partial: \pi_i G_{2m,m}^{\mathbb{C}} \rightarrow \pi_{i-1} U_m$).

TEOREMA 1. (Fomenko). *Sea que $f_{i-1}: S^{i-1} \rightarrow U_m$ represente algún elemento de un grupo homotópico $\pi_{i-1} U_m$. En virtud del teorema de la periodicidad, los grupos $\pi_{i-1} U_m$ y $\pi_{i+1} U_m$ son isomorfos. La fórmula explícita de este isomorfismo tiene la forma: $f_{i-1} \rightarrow f_{i+1}$, donde*

$$f_{i+1}: S^{i+1} \rightarrow U_{2m}; \quad f_{i+1}: S^{i+1} \rightarrow \{g(\sigma, \alpha, \beta)\} \subset SU_{2m};$$

$$g(\sigma, \alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \alpha E_m & \beta f_{i-1}(\sigma) \\ -\beta f_{i-1}^{-1}(\sigma) & \alpha E_m \end{vmatrix},$$

o sea la relación $f_{i-1} \rightarrow f_{i+1}$, que confronta a un elemento del grupo homotópico $\pi_{i-1} U_m$ cierto elemento del grupo homotópico $\pi_{i+1} U_{2m}$, y da un isomorfismo de la periodicidad.

DEMOSTRACION. Consideremos el conjunto $\{g(\sigma, \alpha, \beta)\}$, donde

$$g(\sigma, \alpha, \beta) = [E_m \oplus f_{i-1}^{-1}(\sigma)] \cdot [\rho(\alpha, \beta) \oplus E_m] [E_m \oplus f_{i-1}(\sigma)];$$

entonces $\{g(\sigma, \alpha, \beta)\}$, evidentemente, se puede representar como la imagen de la esfera S^{i+1} con la aplicación continua $f_{i+1}: S^{i+1} \rightarrow \{g(\sigma, \alpha, \beta)\} \subset SU_{2m}$. De manera que si $f_{i-1}(\sigma) \in U_m$ representa en sí cierto elemento del grupo homotópico $\pi_{i-1}U_m$, y así $f_{i+1}S^{i+1} \subset SU_{2m}$, y de la construcción más arriba descrita (teniendo en cuenta los isomorfismos de periodicidad clásicos), se deduce inmediatamente que la correspondencia $f_{i-1} \rightarrow f_{i+1}$ engendra el isomorfismo de periodicidad unitaria. La fórmula explícita:

$$g(\sigma, \alpha, \beta) = f_{i+1}(S^{i+1}) = \left\| \begin{array}{cc} \alpha E_m & \beta f_{i-1}(\sigma) \\ -\beta f_{i-1}^{-1}(\sigma) & \bar{\alpha} E_m \end{array} \right\|$$

se obtiene mediante la combinación del operador de frontera (véase su escritura explícita más arriba) con la aplicación que confronta a cada «esferoide» (o sea aplicación de esfera) formado por un haz de las geodésicas mínimas que van del punto E_{2m} al punto $-E_{2m}$, un esferoide compuesto de todos los puntos medios de las geodésicas de este haz; este esferoide se encuentra en la variedad de Grassmann. El teorema queda demostrado.

De este modo, desde un punto de vista geométrico evidente, el isomorfismo de periodicidad se compone de modo bastante fácil.

PASO 1. Es necesario tomar el esferoide f_{i-1} del grupo U_m y mediante la consideración del operador de frontera $\partial: \pi_i G_{2m,m}^{\mathbb{C}} \rightarrow \pi_{i-1}U_m$ pasar este esferoide a un esferoide sumergido en la variedad de Grassmann (véase más arriba la fórmula explícita).

PASO 2. Es necesario tomar el esferoide de Grassmann obtenido en la variedad de Grassmann, presentar esta variedad como intersección del grupo SU_{2m} con su álgebra de Lie SU_{2m} (con su inmersión en un espacio lineal de todas las matrices complejas de tamaño $2m \times 2m$), aprovecharse de que esta intersección coincide exactamente con el conjunto de los puntos medios de todas las geodésicas mínimas que van en el grupo SU_{2m} del punto E_{2m} al punto $-E_{2m}$ y, al examinar todas las geodésicas cuyos puntos medios llenan el esferoide en la variedad de Grassmann, obtener un esferoide (de dimensión mayor en la unidad) ya en el grupo SU_{2m} . Este esferoide es imagen del esferoide inicial f_{i-1} con un isomorfismo de periodicidad. El teorema más arriba demostrado da este isomorfismo con una fórmula explícita.

Si $m=2$, es posible tomar como aplicación inicial $f_3: S^3 \rightarrow SU_2$ la aplicación idéntica $f_3(\sigma) = \left\| \begin{array}{cc} x & y \\ -y & x \end{array} \right\|$, $|x|^2 + |y|^2 = 1$; entonces $[f_3] = 1 \in \pi_3 SU_2$. Ahora pasando a $m=2^2, 2^3, 2^4$, obtenemos

una aplicación $f_{2k+1}: S^{2k+1} \rightarrow SU_2^k$, donde $[f_{2k+1}] = 1 \in \pi_{2k+1} SU_2^k$, $k \geq 1$. Por último, notemos, que la aplicación f_{2k+1} coincide con la aplicación de la «dualidad» α_{2k+1} conocida en la teoría de álgebras de Clifford y de las representaciones de espinores del grupo ortogonal, sólo si en la definición de esta aplicación se sustituye el campo de coeficientes \mathbb{C} por el campo de los números reales \mathbb{R} .

Mostramos esta confrontación, debido a que esto da otra fórmula explícita más para un isomorfismo de periodicidad unitaria haciendo más simple el cuadro geométrico. Vamos a construir la aplicación α_{2k+1} de la siguiente manera. Sean $f: S^{n-1} \rightarrow GL(N; \mathbb{C})$, $g: S^{m-1} \rightarrow GL(M; \mathbb{C})$, dos aplicaciones continuas. Puesto que $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$, entonces las aplicaciones f y g se pueden prolongar (por homogeneidad) en los espacios euclídeos \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente. Definamos una aplicación $\omega: \mathbb{R}^{n+m} \setminus 0 \rightarrow GL(2MN; \mathbb{C})$, haciendo

$$f * g = \omega(x, y) = \left\| \begin{array}{c} f(x) \otimes E_M - E_N \otimes g^*(y) \\ E_N \otimes g(y) f^*(x) \otimes E_N \end{array} \right\|,$$

donde $f^* = \bar{f}^T$, $g^* = \bar{g}^T$; $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Ya que $\omega = f * g$ está definida en $\mathbb{R}^{n+m} \setminus 0$, entonces surge una aplicación $S^{n+m-1} \rightarrow GL(2MN; \mathbb{C})$. Si $\alpha: S^1 \rightarrow GL(1; \mathbb{C})$, $\alpha(z) = z$, $|z| = 1$, entonces $\alpha_{2k+1} = \alpha * \alpha * \dots * \alpha$ ($2k+1$ veces). Si en calidad de α_{2k+1} se toma la aplicación $S^{2k+1} \rightarrow SU_2^k$ correspondiente a la aplicación α_{2k+1} , entonces, evidentemente, obtendremos la identidad $\alpha_{2k+1} = f_{2k+1}$.

II. La periodicidad unitaria desde el punto de vista de los problemas variacionales multidimensionales.

El teorema de periodicidad descrito más arriba se basa en la teoría de funcionales unidimensionales (precisamente, de funcional de acción definida en las trayectorias en un grupo unitario). Resulta que el isomorfismo de periodicidad surge de manera más natural al considerar un problema multidimensional variacional (en el caso dado, bidimensional).

Para un enfoque clásico, el isomorfismo de periodicidad unitaria se descompone en una composición de dos isomorfismos cada uno, de los cuales aumenta la dimensión de un grupo homotópico en la unidad. El hecho de que el aumento exigido de la dimensión en dos unidades se obtenga como resultado de efectuar esos dos pasos (véase su descripción en el párrafo anterior), corresponde completamente al método de demostración clásica, que utiliza funcionales unidimensionales de acción y longitud definidas en los espacios de aplicaciones de un disco unidimensional D^1 (segmento). Consideremos este proceso con más detalles. Sea fijado un disco unidimensional D^1 ; $\partial D^1 = S^0$ (esfera de dimensión nula); entonces $\Pi_1 = \Omega(SU_{2m})$,

$E_{2m}, -E_{2m}$) es el espacio de las aplicaciones continuas f del disco D^2 en el grupo SU_{2m} , con las cuales $f|_{S^0} = i_0|_{S^0}$, donde $i_0 S^0 = (E_{2m}, -E_{2m})$, es decir, la frontera del disco siempre pasa al mismo par de puntos fijados. La funcional de acción E en el espacio $\Pi'_1 = \Omega(SU_{2m}; E_{2m}, -E_{2m})$ se define así:

$$E'_0(\omega) = \int_0^1 \left| \frac{d\omega}{dt} \right|^2 dt,$$

donde $\omega(0) = E_{2m}$; $\omega(1) = -E_{2m}$. Con esta funcional está relacionada naturalmente la funcional de longitud $L'_0(\omega) = \int_0^1 \left| \frac{d\omega}{dt} \right| dt$.

Como fue mostrado en la parte I del libro [1], el estudio de los puntos críticos (extremales) de la funcional L se reduce al estudio de las propiedades y extremales de la funcional E . Un conjunto de puntos (trayectorias), en los cuales la funcional de acción E (y, por consiguiente, también la funcional de longitud L) alcanza el mínimo absoluto, es cierto subespacio homeomorfo a la variedad de Grassmann $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$, en el espacio Π'_1 , y por eso (como se deduce de la teoría unidimensional de Morse), un armazón $(2m)$ -dimensional del espacio Π'_1 será equivalente homotópicamente a un armazón $(2m)$ -dimensional del espacio $G_{2m, m}^{\mathbb{C}}$. En otras palabras, se puede decir que la parte analítica del isomorfismo de periodicidad unitaria está en el isomorfismo

$$\pi_1(G_{2m, m}^{\mathbb{C}}) = \pi_1(\Pi'_1) = \pi_1(\Pi_1) = \pi_{1+1}(SU_{2m}),$$

por cuanto el siguiente paso: $\pi_1(G_{2m, m}^{\mathbb{C}}) = \pi_{1-1}(U_m)$ es corolario de un hecho ya puramente homotópico que no tiene ninguna relación con la funcional E .

El mecanismo geométrico del isomorfismo de periodicidad arriba descrito sugiere la idea de poder obtener este isomorfismo no en dos pasos, sino en uno, si en lugar del problema variacional unidimensional se utiliza el problema bidimensional, es decir, se escoge una funcional bidimensional conveniente. Resulta que en efecto hay tal posibilidad; en particular, esto hará más simple el cuadro geométrico del isomorfismo de periodicidad. Pasemos a estudiar el problema variacional multidimensional.

Considerando las funcionales bidimensionales en un espacio de aplicaciones escogido especialmente, obtendremos un isomorfismo de periodicidad. Examinemos en el grupo SU_{2m} una circunferencia sumergida (encajada)

$$S'_0 = \left\| \begin{array}{cc} \alpha E_m & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} E_m \end{array} \right\|, \quad |\alpha| = 1,$$

que es un subgrupo uniparamétrico, y la fijemos. Aquí actuamos por analogía con el caso unidimensional, cuando en el grupo SU_{2m} se fijaba una esfera de dimensión nula $S^0 = \{E_{2m}, -E_{2m}\}$. Sea D^2 un disco bidimensional con frontera S^1 en su métrica euclídea estándar; fijemos la aplicación $f_0: S^1 \rightarrow SU_{2m}$, que pasa isométricamente la circunferencia S^1 a la circunferencia S^1_0 .

