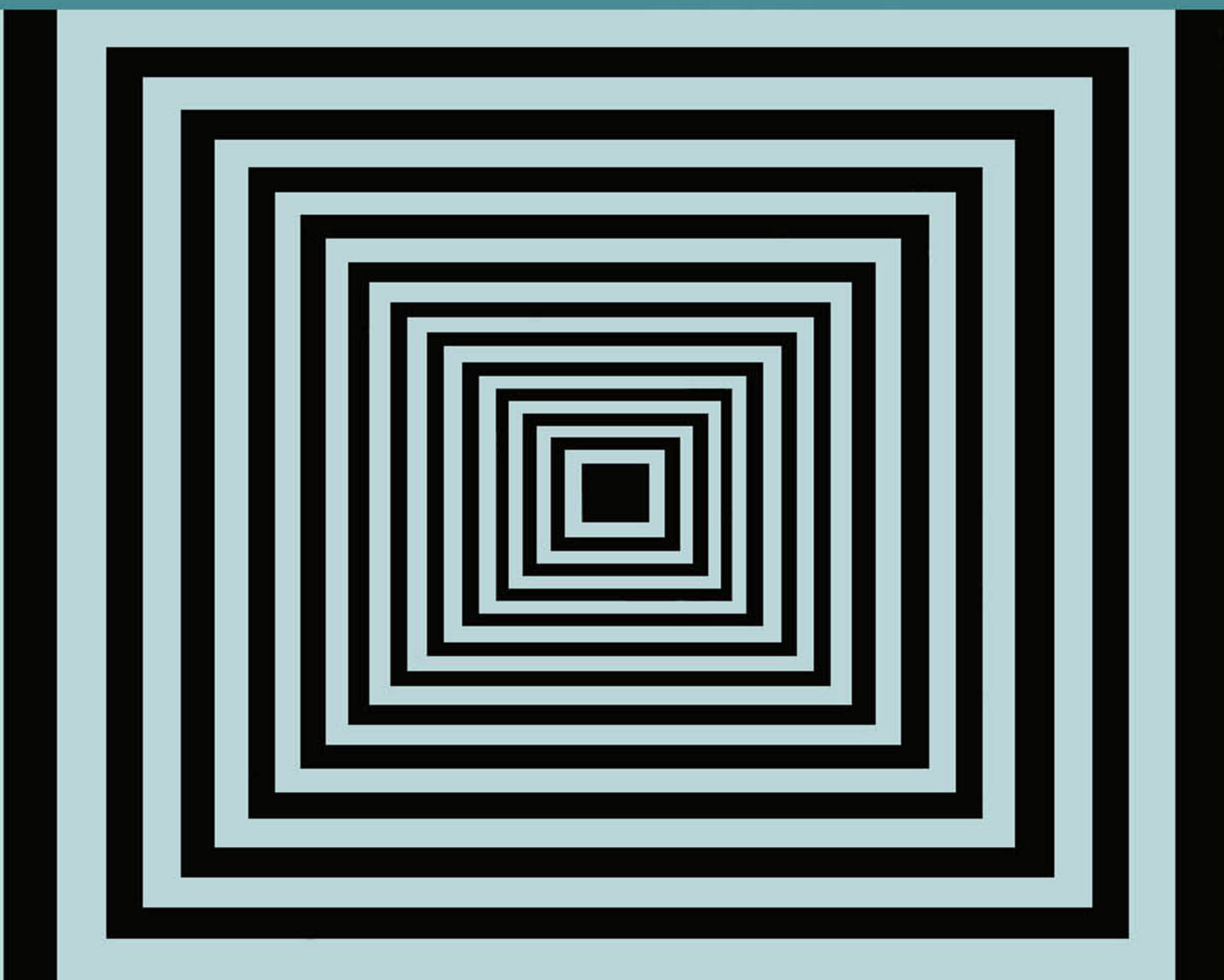
serie de matemática monografía no. 4

HISTORIA DE LAS IDEAS MODERNAS EN MATEMATICA

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico
Departamento de Asuntos Científicos
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos



HISTORIA DE LAS
IDEAS MODERNAS EN MATEMATICA

por
JOSE BABINI
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico
Departamento de Asuntos Científicos
Secretaria General de la
Organización de los Estados Americanos
Washington, D.C.

Primera edición, 1967
Segunda edición, 1974

Esta *monografía* ha sido *preparada* para su publicación en el Departamento de Asuntos Científicos de la *Secretaria* General *de* la Organización de los Estados Americanos

Editora: Eva V. Chesneau

Asesor Técnico: Dr. Manuel Balanzat
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

A los lectores

El programa de monografías científicas es una faceta de la, vasta labor de la Organización de los Estados Americanos, a cargo del Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de dicha Organización, a cuyo financiamiento contribuye en forma importante el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico.

Concebido por los Jefes de Estado Americanos en su Reunión celebrada en Punta del Este, Uruguay, en 1967, y cristalizado en las deliberaciones y mandatos de la Quinta Reunión del Consejo Interamericano Cultural, llevada a cabo en Maracay, Venezuela, en 1968, el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es la expresión de las aspiraciones preconizadas por los Jefes de Estado Americanos en el sentido de poner la ciencia y la tecnología al servicio de los pueblos latinoamericanos.

Demostrando gran visión, dichos dignatarios reconocieron que la ciencia y la tecnología están transformando la estructura económica y social de muchas naciones y que, en esta Nora, por ser instrumento indispensable de progreso en América Latina, necesitan un impulso sin precedentes.

El Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es un complemento de los esfuerzos nacionales de los países latinoamericanos y se orienta hacia la adopción de medidas que permitan el fomento de la investigación, la enseñanza y la difusión de la ciencia y la tecnología; la formación y perfeccionamiento de personal científico; el intercambio de informaciones, y la transferencia y adaptación a los países latinoamericanos del conocimiento y las tecnologías generadas en otras regiones.

En el cumplimiento de estas premisas fundamentales, el programa de monografías representa una contribución directa a la enseñanza de las ciencias en niveles educativos que abarcan importantísimos sectores de la población y, al mismo tiempo, propugna la difusión del saber científico.
La colección de monografías científicas consta de cuatro series, en español y portugués, sobre temas de física, química, biología y matemática. Desde sus comienzos, estas obras se destinaron a profesores y alumnos de ciencias de enseñanza secundaria y de

los primeros anos de la universitaria; de estos se tiene ya testimonio de su buena acogida.

Este prefacio brinda al Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la Secretaria General de la Organización de los Estados Americanos la ocasión de agradecer al doctor José Babini, autor de esta monografía, y, a quienes tienen el interés y buena voluntad de contribuir a su divulgación.

PROLOGO

El programa de monografías científicas del Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana tiene como fin proporcionar textos de contenido científico a los profesores de ciencias de los centros docentes secundarios, en particular, y al público interesado en ciencias, en general.

En todos los tiempos la ciencia ha influido en la civilización y la forma de vida de los hombres que la crearon o adoptaron, pero dicho influjo es mayor aun en la época actual; el prestigio de la ciencia ha crecido y ha penetrado todas las capas sociales como consecuencia de las dos guerras recientes; el temor a los efectos que pueda tener un arma devastadora, surgida de la aplicación de la ciencia, pesa mas en el animo de todos que la consideración de los beneficios que los descubrimientos científicos le hayan proporcionado.

Por otra parte, el crecimiento de ritmo exponencial de la ciencia hace cada vez más difícil, si no imposible, para todo el mundo ponerse y mantenerse al día del avance de los conocimientos, aun limitándose a lo esencial de una sola especialidad.

Por todo ello, la divulgación científica, con la debida solvencia, es de importancia crucial y justifica el esfuerzo que la edición de esta colección de monografías implica. Refiriéndonos únicamente a la matemática, han aparecido ya y seguirán apareciendo en la colección títulos que pongan de manifiesto los conceptos y puntos
de vista generales que caracterizan esta vasta disciplina. Esta serie quedarla trunca sin una monografía sobre el origen y desenvolvimiento histórico de estos conceptos y, aceptado este hecho, el profesor Babini fue considerado en primer lugar como el mas autorizado para escribirla.

Para él, la época de gestación de las ideas actuales sobre matemáticas es el primer tercio del siglo pasado. En el primer capítulo muestra como la eclosión, en nuestro siglo, de la nueva matemática se debió al afán de profundizar y dar rigor a la matemática de los siglos XVII y XVIII, riquísima en resultados nuevos y en fecundos métodos, pero pobre en rigor lógico.

El segundo capitulo expone la génesis de las geometrías no euclidianas; muestra como los matemáticos, llevados por el celo de demostrar el famoso --y dudoso-- postulado de las paralelas, se encontraron ante nuevas geometrías lo que los condujo a reconocer que las propiedades geométricas son en esencia la consecuencia lógica de los axiomas o supuestos adoptados y no dependen de la intuición espacial o física de los entes matemáticos en ser la matemática moderna esta ya en germen en este reconocimiento. A continuación, en el capitulo tercero, se explica como el desarrollo en profundidad del análisis matemático y el esclarecimiento de los conceptos de función, de limite y de serie contribuyo a reforzar esta tendencia a disociar la matemática de toda realidad intuíble.

La matemática actual se caracteriza por el predominio del algebra, y se habla a menudo de la algebrización de todas las ramas de la tradicional matemática. Los capítulos cuarto y quinto muestran como esta tendencia se origina en los trabajos geniales de Galois para dar solución definitiva al problema de hallar las rakes de las ecuaciones algebraicas, de donde surgió la noción de grupo. Mas tarde aparecieron la teoría abstracta de grupos y otras teorías, como las de cuaternios y de matrices, y esta última encierra en germen la presente algebra lineal. Tanto los cuaternios como las matrices contradicen la ley conmutativa de la multiplicación de números, según la cual el orden de los factores no altera el producto y, como en el caso de las geometrías no euclidianas, se llegó por esta vía a un grado de abstracción mayor de las operaciones aritméticas y algebraicas, que se definen hoy únicamente por los axiomas que se desee que cumplan.

La tendencia a la unificación es otra característica de la actual matemática, cuyo origen se halla en la geometría analítica creada principalmente por Descartes. El profesor Babini destaca el efecto que tuvo en esta tendencia la vinculación, establecida por Klein en su famoso "Programa de Erlangen", entre la geometría y la teoría de grupos, así como las aplicaciones al análisis de esta última, por obra de Sophus Lie, cuya generalización dio nacimiento a las teorías de álgebras y grupos de Lie.

También es característico de la matemática actual el esmerado cuidado que se pone en sus fundamentos. Los capítulos sexto, dedicado a la lógica matemática, el sétimo, al método axiomático (con referencia detallada a la magna obra de Hilbert) y el noveno, mas específicamente sobre la cuestión de los fundamentos, nos muestran a las claras el proceso histórico de esta tendencia.

El capitulo octavo trata de la creación por Cantor de la teoría de conjuntos y de sus posteriores consecuencias. La tan discutida obra de Cantor acaso sea el acontecimiento de mayor importancia en la historia de las matemáticas desde la creación por Newton y Leibniz del calculo infinitesimal. El profesor Babini relata la génesis de esta creación, así como la oposición con que tropezó. Además de su interés como una fase audaz de la historia de la matemática, sin la teoría cantoriana de conjuntos, la matemática actual no hubiera podido alcanzar el piano de generalidad y abstracción de que se enorgullece.

Manuel Balanzat

Buenos Aires, julio de 1967

INDICE

1

LA MATEMATICA A COMIENZOS DEL SIGLO XIX

No es necesario imaginar un Rip Van Winkle matemático para advertir el notable cambio que en la primera mitad de este siglo experimento la matemática, tanto en sus temas y en sus conceptos, como hasta en su simbolismo. Para ello, basta simplemente comparar dos ejemplares de una misma revista matemática, uno, por ejemplo, de la década del 1920-1930, y otro de la actual.

Sin embargo, tal revolución, que se estén extendiendo con relativa rapidez a las aulas de enseñanza secundaria y hasta a las de primaria, no fue un acto de generación espontánea sino que, como todas las revoluciones, tuvo un largo proceso de gestación durante el cual, sin que a veces se advirtiese su importancia, fueron germinando las semillas cuyos frutos constituyen la cosecha actual.

No es fácil fijar la fecha del advenimiento del nuevo estado de cosas; quizás para algunos países, en especial los de América Latina, podría adoptarse 1938, cuando se inicia la publicación de la obra del grupo Bourbaki; pero en todo caso se advierte que la historia de las nuevas ideas viene de lejos.

Sin remontarse a los orígenes mismos de la matemática, los primeros signos de la de nuestros días apuntan hacia el primer tercio del siglo pasado, que es cuando tiene lugar, por una parte, el nacimiento de las geometrías no euclidianas y, por otra, la introducción del rigor en el análisis.

A comienzos de dicho siglo, el panorama de la matemática justificaba el plural de su denominación: "las matemáticas", que aun subsiste ahora, aunque solo en virtud del peso de la tradición cada vez mas débil. La aritmética y el algebra estaban separadas, a manera de compartimientos estancos, y obedecían a reglas operatorias tenidas por intangibles. Las estereotipadas expresiones:

el orden de los sumandos no altera la suma, el orden de los factores no altera el producto, tenían un halo de paradigmas de la verdad absoluta, sobre todo a los ojos de la sabiduría popular.

En cuanto al concepto de los números reinaba el empirismo; si bien los números habían sido rescatados ya del foso geométrico donde los griegos los habían arrojado cuando el "escándalo de los irracionales" los condujo a un callejón sin salida numérica, la mezcla de números y de cantidades persistía. La serie de los números naturales mantenía su aureola y a su amparo se había desarrollado, a partir del siglo XVII, una teoría de números, en cuya formación, siguiendo las huellas de Diofanto de Alejandria (s. III), sobresalieron Pierre Fermat(1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783) y Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) al abordar el planteo y busca de solución de problemas, con frecuencia aislados, y cuya generalización no conducía sino a complicaciones. A comienzos del siglo XIX esos esfuerzos culminan en Karl Friedrich Gauss (1777-1855), cuya obra en este, como en otros Campos, muestra signos de modernidad. Así, su teoría de congruencias ha sido muy útil en la formulación del algebra de hoy.

En cuanto al algebra, no era sino la teoría de las ecuaciones a comienzos del siglo XIX. En ese terreno el único progreso importante realizado desde la época de los babilonios había sido la resolución algebraica de las ecuaciones de tercero y de cuarto grado por matemáticos italianos del siglo XVI. Este triunfo alenté la ilusión de hallar, en forma semejante, métodos que permitiesen resolver algebraicamente cualquier ecuación de grado superior. Mas tal ilusión se desvaneció a fines del siglo XVIII ante los reiterados fracasos de los intentos de resolver mediante radicales la ecuación de quinto grado. El hecho de que esos fracasos alcanzaran a un matemático como Euler, de extraordinaria pericia algorítmica, mostraba a las claras que la solución no podía hallarse por métodos puramente algorítmicos: de ahí la importancia de la labor de Lagrange en este campo, a fines del siglo XVIII, precursora de la futura dirección que se aproximaba y de los intentos afortunados de Paolo Ruffini (1765-1822) y de Niels Henrik Abel (1802-1829), de comienzos del siglo XIX, que implican la demostración de que es imposible resolver la ecuación de quinto grado mediante radicales. También en el campo del algebra la obra de Gauss revela signos de modernidad a través de la teoría de las formas cuadráticas y de la resolución de las ecuaciones binomias.

Respecto de la geometría, a comienzos del siglo XIX sigue incólume la geometría clásica, es decir, la geometría griega. Solo un progreso se había registrado en los últimos tiempos de aquel lapso de mas de veinte siglos: el nacimiento y desarrollo inicial de la futura geometría proyectiva que, desde el punto de vista de sus aplicaciones, asoma con las reglas de la perspectiva entre los artistas del Renacimiento y se fortalece gracias a los métodos de la geometría descriptiva de Gaspard Monge (1746-1818) de fines del siglo XVIII; en tanto que, desde el punto de vista teórico, toma cuerpo en virtud de la obra de Gerard Desargues (1593-1662), y se concreta a comienzos del siglo XIX con el tratado de Jean Víctor Poncelet (1788-1867) quien, al distinguir las propiedades proyectivas de las métricas de las figuras, sienta los cimientos de la geometría proyectiva. Pero, en verdad, tal geometría solo se sistematizara en la segunda mitad de ese siglo, de manera que a comienzos del mismo, la geometría por antonomasia es la geometría euclidiana; es decir, la geometría métrica elaborada por los griegos y expuesta en su aspecto elemental en los *Elementos* de Euclides de Alejandria (c. 300 a. de J. C.) y en su aspecto mas elaborado por las obras de Arqufinedes de Siracusa (287-212 a. de J. C.), de Apolonio de Perga (c. 262-190 a. de J. C.) y de Pappus de Alejandria (s. III/IV).

