CAPÍTULO 3

COBORDISMOS Y ESTRUCTURAS SUAVES

§ 27. Números característicos. Cobordismos. Ciclos y subvariedades. Signatura de las variedades

I. Planteamiento del problema. Nociones sencillas sobre los cobordismos. Signatura.

Consideremos aquí algunos problemas de la teoría de las variedades suaves, utilizando el aparato desarrollado en los capítulos anteriores.

1. PROBLEMA SOBRE EL COBORDISMO. Sea dada una variedad suave cerrada M^n. ¿En qué caso ésta es frontera de una variedad suave compacta con borde $M^n = \partial W^{n+1}$? La pregunta análoga si ambas M^n y W^{n+1} se suponen orientables.

2. PROBLEMA SOBRE LA REALIZACION DE LOS CICLOS MEDIANTE LAS SUBVARIEDADES. Sean $x \in H_i(M^n; \mathbb{Z})$ o $y \in H_i(M^n; \mathbb{Z}_2)$. ¿En qué caso se hallará una subvariedad cerrada $M^i \subset M^n$ representante del ciclo y (o x, si M^i está orientada)?

3. ¿QUÉ CICLOS SON IMÁGENES CONTINUAS DE LAS VARIEDADES? Sean $x \in H_i(X; \mathbb{Z})$ o y $H_i(X, \mathbb{Z}_2)$, elementos de homologías de algún complejo celular X. En qué caso se hallará un «bordismo singular» (M^i, f), o sea, la variedad M^i y una aplicación f: $M^i \to X$ tal, que $f_*[M^i] = y$ (o $f_*[M^i] = x$ para la variedad orientable M^i)?. Preguntas análogas se formulan para el caso relativo.

Sean $x \in H_i(X, Y; \mathbb{Z})$ o $y \in H_i(X, Y; \mathbb{Z}_2)$. Hay que hallar la variedad M^i con el borde W^{i-1} y la aplicación de los pares f: $(M^i, M^{i-1}) \to (X, Y)$ tal, que $f_*[M^i, W^{i-1}] = y$ (o x en el caso orientable).

Se definen de manera natural los grupos de los «bordismos singulares»: *el bordismo singular* es un par (M^i, f), como está descrito más arriba, donde M^i es una variedad cerrada. *El ciclo* es una combinación lineal formal de los bordismos singulares.

La película singular es un par (W^j, f) donde W^j es una variedad con borde. La frontera de la película singular es un ciclo singular. El grupo cociente de todos los ciclos i-dimensionales (bordismos singulares) por las fronteras de las películas $(i+1)$-dimensionales es un «grupo de bordismos» y se designa por $\Omega_i^O(X)$. Los grupos $\Omega_i^O(X, Y)$ se definen por analogía: los ciclos son aplicaciones de las variedades con borde, donde la imagen de la frontera se encuentra en $Y \subset X$, y las películas se introducen de manera natural.

Basando en la clase de las variedades orientables y películas se construyen análogamente los «bordismos orientables», los cuales se designan por $\Omega_i^{SO}(X)$ y $\Omega_i^{SO}(X, Y)$. Se tienen las aplicaciones evidentes

$$\Omega_i^O(X) \to H_i(X; \mathbb{Z}_2),$$

$$\Omega_i^O(X, Y) \to H_i(X, Y; \mathbb{Z}_2),$$

$$\Omega_i^{SO}(X) \to H_i(X; \mathbb{Z}),$$

$$\Omega_i^{SO}(X, Y) \to H_i(X, Y, \mathbb{Z}_2).$$

Por su propia definición, los grupos Ω_i^O y Ω_i^{SO} son invariantes homotópicamente. Los grupos Ω_i^O y Ω_i^{SO} pueden resultar ser no triviales para un espacio contractable X (o punto). Estos grupos Ω_i^O y Ω_i^{SO} se llaman *grupos de cobordismos clásicos*. El producto directo de las variedades introduce en ellos una estructura de los anillos anticonmutativos:

$$\Omega_i^O\Omega_j^O \subset \Omega_{i+j}^O, \qquad xy = yx,$$

$$\Omega_i^{SO}\Omega_j^{SO} \subset \Omega_{i+j}^{SO}, \qquad xy = (-1)^{ij}\, yx.$$

En los grupos $\Omega^O = \sum_{i \neq 0} \Omega_i^O$ es justa la identidad

$$2x = 0.$$

Esto se deduce, evidentemente, de la igualdad

$$\partial(M^i \times I) = M^i \cup M^i = 2M^i.$$

Tomando en consideración la orientación, obtendremos en $\Omega^{SO} = \sum_{i \geqslant 0} \Omega_i^{SO}$

$$\partial(M^i \times I) = M_+^i \cup M_-^i.$$

Esto significa que la variedad con la orientación opuesta da un elemento inverso en los grupos Ω^{SO}, ya que la suma es dada por una reunión formal de variedades.

Datos elementales:

a) $\Omega_0^O = \mathbb{Z}_2$, $\Omega_0^{SO} = \mathbb{Z}$;

b) $\Omega_1^O = \Omega_1^{SO} = 0$;

c) $\Omega_2^{SO} = 0$ (vemos de la clasificación de las superficies, que todas las variedades orientables M^2 se hallan en $\mathbb{R}^3$ y acotan el entorno W^3).

Calculemos los grupos Ω_2^O.

LEMA 1. *Si la variedad cerrada M^i es un borde, o sea, si $M^i = \partial W^{i+1}$, entonces su característica de Euler es par:* $\chi(M^i) = 2m$.

DEMOSTRACIÓN a) Sea $i = 2k + 1$. Entonces $\chi(M^i) = 0$ en virtud de la dualidad de Poincaré en las homologías. b) Sea que $i = 2k$. Consideremos la duplicación

$$V^{2k+1} = W^{2k+1} \bigcup_{M^{2k}} W^{2k+1}.$$

Se deduce de la definición de χ, mediante la triangulación del complejo:

$$\chi(X \bigcup_L Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(L),$$

donde $L = X \cap Y$.

Obtenemos:

$$0 = \chi(V^{2k+1}) = 2\chi(W^{2k+1}) - \chi(M^{2k}).$$

El lema queda demostrado.

Puesto que $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$, obtenemos:

$$\mathbb{R}P^2 \neq \partial W^3, \qquad \Omega_2^O \neq 0.$$

Es fácil de construir una película W^3 tal, que $\partial W^3 = K^2$ (superficie de Klein). (¡Hállese esta película!) Sabemos de la clasificación de las superficies (véase § 3): cualquier variedad cerrada bidimensional no orientable es bien $\mathbb{R}P^2$ + (asas), o bien K^2 + (asas).

De aquí se obtiene el resultado:

$$\Omega_2^O = \mathbb{Z}_2 \text{ (elemento básico } [\mathbb{R}P^2]).$$

Desarrollando la técnica geométrica es posible demostrar, que $\Omega_3^O = \Omega_3^{SO} = 0$ y $\Omega_4^{SO} = \mathbb{Z}$ (Rojlin). Obtendremos estos resultados, lo mismo que muchos otros, de la teoría (de Thom) que utiliza los métodos homológicos expuestos más arriba. El desarrollo del lema 1 es el siguiente

LEMA 2. (Pontriaguin). a) *Si la variedad cerrada M^i es un borde en la teoría de los O-bordismos Ω_*^O, entonces todos sus números característicos estables (es decir, las clases características estables de dimensión i) son iguales* al cero de módulo 2.

b) *Si la variedad cerrada orientable M^i es un borde en la teoría de los SO-bordismos (o sea, borde de una variedad orientable W^{i+1}), entonces complementariamente todos sus números característicos estables (es decir, las clases de dimensión i) en las cohomologías sobre un campo de los números racionales $\mathbb{Q}$ son iguales a cero.*

DEMOSTRACIÓN. El espacio fibrado tangente (por ejemplo, con ayuda de la inmersión $M^i \subset \mathbb{R}^N$, $N \to \infty$) se obtiene mediante una aplicación tangencial en la base de un espacio fibrado universal (aplicación gaussiana generalizada $M^i \xrightarrow{\tau} G_{i,N} = BO_i$). La clase característica mod 2 es definida por cualquier elemento $w \in H^*(G_{i,N}; \mathbb{Z}_2)$ (compárese con [1], p. II. § 25). Por definición, hacemos:

$$w(M^i) = \tau^*(w).$$

Las clases características «estables» $w \in H^*(BO_i)$ se obtienen mediante la restricción

$$w = \lambda^* \overline{w},$$

donde $\overline{w} \in H^*(BO_{i+1})$, λ: $BO(i) \to BO(i+1)$. De modo análogo se define la noción de clase característica estable para BSO_i, BU_i, BSp_i.

Si $M^i = \partial W^{i+1}$, tenemos $w(M^i) = \tau_M^*(w) = \tau_M^* \lambda^* (\overline{w})$; $\overline{w}(W^{i+1}) = \tau_w^*(\overline{w})$. Designamos la inmersión $M^i \to W^{i+1}$ por j. La restricción del espacio fibrado es de forma $\tau_W \mid_{M^i} = j^* \tau_W = \tau_M \oplus 1$. Sea que $\dim w = i$. Entonces

$$w(M^i) = \tau_M^* \lambda^* (\overline{w}) = j^* \tau_W^* (\overline{w}).$$

Puesto que $j_* [M^i] = 0$, por cuanto $M^i = \partial W^{i+1}$, obtenemos para los productos escalares:

$$(j^* \tau_W^* (\overline{w}), \quad [M^i]) = (\tau_W^* (\overline{w}), \quad j_* [M^i]) = 0.$$

De manera que el punto a) queda demostrado.

La demostración del punto b) es completamente idéntica a la anterior con el cambio de las $\mathbb{Z}_2$-homologías por las homologías sobre $\mathbb{Q}$ y con la consideración del hecho de que en un caso orientable la igualdad $j_* [M^i] = 0$ en $H_i(W^{i+1})$ es justa en las homologías racionales. El lema 2 queda demostrado.

Un ejemplo de la clase característica no estable es $\chi(M^i)$. Las clases de Stiefel—Whitney $w_q \in H^q(M^i; \mathbb{Z})$ y todos los polinomios de ellas de dimensión i, así como también las clases de Pontriaguin $p^q \in H^{4q}(M^i, \mathbb{Q})$ y todos los polinomios de ellas de dimensión i (si $i = 4k$) nos dan un juego completo de los números característicos estables para Ω_i^O y Ω_i^{SO}.

EJEMPLO 1. $M^2 = \mathbb{R}P^2$; aquí $w(z) = (1 + zt)^3 = 1 + w_1 z + w_2 z^2$, donde $t \in H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$ $t \neq 0$. Por eso $w_1^2 \neq 0$ y $w_2 \neq 0$ (mod 2). Empero el grupo $\Omega_2^0 = \mathbb{Z}_2$. Por eso tenemos: $w_1^2 - w_2 \equiv 0 \pmod 2$.

EJEMPLO 2. $M^4 = \mathbb{C}P^2$, la orientación es natural; aquí $p(z) = (1 + z^2 t^2)^3 = 1 + p_1 z^2$. Por eso $p_1(\mathbb{C}P^2) = 3$ (el polinomio de Pontriaguin $p(z)$ está indicado en § 9 para $\mathbb{C}P^n$), $t \in H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Q})$, es un elemento básico del grupo $H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$.

EJEMPLO 3. a) $M_1^4 = \mathbb{C}P^4$, la orientación es natural. Aquí $p\ (z) = 1 + p_1z^2 + p_2z^4 = (1 + t^2z^2)^5 = 1 + 5t^2z^2 + 10t^4z^4$, t es un elemento básico del grupo $H^2\ (\mathbb{C}P^4;\ \mathbb{Z})$.

Para los números característicos obtenemos:

$$p_1^2 = 25, \quad p_2 = 10.$$

b) $M_2^8 = \mathbb{C}P_1^2 \times \mathbb{C}P_2^2$. Aquí $p\ (z) = 1 + p_1z^2 + p_2z^4 = (1 + t_1^2z^2)^3\ (1 + t_2^2z^2)^3 = 1 + 3\ (t_1^2 + t_2^2)\ z^2 + 9t_1^2t_2^2z^4$, donde $t_i \in H^2\ (\mathbb{C}P_i^2;\ \mathbb{Z})$, son elementos básicos.

Luego tenemos: $(t_1^2)^2 = 0$, $(t_2^2)^2 = 0$, $(t_1^2 + t_2^2)^2 = 2t_1^2t_2^2$. Los números característicos son de forma

$$p_1^2 = 18, \quad p_2 = 9.$$

Además de los números característicos hay un invariante interesante más de SO-cobordismo para las variedades orientables de dimensión $4k$ llamado «signatura» de la variedad. En virtud de la dualidad de Poincaré (véase el § 15) en un grupo de homologías de dimensión media está definida una forma bilineal unimodular con coeficientes enteros simétrica para las dimensiones $4k$ y antisimétrica para las dimensiones $4k + 2$ (por ejemplo, para superficies orientables con $k = 0$). Esta forma está engendrada por un «índice de intersección» de los ciclos en un grupo de homologías $H_{2k}\ (M^{4k};\ \mathbb{Q})$ o por la multiplicación de los cociclos en un grupo $H^{2k}\ (M^{4k};\ \mathbb{Q}) \approx H_{2k}\ (M^{4k};\ \mathbb{Q})$,

$$\langle x,\ y\rangle = (xy,\ [M^{4k}]),$$
$$x,\ y \in H^{2k}\ (M^{4k};\ \mathbb{Q}).$$

o (lo que es lo mismo)

$$\langle \tilde{x},\ \tilde{y}\rangle = \tilde{x} \circ \tilde{y} \text{ (índice de intersección)},$$
$$\tilde{x},\ \tilde{y} \in H_{2k}\ (M^{4k};\ \mathbb{Q}).$$

DEFINICION 1. La diferencia del número de los cuadrados positivos y negativos de la forma indicada en un grupo $H_{2k}\ (M^{4k};\mathbb{Z})$ se llama «signatura» de la variedad. Al cambiar la orientación $M^{4k} \to -M^{4k}$ la forma y la signatura cambian el signo. La signatura se connota con $\tau\ [M^{4k}]$.

LEMA 3. (Rojlin). *La signatura de una variedad limitativa es igual a cero y define correctamente la forma lineal*

$$\tau : \Omega_{4k}^{SO} \to \mathbb{Z}.$$

PROBLEMA 1. Demostrar que la signatura del producto directo de las variedades es igual al producto de las signaturas.

De este modo obtenemos un homomorfismo de los anillos

$$\tau:\Omega_*^{SO}=\sum_{i\geqslant 0}\Omega_i^{SO}\to\mathbb{Z},$$

donde $\tau(1)=1$, $\Omega_i^{SO}\xrightarrow{\tau}0$, si i no es divisible por 4.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3. Por causas triviales, la signatura de una reunión no conexa de variedades, es una suma de signaturas. Demostremos que la signatura de una variedad limitativa es igual a cero. Sea $M^{4k}=\partial W^{4k+1}$. Designemos por j la inmersión $M^{4k}\xrightarrow{j}W^{4k+1}$. Tenemos $j_*[M^{4k}]=0$ en el grupo $H_{4k}(W^{4k+1};\mathbb{Q})$. Si dos cociclos x, y se obtienen mediante la restricción de los cociclos $\overline{x}$, $\overline{y}\in H^{2k}(W^{4k+1};\mathbb{Q})$, entonces $\langle x,y\rangle=0$. Realmente, si $x=j^*(\overline{x})$, $y=j^*(\overline{y})$, entonces

$$\langle x,y\rangle=(xy,[M^{4k}])=(j^*(\overline{x}\overline{y}),[M^{4k}])=(\overline{x}\overline{y},j_*[M^{4k}])=0.$$

(Para los ciclos $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ esto significa un hecho evidente: si ambos ciclos son homológicos a cero en W^{4k+1}, entonces el índice de intersección de los mismos es igual a cero.) Demostremos que la dimensión de un subgrupo $j^*H^{2k}(W^{4k+1};\mathbb{Q})\subset H^{2k}(M^{4k};\mathbb{Q})$ es igual exactamente a la mitad de la dimensión del grupo $H^{2k}(M^{4k};\mathbb{Q})$. Escribamos dos sucesiones exactas del par $(M^{4k};W^{4k+1})$ en las cohomologías y homologías racionales, recíprocamente duales, según Poincaré:

$$\begin{array}{ccccc}
H^{2k}(W^{4k+1}) & \xrightarrow{j_*} & H^{2k}(M^{4k}) & \xrightarrow{\delta} & H^{2k+1}(W^{4k+1},M^{4k})\to\\
\| D & & \| D & & D\|\\
H_{2k+1}(W^{4k+1},M^{4k}) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k}(M^{4k}) & \xrightarrow{j_*} & H_{2k}(W^{4k+1})\to
\end{array}$$

En virtud del operador de dualidad de Poincaré el homomorfismo j^* pasa a ∂ y el homomorfismo δ pasa a j_*. Por eso los operadores j^* y δ son conjugados entre sí, donde el grupo $H^{2k+1}(W^{4k+1},M^{4k})$ es conjugado a $H^{2k}(W^{4k+1})$ y el $H^{2k}(M^{4k})$ es isomorfo a su conjugado $(H^{2k}(M^{4k}))^*=H_{2k}(M^{4k})$ con ayuda de una forma no degenerada $\langle x,y\rangle$. De aquí se deduce de un modo puramente algebraico la coincidencia de los rangos de los grupos $\operatorname{Im} j^*$ e $\operatorname{Im}\delta$. En virtud de la exactitud de las sucesiones, el rango de la imagen $\operatorname{Im} j^*$ es exactamente igual a la mitad del rango del grupo $H^{2k}(M^{4k};\mathbb{Q})$. Del carácter no degenerado de la forma $\langle x,y\rangle$ y del hecho de la existencia de un espacio nulo $\operatorname{Im} j^*$ de dimensión media, concluimos que $\tau=0$. El lema 3 queda demostrado.

Ya se ha mencionado más arriba que $\Omega_4^{SO}=\mathbb{Z}$ (adelante será demostrado, que $\Omega_4^{SO}\otimes\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$). En el ejemplo 2 ha sido calculado el número $p_1[\mathbb{C}P^2]=3\neq 0$. Notemos que $\tau(\mathbb{C}P^2)=1$, ya que la forma $\langle x,y\rangle$ en el grupo $H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ tiene la forma $\langle x,$

$x\rangle = 1$ (esto se deduce con evidencia de la estructura del anillo H^* $(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Q})$, véase el § 7). Puesto que $\tau = 1$, el elemento $[\mathbb{C}P^2]$ no es múltiplo de nadie en el grupo $\Omega_4^{SO} = \mathbb{Z}$ y cualquier elemento $x \in \Omega_4^{SO}$ es de forma $x = \lambda\,[\mathbb{C}P^2]$. De esto se deduce inmediatamente el siguiente corolario (fórmula de Thom—Rojlin): para cualquier variedad orientable es justa la fórmula

$$\tau\,[M^4] = \frac{1}{3}\,p_1\,[M^4]. \qquad (*)$$

Realmente, para $\mathbb{C}P^2$ tenemos

$$p_1\,[\mathbb{C}P^2] = 3, \qquad \tau\,[\mathbb{C}P^2] = 1.$$

La magnitud $p_1 - 3\tau$ es trivial para $\mathbb{C}P^2$ y, de esta manera, para todos los elementos $x \in \Omega_4^{SO}$, puesto que $x = \lambda\,[\mathbb{C}P^2]$. Basta con demostrar que $\Omega_4^{SO} \otimes \mathbb{Q} \approx \mathbb{Q}$. Más adelante calcularemos los grupos $\Omega_i^{SO} \oplus \mathbb{Q}$ y obtendremos una generalización de la fórmula $(*)$, o sea, la fórmula de Hirzebruch.

Es posible definir la signatura también para las variedades no cerradas, lo mismo que la característica de Euler. Efectivamente, si $M = M^{4k}$ es una variedad suave orientable con borde $V = V^{4k-1} = V_1 \cup \ldots \cup V_m$, entonces está definida, hablando en general, una forma degenerada de intersecciones en un grupo de ciclos H_{2k} $(M^{4k}, \mathbb{Q})$. La signatura de esta forma se llama signatura de la variedad $\tau\,(M^{4k})$. Tiene lugar la siguiente «propiedad de aditividad» (Nóvikov—Rojlin).

ADITIVIDAD DE SIGNATURA. Sean M_1^{4k} y M_2^{4k}, variedades suaves con bordes

$$\partial M_1^{4k} = \bigcup_j V_j, \qquad \partial M_2^{4k} = \bigcup_q W_q$$

y $V_1^{4k-1} = W_1^{4k-1}$. Se tiene la igualdad

$$\tau\,(M_1^{4k} \bigcup_{V_1 = W_1} M_2^{4k}) = \tau\,(M_1^{4k}) + \tau\,(M_2^{4k}).$$

De esa manera, la signatura es aditiva si existe una pegadura de dos variedades a lo largo de un componente entero de frontera. Un hecho análogo es justo para la característica de Euler de las variedades de dimensión par: en efecto,

$$\chi\,(M_1^{2q} \bigcup_{V_1} M_2^{2q}) = \chi\,(M_1^{2q}) + \chi\,(M_2^{2q}) - \chi\,(V_1),$$

donde $\chi\,(V_1) = 0$, puesto que V_1 es una variedad cerrada de dimensión impar.

Demostremos la aditividad de la signatura. Los grupos de homologías $H_{2k}(M_1^{4k})$ y $H_{2k}(M_2^{4k})$ se presentan de la forma $H_{2k}(M_s^{4k}) = A_s \oplus B_s$, $B_s = \operatorname{Im} i_{s*}$, donde $i_s\colon V_1 = W_1 \to M_s^{4k}$, $s = 1, 2$.

La forma de intersecciones se concentra enteramente en un subespacio A_s. De manera que $\tau(M_s^{4k}) = \tau(A_s)$. El grupo $H_{2k}(M_1^{4k} \underset{V_1=W_1}{\cup} M_2^{4k})$ se presenta de la forma

$$H_{2k}(M_1 \cup M_2) = A_1 \oplus A_2 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus D \oplus F,$$

donde

$$B_1 = C_1 \oplus D = \operatorname{Im} i_{1*}\colon H_{2k}(V_1) \to H_{2k}(M_1),$$
$$B_2 = C_2 \oplus D = \operatorname{Im} i_{2*}\colon H_{2k}(W_1) \to H_{2k}(M_2),$$
$$E \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus D = H_{2k}(V_1) = H_{2k}(W_1),$$
$$E = \operatorname{Ker} i_{1*} \cap \operatorname{Ker} i_{2*} \subset H_{2k}(V_1),$$
$$D = \operatorname{Im}\{H_{2k}(V_1) \to H_{2k}(M_1 \underset{V_1}{\cup} M_2)\}.$$

El subgrupo F es isomorfo a la intersección

$$F' = \operatorname{Ker} i_{1*} \cap \operatorname{Ker} i_{2*} \subset H_{2k-1}(V_1) = H_{2k-1}(W_1),$$

con eso, dos películas en M_1 y M_2 tendidas en un mismo ciclo de $F' \subset H_{2k-1}(V_1)$, juntas dan un ciclo del grupo $F \subset H_{2k}(M_1 \cup M_2)$. La forma de las intersecciones en el grupo $H_{2k}(M_1 \cup M_2)$ es del tipo de matriz de bloque, donde a) $C_1 \oplus C_2$ es el anulador de la forma; b) en todos los espacios C_1, C_2, D, F, la forma por separado es trivial, pero los espacios F y D son conjugados entre sí; c) los subespacios A_1, A_2 son ortogonales entre sí, y con respecto a los demás conjuntos en virtud de esta forma. Verifíquense esos hechos sencillos. De aquí se deduce

$$\tau(M_1 \underset{V_1}{\cup} M_2) = \tau(A_1) + \tau(A_2).$$

La afirmación queda demostrada.

II. Complejos de Thom. Cálculo de cobordismos (por el módulo de torsión). Fórmula de signatura. Realización de los ciclos mediante subvariedades.

Consideremos una variedad suave cerrada conexa B y un espacio fibrado vectorial ξ con base en B, con fibra $\mathbb{R}^n$ y con grupos $G = O(n)$, $SO(n)$, $U(n/2)$ y otros

$$\xi : E \underset{p}{\to} B, \qquad F = \mathbb{R}^n.$$

Consideremos en las fibras los vectores de longitud $\leqslant 1$. El conjunto de ellos forma un espacio fibrado $\widetilde{E} \to B$ con fibra $F' = D^n \subset \mathbb{R}^n$. La frontera $\partial\widetilde{E}$ es un espacio fibrado con fibra S^{n-1}.

DEFINICIÓN 2. *Se llama complejo de Thom $M(\xi)$ del espacio fibrado ξ un complejo cociente*

$$M(\xi) = \widetilde{E}/\partial\widetilde{E},$$

donde $\partial\widetilde{E}$ está contraído en un punto.

LEMA 4. *Se tiene el isomorfismo natural*

$$\varphi : H_i(B) \to H_{n+i}(M(\xi)),$$
$$H^i(B) \to H^{n+i}(M(\xi)),$$

donde $i \geqslant 0$ es arbitrario y $n = \dim F$. Este isomorfismo es justo para las homologías mod 2, *si $G = 0(n)$,* y *para las homologías sobre $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$,* si *$G = SO(n)$. (Es obvio el isomorfismo φ: para cualquier ciclo z en la base B el ciclo $\varphi(z)$ se define como una preimagen completa* $\varphi(z) = p^{-1}(z) \mod \partial\widetilde{E}$.)

La demostración del lema 4 ya ha sido dada (véase el § 17, lema 2) para la efectivización de las desigualdades de Morse en el caso de las variedades críticas. Recordemos que el isomorfismo φ es una superposición de dos operadores de la dualidad de Poincaré

$$\varphi = D_{\widetilde{E}} D_B,$$

apuntando además que E es de un tipo homotópico B y $H^q(M(\xi)) = H^q(\widetilde{E}, \partial E)$, $q > 0$,

$$D_B : H_q(B) \to H^{m-q}(B), \qquad m = \dim B,$$

$$\begin{array}{ccc} D_{\widetilde{E}} : H^{m-q}(\widetilde{E}) & \to & H_{n+m-(m-q)}(\widetilde{E}, \partial\widetilde{E}). \\ \| & & \| \\ H^{m-q}(B) & & H_{q+n}(M(\xi)) \end{array}$$

En las cohomologías del complejo de Thom $M(\xi)$ hay una «clase fundamental» $\varphi(1) \in H^n(M(\xi))$. Además, en el complejo $M(\xi)$ se encuentra la misma base $B \subset M(\xi)$ como una sección nula del espacio fibrado ξ. Un espacio fibrado normal respecto a B en $M(\xi)$ es exactamente ξ, y el complemento $M(\xi) \setminus B$ se contrae a un punto $* \in M(\xi)$.