Con Π_2 designemos al espacio topológico de todas las aplicaciones continuas $f: D^2 \rightarrow SU_{2m}$ tales, que $f|_{S^1} = f_0$. El espacio Π_2 es de tipo homotópico de un complejo celular. Consideremos un subespacio $\Pi'_2 \subset \Pi_2$ formado con todas las aplicaciones f de un espacio funcional $H^2_1(D^2)$, donde el espacio $H^2_1(D^2)$ fue definido más abajo para un planteamiento cuidadoso y exacto del problema.

Sea G un dominio en un espacio euclídeo \mathbb{R}^v (x^1, \dots, x^v). Diremos que la función $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a una clase de funciones $H^p_m(G)$ si, y sólo si: 1) $u \in L_p(G)$, es decir, si es sumable en el grado p ; 2) existen «derivadas generalizadas» $D^\alpha u$, o sea, tales funciones $r_\alpha \in L_p(G)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_v)$, $0 \leq |\alpha| \leq m$, que para cualquier función infinitamente suave finita g es justa la identidad:

$$\int_G g(x) r_\alpha(x) dx = \int_G D^\alpha g(x) |u(x) dx.$$

Aquí $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$; $D^\alpha g = \partial^\alpha(g)/(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^v)^{\alpha_v}$. Si $m = 1$, entonces $|\alpha| = 1$.

Si $f: D^2 \rightarrow SU_{2m}$, entonces $f \in H^2_1(D^2)$ si, y sólo si, las funciones de coordenadas engendradas por esta aplicación pertenecen a $H^2_1(D^2)$. Cambiamos la exigencia de suavidad a trozos de la aplicación f en el caso unidimensional (que es necesario para construir la teoría unidimensional de Morse) por la exigencia de pertenencia de la aplicación f a la clase $H^2_1(D^2)$.

Definamos en el espacio Π'_2 la funcional de Dirichlet $D: \Pi'_2 \rightarrow \mathbb{R}$, que confronta a cada aplicación $f \in \Pi'_2$ el valor de la integral de Dirichlet $D[f]$ en la aplicación f (véase la definición más abajo). Esta funcional de Dirichlet es un análogo bidimensional de una funcional unidimensional de acción, mientras que la funcional de área bidimensional es análogo de una funcional unidimensional de longitud (véase [1], p. II, § 32). Recordemos la definición de la funcional de Dirichlet. Las funciones $r_\alpha(x)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_v)$ se llaman derivadas de la función u y se designan por $D^\alpha(u)$ o $u_{,\alpha}$; si $\alpha = 0$, entonces $u_{,\alpha} = u$. Sean M y V variedades de Riemann con tensores métricos $g_{ij}(x)$, $x \in M$; $g_{\alpha\beta}(v)$, $v \in V$. Con cada aplicación $f: V \rightarrow M$, donde $f \in H^2_1[V, M]$, se vinculan los tensores de un tipo mixto; así, por ejemplo, $x^i_\alpha = x^i \circ f$, donde x^i son coordenadas locales del punto $x = f(v) \in M$, y la diferenciación se comprende en el sentido

arriba indicado. Designemos por ∇_α a una derivada covariante total del tensor mixto. Definimos un producto escalar de dos tensores x_α^i e y_β^j , suponiendo $(x_\alpha^i, y_\beta^j) = \hat{g}_{\alpha\beta} g_{ij} x_\alpha^i y_\beta^j$. Ahora sea $f \in H_1^n [V, M]$; hacemos

$$D[f] = \int_V \left[\frac{1}{n} (x_\alpha^i, x_\beta^j) \right]^{\frac{n}{2}} dv,$$

donde dv es un elemento de volumen de Riemann en una variedad de Riemann V , y $n = \dim V$. La aplicación $f \in H_1^n [V, M]$ se llama armónica, si $\delta D[f; \eta] = 0$ para cualquier campo vectorial $\eta(f)$ de clase H_1^n definida en $f(V)$. La correspondiente ecuación de Euler para la funcional $D[f]$ tiene la siguiente forma: $\nabla^\alpha \nabla_\alpha x^i = 0$. Esto se verifica por el cálculo directo.

En nuestro caso en calidad de variedad V tomamos el disco bidimensional D^2 ; entonces $\hat{g}^{\alpha\beta}(v) = \delta^{\alpha\beta}$, y la funcional de Dirichlet (análogo bidimensional de la funcional de acción) $D[f]$ toma la forma

$$D[U] = \frac{1}{2} \int_V [(x_1^i, x_1^j) + (x_2^i, x_2^j)] dv = \frac{1}{2} \int_V g_{ij} (x_1^i x_1^j + x_2^i x_2^j) dv,$$

donde g_{ij} es una métrica del grupo SU_{2m} .

Con esto, el grupo está realizado en el espacio S^{N-1} y la métrica g_{ij} es la restricción de una métrica euclídea. La primera variación δD de la funcional D tiene la forma $\delta D[f; \eta] = \int_V (x_\alpha^i, \nabla_\beta \eta^j) dv$.

Si el disco bidimensional D^2 se da paramétricamente con ayuda de las coordenadas euclídeas u y v , obtendremos:

$$D[f] = \frac{1}{2} \int_V [(x_u, x_u) + (x_v, x_v)] du dv, \quad x = (x^1, \dots, x^p),$$

$P = \dim M$; $\delta D[f; \eta] =$

$$\int_V \left[\left(\frac{D\eta}{du}; x_u \right) + \left(\frac{D\eta}{dv}; x_v \right) \right] du dv; \quad \eta \in H_1^2(D^2).$$

Consideremos en el espacio de las aplicaciones Π_2' una funcional más $A[f]$, que confronta a cada aplicación $f \in \Pi_2'$ el valor de la siguiente integral: $\int_V \sqrt{\det \Omega} du dv$, donde

$$\Omega = \begin{vmatrix} (x_u, x_u) & (x_u, x_v) \\ (x_u, x_v) & (x_v, x_v) \end{vmatrix}.$$

o sea, la funcional $A[f]$ es una funcional del área bidimensional. Es bien conocido (véase [1], pág. 363), que tiene lugar una desigualdad $A[f] \leq D[f]$, al mismo tiempo, la igualdad se consigue si, y sólo si, la aplicación f es generalizado-conforme. Por ejemplo, para el caso de las superficies mínimas bidimensionales en un espacio euclídeo tridimensional, esto significa que un radio vector mínimo de superficie siempre es armónico en las coordenadas conformes (es decir, en tales coordenadas, donde la métrica de Riemann inducida tiene forma diagonal). Notemos que aquí se observa también la analogía con el caso unidimensional (véase más arriba el espacio de curvas con extremos fijados), a saber: Las funcionales de acción E y de longitud L están relacionadas con una correlación analógica: $L^2(\omega) \leq E(\omega)$, al mismo tiempo, la igualdad se consigue si y sólo si la aplicación ω da una geodésica mínima (perteneciente al parámetro natural), que va del punto $\omega(0)$ al punto $\omega(1)$.

Lo mismo que la funcional de acción E , la funcional de Dirichlet bidimensional D permite excluir todas aquellas aplicaciones f , que se distinguen de una aplicación armónica f_0 sólo por el cambio continuo de los parámetros en el disco D^2 , lo que no cambia el valor de la funcional del área pero, hablando en general, cambia el valor de la funcional de Dirichlet.

Notemos para lo sucesivo, que tiene lugar el isomorfismo $\beta_2: \pi_s(\Pi_2) \cong \pi_{s+2}(SU_{2m})$ y que el espacio Π_2 es equivalente homotópicamente al espacio $\tilde{\Pi}_2$ de todas las aplicaciones continuas $S^2 \rightarrow SU_{2m}$ con un punto fijado. La primera afirmación es un corolario evidente de la sucesión exacta de un espacio fibrado de bucles dobles.

TEOREMA 2. (Fomenko). *Consideremos el grupo SU_{2m} y los espacios funcionales Π_2 y Π'_2 . En el espacio Π'_2 examinemos un subconjunto W consistente en todos los puntos (o sea, aplicaciones continuas) f , sobre los cuales la funcional de Dirichlet $D[f]$ tiene un mínimo absoluto. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) *el conjunto W es homeomorfo (como un espacio topológico) a un grupo U_m ;*

b) *la inmersión (encaje) $i: W \rightarrow \Pi'_2 \rightarrow \Pi_2$ induce un isomorfismo de grupos homotópicos $i_*: \pi_s U_m \rightarrow \pi_s \Pi_2$ para $s \leq 2m$; por eso el armazón $(2m)$ -dimensional del espacio Π_2 es equivalente homotópicamente al armazón $(2m)$ -dimensional del grupo U_m , y la composición $\beta_2 \circ$*

$i_: \pi_s U_m \rightarrow \pi_{s+2} SU_{2m}$ es un isomorfismo de periodicidad unitaria con $s \leq 2m$. De manera que la utilización de la funcional de Dirichlet bidimensional y la consideración del conjunto de sus mínimos absolutos permite obtener el isomorfismo de periodicidad unitaria en un paso (de una vez, con aumentar la dimensión de los grupos homotópicos en dos unidades), a diferencia de «dos pasos» con empleo de las funcionales unidimensionales de acción y de longitud.*

La demostración del teorema la hacemos en forma de una cadena

de los siguientes lemas. Al principio, consideremos en el grupo SU_{2m} una esfera bidimensional definida por la fórmula:

$$S_0^2 = \left\| \begin{array}{c} \alpha E_m \\ -\beta E_m \end{array} \right\| \frac{\beta E_m}{\alpha E_m}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Una de las semiesferas, precisamente, la esfera dada por la desigualdad $\beta \geq 0$ coincide con un disco bidimensional D_0^2 , cuya inmersión en el grupo SU_{2m} ha sido realizado más arriba. El ecuador $\{\beta = 0\}$ de la esfera S_0^2 es la circunferencia S_0^1 . Puesto que la inmersión de la esfera $S_0^2 \rightarrow SU_{2m}$ se prolonga hasta la inmersión $SU_2 \rightarrow SU_{2m}$, entonces la esfera S_0^2 es una subvariedad completamente geodésica en el grupo SU_{2m} , y más aún subvariedad mínima. Recordemos que la subvariedad se llama completamente geodésica, si cualquier geodésica tangente a esta subvariedad en algún punto se encuentra enteramente en ésta. El hecho de que cualquier subvariedad completamente geodésica es localmente mínima, se deduce de la forma explícita del tensor de curvatura de Riemann, restringido en una subvariedad completamente geodésica. En un grupo de Lie, el tensor de curvatura de Riemann en una subvariedad completamente geodésica es una parte del tensor de Riemann en un grupo abrazado, este tensor se descompone en suma directa.

De manera que también el disco D_0^2 es una subvariedad completamente geodésica en el grupo SU_{2m} . Consideremos un conjunto W' de los discos completamente geodésicos $D^2(x) \subset SU_{2m}$, que son de forma $D^2(x) = xD_0^2x^{-1}$, donde $x \in SU_{2m}$ y $xsx^{-1} \equiv s$ para cualquier $s \in S_0^1$.

LEMA 6. El conjunto W' es homeomorfo al espacio U_m .

DEMOSTRACIÓN. Sea $D^2(x) \in W'$; entonces $xs = sx$ para cualquier $s \in S_0^1$. Puesto que $S_0^1 = \{\alpha E_m + \bar{\alpha} E_m, |\alpha| = 1\}$, entonces de aquí se deduce que $x = A \oplus D$, donde $A, D \in U_m$, es decir, $x = (E_m \oplus DA^{-1})(A \oplus A) = x_1(A \oplus A)$, $x_1 = E_m \oplus DA^{-1}$. Puesto que $(A \oplus A)d = d \cdot (A \oplus A)$ para cualquier $d \in D_0^2$ y cualquier $A \in U_m$, entonces

$$D^2(x) = D^2(x_1) = \left\| \begin{array}{c} \alpha E_m \\ -\beta C^{-1} \end{array} \right\| \frac{\beta C}{\alpha E_m}, \quad C = DA^{-1}.$$

Como $\beta \geq 0$, la matriz C se define por esta condición unívocamente. Así, a cada disco $D^2(x)$ le confrontamos un elemento $C \in U_m$, donde $C = C[D^2(x)]$. Sea $C[D^2(x)] = C[D^2(x')]$; entonces es evidente que $x' \cdot x^{-1} \in \{A \oplus A\}$, y por eso los discos $D^2(x)$ y $D^2(x')$ coinciden. Por el contrario, si $C \in U_m$, entonces $C = C[D^2(x)]$, donde $x = E_m \oplus C$, o sea, la correspondencia construida $D^2(x) \rightarrow C[D^2(x)]$ es el homeomorfismo necesario entre W' y U_m . El lema queda demostrado.