Esa geometría se proponía, sin duda, estudiar las propiedades de las figuras con "la inteligencia pura", pero en virtud de la concepción matemática de los griegos tales figuras no eran entes desvinculados del mundo exterior sino que una especie de cordón umbilical las unía al mundo platónico de las ideas, manteniéndolas encadenadas al mundo visible y palpable, del cual las figuras geométricas eran las imágenes de sus formas ideales.

Esta conexión de la geometría con el mundo tangible formaba parte de los hábitos mentales de la época y contribuyó a la estabilidad y a la evidencia características de la geometría elemental a comienzos del siglo XIX. Por otra parte, contribuyeron a su estancamiento otros factores: por un lado, no era fácil continuar la obra de los grandes geómetras griegos ya mencionados, obra difícil en sí y que parecía haber agotado el tema; por el otro, los gustos y la tendencia de los matemáticos de la época se orientaban casi exclusivamente hacia los métodos analíticos que, por lo demás, ofrecían, mediante las coordenadas y el calculo infinitesimal, recursos mas cómodos y casi rutinarios que permitían resolver, no solo los problemas de la geometría tradicional, sino otros situados fuera de la órbita de esta geometría.

En verdad, el siglo XVIII fue el siglo de los métodos infinitesimales que habían permitido ya el resonante triunfo de los *Principia* de Isaac Newton (1642-1727) publicados en 1687. Fue el siglo del auge del cálculo infinitesimal, sistematizado en los tratados de Euler y aplicado con éxito por Lagrange en su *Mecánica Analítica, y* por Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) en su *Mecánica Celeste.*

Los llamados métodos infinitesimales no eran entonces sino un conjunto de reglas de acentuado carácter algorítmico que justificaban el nombre de "cálculos" conque se las designaba: calculo diferencial, calculo integral y calculo de variaciones que, por lo demás, acusaban cierto desequilibrio en sus partes, ya que el cálculo diferencial privaba sobre el integral, por cuanto la integración no era sino la operación inversa de la diferenciación, y la integral definida perdía su autonomía al convertirse en una aplicación de la integral indefinida.

Pero la característica saliente de los métodos infinitesimales del siglo XVIII era el hecho de estar privados de todo fundamento riguroso. Es bien conocida la frase que Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) dirigía a sus estudiantes ante las dudas que despertaban las dificultades lógicas del calculo:"*Allen en avant et la foi* vous *viendra"; y* eso que D'Alembert fue el que mas se acerco a una definición precisa de límite y de derivada. Mas en realidad toda duda se desvanecía ante el éxito de sus aplicaciones, de manera que el calculo infinitesimal, mas que en una rama de la matemática, se convertía en una especie de doncella de la ciencia natural; en un auxiliar muy valioso, pero auxiliar al fin, de las varias ramas de la física.

Por lo demás, las ideas y la filosofía de la época no hacían sino corroborar este sometimiento de la matemática a la ciencia natural y, en general, su vinculación con el mundo exterior. Tal concepción formaba parte tanto del bagaje intelectual del hombre renacentista como del moderno. Ese hombre, al contemplar la naturaleza con nuevos ojos y descubrir en ella una fuente de poder, de utilidad y de progreso, vio en la ciencia el instrumento capaz de poner ese poder a su disposición. El método experimental hizo el resto. Ante los triunfos de este método y el papel que en el desempeña la matemática, se dio el ultimo paso, considerando los entes matemáticos como Seres naturales, y las verdades matemáticas, logradas por el razonamiento y la intuición, semejantes a las verdades físicas, logradas por razonamiento y experimentación.

Tal concepción la heredaron los enciclopedistas, en cuya clasificación de las ciencias, las matemáticas, "cuyo objeto es la cantidad", encabezaban la lista de las ciencias naturales y abarcaban unas matemáticas puras: aritmética, algebra (que, con el calculo infinitesimal, formaba el algebra superior) y geometría; y unas matemáticas mixtas: física, astronomía, Si se añade que la filosofía kantiana, vigente a fines del siglo XVIII, vinculaba las verdades de la aritmética y de la geometría con los conceptos metafísicos de tiempo y de espacio, se explica que pueda decirse que la matemática de comienzos del siglo XIX parecía mas tarea de físicos o de ingenieros que de matemáticos.

Pero tal estado de cosas cambió en el transcurso del siglo XIX cuando desde distintos campos: algebra, geometría, análisis se lanzo el grito de independencia y se proclamó tanto la autonomía como la unidad de la matemática.

2

LAS GEOMETRIAS NO EUCLIDIANAS

La historia del cambio en la matemática comienza con el advenimiento de las llamadas geometrías no euclidianas, cuya fecha oficial de nacimiento, aunque no de reconocimiento, puede fijarse hacia la tercera década del siglo XIX.

Además de su valor intrínseco las geometrías no euclidianas tienen el merito de su vinculación con el método axiomático, que constituye hoy uno de los pilares de la matemática y cuyo origen debe verse en los *Elementos de Geometría* de Euclides. El sentido de seguridad y de certeza que ese método confirió a la construcción euclidea es sin duda el factor principal de la larga y profunda influencia que la obra de Euclides ejerció, en especial como paradigma educativo, hasta comienzos de este siglo.

Un conjunto de hechos favoreció la labor de Euclides y su creación de los *Elementos*. Por un lado, Euclides pudo disponer del tiempo y de los elementos necesarios para su tarea en virtud de una especie de régimen "full-time" implantado en el Museo de Alejandria por los Ptolomeos. Además, disponía de gran acopio de teoremas geométricos, obra de los matemáticos de los tres siglos anteriores, en especial de los pitagóricos, de Arquitas de Tarento (s. IV a. de J. C.), de Teeteto de Atenas (s. IV a. de J. C.) y de Eudoxo de Cnido (c. 408 c. 355 a. de J. C.), que be permitió seleccionar el material adecuado y, por primera vez, organizar un sistema de conocimientos matemáticos sujeto a una estructura unitaria.

Por otra parte, Euclides dispuso de un recurso valiosísimo que le permitió erigir dicha estructura: la lógica aristotélica que, a modo de argamasa, dio al edificio tal solidez que pudo resistir, casi sin deterioro, los embates críticos de muchos siglos. Es en virtud de esta lógica que Euclides, en sus *Elementos,* crea y aplica lo que hoy se llama método axiomático, que Aristóteles de Estagira (384-322 a. de J. C.) preconizó como el mejor a seguir en toda ciencia deductiva. Consiste en la denuncia previa a todo razonamiento de aquellas propiedades que necesariamente hay que admitir sin demostración para deducir de ellas, sin otro recurso que la lógica, todo el conjunto de proposiciones del sistema. Esas propiedades, que hoy se llaman axiomas, figuran en el primer Libro de los *Elementos* con los nombres de postulados *y* de nociones comunes.

Por ultimo, aunque no menos importante por ello, al imprimir Euclides a su obra el sello de la matemática griega, acentuó los rasgos pitagórico-platónicos lo que otorgó a la matemática una técnica que, en medida variable, constituye uno de sus atributos permanentes. En aspectos distintos revelan los *Elementos* el platonismo, al cual era Euclides adepto. En sus trece Libros, que comprenden cerca de 500 proposiciones, no figura una Bola aplicación práctica ni un solo ejemplo numérico, no obstante ocuparse de aritmética tres de tales Libros, donde los números aparecen trasmutados en segmentos. Aparece, por ejemplo, en esos Libros la propiedad que permite definir los llamados "números perfectos" y aunque Euclides debía conocer seguramente los números perfectos más pequeños, como el 6 y el 28, no menciona ningún ejemplo. Tampoco aluden los *Elementos* *a* instrumento geométrico alguno, y aunque suele decirse que la geometría de Euclides no admite sino construcciones con regla y compás, de atenerse literalmente a su obra, habría que decir que no admite sino construcciones con rectas y circunferencias, y aun con la restricción impuesta por los axiomas. Si Pitágoras (s. VI a. de J. C.), al decir de Proclo de Bizancio (410-485), dio a la matemática "la forma de una enseñanza liberal, remontándose a los principios generales y estudiando los teoremas en abstracto con la inteligencia pura", no hay duda de que Euclides siguió fiel y cabalmente, dentro de su platonismo, la dirección matemática iniciada por el filósofo de Samos.

Para señalar los caracteres de la geometría euclidiana vinculados al método axiomático es indispensable acudir al texto original de Euclides, pues los actuales, aun conteniendo mucho de los *Elementos,* han sufrido la influencia de las culturas matemáticas posteriores. Hay, pues, que acudir a los postulados y nociones comunes que Euclides enuncia en el primer Libro de los *Elementos.*

Mientras que las nociones comunes de Euclides pueden considerarse equivalentes a los actuales axiomas de congruencia, pues exponen a la manera griega las propiedades generales de las magnitudes: igualdad, desigualdad y operaciones entre cantidades, los postulados encierran las proposiciones específicamente geométricas que han de servir de fundamento de todo el edificio. Puede parecer algo extraño que para ello Euclides no necesite sino cinco postulados, tres de los cuales establecen la existencia y unicidad de la recta o, mejor, del segmento prolongado que pasa por dos puntos dados, y un cuarto postulado define la existencia de una circunferencia conocidos su centro y su radio. Con estos cuatro postulados las dos figuras básicas de la geometría euclidiana: la recta y la circunferencia cobran vida, si bien en forma independiente, sin dar a conocer sus conexiones mutuas. En virtud de la concepción griega de figura, definida como todo lo que tiene limites, Euclides considera innecesario postular los vínculos de la circunferencia con la recta o con otra circunferencia; solo queda pues por fijar o establecer el comportamiento mutuo de dos rectas, ya que, en este caso, los segmentos, al prolongarse indefinidamente, escapan a la definición de figura. Y Euclides, fiel al método, pero mostrando al mismo tiempo su garra matemática, fija ese comportamiento mediante un postulado: el celebre "Quinto postulado", cuyo carácter confirmarán 22 siglos mas tarde los creadores de las geometrías no euclidianas.

Según este postulado de Euclides "si una recta, al cortar a otras dos, forma ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, dichas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos".

De este postulado, de rasgos un tanto ambiguos por su parecido al enunciado de un teorema, se derivan las propiedades características de la geometría euclidiana: existencia y unicidad de la paralela a una recta desde un punto exterior a esta; constancia de la suma de los ángulos de un triangulo; teoría de la semejanza;..., aunque también ofreció el punto mas vulnerable a la crítica. Es posible que el carácter de postulado suscitara dudas ya desde los tiempos de Euclides, quien demuestra cerca de 30 proposiciones antes de aplicarlo, ofreciendo así un cuerpo de propiedades de una "geometría absoluta", independiente del mismo. Y si para Euclides la solución correcta fue agregar un nuevo postulado a los anteriores, para otros matemáticos, menos aferrados a la lógica que el, resultaba inconcebible admitir como verdad no demostrada una propiedad que para ellos estaba incluida en la "naturaleza de la recta", esa naturaleza implícita en los postulados anteriores. El hecho es que durante siglos se hicieron reiterados esfuerzos para deducir el Quinto postulado de los demás postulados y estos esfuerzos siempre fracasaron por cuanto sólo se lograba ese propósito al precio de introducir, expresa o tácitamente, otro postulado equivalente al que se pretendía demostrar. Ya en la antigüedad se registraron algunos de estos intentos: así Proclo, según quien esa proposición de Euclides debía "ser absolutamente eliminada de los postulados" y para ello ofreció una demostración propia, informa que ya Ptolomeo, el gran astrónomo del s. II d. de J. C. había hecho un intento semejante. Tales intentos se repitieron entre los matemáticos árabes y occidentales del Renacimiento y de la Edad Moderna y a veces dejaron saldos positivos, en especial desde el punto de vista didáctico, pues llevaron a postulados equivalentes al de Euclides aunque mas simples o mas intuitivos.

En el siglo XVIII se renovaron estos esfuerzos, si bien adoptando esta vez un nuevo método: con el propósito de demostrar el postulado, se partió de la hipótesis de su falsedad, en la esperanza de que esa hipótesis condujese a una contradicción y, por tanto, por reducción al absurdo, el postulado tendría que ser verdadero. El primero que aplicó este método fue el padre Gerolamo Saccheri (1677-1733), quien en el ano de su muerte dio a conocer un *Euclides...vindicatus,* donde aparecen además las tres posibles hipótesis frente al postulado. Como figura fundamental para sus consideraciones adopta un cuadrilátero con dos lados opuestos e iguales y perpendiculares a la base, y admite como hipótesis que los otros dos ángulos, cuya igualdad demuestra, pueden ser obtusos, rectos o agudos. Pero mientras logra rechazar con relativa facilidad la hipótesis del ángulo obtuso, no ocurre lo mismo con la hipótesis del ángulo agudo. Basándose en esta hipótesis demuestra una serie de teoremas, algunos de los cuales formaran mas tarde parte de las geometrías no euclidianas, pero Saccheri, obstinado en reivindicar a Euclides, se detiene en uno que, según 61, conduce a un resultado "contrario a la naturaleza de la recta", y concluye que "la hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta".

Rechazada también, basándose en este "teorema", la hipótesis del ángulo agudo, no queda en pie como valida sino la hipótesis del ángulo recto, que equivale al Quinto postulado, y Euclides está reivindicado.

Aunque la obra de Saccheri tuvo cierta difusión, cayó pronto en el olvido del que la sacó, en 1889, Eugenio Beltrami (1836-1900); y en el transcurso del siglo XVIII ya comienzos del siguiente varios matemáticos reasumen la cuestión y rechazan la hipótesis del ángulo agudo, ya porque una de sus consecuencias lleva a una unidad natural de longitud que se reputa absurda, ya porque admitir su validez implica el aceptar la posibilidad de varias geometrías, lo cual era incompatible con las ideas dominantes acerca del espacio --por supuesto, del espacio físico.

Es posible que tales intentos infructuosos contribuyeran a debilitar la fe en la demostrabilidad del postulado dentro de la nueva atmósfera que envuelve a la matemática ya entrado el siglo XIX; atmósfera que provocara un cambio de actitud por parte de ciertos matemáticos frente al problema. En efecto, siguiendo el método aplicado en el siglo precedente por Saccheri, se llega ahora a la conclusión contraria, es decir: el hecho de prescindir del Quinto postulado en la construcción geométrica no conduce a contradicción alguna.

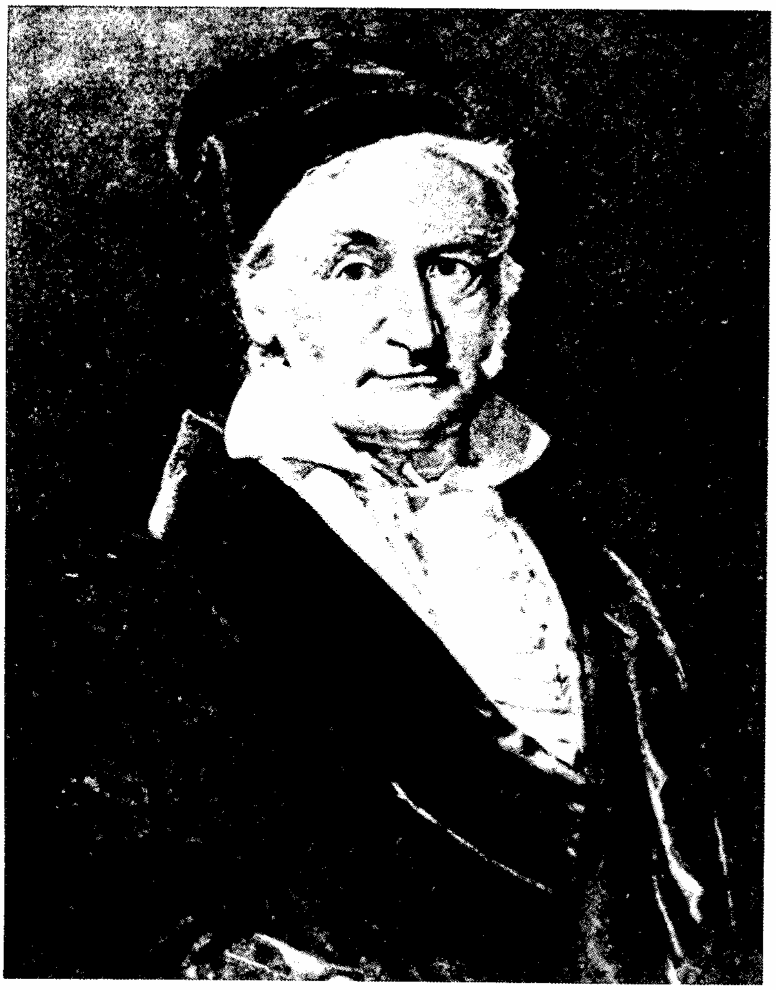
El primero en llegar a esa conclusión fue Gauss. Si bien no publicó nada acerca de la cuestión, se deduce de sus apuntes y de su correspondencia que el asunto le preocupó desde la adolescencia, y si se abstuvo de hacer publicas sus averiguaciones y hallazgos al respecto fue, como habrá de referir en 1829, por el temor a la "gritería de los beocios". Pero en 1831 se decide a redactar una "geometría no euclidiana" (el nombre es creación suya) convencido del rigor de su fundamento "aunque, a primera vista, muchos de sus resultados ofrezcan un aspecto paradójico", mas una vez enterado del trabajo de Bolyai abandonó el propósito. Al mismo tiempo que Gauss, e independientemente de 61, llegan a resultados semejantes dos matemáticos de países que hasta entonces poco habían contribuido al progreso de la matemática: el húngaro Janos Bolyai (1802-1860) y el ruso Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856), circunstancia sin duda sintomática que revela que la solución de la milenaria cuestión estaba, por así decir, en el aire.