La primera aplicación de los complejos de Thom consiste en el establecimiento de la conexión de las clases de Stiefel Whitney $w_i \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ para cualquier espacio fibrado ξ con base B con los cuadrados de Steenrod Sq^i.

DEFINICIÓN 3. Se llama *clase* $w_i \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ al elemento $\varphi^{-1}Sq^i\varphi(1)$, donde

$$\varphi : H^q(B; \mathbb{Z}_2) \to H^{n+q}(M(\xi); \mathbb{Z}_2).$$

Para establecer la conexión de esta definición con la dada más arriba hay que efectuar algunos cálculos en las cohomologías de los espacios clasificadores $H^*(BSO(n); \mathbb{Z}_2)$ y $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2)$. En el grupo $O(n)$ se tiene el subgrupo de las matrices diagonales $D(n) \subset \subset O(n)$ que son de forma

$$\begin{Vmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{Vmatrix},$$

$D(n) = \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$. De manera que se tiene la aplicación de los espacios clasificadores

$$BD(n) = \mathbb{R}P_1^\infty \times \ldots \times \mathbb{R}P_n^\infty \xrightarrow{i} BO(n)$$

y la aplicación de cohomologías

$$H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^*(BD(n); \mathbb{Z}_2).$$

PROBLEMA 2. Por analogía con el grupo $U(n)$ demostrar los siguientes hechos: la imagen $\operatorname{Im} i^*$ coincide exactamente con los polinomios simétricos de $x_1, \ldots, x_n$, donde $0 \neq x_i \in H^1(\mathbb{R}P_i^\infty; \mathbb{Z}_2)$ Por eso i^* no tiene núcleo (monomorfismo).

Las clases de Stiefel—Whitney se obtienen como polinomios simétricos elementales

$$i^*(w_q) = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} x_{i_1} \ldots x_{i_q}.$$

PROBLEMA 3. Con aplicación $BSO(n) \xrightarrow{j} BO(n)$ la imagen $\operatorname{Im} j^*$ es un epimorfismo («aplicación en») en $\mathbb{Z}_2$-cohomologías, y el núcleo es engendrado como un ideal por el elemento $w_1 \in H^1(BO(n); \mathbb{Z}_2)$.

PROBLEMA 4. Consideremos los complejos de Thom de un espacio fibrado universal ξ sobre $BO(n)$ y la inmersión $BO(n) \overset{f}{\subset} M(\xi)$. Demostrar, que la aplicación

$$f^* : H^*(M(\xi); \mathbb{Z}_2) \to H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2)$$

no tiene núcleo y la imagen $\operatorname{Im} f^*$ se compone de todos los polinomios de las clases w_i divididos por $w_n \in H^n(BO(n); \mathbb{Z}_2)$, donde $i^* w_n = x_1 \ldots x_1$. Demostrar que $f^*\varphi(1) = w_n$ y $f^*\varphi(w_i) = Sq^i(w_n) = w_i w_n$. En general, es justa la fórmula

$$f^*\varphi(x) = x w_n$$

(demostrarlo).

Obtener resultados análogos para $H^*(BSO(n);\ \mathbb{Z}_2)$. Calcular las operaciones Sq^i en $H^*(MO(n);\ \mathbb{Z}_2)$, por analogía con el § 10. Examinar los grupos homotópicos

$$\pi_{n+j}(M(\xi)), \qquad j < n-1,$$

utilizando los resultados del § 10.

PROBLEMA 5. Partiendo de la fórmula $w_i = \varphi^{-1} Sq^i \varphi(1)$, demostrar que las clases $w_j \in H^j(M^n;\ \mathbb{Z}_2)$ son invariantes homotópicamente para las variedades cerradas, utilizando la conexión de un espacio fibrado con un entorno de la diagonal en $M^n \times M^n$.

PROBLEMA 6. Para la clase w_1 que se anula si, y sólo si, la variedad es orientable, existe la fórmula

$$Dw_1 = \delta_*[M^n], \qquad \delta_*: H_n(M^n, \mathbb{Z}_2) \to H_{n-1}(M^n, \mathbb{Z}_2),$$

donde δ_* es un operador en las homologías, descrito en el § 3. Demostrar esta fórmula independientemente del problema 5.

Para la base $B = BG$ para $G = O(n)$, $SO(n)$, $U(n/2)$, $SU(n/2)$, $Sp(n/4)$ y para un espacio fibrado universal ξ con fibra $\mathbb{R}^n$, el complejo de Thom $M(\xi)$ se designa habitualmente con $MO(n)$, $MSO(n)$, $MU(n/2)$, $MSU(n/2)$, $MSp(n/4)$.

Si $G = e$ (grupo unidad), entonces el espacio fibrado universal ξ es trivial, la base $BG = *$ (un punto), pero la fibra es $\mathbb{R}^n$. Obtenemos

$$Me = S^n.$$

En particular, $SO(1) = e$ y $MSO(1) = S^1$. Luego: $O(1) = \{\pm 1\}$, $BO(1) = \mathbb{R}P^\infty$ (o $\mathbb{R}P^N$ para N grandes); el espacio fibrado universal η con un grupo $O(1)$ es de forma de un espacio fibrado normal respecto a $\mathbb{R}P^N$ en $\mathbb{R}P^{N+1}$:

$$E \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^N, \quad \text{fibra} \quad F = \mathbb{R}^1.$$

Un espacio $\widetilde{E}$ del espacio fibrado con fibra $D^1 = I$ consiste en los vectores de longitud $\leqslant 1$ en la fibra, es una «cinta de Moebius» (véase [1], p. II, § 2). La frontera $\partial\widetilde{E}$ es una esfera S^N que cubre $\mathbb{R}P^N$. Por eso, el espacio de Thom $M(\eta)$ es de forma

$$M(\eta) = MO(1) = \widetilde{E}/\partial\widetilde{E} = \mathbb{R}P^{N+1} \supset \mathbb{R}P^N = B.$$

Para $G = SO(2)$ tenemos de un modo análogo

$$\begin{array}{l} MSO(2) = \mathbb{C}P^{N+1} \supset \mathbb{C}P^N = B, \qquad N \to \infty. \\ \quad \Vert \\ MU(1) \end{array}$$

La clase fundamental en estos casos es el elemento básico de los grupos

$$u = \varphi(1) \in H^1(S^1; \mathbb{Z}) \quad \text{para} \quad MSO(1) = S^1;$$

$$u = \varphi(1) \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \quad \text{para} \quad MO(1) = \mathbb{R}P^\infty;$$

$$u = \varphi(1) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \quad \text{para} \quad MSO(2) = \mathbb{C}P^\infty.$$

Estos espacios son complejos del tipo $K(\pi, n)$ para $n = 1, 2$, $\pi = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$; el elemento $u = \varphi(1)$ coincide con el elemento fundamental del complejo $K(\pi, n)$; véase el § 10.

Tiene lugar el siguiente lema sencillo.

LEMA 5. *Los complejos de Thom $M(\xi)$ son implemente conexos con $n > 1$. Sus grupos homotópicos más simples son de forma:*

$$\pi_j(M(\xi)) = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n;$$

$$\pi_n(M(\xi)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{el espacio fibrado es no orientable.} \\ \mathbb{Z}, & \text{el espacio fibrado es orientable.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. La partición celular $M(\xi)$ se obtiene de una partición celular de la base B mediante la multiplicación por una célula (fibra)

$$B \subset \sigma^j \mapsto \varphi(\sigma^j) = p^{-1}(\sigma^j) = \sigma^{n+j}.$$

Además, hay una célula de dimensión nula $\sigma^0 \subset M(\xi)$ obtenida de $\partial\widetilde{E}$ mediante la contracción en un punto. Por eso $\pi_j(M(\xi)) = 0$ para $j < n$ (no hay células en estas dimensiones). Sea que B tiene sólo una célula de dimensión nula (para una base B conexa siempre es posible reducirla a este caso, como se mostró en el § 4); entonces en $M(\xi)$ hay sólo una célula de dimensión n (es una fibra sobre un punto). Así, el grupo $\pi_n(M(\xi))$ es cíclico. Para un espacio fibrado no orientable en la base se hallará una curva cerrada (la cual puede considerarse como una célula σ^1), que invierte la orientación de la fibra. Para esta célula σ^1 su preimagen $P^{-1}(\sigma^1) = \varphi(\sigma^1) = \sigma^{n+1}$ es una célula en $M(\xi)$ tal, que

$$\partial\sigma^{n+1} = 2\sigma^n.$$

Esto es geométricamente evidente en un espacio fibrado sobre S^1. Si el espacio fibrado es orientable, entonces las fronteras de todas las células $p^{-1}(\sigma_j^1)$ en un complejo $M(\xi)$ son iguales a cero. Por eso el ciclo $[\sigma^n]$ es de orden infinito. El lema queda demostrado, puesto que $H_n(M(\xi)) = \pi_n(M(\xi))$.

Tiene lugar el siguiente teorema importante.

TEOREMA 1. *Los grupos de cobordismos Ω_i^O, Ω_i^{SO} son canónicamente isomorfos a los grupos homotópicos estables*

$$\pi_{n+i}(MO(n)) \approx \Omega_i^O \quad \text{y} \quad \pi_{n+i}(MSO(n)) \approx \Omega_i^{SO}$$

para $i < n - 1$ *(compárese con* [1], p. II, § 23, *donde fue establecida la conexión entre los grupos* $\pi_{n+i}(S^n) = \pi_{n+i}(Me)$ *y los cobordismos de variedades equipadas).*

DEMOSTRACIÓN. a) Consideremos una variedad cerrada $M^i \subset \subset \mathbb{R}^{n+i}$, donde $i < n - 1$. Todas las inmersiones (encajes) $M^i \subset \subset \mathbb{R}^{n+i}$ son isotópicas (véase [1], p. II, § 11), y el espacio fibrado normal a M^i en $\mathbb{R}^{n+i}$ no depende de la inmersión, y lo designemos por ν. Surge una aplicación en un espacio fibrado universal

$$M^i \to BO(n),$$
$$\nu \to \xi,$$

donde ξ es un espacio fibrado universal con fibra $\mathbb{R}^n$. El espacio del espacio fibrado ν es un entorno de M^i en $\mathbb{R}^{n+i} \subset S^{n+i}$, y su imagen cubre todo el cuerpo $\widetilde{E}$. Prolonguemos esta aplicación en todo el complemento del entorno, de tal manera que todo este complemento se aplica en una célula $\sigma^0 \in M(\xi)$ obtenida mediante la contracción de $\partial\widetilde{E}$. Obtenemos la aplicación de la esfera

$$S^{n+i} \xrightarrow{f} M(\xi).$$

Esta aplicación es regular transversalmente en una subvariedad $BO(n) \subset M(\xi)$ y $f^{-1}(BO(n)) = M^i$. La noción de la regularidad transversal a lo largo de la subvariedad $BO(n) \subset M(\xi)$ consiste en lo siguiente: en cualquier punto $x \in f^{-1}(BO(n))$ la imagen del espacio tangente $\mathbb{R}^{n+i}_x$ con la aplicación lineal df es transversal respecto al plano tangente de la subvariedad $BO(n) \subset M(\xi)$ es decir, los espacios lineales $df(\mathbb{R}^{n+i}_x)$ y $\tau_{f(x)}(BO(n))$ engendran conjuntamente todo el espacio tangente a $M(\xi)$ en el punto $f(x)$ (véase [1], parte II, § 10).

Coloquemos el cobordismo (película) W^{i+1}, donde $\partial W^{i+1} = M^i_1 \cup M^i_2$, en el producto $\mathbb{R}^{n+i} \times I(0, 1)$ de tal modo, que $M^i_1 \subset \subset \mathbb{R}^{n+i} \times 0$, $M^i_2 \subset \mathbb{R}^{n+i} \times 1$ y W^{i+1} se apoya normalmente contra los bordes. Repitiendo la construcción anterior para un haz normal ν a $W^{i+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times I$, obtenemos la homotopía

$$S^{n+i} \times I(0, 1) \to M(\xi).$$

Así, queda construida la correspondencia (homomorfismo)

$$\Omega^O_i \to \pi_{n+i}(MO(n)), \quad i < n - 1,$$

De modo análogo se construye el homomorfismo

$$\Omega^{SO}_i \to \pi_{n+i}(MSO(n)), \quad i < n - 1.$$

b) Mostremos, que la correspondencia construida es un isomorfismo. Sea dado un elemento $a \in \pi_{n+i}(MO(n))$ representado por la aplicación.

$$f: S^{n+i} \to MO(n).$$

Es posible considerar, si se efectúa una perturbación pequeña (véase [1], p. II, § 10), que la aplicación f es transversalmente regular a lo largo de la subvariedad $BO(n) \subset MO(n)$. La imagen completa $f^{-1}(BO(n)) = M^i$ es una subvariedad suave regular $M^i \subset \mathbb{R}^{n+i} \subset S^{n+i}$. La imagen de los n-planos normales respecto a M^i en $\mathbb{R}^{n+i}$ con aplicación df es transversal a $BO(n)$. Mediante la deformación elemental de aplicación esta imagen por doquier a lo largo de $BO(n)$ puede ser normalizada respecto a $BO(n)$, y es posible contraer todo el complemento del entorno de la variedad M^i en S^{n+i} en un punto σ^0 obtenido de $\sigma\widetilde{E}$ en $MO(n)$. De aquí se deduce la demostración del teorema 1 para Ω_i^O. Todo es análogo para Ω_i^{SO}.

El teorema queda demostrado.

TEOREMA 2. a) *El ciclo $x \in H_i(M^{n+i}; \mathbb{Z}_2)$ es realizado por una subvariedad cerrada $M^i \subset M^{n+i}$ si, y sólo si, se halla una aplicación $M^{n+i} \xrightarrow{f} MO(n)$ tal, que $f^*u = Dx$, donde $u \in H^n(MO(n); \mathbb{Z}_2)$ es una clase fundamental y D es el operador de la dualidad de Poincaré.*

b) *Sea M^{n+i} una variedad orientada. El ciclo $x \in H_i(M^{n+i}; \mathbb{Z})$ es realizado por una subvariedad cerrada orientada $M^i \subset M^{n+i}$ si, y sólo si, se halla una aplicación f: $M^{n+i} \to MSO(n)$* tal, que $f^*u = Dx$.

c) *El ciclo $x \in H_i(M^{n+i}; \mathbb{Z})$ es realizado por una subvariedad cerrada orientada con un espacio fibrado normal trivial $M^i \subset M^{n+i}$ (es decir, con un juego dado de las ecuaciones regulares $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_n = 0$ en M^n)* si, y sólo si, se halla una *aplicación f: $M^{n+i} \to Me = S^n$ tal, que $f^*u = Dx$.*

OBSERVACIÓN. Es justo un teorema analógico para poder realizar un ciclo por una subvariedad con un espacio fibrado normal prescrito con un grupo estructural $U(n/2)$, $SU(n/2)$, $Sp(n/4)$, etc. La aplicación de la variedad M^{n+i} en $MU(n/2)$, $MSU(n/2)$, $MSp(n/4)$ etc. engendra tal realización.

Los grupos $\pi_{n+i}(MU(n/2)) = \Omega_i^U$, $\pi_{n+i}(MSU(n/2)) = \Omega_i^{SU}$, $\pi_{n+i}(MSp(n/4)) = \Omega_i^{Sp}$ naturalmente es posible interpretarlos como cobordismos complejos (unitarios), complejos especiales y de cuaternios Ω^U, Ω^{SU}, Ω^{Sp}. Son importantes extraordinariamente los cobordismos unitarios. Cada variedad compleja y casi compleja tiene una clase de cobordismos en los grupos Ω_{2i}^U.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2 PARA $G = O(n)$.

Sea dada una subvariedad $M^i \subset M^{n+i}$. Un espacio fibrado normal es definido por una construcción ya expuesta, la aplicación

$M^{n+i} \xrightarrow{f} MO(n)$, donde $M^i \to BO(n)$; Todo el complemento del entorno de la variedad M^i en M^{n+i} se aplica en un punto σ^0, obtenido por la contracción de $\partial\widetilde{E}$ al construirse $M(\xi)$. Es fácil ver que

$$f^*u = D[M^i].$$

Por el contrario, si se da a lo largo de $BO(n) \subset MO(n)$ una aplicación transversalmente regular $f\colon M^{n+i} \to MO(n)$, entonces una imagen completa $M^i = f^{-1}(BO(n))$ es tal, que $f^*u = D[M^i]$. Para $G = SO(n)$ y otros, todo es análogo.

El teorema queda demostrado.

En algunos casos los complejos $MO(i)$, $MSO(i)$ son complejos de forma $K(\pi, n)$. Son los casos:

$$MSO(1) = Me = S^1 = K(\mathbb{Z}, 1), \qquad \pi_j = 0, \quad j > 1,$$
$$MO(1) = \mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1), \qquad \pi_j = 0, \quad j > 1,$$
$$MSO(2) = \mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2), \qquad \pi_j = 0, \quad j \neq 2.$$

Con esto el elemento $\varphi(1) = u \in H^1(MG)$ coincide con una clase fundamental del complejo $K(\pi, n)$ en estos tres casos*). Según el teorema del § 10 obtenemos un juego de los corolarios del teorema 2.

COROLARIO 1. a) *Cualquier ciclo* $x \in H_n(M^{n+1}; \mathbb{Z}_2)$ *para todo* n *es realizado por una subvariedad cerrada.*

b) *Cualquier ciclo* $x \in H_n(M^{n+1}; \mathbb{Z})$ *y* $x \in H_n(M^{n+2}; \mathbb{Z})$ *para todo* n *se realiza por una subvariedad cerrada orientable.*

La deducción del corolario del teorema 2 se reduce al hecho de que un cociclo $Dx = y$ para estos casos se representa en forma de la imagen f^*u, según una propiedad fundamental de $K(\pi, n)$, puesto que $MO(1)$, $MSO(1)$, $MSO(2)$ son complejos $K(\pi, 1)$.

COROLARIO 2. Si $i < n/2$, *entonces para cualquier ciclo* $x \in H_i(M^n; \mathbb{Z})$ *se hallará un número* $\lambda \neq 0$ *tal, que un ciclo* λx *se representa como una subvariedad* $M^i \subset M^{n+i}$.

Este corolario se deduce del teorema 2 con ayuda de los resultados del § 10: se estableció que en las dimensiones estables cualquier complejo (aquí es $MSO(n)$) «se arregla de la misma manera que el producto directo de los complejos de tipo $K(\pi, m)$, donde $m \geqslant n$ si se multiplica todo tensorialmente por un campo $\mathbb{Q}$».

COROLARIO 3. *Para cualquier ciclo* $x \in H_i(X; \mathbb{Z})$ *se halla un número* $\lambda \neq 0$ *tal, que al ciclo* λx *es una imagen de la variedad* M^i.

$$\varphi: M^i \to X,$$
$$\varphi_*[M^i] = x.$$

---

*) Un teorema más complejo (de Thom), afirma que todos los complejos $MO(n)$ hasta la dimensión $2n-1$ son homotópicamente equivalentes a un producto directo de los complejos de tipo $K(\mathbb{Z}_2, m_j)$, donde $m_j \geqslant n$.

La demostración consiste en la inmersión $X \subset \mathbb{R}^{N+i}$ y en la examinación de una variedad con borde $U \supset X$, que contrae hacia X: $U \sim X$. Después el ciclo $\lambda x \in H_i(U) \approx H_i(X)$ se realiza en base al corolario 2 como una subvariedad con ayuda de la aplicación $(U, \partial U) \xrightarrow{f} MSO(N)$, donde ∂U se aplica en un punto y $f^*u = D[M^i]$.

COROLARIO 4. El homomorfismo natural

$$\Omega_i^{SO}(X, Y) \otimes \mathbb{Q} \to H_i(X, Y; \mathbb{Q})$$

de los grupos de bordismos en la homología es un «epimorfismo» (*aplicación en todo*).

Para los complejos sin torsión impar en las homologías $H_*(X, Y; \mathbb{Z})$ es justo el teorema (de Nóvikov) que establece un hecho análogo sin la multiplicación tensorial en el campo $\mathbb{Q}$, o sea, los ciclos son realizados por las imágenes de las variedades sin multiplicidades.

Ahora pasemos a los corolarios del teorema 1 y del teorema de Cartan—Serre (véase el § 10). El anillo $H^*(BSO(n); \mathbb{Q})$ es engendrado por clases características y es un anillo de los ploinomios de los elementos (clases de Pontriaguin y clase de Euler—Poincaré):

$$p_i \in H^{4i}(BSO(n); \mathbb{Q}),$$

$$\chi \in H^{2n}(BSO(2n); \mathbb{Q}).$$

Con eso, tenemos para $j < n$ y $j \neq 4k$:

$$H^{n+j}(MSO(n); \mathbb{Q}) = 0.$$

El rango de los grupos estables

$$H^{4k}(BSO(n); \mathbb{Q}) \overset{\varphi}{\approx} H^{n+4k}(MSO(n); \mathbb{Q})$$

para $4k < n$ es igual al número de las particiones del número k en los sumandos, $k = m_1 + \ldots + m_q$, puesto que la base consiste en los monomios $z = p_{m_1}p_{m_2} \ldots p_{m_q}$ (son posibles las coincidencias de $m_i = m_j$), $\deg z = 4(m_1 + \ldots + m_q)$.

Para las dimensiones $4k = 4, 8$, hemos escrito más arriba (véase el p. I) los números característicos de las variedades $[\mathbb{C}P^2] \in \Omega_4^{SO}$ y $[\mathbb{C}P^2]^2$, $[\mathbb{C}P^4] \in \Omega_8^{SO}$. Del teorema 1 junto con el de Cartan-Serre se deduce el siguiente teorema.

TEOREMA 3. *Los grupos $\Omega_j^{SO} \otimes \mathbb{Q} = 0$ para $j \neq 4k$; $\Omega_{4k}^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ es un grupo de rango igual al número de posibles vectores linealmente independientes, o sea de los números característicos de las variedades M^{4k}. Para $4k = 4, 8$ se deduce de los cálculos (véase más arriba), que el juego de los números característicos en $\mathbb{Q}$-cohomologías determina completamente la clase de cobordismos $x \in \Omega_{4k}$ con exactitud de torsión*).*

PROBLEMA 7. Calcular los vectores de los números característicos

*) Una información completa sobre la estructura de los anillos Ω^{SO}, Ω^U el lector puede encontrarla en el resumen [60].

de los productos $CP_1^{2n_1} \otimes \ldots \otimes CP_2^{2n_k}$ y mostrar, que todos estos vectores son linealmente independientes.

COROLARIO. *La signatura $\tau[M^{4k}]$ es una forma lineal de los vectores de los números característicos.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos, que τ es una forma lineal en $\Omega_{4k}^{SO} \otimes \mathbb{Q}$, según el lema 3 (véase más arriba), mientras los números característicos dan una base completa de formas. El corolario queda demostrado.

Para $4k = 4,8$ tenemos:

$$k = 1 : p_1[\mathbb{C}P^2] = 3, \quad \tau[\mathbb{C}P^2] = 1; \quad \Omega_4^{SO} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}.$$

CONCLUSIÓN: $\tau = \frac{1}{3} p_1$. (1)

$k = 2$: ya hemos obtenido la matriz (véase la parte I):

	$[\mathbb{C}P^2] \times [\mathbb{C}P^2]$	$[\mathbb{C}P^4]$
p_1^2	18	25
p_2	9	10
τ	1	1

CONCLUSIÓN. Tiene lugar la fórmula

$$\tau = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2). \tag{2}$$

Es posible obtener una fórmula general para todo k en una forma analítica conveniente (Hirzebruch).

Es conveniente plantear un problema más general: sea dada una característica numérica arbitraria en los cobordismos $\Omega_*^G = \Sigma\Omega_i^G$ para $G = U, SO$

$$\mathbb{B} : \Omega_*^G \to \mathbb{C}$$

tal, que $\mathbb{B}(1) = 1$, $\mathbb{B}(M_1^n \cup M_2^n) = \mathbb{B}(M_1^n) + \mathbb{B}(M_2^n)$, $\mathbb{B}(M_1^n \times M_2^n) = \mathbb{B}(M_1^n)\mathbb{B}(M_2^n)$, es decir, aditiva y multiplicativa (respecto al producto directo de las variedades). De hecho, nos interesa sólo el anillo $\Omega_*^G \otimes \mathbb{Q}$, determinado por los números característicos que son polinomios de c_i o de p_i. Para cualquier dimensión par $n = 2k$ en el caso $G = U$ tenemos un polinomio $\mathbb{B}_k(c_1, \ldots, c_k)$ tal, que $\mathbb{B}[M^{2k}] = (\mathbb{B}_k(c_1, \ldots, c_k), [M^{2k}])$, donde M^{2k} es una variedad «unitaria» (o sea, variedad en cuyo espacio fibrado normal estable se ha introducido la estructura de un U-espacio fibrado con inmersión $M^j \subset \mathbb{R}^{2N-j}$; en particular, una U-estructura se obtiene como una reflexión débil de una estructura de variedades compleja (o casi compleja), que «recuerda» las clases características). Para $G = SO$

tenemos los polinomios $\mathbb{B}_k(p_1, \ldots, p_k)$ para todas las dimensiones $n = 4k$ tales, que

$$\mathbb{B}[M^{4k}] = (\mathbb{B}_k(p_1, \ldots, p_k), [M^{4k}]).$$

El caso $G = SO$ se reduce a $G = U$ mediante la condición complementaria $\mathbb{B}_{2k+1}(c_1, \ldots, c_{2k+1}) = 0$, como se verá en adelante.

La sucesión de los polinomios $(\mathbb{B}_0 = 1, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \ldots, \mathbb{B}_k, \ldots)$ no es arbitraria, sino que se encuentra fuertemente vinculada a la condición de multiplicatividad de $\mathbb{B}(M^{2k} \times M^{2l}) = \mathbb{B}(M^{2k})\,\mathbb{B}(M^{2l})$.

Busquemos la respuesta en la siguiente forma: se ha dado la serie formal

$$\mathbb{B}(zt) = 1 + a_1 zt + a_2 z^2 t^2 + \ldots = \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{B}_k(\eta) z^k, \qquad t \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$$

con coeficientes numéricos, que determina una clase característica para los U-espacios fibrados unidimensionales. Tomamos

$$\mathbb{B}_k(c_1, \ldots, c_k) = \Big[\prod_{i=1}^{n} \mathbb{B}(zt_1)\,\mathbb{B}(zt_2) \ldots \mathbb{B}(zt_n)\Big]_k = \mathbb{B}_k(\sigma_1, \ldots \sigma_k)$$

donde $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ son polinomios elementales simétricos de $t_1, \ldots, t_n$.