Ahora vamos a construir la inmersión (el encaje) $i: U_m \rightarrow \Pi_2^*$. Sea $g \in U_m$; entonces se construye por este elemento unívocamente $\xi \in U_m$; entonces se construye por este elemento unívocamente un disco bidimensional

$$D^2(E_m \oplus g) = \left\| \begin{array}{cc} \alpha E_m & \beta g \\ -\beta g^{-1} & \bar{\alpha} E_m \end{array} \right\|,$$

al mismo tiempo, si $g_1 \neq g_2$, entonces $D^2(E_m \oplus g_1) \cap D^2(E_m \oplus g_2) = S^1$. Sea $i_0: D^2 \rightarrow D_0^2$ nuestra aplicación fijada. Hacemos $i(g) \xi = (E_m \oplus g) \cdot i_0(\xi) \cdot (E_m \oplus g^{-1})$, donde $\xi \in D^2$. Claro que $i: g \rightarrow i(g)$ es la inmersión buscada $U_m \rightarrow \Pi_2^*$. Del lema arriba demostrado, se deduce que el conjunto de aplicaciones $i(U_m) \subset \Pi_2^*$ coincide con un conjunto de aplicaciones del tipo $\text{Ad}_x \circ i_0$, donde el elemento x recorre todo el grupo $G = \{A \oplus A\} \subset U_{2m}$; $G \cong U_m$, es decir, el conjunto $i(U_m)$ es la órbita del punto $i_0 \in \Pi_2^*$ con la acción adjunta del grupo G en el conjunto de aplicaciones Π_2^* .

LEMA 7. El homomorfismo $\beta_2 \circ i_*: \pi_s(U_m) \rightarrow \pi_{s+2}(SU_{2m})$ coincide con un isomorfismo de periodicidad unitaria.

DEMOSTRACIÓN. Sean $f: S^s \rightarrow U_m$, $f \in \{f\} \in \pi_s(U_m)$, $\sigma \in S^s$. Entonces

$$[(\beta_2 \circ i_*)](f)(\sigma) = D^2[E_m \oplus f(\sigma)] = \left\| \begin{array}{cc} \alpha E_m & \beta f(\sigma) \\ -\beta f^{-1}(\sigma) & \bar{\alpha} E_m \end{array} \right\|.$$

Se deduce inmediatamente del párrafo precedente y de la teoría unidimensional de Morse, que el homomorfismo $\beta_2 \circ i_*$ coincide con el isomorfismo de periodicidad unitaria, si $s \leq 2m$. Puesto que β_2 es un isomorfismo en cualquier dimensión, de aquí se deduce que el homomorfismo $i_*: \pi_s(U_m) \rightarrow \pi_s(\Pi_2)$ es también isomorfismo para $s \leq 2m$, y por eso un armazón $(2m)$ -dimensional Π_2 es equivalente homotópicamente a un armazón $(2m)$ -dimensional $i(U_m)$. El lema queda demostrado.

Así la inmersión $i: U_m \rightarrow \Pi_2$ satisface todas las condiciones necesarias. Queda por mostrar que está cumplida la igualdad: $i(U_m) = W$.

Consideremos un espacio euclídeo \mathbb{R}^{8m^2} identificable con un espacio complejo \mathbb{C}^{4m^2} de todas las matrices complejas de dimensión $2m \times 2m$, con una forma bilineal $\varphi(A, B) = \text{Re}(Sp AB^*)$, $B^* = -\bar{B}^T$. Entonces el grupo SU_{2m} se sumerge isométricamente en la esfera S^{8m^2-1} de radio $\sqrt{2m}$ como una subvariedad suave, en la cual se induce una métrica de Riemann especial, invariante respecto a los desplazamientos derechos e izquierdos en el grupo SU_{2m} . Esta métrica, evidentemente, coincide con la métrica de Killing. Por eso a muchas relaciones métricas en el grupo SU_{2m} es útil considerarlas desde el punto de vista de la esfera abrazante S^{8m^2-1} . Obtenemos el

primer corolario de la existencia de esta inmersión isométrica del grupo en la esfera. Por ejemplo, en el grupo SU_{2m} no existen tales variaciones infinitamente pequeñas (perturbaciones) del disco bidimensional D_0^2 que dejan inmóvil la frontera de este disco $S_0^1 = \partial D_0^2$, que el disco perturbado \tilde{D}_0^2 sea un disco mínimo en el grupo SU_{2m} , pero no completamente geodésico. En efecto, sea que existe tal variación. Notemos que la circunferencia $S_0^1 \subset SU_{2m} \subset S^{8m^2-1}$ es una circunferencia de un círculo máximo en la esfera S^{8m^2-1} , y el disco D_0^2 es una sección plana central de la esfera S^{8m^2-1} por un plano tridimensional pasante por el origen de las coordenadas en \mathbb{R}^{8m^2} . Puesto que el disco \tilde{D}_0^2 (por suposición) no es completamente geodésico en el grupo SU_{2m} , entonces él no es tampoco completamente geodésico en la esfera S^{8m^2-1} , o sea él no se obtiene del disco D_0^2 mediante un giro en torno a la circunferencia S_0^1 . De aquí se deduce que su área es estrictamente mayor que el área del disco D_0^2 en aproximación lineal, o sea, $\delta A > 0$. Por eso el disco \tilde{D}_0^2 no es un disco mínimo, lo que contradice la suposición. Así, cualquier variación de cualquier disco $D^2(x) \in W'$ o bien deja completamente geodésico el disco $D^2(x)$ (y entonces esta variación se reduce al giro del disco en torno a su circunferencia de frontera S_0^1 con ayuda de algún automorfismo interior del grupo abrazante SU_{2m}), o bien destruye su mínimo local (por lo menos, en un punto interior).

LEMA 8. Tiene una implicación: $i(U_m) \subset W$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que cada aplicación $f \in i(U_m)$ tiene forma $f = Ad_x i_0$, $x \in G$, entonces basta con verificar que el punto i_0 es un punto de mínimo absoluto para la funcional de Dirichlet D . Puesto que $SU_{2m} \subset S^{8m^2-1}$, y el disco D_0^2 es una sección plana central de la esfera S^{8m^2-1} , entonces la aplicación i_0 es un punto de mínimo absoluto para la funcional de área A . Ya que cualquier vector mínimo es también armónico (en las coordenadas locales correspondientes), entonces esta aplicación i_0 es un punto crítico también para la funcional de Dirichlet D (notemos además que la armonía generalizada de la aplicación i_0 se deduce asimismo de la construcción explícita de la aplicación i_0 ; véase más arriba). Como siempre se cumple la desigualdad $A[f] \leq D[f]$, está claro que la aplicación i_0 es un punto de mínimo absoluto para la funcional de Dirichlet D . El lema queda demostrado.

LEMA 9. Tiene lugar la igualdad $i(U_m) = W$, donde W es el conjunto de los puntos de mínimo absoluto de la funcional de Dirichlet D .

DEMOSTRACIÓN. Sea $f: D^2 \rightarrow SU_{2m}$, $f|_{S^1} = j_0$ es un punto de mínimo absoluto de la funcional de Dirichlet D . En el lema precedente se demostró que el valor de la funcional D en los puntos de mínimo absoluto es igual a $D[i_0]$, y que este valor es igual a $A[i_0]$. Puesto que $A[f] \leq D[f] = D[i_0] = A[i_0]$, entonces $A[f] \leq A[i_0]$, pero

ya que esta relación es posible considerarla en una métrica estándar de la esfera S^{2m-1} , es evidente que $A \{f\} = A \{i_0\}$, y entonces $fD^2 \subset \subset S^{2m-1}$ es una sección plana central; además, la aplicación f es armónica. Prolonguemos un disco completamente geodésico fD^2 hasta la esfera S^2 , que es completamente geodésica, en la esfera S^{2m-1} (y, por lo tanto, completamente geodésica en el grupo SU_{2m}). Hemos obtenido en el grupo SU_{2m} dos esferas completamente geodésicas: S_0^2 y \tilde{S}^2 , con esto, $S_0^2 \cap \tilde{S}^2 \supset S_0^1 \ni E_{2m}$. Los subgrupos mínimos que contienen estas esferas S_0^2 y \tilde{S}^2 , son los subgrupos G_1 y G_2 isomorfos al grupo SU_2 . Las dos inmersiones (encajes) $\alpha_1: G_1 \rightarrow SU_{2m}$; $\alpha_2: G_2 \rightarrow SU_{2m}$ definen dos representaciones exactas del grupo SU_2 en el grupo SU_{2m} . Ya que el rango $(SU_2) = 1$, se puede considerar que la circunferencia S_0^1 es una imagen de un toro máximo $T^1 = S^1 \subset SU_2$ además, $S_0^1 \subset T^{2m-1}$, donde T^{2m-1} es un toro máximo en el grupo SU_{2m} . Puesto que dos representaciones j_1 y j_2 coinciden en el toro T^1 (T^1 es un subgrupo máximo conmutativo en el grupo SU_2 ; en el caso dado este toro es unidimensional y homeomorfo a la circunferencia), entonces ellas son equivalentes, es decir, hay un elemento $x \in SU_{2m}$ tal, que se cumple la igualdad: $j_1 = \text{Ad}_x \cdot j_2$. Dos esferas S_0^2 y xS^2x^{-1} inmersas (encajadas) en el grupo G_1 se pueden hacer coincidir mediante un automorfismo interior más Ad_{x_1} ; entonces en la esfera S_0^2 obtenemos dos geodésicas: S_0^1 y $x_1 S_0^1 x_1^{-1}$. Por consiguiente, hay un elemento $x_2 \in G_1$ tal, que $S_0^1 \equiv x_2 x_1 S_0^1 x_1^{-1} x_2^{-1}$. Por eso el automorfismo Ad_x , donde $y = x_2 x_1 x$, pasa la aplicación f a la aplicación i_0 , dejando en su lugar la circunferencia S_0^1 , o sea, $f \in i(U_m)$. El lema queda demostrado.

De manera que está concluida completamente la demostración del teorema.

Notemos que todos los puntos del conjunto W son no simplemente puntos minimales para ambas funcionales A y D , sino que incluso puntos «completamente geodésicos» (es decir, aplicaciones completamente geodésicas). Esta circunstancia ha tenido lugar también en el caso unidimensional, pero allí el mínimo de alguna trayectoria lleva tras sí automáticamente el hecho de que esta trayectoria es geodésica; empero en el caso bidimensional del hecho de que el disco bidimensional D^2 sea mínimo, no se deduce en absoluto que éste sea completamente geodésico en un grupo abrazante. Es más, los únicos discos completamente geodésicos D^2 con frontera S_0^1 son discos del conjunto W' ; en otras palabras, si la aplicación $f \in \Pi_2'$ es un punto crítico para la funcional D y si, además, el disco fD^2 es completamente geodésico, tenemos $f \in W$.

III. Periodicidad ortogonal desde el punto de vista de los problemas de variación multidimensionales.

Un teorema análogo al teorema más arriba demostrado de la

periodicidad unitaria, tiene lugar también para un grupo ortogonal (y se llama, respectivamente, teorema de periodicidad ortogonal) de Bott.