El escrito de Bolyai, muy breve, pues apenas consta de unas 26 páginas, apareció en 1832 como apéndice de una obra didáctica de su padre, también matemático, y en el habla su autor de "un universo creado de la nada" y expone una llamada "geometría absoluta", donde alude al hecho de que sus hallazgos se refieren a propiedades independientes del Quinto postulado y validas por tanto en un edificio geométrico mas general donde tiene cabida la geometría euclidiana como caso particular. Así, las fórmulas de la trigonometría esférica pertenecen a esta geometría absoluta, pues su deducción no depende del Quinto postulado.

La contribución de Lobachevsky es semejante a la de Bolyai, si bien mas constructiva. Aunque desde 1826 se venía ocupando del tema, su primer escrito, en ruso, es de 1829, y 10 siguieron otros trabajos en ruso o con traducción alemana o francesa que culminaron, al final de su vida, con una *Pangeometría,* la exposición mas completa de su creación. Esta *Pangeometria* muestra un rasgo precursor de la geometría del futuro, pues es en verdad un estudio analítico, sin figuras, compuesto de un conjunto de teoremas y de fórmulas, una cabal "trigonometría" de una geometría que el llama "imaginaria".

La geometría no euclidiana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky se llamó, a partir de Félix Klein (1849-1921), hiperbólica, y en ella, por un punto exterior a una recta, pasa un haz de rectas que no la cortan, haz limitado por dos rectas especiales: las dos paralelas a la primera trazadas por ese punto. El cuadro de las geometrías no euclidianas se completa con la geometría elíptica (y esférica) que corresponde a la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri, y surgió a raíz de las ideas fundamentales expuestas en la celebre disertación inaugural de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) de 1854 (aunque no publicada hasta 1867): *Sobre las hipótesis en que se funda la, geometría.* En esta geometría, por un punto exterior a una recta no pasan rectas que no la corten, de manera que la geometría euclidiana queda entonces como caso intermedio entre la hiperbólica y la elíptica y por eso se denomina parabólica, y en ella por un punto exterior a una recta existe una sola recta que no la corta: su paralela.

La ultima etapa del desarrollo de las geometrías no euclidianas, desde el punto de vista histórico, se cumple hacia 1870, cuando se difunden los trabajos de Gauss, Lobachevskyy Riemann, y se vinculan esas geometrías con la geometría proyectiva, y sobre todo cuando aparecen las interpretaciones de las mismas sobre el plano euclideo, que ponen fin para siempre a toda discusión acerca de su validez lógica, pues una supuesta contradicción en el seno



KARL FRIEDRICH GAUSS

(1777-1855)

de las geometrías no euclidianas llevaría consigo igual contradicción en el de la geometría euclidiana, jamás puesta en duda hasta entonces.

Tan importante como la fecundidad que reveló el método que dio lugar al advenimiento de las geometrías no euclidianas, y que mas adelante produjo otras geometrías tan distintas de la tradicional como aquellas, fue la influencia y repercusión que las nuevas geometrías ejercieron sobre las ideas que habían de conducir a la matemática de hoy. No sólo esas geometrías constituyeron el punto de partida de un análisis mas profundo del método axiomático, sino que arrojaron una nueva luz sobre la vinculación de la geometría con el mundo exterior o, si se quiere, de la matemática con la física. Por lo pronto, y en especial por las ideas de Riemann, la vinculación entre geometría y física se tornó más elástica y flexible. Tanto para Riemann, como para Gauss y Lobachevsky, Serra la experiencia (o las hipótesis físicas, agregaríamos ahora) la que decidiría qué geometría se debe utilizar como la que mejor se adapta a esa experiencia, aunque es claro que esta cuestión no atañe a los matemáticos sino a los físicos.

Para los matemáticos, en cambio, las geometrías no euclidianas tuvieron la virtud de socavar los fundamentos de la geometría euclidiana y de facilitar una nueva concepción de la geometría en la que se elimina toda referencia intuitiva al espacio físico y sólo queda subsistente la abstracción.

Por supuesto, también en la geometría de Euclides domina la abstracción, pero en ella, en virtud del platonismo que la colorea, este proceso está limitado; constreñido a seguir el camino que conduce al mundo de las ideas tiene que apoyarse en los objetos y formas del mundo sensible que imprimen fuertemente su sello en las formas y figuras geométricas. En cambio, la abstracción que priva en la nueva geometría es la abstracción matemática, exenta de toda atadura a doctrinas filosóficas, desvinculada del mundo exterior, y solo obediente a las reglas lógicas que la independizan totalmente de un eventual origen empírico que puedan tener sus conceptos y juicios básicos, como ocurre en la geometría de los griegos. El hecho de que nuestra geometría elemental, fundada sobre los postulados de Euclides, encuentre tantas aplicaciones tiles en la vida diaria o resulte adecuada a la solución de ciertos problemas, no es un hecho inherente a la geometría, sino a la naturaleza de los objetos de la vida diaria o de las ramas de la física.

3

LA ARITMETIZACION DEL ANALISIS

Mientras los creadores de las geometrías no euclidianas proclamaban la independencia de la geometría del mundo exterior, y con ello una mayor autonomía de la matemática, algo semejante ocurría en otro campo de esta ciencia: el análisis infinitesimal.

La noción de los infinitesimales acompañó a la matemática desde sus orígenes. Fue un problema de índole infinitesimal: la necesidad de encubrir el número irracional, revelado en la presencia de cantidades inconmensurables, el que provoco la "geometrización" de la matemática griega, que tal vez se iniciase con la traducción geométrica de los conocimientos algebraicos de los babilonios, para culminar en las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio. En efecto, ante el fracaso de expresar con números (enteros) las cantidades inconmensurables, "inexpresables", los griegos dieron un rodeo, genial pero rodeo al fin, concediendo carta de ciudadanía geométrica a tales cantidades mediante un triple proceso: la admisión de un principio, que equivale a nuestro axioma de la continuidad; una adecuada definición de la proporcionalidad, que no deja de tener cierto parentesco con las cortaduras de Dedekind; y la aplicación de un método que un matemático renacentista denomino, no muy propiamente, método de exhaución.

El hecho de haber surgido ese triple proceso de una misma mentalidad científica: Eudoxo de Cnido, prueba que apuntaba hacia una finalidad común que no era sino la resolución, a la manera griega, de un grupo de problemas de carácter especial: áreas, volúmenes, centros de gravedad de figuras planas y sólidas, que hoy pertenecen al calculo infinitesimal o, mejor, al calculo integral.

Como el método de exhaución es un método de demostrar y no de descubrir, su aplicación exige el previo conocimiento del resultado que se quiere demostrar; de ahí que los matemáticos que lo aplicaron tuviesen que ingeniarse para dar con ese resultado, lo que, en general, lograron mediante recursos no rigurosos: inducción, intuición u otros. Pero, en virtud del carácter deductivo de su ciencia, los matemáticos griegos ocultaron tales recursos para exponer directamente la demostración por exhaución, que por consistir en una doble reducción al absurdo es muy poco instructiva, sin contar que al abrirse en esta forma un abismo entre la creación y la demostración, dos facetas, ambas importantes, de la labor matemática, se creó una atmósfera de artificio que torno poco provechosa la labor de esos matemáticos. La única excepción: el método de Arquímedes, donde este expone el proceso, por lo demás genial, que siguió para lograr los resultados de índole infinitesimal que luego demuestra en sus escritos. Por desgracia esta obra no se conoció hasta comienzos de este siglo, cuando ya no tenía sino un valor histórico.

Por otra parte, la manera griega de tratar las cuestiones de índole infinitesimal no hizo sino robustecer la vinculación de estas cuestiones con el mundo exterior, no sólo en lo referente a propiedades geométricas de las figuras, sino también en lo relativo a problemas de estática: centros de gravedad, equilibrio de pianos, teoría de la palanca y equilibrio de los cuerpos flotantes.

Cuando los conocimientos griegos clásicos penetran en Occidente, por intermedio de sus traducciones al árabe, vienen acompañados de un nuevo saber, ignorado de los griegos: el algebra, cuyo algoritmo ofrece la ventaja de una generalización fácil, que no conocieron los métodos antiguos mas orientados hacia la resolución de problemas particulares. Aprovechando esta ventaja, los hombres del Renacimiento, cuyo sentido practico de hombres de acción contrasta con el sentido teórico y contemplativo de los griegos, convierten aquellos conocimientos en un conjunto de reglas y de métodos, sin fundamento riguroso, pero que les permiten obtener, no sólo los resultados de los antiguos, sino numerosos resultados nuevos, con importantes aplicaciones a la geometría y a la mecánica.

Ante el éxito de esas aplicaciones, unido al carácter engorroso y nada fácil de las demostraciones antiguas, se explica que se prosiguiera en esa dirección, descuidando los fundamentos en favor de los resultados y prefiriendo la meta al camino. Por lo demás, esta cosecha de útiles resultados, obtenidos mediante razonamientos intuitivos y hasta incorrectos, no dejó de tener sus ventajas: en definitiva los resultados quedaron y los razonamientos se corrigieron.

A los éxitos del siglo XVII, que culminan con la obra newtoniana, y a las importantes y numerosas contribuciones de los matemáticos del siglo XVIII que con preferencia se ocuparon del nuevo calculo, ha de agregarse, a comienzos del siglo XIX, su aplicación a una nueva rama de la física: la teoría del calor, por obra de Joseph Fourier (1768-1830).

Pero desde el punto de vista matemático todo este desarrollo seguía sin fundamento riguroso conceptual alguno, y solo la excelencia de los resultados y el éxito de las aplicaciones ofrecía a los matemáticos cierta seguridad y garantía, aun reconociendo lo endeble de los fundamentos del cálculo infinitesimal. El título de un escrito de fines de siglo, de Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot (1753-1823): *Reflexions sur la metaphysique du calcul infinitesimal,* es buena prueba del estado de cosas imperante entonces en este campo.

Tal estado de cosas cambia en la primera mitad del siglo XIX cuando el análisis infinitesimal, sin detener su desarrollo y aplicaciones y hasta en forma más rica y variada, ahonda sus principios y mediante adecuadas definiciones encuentra una base firme y rigurosa en los conceptos aritméticos, eliminando de su seno, mediante esta "aritmetización", toda vaga e inútil "metafísica",

Sin embargo, no habían faltado en el siglo XVIII críticas de los métodos infinitesimales. Es interesante destacar que una de esas criticas, y que tuvo consecuencias, provino de un campo extramatemático: fue la del filósofo y obispo George Berkeley(1685-1753), aparecida en su escrito de 1734: *The Analyst,* cuyo subtítulo, largo y explicativo, decía: 0 *un discurso dirigido a un matemático infiel. Donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno son concebidos más claramente o son deducidos con mayor evidencia que los misterios de la religión y los asuntos de la fe.*

El "matemático infiel" era Edmund Halley (1656-1742), que fue sin duda un libre pensador y, en cierto sentido, activo. De ahí la infidelidad de que lo acusaba Berkeley, pues por el hecho de ser reputado un gran matemático, y consecuentemente uno de los grandes maestros de la razón, utilizaba indebidamente su autoridad opinando y decidiendo sobre cuestiones ajenas a su incumbencia. Y, hábil polemista, Berkeley se dirige hacia los objetos mismos de la ciencia que Halley profesa, mostrando que aquellos que se quejan sin razón de la incomprensibilidad científica de la religión, aceptan una ciencia que, en su raíz misma, es incomprensible y cuyas conclusiones se apoyan en raciocinios que la lógica no acepta.

Si bien la finalidad de Berkeley no era tanto criticar los nuevos métodos como vindicar los misterios de la fe, la crítica contra aquellos métodos era pertinente, aguda y decisiva en vista de los principios oscuros, vagos y contradictorios que los envolvía, tanto en la forma newtoniana como en la de los matemáticos continentales. Acertadamente, Berkeley critica y satiriza esos "incrementos evanescentes", esos "momentos" que no son cero, pero que luego se anulan y que califica de "fantasmas de cantidades desaparecidas", aquellas fluxiones de fluxiones, aquellos infinitamente pequeños de infinitamente pequeños,....

La incisiva critica de Berkeley, tanto a los principios del nuevo algoritmo como a las demostraciones que los matemáticos empleaban en el, no dejó de causar impresión y su influencia se hizo sentir en forma mas o menos visible en los matemáticos ingleses de entonces. Si esa critica era inobjetable desde el punto de vista técnico, era en cambio muy objetable la teoría de "compensación de errores" en que se embarco Berkeley, impresionado sin duda por la aparente paradoja de que, fundándose en principios y demostraciones tan deleznables, los nuevos métodos condujeran a resultados exactos, como lo comprobaba la mecánica newtoniana.

Pero en el siglo XIX son los matemáticos mismos los que se lanzan al ataque iniciando una revisión de los principios del análisis infinitesimal, mediante un proceso del cual fue precursor Bernard Bolzano (1781-1848) y constructores Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Niels Henrik Abel (1802-1829), Carl Gustav Jacob Jacobi (1801-1851), Karl Weierstrass (1815-1897), Riemann...

En numerosas cuestiones Bolzano se adelanto a los analistas rigurosos del siglo XIX, a saber: en el concepto de función continua y en la demostración de sus propiedades, en el criterio de convergencia de series, y en la existencia de funciones continuas sin derivadas; pero por haber publicado sus escritos de análisis en Praga, ciudad entonces alejada de los centros científicos, o de permanecer inéditos, como su importante *Teoría de Funciones,* que apareció en 1930, la influencia de sus ideas fue escasa.

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY
(1789-1857)

Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas. En el prefacio de su *Analyse algebrique,* de 1822, escribe:

> "He tratado de dar a los métodos todo el rigor que se exige en geometría, sin acudir jamás a los argumentos tomados de la generalidad del algebra. Tales argumentos, aunque bastante admitidos, sobre todo al pasar de las series convergentes a las divergentes, de las cantidades reales a las imaginarias, se me ocurre que no deben ser considerados sino como inducciones, adecuadas a veces para hacer presentir la exactitud y la verdad, pero que no están de acuerdo con la exactitud tan alabada de las ciencias matemáticas. Además, debe señalarse que ellas tienden a atribuir a las formulas algebraicas una extensión ilimitada, en tanto que en la realidad, la mayor parte de estas formulas solo subsisten bajo ciertas condiciones y para determinados valores de las cantidades que encierran. Determinando esas condiciones y esos valores, fijando de una manera precisa el sentido de las notaciones que utilizo, toda vaguedad desaparece. "

Es decir, vuelta al clásico rigor geométrico de los antiguos (ciertas expresiones del párrafo anterior recuerdan el *Método* de Arquímedes), así como imposición de definiciones precisas, relimitación del campo de validez de las formulas, eliminación de toda extensión ilegítima: he ahí el programa trazado por Cauchy *y* cumplido en sus numerosos libros *y* memorias.

Con Cauchy se precisan los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual o casi actual, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos otorgan ahora rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que quedara eliminada, en especial cuando mas tarde sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir: curvas sin tangentes.

Cauchy vuelve a tomar el concepto tradicional de integral, como suma y no como operacion inversa, a la manera de los antiguos y de los matemáticos de comienzos del siglo XVII, pero ahora con sentido critico. También introdujo el rigor en el tratamiento de las series fijando criterios de convergencia y eliminando, algo a pesar suyo, las series divergentes, pues dice: "Me he visto obligado a admitir diversas proposiciones que parecerán algo duras; por ejemplo, que una serie divergente carece de suma. "En el tratamiento de las series, Cauchy había sido precedido por Gauss con su estudio de la serie hipergeométrica en 1811; agreguemos, por lo demás, que a no ser por la costumbre de no hacer conocer el resultado de sus investigaciones, Gauss se habría adelantado también en otros campos del análisis.