Hay que tomar la serie $\mathbb{B}(zt)$ para el caso $G = SO$ en forma $\mathbb{B}(zt) = P(z^2t^2)$, las clases p_k son de forma $p_k \leftrightarrow \sigma_k(t_1^2, \ldots, t_n^2)$, véase más arriba.

Según la fórmula de Cauchy podemos escribir

$$\mathbb{B}_k(c_1, \ldots, c_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\varepsilon} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{B}(zt_1) \ldots \mathbb{B}(zt_n) \frac{dz}{z^{k+1}} \; (n \geqslant k).$$

Para $\mathbb{C}P^n$ tenemos, según las fórmulas de las clases características de un espacio fibrado tangente,

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_{n+1} = t \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}),$$

$$\tau_{\mathbb{C}P^n} \oplus 1 = \eta \oplus \ldots \oplus \eta \; (n+1 \text{ sumandos}),$$

$$\mathbb{B}(\eta) = \sum \mathbb{B}_k(\eta) z^k, \quad \mathbb{B}(\tau_{\mathbb{C}P^n}) = \mathbb{B}(\eta)^{n+1}.$$

Para el número $\mathbb{B}[\mathbb{C}P^n]$ tenemos

$$\mathbb{B}[\mathbb{C}P^n] = [\mathbb{B}(\eta)^{n+1}]_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\varepsilon} \mathbb{B}(z)^{n+1} \frac{dz}{z^{n+1}}$$

(componente n-ésimo de la serie por z).

EJEMPLO 1. $\mathbb{B}[\mathbb{C}P^{2n}]=1$, $\mathbb{B}[\mathbb{C}P^{2n+1}]=0$. Aquí $\mathbb{B}(zt)=zt/th\,(zt)$. En este caso $\mathbb{B}$ coincide con la signatura τ:

$$\mathbb{B}=\tau, \quad \mathbb{B}_k=L_k(p_1, \ldots, p_k).$$

Esto da una fórmula general para los polinomios de Hirzebruch

$$\tau=(L_k(p_1, \ldots, p_k)\, M^{4k}).$$

EJEMPLO 2. $\mathbb{B}(\mathbb{C}P^n)=1$ para todo n. Aquí

$$\mathbb{B}(zt)=zt/(1-\exp(-zt)).$$

Esto es el llamado «género de Todd» $T[M^{2n}]$ de las variedades algebraicas (complejas): según el teorema (de Hirzebruch), $T[M^{2n}]=\sum(-1)^i r_i$, donde r_i son las dimensiones de los espacios de las formas diferenciales puramente holomorfas en la variedad M^{2n};

$$T_0=1, \quad T_1=\frac{1}{2}c_1, \quad T_2=\frac{1}{12}(c_1^2+c_2), \quad T_3=\frac{1}{24}c_1c_2.$$

Deduzcamos una fórmula general para la serie $\mathbb{B}(z)$ en el caso de una característica arbitraria $\mathbb{B}:\Omega_*^U\to\mathbb{C}$. Introduzcamos una serie importante formal $\sum\limits_{n\geqslant 0}[\mathbb{C}P^n]\,z^n$ y su "integral" $g(z)=\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{[\mathbb{C}P^n]}{n+1}z^{n+1}$. Le confrontemos a esta serie el valor de la característica $\mathbb{B}$:

$$g\mathbb{B}(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathbb{B}(\mathbb{C}P^n)}{n+1}z^{n+1}.$$

Tenemos

$$\mathbb{B}(\mathbb{C}P^n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=\varepsilon}\frac{\mathbb{B}^{n+1}(t)}{t^{n+1}}\,dt,$$

$$\frac{dg\mathbb{B}(z)}{dz}=\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{B}(\mathbb{C}P^n)\,z^n=\frac{1}{2\pi i z}\sum_{n\geqslant 0}\oint_{|w|=\varepsilon}\left(\frac{\mathbb{B}(w)}{w}z\right)^{n+1}dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=\varepsilon}\frac{\mathbb{B}(w)/w}{1-z\mathbb{B}(w)/w}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=\varepsilon}\frac{dw}{w/\mathbb{B}(w)-z}$$

$$\left|\frac{z\mathbb{B}(w)}{w}\right|<1.$$

Por eso

$$g\mathbb{B}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^z\oint_{|w|=\varepsilon}\frac{dw\,dv}{(w/\mathbb{B}(w))-v}, \qquad |z|<\left|\frac{w}{\mathbb{B}(w)}\right|.$$

Integrando respecto a v, hallamos:

$$g\mathbb{B}(z)=\left[\frac{z}{\mathbb{B}(z)}\right]^{-1},$$

puesto que esta integral representa una función inversa. Así, hemos obtenido una respuesta general (Nóvikov):

$$\mathbb{B}(z)=\frac{z}{g^{-1}(z)}, \tag{3}$$

donde

$$g\mathbb{B}(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathbb{B}(\mathbb{C}P^n)}{n+1}z^{n+1}.$$

III. Algunas aplicaciones de la fórmula de la signatura. La signatura y los problemas de invariación de clases.

Mostremos que en la base de la noción de signatura pueden ser definidas también las mismas clases características p_k en $\mathbb{Q}$-cohomologías.

Consideremos el ciclo $x\in H_{4k}(M^n)$ y calculemos el producto escalar (p_k, x) sólo mediante la signatura. Es posible considerar, que $4k<n/2-1$ (si no es así, pasamos de la variedad M^n a $M^n\times S^N$). El cociclo $y=D(x)\in H^{n-4k}(M^n)$ es posible, multiplicando por $\lambda\neq 0$, realizarlo en forma de imagen con la aplicación

$$f: M^n\to S^{n-4k}=Me,$$
$$f^*(u)=\lambda y.$$

Esto se deduce de los resultados del p. II. La preimagen completa $f^{-1}(x_0)$ de un punto regular $x_0\in S^{n-4k}$ es una subvariedad con un espacio fibrado normal trivial

$$i: M^{4k}\times\mathbb{R}^{n-4k}\subset M^n,$$

donde $i_*[M^{4k}]=\lambda x\in H_{4k}(M^n)$.

Supongamos para $k=1$:

$$(p_1, x)=\frac{1}{\lambda}(p_1, \lambda x)=\frac{1}{\lambda}3\tau(M^{4k})$$

en virtud de la fórmula (1) y de la trivialidad de un espacio fibrado normal respecto a $M^{4k}\subset M^n$.

Esto da una definición nueva de la clase p_1. De modo análogo para la clase p_2 de (2) tenemos:

$$(p_2, x)=\frac{1}{\lambda}(p_2, \lambda x)=\frac{1}{7\lambda}[(45\tau(M^{4k})+(p_1^2, \lambda x)].$$

Es posible deducir de la fórmula general de Hirzebruch, que para todo k la clase p_k se puede expresar por $\tau(M^{4k})$ y el producto de las clases de dimensiones inferiores. Esto da una nueva definición de las clases p_k. La definición «de signatura» permite demostrar sin dificultad la invariación de las clases racionales p_k con homeomorfismos lineales a trozos (suaves a trozos) (véase la idea más abajo) y desempeña un papel importante en la demostración de la invariación de las clases p_k respecto a cualesquiera homeomorfismos continuos. Como se ve, la definición de signatura es sustancialmente racional: en ella se contienen los denominadores «necesarios», por ejemplo, 1/7 para la clase p_2. Esto tiene sus consecuencias: las clases de cohomologías con coeficientes enteros $p_k \in H^{4k}(M^n; \mathbb{Z})$, que, por definición, son invariantes del difeomorfismo, a veces son elementos de orden finito; una 7-torsión de la clase p_2 resulta no invariante respecto a los homeomorfismos continuos.

Consideremos una variedad lineal a trozos (triangulada) M^n y su aplicación simplicial en la esfera $M^n \xrightarrow{f} s^{n-4k}$. Entonces la preimagen completa de la parte interior del simplex $\sigma^{n-4k} \subset s^{n-4k}$ es de forma (¡verifíquese!)

$$\sigma^{n-4k} \times p^{-1}(y_0) = f^{-1}(\sigma^{n-4k}) = \sigma^{n-4k} \times M^{4k} \subset M, \qquad y_0 \in \sigma^{n-4k},$$

donde M^{4k} es una variedad de triangulación, o por lo menos un complejo, para cualquier punto de la cual $x_0 \in M^{4k}$ tenemos "homologías locales de esfera"

$$\begin{aligned} &H_i(M^{4k}, M^{4k} \setminus x_0) = 0, \qquad i \neq 4k, \\ &H_{4k}(M^{4k}, M^{4k} \setminus x_0) = \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4}$$

PROBLEMA 8. Demostrar que para las variedades homológicas (4) es justa la dualidad de Poincaré en las homologías, está definida la signatura $\tau(M^{4k})$ con las propiedades ordinarias: si $M^{4k} = \partial W^{4k+1}$, donde ambas son variedades homológicas, entonces $\tau = 0$.

Estas propiedades permiten dar una definición puramente simplicial (y combinatorio-invariante) de las clases $p_k \in H^*(M; \mathbb{Q})$ (Thom, Rojlin-Schwarz) en base a la fórmula de signatura. La clase $p_2 \in H^8(M; \mathbb{Z})$ no admite definición combinatoria y es no invariante combinatoriamente (topológicamente) (Minor, Kervaire).

Pasando al problema de la invariación topológica de las clases $p_k \in H^{4k}(M; \mathbb{Q})$, es posible considerar todas las variedades $M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+4k}$ simplemente conexas. Sea $n \geqslant 2$. Consideremos la inmersión del toro $T^{n-1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ y un dominio abierto en la variedad examinada:

$$M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R} \subset M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+4k}.$$

En cualquier estructura suave el dominio

$$M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R} \subset M^{4k} \times \mathbb{R}^n \subset M^{n+4k}$$

es una variedad suave. Utilizando una técnica más comlicada de la teoría de clasificación de las variedades suaves simplemente conexas, difundida al caso de las variedades con los grupos abelianos libres $\pi_1 = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$, se demuestra tal afirmación (variante más simple): si $\pi_1(M^{4k}) = 0$, entonces el cubrimiento suave universal sobre una variedad suave abierta $M^{4k} \times T^{n-1} \times \mathbb{R}$ (dado en cualquier estructura suave) es difeomorfo a $\widetilde{M}^{4k} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{p} M^{4k} \times \mathbb{R} \times T^{n-1}$, donde M^{4k} es una variedad suave. De aquí, con inducción por k se llega a la afirmación de que la magnitud $\tau(M^{4k}) = \tau(\widetilde{M}^{4k})$ define las clases características $p_1, \ldots, p_k$ de un modo topológicamente invariante (Nóvikov). Hasta ahora no se conocen demostraciones de este teorema, donde se lograría librarse de, parecería, una utilización artificial de los dominios auxiliares con un grupo abeliano libre π_1 es en este problema «simplemente conexo puro», por un planteamiento no conexo con π_1.

Notemos, que ya la clase $p_1 \in H^4(M^k; \mathbb{Q})$, a diferencia de las homologías y las clases de Stiefel-Whitney, no es un invariante homotópico (Dold). Consideremos los espacios fibrados (sea $\chi = 0$ para $n = 4$) sobre una esfera S^4 con fibra S^{n-1}, grupo $G = SO(n)$ y todas las clases posibles $p_1(\xi) \in H^4(S^4; \mathbb{Z})$. El espacio de tal espacio fibrado $E \xrightarrow{p} S^4$, $F = S^{n-1}$ tiene las células σ^0, σ^4, σ^{n-1}, σ^{n+3}, donde $\partial\sigma^4 = \partial\sigma^{n-1} = 0$, $\partial\sigma^{n+3} = 0$. Por eso E es del tipo

$$E = (S^4 \vee S^{n-1}) \bigcup_{\alpha} \sigma^{n+3},$$

donde $\alpha \in \pi_{n+2}(S^4 \vee S^{n-1})$.

PROBLEMA 9. Demostrar que el elemento α es del tipo

$$\alpha = [a_4, a_{n-1}] + b,$$

donde $b \in \pi_{n+2}(S^{n-1})$, $[a, b]$ es producto de Whitehead (véase [1], p. II, § 22), $a_4 \in \pi_4(S^4)$ y $a_{n-1} \in \pi_{n-1}(S^{n-1})$ son generatrices. Para $n=5$, $b \in \pi_7(S^4) = \mathbb{Z} \oplus$ (grupo finito) se encuentra en una parte finita.

Luego, sabemos del § 10 (corolario del teorema de Cartan-Serre), que el grupo $\pi_{n+2}(S^{n-1})$ para $n \neq 5$, es finito. (Es más, en el § 10 este grupo fue calculado para $n > 5$, donde $\pi_{n+2}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}_{24}$). Así, se tiene no más de un número finito de las variedades cerradas E con exactitud de un tipo homotópico (para $n > 5$ hay no más que 24). Estas variedades tienen dimensión $n \geqslant 6$. En cuanto al difeomorfismo, la clase $p_1(\xi)$ es un invariante de la variedad E, puesto que $p_1(E) = p^*p_1(\xi)$ (¡verifíquese!).

Así, ya la clase p_1 es homotópicamente no invariante para las variedades de dimensión $\geqslant 6$. Para las variedades M^4 esta clase es homotópicamente invariante en virtud de la fórmula (véase más arriba)

$$p_1 = 3\tau [M^4].$$

Consideremos el caso $n = 5$. El ciclo básico $x \in H_4(M^5; \mathbb{Z})$ puede ser representado en concordancia con el corolario 1 del p. 11 en forma de una subvariedad orientable que divide localmente una variedad orientable M^5 en dos partes (pero no la divide globalmente). Consideremos un cubrimiento mínimo

$$\hat{M}^5 \xrightarrow[p]{} M^5$$

tal, que $(p_* \pi_1(\hat{M}^5), Dx) = 0$, y esta fórmula define el cubrimiento de una manera homotópicamente invariante. Este cubrimiento se

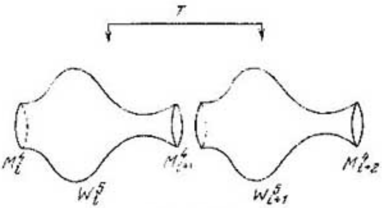

Fig. 118.

construye geométricamente así: la variedad M^5 se corta a lo largo de M^4; se obtiene una película W^5 tal, que

$$\partial W^5 = M^4 \cup M^4$$

(dos componentes de borde). El cubrimiento es de la forma indicada en la fig. 118: se toma un número infinito de ejemplares de W^5 designados por W_i^5.

Luego, hacemos

$$\hat{M}^5 = \ldots \bigcup_{M_1^4} W_1^5 \bigcup_{M_2^4} W_2^5 \bigcup_{M_3^4} W_3^5 \ldots$$

El grupo de monodromia del cubrimiento es igual a $\mathbb{Z}$ y actúa así:

$$T(W_i^5) = W_{i+1}^5$$
$$T(W_i^4) = M_{i+1}^4, \quad \partial W_0^5 = M_0^4 \cup M_1^4.$$

Designamos por i a la inmersión (al encaje) $M^4 \to \hat{M}^5$. Tenemos un ciclo $\hat{x} = i_* [M^4] \in H_4(\hat{M}^5)$. Es evidente que tenemos $T_* \hat{x} = \hat{x}$.

Sea $a, b \in H^2(\hat{M}^5; \mathbb{Q})$. Introducimos la forma

$$\langle a, b\rangle_{\hat{x}} = \langle ab, \hat{x}\rangle.$$

LEMA c. *La forma $\langle a, b\rangle_{\hat{x}}$ está concentrada en algún subespacio de dimensión finita $A \subset H^2(\hat{M}^5)$; esto significa que $H_1^2(\hat{M}^5) = A + B$ y $\langle B, b\rangle_x = 0$ para cualquier $b \in H^2(\hat{M}^5)$.*

La demostración se deduce inmediatamente de la compacidad de la variedad M^4 (del ciclo $\hat{x}$), puesto que $(ab, \hat{x}) = ((i^*a)(i^*b), [M^4])$.

DEFINICIÓN 4. La signatura de la forma $\langle a, b\rangle_{\hat{x}}$ en un espacio de dimensión A se llama signatura del ciclo $\tau(\hat{x})$.

TEOREMA 4. (Nóvikov). *Tiene lugar la fórmula*

$$(p_1(M^5), x) = 3\tau(\hat{x}).$$

COROLARIO. *La clase $p_1(M^5) \in H^4(M^5; \mathbb{Q})$ es homotópicamente invariante.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. El ciclo $M^4 \subset M^5$ divide en dos partes $\hat{M}^5 = M_1 \cup M_2$. Tenemos dos inmersiones: $i_1\colon M^4 \to M_1$, $i_2\colon M^4 \to M_2$. La signatura del ciclo $\tau(\hat{x})$ coincide con la signatura de la forma en $H^2(M^4; \mathbb{Q})$ restringida en un subespacio $\operatorname{Im} i^*$, puesto que $(ab, x) = 0$, si $i^*a = 0$ o $i^*b = 0$. Evidentemente, tenemos

$$\operatorname{Im} i^* = \operatorname{Im} i_1^* \cap \operatorname{Im} i_2^*.$$

En las homologías $H_2(M^4, \mathbb{Q})$ se tienen los siguientes subgrupos:

$$L_0 = \operatorname{Ker} i_*, \quad L_1 = \operatorname{Ker} i_{1*} = L_0 + N_1,$$
$$L_2 = \operatorname{Ker} i_{2*} = L_0 + N_2,$$
$$L_3 = \operatorname{Im} i_* \subset H_2(\hat{M}^5; \mathbb{Q}).$$

El índice de intersección se anula en los subespacios L_1 y L_2 (los ciclos homológicos a nulo en la película, tienen intersección nula). Por eso en la base

$$H_2(M^4; \mathbb{Q}) = (L_0, N_1, N_2, L_3)$$

forma tiene la matriz de tipo (de bloque):

$$\begin{array}{c} \\ L_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L_0 & N_1 & N_2 & L_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & Q & Y \\ 0 & Q^* & 0 & Z \\ X^* & Y^* & Z^* & W \end{array} \right\| \end{array},$$

donde $W = W^*$. La signatura de esta forma coincide con la signatura de la forma en un subespacio L_3 (o sea, para la matriz W).

Luego, la signatura de la forma en el subespacio $L_3 \subset H_2(M^4; \mathbb{Q})$ coincide con la signatura de la forma $(ab, [M^4])$ en el subespacio $\operatorname{Im} i^* (H^2(\hat{M}^5))$ y, de este modo, coincide con la signatura $\tau(\hat{x})$. El teorema queda demostrado.

De manera que en las variedades cerradas no simplemente conexas entre las clases características racionales y un grupo fundamental, surge una conexión profunda cuyo estudio hasta ahora no está concluido ni mucho menos. Una «hipótesis sobre las signaturas superiores» más general consiste en lo siguiente: hay una reserva de las clases de cohomologías conexas con un grupo fundamental $\pi_1(M^n) = \pi$; esta clase se obtiene como una imagen $\operatorname{Im} j^*$, donde $j: M^n \to K(\pi, 1)$ es una aplicación canónica. Si $x \in H^{n-4k}(\pi, \mathbb{Q})$*), entonces se supone que el producto escalar del polinomio de Hirzebruch de las clases características de Pontriaguin con el ciclo $Dj^*(x)$ es homotópicamente invariante: $(L_k(p_1, \ldots, p_k), Dj^*(x))$, donde D es la dualidad de Poincaré. Para los grupos libres abelianos (es decir, si x es un producto de clases unidimensionales) esta hipótesis está demostrada (Nóvikov, Rojlin, Caspárov, Hsiang, Farrell). Ella también está demostrada cuando π es un grupo fundamental de una variedad de Riemann compactada de curvatura negativa (Lusztig, Míschenko), así como también en una serie de casos o de modos algebraica reducidos a estos casos, o en cierto sentido análogos a estos casos (Keppell, Solovíov). Es imposible componer algunos otros invariantes homotópicos de las variedades cerradas de las clases características racionales (reales), o sea, del tensor de curvatura.

§ 28. Estructuras suaves en la esfera heptadimensional
El problema de clasificación de las variedades suaves (invariantes normales). Torsión de Reidemeister e hipótesis básica de la topología combinatoria

Consideramos las variedades infinitamente diferenciables. Se sabe que la variedad de clase de suavidad $k \geqslant 1$ es equivalente (y además, única) a la variedad infinitamente diferenciable y hasta analítica real (Whitney). También es posible definir formalmente las variedades puramente continuas, donde no son suaves los cambios de coordenadas al pasar de un mapa de coordenadas al otro. Es asimismo posible examinar (lo que se realiza con mucha más frecuencia los homeomorfismos puramente continuos de las variedades suaves. Hasta los años 50 se consideraba «evidente» el hecho de que en cualquier variedad continua es posible introducir la estructura de una variedad suave y que dos variedades suaves continuamente homeomorfas en realidad, son también difeomorfas. Esto es evidente

*) En el álgebra de cohomología del complejo $K(\pi, 1)$ se llaman cohomologías los grupos π y se designan por $H^*(\pi, \mathbb{Q})$.

para $n = 1$, se demuestra sin dificultad para $n = 2$; con grandes complicaciones, pero empleando métodos elementales se logra establecer esos hechos para las variedades tridimensionales (Moise).

Uno de los más asombrosos corolarios del aparato expuesto más arriba de la topología algebraica consiste en descubrir entre las variedades bastante simples una variedad tal, que sea continuamente homeomorfa a una esfera suave heptadimensional ordinaria S^7, pero que no sea difeomorfa a la esfera S^7 (Milnor). Como se verá más adelante, este efecto conduce a descubrir variedades que no admiten la introducción de ninguna estructura de la variedad diferenciable.

Recordemos que con ayuda de cuaternios (véase [1], p. II, § 24) construíamos un «espacio fibrado de Hopf de cuaternios»

$$S^7 \xrightarrow{p} S^4, \quad \text{fibra} \quad F = S^3.$$

Esto es un espacio fibrado principal con el grupo $S^3 = SU(2)$ que consiste en los cuaternios q, $|q| = 1$, que actúan en la esfera así

$$S^7 = \{(q_1, q_2), \ |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1\}, \qquad (q_1, q_2) \to (qq_1, qq_2),$$

donde q_1, q_2, q son cuaternios. Pusto que $SU(2) \subset SO(4) = SU(2) \times \times (SU(2)/(-1, 1))$, entonces es posible hablar sobre las clases (χ, p_1). Vamos a estudiar los espacios fibrados análogos al grupo $SO(4)$, a los que realizaremos como espacios fibrados con fibra D^4 y base S^4:

$$E \underset{p}{\rightarrow} S^4, \quad F = D^4, \quad G = SO(4). \tag{1}$$

El número χ es igual, por definición, al índice de autointersección $S^4 \circ S^4$ donde $S^4 \subset E$ como intersección nula (véase [1], parte II, § 24). (Con mayor exactitud, χ es una clase de cohomologías de la base S^4, $\chi \in H^4(S^4; \mathbb{Z})$ tal, que $(\chi, [S^4]) = S^4 \circ S^4$.

LEMA 1 *El espacio ∂E del espacio fibrado* (1) *con fibra S^3 es homeomorfo a la esfera S^7* si, y sólo si, $\chi = 1$.

Demostremos que ∂E tiene un tipo homotópico de la esfera S^7 si, y sólo si $\chi = 1$. Consideremos la sucesión exacta

$$\ldots \to \pi_i(\partial E) \xrightarrow{p_*} \pi_i(S^4) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(S^3) \to \ldots$$

Para $i = 4$ el homomorfismo ∂: $\pi_4(S^4) \to \pi_3(S^3)$ se calcula así: construimos una sección no nula del espacio fibrado (1) con fibra D^4. Ahora está claro que el índice de autosección $S^4 \circ S^4$ coincide con ta multiplicidad, con la cual el ciclo S^3 (fibra) entra en la frontera $\partial[\sigma^4]$ en ∂E. Así, $\partial[S^4] = \chi[S^3]$ (véase [1], p. II, § 22). Si $\chi \neq 1$, tenemos

$$\begin{array}{c} 0 \to \mathbb{Z}_\chi \to \pi_3(\partial E) \to \pi_3(S^4). \\ \hphantom{0 \to \mathbb{Z}_\chi \to \pi_3(\partial E) \to \pi_3} \| \\ \hphantom{0 \to \mathbb{Z}_\chi \to \pi_3(\partial E) \to \pi_3} 0 \end{array}$$

Por eso $\pi_3(\partial E) = \mathbb{Z}_\chi$. Si $\chi = 1$, entonces $\pi_j(\partial E) = 0$ para $j \leqslant 4$, como se deduce de la sucesión exacta. Como ∂E tiene solamente las células σ^0, σ^3, σ^4, σ^7 y $\pi_j = 0$ para $j \leqslant 4$, tenemos en realidad

$$H_j(\partial E) = \pi_j(\partial E) = 0, \quad j < 7, \quad \pi_7(\partial E) = \mathbb{Z}.$$

El elemento básico $\alpha \in \pi_7(\partial E) = \mathbb{Z}$ se representa por la aplicación $\alpha\colon S^7 \to \partial E$, la cual induce isomorfismo de los grupos de homologías (y, por consiguiente, de los grupos homotópicos). Así, $\partial E \sim S^7$.

Hay un teorema general (Smale, Stallings, Wallace), según el cual para $n \geqslant 5$ la variedad de tipo homotópico S^n es homeomorfa a S^n. De aquí, claro, se deduce el lema 1. Es posible, sin utilizar este teorema, construir concretamente algunos de los espacios fibrados mediante los cuaternios e indicar directamente el homeomorfismo $\partial E \approx S^7$, presentando explícitamente una función de Morse con un solo mínimo y un solo máximo (véase más abajo). Si $\chi = 1$ está fijado, tenemos espacios fibrados con diferentes clases p_1.

LEMA 2. *Para cualquier k existe un espacio fibrado ξ tal, que $p = 2k$, $\chi = 1$ (más exactamente, $p_1 = 2ku$, $\chi = u$, donde $u \in H^4(S^4; \mathbb{Z})$ es un elemento básico).*

Antes de demostrar el lema 2 presentaremos un mecanismo que conduce al surgimiento de las estructuras suaves no triviales en la esfera S^7.