TEOREMA 3. *Se tiene un isomorfismo $\pi_i(O) \cong \pi_{i+8}(O)$, donde O es un grupo ortogonal estable: $O = \lim O_n$; $O_n \subset O_{n+1}$, son inmersiones estándares. Además, los grupos $\overrightarrow{\text{homotópicos}}$ estables de un grupo ortogonal son de la forma:*

$$\begin{aligned} \pi_0 = \mathbb{Z}_2, \quad \pi_1 = \mathbb{Z}_2, \quad \pi_2 = 0, \quad \pi_3 = \mathbb{Z}, \quad \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = 0, \\ \pi_7 = \mathbb{Z}, \quad \pi_i = \pi_{i+8}. \end{aligned}$$

Demostremos sólo la primera parte de este resultado, además, utilizaremos de inmediato el aparato de los problemas de variación multidimensionales. Es que la demostración estándar del teorema de periodicidad ortogonal que utiliza la teoría unidimensional de Morse, consta de ocho pasos (por analogía con la demostración estándar de la periodicidad unitaria de dos pasos), mientras la utilización de la funcional de Dirichlet definida en un espacio de aplicaciones de los discos octadimensionales (en vez de los bidimensionales de periodicidad unitaria), nos permitirá a la vez, o sea, en un paso, obtener el isomorfismo: $\pi_i(O) = \pi_{i+8}(O)$ (aunque un poco no estrictamente).

Consideremos un espacio euclídeo \mathbb{R}^p de matrices reales de dimensión $p \times p$; el producto euclídeo escalar puede ser escrito de la forma: $\varphi(A, B) = \text{Sp}(AB^T)$. Entonces el grupo SO_p se sumerge isométricamente en una esfera estándar S^{p^2-1} de radio \sqrt{p} (con centro en el punto 0) como una subvariedad suave, en la cual una métrica euclídea $\varphi(A, B)$ induce a una métrica bilateral invariante de Riemann coincidente con la forma de Killing. El álgebra de Lie so_p del grupo SO_p está sumergida en el espacio \mathbb{R}^{p^2} como un subespacio de las matrices X , $X^T = -X$, y la intersección $so_p \cap SO_p$ es un espacio compacto simétrico $SO_p/U_{(p/2)}$, si p es par. Designamos a la intersección $so_p \cap SO_p$ por $\Omega_1(p)$; entonces, es evidente que la variedad $\Omega_1(p)$ se compone exactamente de tales elementos $g \in SO_p$, para los cuales se cumple la igualdad $g^2 = -E$, o sea, $\Omega_1(p)$ coincide con un conjunto de las estructuras complejas en \mathbb{R}^p . Ahora tomemos $p = 16r$; entonces en el grupo SO_{16r} hay ocho «estructuras complejas» anticonmutadoras, o sea operadores a los cuales vamos a designarlos por J_1, J_2, \dots, J_8 ; $J_s^2 = -E$, $J_s J_k + J_k J_s = 0$, $k \neq s$. Todos los vectores J_s ($1 \leq s \leq 8$) se encuentran en el plano so_{16r} y, en virtud de la condición de anticonmutatividad, todos ellos son ortogonales de par en par. Además, cada vector J_r es ortogonal al vector $E \in SO_{16r}$, por eso la esfera $S_0^q = \{x \in SO_{16r} \mid x = a^0 E + a^1 J_1 + \dots + a^8 J_8; (a^0)^2 + \dots + (a^8)^2 = 1\}$ es una sección plana de la esfera S^q (donde $q = 256r^2 - 1$), pasante por el origen de las coordenadas y, por consiguiente, completamente geodésica en la esfera S^q y en el grupo $SO_{16r} \subset S^q$. Claro que se cumple la igualdad $S_0^q \cap so_{16r} = S_0^q \cap$

$\cap \Omega(16r) = \bar{S}_0^7$, donde \bar{S}_0^7 es un ecuador completamente geodésico, dado por la ecuación $a^0 = 0$. Fijemos en el grupo SO_{16r} una esfera completamente geodésica $S_0^7 = \{x = a^0 E + a^1 J_1 + \dots + a^7 J_7; (a^0)^2 + \dots + (a^7)^2 = 1\}$; la esfera S_0^7 es una frontera de un disco octadimensional completamente geodésico $D_0^8 \subset S_0^8$, $D_0^8 = \{x \in S_0^8; a^8 \geq 0\}$. Sea D^8 un disco octadimensional estándar en una métrica euclídea, $S^7 = \partial D^8$, i'' es una aplicación estándar de D^8 en una semiesfera, idéntica en la frontera ∂D^8 , i' es la única inmersión isométrica de la semiesfera $i'' D^8$ en el grupo SO_{16r} , coincidente en la esfera $i'' S^7$ con una inmersión isométrica fijada $j_0: S^7 \rightarrow S_0^7$. Hagamos $i_0 = i' \circ i''$, $i_0: D^8 \rightarrow SO_{16r}$. Consideremos el espacio Π_8 de todas las aplicaciones continuas $f: D^8 \rightarrow SO_{16r}$ tales, que $f|_{S^7} = j_0$. Sea $\Pi_8' \subset \Pi_8$ un subespacio consistente en todas las aplicaciones f de la clase $H_8^1(D^8)$ del disco D^8 en el grupo SO_{16r} . Consideremos en el espacio Π_8' dos funcionales: $A[f]$ que es una funcional del área $A[f] = \int_{D^8} \sqrt{\det \Omega} dv$ y una funcional de Dirichlet

$$D[f] = \int_{D^8} \left[\frac{1}{8} (x_\alpha^i, x_\beta^j) \right]^4 dv = \int_{D^8} \left[\frac{1}{8} \sum_{\alpha=1}^8 g_{ij}(x_\alpha^i, x_\alpha^j) \right]^4 dv.$$

Entonces $A[f] \leq D[f]$ con cualquier $f \in \Pi_8'$.

Designemos por β_8 a un isomorfismo estándar de los grupos homotópicos $\pi_s(\Pi_8) \cong \pi_{s+8}(SO_{16r})$.

TEOREMA 4. (Fomenko). *Consideremos el grupo SO_{16r} y los espacios funcionales Π_8 y Π_8' de las aplicaciones de los discos octadimensionales en un grupo ortogonal. En el espacio Π_8' consideramos un subconjunto W consistente en todos aquellos puntos (aplicaciones) f , en los cuales la funcional de Dirichlet $D[f]$ tiene un mínimo absoluto. Entonces tenemos que:*

- el conjunto W es homeomorfo a un grupo ortogonal O_r ;
- la inmersión $i: W \rightarrow \Pi_8' \rightarrow \Pi_8$ induce un isomorfismo de los grupos homotópicos $i_*: \pi_s(O_r) \rightarrow \pi_s(\Pi_8)$ para $s \leq r-2$; por eso un armazón $(r-2)$ -dimensional del espacio Π_8 es homotópicamente equivalente a un armazón $(r-2)$ -dimensional del grupo O_r y la composición $\beta_8 \circ i_*: \pi_s(O_r) \xrightarrow{\cong} \pi_{s+8}(SO_{16r})$ es un isomorfismo de periodicidad ortogonal con $s \leq r-2$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Puesto que el grupo $\pi_2(U_{2m})$ es trivial, entonces el espacio Π_2 es conexo. Puesto que $\pi_8(SO_{16r}) = \mathbb{Z}_2$, el espacio Π_8 es inconexo y se compone de dos componentes conexos; como será evidente más abajo de la demostración, el conjunto W también se compone de dos componentes conexos, al mismo tiempo cada componente del espacio Π_8 contiene exactamente un componente del conjunto W y se contrae (cuando $r \rightarrow \infty$) exactamente en este componente de conexión.

Ahora consideremos en el grupo SO_{16r} un subconjunto Ω_8 consistente en todas las estructuras complejas J , las cuales anticonmutan con las estructuras J_1, J_2, \dots, J_7 (véase más arriba su descripción), es decir que anticonmutan, de este modo, con cada punto de una esfera hexadimensional estándar $S_0^6 \subset S_0^7$, dada por la igualdad $a^0 = 0$. Así, por ejemplo, está claro que $J_8 \in \Omega_8$. El cálculo algebraico directo muestra que el espacio Ω_8 se compone de dos componentes de conexión y, además, es homeomorfo al grupo O_7 . Luego, el espacio Ω_8 se contiene por completo en un plano ortogonal a todos los vectores E, J_1, \dots, J_8 . Claro, que $S_0^6 \cap \Omega_8 = \{J_8, -J_8\}$, y por eso la intersección $D_0^8 \cap \Omega_8 = J_8$ es un punto.

Asignemos a cada punto $x \in \Omega_8$ una esfera completamente geodésica $S^8(x)$, que tiene como ecuador la esfera estándar S_0^7 . Si $x \in \Omega_8$, entonces el vector x es ortogonal a los vectores E, J_1, \dots, J_7 ($xJ_s = -J_sx, 1 \leq s \leq 7$, y el vector E es ortogonal a todas las estructuras complejas). Por eso la esfera, tendida en los vectores básicos E, J_1, \dots, J_7, x , es una sección plana central en la esfera S^4 y es completamente geodésica en el grupo SO_{16r} . Consideremos en la esfera $S^8(x)$ el disco

$$D^8(x) = \{y \in S^8(x); y = y^0E + \dots + y^7J_7 + y^8x; y^8 \geq 0\}.$$

Entonces a cada vector $x \in \Omega_8$ le corresponde unívocamente un disco completamente geodésico $D^8(x)$ tal, que $\partial D^8(x) = S_0^7$, y si $x_1 \neq x_2$, entonces $D^8(x_1) \cap D^8(x_2) = S_0^7$. Lo mismo que en el caso de la periodicidad unitaria, es posible definir la inmersión (el encaje) $i: O_r \xrightarrow{\cong} \Omega_0 \rightarrow \Pi_8' \rightarrow \Pi_8$, ya que para cualquier disco $D^8(x)$, $x \in \Omega_8$, existe la única isometría $\omega(x): i'' : D^8 \rightarrow D^8(x)$, $\omega(x) \circ i'' \mid S_0^7 = j_0$; entonces $i(x) = \omega(x) \circ i''$.

LEMA 10. La inmersión $i: O_r \rightarrow \Pi_8$ induce un isomorfismo de los grupos homotópicos hasta la dimensión $r - 2$.

DEMOSTRACION. Sea que la aplicación $f: S^8 \rightarrow O_r$ represente un elemento de un grupo homotópico: $[f] \in \pi_8(O_r)$; entonces en el grupo SO_{16r} obtenemos un conjunto $\{D^8(x)\}$, $x \in f(S^7)$; $\Pi_8' \ni i(x)$. Ya que la esfera S_0^7 está fijada, en el grupo SO_{16r} surge un subconjunto $\bar{S} = \bigcup_{x \in f(S^7)} D^8(x)$, que define la aplicación $F: S^{8+8} \rightarrow SO_{16r}$ tal, que

$F \mid_{S^8} = f$ (la esfera S^8 es un ecuador en la esfera S^{8+8}). Ahora consideremos la sucesión de las esferas de dimensión nula $S_k^0 = \{J_k, -J_k\}$, $1 \leq k \leq 7$. Fijando la esfera S_7^0 , podemos construir una correspondencia $\gamma_7: x \rightarrow D^1(x)$, donde el punto $x \in \Omega_8$, la trayectoria $D^1(x)$ es una geodésica minimal del punto J_7 al punto $-J_7$, cuyo punto medio es x . Entonces $D^1(x) \in \Omega_7$, y existe una aplicación $F_7: S^{8+1} \rightarrow$

→ Ω_7 tal, que se tiene una correlación:

$$F_7 S^{s+1} = \bigcup_{x \in f(S^s)} D^1(x), \quad F_7|_{S^s} = f,$$

con esto, de la teoría unidimensional de Morse se deduce que la correspondencia $f \rightarrow F_7$ define el isomorfismo de los grupos homotópicos $\pi_s(\Omega_s) \xrightarrow{\cong} \pi_{s+1}(\Omega_7)$. Fijando una esfera de dimensión nula S^0 , obtenemos la correspondencia: $\gamma_6: y \rightarrow D^1(y)$, $y \in \Omega_7$; está claro, que existe la aplicación

$$F_6: S^{s+2} \rightarrow \Omega_6; \quad F_6 S^{s+2} = \bigcap_{y \in F_7(S^{s+1})} D^1(y); \quad F_6|_{S^{s+1}} = F_7.$$

Continuando este proceso obtenemos las correspondencias: $\gamma_7, \gamma_8, \dots, \gamma_1, \gamma_0$, donde $E = J_0$; la aplicación $F_0: S^{s+8} \rightarrow \Omega_0 = SO_{16r}$, además, la aplicación F_0 corresponde a la aplicación f para un isomorfismo de periodicidad; $F_0 S^{s+8} = F S^{s+8}$, porque $\bigcup_{x \in f(S^s)} \{\gamma_0 \circ \gamma_1 \circ$

$\dots \circ \gamma_7(x)\} = \bar{S}$. Por eso es posible considerar que $F_0 \equiv F$

Esto concluye la demostración del lema, ya que $\pi_s(\Pi_s) = \pi_{s+8}(SO_{16r})$.