En varios capítulos del análisis, la obra de Cauchy, autor muy prolífico, es importante. Baste recordar su teoría de las funciones de variable compleja, donde aparece la integral que lleva su nombre; pero, en definitiva, gracias a él el análisis se encuentra ya en terreno firme, haciéndose sentir de inmediato los progresos: integral de Riemann, continuidad y convergencia uniformes, etc., de ahí que sea justo recordarlo como el iniciador del proceso que pasó del calculo infinitesimal del siglo XVIII al análisis infinitesimal de hoy.

En la exclusión de las series divergentes del análisis, donde iban a reingresar mas tarde por caminos lícitos, Cauchy completó la obra iniciada por Abel, otro de los artífices del nuevo análisis. Para Abel:

"... las series divergentes son, en general, una invención diabólica y es vergonzoso que se pretenda fundar sobre ellas demostración alguna; la parte mas esencial de la matemática carece de base. Es cierto que la mayor parte de los resultados son exactos, pero esto es una cosa verdaderamente extraña....
En el análisis superior, solo unas pocas proposiciones están demostradas de una manera indiscutible. Constantemente se encuentra la deplorable costumbre de deducir lo general de lo particular, y es sin duda muy notable que, con tal manera de proceder, no se llegue con más frecuencia a lo que se denominan paradojas. "

Además de ocuparse de series, de las que estableció el criterio logarítmico de convergencia, Abel se ocupo de integrales (integrales abelianas) y de teoría de funciones (funciones abelianas). En una memoria de fecha 1827, donde Abel hace la simple y a la vez genial observación: "Propongo que se estudien las funciones inversas", hacen su aparición en el análisis las funciones elípticas, invirtiendo las integrales elípticas, muy estudiadas por Adrien Marie Legendre (1752-1833), y de las que son generalizaciones las funciones abelianas.

El sistematizador del estudio de las funciones elípticas, mediante el algoritmo de las series, es otro gran analista de comienzos del siglo XIX: Jacobi, en su tratado de 1829. Con las obras de Abel y de Jacobi acerca de las funciones elípticas se vincula un significativo incidente que pone de relieve la evolución y el cambio que había experimentado el concepto de la matemática, en comparación con el de la ciencia natural. En vista de que al comentar la obra de Jacobi, el matemático y físico matemático Siméon Denis Poisson (1781-1840) había recordado un reproche de Fourier dirigido a Abel y a Jacobi por no ocuparse de cuestiones de fisicamatemática, Jacobi (en carta a Legendre) expresa: "Poisson no debía haber reproducido una desgraciada frase de Fourier, que nos reprocha, a Abel y a mí no ocuparnos del movimiento del calor. Es cierto que Fourier estima que la finalidad principal de la matemática es la utilidad publica y la explicación de los fenómenos naturales, pero un filósofo como el debiera saber que la única finalidad de la ciencia es el honor del espíritu humano y que, en consecuencia, una cuestión de la teoría de números tiene un valor tan grande como una cuestión de los sistemas del mundo."

No deja de ser sintomático que esta valoración y esta proclamación de independencia del análisis y de la matemática con respecto a la ciencia natural sean contemporáneas del advenimiento de las geometrías no euclidianas, que proclamaron igual independencia de la geometría y de la matemática frente al yugo del espacio fisco, de ahí que pueda fecharse hacia 1830 --fecha oficial por otra parte del nacimiento del movimiento romántico-- el grito inicial de autonomía de la matemática, autonomía que constituye a partir de entonces una característica de esta ciencia.

El proceso de la aritmetización del análisis, al que seguirá mas adelante un cabal proceso de aritmetización de la matemática (Klein), culmina a mediados de siglo con la obra de Weierstrass, el "maestro de todos nosotros", como proclamara Charles Hermite (1822-1901) en 1900. Se deben a Weierstrass una nueva teoría de las funciones elípticas, el teorema de la aproximación uniforme de una función cualquiera por polinomios, y la importante teoría de las "funciones analíticas" de variable compleja, con los conceptos de prolongación analítica, trascendentes enteras, factores primarios, etc.

Si a la obra de estos analistas del rigor de la primera mitad del siglo se agregan las teorías, no menos rigurosas, que en la segunda mitad sentaron las bases de la fundamentación del número real y los comienzos del análisis funcional de fines de siglo, se tiene el panorama del "análisis clásico" que abre el camino hacia el análisis actual.

Para terminar este punto señalemos que ese análisis de fines del siglo XIX muestra, comparado con el análisis euleriano del siglo

NIELS HENRIK ABEL
(1802-1829)

KARL WEIERSTRASS
(1815-1897)

anterior, un rasgo común con el de las nuevas geometrías respecto de la geometría euclidiana. Al convertirse tanto el nuevo análisis como las nuevas geometrías en construcciones abstractas y autónomas que abarcan en su orbita, mejoradas, las antiguas concepciones, se pone de manifiesto que tales concepciones, vinculadas con el mundo exterior y atadas a sus aplicaciones geométricas o mecánicas, son también construcciones abstractas; conclusión que no deja de ser una ventaja.

4

LA TEORIA DE GRUPOS, GALOIS

Aunque no es fácil desligar en absoluto la creación intelectual de un hombre de ciencias de su vida pública o privada, es posible que, por su propia índole, tal desvinculación sea mas frecuente en la matemática que en las demás ciencias. Sin embargo, quizás no haya otro ejemplo de influencia, a la vez decisiva y desdichada, de los acontecimientos públicos y privados de una vida sobre la propia actividad creadora, que en el caso de Evariste Galois (1811-1832).

Su actividad científica, de un lustro escaso de vida, se entremezcló con una actividad política de ardiente revolucionario en los turbulentos días del Paris de 1830. A los 16 años, buen conocedor de la matemática de entonces, sufre su primera decepción al fracasar en su intento de ingreso en la Escuela Politécnica. Siguen las decepciones cuando una memoria, presentada a la Academia y puesta en manos de Cauchy, se extravía, y cuando un segundo fracaso le cierra las puertas de la Politécnica.

En 1 829 y 1830 hace conocer sus primeros trabajos sobre fracciones continuas, cuestiones de análisis y teoría de las ecuaciones, y teoría de números, así como un resumen de una segunda memoria presentada a la Academia para optar al gran premio de matemática, el que también se pierde. En 1831, envuelto en los acontecimientos políticos, se le expulsa de la Escuela Normal, donde entonces estudiaba, y con el propósito de dedicarse a la en-s enanza privada, anuncia un curso de algebra superior que abarcaría "una nueva teoría de los números imaginarios, la teoría de las ecuaciones resolubles por radicales, la teoría de números y la teoría de las funciones elípticas tratadas por algebra pura". El curso no tuvo oyentes y Galois ingresa en el ejercito, a la vez que redacta una memoria, la última, hoy llamada "teoría de Galois", que remite a la Academia y que Poisson califica de "incomprensible". Mas tarde es detenido y pasa casi un ano en la cárcel.'Al recobrar la libertad se ve envuelto en una cuestión de honor por una "infame coqueta" y muere en el duelo consiguiente.

En vísperas del duelo, al legar a un amigo en notas apresuradas su testamento científico, le pide que, si su adversario vence, haga conocer sus descubrimientos a Gauss o a Jacobi para que den una opinión "no respecto de la verdad, sino de la importancia de los teoremas. Espero que más tarde alguien encuentre provechoso descifrar todo este lío". Este "lío" *(ce gachis)* es hoy la teoría de grupos.

Sólo en 1846 se conoció gran parte de los escritos de Galois por obra de Joseph Liouville (1809-1882), y completó la publicación de sus escritos Jules Tannery (1848-1910) a comienzos de este siglo (1908). En ellos asoma ya la idea de "cuerpo", que luego desarrollaron Riemann y Richard Dedekind (1831-1916), y que Galois introduce con motivo de los hoy llamados "imaginarios de Galois", concebidos con el objeto de otorgar carácter general al teorema del número de raíces de las congruencias de grado $\underline{n}$ de módulo primo. Es en estos escritos donde aparecen por primera vez las propiedades más importantes de la teoría de grupos (nombre que él acuñó) que convierten a Galois en su cabal fundador. .

Sin duda que la noción de grupo, en especial de grupo de substituciones que constituye el tema central de Galois, estaba ya esbozada en los trabajos de Lagrange y de Alexandre-Theophile Vandermonde (1735-1796) del siglo XVIII, yen los de Gauss, Abel, Ruffini y Cauchy del XIX, implícita en problemas de teoría de las ecuaciones, teoría de números y de transformaciones geométricas, pero es Galois quien muestra una idea clara de la teoría general con las nociones de subgrupo y de isomorfismo.

Aunque la teoría de grupos sigue encontrando aplicaciones (Arthur Cayley (1821-1899), la aplica en 1854 a la teoría de los cuaternios, y William Rowan Hamilton (1805-1865), en 1856, a los poliedros regulares) fue en el *Traits' des substitutions,* de Camille Jordan (1838-1922), publicado en 1870, donde la teoría de Galois pone de relieve su valor como factor unificador de sectores diversos de la matemática, y en la obra de Ernst Steinitz (1871-1928), de 1910, donde entra en su faz moderna.

Dos matemáticos que asistieron a las clases de Jordan: Felix Klein (1849-1925) y Marius Sophus Lie (1842-1899), pusieron de manifiesto ese poder unificador y sistematizador de, la teoría.

Combinando el desarrollo alcanzado por las geometrías no euclidianas y la geometría proyectiva con la teoría de los invariantes

ÉVARISTE GALOIS
(1811-1832)

y la teoría de grupos, Klein expone en su *Programa de Erlangen,* en 1872, mediante grupos y subgrupos, una sistematización y jerarquización de todas las geometrías, concibiendo como objeto de cada geometría el descubrimiento de propiedades invariantes respecto de un determinado grupo de transformaciones y considerando cada geometría como subgeometría de otra a la que se adjunta cierta figura básica, que debe quedar invariante. Mas tarde, en 1884, ofreció un ejemplo de dos grupos isomorfos: el de las rotaciones del icosaedro regular y el de la ecuación de quinto grado.

Mientras Klein estudia grupos discontinuos, Sophus Lie aborda, a partir de 1872, el estudio de los grupos continuos de transformaciones y su clasificación y aplicación a la integración de las ecuaciones diferenciales con derivadas parciales. Sus trabajos y los de sus discípulos aparecieron hacia fines de siglo.

La teoría de grupos culmina hacia 1880 al aparecer la teoría de los grupos abstractos (ya esbozada por Cayley en 1854), que confiere a la teoría iniciada por Galois los caracteres de estructura algebraica. Como tal estructura, y en virtud del isomorfismo, un grupo puede entonces estudiarse ora bajo el aspecto particular de uno de sus modelos o interpretaciones, ora bajo su forma general puramente abstracta como resultado de un proceso de rasgos propios, específicos de la matemática de hoy, que evidencia que la misma abstracción, signo de la matemática de todas las épocas, ha cambiado o evolucionado a través de los tiempos.

Por supuesto que la geometría griega es una ciencia abstracta por cuanto no se refiere a objetos del mundo sensible, sino del mundo de las formas o ideas en el sentido platónico, y por tanto concebidos mediante un proceso de abstracción que parte de los objetos del mundo exterior y que otorga a esa geometría sus típicos rasgos de ciencia visual y táctil y su alusión a los cuerpos visibles, aunque solo lo sean, como diría Platón, a los ojos de la inteligencia.

A partir del siglo XVII el algoritmo algebraico introduce en la matemática una abstracción mas refinada, diríase de segundo grado: las letras y símbolos que ahora inundan los textos de estas disciplinas son abstracciones de entes y operaciones, a su vez abstractos, pero que, en definitiva, aluden a entes concretos: números, figuras u objetos físicos que se incorporan al proceso de abstracción y lo matizan.

En cambio, la abstracción a que aluden los grupos abstractos es de una índole distinta de las anteriores. Es el resultado de un proceso característico de la matemática de hoy y que se manifestó contemporáneamente en otros sectores, proceso que elimina toda referencia a entes concretos, que prescinde por completo de la "naturaleza" de lo que en el interviene, para no dejar sino el esqueleto formal de entes y relaciones abstractos que definen la estructura. En el caso del grupo de Galois ese proceso descarnó el grupo de sustituciones, punto departida del proceso, para convertirlo en un grupo abstracto que logra así su máxima generalización, ya que el grupo de sustituciones o cualquier grupo isomorfo con el, no es sino modelo o interpretación del mismo.

5

LAS NUEVAS ALGEBRAS

En el siglo XIX se rompieron los cánones clásicos del algebra también a través del análisis, con criterio cada vez más abstracto, de los conceptos fundamentales de la aritmética y del algebra ordinarias, lo que dio por resultado la creación de nuevos entes que pusieron de manifiesto el carácter básico de la llamada "ley de composición", noción, según Bourbaki, de las mas primitivas de la matemática.

La historia de la matemática no hace sino comprobar tal carácter. Puede rastrearse en los antiguos sistemas de numeración, de carácter aditivo o multiplicativo, posicional o no, y sobre todo se advierte, ya muy desarrollado, en los textos matemáticos escritos en letra cuneiforme descifrados en nuestro siglo. Esos textos que, en general, pertenecen al periodo babilónico (II milenio a. de J. G.), aunque sin duda registran conocimientos sumerios muy anteriores, permiten hablar con cierto anacronismo pero con fundamento de un "algebra" babilónica, pues los problemas de primero y de Segundo grado, con casos numéricos particulares, que esas tablillas contienen y su solución, revelan una extraordinaria pericia algebraica fundada en el conocimiento, sobre la base de reglas empíricas, de las relaciones entre dos números y su suma, diferencia, producto, cuadrado de la suma y cuadrado de la diferencia. Si se agrega que los textos en carácter es cuneiformes contienen aplicaciones del teorema de Pitágoras y de los "tripletes" pitagóricos, se explica que su desciframiento haya aportado nuevas fuentes de interpretación de la historia de la matemática griega y en especial de la originalidad de esta.

Así, puede admitirse que el abandono por los primeros pitagóricos de la orientación aritmético-algebraica fue una exigencia del espíritu racionalista griego ante el obstáculo insalvable de los "irracionales" que los condujo a la "geometrización" de toda la matemática, al lograr salvar ese obstáculo en el campo de la geometría.

Sin embargo, no dejaron de quedar rastros: es axial sintomático que entre las primeras proposiciones de los *Elementos* de Euclides figuren precisamente demostraciones geométricas de las identidades algebraicas utilizadas por los babilonios, y de ahí que parezca profética la denominación de "álgebra geométrica" dada por el historiador de la matemática Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920) a este tipo de proposiciones hace unos 80 anos, cuando no podía pensarse en la vinculación que hoy parece vislumbrarse de la clásica geometría griega con la doblemente milenaria algebra babilónica.

Por otra parte, la ecuación de segundo grado aparece resuelta en los *Elementos* de Euclides, por supuesto bajo disfraz geométrico, mediante problemas de origen pitagórico y de reminiscencias babilonias, llamados de "aplicación de áreas", cuyos tres tipos: aplicación simple (parábola), aplicación por defecto (elipse) y aplicación por exceso (hipérbola), legaron su nombre a los tres tipos de cónicas.

Agreguemos, por ultimo, que en el clásico escrito de AlKhuwarizmi (s. IX) que da nombre y nacimiento oficial al algebra, la ecuación de segundo grado aparece resuelta a la manera aritmética de los babilonios y comprobada geométricamente al estilo griego.

A partir de los árabes y hasta fines del siglo XVIII, el álgebra no fue más que la teoría de las ecuaciones, cuyos momentos culminantes serán la resolución de las ecuaciones de tercero y de cuarto grado por obra del grupo de matemáticos italianos del siglo XVI, y la introducción de las Tetras y del simbolismo en los siglos XVI y XVII.

En el siglo XVIII el auge del cálculo infinitesimal y los sucesivos fracasos de resolver la ecuación de quinto grado por radicales detuvieron el progreso del álgebra, pero en el siglo XIX, y en especial en la segunda mitad, el álgebra se dirige por distintos derroteros hacia lo que se considera hoy su problema esencial: el estudio de las estructuras algebraicas por sí mismas.

Mientras adquieren gran desarrollo el estudio de las formas y la teoría de los invariantes, y la teoría de grupos se extiende a la teoría de cuerpos y anillos, la creación de sucesivas generalizaciones y extensiones del concepto de número de nacimiento a la noción abstracta de ley de composición, cuya aplicación a los nuevos entes amplia en grado considerable el campo del algebra.