Consideremos la clase $p_1(E) = p^*p_1(\xi)$, puesto que $\tau_E = \tau_{S^4} \oplus p^*(\xi)$. Por eso

$$p_1(E) = p^*p_1(\xi) = 2kp^*u = 2kv,$$

donde $v = p^*u \in H^4(E; \mathbb{Z})$ es un elemento básico. Tenemos para el ciclo $S^4 \subset E$

$$S^4 \circ S^4 = 1 = (\chi, [S^4]).$$

Por eso la signatura $\tau(E) = 1$.

Razonamiento por el contrario: si el borde ∂E es una esfera ordinaria $S^7 = \partial D^8$ (como una variedad suave), entonces tenemos una variedad suave

$$\overline{E}^8 = E \cup D^8, \text{ donde } \partial E = \partial D^8.$$

Luego, $H_i(\overline{E}^8) = H_i(E)$ para $i \leqslant 7$,

$$p_1(\overline{E}^8) = p_1(E) = 2kv,$$

$$\tau(E) = 1 - (\overline{E}^8).$$

Para una variedad suave cerrada $\overline{E}^8$ del tipo homotópico HP^2 (de un plano proyectivo de cuaternios) podemos aplicar la fórmula de signatura (véase el § 24):

$$p_2 = \frac{1}{7}(45\tau + p_1^2).$$

¡Con eso el número $(p_2, [\bar{E}^8])$ debe ser entero! En nuestro caso

$$\tau = 1, \quad p_1^2 = 4k^2,$$
$$p_2 = \frac{4k^2+45}{7}.$$

Para $k = 1$ tenemos: $p_2 = 7$ para un plano proyectivo de cuaternios ordinario $\mathbb{H}P^2$. Para $k = 0, 2, 3, 4, \ldots$ etc. tenemos: ¡p_2 es un número no entero! Contradicción con la suavidad de $\bar{E}^8$.

CONCLUSIÓN. Para todo k, cuando p_2 es fraccionario, la variedad ∂E no es difeomorfa a la esfera S^7 (aunque sea homeomorfa a S^7).

Es sabido, que las clases p_q $H^{4k}(M^n; \mathbb{Q})$ son invariantes de los homeomorfismos continuos (Nóvikov). Por supuesto de aquí se deduce que la variedad $\bar{E}^8$ para $k = 0, 2$ no admite la introducción de una estructura suave. Realmente, la existencia de una estructura suave para $\bar{E}^8$ contradiría la invariación de la clase $p_1(E)$, ya que, evidentemente, τ es invariante. Por otra parte, un análisis detallado muestra que para algunos otros ejemplos es posible contentarse con medios más simples que el empleo de la invariación topológica de las clases p_q (Kervaire).

Ahora pasemos a demostrar el lema 2.

En principio consideremos el $SO(3)$, que es un espacio fibrado sobre S^4. Puesto que $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$, tenemos una aplicación (transformada en un espacio fibrado)

$$BSO(3) \xrightarrow[p]{} k(\mathbb{Z}_2, 2); \qquad F = BSU(2),$$

además, $\pi_1(B) = 0$. La sucesión espectral en las $\mathbb{Z}$-homologías tiene la forma $E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F)) = E^\infty_{p,q}$, $p+q \leqslant 5$:

4	u	0	u_1	0	u_2	u_3
	0	0	0	0	0	0
0	1	0	v	0	w	x
	0	1	2	3	4	5

$d_5 x = 0$, puesto que $2u \neq 0$, $2x = 0$, de donde se deduce, que $\pi_4(BSO(3)) \xrightarrow{H} H_4(BSO(3); \mathbb{Z})$ no es una aplicación «en» Coker $H = \mathbb{Z}_2$.

La clase $p_1 \in H^4(BSO(3), \mathbb{Q})$ es tal, que

$$(p_1, u) = 2,$$

donde u es un elemento básico del grupo $H\pi_4 \subset H_4(BSO(3); \mathbb{Z})$. De manera que para $G = SO(3)$ el número $(p_1, [S^4])$ recorre todos los valores pares para los espacios fibrados ξ sobre S^4.

Sumergiendo (encajando) $SO(3)$ en $SO(4)$ pasamos de ξ a $\xi \oplus 1$, donde $p_1(\xi \oplus 1) = p_1(\xi)$, $\chi(\xi \oplus 1) = 0$.

Ahora consideremos $SO(4) = (SU(2) \times SU(2))/(-1, -1)$ y una aplicación (espacio fibrado)

$$BSO(4) \underset{p}{\rightarrow} K(\mathbb{Z}_2, 2), \qquad F = BSU(2) \times BSU(2).$$

En la sucesión espectral para las $\mathbb{Z}$-homologías, considerando que $\pi_1(B) = 0$, tenemos

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F)) = E^\infty_{p,q}, \qquad p + q \leqslant 5,$$

4	u y	0	u_1 x_1	0	u_2 x_2	
	0	0	0	0	0	0
0	1	0	v	0	w	x
	0	1	2	3	4	5

Aquí $2x = 2v = 2w = 0$, $d_5 x = 0$, puesto que $2u \neq 0$, $2y \neq 0$. La aplicación $H: \pi_4(BSO(4)) \to H_4(BSO(4); \mathbb{Z})$ no es un isomorfismo: Coker $H = \mathbb{Z}_2$.

CONCLUSIÓN. Como p_1, χ es una base en un espacio conjugado Hom $(H_4, \mathbb{Z})$, entonces χ puede tomar cualesquiera valores enteros para los espacios fibrados sobre S^4, y los p_1 son pares.

El lema queda demostrado.

Construcción directa de los espacios fibrados (Milnor). Recordemos (véase [1], p. II, § 24), que los $SO(4)$-espacios fibrados sobre la esfera «se numeran» por los elementos del grupo $\pi_3(SO(4)) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, o sea, por los pares de los números enteros (h, j). La construcción explícita de las aplicaciones correspondientes $f_{hj}: S^3 \to SO(4)$ es dada por cuaternios:

$$f_{hj}(u)\, v = u^h v u^j,$$

donde $u, v \in \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, $|u| = 1$ (o sea, $u \in S^3$). Designemos por ξ_{hj} al espacio fibrado correspondiente sobre S^4.

PROBLEMA 1. Demostrar, que

$$\chi(\xi_{hj}) = h + j, \qquad p_1(\xi_{hj}) = \pm 2(h - j).$$

Sean los números h y j tales, que $h + j = 1$, $h - j = k$. Designemos por M^7_k a un espacio fibrado ξ_{hj} (donde en la fibra está la esfera S^3). Esta variedad puede ser pegada de dos ejemplares $\mathbb{R}^4 \times \times S^3$ mediante la pegadura de los subconjuntos $(\mathbb{R}^4 \setminus 0) \times S^3$ por un difeomorfismo

$$(u, v) \mapsto (u', v') = \left(\frac{u}{|u|^2}, \frac{uh_{vu}j}{|u|^2}\right)$$

(¡comprobarlo!)

PROBLEMA 2. Verificar, que la función f de forma

$$f(u, v) = \frac{\operatorname{Re} v}{(1+|u|^2)^{1/2}} = \frac{\operatorname{Re} u''}{(1+|u''|^2)^{1/2}},$$

donde $u'' = u' (v')^{-1}$ tiene en M_k^7 exactamente 2 puntos críticos $(u, v) = (0, \pm 1)$ que son no degenerados.

De aquí se deduce que todas las variedades M_k^7 son homeomorfas a la esfera S^7. Del problema 1 y de los razonamientos de este parágrafo (más arriba), se deduce que para $k^2 \not\equiv 1 \pmod 7$ la variedad M_k^7 no es difeomorfa a S^7.

Así, vemos que se tienen variedades no triviales de un tipo homotópico de esfera («esferas homotópicas»). El conjunto de las variedades del tipo homotópico S^n es cerrado respecto a la operación de «suma conexa» de las variedades (véase el § 4):

$$M_1^n \# M_2^n \sim S^n.$$

DEFINICION 1. Dos variedades cerradas M_1^n y M_2^n (de cualquier tipo homotópico) se llaman *h-cobordantes* (o *J-equivalentes*), si se halla una película W^{n+1}, $\partial W^{n+1} = M_1^n \cup M_2^n$, además la película W^{n+1} se contrae a cada uno de sus bordes.

LEMA 3. *Las clases de h-cobordismos de las esferas homotópicas forman el grupo* θ^n.

DEMOSTRACIÓN: siempre es justa la asociatividad de una suma conexa (no sólo para las esferas homotópicas); consideremos la suma de una esfera homotópica orientable M_+^n y la misma esfera con una orientación opuesta $(M_+^n) \# (M_-^n) = M_0^n$. La variedad M_0^n es una frontera de la siguiente variedad W^{n+1} (véase la fig. 119).

Del producto $M_+^n \times I(0, 1)$ se excluye el producto $D_\varepsilon^n \times I$, donde $D_\varepsilon^n \subset M_+^n$ es una esfera (globo) pequeña abierta de radio ε. Suavizando los ángulos notemos que $\partial W^{n+1} = M_+^n \# M_-^n$, y W^{n+1} es contractable.

Exluyendo de W^{n+1} una esfera (globo) pequeña abierta D_0^n obtendremos un h-cobordismo entre ∂W^{n+1} y la esfera ordinaria S^n.

El lema queda demostrado.

Introducimos las siguiente s designaciones: ∂P^{n+1} es un subgrupo en θ^n, consistente en las fronteras de las variedades $(n+1)$-dimensionales que admiten la paralelización; $J_n \subset \pi_{N+n}(S^N)$, $n < N - 1$ es un subgrupo consistente en pertrechamientos en la esfera ordinaria $S^n \subset \mathbb{R}^{N+n}$ (véase [1], p. II, § 23). Tiene lugar el siguiente hecho:

Cualquier esfera homotópica M^n al encajarse (sumergirse) en $\mathbb{R}^{N+n}$ tiene un espacio fibrado trivial normal (para $n = 4k$ esto se deduce de la periodicidad de Bott (véase el § 22) y de la fórmula de signatura para p_k, teniendo en cuenta, que $\tau(S^n) = 0$; para $n \neq 4k$, $8k + 1$, $8k + 2$ es un corolario del hecho de que los grupos

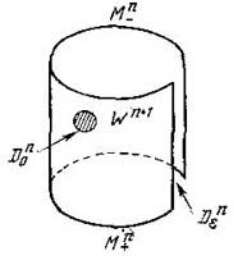

Fig. 119.

homotópicos $\pi_n(SO) = 0$; para $n = 8k + 1$, $8k + 2$ es el teorema de Adams que se deduce de una técnica más moderna de la topología algebraica).

Por eso, teniendo en cuenta la arbitrariedad en la elección del pertrechamiento en $M^n \subset \mathbb{R}^{N+n}$, obtenemos el homomorfismo $\theta^n \to \pi_{N+n}(S^N)/J^n$. El núcleo de este homomorfismo es un grupo ∂P^{n+1} (comprobarlo!);

Para el grupo ∂P^{n+1} se tienen los siguientes resultados: a) $\partial P^{n+1} = 0$, si n es par,

$$\text{b) } \partial P^{n+1} = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \\ \mathbb{Z}_2, & n = 10, \\ 0 & \text{o } \mathbb{Z}_2, \text{ si } n = 4k + 1, \end{cases}$$

c) ∂P^{n+1} es igual a un grupo cíclico de algún orden finito, igual a 28 para $n = 7$ (de hecho, ya hemos construido más arriba un homomorfismo no trivial $\theta^7 \to \mathbb{Z}_7$). El caso singular $n = 3$ no se examina. Los grupos $\Gamma_n = \pi_{N+n}(S^N)/J^n$ y θ^n son de la forma:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Gamma_n =$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$\mathbb{Z}_2$
$\theta^n =$	0	0	0	?	0	0	0	$\mathbb{Z}_{28}$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$(\mathbb{Z}_2)^3$	$\mathbb{Z}_2$

Así son los hechos (Milnor, Kervaire) sobre los grupos de las esferas homotópicas θ^n. Tiene lugar un teorema (Smale): para las variedades simplemente conexas de dimensión $n \geqslant 5$ cualquier h-cobordismo W^{n+1} es trivial, o sea $W^{n+1} = M^n \times I$. Por eso los grupos θ^n dan una clasificación de las estructuras suaves en las esferas, excluyendo las dimensiones $n = 3, 4$.

Las estructuras suaves en la esfera y las clasificaciones de las variedades de una esfera de tipo homotópico es el mismo problema con $n \neq 3, 4$. El grupo θ^3 es desconocido, pero no hay estructuras suaves no triviales en S^3. Es conocido el grupo $\theta^4 = 0$, pero se ignora si hay suavidades no triviales en S^4.

Expondremos ahora la teoría de la clasificación de las variedades suaves cerradas simplemente conexas de dimensión $n \geqslant 5$ (Nóvikov, Browder)*). Naturalmente surge la pregunta: ¿cuáles son las invariantes, excepto un tipo homotópico y una clase de equivalencia del espacio fibrado tangente, que definen una variedad suave cerrada? Para el caso particular de las esferas homotópicas hemos indicado la teoría (Milnor-Kervaire) que resuelve estos problemas. El enfoque de este problema para las variedades generales es el siguiente: trabajamos con un espacio fibrado normal estable ν^N con inmersión (encaje) $M^n \subset R^{n+N}$, definido de una manera unívoca por un espacio fibrado tangente τ^n si $N > n + 1$ en virtud de la igualdad

$$\tau^n \oplus \nu^N \sim 0.$$

Las variedades suaves de cualquier tipo homotópico no esférico, sin duda, no forman ningún grupo. Resulta muy útil examinar un complejo de Thom $M(\nu^N)$. Hay una inmersión (encaje) natural $M^n \subset M(\nu^N)$ y una aplicación de todo un entorno U de la variedad M^n en $\mathbb{R}^{n+N} \subset S^{n+N}$:

$$U \to M(\nu^N),$$

donde ∂U se aplica en un punto. El entorno de U es precisamente el espacio fibrado ν^N. La aplicación de los pares $(U, \partial U) \to (M(\nu^N), *)$ se prolonga de una manera natural hasta la aplicación de una esfera, trasladando un complemento del entorno U en la esfera S^{N+n} en un punto *:

$$\psi = \psi_{M^n} : S^{N+n} \to M(\nu^N).$$

Para la aplicación $\psi = \psi_{M^n}$ tenemos

$$\psi_* [S^{N+n}] = \varphi [M^n] \subset H_{n+N}(M(\nu^N)).$$

*) Para $n = 4$ de esta teoría se deduce sólo la afirmación que las variedades homotópicamente equivalentes son h-cobordantes.

Así, el ciclo $\alpha [M^n]$ es esférico. Luego, el grupo $H_{n+N}(M(\nu^N); \mathbb{Z})$ es igual a $\mathbb{Z}$, $n < N + 1$. Como corolario de los resultados del § 10 tenemos:

$$\pi_{N+n}(M(\nu^N)) = \mathbb{Z} + D,$$

donde D es un grupo abeliano finito.

A la variedad M^n, en virtud de esta construcción, le corresponde un elemento $\psi_{M^n} \in \pi_{N+n}(M\nu^N))$ tal. que $\psi_* [S^{N+n}] = \varphi [M^n]$. Por eso $\psi_{M^n} = 1 + \alpha$, $\alpha \in D$. Tiene lugar la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN 1 (Nóvikov). a) *A cada variedad M_1^n para la cual es dada una equivalencia homotópica $M_1^n \xrightarrow{f} M^n$ (deg $f = +1$, $f^* \nu^N_{M^n} = \nu^N_{M_1^n}$), que conserva un espacio fibrado normal y orientación, le corresponde un elemento $\psi_{M_1^n} \in \pi_{N+n}(M(\nu^N))$ de forma $1 + \alpha$, $\alpha \in D$ (aunque, hablando en general, no uno). Para $n \neq 4k + 2$ es justa también la afirmación inversa. Para $n = 4k + 2$ los elementos «realizables» $1 + \alpha$ pueden recorrer un subgrupo $\alpha \in \widetilde{D} \subset D$, donde $\widetilde{D} = D$, $\widetilde{D}$ tiene el índice 2.*

b) *Si dos tales variedades M_1^n y M_2^n resultan estar en una misma clase $1 + \alpha \in \pi_{n+N}(M(\nu^N))$, entonces se hallará una esfera de Milnor $\theta \in \partial P^{2n+1}$ tal, que $M_1^n \# \theta = M_2^n$.*

COROLARIO. *Con un tipo homotópico dado y un espacio fibrado tangente (o de sus invariantes, las clases $p_k \in H^*(M^n; Q)$) puede ser sólo un número finito de las variedades suaves simplemente conexas no difeomorfas de par en par de dimensión $n \geqslant 5$ (todos los invariantes construidos de difeomorfismo toman valores en los grupos abelianos finitos).*

Otro teorema (Browder, Nóvikov) muestra, qué espacios fibrados vectoriales ξ sobre una variedad suave M_1^n pueden ser realizados como los espacios fibrados normales $M_2^n \subset \mathbb{R}^{n+N}$ de alguna otra variedad M_2^n de un tipo homotópico M_1^n:

a) Para esto es necesario, y con $n = 6$, 14 y todos los $n = 2k + 1 \geqslant 5$ impares, también suficiente, que un ciclo $\varphi [M_1^n] \in H_{n+N}(M(\xi))$ sea esférico (imagen de la esfera S^{N+n}).

b) Cuando $n = 4k$ para la condición de suficiencia hay que añadir la condición de que un polinomio de Hirzebruch de parte de las clases $p_1(\xi), \ldots, p_k(\xi)$ coincida con la signatura $\tau [M_1^n]$. Es evidente la necesidad de esta condición, véase más arriba la fórmula de signatura.

En efecto, este teorema puede ser formulado de una manera más general (Browder): es posible suponer que M_1^n no es una variedad, sino sólo un complejo en cuyas cohomologías con coeficientes enteros (que no son locales, sino globales) se tiene la dualidad de Poincaré. Se pregunta: ¿ cuándo el complejo M_1^n es de tipo homotópico de la variedad suave cerrada M_2^n? Para eso es necesario y suficiente que se halle un espacio fibrado estable ξ sobre M_1^n, donde el ciclo $\varphi(M_1^n)$ es esférico y se cumplen las condiciones a) y b).

Cuando $n = 4k + 2$, son justas las variantes de todos estos teoremas, pero se formulan de una manera más complicada; aquí no los presentamos.

PROBLEMA 3. Demostrar que tenemos para el caso de esfera $M^n = S^n$:

$$M(\nu^N) = S^N \vee S^{N+n},$$

$$\pi_{N+n}(M(\nu^N)) = \mathbb{Z} + \pi_{N+n}(S^N),$$

es decir, $D = \pi_{N+n}(S^n)$.

Para calcular el grado de multiformidad de este «invariante normal» $\psi_{M^n} \in \pi_{N+n}(M(\nu^N))$ hay que examinar un grupo de clases homotópicas de las aplicaciones de un espacio fibrado normal que tienen el grado $+1$ en la base:

$$M^n \xrightarrow{f} M^n, \quad \nu^N \xrightarrow{\tilde{f}} \nu^N.$$

Este grupo actúa en el complejo de Thom $M(\nu^N)$, las órbitas de acción en los elementos tolerables de tipo $1 + \alpha$ de $\pi_{N+n}(M(\nu^N))$ corresponden exactamente a las variedades con exactitud de adición de las esferas de Milnor de los subgrupos ∂P^{n+1}: $M_1^n \to M_1^n \# \partial P^{n+1}$.

PROBLEMA 4. Demostrar que para $M^n = S^n$ el grado de multiformidad se reduce a la factorización $\pi_{N+n}(S^N)/J^n$. Calcular el grupo de clases homotópicas de los automorfismos de variedad con un espacio fibrado normal para M^4, $\pi_1(M^4) = 0$; mostrar que este grupo actúa transitivamente en un conjunto de los elementos de forma $1 + \alpha$. Calcular estos grupos para $\mathbb{C}P^n$ y $S^k \times S^l$.

Prestemos atención a una propiedad más interesante (que puede ser establecida elementalmente) de las equivalencias homotópicas que conservan un espacio fibrado normal estable.

TEOREMA 1 (Mazur). *Si $f: M_1^n \to M_2^n$ es una equivalencia homotópica tal. que $f^*\nu_2^N = \nu_1^N$, entonces los espacios E_1 y E_2 de los espacios fibrados ν_2^N y ν_1^N con fibra $\mathbb{R}^N$ son difeomorfos (aquí no se supone el carácter simplemente conexo), $N > n + 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la aproximación de la aplicación $f: M_1^n \to M_2^n \subset E_2$ con ayuda de una inmersión suave $\tilde{f}: M_1^n \subset E_2$ y la aproximación $\tilde{g}: M_2 \subset E_1$ de una aplicación «inversa» $g: M_2^n \to M_1^n \subset E_1$, donde $fg \sim 1$ y $gf \sim 1$. Consideramos que $N > n + 1$. Los espacios fibrados normales respecto a las imágenes $\tilde{f}(M_1^n) \subset E_2$ y $\tilde{g}(M_2^n) \subset E_1$, son ν_1^N y ν_2^N, por condición. Por eso hay un difeomorfismo de los dominios $D_1^{(2)}$ y $D_1^{(1)}$ formados por vectores de longitud <1 en ambos espacios fibrados E_2, E_1 en los ε-entornos U_1 y U_2 de las inmersiones $\widetilde{f}(M_1^n) \subset E_2$ y $\widetilde{g}(M_2^n) \subset E_1$:

$$D_1^{(1)} \xrightarrow{\widetilde{F}} U_1 \subset E_2, \qquad D_1^{(2)} \xrightarrow{\widetilde{G}} U_2 \subset E_1.$$

Notemos lo siguiente: $U_1 \subset D_1^{(2)}$, $U_2 \subset D_1^{(1)}$. Están definidas las aplicaciones: $\widetilde{G}\widetilde{F}: D_1^{(1)} \to D_1^{(1)}$, $\widetilde{F}\widetilde{G}: D_1^{(2)} \to D_1^{(2)}$. Es posible considerar que el entorno U_1 contiene M_2^n y el entorno U_2 contiene M_1^n junto con sus δ-entornos $D_\delta^{(2)}$ y $D_\delta^{(1)}$ respectivamente, con δ suficientemente pequeños. En efecto, prestemos atención a que el entorno U_2 contiene una imagen difeomorfa $\widetilde{G}\widetilde{F}(D_1^{(1)})$. Con esto, la imagen de la sección nula es homotópica a sí misma. Por eso, mediante un difeomorfismo de toda la variedad E_1 inmóvil para todos los vectores de longitud $\geqslant 1/2$ e isotópico a un difeomorfismo idéntico, es posible hacer coincidir esta imagen con el entorno de la sección nula (véase [1], p. II, § 10). Aquí un papel importante desempeña la condición de estabilidad $N > n + 2$, que permite emplear el teorema de Whitney. (Además, el lector verá fácilmente, que esta afirmación se deduce del teorema de Smale formulado más arriba en el caso simplemente conexo. Pero damos la demostración del teorema de Mazur también para las variedades no simplemente conexas.) Tenemos el diagrama de difeomorfismos e inmersiones (encajes)

$$\begin{tikzcd}
D_1^{(1)} \arrow[ddrr] & & D_1^{(2)} \arrow[ddll] \\
\cup & & \cup \\
U_2 & & U_1 \\
\cup & & \cup \\
D_\delta^{(1)} & & D_\delta^{(2)}
\end{tikzcd}$$

Sin embargo $D_\delta^{(1)}$ con ayuda de un alargamiento canónico $E_i \xrightarrow{\delta^{-1}} E_i$ en δ^{-1} veces es difeomorfo de $D_1^{(1)}$, con eso el tamaño de U_i también se aumenta en δ^{-1} veces. Obtenemos, iterando el alargamiento múltiplemente:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
D_\delta^{(1)} & \subset & U_2 \arrow[ddrr, "\widetilde{G}^{-1}" near end] & \subset & D_1^{(1)} & \subset & U_{2,\delta^{-1}} \arrow[ddrr, "\widetilde{G}_{\delta^{-1}}^{-1}" near end] & \subset & D_{\delta^{-1}}^{(1)} & \subset & U_{2,\delta^{-2}} \arrow[ddrr, "\widetilde{G}_{\delta^{-2}}^{-1}" near end] & \subset & D_{\delta^{-2}}^{(1)} \ldots \\
 & & & & & & & & & & & & \\
D_\delta^{(2)} & \subset & U_1 \arrow[uurr, "\widetilde{F}^{-1}"' near end] & \subset & D_1^{(2)} & \subset & U_{1,\delta^{-1}} \arrow[uurr, "\widetilde{F}_{\delta^{-1}}^{-1}"' near end] & \subset & D_{\delta^{-1}}^{(2)} & \subset & U_{2,\delta^{-2}} \arrow[uurr, "\widetilde{F}_{\delta^{-2}}^{-1}"' near end] & \subset & D_{\delta^{-2}}^{(2)} \ldots
\end{tikzcd}$$

Puesto que $\bigcup_j U_{2,\,\delta^{-j}} = E_1 = \bigcup_j D^{(2)}_{\delta^{-j}}$, entonces una sucesión hinchada de difeomorfismos $\widetilde{F}^{(1)}_{\delta^{-j}} : U_{2,\,\delta^{-j}} \to D^{(2)}_{\delta^{-j}}$ en el límite da un difeomorfismo $E_1 \to E_2$. El teorema queda demostrado.

COROLARIO 1. *Los complejos de Thom de los espacios fibrados* ν_1^N, ν_2^N *sobre las variedades* M_1^n y M_2^n *son homeomorfas continuamente*:

$$M(\nu_1^N) \approx M(\nu_2^N).$$

La demostración es evidente.

PROBLEMA 5. Si $n = 3$, entonces todas las variedades orientables son paralelizables (demostrarlo).

COROLARIO 2. *Las variedades de lente* $L_p^3(q_j)$ $(j = 1, 2)$, *si son homotópicamente equivalentes* (*es decir*, $q_1 = \lambda^2 q_2$, *donde* q_1, q_2, λ *son residuos no nulos de módulo* p, p *es simple*), *tienen productos directos difeomorfos en* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 5$ (*véase el* § 11) $\mathbb{R}^5 \times L_p^3(q_1) = L_p^3(q_2) \times \mathbb{R}^5$, $q_1 = \lambda^2 q_2$.