De manera que para un subespacio $i(O_r) \subset \Pi_s$ se cumplen todas las afirmaciones del punto b) del teorema demostrable por nosotros. Queda para probar que se ha cumplido la igualdad $W = i(O_r)$.

LEMA 11. Se cumple la relación: $i(O_r) \subset W$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que el disco $i(x)$ (D^8) es una sección plana central, entonces la afirmación del presente lema se demuestra de la misma manera que la afirmación correspondiente en el teorema sobre la periodicidad unitaria, es decir, se deduce de la desigualdad $A[f] \leq D[f]$.

LEMA 12. Es justa la relación: $i(O_r) = W$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in W$, es decir que la funcional D tome en la aplicación f su valor mínimo. Sea $t_0: D^8 \rightarrow D_0^8$ (véase más arriba); entonces, es evidente que $A[t_0] = D[t_0]$. Ya que $A[f] \leq D[f] = D[t_0] = A[t_0]$, entonces lo mismo que al demostrar el correspondiente lema de periodicidad unitaria, se determina que el disco $f(D^8)$ es una sección plana central, que contiene la esfera S_0^7 en calidad de frontera. Sea $x \in f(D^8)$ y el vector x sea ortogonal a todos los vectores E, J_1, \dots, J_7 ; entonces tenemos: $x = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, donde γ es una geodésica en el disco $f(D^8)$, $\gamma(0) = E$, $\gamma(1) = -E$. La longitud $L(\gamma)$ es igual a $L(\gamma')$, donde la geodésica γ' se contiene en el disco $f(D^8)$ y es tal, que $\gamma'(0) = E$, $\gamma'(1) = -E$, $\gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = J_1$. Por eso γ es una geodésica minimal del punto E al punto $-E$ en el grupo SO_{16r} . De aquí tenemos: $x = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) \in \Omega_1$, es decir, $x^2 = -E$.

Puesto que el vector x es ortogonal a todos los vectores J_s ($1 \leq s \leq 7$), entonces $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + J_s) \in \Omega_1$, o sea, $\frac{1}{2}(x + J_s)^2 = -E$.

Por consiguiente, $xJ_s + J_sx = 0$, o sea, $x \in \Omega_8$. Por eso $f \in i(O_r)$ puesto que $f(D^8) = D^8(x)$. El lema queda demostrado. De esta manera, está concluida la demostración de la periodicidad ortogonal aunque no rigurosamente, sin recurrir a la teoría «unidimensional» de Morse.

Claro que se tiene un teorema completamente análogo también en el caso de un grupo simpléctico Sp_n . Omitimos las formulaciones y demostración dejándolas al lector como un ejercicio útil en la técnica de los problemas de variación multidimensionales.

PROBLEMA 1. Demostrar que se tienen las siguientes equivalencias homotópicas: a) $BSp = \Omega\Omega\Omega SO$; b) $BO = \Omega\Omega\Omega Sp$ utilizando el mismo método. Obtener de estas igualdades los ocho primeros grupos homotópicos: $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, 0, \mathbb{Z}, 0, 0, 0, \mathbb{Z}$.

En el caso de la periodicidad unitaria hemos tenido la siguiente afirmación útil: el conjunto $i(U_m) \subset \Pi_2$ es una órbita del punto $i_0 \in \Pi_2$ con la acción adjunta del grupo $G \subset U_{2m}$, donde $G \cong U_m$, en un conjunto de aplicaciones Π_2 . En el caso de la periodicidad ortogonal la afirmación análoga es justa para $i(O_r)$, aunque no hemos utilizado este hecho al demostrar el teorema.

AFIRMACIÓN 1. El conjunto $W = i(O_r)$ sumergido (encajado) en el espacio Π_8 es una órbita del punto $i_0 \in \Pi_8$ con la acción adjunta del grupo $G \subset SO_{16r}$ en el conjunto de todas las aplicaciones Π_8 , donde $G = J_8\Omega_8 \simeq O_r$.

DEMOSTRACION. Basta con probar que para cualquier disco completamente geodésico $D^8(x)$, donde $x \in \Omega_8$ hay un elemento $g \in SO_{16r}$ tal, que se cumplen las igualdades: $gJ_s = J_s g$ ($1 \leq s \leq 7$) y $gxg^{-1} = J_s$. Consideremos $g \in SO_{16r}$, $gJ_s = J_s g$ ($1 \leq s \leq 7$); entonces $g\Omega_{8s}g^{-1} \subset \Omega_8$ y $(gD_0^8g^{-1}) \cap \Omega_8 = gJ_8g^{-1}$, es decir, $gD^8(x)g^{-1} = D^8(gxg^{-1})$. Sea R el subgrupo de todos los elementos $g \in SO_{16r}$ tales, que $gJ_s = J_s g$ ($1 \leq s \leq 7$), y sea $p(g) = gJ_8g^{-1}$ una proyección natural $p: R \rightarrow \Omega_8$. Consideremos en el grupo SO_{16r} un desplazamiento $g \rightarrow J_8g$. Sean $g \in R$, $g = \exp A$, $A \in T_E R$. Puesto que $gJ_s = J_s g$, luego $AJ_s = J_s A$. Entonces es fácil ver que J_8g anti-conmuta con J_s ($1 \leq s \leq 7$), es decir, $J_8g \in \Omega_8$, $J_8R \subset \Omega_8$. Y viceversa, sea $J_8 \exp A \in \Omega_8$; entonces $AJ_s = J_s A$ ($1 \leq s \leq 7$), o bien $gJ_s = J_s g$, donde $g = \exp A$ (o sea, $g \in R$, $J_8R \supset \Omega_8$). De aquí obtenemos: $\Omega_8 = J_8R$. Por eso la proyección p es un difeomorfismo y para cualquier $x \in \Omega_8$ hay un elemento $g \in R$ tal, que $x = gJ_8g^{-1}$. La proposición queda demostrada.

CONCLUSION. Se deduce de los teoremas más arriba demostrados, que el mecanismo del surgimiento de la periodicidad unitaria, lo mismo que la ortogonal, es el mismo y el resultado definitivo depende del hecho de en qué espacio consideramos una funcional multidi-

mensional de Dirichlet; en el caso del espacio de las aplicaciones de los discos bidimensionales obtenemos la periodicidad unitaria, y en el caso del espacio de aplicaciones de los discos octadimensionales, la ortogonal.

Sería interesante obtener una demostración directa de estos dos teoremas, la cual no utiliza alguna información relacionada con las funcionales unidimensionales de acción y longitud. La demostración directa se deduciría inmediatamente del hecho de la contractibilidad de un armazón $(2m)$ -dimensional del espacio Π_2 (respectivamente, de un armazón $(r-2)$ -dimensional del espacio Π_3) en el subespacio $i(U_m)$ (respectivamente, $i(O_r)$), que es el conjunto de los puntos del mínimo absoluto de la funcional de Dirichlet. Exactamente el teorema respectivo de la contractibilidad para una funcional de acción (véase la teoría clásica de Morse en un espacio de bucles) permite realizar el paso: $\pi_{i-1}(G_{2m,m}^{\mathbb{C}}) \cong \pi_{i-1}(f_1)$. Aún no existe ninguna afirmación análoga para los problemas de variación multidimensionales. Esto está ligado con las dificultades que surgen con estudiar los problemas multidimensionales de «tipo de Plateau», cuando una funcional multidimensional puede degenerarse en ciertos subconjuntos de medida positiva, que se contienen en subvariedades extremales.

§ 26. Teoría de Morse y algunos movimientos en el problema plano de n cuerpos

En este párrafo examinaremos algunos movimientos del problema plano de n cuerpos. Como se sabe, es posible considerar en una primera aproximación que los planetas reales del sistema solar se mueven en un plano llamado plano de la eclíptica. El centro de las masas de todo este sistema es posible considerarlo con elevado grado de exactitud coincidente con la posición del Sol. El movimiento del sistema está dirigido por el potencial de Newton conforme a las leyes de la mecánica clásica. Como siempre, el movimiento del sistema se determina con los datos iniciales: hay que definir las posiciones de las masas gravitantes y sus velocidades en un momento inicial del tiempo. Es bien conocido que las soluciones generales de este sistema son muy complicadas (por ejemplo, según el teorema clásico de Bruns — Poincaré, el sistema no admite integrales analíticas de movimiento sobrantes).

Sin embargo, a pesar de la complejidad del problema general, es posible destacar algunas subclases naturales en la multitud de todas las soluciones que admiten una descripción bastante simple. Una de estas subclases es así llamadas «soluciones del sólido», o sea, tales soluciones particulares, con las cuales el movimiento de todo el sistema de los cuerpos se representa como un giro simultáneo, de todas las masas del sistema en el mismo ángulo en el plano de la eclíp-

tica. En otras palabras, todo el sistema como un sólido gira en torno a su centro de masas; en este caso particular no se cambian las posiciones mutuas de todos los cuerpos del sistema y no dependen del tiempo. A tales soluciones periódicas se las llaman a veces en la literatura especializada «trayectorias circulares». Un hecho notable es la circunstancia de que la descripción de tales «soluciones del sólido» del problema de n cuerpos se reduce a la descripción de los puntos críticos de cierta función de Morse, además, la información topológica relacionada naturalmente con las funciones de Morse sobre las variedades suaves (véase más arriba), permite hacer importantes declaraciones cualitativas sobre la estructura geométrica de estas soluciones circulares. Por ejemplo, es muy interesante el problema: cuál es la configuración formada en un plano bidimensional por n cuerpos del sistema movientes en correspondencia con la «solución de sólido» del sistema. Está claro que no toda configuración ni mucho menos de n puntos sobre un plano puede generar las trayectorias circulares del sistema. Como resulta, tales configuraciones singulares se determinan con un juego de las masas de los cuerpos del sistema y en el caso, cuando todas las masas, salvo una, son iguales, se definen con ciertos grupos discretos de simetrías.

A tales configuraciones se las llaman a veces equilibrios relativos del sistema.

Ahora pasemos a plantear el problema exactamente. El problema plano de n cuerpos de la mecánica celeste se determina completamente con un juego de n números reales positivos m_1, m_2, \dots, m_n . Vamos a considerar, que todos los n cuerpos se representan con n puntos de un plano bidimensional euclídeo. Sea que el origen de las coordenadas, el punto O , coincida con el centro de las masas del sistema de n cuerpos. Demos la posición de cada j -ésimo punto en un plano con una coordenada compleja $z_j = x_j + iy_j$; puesto que O es un centro

de las masas del sistema, tenemos una relación: $\sum_{j=1}^n m_j z_j = 0$. De tal manera, un espacio configurado del sistema es un subespacio lineal M^{2n-2} (hiperplano complejo) en un espacio euclídeo $C^n = R^{2n}$:

$$M^{2n-2} = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in R^{2n} \left\{ \sum_{j=1}^n m_j z_j = 0 \right\} \right\}.$$

Un espacio de fase del sistema es un espacio fibrado tangente $TM = M \times M$ (producto directo).