El primero de estos entes es el vector, que si bien era utilizado ya en la composición de fuerzas y de velocidades por los tratadistas de mecánica desde fines del siglo XVII, no tuvo repercusión entonces entre los matemáticos. Es posible, en cambio, que a principios del siglo XIX una especie de calculo geométrico fuera una necesidad "entre los métodos puramente sintéticos, por una parte, especie de lecho de Procusto en el que voluntariamente se someten a la tortura sus adeptos ortodoxos, y los métodos analíticos vinculados a un sistema de coordenadas arbitrariamente infligido al espacio" (Bourbaki). El hecho es que Gauss utiliza implícitamente la suma vectorial en su representación geométrica de los números complejos en el piano, en tanto que August Ferdinand Möbius (1790-1868) expone, en 1827, un “cálculo baricéntrico” con importantes aplicaciones geométricas, pero en el que las coordenadas tienen un sentido aritmético y no geométrico, y entre 1832 y 1837 Giusto Bellavitis (1803-1880) desarrolla, con su método de las "equipolencias", un conjunto de operaciones con cantidades dirigidas, que equivale al calculo vectorial de hoy.

Mientras que por un lado los vectores, y sus sucesores los tensores, con el auxilio de los recursos del análisis matemático, encuentran importantes aplicaciones en diversos campos de la física; por el otro, los vectores contribuyeron a la creación de las nuevas algebras.

En -este sentido cabe señalar las obras de William Rowan Hamilton (1805-1865) y de Grassmann. Hamilton fue un sabio múltiple que descolló en astronomía, física y matemática. Se ocupó de vectores (el nombre es invención suya) y creó un sistema de números complejos de cuatro unidades que llamo "Quaternions" (cuaternios) que satisface todas las propiedades de las operaciones de la aritmética ordinaria, con excepción de la propiedad conmutativa de la multiplicación y, por tanto, es el primer ejemplo de cuerpo-no conmutativo en el campo real, y no solo primero, sino el único también, como lo demostró Georg Frobenius (1849-1917) en 1879 (ya antes, en 1863, Weierstrass había demostrado que el sistema de los números complejos ordinarios era el único cuerpo conmutativo). Los cuaternios aparecen en 1843, aunque el tratado completo sobre el tema: Lectures on Quaternions, de Hamilton, no se publicó hasta diez anos después.

WILLIAM ROWAN HAMILTON
(1805-1865)

También las nuevas algebras, cuyo desarrollo se inicia en el siglo XIX, mantienen durante ese siglo un rasgo común con las geometrías no euclidianas y el nuevo análisis: su contribución a eliminar de la matemática conceptos intuitivos y hábitos mentales aún arraigados hasta en mentalidades matemáticas; así' Möbius pasó al lado de los cuaternios sin verlos, al rechazar los complejos de cuatro unidades por no satisfacer la propiedad conmutativa de la multiplicación.

6

LA LOGICA MATEMATICA

A mediados del siglo XIX el álgebra invade un campo virgen o casi virgen: la lógica. Es indudable que la vinculación de la lógica con la matemática es mas estrecha, o si se quiere mas clara y evidente, que con cualquiera de las otras ciencias. No solo el encadenamiento deductivo se torna mas transparente en matemática, sino que se puede notar en todas las fases de su desarrollo, incluso en los sistemas de numeración y de medida más empíricos. Sin acudir al "algebra babilónica", donde brilla y a la mentalidad matemática, dicho encadenamiento puede advertirse en los problemas egipcios. ¿Cómo, de otro modo, podría explicarse la solución de problemas como este: determinar los cinco términos de una progresión aritmética conociendo su suma y la razón de la suma de los dos primeros a la de los tres últimos?

Si en las culturas prehelénicas el proceso lógico aun queda oculto, entre los griegos de la época clásica ese proceso se evidencia, por modo inexcusable, en el más preclaro de sus descubrimientos, que es la demostración. Que la exigencia lógica --o camino-- prive sobre la misma meta --verdad Así como la gramática nace después de las grandes manifestaciones poéticas de los griegos: poemas homéricos, la tragedia; así la lógica se formaliza por obra de Aristóteles, después que el saber griego se había desplegado en sistemas filosóficos, doctrinas medicas, construcciones históricas y sobre todo en saber matemático reflejado en la labor técnica de los pitagóricos, de un Hipócrates de Quio, de un Eudoxo de Cnido.

Si bien los principios lógicos se vislumbran en la obra de Parménides y, sobre todo, en la "dialéctica" de Zenón de Elea, fundador de la lógica según Aristóteles, es a este a quien se debe la creación de la lógica formal, que se mantendrá estancada e incólume hasta casi los tiempos presentes. En parte, la "autoridad" de Aristóteles mantuvo en la sombra toda posible modificación de esta estructura y en parte también contribuyo a ese estancamiento el carácter que el mismo Aristóteles confirió a su creación considerándola un *Organon,* es decir, un mero instrumento, un útil desprovisto de jerarquía científica por sí mismo.

Mientras las leyes del silogismo aristotélico se mantenían sin mayores adiciones o afinamientos, el razonamiento matemático, cuya nitidez y precisión lo independizaba de aquellas, seguía progresando y produciendo nuevos brotes.

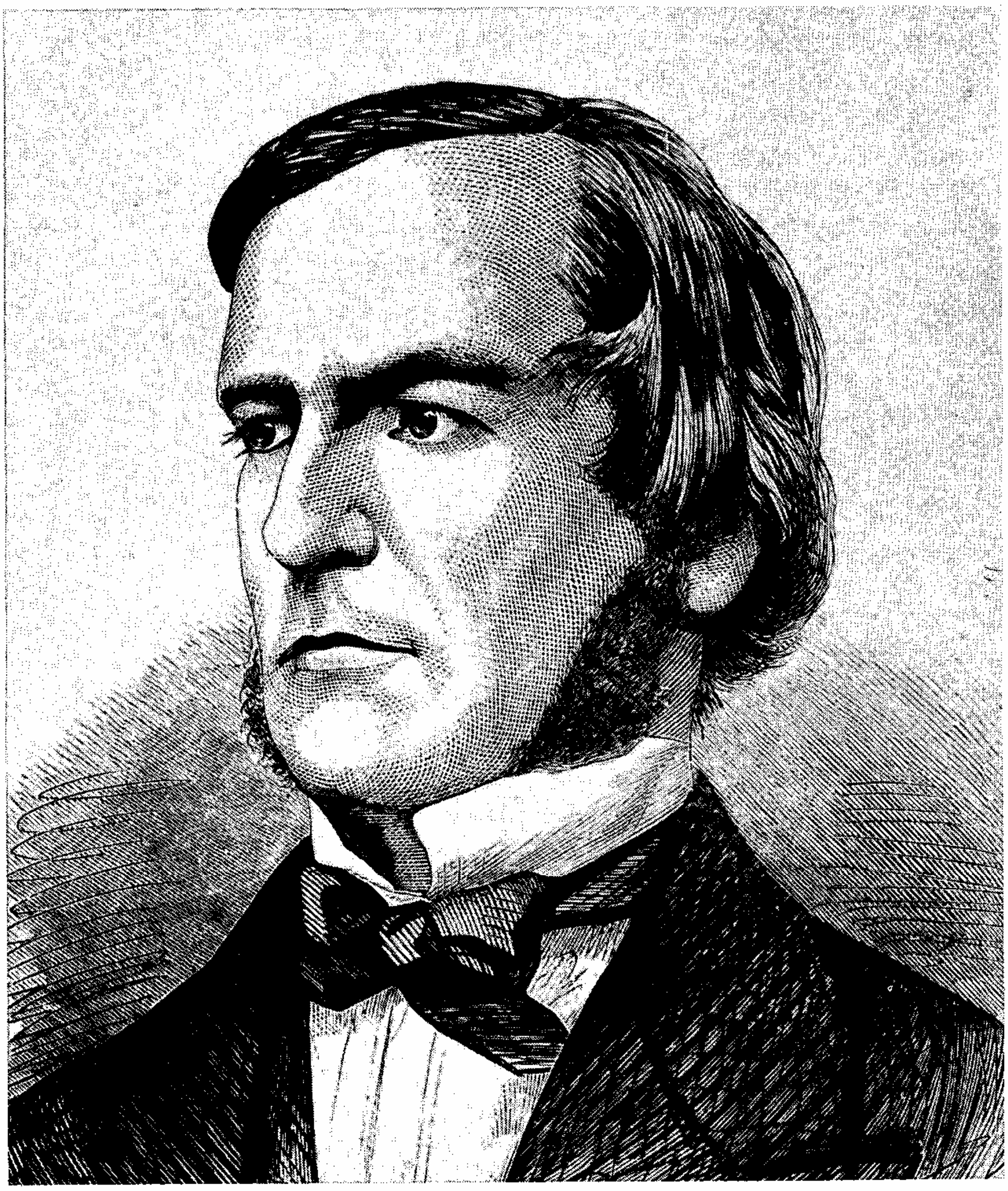
Con el desarrollo del algebra hacia el siglo XVII comenzó a advertirse cierta analogía entre la deducción algebraica y las reglas silogísticas, en vista de que, tanto en un caso como en el otro, letras "vacías" podían llenarse con entes o proposiciones cualesquiera.

Es explicable que tales ideas encuentren una primera expresión concreta en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), a la vez matemático y filósofo, verdadero precursor de la lógica matemática. Persiguiendo una idea que lo acosa desde su juventud --en pos de un "alfabeto de los pensamientos humanos" y de un "idioma universal"-- se propone el proyecto de construir una "característica universal", especie de lenguaje simbólico capaz de expresar, sin ambigüedad, todos los pensamientos humanos, de manera que "al surgir una controversia entre dos filósofos, estos la zanjasen a la manera de los calculistas; bastaría, al efecto, sentarse ante los ábacos, pluma en mano, y como buenos amigos decirse, en mutuo acuerdo: calculemos".

Las ideas de Leibniz, que contienen muchos conceptos de la lógica simbólica de hoy, no tuvieron entonces mayor influencia, pues quedaron inéditas hasta este siglo. Igual destino tuvieron ideas semejantes esbozadas durante el siglo XVIII y comienzos del XIX. Agreguemos que las ideas de Kant, de gran influencia en su tiempo y para quien no era necesaria "ninguna nueva invención en la lógica", han contribuido sin duda al estancamiento de esta disciplina. De paso no deja de ser interesante observar cuan frágil resultó el trípode científico: lógica aristotélica, geometría euclidiana y mecánica newtoniana, en el que Kant apoyó su filosofía.

Las cosas cambian a mediados de siglo cuando, en 1854, George Boole (1815-1864) pública su *The Lags of Thought* que lo convierten en el verdadero fundador de la lógica simbólica. Del contenido y objeto del libro da cuenta este párrafo:

"El objeto del siguiente tratado es investigar las leyes fundamentales de las operaciones de la mente



GEORGE BOOLE
(1815-1864)

en virtud de las cuales se razona; expresarlas en el lenguaje de un calculo, y sobre tal fundamento establecer la ciencia de la lógica y construir su método; hacer de ese método la base de un método general para la aplicación de la teoría matemática de las probabilidades y, finalmente, recoger de los diversos elementos de verdad que surgen en el curso de esta investigación algunas informaciones probables referentes a la naturaleza y constitución de la mente humana... "

Aunque, como puede advertirse ya en el párrafo anterior, la finalidad y el contenido del libro de Boole fueron bastante heterogéneos, el desarrollo de la lógica simbólica que contiene resultó de valor permanente. Aun restándole cierto matiz partidario, la frase muy citada del logicista Bertrand Russell (1872-1970): "la matemática pura fue descubierta por Boole", pone de relieve la importancia del escrito de este, cuya tendencia a la abstracción muestra, por otra parte, la característica de los matemáticos ingleses de la época. De ahí que se advirtiera en ese escrito la influencia de uno de los pioneros de esa tendencia: George Peacock (1791-1858), el miembro mas matemático del grupo de jóvenes que, en 1813, funda en Cambridge la "Analytical Society", con el objeto de promover el progreso del análisis superior en la isla, donde esa rama hacía escasos progresos en comparación con los éxitos continentales, adoptando, por lo pronto, la notación leibniciana en vez de la newtoniana, y abriendo así a los matemáticos ingleses el amplio campo de las investigaciones que se habían realizado y se realizaban en el continente. En 1830, Peacock publicó un tratado de algebra --reeditado en dos volúmenes en 1842-1845-- en el que acentúa el carácter formal y simbólico de las reglas del algebra y por ello se le ha considerado un precursor del llamado "principio de permanencia de las leyes formales", enunciado por el matemático e historiador de la matemática Hermann Hankel (1839-1873) en 1867.

Como el primer escrito de Boole sobre el tema data de 1847, es posible que haya en él cierta influencia de la obra de Peacock. De todos modos el libro de aquel, de 1854, abre nuevos horizontes a la investigación lógica, que se prosigue en dos direcciones: por un lado se hace más independiente de la matemática; y por el otro, en cambio, busca una vinculación cada vez mas estrecha con ella hasta confundirse ambas y culminar en las actuales "algebras de Boole".
La primera dirección culminó en la monumental obra sobre "algebra de la lógica", en cuatro volúmenes, de Ernst Schroder (1841-1902) aparecida entre 1890 y 1905. Cabe mencionar también a Augustus De Morgan (1806-1871), matemático original, según el cual los dos ojos de las ciencias exactas son la lógica y la matemática. Es autor

de una ingeniosa y ya clásica *Colección de paradojas* (póstuma, 1872), y en 1838 introdujo la expresión "inducción matemática "con el sentido corriente de hoy.

En cuanto a la construcción de formalismos lógicos con vistas a su aplicación a los fundamentos de la matemática, se inicia hacia 1880, en forma independiente, por C. S. Peirce, en Estados Unidos, y por Frege, en Alemania.

Charles Sanders Peirce (1839-1914), hijo de Benjamín, fue un filosofo que se cuenta entre los fundadores del pragmatismo norteamericano y un matemático que se ocupó de lógica matemática, perfeccionó la lógica de Boole y definió nuevos conceptos, como los "valores y tablas de verdad". Por su parte, Friedrich Gottlob Frege (1848-1925), en los trabajos que publicó desde 1879 hasta comienzos de este siglo, expuso en forma minuciosa y precisa conceptos cuya importancia se revelara mas tarde, tanto en la lógica como en el análisis de los fundamentos de la matemática, pero que en su tiempo, en parte por el complicado e inusitado simbolismo empleado, no ejercieron mayor influencia y sólo se conocieron en este siglo sobre todo a través de la obra de Russell.

Mientras tanto aparecía la contribución de los "logísticos" italianos, encabezados por Giuseppe Peano (1858-1932), que cristalizó en los "formularios matemáticos" aparecidos a fines de siglo y que se proponen exponer en un lenguaje puramente simbólico, no sólo la lógica matemática, sino también los resultados mas importantes de diversas ramas matemáticas.

Si bien la labor de Peana y de sus colaboradores fue en sus comienzos criticada, mas por exceso de ciertas pretensiones de la doctrina que por el empleo exclusivo de símbolos que daban a la obra un aspecto desusado, el saldo definitivo fue favorable pues buena parte de los símbolos de Peano: los de pertenencia, unión, intersección, etc., se conservan hoy. Por otra parte, su labor contribuyó a robustecer la corriente general que puso cada vez más en evidencia las conexiones de la lógica con la matemática.

Esta corriente desembocó, ya en este siglo, en los *Principia Mathematica,* obra que, entre 1910 *y* 1913, publicó Russell en colaboración con un matemático de mentalidad filosófica: Alfred North Whitehead (1861 -1947). Esta obra es una síntesis en que se combinan armoniosamente los resultados de Frege y de Peano o, como dice Bourbaki, "la precisión de Frege con la comodidad de Peano", y que representa a comienzos de este siglo la expresión mas acabada de la lógica matemática o, mejor, de acuerdo con su orientación, de la matemática como lógica.

7

EL METODO AXIOMATICO, HILBERT

Una consecuencia del análisis lógico de los fundamentos de la matemática fue la crítica y consiguiente actualización del método axiomático. Este método, que Euclides instauro en la geometría: a) denuncia previamente los postulados y nociones comunes de que se parte, sin demostración; y b) deduce por un proceso lógico los teoremas matemáticos a partir de tales postulados y nociones comunes. Si la creación de las geometrías no euclidianas había obligado a revisar los fundamentos de la geometría de Euclides y a poner de manifiesto sus debilidades lógicas, ahora, en el ultimo tercio del siglo XIX, ya no se trataba solo de la geometría, sino de toda la matemática.