Los complejos de Thom de los espacios fibrados $M(\nu_1)$ *y* $M(\nu_2)$ *son homeomorfos.*

Un hecho importante (Milnor): en el complejo de Thom $M(\nu)$ hay un punto especial $(*) \subset M(\nu)$, el cual está colocado de una manera combinatoria (con partición simplicial) como un cono sobre la frontera de una «estrella»—espacio fibrado ν_j con fibra S^{n-1}; los invariantes combinatorios de la frontera de la estrella son invariantes del mismo complejo. Si la esfera S^{n-1} es par, y el espacio fibrado ν_j es producto directo, entonces, la torsión de Reidemeister es de la forma

$$R(L_p^3(q) \times S^{n-1}) = R(L_p^3(q)) \times \chi(S^{n-1}),$$

donde χ es característica de Euler (¡Verifíquese!) En particular, puede suceder, por ejemplo, que $p = 7$:

$$R(L_p^3(q_1)) \times \chi(S^{n-1}) \neq R(L_p^3(q_2)) \times \chi(S^{n-1}),$$

donde $\chi(S^{n-1}) = 2$. Por eso los complejos de Thom $M(\nu_1)$ y $M(\nu_2)$ son no equivalentes combinatoriamente, aunque sean homeomorfos.

Bibliografía

1. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979. (*Dubrovin B. A., Nóvikov S. P., Fomenko A. T.* Geometría moderna. — Moscú, «Naúka», 1979).
2. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1956. (*Rashevski P. K.* Curso de geometría diferencial. — Moscú, Gostejizdat, 1956).
3. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967. (*Rashevski P. K.* Geometría de Riemann y análisis tensorial. — Moscú, «Naúka», 1967).
4. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974. (*Pogorélov A. V.* Geometría diferencial. — Moscú, «Naúka», 1974).
5. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969. (*Pogorélov A. V.* Geometría exterior de superficies convexas. — Moscú, «Naúka», 1969).
6. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Л.: Гостехиздат, 1948. (*Alexándrov A. D.* Geometría interior de superficies convexas. — Moscú Gostejizdat, 1948).
7. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. — М.: Наука, 1971. (*Efimov N. V.* Geométría superior. — Moscú, «Naúka», 1971).
8. Норден А. П. Теория поверхностей. — М.: Гостехиздат, 1956. (Norden A. P. Teoría de superficies. — Moscú, Gostejizdat, 1956).
9. *Фиников С. П.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1952. (*Finikov S. P.* Curso de geometría diferencial. — Moscú, Gostejizdat, 1952).
10. *S. Kobayashi, K. Nomizu.* Foundations of differential geometry, Interscience publishers, New York, London, vol. 1—1963; vol. 2—1969.
11. *H. Seifert, W. Threlfall*, Lehrbuch der Topologie, Lepzig 1934 (New York 1947).
12. *H. Seifert, W. Threlfall.* Variationsrechnung im grossen, 1938.
13. *J. Milnor.* Morse Theory. Princeton, New Jersey, Princeton university press, 1963.
14. *J. Milnor.* Singular points of complex hypersurfaces. Annals of mathematics studies, número 61. Princeton university press and the university of Tokio press. Princeton, New Jersey, 1968.
15. *J. Milnor.* Lectures on the *h*-cobordism theorem. Princeton mathematical notes. Princeton, New Jersey. Princeton university press, 1965.
16. *Понтрягин Л. С.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. — М.: Наука, 1976. (*Pontriaguin L. S.* Variedades suaves y sus aplicaciones en la teoría de homotopías. — Moscú, «Naúka», 1976).
17. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973. (Pontriaguin L. S. Grupos continuos. — Moscú, «Naúka», 1973).

18. *J.-P. Serre*. Lie algebras and Lie groups. Lectures given at Harvard university. New York — Amsterdam, Benjamin, 1966.
19. *G. Springer*. Introduction to Riemann surfaces. Department of Mathematics University of Kansas. Addison — Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, 1957.
20. *K. Nomizu*. Lie groups and differential geometry. The Mathematical Society of Japan, 1956.
21. *S. S. Chern*. Complex manifolds. The University of Chicago, autumn 1955 — winter 1956.
22. *Richard L. Bishop, Richard J. Crittenden*. Geometry of manifolds. Academic Press. New York and London, 1964.
23. *D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer*. Riemannsche geometrie in grossen. Lecture notes in mathematics. 55. Springer—Verlag. Berlin—Heidelberg—New York, 1968.
24. *Sigurdur Helgason*. Differential geometry and simmetric spaces. Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts. Academic press. New York and London, 1962.
25. *Norman Steenrod*. The Topology of Fibre Bundles. Princeton, New Jersey, 1951.
26. *Розендорн Э. Р.* Задачи по дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1971. (*Rozendorn E. P.* Problemas de geometría diferencial).
27. *Новиков С. П., Мищенко А. С., Соловьёв Ю. П., Фоменко А. Т.* Задачи по геометрии. — М.: Изд. МГУ, 1978. (*Nóvikov S. P., Míschenko A. S., Soloviov Yu. P., Fomenko A. T.* Problemas de geometría. — Moscú, Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, 1978).
28. *D. Hilbert, S. Cohn—Vossen*. Anschauliche Geometrie. Berlin. 1932.
29. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977. *Rojlin V. A., Fux D. B.* Curso elemental de Topología. Capítulos geométricos. — Moscú, «Naúka», 1977).
30. *S. Lefschetz*. Algebraic Topology. 1942.
31. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки. — М.: Гостехиздат, 1953. (*Gólubev V. V.* Lecturas de integración de las ecuaciones de movimiento del cuerpo sólido pesado cerca de un punto inmóvil. — Moscú, Gostejizdat, 1953).
32. *Sze—Tsen Hu*. Homotopy theory. Wayne State University, Detroit, Michigan. Academic Press. New York and London, 1959.
33. *A. Dold*. Lectures on algebraic Topology. Springer—Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1972.
34. *Edwin H. Spanier*. Algebraic topology. McGraw—Hill Company, New York—San Francisco—St. Louis. Toronto—London—Sydney. 1966.
35. *P. J. Hilton and S. Wylie*. Homology Theory. An introduction to algebraic topology. Cambridge. At the University Press, 1960.
36. *John W. Milnor and James D. Stasheff*. Characteristic classes. Annals of mathematics studies, Number 76. Princeton University Press and University of Tokyo Press. Princeton, New Jersey, 1974.
37. *Robert E. Stong*. Notes on cobordism theory. Princeton University Press and the University of Tokyo Press. Princeton, New Jersey, 1968.
38. *F. Hirzebruch*. Topological methods in algebraic geometry. Third enlarged edition. New appendix and translation from the second German Edition by R. L. E. Schwarzenberger. University of Warwick. With an additional section by A. Borel. Institute for advanced study, Princeton. Springer—Verlag, New York, 1966.
39. Расслоенные пространства и их приложения: Сб. переводов. — М.: ИЛ, 1958. (Espacios fibrados y sus aplicaciones. Colección de traducciones. Moscú, Literatura extranjera, 1958).
40. *Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л.* Гомотопическая тополо-

гия. — М.: Изд. МГУ, 1969. (*Fux D. B., Fomenko A. T., Gutenmajer V. L.* Topología homotópica. — Moscú, Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, 1969).
41. *Dale Husemoller.* Fibre bundles. McGraw—Hill Book Company. New York—St. Louis—San Francisco—Toronto—London—Sydney, 1966.
42. *Robert E. Mosher, Martin C. Tangora.* Cohomology operations and applications in homotopy theory. Harper Row, Publishers. New York, Evanston, and London, 1968.
43. *André Weil.* Introductión à l'ètude des variétés kählériennes. Hermann. Paris, 1958.
44. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.5 Изд. МГУ, 1971. (*Mischenko A. S., Fomenko A. T.* Curso de la geometría diferencial y topología. — Moscú, Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, 1971).
45. Cohomology operations. Lectures by *N. E. Steenrod* written and revised by *D. B. A. Epstein.* Princeton, New Jersey. Princeton University Press, 1962.
46. Теория солитонов./Под редакцией Новикова С. П. — М.: Наука. 1979.
47. *Wilhelm Klingenberg.* Lectures on closed geodesics. Springer—Verlag. Berlin—Heidelberg—New York, 1978.
48. *Phillip Griffiths and Joseph Harris.* Principles of algebraic geometry. A Wiley—Interscience Publication. John Wiley Sons. New York—Chichester—Brisbane—Toronto. 1978.
49. *K*-theory. Lectures by *M. F. Atiyah,* notes by *D. X. Anderson.* Harvard University. Cambridge, Mass. 1965.
50. *William Browder.* Surgery on simply-connected manifolds. Springer—Verlag. Berlin—Heidelberg—Now York. 1972.
51. *Болтянский В. Г., Ефремович В. А.* Наглядная топология. — М.: Наука, 1982. (*Boltianski V. G., Efremovich V. A.* Topología evidente. 8—Moscú, «Naúka». 1982).
52. *Toda H.* Composition methods in homotopy groups of spheres.
53. *Adams J. F.* Stable homotopy theory. — Berlin, Springer—Verlag, 1966 (Lect. Notes, N 3).
54. *Morse M.* The calculus of variations in the large. — Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 18, N. Y., 1934.
55. *Альбер С. И.* О периодической задаче вариационного исчисления в целом. — УМН, 1957, 12, № 4, с. 57—124. (*Alber S. I.* Sobre el problema periódico de cálculo de variaciones en total. — «Uspeji matematícheskij naúk», 1957, 12, N 4, págs. 57—124).
56. *Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г.* Топологические методы в вариационных задачах. — Труды научно-исследовательского института математики и механики. — М., 1930. (*Lusternik L. A., Shnirelman L. G.* Métodos topológicos en los problemas variacionales. — Trabajos del Instituto de investigación científica de Matemáticas y Mecanica. — Moscú, 1930).
57. *Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г.* Применение топологии к экстремальным задачам. Труды 2-го Всесоюзного математического съезда, 1935, т. I, с. 224—237. (Lusternik L. A., Shnirelman L. G. Aplicación de la topología a los problemas extremales. (Trabajos del segundo congresó de matemáticos de la URSS, 1935, v. I, págs. 224—237).
58. *Новиков С. П.* Гомотопически эквивалентные гладкие многообразия, I.—ИАН СССР, сер. сер. матем., 1964, 28, с. 365—475. (*Nóvikov S. P.* Variedades suaves homotópicamente equivalentes, I. «Izvestiya Academii Naúk SSSR», serie matemática, 1964, 28, págs. 365—475).
59. *Новиков С. П.* О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применениях. — ИАН СССР, сер. матем., 1968, 30, с. 207—246. (*Nóvikov S. P.* Sobre variedades con un grupo abeliano funda-

mental libre y sus aplicaciones. — «Izvestiya Academii Naúk SSSR», serie matemática, 1986, 30, págs. 207—246).

60. *Новиков С. П.* Новые идеи в алгебраической топологии. — УМН, 1965, 20, № 3, с. 41—66. (*Nóvikov S. P.* Nuevas ideas en la topología algebraica. — «Uspeji matematícheskij naúk», 1965, 20, N 3, págs. 41—66).

61. *Фоменко А. Т.* Периодичность Ботта с точки зрения многомерного функционала Дирихле. — ИАН СССР, сер. матем., 1971, 35, с. 667—681. (*Fomenko A. T.* Periodicidad de Bott desde el punto de vista de la funcional de Dirichlet multidimensional. — «Izvestiya Academii Naúk SSSR», serie matemática, 1971, 35, págs. 667—681).

62. *Фоменко А. Т.* Многомерная задача Плато в римановых многообразиях. — Матем. сб., 1972, 89, с. 475—520. (*Fomenko A. T.* Problema multidimensional de Plateau en las variedades de Riemann. — Colección matemática, 1972, 89, N 3, págs. 475—520.

63. *Milnor J.* Whitehead torsion. Bull. Amer. Math. Soc. 1966, v. 72, N 3, p. 358—426).

64. *Milnor J.* On manifolfs homeomorfic to the 7-spher. Ann. Math. 64, 1956, 399—405.

65. *Мищенко А. С.* Эрмитова *K*-теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа. — УМН, 1986, 31, № 2, с. 69—134. (*Míschenko A. S.* *K*-teoría hermitiana. Teoría de las clases características, los métodos del análisis funcional. — «Uspeji matem. naúk», 1986, 31, N 2, págs. 69—134).

66. *Бухштабер В. М., Мищенко А. С., Новиков С. П.* Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии. — УМН, 1971, 26, № 2, с. 131—154. (*Bujshtaber V. M., Míschenko A. S., Nóvikov S. P.* Grupos formales y su papel en el aparato de la topología algebraica. — «Uspeji matemat. naúk», 1971, 26, N 2, págs. 131—154).

67. *Рохлин В. А.* Теория внутренних гомологий. — УМН, 1959, 14, № 4, с. 3—20. (*Rojlin V. A.* Teoría de homologías internas. — «Uspeji matem. naúk», 1959, 14, N 4, págs. 3—20).

68. *Рохлин В. А.* 3-мерное многообразие — граница 4-мерного. — ДАН СССР, 1951, 81, № 3, с. 355—357. (*Rojlin V. A.* Variedad 3-dimensional es una frontera de la variedad 4-dimensional. — «Docladi Academii Naúk» SSSRS, 1951, 81, N 3, págs. 355—357).

69. *Atiyah M. F.* Thom complexes. Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1961, v. XI, N 42, 291—310.

70. *Milnor J.* Differential topology. Lectures on Modern Mathematics. v. II (edited by T. L Saaty, Published by John Wiley Sons, Inc. 1964).

71. *Smale S.* On the structure of manifolds. Amer. J. Math. 1962, v. 84, N 3, 387—399.

72. *Smale S.* Topology and mechanics. I. Invent. Math. 1970, v. 10, N 4, 305—31 *Smale S.* Topology and mechanics. II. Invent. math. 1970, v. 11, N 1, 45—64.

73. Лекции на математическом семинаре по гомотопической топологии. — УМН, 1966, 21, № 5, с. 117—248. (Lecturas del semanario matemático dedicado a la topología homotópica. «Uspeji matem. naúk», 1966, 21, N 5, págs. 117—248).

74. *Kervaire M. A.* A manifold which does not admit any differentiable structure. — Comment. Math. Helv., 1960, 34, N 4, p. 257—270.

75. *Kervaire M. A., Milnor J.* Groups of homotopy spheres, 1. — Ann. Math., 1963, 77, p. 504—537.

76. *Milnor J.* Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. — Ann. Math., 1961, 74, p. 575—590.

77. *Serre J.-P.* Cohomology modulo 2 des complexes d'Eilenberg. — McLane. — Comment. Math. Helv., 1953, 27, p. 198—231.

78. *Cartan B.* Algebres d'Eilenberg-McLane et homotopie. — Seminaire H.Cartan, Ecol Norm. Super. (7e année), 1954/1955.
79. *Milnor J.* A survey of cobordism theory. Enseign. Math. 1 1962, 8, N 1—2, p. 16—23.
80. *Nóvikov S. P.* Pontryagin classes, the fundamental groups and some problems of stable algebra. — Ess. on topology and rel. topics. Memories dedies a Georges de Rham. — Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1970.
81. *Adams J. F.* Stable homotopy and generalised homology. — Chicago Lect. Notes in Math., 1974.

S. P. Nóvikov

SUPLEMENTO 1

TEORÍA ANÁLOGA A LA DE MORSE PARA LAS FUNCIONES MULTIFORMES. ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS PARÉNTESIS DE POISSON.

Sea M una variedad suave cerrada de número finito o infinito de dimensiones (por ejemplo, algún espacio de curvas (caminos) que unen dos puntos x_0 y x_1 de una variedad suave W^m o un espacio de curvas cerradas orientadas que son aplicaciones suaves de las circunferencias en W^m). Demos una 1-forma cerrada ω en la variedad M; existe un cubrimiento (de hojas infinitas) $\hat{M} \xrightarrow{p} M$ tal, que la forma $p^*\omega$ es una diferencial de la función (un ejemplo más simple es $\omega = d\varphi$ en $\mathbb{R}^2 \setminus 0 = M$, donde $\hat{M}$ es una superficie de Riemann de logaritmo):

$$p^*\omega = dS. \tag{1}$$

Llamaremos a S «función multiforme» en la variedad M. En caso de dimensión infinita supongamos que en los puntos críticos (estacionarios) ($dS = 0$ o $\omega = 0$) la función S tenga una segunda diferencial d^2S que tiene un número finito de cuadrados negativos («índice de Morse») y un grado finito de degeneración. De hecho vamos a examinar sólo un caso, cuando todos los puntos críticos no son degenerados, o bien forman variedades críticas no degeneradas (véase el § 3). También supongamos, que S tiene un «descenso gradiental» correctamente definido, es decir, en la variedad $\hat{M}$ cualquier conjunto compacto al descender por el gradiente S ora pende en un punto crítico, ora pasa sucesivamente por todos los niveles de la función S «hacia abajo».

Problema: construir una teoría análoga a la de Morse para estimar el número de los puntos críticos de una función multiforme S (es decir, de una 1-forma cerrada ω) de cualquier índice de Morse i. Designemos al número de los puntos estacionarios con índice de Morse i por $m_i(S)$ o por $m_i(\omega)$, $p^*\omega = dS$.

Es posible en el grupo $H_1(M, \mathbb{Z})$ escoger tal base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_N)$, que

$$\oint_{\gamma_j} \omega = \begin{cases} 0, & j \geqslant k+1, \\ \varkappa_j \neq 0, & j \leqslant k, \end{cases} \tag{2}$$

además, todos los números $\varkappa_j$ con $j = 1, \ldots, k$ son linealmente independientes con coeficientes racionales (o enteros). El número $k-1$ se llama «grado de irracionalidad» de la forma. Un grupo de monodromia de un cubrimiento mínimo $p\colon \hat{M} \to M$, que transforma ω en una diferencial de una función unívoca $dS = p^*\omega$, es igual exactamente a $\mathbb{Z}^k$, que es un grupo abeliano libre con k generatrices $t_1, \ldots, t_k$ que actúan como desplazamientos en M

$$t_j : \hat{M} \to M.$$

De hecho el exponente de la irracionalidad es un punto del espacio proyectivo

$$\varkappa = (\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3 : \ldots : \varkappa_k) \in \mathbb{R}P^{k-1}.$$

Un caso especialmente simple e interesante es $k = 1$, cuando la forma ω da un elemento de un grupo con coeficientes enteros de cohomologías $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{Z})$. En este caso, el $\exp\{2\pi iS\}$ es una función unívoca de valor complejo, por módulo igual a 1, o sea, la aplicación

$$f = \exp\{2\pi iS\} : M \to S^1. \tag{3}$$

El problema sobre la construcción de una teoría análoga a la de Morse para los puntos críticos de tales aplicaciones es, sin duda, de aspecto clásico, pero este problema recién fue examinado en la literatura en el año 1981.

Examinemos ejemplos de dimensiones infinitas de las «funcionales multiformes», que conducen de una manera natural a los problemas más arriba planteados. Sea W^m una variedad de Riemann con la métrica completa $g_{ij}(x)$ en la cual está dada una 2-forma cerrada Ω, $d\Omega = 0$. Definimos un recubrimiento $W^m = \bigcup_\alpha U_\alpha$ por tal familia de dominios, que

a) la forma Ω es exacta en cualquier U_α:

$$\Omega \mid U_\alpha = d\psi_\alpha. \tag{4}$$

b) para cualquier aplicación suave γ del segmento I o de la circunferencia S^1 en W^m existe un dominio U_α tal, que γ está completamente en U_α.

Consideremos la variedad $M = \Omega(x_0, x_1, W^m)$ de las curvas (caminos) que unen dos puntos, o $M = \Omega^+(W^m)$ de las curvas cerradas orientadas y recubrámoslas con los dominios $M = \bigcup_\alpha N_\alpha$, donde N_α consta de todas las curvas $\gamma \subset U_\alpha$. Cada intersección $N_\alpha \cap N_\beta$ se representa de la forma $N_\alpha \cap N_\beta = \bigcup_q N_{\alpha\beta}^{(q)}$, donde q es el número de la clase de homologías de la curva en $H_1(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbb{R})$ cerrada o con dos extremos x_0, x_1. En cada conjunto N_α definimos una funcional unívoca

$$S^{(\alpha)}\{\gamma\} = \int_\gamma (dl - \psi_\alpha). \tag{5}$$

LEMA 1. *En las intersecciones $N_{\alpha\beta}^{(q)}$ para cada q la diferencia de las funcionales $S^{(\alpha)}\{\gamma\} - S^{(\beta)}\{\gamma\}$ es una constante.*

Efectivamente, la diferencia de las funcionales se representa de forma

$$S^{(\alpha)} - S^{(\beta)} = \int_\gamma (\psi_\beta - \psi_\alpha), \tag{6}$$

donde $d\psi_\alpha = d\psi_\beta$. Por eso, para cada clase de homologías q esta integral es una constante. El lema queda demostrado.

De manera que un juego de las funcionales $S^{(\alpha)}$ define una «funcional multiforme» S tal, que δS es una 1-forma definida de manera global en la variedad de dimensión infinita M.

Este ejemplo se generaliza naturalmente: sea dada alguna funcional univoca bastante regular $S_0\{\gamma\}$ para las aplicaciones suaves $\gamma\colon V^l \to W^m$ de dos variedades de Riemann completas, sean dados una $(l+1)$-forma cerrada Ω en W^m, $d\Omega = 0$ y un recubrimiento $W^m = \bigcup_\alpha U_\alpha$ tal, que

a) $\Omega \mid U_\alpha = d\psi_\alpha$.

b) Para cualquier γ hay un número α tal, que la imagen de γ se encuentra completamente en el dominio U_α.

Por analogía a lo antedicho en la variedad M de todas las aplicaciones $V^l \to W^m$ («campos de Chiral») surge una «funcional multiforme» $S = S_0 + \int_\gamma \psi_\alpha$ (véase [4], § 5).

Volvamos al caso $l = 1$, cuando para las métricas de Riemann completas g_{ij} en la variedad W^m y para cualquier 2-forma Ω los índices de Morse de todos los puntos estacionarios son finitos y el haz del descenso gradiental a $\hat{M}$ está definido correctamente. Tal situación surge para el análogo de la llamada «funcional de Maupertuis-Fermat»: trayectorias del movimiento de una partícula cargada en un campo potencial de fuerzas $u(x)$ y campo magnético Ω en la variedad de Riemann W^m (aquí $m = 2$ ó 3) con una energía dada, los E se definen como extremos de la funcional

$$\widetilde{S}\{\gamma\} = \int_\gamma (d\widetilde{l}_E - A_j\, dx^j), \tag{7}$$

donde

$$(d\widetilde{l}_E)^2 = 2m\,(E - u\,(x))\, g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \qquad d\,(A_j\, dx^j) = \Omega \tag{8}$$

(véase [1], p. I, § 33). Aquí el campo magnético Ω se considera 2-forma exacta. Para las 2-formas no exactas de Ω llegamos a las funcionales multiformes. Siempre en adelante supondremos cumplida la exigencia de la completitud de la métrica $\widetilde{l}_E$. En la variedad compacta W^m esto se equivale a la condición

$$E > \max_{W^m} u\,(x). \tag{9}$$

Para las variedades no simplemente conexas W^m (por ejemplo, para el toro $W^m = T^m$) puede darse esta situación: a pesar de todas las construcciones anteriores y la inexactitud de la forma Ω, a posteriori la 1-forma δS resultará ser exacta sólo por que el mismo espacio de curvas M es simplemente conexo. Para la exactitud de la 1-forma (δS) y uniformidad de la funcional S es suficiente que la forma Ω en un cubrimiento universal se vuelva exacta q: $\hat{W}^m \to W^m$, $q^*\Omega = d\psi$. Esto es correcto, si la clase de cohomologías de forma $[\Omega] \in H^2(W^m, \mathbb{R})$ se contiene en un subgrupo conexo sólo con el grupo fundamental:

$$[\Omega] \in H^2(\pi_1, \mathbb{R}) \subset H^2(W^m, \mathbb{R}).$$

PROBLEMA 1. Hallar la condición suficiente para que la funcional S en un espacio de curvas cerradas tome valores negativos tan grandes como se quiera (condición en el grupo π_1 y en la clase de homologías $[\Omega] \in H^2(\pi_1, \mathbb{R})$).

Esto no puede ser cumplido para las variedades simplemente conexas W^m. Las integrales de 1-forma (dS) por los ciclos básicos en M y el grado de irracionalidad de la forma $\omega = (\delta S)$, son definidos por un juego de integrales de 2-forma Ω por los 2-ciclos en $H_2(W^m, \mathbb{Z})$ y coinciden con ellas.

Algunos sistemas importantes de la mecánica clásica se reducen a las extremales de las funcionales de forma (7) (Nóvikov — Shmelzer):

1. El problema de Kirchhoff sobre el movimiento del cuerpo sólido en un líquido ideal cuyo movimiento es potencial y el cual está en el infinito;

2. El problema sobre el movimiento del cuerpo sólido en torno a un punto inmóvil en un campo simétrico respecto al eje —en particular, constante— de gravitación (trompo, giróscopo, etc.).

Estos dos problemas se describen por las ecuaciones, las cuales son, después de algunas transformaciones, sistemas de Hamilton en el álgebra de Lie $L = E(3)$ de un grupo de movimientos de un espacio euclídeo tridimensional, donde el espacio de fase es un espacio conjugado L^*. Escogiendo la base (e_j^*) en L^* representamos cualquier elemento en forma

$$l^* = \sum l_i e_i^*, \tag{10}$$

con todo eso, $l_i \in L$ son formas lineales en L^*, $L = (L^*)^*$. Por definición, el paréntesis de Poisson para cualesquiera funciones $f(l^*)$ en L^* se define, partiendo de las siguientes exigencias.

1. El paréntesis de Poisson de dos funciones lineales en L^* —o sea, de los elementos del álgebra de Lie L— coincide con su conmutador en L:

$$\{l_i, l_j\} = c_{ij}^k l_k. \tag{11}$$

2. El paréntesis de Poisson de cualesquiera funciones en L^* es definido por la exigencia 1 junto con los axiomas generales a los cuales satisface la paréntesis: bilinealidad, antisimetría, identidad de Jacobi y fórmula de Leibniz para la multiplicación de las funciones

$$\{fg, h\} = \{f, h\} g + \{g, h\} f. \tag{12}$$

Hablando en general, el paréntesis de Poisson de cualesquiera funciones en la variedad N^q con coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^q)$ es definido por el tensor $h^{ij}(x) = -h^{ji}(x)$ según la fórmula

$$\{f, g\} = h^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^i}. \tag{13}$$

La exigencia de que la fórmula (13) defina el paréntesis de Poisson, es decir, que sea justa la identidad de Jacobi, introduce restricciones sobre el tensor $h^{ij}(x)$: si $\det h^{ij} \neq 0$, entonces la 2-forma $h = h_l\, dx^i \wedge dx^j$, inversa al tensor h^{ij}, debe ser cerrada: $dh = 0$, $h_{ij} h^{jk} = \delta_i^k$.