La energía cinética del sistema K es definida por la fórmula

$$K(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |v_i|^2.$$

donde v es un vector de velocidad, $\sum_{i=1}^n m_i v_i = 0$, $|v_i|$ es la longitud euclídea del vector en el plano \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$ (n veces).

Consideremos en un espacio configurado del sistema un subconjunto singular consistente en un juego de los hiperplanos «bisectores», precisamente:

$$\Delta_{ij} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j\}; \quad \Delta = \bigcup_{i,j} \Delta_{ij}.$$

La energía potencial del sistema se da como una función en un espacio configurado $M \setminus \Delta$, donde

$$V(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|z_i - z_j|}.$$

De manera que las ecuaciones clásicas de Newton definen un campo vectorial X en un espacio fibrado cotangente $T = T(M \setminus \Delta)$. El espacio configurado del sistema es $(M \setminus \Delta)$, y el espacio de fase es $T^*(M \setminus \Delta)$.

La energía completa $E: T \rightarrow \mathbb{R}^1$ se define por la fórmula: $E = K + V$. Tenemos en las coordenadas (z, v) : $E(z, v) = K(v) + V(z)$; la función $E(z, v)$ definida en $T^*(M \setminus \Delta)$ es la primera integral del flujo X , es decir, la función $E(z, v)$ es constante en cada trayectoria integral $(z(t), v(t))$ del sistema X . A la par con esta integral el sistema X admite una integral más (no dependiente funcionalmente de la integral E en los puntos de la posición general en $T(M \setminus \Delta)$) que es un momento de impulso designado por J y definido por la fórmula:

$$J(z, v) = \sum_{i=1}^n m_i [z_i \wedge v_i],$$

donde por $[z_i \wedge v_i]$ está designado un producto vectorial (o un producto exterior de dos 1-formas):

$$z_i^1 v_i^2 - z_i^2 v_i^1, \quad \text{donde } z_i = (z_i^1, z_i^2); \quad v_i = (v_i^1, v_i^2)$$

son coordenadas cartesianas de los vectores z_i y v_i en un plano \mathbb{R}^2 .

Consideremos en \mathbb{R}^2 una acción estándar de un grupo $G = S^1$ (giros en torno al centro de masas); entonces esta acción genera una acción por coordenadas evidente en $M \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$ (n veces) también en un espacio fibrado tangente TM . Con esto un grupo G conserva (transforma en sí) los planos «bisectores» $\Delta_{ij} = \{(z_i = z_j)\}$; por consiguiente, el grupo G queda invariante a M/Δ , $T(M \setminus \Delta)$, K , J , V , E , X . De tal modo, el flujo X determina naturalmente un sistema dinámico en un espacio cociente: $T(M \setminus \Delta)/G = T((M \setminus \Delta)/G)$. Ya que es posible factorizar por acción los grupos

de alargamiento $z \rightarrow \lambda z$ en \mathbb{C}^n , entonces, definitivamente, podemos reducir el sistema a un sistema en $T(\mathbb{C}P^{n-1} \setminus \tilde{\Delta})$, donde $\tilde{\Delta}$ es un factor Δ por dos acciones más arriba mencionadas de los grupos: de rotaciones y de alargamientos. Esta factorización la utilizaremos más tarde, y ahora volvamos a un sistema inicial en $T(M \setminus \Delta)$.

La existencia de dos integrales E y J permite definir una aplicación $I: T \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ por la fórmula: $I(\xi) = (E(\xi), J(\xi)) \in \mathbb{R}^2$, donde $\xi = (z, v) \in T(M \setminus \Delta) = T$. La aplicación $I: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ es suave; consideremos un espacio fibrado de la variedad T en las preimágenes $I_{c,p} = I^{-1}(c, p)$, donde $(c, p) \in \mathbb{R}^2$; $E(\xi) = c$, $J(\xi) = p$. Las preimágenes $I_{c,p}$ son (para casi todos los puntos $(c, p) \in \mathbb{R}^2$) subvariedades suaves de codimensión 2 en la variedad $T = T(M \setminus \Delta)$. Está claro de la definición de I , que todas las superficies $I_{c,p}$ son superficies comunes de nivel de dos integrales: E y J y tienen (en los puntos de la posición general) una dimensión $4n - 4 - 2 = 4n - 6$, ya que $\dim T = 4n - 4$.

LEMA 1. Las variedades $I_{c,p}$ son invariantes respecto a la acción del grupo $G = S^1$ y respecto al flujo X .

La demostración se deduce inmediatamente de la descripción de la acción de S^1 en $\mathbb{C}^n \setminus \Delta$ y en $T(\mathbb{C}^n \setminus \Delta)$.

Puesto que $I_{c,p}$ (o sea, la superficie de energía constante $E = c$ y del momento de impulso $J = p$) es invariante con la acción de S^1 , entonces está definido correctamente un espacio cociente $\tilde{I}_{c,p} = I_{c,p}/S^1$.

Uno de los problemas resolubles en los límites de la mecánica celeste clásica consiste en dar una descripción de la estructura topológica de las superficies $I_{c,p}$ e $\tilde{I}_{c,p}$. Ahora vamos a considerar trayectorias circulares en el problema de n cuerpos.

Sean fijadas las masas m_1, \dots, m_n ; entonces la configuración $z = (z_1, \dots, z_n)$ (que es dada con las posiciones de los puntos z_1, \dots, z_n , donde $\sum m_i z_i = 0$) se llama equilibrio relativo (el conjunto de tales configuraciones se designa por R_e), si la acción estándar de S^1 en \mathbb{R}^2 (y, por consiguiente, en \mathbb{C}^n) induce el movimiento $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$, que satisface las ecuaciones del movimiento de Newton. En otras palabras, cada punto z_i circunscribe una circunferencia $z_i(t)$, conservando con esto las posiciones recíprocas de los puntos z_1, \dots, z_n .

El conjunto $R_e \subset M \setminus \Delta$, evidentemente, es invariante respecto a la acción de S^1 y la multiplicación por un escalar (o sea, respecto a la transformación $z \rightarrow \lambda z$, $\lambda \neq 0$), por eso está definido correctamente un conjunto Φ_n de las clases de equivalencia en R_e (dos configuraciones z y z' se consideran equivalentes, si es posible hacer coincidir las mediante un giro ortogonal y la multiplicación por un escalar).

Resulta que con pequeños n el conjunto Φ_n puede ser descrito efectivamente (véase esto más abajo).

Ahora pasemos a describir los equilibrios relativos por puntos críticos de una función V (potencial).

Consideremos en $M \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, que se da con una forma simétrica $K(\xi, \eta) = \sum m_i \xi_i \eta_i$ (K es la energía cinética del sistema); designemos por $S_K = S_K^{2n-1}$ a una esfera unidad en M respecto a este producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $S_K = \{z \in M \mid K(z, z) = 1\}$. Con esto utilizamos el hecho de que M es isométrica a cada espacio tangente suyo (utilizamos el hecho de que $M \setminus \Delta$ es un dominio $2n$ -dimensional en un espacio lineal \mathbb{R}^{2n}). Por $S_K \setminus \Delta$ designemos a un complemento en S_K a los planos bisectores Δ , es decir, $S_K \setminus \Delta = S_K \setminus (S_K \cap \Delta)$. Notemos, que es posible describir las superficies de nivel $I_{c,p}$ en términos de las variedades $S_K \setminus \Delta$. En efecto, consideremos para un ejemplo un caso particular: el movimiento del sistema por la superficie de nivel $I_{c,0}$, que tiene valor nulo del momento de cantidad de movimiento. Si $J(z, v) = 0$, tenemos: $\sum m_i [z_i \wedge v_i] = \sum m_i (z_i^2 v_i^2 - z_i^2 v_i^2) = 0$. De aquí se deduce la siguiente afirmación geométrica.

PROPOSICIÓN 1 (Smale). *En el problema plano de n cuerpos con las masas m_1, \dots, m_n el movimiento de un sistema dinámico con un momento nulo de impulso es realizado por una superficie de nivel de dos primeras integrales $E = c = \text{const}$, $J = p = 0$, es decir, por una superficie integral $I_{c,0}$, donde la superficie $I_{c,0}$ tiene la siguiente estructura topológica:*

a) si la energía $E = c$ es no negativa, entonces $I_{c,0}$ es difeomorfa a un producto directo $S^{2n-4} \times (S_K \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^1$; la dimensión de $I_{c,0}$ es igual a $(2n - 4) + (2n - 2 - 1) + 1 = 4n - 6$;

b) si la energía $E = c$ es negativa, entonces la superficie $I_{c,0}$ es difeomorfa a un producto directo $\mathbb{R}^{2n-3} \times (S_K \setminus \Delta)$; la dimensión de $I_{c,0}$ es igual a $((2n - 3) + (2n - 2 - 1)) = 4n - 6$.

Las superficies $I_{c,p}$ correspondientes a los valores constantes de energía y de momento (ya con valores arbitrarios de c y p), también pueden ser descritas bastante simplemente en los términos de algunos espacios fibrados de Riemann sobre el espacio $S_K \setminus \Delta$. Puesto que la estructura topológica de $I_{c,p}$ no será utilizada en las siguientes construcciones, omitimos esa descripción.

Ahora formularemos un teorema básico del presente parágrafo.

TEOREMA 1 (Smale). *Sea dado un juego arbitrario de las masas m_1, \dots, m_n que define el problema plano de n cuerpos. Consideremos una variedad $S_K: \{K(z) = 1\}$; $\dim S_K = 2n - 3$, y consideremos sobre la variedad $S_K \setminus \Delta$ una función suave V_S que es una restricción en $S_K \setminus \Delta \subset M \setminus \Delta$ del potencial V dado en $M \setminus \Delta$; sea el punto $z \in M \setminus \Delta$ tal, que $K(z) = 1$, o sea, es posible considerar, que $z \in S_K \setminus \Delta$. Entonces el punto z (configuración de n cuerpos) es un equilibrio rela-*

tivo, si, y sólo si, z es un punto crítico para la función V_S en $S_K \setminus \Delta$. Puesto que los equilibrios relativos z y $z' = \lambda z$ los consideremos equivalentes, entonces en cada clase de Φ_n se tiene sin falta un punto z tal, que $K(z) = 1$, por eso los puntos críticos de la función V_S en la variedad $S_K \setminus \Delta$ describen todo Φ_n , es decir las clases de los equilibrios relativos equivalentes.

La demostración de este teorema será dada más abajo. Ahora presentemos (sin demostración) algunos resultados de un carácter clasificatorio sobre las clases de los equilibrios relativos equivalentes.

En el caso del problema de dos cuerpos ($n = 2$) se tiene sólo una clase de los equilibrios relativos equivalentes. Para tres cuerpos ($n = 3$) se tienen cinco clases de los equilibrios relativos equivalentes. Dos clases se distinguen una de otra por la orientación y se representan geoméricamente por los vértices de un triángulo equilátero (llamado caso de Lagrange). Otras tres clases están formadas con los llamados equilibrios relativos colineales (caso de Euler). Esto significa que todos tres puntos z_1, z_2, z_3 se encuentran en una misma recta, y hay tres diferentes métodos de la posición de los puntos z_1, z_2, z_3 en la recta, los cuales satisfacen las ecuaciones de movimiento de Newton.