En este sentido puede decirse que la revisión se inicia con las *Lecciones de geometría moderna* de Moritz Pasch (1843-1931), profesadas en 1873 y publicadas en 1882, donde por primera vez se presenta un sistema completo de postulados suficiente para exponer rigurosamente la geometría proyectiva, Aunque Pasch confiere aun ciertos rasgos físicos a los entes geométricos insiste en que la construcción axial fundada es independiente de ellos, y no tiene porque apelar a la intuición, y no deja de ser sintomática su advertencia, hoy trivial, pero sin duda útil en su época, de no omitir en sus "razonamientos ni aun los argumentos más insignificantes".

En la dirección axiomática siguen los trabajos de Dedekind, que en 1888 expuso un sistema completo de axiomas en que fundar la aritmética, y los trabajos de Peano de 1889 y 1891. En 1 889 Peano da a conocer un ensayo, del cual solo las notas están escritas en italiano, mientras todas las proposiciones se expresan en forma puramente simbólica, se titula *Los principios de la geometría expuestos Lógicamente;* no obstante, tuvo mayor difusión otro de sus escritos de ese mismo año, con las notas en latín, sobre *Los principios de la aritmética expuestos según un nuevo método,* este trabajo aparece, algo modificado, en su *Formulario* de 1891.

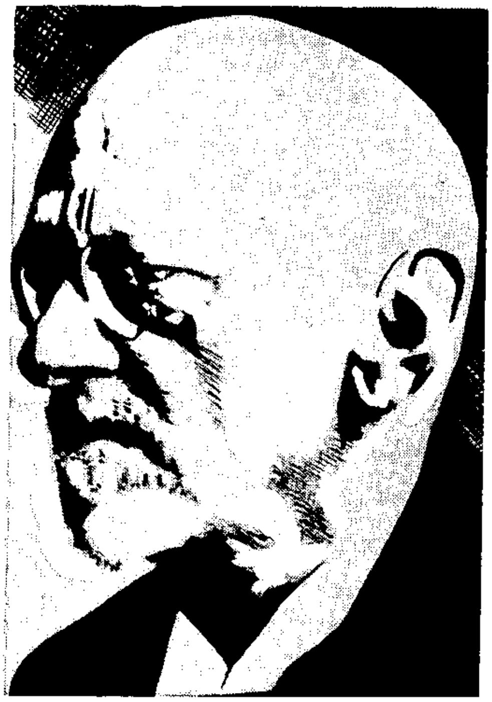
La exposición axiomática de la aritmética de Peano se funda en nueve postulados que definen implícitamente la igualdad y tres conceptos primitivos: cero(o uno), número y sucesivo. El último postulado no es sino, en símbolos de Peano, el principio de inducción completa, que deja así de ser un principio extramatemático o un método de demostración para convertirse en un elemento esencial de la definición de número natural o, mejor, de la cadena abierta más simple con un primer eslabón y tal que a cada eslabón sigue otro.

El principio de inducción completa, ya implícito en Grassmann, fue aplicado por primera vez, y en forma rudimentaria, por Francesco Maurolyco (1494-1575) en la demostración de algunas propiedades de los números poligonales y poliédricos que aparecen en su *Arithmeticorum Zibri duo,* de 1575. Este principio, implícito en algunas demostraciones de Euclides, es considerado por Maurolyco y otros matemáticos posteriores como un principio lógico o, mejor, como un método de demostración por aplicación reiterada e indefinida de un mismo silogismo.

Después de Peano cabe mencionar a uno de sus discípulos: Mario Pieri (1860-1904), que introdujo en 1897 el movimiento como concepto primitivo de la geometría euclidiana y, ya en este siglo, a Edward Vermilye Huntington (1874-1952) que formulo sistemas de postulados para distintas disciplinas matemáticas. Pero el verdadero sistematizador del pensamiento axiomático en general es David Hilbert (1862-1943), cuyos *Fundamentos de la geometría,* de 1899, confieren un sello riguroso al tradicional método euclideo y lo convierten en un método de mayor alcance y fecundo en problemas de toda índole.

Hilbert, que con Poincaré forma quizás la pareja de los últimos matemáticos universales, ha sido uno de los más grandes matemáticos de fines del siglo pasado y comienzos de este y ha tenido una notable influencia en la matemática de ambos siglos. Profesor en su ciudad natal: Koenigsberg, y luego en Gotinga, ha impreso su sello y dejado huella en todas las cuestiones vitales de la matemática, desde el análisis de sus fundamentos y los capítulos mas elevados hasta el tratamiento de problemas particulares.

Es famoso el discurso pronunciado por Hilbert en el Congreso de Paris de 1900 sobre los "problemas de la matemática", en el que mencionó 23 problemas matemáticos que entonces esperaban solución. Gran parte de la matemática del siglo XX ha surgido del estudio de esos problemas, la mayoría de los cuales se han resuelto,



DAVID HILBERT
(1862-1943)

HENRI POINCARÉ
(1854-1912)

si bien, lo que es mas importante, dejaron tras sí otros problemas.

Al referirse a la producción matemática de Hilbert dice

Di eudonné:

"Lo que asombra a primera vista en los trabajos de Hilbert es la belleza pura de su grandiosa arquitectura. No se trata de una impresión de "elegancia" superficial que resulta de cálculos hábilmente conducidos, sino de una satisfacción estética mucho mas profunda que se desprende de la perfecta armonía entre el fin perseguido y los medios puestos en juego para alcanzarlo. Estos últimos son a menudo de una desconcertante simplicidad. Por lo general, no fue un perfeccionamiento mas o menos ingenioso de los métodos de sus antecesores lo que permitió a Hilbert hacer sus grandes descubrimientos, sino, por el contrario, un retorno voluntario al origen del problema tratado; de este modo separaba de la ganga, donde nadie había sabido verlos, los principios que permitían trazar hacia la solución el "camino real" en vano buscado hasta entonces. "

La unidad de la matemática y la importancia de los problemas en la investigación matemática son ideas cardinales del pensamiento de Hilbert.

Así entresacamos entre sus frases: "En mi opinión la matemática es un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada por la conexión de sus partes.... Con la extensión de la matemática, su carácter orgánico no se pierde, sino que se manifiesta con mayor claridad.... Los símbolos aritméticos son diagramas escritos, y las figuras geométricas son formulas gráficas.... En la medida en que una rama de la ciencia ofrece abundancia de problemas está viva; la carencia de problemas presagia la extinción o el cese de un desarrollo independiente.... Quien persigue métodos sin tener en mente un problema definido, investiga en vano.... La convicción de la resolubilidad de un problema matemático cualquiera es un poderoso incentivo para el investigador. Resuena en nosotros una llamada constante: Hay un problema. Busca la solución. La encontraras razonando, pues en matemática no hay *ignorabimus."*

Los *Grundlagen* de Hilbert revelan su originalidad y genialidad. Comienzan con la siguiente "Aclaración. Pensemos tres diferentes clases de objetos. Llamemos a los objetos de la primera clase, puntos,... a los objetos de la segunda, rectas y... a los objetos de la tercera, pianos...". Según una anécdota muy difundida, Hilbert aclaraba esto diciendo que podían sustituirse las palabras:

punto, recta y piano, por mesa, silla y vaso de cerveza, sin que esto alterara en lo mas mínimo la geometría resultante; lo que equivale a subrayar el carácter arbitrario del nombre de los objetos, que se convierten en entes abstractos definidos implícitamente por los axiomas; de ahí la expresión de "definiciones disfrazadas" con que Henri Poincaré (1854-1912) designaba los axiomas. En efecto, sigue Hilbert: "Supongamos que puntos, rectas y pianos estén en ciertas relaciones mutuas que designaremos con las palabras "estar en", "entre", "paralelo", "congruente", "continuo", *cuya* exacta y completa descripción se conseguirá por medio de los axiomas de la geometría." Los axiomas sobre los cuales Hilbert funda la geometría euclidiana son veinte, y están distribuidos en cinco grupos: axiomas de enlace, de orden, de paralelismo, de congruencia y de continuidad.

Los axiomas de enlace definen las relaciones entre puntos, rectas y pianos que dan sentido a las expresiones "estar sobre", "pasar por", etc. Los axiomas de orden cumplen igual finalidad respecto de expresiones como "entre", "ordenamiento", y permiten definir el segmento. Cabe agregar que entre los postulados de Euclides figuran algunos de los axiomas de enlace de Hilbert; en cambio, Euclides no menciona para nada la idea de orden, y adopta el segmento como noción primitiva y el ordenamiento como algo dado empíricamente, lo que le permite soslayar sofismas en que podría incurrir mediante un tratamiento riguroso sin tener en cuenta los axiomas de orden. Estos axiomas, utilizados ya por Pasch, y su exigencia en la construcción geométrica, constituyen uno de los progresos que la crítica moderna puso en evidencia en el análisis de los principios de la geometría.

Por su parte, el axioma de paralelismo, que admite la existencia de una y una Bola recta paralela a otra dada por un punto exterior a la misma, equivale al Quinto postulado de Euclides; mientras que los axiomas de congruencia, cuyos equivalentes son las nociones comunes de Euclides, definen el concepto de congruencia o de movimiento de los segmentos, ángulos (que se definen en forma correlativa a los segmentos) y triángulos.
Por Ultimo, Hilbert adopta como axioma de continuidad una expresión que equivale a la definición de Euclides: "Se dice que las cantidades tienen razón entre sí cuando cualquiera de ellas puede multiplicarse de manera que supere a la otra", enunciado que mas tarde Arquímedes reconocerá con razón como postulado; de aquí que Hilbert denomine su axioma "axioma de Arquímedes".

Después de exponer y aclarar los distintos axiomas, Hilbert recurre en sus *Grundlagen* a una novedad importante al abordar el análisis lógico del conjunto de axiomas, que es, por una parte, establecer la compatibilidad de estos, es decir: que sus consecuencias no se contradicen, y por otra que son independientes, es decir, que un axioma o un grupo de axiomas no es consecuencia de los anteriores.

Para ello Hilbert construye geometrías artificiales cuyos elementos son números o funciones, de tal modo que alas relaciones geométricas definidas por los axiomas correspondan relaciones homologas entre esos números o funciones. Para demostrar que los axiomas de un grupo son compatibles basta demostrar que en la geometría correspondiente no hay contradicción, cosa que se comprueba por cuanto si hubiera contradicción ella aparecería en la aritmética del sistema de números o funciones así construida. Para demostrar la independencia de un axioma determinado respecto de los demás, basta construir también una geometría artificial admitiendo estos y negando aquel. Si esta geometría es compatible queda demostrada la independencia del axioma en cuestión. En este análisis Hilbert comprueba la validez de las geometrías no euclidianas, al demostrar la independencia del axioma de paralelismo, así como de las geometrías no arquimedianas, de las que Giuseppe Veronese (1854-1917) había dado un ejemplo, en 1891, al comprobar igual independencia del axioma de Arquímedes.

Claro es que las consideraciones de Hilbert desplazaron la cuestión de la compatibilidad e independencia de los axiomas de la geometría a un problema semejante, aunque de raíz mas profunda: la compatibilidad de los axiomas de la aritmética, problema que es el segundo en la nomina de los 23 problemas señalados por Hilbert en su discurso de 1900.

Los *Grundlagen* terminan con un interesante "epílogo", en el que Hilbert, después de insistir en la importancia de los problemas mas y recordar la "exigencia de <u>pureza</u> de los métodos demostrativos, elevada a principio por muchos de los matemáticos de nuestro tiempo", termina diciendo: "La investigación geométrica precedente pretende dilucidar en toda su generalidad que axiomas, presupuestos o medios auxiliares son necesarios para establecer una verdad de geometría elemental, dejando a las circunstancias la elección de los métodos demostrativos adaptados al punto de vista que se haya adoptado. "

8

LA TEORIA DE CONJUNTOS CANTOR

La cuestión planteada por los *Grundlagen* de Hilbert acerca de la compatibilidad de los axiomas de la aritmética se debatió en los primeros decenios de este siglo en la llamada "crisis" de los fundamentos de la matemática, surgida a raíz de algunas paradojas que se manifestaron en el seno de la flamante teoría de conjuntos.

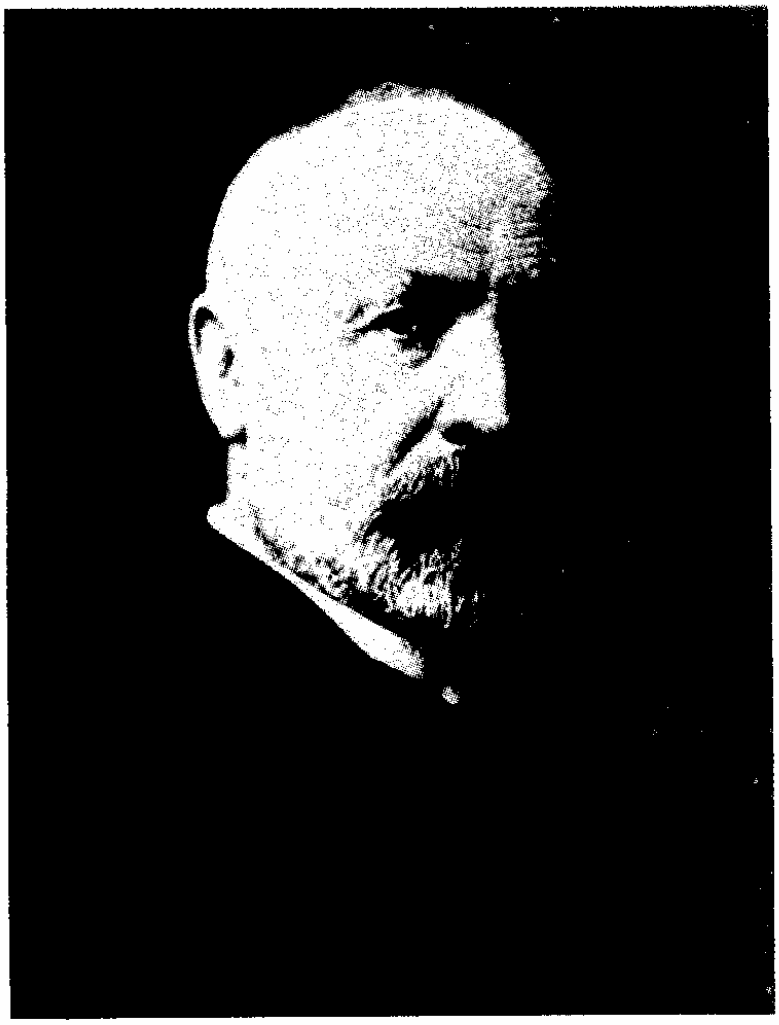
La idea de conjunto ("agrupamiento en un todo de objetos bien definidos, de nuestra intuición o de nuestro pensamiento", tal como lo define Cantor), y aun de conjunto infinito, con sus anomalías y paradojas, no era nueva en matemática. Ya Galileo Galilei (1564-1642), en la "Primera jornada" de sus celebres *Discursos,* de 1638, con motivo de la conocida paradoja denominada "rueda de Aristóteles", trae a colación interesantes cuestiones matemáticas vinculadas con los conjuntos infinitos: la demostración de la coordinabilidad de conjuntos infinitos uno parte de otro (el ejemplo de Galileo es el de los conjuntos de los números naturales y de sus cuadrados), y otra aparente paradoja de los conjuntos infinitos al demostrar la igualdad de una circunferencia y un punto, como consecuencia de una demostración que recuerda de modo sorprendente el *Método* de Arquímedes. Ya citamos, por lo demás, a Bolzano, autor de unas *Paradojas del infinito* (póstuma, 1851), donde asoman, en una atmósfera más filosófica que matemática, algunas de las nuevas concepciones; pero el creador de la "teoría de conjuntos" en el sentido actual es Georg Cantor (1845-1918). Nacido en Rusia, inició por voluntad paterna estudios de ingeniería, aunque pronto pudo seguir su propia vocación matemática; se formó en Berlín y Gotinga y llegó a ser catedrático de la universidad de Halle, en 1869. La primera contribución importante de Cantor a la matemática es una teoría de los números irracionales, que expuso en 1872, ano en que aparecieron teorías semejantes de Weierstrass, de Charles Méray (1835-1911) y de Dedekind; este ultimo dio a conocer su "método de las cortaduras", que venía enseñando desde 1858, en su escrito hoy clásico sobre continuidad y números irracionales.
Son estos estudios acerca del número real, así como los inspirados en Riemann, sobre las series trigonométricas, los que

condujeron a Cantor a la teoría de conjuntos, que desarrolla en una serie de memorias en la década 1874-1884. La oposición que, en especial entre matemáticos influyentes de Alemania, encontró tal teoría, original, audaz y revolucionaria para la época, así como las dificultades que presentaba y los esfuerzos infructuosos realizados por Cantor para demostrar la "hipótesis del continuo" (problema que planteaba la teoría), condujeron tal vez a su autor a una enfermedad nerviosa que lo mantuvo alejado de la ciencia durante unos anos. Hacia 1887, volvió a ocuparse de la teoría y sus últimas publicaciones sobre el tema corresponden al lapso 1895-1897. Cantor terminó sus días en una clínica psiquiátrica de Halle.