Un caso simplísimo $h^{ij} = \mathrm{const}$ apareció en el formalismo de Hamilton clásico, que surge del cálculo de variaciones (véase [1], p. I, § 33). El siguiente caso h^{ij}, función lineal de x, se discutió intensamente en la bibliografía los últimos 15 años, puesto que $h^{ij}(x) = c_k^{ij} x^k$, donde c_k^{ij} resulta un juego de las constantes estructurales del álgebra de Lie (esto se deduce de la identidad de Jacobi para el paréntesis).

Por lo visto, el caso de los paréntesis cuadráticos $h^{ij} = c^{ij}_{kl}x^k x^l$, según x, resultó también muy interesante y ahora lo empezaron a estudiar (Sklianin, Faddéev).

Nos importa un caso «lineal según x» de las álgebras de Lie, más estrictamente, del álgebra de Lie $L = E\,(3)$. Escojamos una base estándar de generadores de esta álgebra $(M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3)$ donde los generadores p_i corresponden a las traslaciones y M_i a las torsiones. El paréntesis de Poisson (11), por definición, es de forma de conmutadores en $L = E\,(3)$:

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \sum_k \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \varepsilon_{ijk} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}, \\ \{M_i, p_j\} &= \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k, \\ \{p_i p_j\} &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

El hamiltoniano del sistema $H\,(M, p)$ en el problema de Kirchhoff coincide con la energía del sistema cuerpo-líquido y es una forma cuadrática positiva de las variables (M, p) en el espacio L^* (son posibles los términos lineales en H, si el cuerpo sólido no es simplemente conexo):

$$H = \sum a_{ij} M_i M_j + \sum b_{ij} M_i p_j + \sum c_{ij} p_i p_j, \tag{15}$$

Para el movimiento de un cuerpo sólido (trompo, giróscopo) en un campo de gravitación simétrico respecto al eje $U\,(z)$ en torno a un punto inmóvil el hamiltoniano en el espacio L^* es de la forma

$$H = \sum a_{ij} M_i M_j + U\,(d^i p_i), \tag{16}$$

donde d^i son constantes definibles por la posición del centro de masas, y son puntos de fijación. La forma cuadrática $\sum a_{ij} M_i M_j$ se supone positiva siempre. En el caso (16) se tienen restricciones a esta forma como desigualdades, las cuales no se tienen en el problema de Kirchhoff (15).

Las ecuaciones de movimiento son de forma

$$\dot{M}_i = \{H, M_i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\}. \tag{17}$$

Además de la energía $H = E$, las magnitudes (integrales) que se conservan de forma general para los sistemas (17) son tales funciones $f_i\,(M, p)$, que

$$\{f_l, M_i\} \equiv \{f_l, p_i\} \equiv 0 \tag{18}$$

para todo $i = 1, 2, 3$ (es decir, anulador del paréntesis de Poisson). Estas magnitudes que se encuentran, como resulta, en el centro de la llamada «álgebra envolvente» del álgebra de Lie, en el caso dado se reducen a dos magnitudes («integrales de Kirchhoff»):

$$f_1=\sum p_i^2, \qquad f_2=\sum M_i p_i \tag{19}$$

(verificar (19) mediante un cálculo elemental).

En el problema sobre el trompo (giróscopo) las magnitudes p_i son tales, que $f_1 \equiv 1$ siempre. En este caso la integral f_2 se llama «constante de áreas». En las superficies de nivel f_2 = const = ps los paréntesis de Poisson son definidos por las fórmulas (14), y la matriz $h^{ij}(x)$ en esta variedad cuadridimensional para $p \neq 0$ es no degenerada: $\det h^{ij} \neq 0$. Por eso se define una 2-forma «simpléctica» $h = h_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$, $h_{ij}h^{ik} = \delta_j^k$, donde $dh = 0$. La forma h depende de la magnitud de los niveles $f_1 = p^2$, $f_2 = ps$. Se tiene el siguiente lema importante.

LEMA 2. *El cambio de variables*

$$\begin{gathered}
y^1=\theta, \quad y^2=\varphi, \quad \xi_2=p_\theta, \quad \xi_2=p_\varphi, \quad \gamma=\frac{s}{p},\\
0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\\
p \operatorname{sen}\theta = p_3, \quad M_3-\gamma p_3=-p_\varphi,\\
p\cos\theta\cos\varphi=p_2, \quad M_2-\gamma p_2=p_\varphi \operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\varphi+p_0\cos\varphi,\\
p\cos\theta\operatorname{sen}\varphi=p_1, \quad M_1-\gamma p_1=p_\varphi\operatorname{tg}\theta\cos\varphi-p_0\operatorname{sen}\varphi
\end{gathered} \tag{20}$$

reduce el paréntesis de Poisson en las superficies de nivel $f_1 = p^2 \neq 0$, $f_2 = ps$ *a la forma*

$$\{y^a, y^b\}=0, \quad \{y^a, \xi_b\}=\delta_b^a, \quad \{\xi_1, \xi_2\}=s\cos\theta \tag{21}$$

Con eso, la 2-forma simpléctica adopta el aspecto

$$h=\sum_{a=1}^{2} dy^a \wedge d\xi_a + s\cos\theta\, d\theta \wedge d\varphi = h_0+\Omega.$$

donde Ω *es una forma cerrada en* S^2.

Topológicamente la superficie de nivel $f_1 = p^2 \neq 0$, $f_2 = ps$ *es difeomorfa a* $T^*(S^2)$, *un espacio fibrado tangente sobre la esfera* S^2. *La integral por parte de las formas* h *y* Ω *por un ciclo básico* $[S^2] \in H_2(T^*(S^2)) = \mathbb{Z}$ *es de la forma*

$$\iint_{S^2} h = \iint_{[S^2]} \Omega = 4\pi s = 4\pi f_2 f_1^{-1/2}.$$

La demostración de este lema se obtiene por cálculo directo. La estructura topológica de las órbitas $f_1 = p^2$, $f_2 = p_s$ es casi evidente debido a la forma de las integrales f_1, f_2.

Tropezamos con los paréntesis de Poisson en $T^*(M^n)$ de forma $h = h_0 + \Omega$, donde Ω es una 2-forma cerrada en la base M^n. Tal paréntesis de Poisson equivale a la inclusión en el sistema de un campo magnético formal Ω. De manera que las trayectorias de movimiento en los problemas de Kirchhoff y de trompo (giróscopo) pueden ser obtenidas del principio de «Maupertuis—Fermat», es decir, de la funcional de forma (7), la cual es multiforme para $s \neq 0$ o $f_2 \neq 0$ (para un giróscopo clásico la «constante de áreas» es distinta de cero). El hamiltoniano H en las superficies $f_1 = p^2 \neq 0$, $f_2 = ps$ en las variables (20) es de forma

$$H = \frac{1}{2} g(y)\, \xi_a \xi_b + A^a(y)\, \xi_a + U(y),$$

y el paréntesis de Poisson se define por las fórmulas (21). Este sistema es equivalente en el dominio $U_\alpha = S^2 \setminus (P_1 \cup P_2)$ (P_1 y P_2 son los polos superior e inferior) a un sistema de Lagrange definible por una funcional de acción mecánica

$$S^{(\alpha)}\{\gamma\} = \int\limits_{\gamma} \left(\frac{1}{2} g_{ab} \dot{y}^a \dot{y}^b - U(y) - A_a(y)\, \dot{y}^a - s \operatorname{sen} \theta \dot{\varphi} \right) dt, \quad (22)$$

donde

$$g_{ab} g^{ac} = \delta_b^c, \quad A_a g^{ac} = A^c, \quad y^1 = \theta, \quad y^2 = \varphi,$$
$$U = \left(V - \frac{1}{2} A^a A^b g_{ab} \right).$$

La funcional S es de forma de la funcional de acción de una partícula cargada sobre la esfera S^2 con métrica g_{ab} en un campo potencial $U(x)$ y en un campo magnético $\Omega_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ de un «monopolo» no trivial, puesto que para $s \neq 0$ un «campo magnético» es no trivial topológicamente. El papel del número α para el dominio U_α en la esfera S^2 lo desempeña el par de polos opuestos

$$\alpha = (p_1 \cup p_2).$$

Para el recubrimiento $S^2 = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ (véase más arriba) se cumplen aquellas exigencias con cuya ayuda se definió la funcional multiforme. Así, en nuestro caso, S es una funcional multiforme con $s \neq 0$. de acción de este sistema, la cual depende del nivel (p, s).

Con una energía E dada, las trayectorias de movimiento es posible obtenerlas de la funcional de Maupertuis—Fermat, que es multiforme también, donde $\delta\widetilde{S}$ es una 1-forma cerrada de dimensión infinita

$$\widetilde{S}^{(\alpha)} = \int_{\gamma} (d\widetilde{l}_E - A_a^{(\alpha)}\, dy^a),$$
$$d\widetilde{l}_E = \sqrt{2\,(E-U)\, g_{ab}\dot{y}^a\dot{y}^b}. \tag{23}$$

Para $E > \max_{S^2} U(y)$ la métrica $\widetilde{l}_E$ es completa.

Destaquemos una propiedad explícitamente importante de una funcional unívoca o multiforme de forma (7):

en un espacio de curvas cerradas orientadas $M = \Omega^+(S^2)$ las curvas de un punto forman una variedad crítica no degenerada de los mínimos locales. Normalizamos la funcional $\widetilde{S}$ en un cubriente con hojas infinitas $p\colon \hat{M} \to M$ (donde $\widetilde{S}$ es unívoca) de tal manera: en un componente (sea nulo) de una preimagen completa $p^{-1}(S^2) = \bigcup_n S_n^2$ de la variedad de las curvas de un punto, la funcional es igual a cero,

$$\widetilde{S}(S_0^2) = 0$$
$$\widetilde{S}(S_n^2) = n \iint_{S^2} \Omega = 4\pi ns. \tag{24}$$

Es evidente la generalización de esta propiedad en cualesquiera variedades W^m.

Utilicemos estas propiedades del espacio de curvas cerradas. Unamos con un segmento $I\,(0, 1)$ dos componentes de los mínimos locales en el cubriente $\hat{M}$ de tal modo, que el punto 0 se encuentra en S_0^2 y el punto 1 se encuentra en $S_1^2 \subset \hat{M}$. Comencemos a desplazar monótonamente este segmento «hacia abajo» por el gradiente $\widetilde{S}$, obteniendo un segmento I_τ, $\tau \geqslant 0$, $I_0 = I$. Vemos lo siguiente:

a) son inmóviles los extremos para todo τ;

b) $\max_{\tau=\text{const}} \widetilde{S}(I_\tau) \geqslant 4\pi s$, ya que en los extremos hay un mínimo local.

De esto, junto con el principio conocido de minimax se deduce la existencia de un punto crítico de ensilladura que tiene índice 1 en un caso no degenerado.

Así, es justo el siguiente teorema.

TEOREMA 1 (Nóvikov). *Para todos los valores de los parámetros (E, p, s) con la condición* (9), *existe una trayectoria en el problema de*

Kirchhoff y de movimiento del trompo (giróscopo) que es periódica en el sistema conexa con el cuerpo.

OBSERVACIONES. a) Varios mecánicos, utilizando los métodos de la teoría de las perturbaciones, obtuvieron de una manera más explícita tales familias cerca de los casos integrables. La posibilidad de prolongar esas familias en los valores de los parámetros que están lejos de los casos integrables quedaba sin demostrarse; b) para la constante nula de áreas $s = 0$ en el problema sobre giróscopo surge una funcional unívoca en S^2 equivalente a la métrica, en virtud del principio de Maupertuis—Fermat. Este resultado fue obtenido anteriormente mediante otro método (Kozlov, Jarlámov). Aquí, para $E > \text{máx}\, U(x)$ es posible utilizar los teoremas ya conocidos de Lusternik—Shnirelman; para $E \leqslant \text{máx}\, U$ el estudio fue hecho por Kozlov.

Ahora pasemos a un problema puramente topológico sobre la construcción de la teoría análoga a la de Morse para las 1-formas ω en las variedades suaves cerradas de dimensión finita $M = M^n$. En el caso más simple, si la forma ω representa una clase de cohomologías con coeficientes enteros $[\omega] \in H^1(M^n, \mathbb{R})$, llegamos a la aplicación en una circunferencia

$$f = \exp(2\pi i S)\colon M^n \to S^1, \quad S = \hat{f}: \hat{M} \to \mathbb{R}.$$

Consideremos ese caso. Si no hay puntos críticos, la aplicación f define un espacio fibrado suave con base $B = S^1$. Un $\mathbb{Z}$-cubrimiento cíclico $\hat{M} \xrightarrow{p} M^n$ se construye de tal manera: realicemos mediante una subvariedad N^{n-1} el ciclo $D[\omega] \in H_{n-1}(M^n, \mathbb{Z})$, donde D es el operador de dualidad de Poincaré. Cortando la variedad M^n por el ciclo N^{n-1} obtendremos una película W^n con dos bordes $\partial W = N_0^{n-1} \cup N_1^{n-1}$ que son difeomorfos a N^{n-1} (véase también el § 27). Tomemos un número infinito de ejemplares de esta película $W \approx W_i$ con fronteras $\partial W_i = N_{i,0} \cup N_{i,1}$ que son difeomorfas a N^{n-1}. Los peguemos unos con otros a lo largo de los bordes según los números indicados de los componentes de la frontera

$$\hat{M} = \bigcup_{\infty > i > -\infty} W_i, \quad N_{i-1,0} = N_{i,1}, \quad -\infty < i < \infty.$$

Es posible considerar, que la variedad $N^{n-1} = N_0^{n-1}$ está escogida como una superficie de nivel de la función S (o la preimagen completa de un punto con aplicación $f = \exp(2\pi i S)$). El operador de monodromia actúa así:

$$t\colon W_i \mapsto W_{i+1}, \quad N_{i,0} \mapsto N_{i,1} = N_{i+1,0}, \quad \hat{M} \to \hat{M}. \tag{25}$$

En concordancia con los principios generales, la función S debe engendrar un complejo celular (véase el § 15). Sin embargo en nuestro caso no se cumple una exigencia importantísima, en la cual se fundamentaba la teoría de Morse ordinaria: en esta teoría siempre era necesario que los dominios de menores valores $S \leqslant a$ fueran relativamente compactos en un caso de dimensión finita o infinita. Esto no es justo en nuestro caso. Pero también en nuestro caso de cada punto crítico de índice i sale «hacia abajo» por los niveles una «superficie de descenso rapidísimo», la cual (o su pequeño movimiento si es necesario) es natural considerarla «célula». Sin embargo, esta «célula» puede alargarse por los niveles S hasta $-\infty$; en su frontera algebraica puede ser incluido un número infinito de las mismas «células» de dimensión $i-1$. Para un desplazamiento t: $\hat{M} \to \hat{M}$ la función S que se transforma en sí misma con complemento de constante, aplicando los puntos críticos en los puntos críticos. Así, llegamos a las conclusiones:

a) cada punto crítico define una generatriz libre en un complejo que nos interesa;

b) la frontera de la célula puede ser combinación lineal infinita de las células de este complejo, las cuales se encuentran «más abajo» por los niveles de la función S, es decir, que van hacia el ∞ sólo en una dirección en $\hat{M}$;

c) todas las «células» se obtienen de un número finito de las básicas, mediante diversos desplazamientos en los elementos t^{m_j} del grupo $\mathbb{Z}$ que actúa en $\hat{M}$.

Introduzcamos un anillo compuesto de las series de Laurent de forma

$$\sum_{-\infty<\text{const}<j} m_j t^j, \tag{26}$$

con coeficientes enteros m_j que se anulan para todo j negativo bastante grande. Designamos a este anillo por $\hat{\mathbb{Z}}^+[t, t^{-1}] = K$. Al complejo celular engendrado por una función multiforme en la variedad M^n o por la función S en el cubrimiento $\hat{M} \to M^n$, lo consideramos como un complejo libre de K-módulos C con un número finito de generatrices (puesto que el número de los puntos críticos es finito). El complejo C es de la forma

$$0 \to C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \dots \to C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \to 0,$$

donde ∂ es un homomorfismo de K-módulos. Notemos, que a diferencia de la teoría de Morse ordinaria aquí es posible la situación $C_0 = 0$, $C_n = 0$. Es más, en cualquier variedad M^n hay una 1-forma cerrada de cualquier clase de cohomologías no trivial $[\omega] \in H^1(M^n, \mathbb{Z})$ tal, que no hay en absoluto mínimos ni máximos locales (es decir, $C_0 = C_n = 0$).

Para los productos oblicuos M^n con base S^1, hay una forma ω sin puntos críticos, es decir, $C_n = C_{n-1} = \ldots = C_0 = 0$.

Tiene lugar el siguiente lema.

LEMA 3. *Las homologías del complejo de K-módulos C, engendrado por cualquier 1-forma suave cerrada ω son homotópicamente invariantes.*

Sin demostrar este lema sencillo, vemos que los invariantes de esos grupos de homologías pueden ser utilizados para obtener análogos de las desigualdades de Morse en caso de las funciones multiformes que engendran una aplicación en la circunferencia

$$\exp(2\pi iS) : M^n \to S^1.$$

El anillo K es homológicamente unidimensional (si los coeficientes de series (26) son elementos de un campo, entonces K es también un campo). Por consiguiente, los submódulos de los módulos libres son siempre libres. Esto permite escoger bases libres en los grupos (módulos) de los «ciclos» $Z_k = \operatorname{Ker} \partial \subset C_n$ y de las «fronteras» $B_k \subset Z_k$. A la diferencia de rangos de esos módulos la llamaremos «número de Betti» y la designamos por $b_k(M^n, a)$, donde $a = [\omega]$.

$$b_k(M^n, a) = \operatorname{rang} Z_k - \operatorname{rang} B_k.$$

Los análogos de los números de torsión $q_k(M^n, a)$ se definen así: es posible escoger bases libres $(e'_1, \ldots, e'_N)$ de módulo Z_k y $(e'_1, \ldots, e'_L)$, de submódulo B_k, donde $N - L = b_k$ con las siguientes propiedades

$$e'_j = \left(n_j + \sum_{k\geqslant 1} n_{jk} t^k\right) e_j + \sum_{i>L} q_{ij}(t)\, e_i,$$

además: 1) el número n_j se divide en número n_{j+1}; 2) los grados de todos los términos de series $q_{ij}(t)$ son no negativos; 3) los números $q_{ij}(0) \neq 0$ y se dividen por n_j para todos los i, j (si la serie q_{ij} no se anula idénticamente).

Un número general de los índices j tales que $n_j \neq 1$, se llama número de torsión y se designa por $q_k(M^n, \omega)$. El número $q_k + b_k$ coincide con un número mínimo de generatrices de módulo $H_k = Z_k/B_k$.

TEOREMA 2. *Tienen lugar los siguientes análogos de las desigualdades de Morse para los números $m_i(S)$ o $m_i(\omega)$ de los puntos críticos de índice i para la aplicación en la circunferencia $\exp(2\pi iS)$ o una 1-forma cerrada ω, donde $[\omega] \in H^1(M_n, \mathbb{Z})$:*

$$m_i(S) \geqslant b_i(M^n, [\omega]) + q_i(M^n, [\omega]) - q_{i-1}(M, \omega). \tag{27}$$

La demostración de este teorema es fácil obtenerla del anterior.

Notemos, que los análogos de las desigualdades de Morse obtenidos por nosotros son análogos a los clásicos, pero los invariantes topológicos incluidos en ellos tienen un sentido geométrico más complejo.

Para las variedades con $\pi_1(M^n) = \mathbb{Z}$ tiene sentido la cuestión sobre la exactitud de las desigualdades (27), análoga al conocido teorema de Smale sobre las funciones unívocas en las variedades simplemente conexas. Es posible construir sin dificultad una superficie de nivel $N^{n-1} \subset M^n$, que es dual a la clase $[\omega] \in H^1(M^n, \mathbb{Z})$ y es conexa y simplemente conexa (en particular, para $n \geqslant 5$). Luego, utilizando la función de Smale en la película W^n con dos bordes $\partial W^n = N^{n-1} \cup N^{n-1}$ obtenida de M^n por un corte, es posible de una manera «minimal» (empleando la función de Smale en W^n) prolongar la superficie de nivel N^{n-1} en toda la variedad M^n y obtener la forma ω en M^n y la función S en el cubrimiento $\hat{M} \to M^n$. Sin embargo esta forma (o función multiforme) puede ser no minimal ni mucho menos por el número de los puntos críticos. La construcción de la 1-forma minimal ω exige elegir en cierto sentido una variedad inicial «minimal» $N^{n-1} \subset M^n$, si esta elección es posible en general. Sería interesante examinar esta cuestión hasta su fin para las variedades con el grupo $\pi_1(M^n) = \mathbb{Z}$. (Este problema lo resolvió Farber en 1983.)

Efectuamos algunas observaciones relacionadas con un caso más complicado $k > 1$, es decir, cuando la forma ω tiene por lo menos dos integrales racionalmente independientes por ciclos unidimensionales

$$\varkappa_i = \oint_{\gamma_i} \omega, \ \gamma_1, \ \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \ \ldots, \gamma_N \text{ es una base } H_1(M^n, \mathbb{Z}),$$

$$\varkappa_1 \neq 0, \quad \varkappa_k \neq 0, \quad \sum m_i \varkappa_i \neq 0,$$

m_i son números enteros arbitrarios. Surge el cubrimiento $\hat{M} \xrightarrow{p} M^n$, donde $p^*\omega = dS$ y el grupo de monodromia es abeliano libre. Introduzcamos el anillo $K_\varkappa$ consistente en las series $b \in K_\varkappa$ con coeficientes enteros

$$b = \sum_{m=(m_1 \ldots m_k)} b_m t_1^{m_1} \ldots t_k^{m_k}$$

tales que

1. $b_m = 0$, si $\sum m_i \varkappa_i$ es lo suficientemente grande por módulo, y negativo.

2. Tenga «estabilidad» por $\varkappa$ o sea, para cualquier serie b se hallan tales números $\varepsilon > 0$, y N, que $b_m = 0$, si se cumplen las condiciones

$$\sum m_i \varkappa_i^* < -N. \text{ donde } \sum |\varkappa_i^* - \varkappa_i| < \varepsilon$$

La 1-forma cerrada ω define un complejo celular, que consideramos como un complejo de $K_\varkappa$ — módulos. Las homologías de este complejo son homotópicamente invariantes y pueden servir de base para construir las desigualdades del tipo de Morse. Es interesante estudiar la dependencia de $\varkappa$ respecto a los complejos y las homologías que surgen aquí, si la forma ω cambia un poco, y los puntos críticos permanecen iguales en esencia.

Si la forma ω no tiene puntos críticos en absoluto, la variedad M^n es de forma

$$M^n = \hat{M}/\mathbb{Z}^k = (\hat{N} \times R)/\mathbb{Z}^k,$$

donde N es una fibra típica de fibración $\omega = 0$. En caso dado todas las fibras son iguales. De la aproximación de la forma ω por medio de formas cerradas $\omega_j \to \omega$ con las integrales racionales por ciclos, sin los puntos criticos. es evidente que la variedad M^n es un producto oblicuo con base-circunferencia. Las fibras de estos productos oblicuos son variedades compactas N_j^{n-1}, que son factores $\hat{N}$,

$$\hat{N} \to N_j^{n-1},$$

es decir, $\hat{N}$ es un cubrimiento regular sobre N_j^{n-1} con grupo de monodromía $\mathbb{Z}^{k-1}$.

A. T. Fomenko

SUPLEMENTO 2

PROBLEMA DE PLATEAU, BORDISMOS Y SUPERFICIES GLOBALES MINIMALES EN LAS VARIEDADES DE RIEMANN

I. Superficies locales minimales (mínimas)

Como fue mencionado en [1], p. I, § 37, un buen modelo físico evidente de las superficies minimales bidimensionales son las películas de jabón que cubren un contorno fijado de alambre en un espacio euclídeo tridimensional. Recordemos la definición de la funcional de volumen multidimensional. Sea V^k una subvariedad suave compacta en una variedad de Riemann M^n, sea $D \subset V$ un dominio en esta subvariedad y sea g_{ij} una métrica de Riemann inducida en V. Entonces está definido el número vol $_kD$ llamado volumen k-dimensional del dominio en la subvariedad respecto a la métrica g_{ij}. Si la subvariedad es compacta, obtenemos la correspondencia $V \to \mathrm{vol}_k V$ que define la funcional de un volumen de Riemann en una clase de subvariedades k-dimensionales. Precisamente las extremales de esta funcional se llaman superficies locales minimales. Por ejemplo, para el caso de una hipersuperficie V sumergida en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, la ecuación de Euler — Lagrange para esta funcional, cuyas soluciones son superficies locales minimales, fue hallada en [1], p. I, § 37. La condición de minimalidad local de la hipersuperficie V en R^n es posible escribirla en el lenguaje de los invariantes locales de la inmersión de esta superficie en el espacio euclídeo. Recordemos un resultado clásico (véase la demostración, por ejemplo, en [1], p. I, § 37): PROPOSICION 1. Sea $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie suave (es posible, con un borde no vacío). *La curvatura media H de esta hipersuperficie es idénticamente igual a cero si, y sólo si, es posible representar esta superficie en el entorno de cada punto interior suyo en forma de su gráfico de una función extremal para una funcional de volumen (o sea, en forma de solución de ecuación de la hipersuperficie minimal).*

Las superficies minimales bidimensionales en un espacio tridimensional admiten una descripción analítica bastante simple. Supongamos, que la superficie V^2 es definida por un radio-vector r: $D(u, v) \to \mathbb{R}^3$, $r = r(u, v)$, donde D es un dominio en el plano con coordenadas cartesianas u, v. Es fácil verificar que si u y v son coordenadas conformes en la superficie (es decir, la métrica de Riemann inducida en la superficie es de forma $\lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$), entonces el radio-vector es armónico, o sea, sus coordenadas son funciones armónicas $\left(\text{respecto al operador } \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$. Véanse los detalles en [1], p. I, § 37. Lo inverso, hablando en general, no es justo, es decir, la superficie barrida por un radio-vector armónico no tiene necesariamente que ser minimal. La estructura topológica de las superficies minimales bidimensionales es bastante complicada, en particular, (a pesar de la existencia de una superficie minimal cubriente cualquier contorno cerrado suave a trozos) no hay un teorema de unicidad de la superficie minimal con un contorno fijo dado de frontera (borde de la superficie). Además, las películas minimales pueden tener peculiaridades.