Un problema no solucionado: ¿es finito el conjunto Φ_n (es decir, un conjunto de clases diferentes de equilibrios relativos equivalentes) para cualquier juego de masas m_1, \dots, m_n ? En todos los ejemplos conocidos (examinados hasta el fin) el conjunto Φ_n es finito.

Pasemos a demostrar el teorema básico. Este es un corolario de un resultado general de la teoría de los sistemas de Hamilton.

Sea M —variedad suave— un espacio configurado de cierto sistema mecánico, sea $T = TM$ un espacio de fase del sistema; la energía cinética K es posible interpretarla como una métrica de Riemann sobre la variedad M , es decir, es posible comprender la forma K_z como un producto escalar en un espacio tangente $T_z M$. La energía completa E la escribamos de la forma $E = K + V$. Considerando dadas todas las magnitudes arriba definidas, podemos con ayuda de las ecuaciones de Hamilton (o de Lagrange) determinar las ecuaciones diferenciales ordinarias en un espacio fibrado tangente (o cotangente), es decir, un campo vectorial suave en $T = TV$. Estas mismas ecuaciones se pueden interpretar como ecuaciones diferenciales de segundo orden en la variedad M (véase [1], p. I, cap. 5).

Ahora supongamos que este sistema de Lagrange tiene cierto grupo configurado de simetrías. Esto significa que en la variedad M actúa suavemente cierto grupo de Lie G que conserva la métrica de Riemann K y la energía potencial V (dada «casi por doquier» en la variedad M). En otras palabras, G es un subgrupo de un grupo de isometrías de la métrica de Riemann K ; las condiciones arriba descritas, significan que el grupo G conserva también un respectivo sistema de Hamilton (engendrado por K, V). En particular, el potencial V es constante en las órbitas del grupo G .

AFIRMACIÓN 1. Sean: M, K, V, G , un sistema mecánico con el grupo de simetrías G ; M , un espacio configurado; K , la energía cinética (ella es una métrica de Riemann); V , un potencial en $M \setminus \Delta$, donde $\text{vol}(\Delta) = 0$; K y V son invariantes respecto a G . Sea $X \in \mathfrak{g}$, donde \mathfrak{g} es un álgebra de Lie del grupo G . Al elemento X es posible interpretarlo como un campo vectorial suave X sobre la variedad M ; designemos por ψ_t las trayectorias integrales del flujo X , es decir, las soluciones del sistema $\dot{z} = X(z)$. Designamos con φ_t las trayectorias integrales de un esquema mecánico inicial, es decir, las soluciones en la variedad M de una ecuación de segundo orden, definida por la energía completa $E = K + V$. Entonces la solución de $\psi_t(z)$ coincide con la solución de $\varphi_t(z)$ (o sea, para todo t : $\psi_t(z) = \varphi_t(z)$) si y sólo si, el punto inicial z es un punto crítico de una función f sobre la variedad M , la cual es dada por la fórmula $f(z) = V(z) - K(X(z))$. Para $V \equiv 0$ obtenemos la descripción de aquellas geodésicas (de la métrica K), las cuales coinciden con las órbitas de la acción de cierto subgrupo uniparamétrico de un grupo de isometrías.

La demostración de este hecho se deduce elementalmente del hecho de que nuestra condición es simplemente la condición de tangencia de un flujo de Hamilton en $T(M)$ con el flujo X levantado en $T(M)$. Ahora mostremos cómo se deduce de aquí el teorema fundamental de este parágrafo.

A la par con la función V en M consideremos una función nueva V_p definida en el conjunto $M \setminus \Delta$ y dada por la fórmula $V_p(z) = V(z) + p^2/4K(z)$, donde p es un momento de impulso.

Hemos introducido más arriba el espacio $S_K = \{K(z) = 1\}$; de la definición de M se deduce que $M \setminus 0$ es difeomorfa a $\mathbb{R}^+ \times S_K$, donde como \mathbb{R}^+ se designa un semieje real positivo; el difeomorfismo buscado $f: M \setminus 0 \rightarrow S_K \times \mathbb{R}^+$ se da por la fórmula:

$$f(z) = (\sqrt{K(z)}; z/\sqrt{K(z)}); \quad \sqrt{K(z)} \in \mathbb{R}^+, \quad z/\sqrt{K(z)} \in S_K.$$

Es evidente que la restricción de la aplicación f en el espacio $M \setminus \Delta$ transforma a $M \setminus \Delta$ difeomorfamente en $\mathbb{R}^+ \times (S_K \setminus \Delta)$. Consideremos la función V_S en $S_K \setminus \Delta$ como la restricción del potencial V en una subvariedad $S_K \setminus \Delta \subset M \setminus \Delta$; sea $\sigma(d)$ la designación del conjunto de los puntos críticos de una aplicación d .

Demostremos las dos relaciones siguientes:

$$A. \quad \sigma(V_p) = \{(t, x) \in (M \setminus \Delta) \approx \mathbb{R}^+ \times (S_K \setminus \Delta) \mid x \in \sigma(V_S), \\ t = -p^2/2V(x)\}$$

donde $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in S_K \setminus \Delta$, $z = (t, x)$.

$$B. \quad \sigma(V - K(X)) = \{z = (t, x) \in (M \setminus \Delta) \approx \mathbb{R}^+ \times (S_K \setminus \Delta) \mid x \in \sigma(V_S), \\ t = \sqrt[3]{-V(x)/2K(x)}\},$$

Notemos que se cumplen las siguientes igualdades evidentes: $K(z) = t^2$ (véase la representación del punto z en forma (t, x)), $V(z) = V(t, x) = V(x)/t$ (véase la fórmula explícita para el potencial $V(z)$ en el problema plano de n cuerpos). Demostremos la relación A.

El punto $z = (t, x)$ es crítico para la función V_p si, y sólo si, son iguales a cero las derivadas parciales: $\partial_t V_p = 0$, $\partial_x V_p = 0$ (donde $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$). De aquí obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t V_p(t, x) &= \partial_t \left(V(z) + \frac{p^2}{4K(z)} \right) = \partial_t \left(\frac{V(x)}{t} + \frac{p^2}{4t^2} \right) = \\ &= -\frac{V(x)}{t^2} - \frac{p^2}{2t^3} = 0, \end{aligned}$$

es decir, tenemos: $t = -p^2/2V(x)$. Luego, calculando $\partial_x V_p(t, x)$, obtenemos:

$$\partial_x V_p(z) = \frac{1}{t} (\partial_x V(x)) + \partial_x \left(\frac{p^2}{4t^2} \right) = \frac{1}{t} \partial_x V(x).$$

Así, $\text{grad } V_p(t, x) = 0$ si, y sólo si, $\partial_x V(x) = 0$ y $t = -p^2/2V(x)$, lo que demuestra la igualdad A.

Demostremos la relación B. Claro que

$$(V - K(X))(z) = V(t, x) - K(X(t, x));$$

de aquí obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t [V(t, x) - K(X(t, x))] &= \partial_t \left[\frac{V(x)}{t} - t^2 K(1, x) \right] = \\ &= -\frac{V(x)}{t^2} - 2tK(X(x)) = 0, \text{ donde } X(x) = X(1, x). \end{aligned}$$

Puesto que $t \in \mathbb{R}^+$, o sea, $t > 0$, de aquí se deduce que:

$$t^3 = -\frac{V(x)}{2K(X(x))}.$$

Luego calculando $\partial_x (V - K(X))(t, x)$, obtenemos:

$$\partial_x \left[\frac{V(x)}{t} - t^2 K(X(x)) \right] = \frac{1}{t} \partial_x V(x) - t^2 \partial_x [K(X(x))] = 0.$$

Puesto que el campo vectorial X está engendrado por un elemento X del álgebra de Lie de un grupo de isometrías, entonces el campo X conserva (con exactitud de un multiplicador escalar) una métrica de Riemann K . De aquí se deduce que $\partial_x (K(X(x))) = 0$. Así, definitivamente, $\partial_x V(x) = 0$.

La condición: $\text{grad } (V - K(X))(t, x) = 0$ se cumple si, y sólo si, $t^3 = -V(x)/2K(X(x))$; $\partial_x (V(x)) = 0$. La última condición significa, que $\text{grad}_x V(x) = 0$, donde $V(x) = V_S(x)$ es una restricción del potencial V de la variedad $M \setminus \Delta$ en la subvariedad $S_K \setminus \Delta$.

Así, ambas igualdades A y B quedan demostradas.

Demostración del teorema 1. Sean $z = (t, x)$ y $K(z) = 1$. Entonces el punto z es, en virtud de la afirmación 1, un punto, por el cual pasa la órbita de cierto subgrupo uniparamétrico de un grupo de isometrías coincidente con una trayectoria integral del sistema dinámico, sólo en el caso cuando el punto z es crítico para la función $V(z) - K(X(z))$. En virtud de la igualdad B, el conjunto de los puntos críticos de la función $V - K(X)$ (donde $K(z) = 1$) coincide con el conjunto de los puntos críticos de la función V_S en $S_K \setminus \Delta$. Pero los puntos críticos descritos en la afirmación 1 engendran órbitas que pasan por ellos (circunferencias) de los grupos uniparamétricos de isometrías. En el caso del problema plano de n cuerpos estas órbitas siendo trayectorias integrales del sistema dinámico dan un conjunto de posiciones de equilibrio relativo del sistema. Reuniendo por último toda la información obtenida, vemos que el punto $z \in M \setminus \Delta$, $K(z) = 1$, es un equilibrio relativo si, y sólo si, es un punto crítico de restricción V_S en $S_K \setminus \Delta$ del potencial V . Así queda demostrado completamente el teorema 1.

Ahora podemos pasar a examinar una clase especial de los equilibrios relativos, los llamados equilibrios relativos colineales, es decir, tales que todos los n cuerpos se encuentran en el plano en una recta. Calcularemos el número exacto de tales posiciones espaciales de equilibrio para un n arbitrario, utilizando la información obtenida más arriba sobre los puntos críticos de la energía potencial.

TEOREMA 2 (Mullton). *Para cualquier juego dado de masas m_1, \dots, m_n en el problema plano de n cuerpos, siempre hay exactamente $n!/2$ clases de equilibrios relativos colineales del sistema, es decir, hay $n!/2$ clases de equilibrio relativo cuando todos los puntos z_i (que dan las posiciones a los cuerpos del sistema) se encuentran en una misma recta que pasa por el centro de las masas, y en el proceso del movimiento esta recta gira en torno al centro de las masas (origen de las coordenadas); con esto, cada punto circunscribe una trayectoria circular (circunferencia con centro en el origen de las coordenadas).*

Sea que en un plano del sistema \mathbb{R}^2 se escoge una recta l . Ella define unívocamente el subconjunto $M_l \subset M$ de aquellos puntos $z = (z_1, \dots, z_n)$, para los cuales todas las coordenadas z_i pertenecen a la recta l . Lo mismo que antes, destaquemos un subconjunto Δ de planos bisectores y construyamos los siguientes subconjuntos: $S_l = S_K \cap M_l$, $S_l \setminus \Delta = S_l \setminus (S_l \cap \Delta)$. Consideremos la acción de una circunferencia S^1 en un conjunto S_K ; es evidente que el conjunto S_l queda en su sitio sólo con girar el plano en un ángulo π . Por consiguiente, en el conjunto S_l actúa de modo natural un grupo de segundo orden Z_2 . Consideremos el espacio cociente S_l/Z_2 , donde l es una recta fijada anteriormente en un plano bidimensional. Ya que la fijación de tal recta define unívocamente en cada recta compleja (o sea, en el plano real bidimensional) en \mathbb{C}^{n-1} , que pasa por

el origen de las coordenadas, cierta recta real, entonces el conjunto de todas estas rectas reales (surgidas al considerar todas las rectas complejas) se identifica de manera natural con un espacio real proyectivo, que da el siguiente difeomorfismo: $S_1/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{n-2}$. En este caso, es posible considerar la inmersión más arriba descrita de cada recta real en una correspondiente recta compleja como la «complejificación» de esta recta real, es decir, la inmersión $S_1/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{n-2} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-2}$, surgida al pasar de la recta l al plano \mathbb{R}^2 , coincide con una inmersión estándar de un espacio real proyectivo en un espacio complejo proyectivo. Consiguientemente, surge una inmersión inducida $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2}) \rightarrow \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$. Consideremos en $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$ una función suave $\tilde{V}: \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^1$ inducida por un potencial $V: M \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}^1$, donde $\tilde{\Delta} = \Delta/S^1$.