Además del progreso técnico que representa y de la importancia de sus conceptos, la teoría de conjuntos trae a primer piano la cuestión del infinito en matemática.

La cuestión venía de lejos; baste pensar que la distinción hoy corriente entre infinito potencial e infinito actual procede de Aristóteles. Aun sin ocuparse expresamente de matemática los escritos de Aristóteles contienen numerosas referencias a esta ciencia, que el define como el aspecto continuo y cuantitativo de las cosas; de ahí que, al apartarla del mundo de la experiencia, reconozca que la lógica, legisladora de esa experiencia, no basta para explicar el mecanismo de la demostración matemática.

A este resultado, sin duda interesante, debe agregarse el que se desprende de las consideraciones aristotélicas acerca de la vinculación de la matemática con el infinito. Aristóteles admite el infinito, ya hacia lo grande, por adición, ya hacia lo pequeño, por división, pero solo en potencia, jamás en acto. Mas este "infinito potencial" actúa de modo distinto según se trate de los números o de las magnitudes. En efecto, siendo limitado el universo de Aristóteles, no pueden existir magnitudes infinitamente grandes, ya que ninguna magnitud puede exceder al tamaño del universo; por otro lado, desconociendo los griegos los números que no fuesen los racionales positivos, no puede haber números infinitamente pequeños ya que tales números tienen límites inferiores, dados por la unidad y las fracciones unitarias. Por tanto, Aristóteles admite, aunque siempre en estado potencial, magnitudes geométricas infinitamente pequeñas, lo que supone la divisibilidad ilimitada de las líneas y de las figuras y números infinitamente grandes, que evidencia la sucesión ilimitada de los números.
Aunque en los tiempos medievales el infinito en la matemática vuelve a asomar, ya a través de la introducción del cero como



GEORG CANTOR
(1845-1918)

símbolo operatorio por los hindúes, ya a través del tratamiento de series convergentes por los matemáticos de la época escolástica, es durante el auge de los métodos infinitesimales (siglos XVII y XVIII) cuando el infinito recobra actividad en una forma siempre imprecisa, ora envuelto en las brumas "metafísicas" que rodeaban a los conceptos básicos del calculo infinitesimal, ora amparado por las deslumbrantes victorias de las aplicaciones de dicho calculo.

La aritmetización del análisis disipa aquellas brumas y elimina toda consideración del infinito actual, para no dejar incólume más que el infinito potencial. No se advirtió entonces que en expresiones al parecer tan inocentes como "los infinitos puntos de un segmento" o "la ecuación de la recta" se ocultaba el diablillo del infinito actual que por obra de Cantor se revela a plena luz.

A la frase de Gauss, representativa de la matemática aritmetizada: "Protesto contra el uso, james permitido en matemática, de magnitudes infinitas como algo completo. El infinito no es sino una manera de decir *(une façon de parler), y su* verdadero significado es el de un límite al cual se acercan indefinidamente ciertas razones cuando otras aumentan sin restricción", responde Cantor: "No obstante la diferencia esencial entre los conceptos de infinito potencial y de infinito actual (siendo el primero una magnitud finita variable que crece mas allá de todo limite finito, y el segundo una magnitud fija, constante, que se mantiene mas allá de todas las magnitudes finitas), es ocurrencia frecuente el tomar el uno por el otro.... En vista de la justificada aversión a tales infinitos actuales ilegítimos y a la influencia de la tendencia moderna epicureo-materialista, se ha extendido en amplios círculos científicos un cierto *horror infiniti,* que encuentra su expresión clásica y su apoyo en la carta de Gauss; sin embargo me parece que el consiguiente rechazo, sin crítica alguna, del legítimo infinito actual no deja de ser una violación de la naturaleza de las cosas, que han de tomarse como ellas son."

en topología y aun en ramas del análisis clásico, quedo firmemente asentada a fines de siglo y recibió consagración oficial en el Congreso de Zurich (1897). Con su gran autoridad, Hilbert contribuyo a difundir las ideas de Cantor, en especial en Alemania.

No hace falta agregar que la noción de conjunto, como una de las nociones básicas de la matemática, se ha incorporado a la enseñanza elemental, constituyendo con sus operaciones un "algebra de conjuntos". En ella desempeñan un papel didáctico eficaz los llamados "diagramas de Venn", que el lógico John Venn (1834-1923) propuso en 1880, modificando diagramas semejantes de que se valió Euler, en 1770, para representar silogismos.

9

LA CUESTION DE LOS FUNDAMENTOS

Mientras la teoría de conjuntos se asentaba y el método axiomático se difundía, el hallazgo de "conjuntos paradójicos" dio base, a comienzos de este siglo, a una polémica acerca de los fundamentos de la matemática, la que se llamo "crisis de los fundamentos" y en la que intervinieron, no solo matemáticos, sino también figuras prominentes de disciplinas limítrofes: lógicos y lingüistas.

Algunas de esas paradojas se deben al use sin las debidas precauciones del concepto "todos", en forma explícita o no, y ciertas venían de lejos, como la del cretense mentiroso. La expresión "yo miento" implica contradicción, pues si digo verdad, miento, y si miento, digo verdad. Este tipo de sofisma, con ropaje variado, ha persistido y se encuentra muy difundido. Así ocurre con una de las cuestiones sometidas al juicio de Sancho Panza, como gobernador de la ínsula de Barataria *(Don Quijote,* Parte II, Cap. LI) que, como curiosidad, resumimos: El dueño de un río había impuesto, como condición, a quien quisiera pasar un puente que lo cruzaba, la siguiente ley: "jurar primero a donde y a que va; y si jurare verdad, déjenle pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra". Ocurrió entonces que un hombre, que sin duda conocía lógica moderna, dijo que no iba a otra cosa que "a morir en aquella horca", con lo cual los encargados del cruce del puente quedaron desconcertados, pues si lo dejaban pasar libremente, el hombre había mentido y debía morir en la horca, pero si era ahorcado había dicho verdad y debía dejársele pasar libremente. Consultado el buen Sancho, que no entiende de sutilezas lógicas, propone una imposible solución salomónica: "que de este hombre aquella parte que juró verdad la dejen pasar, y la que dijo mentira la ahorquen"; mas luego, cediendo a razones no lógicas pero sí humanitarias, resuelve que lo dejen pasar libremente "pues siempre es alabado mas el hacer bien, que mal".

Veamos, por ultimo, un ejemplo de esta paradoja expuesto con el rigor requerido por los tiempos actuales. Es de Karl Menger (n. 1902) y consiste en reunir en un cuadro las tres proposiciones siguientes: "2 + 2 = 5", "4 + 6 = 3", "todas las proposiciones escritas en este cuadro son falsas". El análisis revela fácilmente que la tercera proposiciones contradictoria, pues si se supone que es verdadera, se sigue que es falsa, y si se supone que es falsa, se sigue que es verdadera.

En todas estas paradojas los conceptos lógicos o matemáticos están encubiertos por palabras. No ocurre lo mismo con las que dieron origen a la "crisis": la de Cesare Burali-Forti (1861-1931) que en 1897 observó que el conjunto bien ordenado formado por todos los números ordinales es contradictorio; así como es contradictorio el "conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos" (paradoja de Russell, de 1905).

Las cuestiones que suscitaron estas paradojas desataron la polémica, que culminó hacia 1930, en la que se perfilaron tres tendencias: logicista, formalista e intuicionista.

El logicismo, cuyo adalid fue Russell *y* su Biblia los *Principia Mathematica,* debió su nombre al hecho de pretender que los conceptos básicos de la matemática podían definirse mediante recursos puramente lógicos, con lo cual la matemática perdía su autonomía para convertirse en una parte de la lógica o, en el mejor de los casos, constituía con la lógica una única y misma disciplina.

La solución de los logicistas para eliminar las paradojas fue admitir un llamado "principio del círculo vicioso": Un elemento cuya definición implica la totalidad de los elementos de un conjunto, no puede pertenecer a este conjunto, lo que obligó a desarrollar una "teoría de tipos", escalonando las proposiciones en una serie jerárquica, y a recurrir a un discutible "axioma de reducibilidad".

La polémica acerca de los fundamentos de la matemática no dejó de ser beneficiosa para el logicismo, pues en la discusión que provoco se hicieron notables progresos en su propio campo: la lógica matemática. Por otra parte, esa tesis logró un aliado, en cierto modo vigoroso e importante en su tiempo (nos referimos a los años vecinos del 1930), con la adhesión del denominado "Círculo de Viena", cuyas investigaciones dieron lugar a algunas concepciones nuevas acerca de la ciencia y de la filosofía, así como del papel que en ellas desempeñan la lógica, el lenguaje y la matemática.

La doctrina del "Círculo de Viena", bautizada con el nombre un tanto paradójico de "empirismo lógico" o "positivismo lógico", muestra en sus notas esenciales su interés por la matemática. Dentro de un carácter algo fluido y variable, esas notas se inclinan hacia dos vertientes distintas: por un lado, tendencia antimetafísica así como fuerte empirismo e inclinación hacia la ciencia natural; por el otro, intervención metódica de la lógica y matematización de toda la ciencia.

El grupo tuvo su origen en un seminario dirigido por Moritz Schlick (1882-1936), en 1923, en Viena, en un ambiente propicio para su futura orientación, y tuvo sus dos centros geográficos principales en Viena y en Praga, ciudades en que fue profesor el epistemólogo Ernst Mach (1838-1916) considerado uno de los precursores de la escuela. Cuando, en 1926, se incorpora al grupo Rudolf Carnap (1891- 1970), que aporta el instrumento de la lógica moderna y el análisis científico del lenguaje, el círculo se asienta en terreno firme. En 1929 adopta el nombre de "Círculo de Viena", entre 1930 y 1938 aparece la revista "Erkenntnis", que fue su órgano europeo de difusión, y en 1929 se inician los congresos en que se exponen, discuten y difunden sus concepciones.

Y justo su primer congreso (Praga, 1929) se ocupó en especial de los fundamentos de la matemática, objeto de la polémica entonces en pleno desarrollo. Allí sus voceros más autorizados expusieron los argumentos de las tres tendencias en pugna. El grupo se inclinó hacia la tendencia logicista, pero es de advertir que las concepciones que los empiristas lógicos mantenían acerca de la lógica provenían principalmente de la obra de Ludwig Wittgenstein (1889-1951): *Tractatus logicophilosophicus,* de 1922, que convertía la lógica en una vasta tautología que nada decía acerca del mundo y sólo expresaba la equivalencia entre las proposiciones. Con la posición adoptada por los empiristas lógicos, la matemática, encerrada en las mallas de la lógica, se convierte también en una tautología, interpretación que va mas allá del logicismo mismo, el cual, dentro de cierta atmósfera empírica, no está totalmente desvinculado de la realidad objetiva. Con todo el Círculo de Viena consideró siempre a Russell como uno de sus precursores, y Russell mismo, sin adoptar las posiciones extremas del positivismo lógico, no dejó de declarar que sentía la mayor simpatía por la escuela vienesa.

Volviendo al logicismo, si bien es cierto que con su "teoría de tipos" no ha asomado ninguna nueva paradoja, nada asegura que no aparezca en el futuro. Cabe aquí recordar la observación, tantas veces citada, de Poincaré con motivo de la compatibilidad de un sistema de axiomas: No basta, para preservarlo de los lobos, encerrar el rebaño en el redil; hay que estar seguros además de que no quedó dentro lobo alguno.

Esto nos lleva al centro de las reflexiones que distinguen la otra tendencia que tercio en la cuestión de los fundamentos: el formalismo.

El formalismo, cuyo adalid fue Hilbert, al acentuar el carácter formal de la matemática, que constituye una nota esencial de esta ciencia, fue por ello la tendencia mas tradicional y conservadora, y también la mas afín a los matemáticos de profesión. Puede verse su punto de partida en *los Grundlagen* de Hilbert, que ofrecieron el modelo de una disciplina matemática construida según el método axiomático, método que no sólo era perfectamente adecuado al carácter formal de la matemática, sino que eliminaba de los fundamentos matemáticos la intuición, con sus hábitos mentales y sus moldes tradicionales.

La emergencia de las paradojas implícitas en la teoría de conjuntos pus o en evidencia que tales hábitos mentales afectaban también al proceso lógico mismo; de ahí la necesidad de axiomatizar esa teoría, tarea en que se empeñaron los formalistas. Y así como en los *Grundlagen* los puntos, rectas y planos podían ser objetos cualesquiera, en la teoría axiomática de la teoría de conjuntos no interesa que cosas son los conjuntos ni que son sus relaciones: sólo importa el encadenamiento de tales relaciones prescindiendo del significado concreto que se pueda atribuir tanto a ellas como a los elementos que relacionan.

En definitiva, el lema del formalismo es: "Al principio fue el signo", lo que equivale a concebir la matemática como un variado juego de signos y de símbolos, de carácter formal y sin contenido empírico alguno. Estas "formas vacías" obedecen a una serie de reglas de estructura y de deducción que, en último análisis, descansan en un sistema de axiomas.

Un sistema formal así concebido depende única y exclusivamente de su validez lógica, de manera que el problema central que plantea el formalismo es el de probar la no contradicción del grupo de axiomas básico de cada sistema formal. Tal es la tarea que se impusieron Hilbert y su escuela, creando una disciplina: la "metamatemática", que abarca una "teoría de la demostración". Esta teoría, según Bourbaki, no integra el cuerpo mismo de la matemática, a la cual, como a la lógica, la metamatemática puede proporcionar algunos elementos, sino que es una disciplina autónoma que ha dado ya muestras de su fecundidad, bien mediante conceptos importantes como el de categoricidad de una teoría, bien en el planteo de nuevos problemas como el de "la decisión", y sobre todo mediante uno de sus resultados más notables, el ya clásico teorema de Kurt Godel (n. 1888), de 1931, según el cual no todo es demostrable en un sistema formal. En cuanto al problema central, el de la no contradicción, entiende Bourbaki, lo mismo que Jacques Hadamard (1865-1963) que, en matemática, se trata mas bien de comprobar tal ausencia, en el caso de no demostrarse.

Al hablar del formalismo no pudimos menos que aludir al juego. En efecto, el juego, y en especial el de ajedrez, ha sido la comparación obligada a que ha conducido esta doctrina; pero si como comparación es aceptable, no lo es cuando se torna equivalencia y la matemática, al considerar sin mayor análisis los fundamentos del formalismo, se convierte en un mero juego. En verdad, al traer a primer plano las reglas operatorias y dejar en la sombra toda interpretación concreta de los objetos sometidos a esas reglas, el formalismo apunta en especial hacia la libertad absoluta en la elección de esa interpretación y a la eliminación de todo vinculo de tipo platónico que mantenga atadas las mentalidades matemáticas a determinados "objetos", por ideales que Sean.

Se han esgrimido numerosos argumentos en contra de esta pretendida equivalencia entre la matemática y el juego. Por razones, diríamos profesionales, podríamos agregar que basta comparar la historia de la matemática con la del juego, entendidos ambos como actividades humanas, para desvirtuar tal equivalencia. Por lo demás, el historiador Johan Huizinga (1872-1945), que hizo del juego una manifestación cultural importante en su *Homo ludens,* de 1939, al aludir a la lógica como juego y traer a colación la consabida comparación con el ajedrez, deja la cuestión indecisa. "Quede la cuestión para otros", dice, aunque muestra acertadamente el carácter lúdico de los sofismas y de las polémicas; pero es claro que la matemática, y la ciencia en general, es algo más que sofismas y torneos más o menos caballerescos.

En definitiva, no creemos que la tendencia del hombre hacia el saber, reflejada en la frase del viejo, aunque siempre vivo, Leonardo: *"naturalmente li mini boni desiderano sapere"* ("es natural que los hombres, como tales, desean saber"), pueda confundirse con la tendencia, también natural, del hombre al juego.