El «problema de Plateau» es un término que asocia una serie de problemas relacionados con el estudio de las extremales y mínimos absolutos de la funcional de volumen k-dimensional, definida en la clase de superficies k-dimensionales sumergidas en una variedad de Riemann abrazante y que satisfacen unas u otras condiciones de frontera. En la rica historia del desarrollo de los problemas de variación de este tipo, naturalmente se destacan algunos períodos, caracterizantes por los enfoques muy diferentes de las mismas nociones de «superficie», «frontera», «minimización» y, respectivamente, por los distintos métodos de obtención de las soluciones minimales. Históricamente, primero fue planteado y resuelto el problema de Plateau para una superficie bidimensional con borde en $\mathbb{R}^3$ (y después, también en $\mathbb{R}^n$). En forma paramétrica este problema puede ser formulado así.

Sea $r(u, v)$ un radio-vector de la superficie V^2 en $\mathbb{R}^n$, es decir, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ da (localmente) una aplicación regular de un dominio bidimensional $D \subset \mathbb{R}^2$ en el espacio $\mathbb{R}^n$. Entonces $\operatorname{vol}_2 f(D) = \int_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$. Pregunta: ¿es posible hallar una superficie $X_0^2 = f_0(D)$ (y la aplicación f_0) tal, que ella tenga como frontera un contorno dado A, o sea, un sistema de circunferencias no intersecadas sumergidas (encajadas) en $\mathbb{R}^n$, y además el área de esa superficie buscada sea mínima en comparación con las áreas de las restantes superficies de forma $X^2 = f(D)$ limitadas por el mismo contorno (o sea, que tienen el mismo borde)? Además de este problema de obtención del mínimo absoluto (en la clase de todas las superficies con frontera dada), también se examinaba el problema sobre obtención de mínimo en dada clase homotópica, es decir, en la clase de superficies (con frontera fijada) dadas por las aplicaciones homotópicas entre ellas. Resulta que en un caso bidimensional estos problemas se resuelven en sentido positivo (véanse, por ejemplo, los resúmenes en [1*], [2*]). Notemos, que la película mínima $X_0^2 = f_0(D)$ puede tener autointersecciones y otros puntos singulares (en dependencia de la configuración del contorno de frontera). Es numerosa la bibliografía sobre este problema bidimensional y cuestiones relacionadas con el mismo pero, puesto que nuestro objetivo principal es el resumen del problema multidimensional de Plateau, remitimos al lector que está interesado por el «temario bidimensional» a los resúmenes [5*], [6*].

Para pasar al análisis del problema multidimensional necesitamos de algunas nociones relacionadas con la segunda forma fundamental de la variedad de Riemann.

Sea $f: M^k \to W^n$ una inmersión suave de una variedad suave M^k en una variedad de Riemann suave orientable conexa cerrada W^n. Por TM designemos a un espacio fibrado tangente de variedad M. Sea T_mM un plano tangente respecto a M en el punto $m \in M$. Connotamos con $\langle x, y\rangle$ al producto escalar de los vectores $x, y \in T_mM$ inducido por una métrica de Riemann dada en W. Sea $\overline{\nabla}$ una conexión de Riemann simétrica en TW concordada con esta métrica. Como siempre, para un campo tensorial arbitrario P designemos por $\overline{\nabla}_X P$ su derivada covariante a lo largo de un campo vectorial X en W para la conexión $\overline{\nabla}$. Si x es el valor del campo vectorial X en el punto m (o sea, vector del plano T_mW), entonces designemos por $\overline{\nabla}_x P$ a una derivada covariante del campo P a lo largo de la dirección x.

Para abreviar una vez más connotamos la subvariedad $f(M^k) \subset \subset W^n$ con M^k, entonces a la par con el espacio fibrado TM se define un espacio fibrado normal NM, puesto que en cada punto $m \in M$ está definido un plano N_m^{n-k} ortogonal al plano T_mM. La inmersión (el encaje) $M \to W$ engendra conexiones de Riemann naturales en TM y en NM. Sean: Y, un campo suave vectorial en la subvariedad M, y $x \in T_mM$, un vector tangente arbitrario. Supongamos, por definición, $\overline{\nabla}_x Y = (\overline{\nabla}_x Y)^T$, donde por $\overline{\nabla}$ se designa la conexión de Riemann simétrica dada en la variedad abrazante W, y $(\ )^T$ es una proyección ortogonal en el plano tangente T_mM. Es fácil de verificar que esta operación es una conexión de Riemann sin torsión en TM, definible de manera unívoca por una métrica de Riemann en M, inducida por la inmersión $M \to W$. De la misma manera se define la conexión en un espacio fibrado normal NM. Consideremos una sección suave arbitraria V del espacio fibrado NM, o sea, demos en cada punto $m \in M$ un vector normal $V(m) \in N_mM$. Obtenemos un campo suave vectorial $\widetilde{V}$ definido en la variedad M. Si $x \in T_mM$, hacemos $\overline{\nabla}_x V = (\overline{\nabla}_x \widetilde{V})^N$, donde $(\ )^N$ es una proyección ortogonal en el plano N_mM. Esa operación es conexión de Riemann sin torsión en

NM. Pasemos a la construcción de la segunda forma cuadrática de la subvariedad M (de codimensión arbitraria).

DEFINICION 1. Sea $x \in T_m M$, $v \in N_m M$. Incluyamos el vector v en un campo vectorial arbitrario suave V en la variedad W, de modo que el campo V resulte ortogonal a la subvariedad M en cierto entorno del punto $m \in M$. Definimos la aplicación lineal Q^v: $T_m M \to T_m M$ por la fórmula: $Q^v(x) = -(\overline{\nabla}_x V)^T$. Esa aplicación resulta simétrica y, por consiguiente, define alguna forma bilineal $\{Q^v\}$, la cual precisamente se llama *segunda forma fundamental* de la subvariedad $M \subset W$.

En realidad, hemos definido toda una familia Q de formas Q^v, en la cual el vector $v \in N_m M$ desempeña el papel de parámetro, $Q = \{Q^v\}$. Resulta, que Q está definida correctamente, es decir no depende del modo de inclusión del vector v en el campo vectorial V en la variedad W y depende de una manera suave de todos sus argumentos. De manera equivalente Q puede interpretarse como una forma bilineal simétrica en el espacio tangente $T_m M$ con valores en un espacio normal $N_m M$. En efecto, si x, $y \in T_m M$, es posible definir la forma $Q(x, y) \in N_m M$ por la igualdad: $\langle Q(x, y), v\rangle = \langle Q^v x, y\rangle$. Incluyamos el vector y en el campo suave vectorial Y en la variedad W y que este campo sea tangente a la subvariedad M. Entonces tenemos: $Q(x, y) = (\overline{\nabla}_x(Y))^N$. Con la ayuda de la forma Q es posible ahora definir la curvatura media de la subvariedad M.

DEFINICION 2. Consideremos la segunda forma fundamental representada en forma Q en el espacio tangente $T_m M$. Ya que en $T_m M$ está definido el producto escalar, es posible examinar una traza de la forma Q que es (en cada punto m) un vector de $N_m M$. Así, la traza de la forma Q se representa por una sección suave H del espacio normal NM. Precisamente esta sección se llama curvatura media de la subvariedad sumergida (encajada) $M \subset W$.

Si M es una hipersuperficie en la variedad W, obtenemos la curvatura media escalar $H = \mathrm{Sp} R^{-1} Q$, donde R y Q son matrices de la primera y segunda formas cuadráticas, respectivamente.

DEFINICION 3. La subvariedad $M \subset W$ se llama local minimal, si su curvatura media H es igual a cero idénticamente (en todos los puntos de esa variedad).

Hay una conexión estrecha entre la anulación de la curvatura media de la subvariedad y la anulación de la primera derivada de la funcional de volumen. Sea dada la homotopía suave f_t: $M \to W$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ tal que cada aplicación f_t sea una inmersión, al mismo tiempo, $f_0 = f$, donde f es una inmersión (encaje) inicial. Tales homotopías se llaman a veces variaciones isotópicas. Es conocida la siguiente afirmación.

PROPOSICION 2. *Sea M una subvariedad compacta en W y $v_k(t) = \mathrm{vol}_k f_t M$. La subvariedad M es local minimal si, y sólo si, $\frac{dv_k(0)}{dt} = 0$*

para cualquier variación isotópica de la subvariedad M la cual (variación) se anula en la frontera ∂M.

De manera que las subvariedades de curvatura media nula son extremales de la funcional de volumen. El término «minimalidad local» significa, que el volumen de subvariedad «no cambia en la primera aplicación» (es decir, su primera derivada es igual a cero) con variaciones infinitamente pequeñas por amplitud y portador. Si la variación tiene valor finito, el volumen puede disminuirse. Por ejemplo, esto sucede para el ecuador en una esfera estándar, el cual, naturalmente, es local minimal (incluso es una subvariedad completamente geodésica), pero se contrae en un punto por la esfera, y por eso no es una subvariedad global minimal. Recordemos que cualquier subvariedad completamente geodésica es local minimal, puesto que en este caso la segunda forma fundamental es idénticamente igual a cero. La noción de la minimalidad global es no trivial por si misma, ya que exige examinar «grandes variaciones». Demos una de las definiciones de tales «grandes variedades».

DEFINICIÓN 4. Sea $M^k \subset W^n$ una subvariedad cerrada orientable compacta. Diremos que está dada su bordismo-deformación, si se da una subvariedad orientable compacta suave $(k+1)$-dimensional $Z^{k+1} \subset W^n$ con borde $\partial Z = M \cup (-P)$, donde $(-P)$ es una subvariedad de P con orientación inversa. Con todo eso, a la variedad P^k la llamaremos bordismo-variación de la variedad M^k. En caso de la subvariedad no compacta $M \subset W$, diremos que está dada su bordismo-deformación, si en W se da la subvariedad P^k coincidente con M^k fuera de algún dominio compacto y, además, está dada una subvariedad $(k+1)$-dimensional Z con borde suave a trozos $\partial Z \subset \subset M \cup (-P)$.

Hemos dado un ejemplo de superficies globales minimales en [1], p. I, § 37; son subvariedades complejas en una variedad de Kähler.

II. Problemas de variación multidimensionales y teoría de bordismos

Consideremos los planteamientos clásicos de los problemas sobre obtención de los mínimos absolutos y relativos en la clase de superficies de un tipo topológico determinado. Destaquemos en la variedad M^n una subvariedad cerrada compacta suave $(k-1)$-dimensional fijada A^{k-1}, a la cual llamamos en adelante para abreviar «contorno». Consideremos todos los pares posibles de tipo (W, f), donde W es una variedad suave compacta de dimensión k con borde ∂W homeomorfo al contorno A, y $f\colon W \to M$ es una aplicación continua (o suave a trozos) idéntica en el borde ∂W.

PROBLEMA 1. ¿Es posible entre los pares de forma (W, f), donde W variedades posibles variedades con borde A, y $f\colon W \to M$ son aplicaciones W en M idénticas en el borde A, obtener un par $(W_0,$

f_0) tal, que la aplicación f_0 o la película $X_0 = f_0(W_0)$ que es una imagen de la variedad W_0 en M, tengan propiedades razonables de minimalidad? En particular, tiene que cumplirse la desigualdad $\mathrm{vol}_k X_0$ $\mathrm{vol}_k X$, donde $X = f(W)$ es cualquier película de la clase arriba mencionada, y vol_k es un volumen de Riemann, o bien la medida estándar de Hausdorff.

Bajo «propiedades razonables de minimalidad» de la película $X_0 = f_0(W_0)$ en la variedad M, y complementariamente a la desigualdad $\mathrm{vol}\, X_0 \leqslant \mathrm{vol}\, X$, es posible, por ejemplo, comprender lo siguiente: existe en la película X_0 un subconjunto nunca denso Z de los puntos singulares tal, que cada punto no singular $P \in X_0 \setminus Z$ tiene un entorno U en M, para el cual la intersección $(X_0 \setminus Z) \cap U$ consiste en las subvariedades suaves V_α de dimensiones no pasantes del número k, además todas las V_α son subvariedades minimales desde el punto de vista de la geometría diferencial clásica, es decir, la curvatura media de ellas es igual a cero.

PROBLEMA 2. Sea (V, g) un par, donde $V = V^k$ es una variedad compacta orientable cerrada k-dimensional, $g: V \to M$ es su aplicación continua (o suave a trozos) en la variedad M^n, y $X = g(V)$ es la imagen de V en M. Diremos, que el par (V', g') es una bordismo-variación del par (V, g), si existe una variedad compacta Z con borde $\partial Z = V \cup (-V')$ y una aplicación continua $F: Z \to M$ tal, que $F|_V = g$, $F|_{V'} = g'$. ¿Es posible entre todos los pares (V, g) de forma indicada, obtener un par (V_0, g_0) tal, que la imagen $X_0 = g_0(V_0)$ tenga propiedades de minimalidad razonables, en particular, que cumpla la desigualdad: $\mathrm{vol}_k\, X_0 \leqslant \mathrm{vol}_k\, X$, donde $X = g(V)$ es cualquier película (superficie) de la clase indicada?

El problema 2 plantea la cuestión sobre la obtención del mínimo absoluto de la funcional de volumen en la clase de todas las bordismo-variaciones del par dado (V, g).

A la par con estos dos problemas de la obtención del mínimo absoluto se formulan de una manera natural dos problemas sobre la obtención de los mínimos relativos.

PROBLEMA 1'. ¿Entre todos los pares de forma (W, f), donde W es alguna variedad fijada (!) con borde A, y $f: W \to M$ son todas las posibles aplicaciones continuas (o suaves a trozos), homotópicas a cierta aplicación fijada f' e idénticas en el borde A (es decir, coincidentes con un homeomorfismo de borde fijado), es posible obtener un par (W, f_0) tal, que la aplicación f_0 o la película $X_0 = f_0(W)$ (que es una imagen de W en M), tengan propiedades de minimalidad, es decir, que $\mathrm{vol}_k X_0 \leqslant \mathrm{vol}_k X$, donde $X = f(W)$ es cualquier película de la clase homotópica dada?

Este es el problema sobre la obtención del mínimo de la funcional de volumen en cada clase homotópica, o sea, el problema sobre los mínimos relativos, a diferencia del problema antecedente sobre obtención del mínimo absoluto por todas las clases homotópicas.

PROBLEMA 2'. Es posible entre las aplicaciones $g\colon V^k \to M^n$ (donde V es una variedad cerrada fijada), homotópicas a cierta aplicación inicial $f\colon V \to M$, obtener una aplicación g_0 tal, que tenga la propiedad de minimalidad, es decir que $\mathrm{vol}_k g_0(V) \leqslant \mathrm{vol}_k g(V)$?

Comenzamos a describir los resultados de los problemas sobre obtención del mínimo absoluto. A los problemas 1 y 1' los llamamos problemas de «pegadura de contorno», y a los problemas 2 y 2', de realización (de los ciclos). A las superficies minimales de tales formas (si existen) las llamaremos globales minimales. Los teoremas de existencia de las mismas serán dados más abajo.

Ahora describamos el efecto de surgimiento de los estratos insuperables de dimensiones pequeñas con minimización de la funcional de volumen multidimensional. Este efecto no influye en el proceso de minimización de la funcional de volumen bidimensional vol_2, pero desempeña un papel importante en las dimensiones grandes. En la

Fig. 120.

fig. 120 se representa un contorno A y una película $X_t = f_t(W)$, tendiente a ocupar la posición correspondiente a su área mínima. Está claro que en algún momento se produce pegadura de la película. Con eso, en vez del tubo delgado T en el dibujo aparecerá el segmento S. Es fácil librarse de éste en el caso bidimensional aplicándolo continuamente en un disco bidimensional que pega el contorno dado. Al mismo tiempo (lo que es importante) no perdemos la parametrización de la película: la película obtenida, al igual que antes, es una imagen de alguna variedad bidimensional con borde.

Está claro que en las grandes dimensiones para $k > 2$ el surgimiento de la situación análoga a la descrita, complica bruscamente al problema de minimización. A medida que un volumen k-dimensional de una película que se deforma $X_t = f_t(W)$ tiende a un mínimo, en esa película comienzan las pegaduras, o sea, la aplicación $f_1\colon W \to M$ homotópica a una aplicación inicial $f = f_0$, ya no sólo no debe ser inmersión (encaje) o sumersión, sino hasta puede reducir la dimensión de la imagen en algunos subconjuntos abiertos en W. Esto conduce al surgimiento en la imagen $X_1 = f_1(W)$ de los trozos (estratos) S de dimensiones s, donde $s \leqslant k - 1$. A diferencia del caso bidimensional, a tales «estratos de pequeñas dimensiones» no es posible, hablando en general, ni omitirlos, ni aplicarlos de *manera continua en una «parte maciza» (es decir, en una parte k-dimensional)* $X^{(k)}$ de la película X, puesto que con esas operaciones puede perderse una propiedad fundamental de la película, a saber: ser una imagen contínua de alguna variedad suave $\widetilde{W}$ con borde A. Ya que nuestro objetivo es obtener el mínimo en una clase de películas de forma $X = f(W)$, es decir, que admiten parametrización con ayuda de la variedad W, entonces con cualquier variante de omisión de los «estratos de pequeña dimensión» deberíamos garantizar, que la película $\widetilde{X}$ que se obtiene como resultado de tal reconstrucción, admitiera, como antes, esa parametrización (puede ser, con ayuda de otra variedad). Sin embargo, como demuestran los ejemplos simples, ni la exclusión de los estratos de dimensión pequeña, ni los intentos de aplicarlos a una parte masiva $X^{(k)}$ de la película X (con ayuda de alguna aplicación continua definida en toda la película) no conservan en el caso general la propiedad de la película de admitir una parametrización continua. Se podría, para simplificar el problema, ignorar temporalmente los estratos de dimensión pequeña, restringiendo por ahora el examen a la funcional vol_k, desde el punto de vista de la cual todos los estratos de dimensión pequeña son insignificantes (sus medidas k-dimensionales son iguales a cero). Sin embargo, como resulta (véanse los detalles en [7*] — [9*]), incluso en este caso simplificado, la obtención de un mínimo exige información vasta sobre la conducta de los estratos de dimensión pequeña que garantizan la parametrización de la película.

Describamos el planteamiento del problema de Plateau en el lenguaje de cohomologías ordinarias. A causa de las dificultades de minimización de las películas multidimensionales arriba mencionadas, surgió la necesidad de elaborar un nuevo lenguaje menos preciso, que permitiera excluir la influencia de los estratos de dimensión pequeña. Los pasos necesarios fueron dados en una serie de trabajos, cuyo resumen puede verse en [1*] — [4*]. Sea $H_{k-1}(A)$ un grupo de homologías espectrales $(k-1)$-dimensionales (con coeficientes en el grupo G) de una variedad cerrada $(k-1)$-dimensional, el contorno A en la variedad de Riemann M. Sea $A \subset X \subset M$, donde X es una superficie k-dimensional arbitraria en M. En adelante, como «superficies» examinaremos siempre compactos medibles (por Hausdorff) en la variedad de Riemann. Sea $\{X\}$ una clase de tales superficies X, para las cuales el homomorfismo $i_*\colon H_{k-1}(A) \to H_{k-1}(X)$ inducido por una inmersión $i\colon A \to X$ anula todo el grupo de homologías $H_{k-1}(A)$. Supongamos $\lambda_k = \inf\limits_{X\in\{X\}} \mathrm{vol}_k\, X$, donde $\mathrm{vol}_k\, X$ designa, al igual que más arriba, una medida de Hausdorff k-dimensional o volumen de Riemann (si está definido). Entonces resulta que siempre existe (véase, por ejemplo, [1*] — [4*]) una superficie minimal (en el sentido arriba mencionado), o sea, siempre existe un compacto k-dimensional $X_0 \in \{X\}$ tal que $\mathrm{vol}_k\, X_0 = \lambda_k$. En los límites de este enfoque se han destacado dos direcciones: la más geométrica (véase [2*], [3*]) y la más funcional (véase [1*], [4*]). Como resultado, fueron demostrados teoremas notables de existencia del mínimo absoluto en la clase de homologías ordinarias, y también casi en todas partes la regularidad de soluciones minimales (Federer, Fleming, Almgren, Reifenberg y otros).

En este enfoque se utilizó mucho la circunstancia de que si $X \supset Y = \overline{Y}$, donde $\dim \overline{X \setminus Y} < k$, entonces $H_k(X) = H_k(Y)$ y $\mathrm{vol}_k\, X = \mathrm{vol}_k\, Y$. Esto significa que no surge el problema de los estratos de dimensión pequeña insuperables, que resultan insignificantes desde los puntos de vista topológico y de la métrica. Pero este empleo de homologías ordinarias para definir nociones de «frontera» y «pegadura de contorno» nos alejó del planteamiento clásico anteriormente descrito, ya que si el contorno A es una subvariedad $(k-1)$-dimensional en M y X_0 es una superficie minimal pegante homológicamente al contorno A, entonces, hablando en general, no existe una variedad W con borde A tal, que la superficie X_0 tenga forma $X_0 = f(W)$. En otras palabras, la superficie X_0 puede no admitir una parametrización continua mediante una variedad. Véanse los detalles en [7*] — [9*].

Regresemos ahora a la concepción clásica del problema de Plateau en la clase de superficies-películas parametrizadas por variedades. Estudiaremos la conducta de tales películas en todas las dimensiones, no sólo en la maximal. Para realizar este programa se necesita de un lenguaje más ágil que el de las homologías ordinarias. En relación a esto, recordemos algunas definiciones utilizadas en la creación de este lenguaje. Sea $Y \supset Z$ un par de espacios compactos topológicos.

DEFINICIÓN 5. Llamamos variedad orienta $(k-1)$-dimensional singular del par (Y, Z), a un par (V^{k-1}, f), donde V^{k-1} es una variedad compacta orientada con borde ∂V, y f es una aplicación continua $(V, \partial V) \to (Y, Z)$, es decir, $f(V) \subset Y$, $f(\partial V) \subset Z$. Si $Z = \varnothing$, suponemos $\partial V = \varnothing$. Una variedad singular (V, f) se llama bordante a cero (equivalente a cero), si existen una variedad compacta orientada W^k y una aplicación continua $F \colon W \to Y$ tales, que: a) la variedad V es una subvariedad regular de borde ∂W, y b) la orientación V coincide con la orientación inducida en la variedad mediante la orientación W, al mismo tiempo, $F|_V = f$, $F(\partial W \setminus V) \subset Z$.

La operación de una reunión no conexa de variedades induce la operación de reunión no conexa de variedades singulares. Dos variedades singulares (V_1, f_1) y (V_2, f_2) se llaman bordantes, si su reunión no conexa $(V_1 \cup V_2, f_1 \cup f_2)$ es bordante a cero.

El conjunto de las clases de bordismos de las variedades orientadas singulares $(k-1)$-dimensionales del par (Y, Z), forma un grupo abeliano $\Omega_{k-1}(Y, Z)$. Si se renuncia a la condición de orientabilidad, una construcción análoga conduce a los grupos $N_{k-1}(Y, Z)$ de los bordismos no orientados. Los problemas 1 y 2 arriba descritos ahora pueden ser formulados otra vez así: Sea A^{k-1} una subvariedad compacta cerrada orientada en M, e $i: A \to X$ sea una inmersión (encaje), donde X es una superficie en M.

PROBLEMA 1. Entre las superficies X que contienen A y tales que el bordismo singular (A, i) es equivalente a cero en X ¿ es posible obtener una superficie X_0 tal que tenga propiedades de minimalidad?

La aplicación idéntica $e: A \to A$ define el elemento $\sigma \in \Omega_{k-1}(A)$. Está claro, que la clase de superficies X introducida más arriba se caracteriza por el hecho de que $i_*\sigma = 0$, donde $i_*: \Omega_{k-1}(A) \to \Omega_{k-1}(X)$ es un homomorfismo inducido por la inmersión (el encaje) $i: A \to X$.

PROBLEMA 2. ¿Es posible entre todas las variedades singulares (V, g), $g: V \to M$ bordantes (equivalentes) a una variedad singular dada (V', g'), $g': V' \to M$, obtener tal variedad singular (V_0, g_0) que la superficie $X_0 = g_0(V_0)$ tenga propiedades de minimalidad?

A la par con los grupos Ω_{k-1} y N_{k-1} utilizaremos los grupos Ω^p_{k-1} de los bordismos singulares por módulo p. Los grupos Ω_*, N_*, Ω^p_* satisfacen seis (de los siete) axiomas de Steenrod-Eilenberg, es decir, son teorías de homologías extraordinarias generalizadas. Pero, a diferencia de la teoría de homologías ordinaria, los grupos de bordismos del punto, hablando en general, son no triviales en las dimensiones positivas. Esto es una diferencia significativa de la teoría de homologías ordinaria, ya que las homologías ordinarias del punto son iguales a cero en todas las dimensiones excepto la nula.

Puesto que las superficies minimales tienen, hablando en general, singularidades (y estas singularidades pueden ser muy complicadas), entonces para utilizar la teoría de bordismos en los problemas de variación se ha hecho necesario ampliar el dominio de definición de esta teoría desde la clase de los complejos celulares a la clase de superficies (es decir, compactos medibles en la variedad de Riemann). Este proceso es análogo a la construcción de las homologías espectrales en el caso de la teoría de homologías ordinaria.

En adelante, hablando sobre los bordismos de superficies siempre tendremos en cuenta precisamente los bordismos espectrales. Ya que los grupos N_* y Ω^p_* son grupos compactos (en caso de complejos celulares finitos), su expansión en la clase de superficies no encuentra obstáculos. Con la teoría de bordismos Ω_* es necesario tratarse con mayor cuidado, a saber, hace falta examinar los grupos $p\Omega_* = \Omega_* \otimes_{\mathbb{Z}} Q_p$, donde Q_p es un grupo de números enteros p-ádicos. Véanse los detalles en [11*].

III. Formulación del teorema de existencia de las superficies globales minimales que realizan el mínimo absoluto de la funcional de volumen multidimensional.