LEMA 2 *El número de clases de equilibrio relativo es igual exactamente al número de puntos críticos de una función suave $\tilde{V}: \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^1$.*

DEMOSTRACIÓN. De la definición de clase (véase más arriba), se deduce que cada clase de los equilibrios relativos es definida unívocamente por un equilibrio relativo normalizado contenido en ello, y estas posiciones en virtud del teorema 1, corresponden unívocamente a los puntos críticos de la función \tilde{V} . Con eso, utilizamos el hecho de que al girar un plano bidimensional, el equilibrio relativo pasa una vez más a ser equilibrio relativo, o sea, las transformaciones ortogonales transforman la clase de tales equilibrios en sí misma.

AFIRMACIÓN 2. (Smale). *Las clases de equilibrios relativos colineales están en una correspondencia biunívoca con los puntos de la función suave $\tilde{V}: \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^1$, los cuales se encuentran en una subvariedad $\mathbb{R} \setminus (P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2}) \subset \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \subset \mathbb{C}P^{n-2}$ (la inmersión (encaje) estándar ha sido descrita más arriba).*

DEMOSTRACIÓN. Si el equilibrio relativo (es decir, la configuración) dado por un juego de números $z = (z_1, \dots, z_n)$ es colineal, entonces todos esos números complejos se encuentran en una misma recta, y mediante una transformación ortogonal de un plano bidimensional es posible trasladarlos a todos a una recta destacada (y fijada) $l \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}^1$. Con eso, por un lado, no hemos salido de los límites de la clase de los equilibrios relativos colineales y, por otro lado, resultamos estar en un punto crítico de restricción de la energía potencial en una subvariedad real $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$, sumergida de una manera estándar en $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$. La afirmación queda demostrada.

De este modo, para describir equilibrios colineales basta con describir todos aquellos puntos críticos del potencial, que se encuentran en una subvariedad real, o sea, en un subespacio real proyectivo.

Para describir tales puntos es conveniente examinar todos los puntos críticos de restricción del potencial en esta subvariedad real. En el caso general, claro, el punto crítico de restricción de la función en la subvariedad de ningún modo tiene que ser también un punto crítico de la misma función en toda la variedad abrazante (lo inverso, claro está, es justo). Sin embargo, como ahora vamos a demostrar, en el caso concreto dado hay una correspondencia biunívoca entre los puntos críticos de restricción del potencial en un subespacio real y los puntos críticos de un potencial «completo» encontrados en este subespacio real.

AFIRMACIÓN 3. Si $z \in \mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ es un punto crítico de restricción del potencial \tilde{V} en la subvariedad $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2}) \subset \subset \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$, entonces este punto z es crítico también para un potencial «completo» $V: \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^1$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las masas fijadas m_1, \dots, m_n y un potencial $V(z) = -\sum_{i \neq j} m_i m_j / |z_i - z_j|$. Entonces se tienen las siguientes fórmulas: 1) la primera diferencial de la función V es igual a

$$dV(z)(v) = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|z_i - z_j|^3} \langle z_i - z_j, v_i - v_j \rangle,$$

donde $v \in M$; 2) la segunda diferencial de la función V es de forma

$$d^2V(z)(v, w) = -\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|z_i - z_j|^3} \cdot \left(\frac{3}{|z_i - z_j|^3} \langle z_i - z_j, v_i - v_j \rangle - \langle v_i - v_j, w_i - w_j \rangle \right) = Q_z(v, w),$$

donde $v, w \in M$. Aquí por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se designa un producto euclídeo escalar de los vectores en un plano \mathbb{R}^2 ; 3) la segunda diferencial de la contracción de la función V en $S_K \setminus \Delta$ es igual a

$$d^2V|_{(S_K \setminus \Delta)}(z)(v, w) = Q_z(v, w) + V(z)K(v, w).$$

Aquí con K se designa la energía cinética del sistema, considerada como un producto escalar, definible por las masas dadas m_1, \dots, m_n . Todas esas fórmulas se obtienen por el cálculo directo, consistente en la diferenciación sucesiva en las coordenadas locales cartesianas, por eso omitimos los detalles, dejando la verificación de las fórmulas indicadas al lector.

Para cualquier $v_i \in \mathbb{R}^2$ hacemos $v_i = (v'_i; v''_i)$, donde $v'_i \in l$ y $v''_i \in l^\perp$ en el plano \mathbb{R}^2 . Entonces es posible escribir para el vector v la descomposición: $v = (v', v'')$, donde $v' = (v'_1, \dots, v'_n)$. La descomposición dada tiene lugar para cualquier vector $v \in M$. Si $z \in S_l \subset S_K$, $z \notin \Delta$, entonces $T_z S_K = \{v \in M; v \perp z\}$; $T_z S_l = \{v' \in$

$\in M_l: v' \perp z$, donde en la variedad M se fija el producto escalar K , definible por las masas dadas de los puntos del sistema. Si $v \in T_z S_K$ y $v = (v', v'')$, entonces $v' \in T_z S_l$, puesto que $K(v, z) = K(v', z)$. De las fórmulas 1)–3) arriba obtenidas se deduce, que si $z \in S_l \setminus \Delta$, $v \in T_z S_K$, luego $dV(z)(v) = dV(z)(v')$. Pero entonces, de la igualdad $dV(z)(v') = 0$, obtenemos que $dV(z)(v) = 0$. Esta última igualdad demuestra nuestra afirmación.

LEMA 3. *La variedad $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ tiene $n!/2$ componentes de conexión lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Esta afirmación geométrica se deduce de la definición de los planos bisectores. En efecto, fijemos el punto $z = (z_1, \dots, z_n) \in S_l \setminus \Delta$ y consideremos que $z_1 < \dots < z_n$, $z_i \in \mathbb{R}$ (con esto, utilizamos el hecho de que entre estas coordenadas no hay ningún par de números coincidentes). Ahora, sea dada una permutación arbitraria $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ de los números $(1, 2, \dots, n)$. Aplicando esta permutación a las coordenadas del vector inicial z lo pasamos a otro componente de la conexión lineal, por supuesto, definible unívocamente por la permutación dada (ya que para todos los vectores pertenecientes a un componente de conexión, la ordenación de las coordenadas del vector por su magnitud es la misma y se define por la permutación dada). De manera que el conjunto $S_l \setminus \Delta$ se compone de $n!$ componentes de conexión, por consiguiente, el espacio cociente $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ consta en $n!/2$ componentes. El lema queda demostrado.

LEMA 4. *Si el punto $z \in \mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ es un punto crítico de restricción del potencial \tilde{V} en $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$, entonces el punto z es un máximo no degenerado.*

DEMOSTRACIÓN. Aprovechémonos de la fórmula 2) arriba obtenida. Entonces, evidentemente, de ella se deduce, que para la función $V: S_l \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ la segunda diferencial $d^2V|_{(S_l \setminus \Delta)}(z)$ es una forma definida negativamente, lo que demuestra el lema.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA SOBRE LOS EQUILIBRIOS COLINEALES. De la fórmula explícita que define el potencial \tilde{V} , se deduce, que esta función tiende a $-\infty$, en cuanto el punto z tiende al conjunto Δ ; esto significa que en la frontera de cada componente de conexión lineal del conjunto $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus (\tilde{\Delta} \cap \mathbb{R}P^{n-2})$ la función \tilde{V} tiende a $-\infty$, y por eso tiene en cada componente un máximo. Se deduce inmediatamente de la teoría de Morse que no pueden haber dos puntos críticos en cada componente de la conexión lineal, puesto que cada uno de esos puntos sería un máximo no degenerado y esto engendraría, por lo menos, otro punto crítico más de ensilladura que no sería un máximo local. La contradicción obtenida demuestra que cada componente tiene exactamente un máximo no degenerado (y que no hay más puntos

críticos). Puesto que conocemos el número de los componentes, igual a $n!/2$, con esto termina la demostración del teorema.

Del teorema demostrado resulta evidente que la propuesta sobre el carácter lineal de todos los cuerpos del sistema (la posición de ellos en una misma recta) ha sido muy importante en algunos lugares sustanciales de la demostración; exactamente esto nos permitió calcular por completo el número de tales posiciones de equilibrio.

Pero si volvemos a un problema más general sobre el cálculo del número de clases de los equilibrios relativos (sin las condiciones de colinealidad), debemos poder describir los índices y el número de los puntos críticos del potencial ya no en un espacio proyectivo real sino en un espacio complejo, lo que representa un problema mucho más difícil.

Un grupo de rotaciones S^1 actúa en S_K , dejando invariante un conjunto singular Δ y el potencial V (véase esto más arriba). Como ya hemos visto, un espacio cociente S_K/S^1 se identifica de una manera natural con un espacio complejo proyectivo en $\mathbb{C}P^{n-2}$, y es posible considerar el conjunto singular $\tilde{\Delta} = \Delta/S^1$ (en $\mathbb{C}P^{n-2}$) como una reunión de subespacios complejos proyectivos. De nuevo vamos a considerar la función $\tilde{V}: \mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$, inducida por un potencial inicial V .

HIPÓTESIS. Para casi todos los valores de las masas (m_1, \dots, m_n) en el problema plano de n cuerpos, el potencial \tilde{V} inducido por un potencial inicial V es una función de Morse, es decir, todos los puntos críticos de esta función suave son no degenerados.

Esta hipótesis por ahora no está demostrada ni refutada. Su papel consiste en que ella ha surgido de la pregunta de si es finito el número de clases del equilibrio relativo (para casi todos los juegos de masas). Es posible demostrar (omitimos la demostración), que la función \tilde{V} no tiene ningún punto crítico en cierto entorno abierto de un conjunto singular $\tilde{\Delta}$ en la variedad $\mathbb{C}P^{n-2}$. De aquí, si es justa la hipótesis arriba formulada, se deduce inmediatamente que el número de puntos críticos de la función \tilde{V} , es decir, el número de las clases de los equilibrios relativos, es finito (para casi todos los juegos de las masas).

Indiquemos otro corolario de la hipótesis. Si ésta es justa, entonces para casi todos los juegos de las masas es posible estimar el número de clases de los equilibrios relativos de la siguiente manera. Confrontemos a cada equilibrio relativo un número no negativo, el índice del punto crítico (de potencial inducido \tilde{V}), correspondiente a esta clase de equilibrios relativos (véase el teorema más arriba). Entonces, las cantidades de clases de los equilibrios relativos con índice dado son conexas según las correspondientes desigualdades de Morse (véase la teoría elemental más arriba) con los números de Betti

(es decir, con los rangos de los grupos de homología reales) del espacio $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$. En particular, los grupos de cohomología bastante ricos del espacio $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$ permiten demostrar la existencia de las clases no triviales de equilibrios relativos. El anillo de cohomología del espacio $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$ se puede calcular en forma explícita (Arnold), a saber, este anillo es isomorfo a un anillo de cohomología de un espacio topológico bastante simple X , un producto directo del ramo de dos circunferencias por el ramo de tres circunferencias por el ramo de cuatro circunferencias etc., por el ramo de $n - 1$ circunferencias. En forma explícita el polinomio de Poincaré del espacio $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}$ tiene la siguiente forma: $\prod_{\alpha=2}^{n-1} (1 + \alpha t)$, es decir

$$H^*(\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \tilde{\Delta}) = H^*((S^1 \vee S^1) \times (S^1 \vee S^1 \vee S^1) \times \dots).$$