Sean: M, una variedad compacta suave cerrada de Riemann; h, una de las teorías de bordismos arriba enumeradas; A, una superficie fijada — contorno en la variedad M. Consideremos una clase de superficies X en la variedad M definida más arriba en los problemas 1 y 2. A esta clase la llamaremos variacional y la designemos por B. En el caso del problema 1 las superficies de la clase B pegan el contorno A en el sentido de bordismos; en el caso del problema 2, las superficies de la clase B realizan cierto elemento no trivial de un grupo de bordismos de la variedad M. Entonces en cada clase variacional de este tipo surge el problema de obtención de la superficie minimal. Para cada superficie X de la clase B construimos su estratificación $X = A \cup S^k \cup S^{k-1} \cup \ldots$, donde S^k es un subconjunto maximal en el conjunto $X \setminus A$, que tiene en cada punto la dimensión k; luego, S^{k-1} es un subconjunto maximal en $X \setminus A \setminus S^k$, que tiene en cada punto la dimensión $k-1$, etc. (véanse [7*], [8*], [11*]). A los subconjuntos S^i los llamaremos estratos. Si éstos son medibles, entonces queda definido un volumen estratificado $SV(X) = (\mathrm{vol}_k S^k, \mathrm{vol}_{k-1} S^{k-1}, \ldots)$, que se representa como un vector con k coordenadas. Variando la superficie X en la clase de variaciones tolerables, es decir, quedándose siempre en la clase variacional B, cambiamos el vector de volumen estratificado de la superficie. El problema consiste en obtener una superficie con volumen estratificado mínimo en la clase dada B. El vector mínimo de volumen $SV_B = (d_k, d_{k-1}, \ldots)$ lo comprendemos en el siguiente sentido lexicográfico. Al principio minimizamos la primera coordenada $SV(X)$, es decir, buscamos en la clase B una superficie X_k, para la cual se cumple la igualdad:

$$\mathrm{vol}_k S^k = \mathrm{vol}_k X \setminus A = d_k = \inf_{Y \in B} \mathrm{vol}\, Y \setminus A.$$

Si existen tales superficies X_k, minimizamos la segunda coordenada del vector de volumen $SV(X)$. Por eso buscamos en la clase de superficies X_k con la primera coordenada ya mínima (es decir tales, que $\mathrm{vol}_k X \setminus A = d_k$) tal superficie X_{k-1}, para la cual

$$\mathrm{vol}_{k-1} X_{k-1} \setminus A \setminus S^k = d_{k-1} = \inf_{\{X_k\}} \mathrm{vol}_{k-1} X_k \setminus A \setminus S^k.$$

Esa superficie ya tiene minimales dos primeras coordenadas del vector de volumen. Etcétera. Cada vez minimizamos una siguiente coordenada de volumen estratificado a condición de que todas sus coordenadas anteriores ya están minimizadas y fijadas. Si este proceso está definido correctamente (con exactitud esto es afirmado por el teorema de existencia, véase más abajo), entonces se concluirá en alguna superficie cuyo volumen estratificado ya es global minimal en la clase de todas las superficies de estratificación de la clase variacional B dada. Los números $d_i = d_i(B)$ dependen seguramente de la clase B. Un punto central de este planteamiento y solución del problema de Plateau en los términos de bordismos, consiste en la introducción por el autor del presente suplemento de la noción de volumen estratificado y del estudio de los métodos de su minimización en todas las dimensiones (véanse [7*] — [9*], [11*]). En particular, el desarrollo ulterior de esta idea permitió después demostrar la existencia de las superficies globales minimales en cada clase homotópica (véase [12*] Dao Chong Tji.

TEOREMA 1. (teorema básico; véanse [7*] — [9*], [11*]). *Sea M^n una variedad compacta suave cerrada tal, que $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$, donde $\pi_i(M)$ son grupos homotópicos de M y $A \subset M$ es un contorno fijado, una superficie. Consideremos una clase arbitraria no vacía variacional B definida con ayuda de los bordismos (véase más arriba). Entonces en la clase B siempre existe una superficie global minimal X_0 cuyo volumen estratificado $SV(X_0) = (d_k, d_{k-1}, \ldots) = SV_B$ es minimal. Esa superficie tiene una estratificación definida de una manera biunívoca (es decir, partición en estratos) $X_0 = A \cup S^k \cup \cup S^{k-1} \cup \ldots$, donde cada subconjunto S^i excepto de, puede ser, un conjunto de medida i-dimensional nula, el cual se compone de puntos singulares, es una subvariedad suave minimal i-dimensional en la variedad M (es decir, la curvatura media es igual a cero). Con eso, $d_i = = \mathrm{vol}_i S^i$.*

COROLARIO 1. *Sean cumplidos los supuestos del teorema 1 y sea B una clase variacional de los problemas 1 y 2 (véase más arriba). Entonces, en esa clase hay una superficie global minimal (puede ser, con las singularidades que llenan el conjunto de medida nula en cada estrato), que es solución del problema de Plateau:* a) *en el caso del problema 1 esa superficie es minimal entre todas las superficies que pegan el contorno A en el sentido de bordismos, o sea, que admiten una parametrización continua con ayuda de una serie de variedades con borde A;* b) *en el caso del problema 2 esa superficie es minimal entre todas las superficies, que realizan un elemento dado del grupo de bordismos de una variedad abrazante.*

En realidad, esos resultados son corolarios de un teorema más general de la existencia de las superficies globales minimales demostrado en [7*], [8*], [11*] para el caso de las llamadas teorías extraordinarias (generalizadas) de (co)homologías. Aquí no vamos a detenernos en esto, ya que la descripción de las teorías extraordinarias exigiría utilizar un material complementario. Damos un solo ejemplo del problema variacional multidimensional formulado en términos de cohomologías extraordinarias.

Sea dado en la variedad M un espacio fibrado vectorial estable no trivial ξ. Consideremos una clase variacional de todas las superficies $X \subset M$ tales, que la restricción de ξ en X es estable no trivial como antes. Entonces, entre tales superficies sin falta se hallará una global minimal (en el sentido de volumen estratificado).

Hemos considerado más arriba dos problemas independientes: de la pegadura de contorno y de realización de los ciclos. Empero, un problema más natural es el mixto, en el cual se busca una superficie minimal que pega al mismo tiempo el contorno y realiza algunos ciclos en una variedad abrazante. Describamos brevemente la resolución de ese problema mixto de Plateau.

Sea h una de las teorías de bordismos (véase más arriba) y sea $L = \{L_p\}$ un juego fijado de los subgrupos $L_p \subset h_p(A)$, donde p son números enteros. Luego, sea $L' = \{L'_q\}$ un juego fijado de los subgrupos $L'_q \subset h_q(M)$.

DEFINICIÓN 6. Por $B(A, L, L')$ designamos a la clase de todas las superficies X en la variedad M tales, que: 1) $A \subset X \subset M$, 2) $L \subset \subset \operatorname{Ker} i_*$, 3) $L' \subset \operatorname{Im} j_*$, donde $i: A \to X$ y $j: X \to M$ son inmersiones.

Claro, que las clases $B(\varnothing, 0, L')$ y $B(A, L, 0)$ coinciden con las clases variacionales B introducidas por nosotros más arriba en los problemas 1 y 2. Resulta, que en cada una de las clases $B(A, L, L')$ siempre hay una superficie global minimal cuyo volumen estratificado es mínimo en el sentido lexicográfico.

Puesto que este teorema (véase [7*], [8*], [11*]) afirma la existencia de una superficie que minimiza el volumen estratificado compuesto de las sucesiones de los volúmenes de los estratos de la superficie, formulemos ese resultado también en forma de sucesión de afirmaciones sobre la minimalidad de estos estratos.

Sean cumplidos los supuestos del teorema 1 y sea $B(A, L, L') = B$ una clase variacional no vacía arbitraria consistente en las superficies del tipo topológico indicado. Sea k el mínimo de los números enteros s, $s < n$, para los cuales $d_s = d_s(B) < \infty$, $3 \leqslant k \leqslant n$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones sucesivas.

1) Existen superficies, cuyo volumen mayor (es decir, volumen vol_k) es global minimal. Más exactamente, si $\{X\}_k$ es la clase de todas las superficies X tales, que $X \in B$ y $\operatorname{vol}_k X \setminus A = d_k = \inf_{Y \in B} \operatorname{vol}_k Y \setminus A$, entonces afirmamos que esta clase no es vacía y que $d_k < \infty$. En el caso, cuando $d_k > 0$, cada superficie X de la clase variacional $\{X\}_k$ contiene un subconjunto unívocamente definido k-dimensional (o sea, el cual tiene dimensión k en cada su punto) $S^k \subset X \setminus A$ tal, que $A \cup S^k$ es un compacto en una variedad abrazante. Con eso un estrato k-dimensional de la superficie X, es decir, el conjunto S^k contiene un subconjunto Z_k (supuestamente, vacío), donde $\operatorname{vol}_k Z_k = 0$ y $S^k \setminus Z_k$ es una subvariación suave k-dimensional en M sin borde y siempre denso en S^k. Z_k es el conjunto de todos los puntos singulares k-dimensionales de la superficie X. Con eso, $\operatorname{vol}_k S^k = \operatorname{vol}_k X \setminus A = d_k$. Si $d_k = 0$, supongamos $S^k = \varnothing$. En este caso la superficie no tiene estrato de dimensión k.

2) Hay superficies que tienen un global minimal que no sólo es el volumen mayor, sino su siguiente volumen de dimensión menor en unidad. Este volumen siguiente se calcula para un estrato de dimensión correspondiente contiene en la superficie. Más exactamente, si $\{X\}_{k-1} \subset \{X\}_k$ es una clase de todas superficies X tales, que $X \in B$, $\mathrm{vol}_k X \setminus A = d_k$, es decir, $x \in \{X\}_k$ y, además,

$$\mathrm{vol}_{k-1} X \setminus A \setminus S^k = d_{k-1} = \inf_{Y \in \{X\}_k} \mathrm{vol}_{k-1} Y \setminus A \setminus S^k,$$

afirmamos, que esta clase $\{X\}_{k-1}$ es no vacía y $d_{k-1} < \infty$. En el caso, cuando $d_{k-1} > 0$, cada superficie de esa clase contiene un conjunto $(k-1)$-dimensional unívocamente definido $S^{k-1} \subset X \setminus A \setminus S^k$ tal, que $A \cup S^k \cup S^{k-1}$ es un compacto en una variedad abrazante. El conjunto S^{k-1} contiene un subconjunto Z_{k-1} (supuestamente, vacío) de medida nula, o sea, $\mathrm{vol}_{k-1} Z_{k-1} = 0$ y, además, complemento a Z_{k-1} en S^{k-1}, es decir, un subconjunto $S^{k-1} \setminus Z_{k-1}$ es una subvariedad suave $(k-1)$-dimensional en una variedad abrazante, que tiene borde y es siempre denso en S^{k-1}. Al mismo tiempo se cumple la igualdad $\mathrm{vol}_{k-1} S^{k-1} = \mathrm{vol}_{k-1} X \setminus A \setminus S^k = d_{k-1} > 0$. Pero si $d_{k-1} = 0$, entonces supongamos $S^{k-1} = \varnothing$.

Así sucesivamente hacia abajo por las dimensiones. En el segundo paso se manifiesta que existen superficies que tienen minimales no sólo sus dos primeros volúmenes (es decir, el mayor y el siguiente por su dimensión hacia abajo), sino el tercer volumen de dimensión $k-2$ calculado para un estrato correspondiente de dimensión $k-2$. En otras palabras, cada volumen siguiente resulta ser minimal a condición de que estén fijados de todos los volúmenes minimales anteriores. Por fin, las superficies contenientes la clase $\{X\}_1$ ya son globales minimales en todas las dimensiones es decir, los volúmenes de todos sus estratos son minimales. Es más, cada estrato S^i salvo, posiblemente, un conjunto de puntos singulares de medida nula es, en realidad, una subvariedad suave minimal de dimensión i.

En conclusión, diremos algo sobre el teorema de existencia de las superficies globales minimales en cada clase homotópica. La introducción de una noción nueva de volumen de estratificación y la metódica elaborada de su minimización en [7*], [8*], [11*] han permitido luego resolver el problema de Plateau en cada clase variacional de superficies que se obtienen mediante la homotopía de alguna aplicación fijada $f\colon V \to M$. Resulta que en cada una de estas clases existe una superficie global minimal (véase [12*]). Con todo eso, las nociones de superficie estratificado y de volumen estratificado fueron formuladas en un lenguaje funcional de *varyfolds*, en los términos del cual fue obtenido el teorema de existencia y de la casi total regularidad (por doquier) de soluciones minimales. De manera que en el momento presente está establecida no sólo la existencia de los mínimos absolutos, sino también relativos (en cada clase homotópica).

IV. Variedades de Lagrange en la teoría de superficies minimales

Estudiando las superficies minimales en $\mathbb{R}^{2n}$, Harvey y Lawson (véase [14*]) demostraron, que cualquier subvariedad de Lagrange local minimal en $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ (con una métrica de Kähler estándar) es una subvariedad de Lagrange especial y por eso es absoluta minimal (global minimal). Surge el problema de describir las clases homotópicas de las subvariedades de Lagrange minimales en una variedad de Khäler arbitraria. Con eso, vamos a considerar que métrica de Riemann y estructura simpléctica en una variedad se dan de manera natural mediante una estructura de Kähler. Formulamos un criterio general de minimalidad de las subvariedades maximales isótropas L^n (vamos a llamarlas subvariedades de Φ-Lagrange) en las variedades hermitianas M^{2n}. El criterio se formula en términos de una 1-forma diferencial en L. Empleando este criterio es posible demostrar la minimalidad de muchas subvariedades de Lagrange en las variedades de Kähler. Luego, es sabido que una subvariedad de Lagrange en un espacio simpléctico $\mathbb{R}^{2n}$ (también en algunas otras variedades de Kähler M^{2n}) tiene un invariante topológico-índice de Máslov, y con mayor generalización, tiene clases características α_i de Máslov-Arnold. El autor formuló una hipótesis sobre el hecho de que las clases características de Máslov-Arnold de las subvariedades de Lagrange minimales son triviales. Resultó, que esa hipótesis en realidad es justa, en todo caso para $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$.

DEFINICIÓN 7. a) Sea dada una variedad compleja M^{2n} con una métrica hermitiana g y sea dada una 2-forma Φ sobre ella: $\Phi(X, Y) = g(X, JY)$. Denominamos plano n-dimensional l en T_xM^{2n}, al plano de Φ — *Lagrange*, si l es un plano maximal isótropo de restricción de la forma Φ en un plano tangente T_xM^{2n}. En otras palabras, $Jl \perp l$, donde $T_xM^{2n} = Jl \oplus l$. Designamos por $G^*(M^{2n})$ a un espacio fibrado de planos de Φ-*Lagrange* orientables. La base de este espacio fibrado es la variedad M. A la subvariedad L^n en M^{2n} la llamaremos subvariedad de Φ-Lagrange, si todos sus planos tangentes son de Φ-Lagrange. Si la forma Φ es cerrada, entonces la variedad hermitiana es de Kähler y sus subvariedades de Φ-Lagrange son subvariedades de Lagrange en un sentido ordinario. Por eso los resultados enumerables más abajo son justos no sólo para las subvariedades de Φ-Lagrange generales, sino para las subvariedades de Lagrange ordinarias. Luego, para cada subvariedad de Φ-Lagrande L en M^{2n} definamos una aplicación $p: L \to G^*(M^{2n})$, donde $x \to (x, \overrightarrow{T_xL})$. Aquí por $\overrightarrow{T_xL}$ está designado un polivector de Φ-Lagrange asociado con un plano tangente T_xL. Está claro, que la aplicación construida por nosotros p es un análogo de una aplicación gaussiana ordinaria.

b) Sea dada en $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ una estructura compleja estándar y una métrica hermitiana. Entonces, una forma de Lagrange especial $\varphi \in \bigwedge^n \mathbb{R}^{2n}$ se llama forma de tipo $\varphi = \mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n)$, donde z_i es una base unitaria en $\mathbb{R}^{2n}$ (véase [14*]). Harvey y Lawson demostraron que la propiedad de la forma, de ser de Lagrange especial, no depende de la elección de una base unitaria. Llamaremos a la forma φ sobre una variedad hermitiana *SL-forma*, si para cualquier punto $x \in M$ la restricción de la forma φ en $T_x M^{2n}$ es una restricción de Lagrange especial.

c) A una variedad hermitiana M^{2n} la llamaremos *local calibrable*, si para cualquier punto $x \in M^{2n}$ existe un entorno de $0\,(x)$ con una SL-forma cerrada en él.

Ahora formulemos el criterio de minimalidad local de una subvariedad de Φ-Lagrange L^n en una variedad hermitiana M^{2n}. Todos los teoremas enumerados más abajo 2, 3, 4, 5 fueron demostrados por Le-Hong-Van y A. Fomenko.

Sea $\sum g_{\alpha\beta}\, \overline{d}z_\alpha\, \overline{d}z_\beta$ una métrica hermitiana escrita en las coordenadas locales y que $G\,(z) = \det\,(g_{\alpha\beta})$. Definamos en la variedad M^{2n} una función $\overline{f}\,(x) = \ln \sqrt{G}$ y una forma compleja $\omega\,(x) = \sqrt{G}\, dz_1 \wedge \ldots$ $\ldots \wedge dz_n$. Entonces, en un espacio fibrado $G^*\,(M^{2n})$ es posible definir (localmente) una función f tal, que $f\,(x,\, l_x) = \overline{f}\,(x)$, donde la aplicación $\pi\colon (x,\, l_x) \to x$ es una proyección natural de la variedad $G^*\,(M^{2n})$ en la variedad M^{2n}. Luego, definamos una función θ con período 2π (es decir, la aplicación en una circunferencia) tal, que $\theta\,(x,\, l_x) = (-i) \ln\,(\omega\,(x),\, l_x)$, donde l_x es un polivector unidad que define un plano de Lagrange l_x, y $(\omega\,(x),\, \overrightarrow{l_x})$ es el valor de la forma $\omega\,(x)$ en l_x.

TEOREMA 2. *La 1-forma diferencial $\psi = J df + d\theta$, donde J es un operador de estructura compleja, está definida correctamente en todo el espacio fibrado $G^*\,(M^{2n})$, o sea, ella no depende de la elección de las coordenadas complejas locales.*

TEOREMA 3. *La subvariedad de Φ-Lagrange L^n en la variedad hermitiana M^{2n} es local minimal si, y sólo si, la 1-forma inducida $p^*\,(\psi)$ es igual a cero en la subvariedad L, donde $p\colon L \to G^*\,(M)$ es una aplicación gaussiana.*

Ese criterio permite demostrar la minimalidad de muchas subvariedades de Lagrange concretas. Por ejemplo, sea $M^{2n} = G_{p,q}\,(\mathbb{C})$ (variedad compleja de Grassmann). Entonces la subvariedad de Lagrange $G_{p,q}\,(\mathbb{R})$ (variedad real de Grassmann) es minimal. Si la subvariedad de Lagrange en la variedad $M^{2n} = \mathbb{C}p^n$ en alguna tarjeta $\{z_i = 1\}$ es un cono y $p^*\,(d\theta) = 0$, entonces L es una subvariedad minimal. El ejemplo de tales conos es una subvariedad $\{z_0 = 1,\, z_j = = ke^{i\theta_j},\ k \in \mathbb{R},\ \sum \theta_j = 0\}$. Sea que $M^{4n} = \mathbb{C}P^{2n}$. Definamos la subvariedad L de la siguiente manera: $L = \{z_0 = 1,\ z_i = \bar{z}_{n+i},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Entonces ella es una subvariedad de Lagrange minimal.

TEOREMA 4. *Cualquier subvariedad de Lagrange local minimal L^n en una variedad simpléctica $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, tiene índice de Máslov nulo y clases características triviales de Máslov-Arnold (con grupo de coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ o en $\mathbb{Z}$).* A diferencia del caso $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ la forma ψ introducida más arriba en la variedad ermitiana arbitraria M^{2n}, hablando en general, es no cerrada. La condición de su carácter cerrado está relacionada estrictamente con la geometría de variedad.

TEOREMA 5. *Si la 1-forma diferencial ψ es integrable (es decir, define un espacio fibrado de codimensión uno), entonces, es cerrada.* Luego, la forma ψ está cerrada si, y sólo si, la variedad hermitiana M^{2n} es local calibrable. La variedad de Kähler es local calibrable si, y sólo si, su tensor de Ricci es idénticamente igual a cero.

Bibliografía para el suplemento 1

1. *Новиков С. П., Шмельцер И.* — Функц. анализ, 1981, 15, № 3, с. 54. (*Nóvikov S. P., Shmeltser I.* — Análisis funcional, 1981, N 3, p. 54).
2. *Новиков С. П.* — Функц. анализ, 1981, 15, вып. 4, с. 37—52. (*Nóvikov S. P.* — Análisis funcional 1981, 15, N 4, págs. 37—52).
3. *Новиков С. П.* — ДАН СССР, 1981, 260, № 1, с. 31. (*Nóvikov S. P.* — «Docladi Academii naúk SSSR» 1981, 260, N 1, p. 31).
4. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. — УМН, 1982, 37, № 5, с. 3—49. (*Nóvikov S. P.* Formalismo de Hamilton y análogo multiforme de la teoría de Morse. — «Uspeji matem. naúk» 1982, 37, N 5, págs. 3—49).
5. *Новиков С. П., Тайманов И. А.* — ДАН СССР, 1984, 274, № 1, с. 26. (Работа [5] содержит исправление некоторых неточностей обзора [4]). (*Nóvikov S. P., Taimánov I. A.* — «Docladi Academii naúk SSSR», 1984, 274, N 1, p. 26. (El artículo contiene corrección de algunas inexactitudes del resumen [4].)

Bibliografía para el suplemento 2

1. *Federer H.* Geometric measure theory. — Berlin. Spriger, 1969.
2. *Morrey Ch. B.* Multiple integrals in the calculus of variations. — Berlin. Springer, 1966.
3. *Reifenberg E. R.* Solution of the Plateau problem, for m-dimensional surfaces of varying topological type. — Acta Math., 1960, 104, n 1, p. 1—92.
4. *Almgren F. J.* Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problem among surfaces of varying topological and singularity structure. — Ann. Math., Ser. 2, 1968, 87, N 2, p. 321—391.
5. *Osserman R.* A survey of minimal surfaces. Uspehi mat. Nauk, 22, 1967, 55—136.
6. *Osserman R.* Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n. — Ann. Math., 1964, 80, N 2, p. 340—364.
7. *Фоменко А. Т.* Многомерная задача Плато в римановых многообразиях. — Матем. сб., 1972, 89 (131), № 3, с. 475—520. (*Fomenko A. T.* Problema de Plateau multidimensional en las variedades de Riemann. — Colección matemática, 1972, 89 (131) N 3, págs. 475—520).
8. *Фоменко А. Т.* Минимальные компакты в римановых многообразиях и гипотеза Райфенберга. — ИАН СССР, 1972, 36, № 5, с. 1049—1080). (*Fomenko A. T.* Compactos minimales en las variedades de Riemann e hipótesis de Reifenberg. — «Izvestiya Acad. Naúk SSSR», 1972, 36, N 5, págs. 1049—1080).
9. *Фоменко А. Т.* Многомерные вариационные методы в топологии экстремалей. УМН, 1981, 36, № 6, с. 105—135. (*Fomenko A. T.* Métodos variacionales multidimensionales en la topología de extremales. «Uspeji matem. naúk», 1981, 36, N 6, págs. 105—135).
10. *Фоменко А. Т.* Периодичность Ботта с точки зрения многомерного функционала Дирихле. — ИАН СССР, 1971, 35, № 3, с. 667—681. (*Fomenko A.* Periodicidad de Bott desde el punto de vista de la funcional de Dirichlet multidimensional. «Izvestiya Acad. Naúk SSSR», 1971, 36 págs. 667—681).
11. *Фоменко А. Т.* Многомерные задачи Плато на римановых многообразиях и экстраординарные теории гомологий и когомологий. Часть I. — В кн.: Труды семинара по вект. и тенз. анализу, 17. М.: Изд. МГУ, 1974, с. 3—176; часть II — в кн.: Труды семинара по вект. и тенз. анализу, 18, М.: Изд. МГУ, 1978, с. 4—93. (*Fomenko A. T.* Problemas de Plateau multidimensionales sobre las variedades de Riemann y teorías extraordinarias de homologías y cohomologías. Parte I en el libro: Trabajos del semanario dedicado al análisis vectorial y tensorial, 17. Moscú, Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, 1974, págs. 3—176; parte II en el libro: Trabajos del semanario dedicado al análisis vectorial y tensorial, 18. Moscú, Edit. de la Univ. Estat. de Moscú, 1978, págs. 4—93).
12. *Дао Чонг Тхи.* Мультиварифолды и классические многомерные задачи Плато. ИАН СССР, 1986, 44, № 5, с. 1031—1065. (*Dao Chong Tsi.* Multi-

varyfolds y problemas clásicas multidimensionales de Plateau. «Izvestiya Acad. Naúk SSSR», 1986, 44, N 5, págs. 1031—1065).
13. *Фоменко А. Т.* О минимальных объёмах топологически глобально минимальных поверхностей в кобордизмах. — ИАН СССР, 1986, 45, № 1, с. 187—212. (*Fomenko A. T.* Sobre volúmenes minimales de las superficies globales minimales topológicamente en los cobordismos. — «Izvestiya Acad. Naúk», 1986, 45, N 1, págs. 187—212).
14. *Harvey R. Lawson H. B.* Calibrated geometrics. Acta Math., 1982, vol. 148, p. 47—157.

Indice de materias

A nuestros lectores:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la
Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2,
129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Mir Publicará

K. Ríbnikov

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Este trabajo reúne un material minuciosamente seleccionado y analizado, lo que permite al autor revelar de una manera implícita las regularidades y los rasgos más característicos del desarrollo de las matemáticas.
La estructura de la obra contribuye a una mejor interpretación de los siguientes problemas:
1. ¿Cuál es el objeto de estudio de la historia de las matemáticas y qué métodos se utilizan para las investigaciones científicas históricas?
2. ¿Cómo se desarrolla el proceso de formación de las representaciones matemáticas y los hábitos de trabajo, utilizando medios matemáticos?
3. ¿Cuándo y cómo se han formado las primeras teorías matemáticas y cuál ha sido la influencia de las mismas en el ulterior desarrollo de esta ciencia?
4. Acerca de las matemáticas elementales y los procedimientos del análisis matemático de los problemas de carácter discreto.
5. Cómo los matemáticos han dominado el arte de la simulación con modelos continuos y, en general, del análisis infinitesimal.
6. Acerca de las transformaciones de las matemáticas en el siglo XVIII en transcurso del cual se formaron las premisas de los fundamentos clásicos de las matemáticas modernas.
7. De cómo en las matemáticas del siglo XIX y comienzos del XX se ha formado el sistema de conceptos e ideas aceptado en la actualidad.
8. Breves nociones acerca del desarrollo de las matemáticas en Rusia y en la URSS.
Este libro, sin duda, será leído con gusto por mucha gente, en especial por los estudiantes de centros de enseñanza superior que se interesan por las matemáticas.