El logicismo y el formalismo fueron tendencias conservadoras en el sentido de que trataron de mantener intacto el cuerpo matemático ya construido. Al referirse en especial a la teoría de conjuntos, dirá Hilbert en l 930: "Del paraíso que Cantor creó para nosotros, nada podrá expulsarnos, " No ocurre lo mismo con el intuicionismo que, aun nacido en el seno de la matemática misma, se opone a la matemática clásica en una actitud francamente revolucionaria. Aunque no en esta actitud, pero sí en algunos conceptos, el intuicionismo cuenta entre sus precursores a Leopold Kronecker (1823-1891), decisivo adversario de Cantor, y para quien toda la matemática debía fundarse sobre el número natural, único tipo de número cuya existencia estaba asegurada. Pero mientras que para los intuicionistas del siglo XX tal existencia se funda sobre una "intuición básica" *(Urintuition),* para Kronecker lo era por un acto de fe. Es muy conocida su frase: "El buen Dios creó el número natural, el resto es obra humana".

También Poincaré, por otras razones, es considerado precursor del intuicionismo, aunque es Luitzen E. J. Brouwer (n. 1881) quien le ha impreso su forma radical planteando la cuestión de los fundamentos de la matemática en términos distintos de aquellos en que se fundan las otras tendencias.

El intuicionismo debe su nombre al carácter intuitivo inmediato que asigna al conocimiento matemático, cuya verdad se comprueba mediante una experiencia sui *generis,* pero tal intuición originaria y primigenia no va más allá de la sucesión de los números naturales, de modo que, a partir de ella, todo el edificio matemático debe construirse, dando a este termino el importante sentido técnico que le asigna el intuicionismo. En efecto, para esta escuela la existencia matemática ya no equivale a no contradicción como en el formalismo, sino que significa constructividad.

Además para el intuicionismo la matemática ya no es un ser, algo hecho, sino una "actividad constructiva del espíritu" o "el ingrediente exacto de nuestro pensamiento", frases harto sospechosas para mas de un científico y que muestran, además, una buena dosis de psicología o, como dice Hadamard, hacen intervenir "las propiedades de nuestro cerebro". Por otra parte, las relaciones de la matemática con la lógica se presentan bajo un aspecto totalmente nuevo. Según Brouwer, la lógica clásica es la traducción, en la sintaxis del lenguaje, de la experiencia general sobre los sistemas finitos, de ahí que *a priori* esa lógica deja de ser valida en la matemática que estudia conjuntos infinitos. De este hecho resulta como consecuencia que el principio lógico del tercio excluido deja de ser valido en matemática. Si frente a un conjunto finito de elementos se enuncia una proposición que afirma que estos elementos tienen tal propiedad o no la tienen, esa proposición es verdadera, pues una experiencia constructiva permite examinar uno por uno todos los elementos del conjunto con respecto a dicha propiedad y confirmar el enunciado. Pero frente a un enunciado que se refiere a una propiedad de los elementos de un conjunto infinito, por ejemplo la conjetura que Christian Goldbach (1690-1764) confió a Euler en 1742: "Todo número par es suma de dos números primos o existe un número par que no es suma de dos números primos", la cosa cambia pues, según los intuicionistas, a las dos posibilidades enunciadas en el juicio anterior cabe agregar una tercera: que mientras no se demuestre uno de los dos miembros de ese juicio, y aun suponiendo que no se demuestre que el problema es insoluble, no es lícito afirmar que uno de los dos casos es el verdadero.

En una palabra, la lógica intuicionista no es ya bivalente, como la lógica clásica, sino trivalente, engrosando así el número de lógicas polivalentes, cuyo estudio constituye uno de los aportes de este siglo. Además, el intuicionismo ha ofrecido una nueva solución al problema de las relaciones entre la matemática y la lógica, que completes el cuadro ofrecido por las otras dos concepciones. Ya no es la lógica una disciplina autónoma, como quiere la concepción corriente, ni posee con la matemática una parte en común, como admite el formalismo, ni abarca en su seno la matemática, como quiere el logicismo, sino que, por el contrario, la lógica intuicionista es una parte de la matemática, ya que es la consecuencia proveniente de cristalizar y traducir en reglas fijas, aquella "actividad constructiva del espíritu", que constituye la peculiar experiencia matemática.

Los resultados del intuicionismo fueron desoladores en el sentido que la rigurosa aplicación de su concepción ha invalidado gran parte de la matemática clásica, ya que en esta abundan las proposiciones no constructivas en el sentido intuicionista. De ahí la crítica de que es objeto por parte de los matemáticos que no se resignan a mutilar su ciencia y convertirla en un muñón informe, alegando que toda esa parte de la matemática ya hecha y que el intuicionismo invalida, jamás ha mostrado contradicción alguna. A esto los intuicionistas pueden replicar, y han replicado, diciendo que el hecho de no aparecer la prueba de un delito, no significa que el delito no se haya perpetrado.

Pero en verdad cabe interpretar el resultado de la crítica del intuicionismo, no en el sentido de invalidar parte de la matemática clásica, sino en el de limitar en ella ciertas zonas que son susceptibles de ser estudiadas mediante nuevos recursos que hasta ahora no se habían concebido. Puede agregarse, al respecto, la frase final de Bourbaki, nada intuicionista por cierto, al referirse a esta tendencia: "La escuela intuicionista, cuyo recuerdo sin duda no habrá de subsistir sino a título de curiosidad histórica, mantendrá por lo menos el merito de haber obligado a sus adversarios, vale decir en definitiva a la inmensa mayoría de los matemáticos, a precisar sus posiciones y a adquirir mas claramente conciencia de las razones (para unos de orden lógico, para otros sentimental) de su confianza en la matemática. "

Quizás pueda extenderse esta expresión a todas las tendencias, y reconocer como saludable resultado de la "crisis de los fundamentos" esa toma de conciencia, y ver en esa crisis, que suscitó tal despliegue de nuevos horizontes y perspectivas una prueba mas de la frase de Cantor: "La esencia de la matemática reside en su libertad".

Otro efecto saludable podría reconocérsele al intuicionismo, pues es después de la atenuación y declinación de la polémica acerca de los fundamentos de la matemática que esta adquiere los rasgos actuales: unificación y vinculación a través de las estructuras de temas muy diferentes que en la matemática clásica constituían capítulos separados, y una armonía cada vez mas estrecha entre lógica, algebra y método axiomático.

10

LAS ESTRUCTURAS

En los párrafos anteriores se han expuesto en forma fragmentaria algunos aspectos de la historia de la matemática desde el punto de vista de su estado presente. Aun en esa forma fragmentaria puede discernirse en tales aspectos una especie de hilo conductor que permite interpretar el desarrollo histórico de la matemática concebido como un todo, desde los babilonios hasta nuestros días. Con las naturales desviaciones de todo proceso histórico, en sus líneas generales puede interpretarse ese desarrollo como una marcha hacia una "objetividad" propia de la matemática que, desde el "número, esencia de todas las cosas" de los pitagóricos, conduce a las estructuras de boy.

La cultura griega, en cuyo seno nace la matemática como ciencia, dejo en ella su sello fuertemente impreso, y no será uno de los menores meritos de la labor matemática del siglo XIX el haber preparado el camino para superar la influencia que, a través de su constante enseñanza, ejerció en la civilización occidental la geometría de Euclides.

La cultura occidental heredo una concepción platónica que suponía matematizado el mundo, desde los astros hasta los cuerpos flotantes, desde los sonidos musicales hasta los rayos luminosos, pero cuyas noción es específicamente matemáticas, meras abstracciones del mundo exterior, no iban mas allá del número natural, como cualidad de las cosas, y de los puntos, rectas y planos, como imágenes o sombras de un perenne mundo de las ideas.

Pero en la Edad Media yen el Renacimiento, con el advenimiento del algebra y sus progresos, y sobre todo en la Edad Moderna, con la geometría cartesiana y los métodos infinitesimales, las exigencias de la matemática misma desbordan ese cuadro limitado.

En sus comienzos los nuevos "objetos" matemáticos que surgen se incorporan a dicho cuadro mediante "representaciones": los números reales, mediante los puntos de la recta; los imaginarios, mediante los puntos del piano; los conceptos infinitesimales, mediante vagas nociones de aproximación, cuando no se justifican meramente por el éxito de sus aplicaciones; pero en el siglo XIX, los vinos nuevos rompen los viejos odres.

La geometría deja de ser la esclava del mundo exterior; el análisis se libra de sus aplicaciones, mientras asoman relaciones y afinidades insospechadas: noción de grupo, nuevas algebras, principio de dualidad, pero sobretodo se advierte que, por debajo de la variedad de ramas matemáticas: aritmética, algebra, análisis, geometría, existe un estrato profundo común: multiplicidades, relaciones, procesos lógicos, tipo de demostración, ... y cuando el método axiomático revela su valor de método universal, la esencia de la matemática se presenta "como el estudio de las <u>relaciones</u> entre objetos que, en forma deliberada, no se conocen y solo se describen por <u>algunas</u> de sus propiedades, precisamente aquellas que se adoptan como axiomas básicos de su teoría". (Bourbaki).

Este enunciado, que implica la noción de estructura, da idea de la matemática moderna; basta compararlo con la definición de la matemática de los enciclopedistas, según quienes "tenía por objeto la cantidad", para advertir y valorar la transformación y los progresos de esta ciencia en los últimos dos siglos.

BIBLIOGRAFIA

No es necesario señalar que la bibliografía de la historia de la matemática, aun limitada a las obras generales, es muy extensa; pero, dada la índole de esta monografía, se citarán unas pocas obras de las que están directamente vinculadas con el tema de la misma.

De las obras generales que, sin referirse directamente a la matemática actual, abarcan la historia de la matemática hasta comienzos de este siglo, mencionamos:

Storia delle Matematiche, por Gino Loria, S. T. E. N., Torino, Italia (1929); 2a. ed., Hoepli, Milano, Italia (1950).

History of Mathematics, por Forian Cajori, 2a. ed. rev. , Macmillan, Nueva York, EE. UU. (1919).

Y entre las más vinculadas con el tema:

The Development of Mathematics, por Eric Temple Bell, McGraw, Nueva York, EE. UU. (1940); 2a. ed. ampliada (1945). De la segunda edición hay una versión española, no muy recomendable como traducción: Historia de las Matemáticas, Fondo de Cultura Económica, México (1949).

También de Eric Temple Bell puede verse una colección de biografías de grandes matemáticos, entre ellas de la Mayoría de los matemáticos citados en esta monografía, con excepción de Hilbert: Men of Mathematics, Simon and Schuster, Nueva York, EE. UU. (1937). Existe una versión española: Los Grandes Matemáticos, Losada, Buenos Aires (1948).

Aun más técnico que histórico, el libro fundamental para el tema de la monografía es: Eléments d'Historie des Mathematiques, por Nicolás Bourbaki, Hermann, Paris, Francia (1960), que reúne la mayoría de las "notas históricas" aparecidas en el clásico tratado de ese autor. Existe versión española: Elementos de Historia de las Matemáticas, Alianza editorial, Madrid (1972).

Del libro Historia de la Matemática, por Julio Rey Pastor y José Babini, Espasa-Calpe, Buenos Aires, Argentina (1951), pueden interesar los dos últimos capítulos que contienen la comunicación de Rey Pastor al Congreso de las Ciencias de Lisboa, de 1950; y, en especial, para los profesores de enseñanza secundaria, es recomendable el fascículo 37-38, X, enero-junio 1965, de la revista *La Educación*, editada en Washington, D. C. por la

Unión Panamericana, y dedicado totalmente a la enseñanza de la matemática de hoy.

Asimismo, en la obra colectiva: Les grands Courants de la Pensée mathématique, Cahiers du Sud, Paris, Francia (1948) --existe versión española: Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático, EUDEBA, Buenos Aires, Argentina (1962)--dirigida por François Le Lionnais, varios de sus artículos se refieren al tema de esta monografía. Se citan, en especial, los títulos de la versión española: La Arquitectura de las Matemáticas, por Nicolás Bourbaki; Un Centenario: Sophus Lie, por Elie Cartan; David Hilbert (1826-1943), por Jean Dieudonné; La Síntesis Lógica-Resultados e Investigaciones, por Marcel Boll y Jacques Reinhart; y otros.

También en la reciente Histoire générale des Sciences, dirigida por René Taton y, en especial, en los dos volúmenes que se ocupan de La Science contemporaine, Presses Universitaires, Paris, Francia (1961, 1964), todos los artículos relativos a la matemática de los siglos XIX y XX tienen interés para el lector de esta monografía. Además, puede encontrarse en esta obra una extensa y muy completa bibliografía de la historia de la matemática.

Por Ultimo, para los lectores interesados en la historia de la matemática señalamos que, en virtud de resoluciones adoptadas en el XIII Congreso Internacional de Historia de la Ciencia (Moscú, 1971), se creó la Comisión de Historia de la Matemática de la División Historia de la Ciencia de la Unión Internacional de Historia y Filosofía de la Ciencia que, a partir de 1974, edita el periódico "Historia Matemática". La sede de la Comisión es el Departamento de Matemática de la Universidad de Toronto (Canadá), y su presidente es el profesor Kenneth O. May.

INDICE DE NOMBRES

(Los números indican los capítulos donde se hacen mención)

COLECCION DE MONOGRAFIAS CIENTIFICAS

Publicadas

Serie de matemática

N° 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas de los Estados Unidos de América.
N° 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
N° 3. Estructuras Algebraicas I, por Enzo R. Gentile.
N° 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
N° 5. Algebra Lineal, por Orlando Villamayor.
N° 6. Algebra Linear e Geometría Euclidiana, por Alexandre Augusto Martins Rodrigues.
N° 7. El Concepto de Número, por Cesar A. Trejo.
N° 8. Funciones de Variable Compleja, por José I. Nieto.
N° 9. Introducción a la Topología General, por Juan Horváth.
N° 10. Funções Reais, por Djairo G. de Figueiredo.
N° 11. Probabilidad e Inferencia Estadística, por Luis A. Santaló.
N° 12. Estructuras Algebraicas II (Algebra Lineal), por Enzo R. Gentile.
N° 13. La Revolución en las Matemáticas Escolares (Segundo Fase), por Howard F. Fehr, John Camp y Howard Kellogg.
N° 14. Estructuras Algebraicas III (Grupos Finitos), por Horacio O'Brien.

Serie de física

Nº 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
Nº 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi y Sayd Codina.
N° 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.
N° 4. Física de Partículas, por Igor Saavedra.
N° 5. Experimento, Razonamiento y Creación en Física, por Félix Cernuschi.
N° 6. Semiconductores, por George Bemski.
N° 7. Aceleradores de Partículas, por Fernando Alba Andrade.
N° 8. Física Cuántica, por Onofre Rojo y H. McIntosh.
N° 9. La Radiación Cósmica, por Gastón R. Mejía y Carlos Aguirre.

Serie de química

N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw y Walter Colli.
N° 3. Macromoléculas, por Alejandro Paladini y M. Burachik.
N° 4. Mecanismo de las Reacciones Orgánicas, por Jorge A. Brieux.
N° 5. Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez Lara.
N° 6. Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.
N° 7. Fotoquímica de Gases, por Ralf-Dieter Penzhorn.
N° 8. Introducción a la Geoquímica, por Félix González-Bonorino.
N° 9. Resonancia Magnética Nuclear de Hidrógeno, por Pedro Joseph-Nathan.
N° 10. Cromatografía Liquida de Alta Presión, por Harold M. McNair y Benjamín Esquivel H.
N° 11. Actividad Óptica, Dispersión Rotatoria Óptica y Dicroísmo Circular en Química Orgánica, por Pierre Crabbe.
N° 12. Espectroscopia Infrarroja, por Jesús Morcillo Rubio.
N° 13. Polarografía, por Alejandro J. Arvia y Jorge A. Bolzan.

Serie de biología

N° 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.
N° 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.
N° 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
N° 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.
N° 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.
N° 6. Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.
N° 7. Principios Generales de Microbiología, por Norberto J. Palleroni.
N° 8. Los Virus, por Enriqueta Pizarro-Suárez y Gamba.
N° 9. Introducción a la Ecología del Bentos Marino, por Manuel Vegas Vélez.
N° 10. Biosíntesis de Proteínas y el Código Genético, por Jorge E. Allende.
N° 11. Fundamentos de Inmunología e Inmunoquímica, por Félix Córdoba Alva y Sergio Estrada-Parra.
N° 12. Bacteriófagos, por Romilio Espejo.
N° 13. Biogeografía de América Latina, por Angel L. Cabrera y Abraham Willink.

En preparación

Serie de matemática

Estructuras Algebraicas IV (Teoría de Cuerpos), por Darío J. Picco.
Estructuras Algebraicas V (Estructura de Algebras), por Artibano Micali.
Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial, por Leopoldo Nachbin.

Serie de física

Astrofísica, por Carlos Jaschek y Mercedes C. Jaschek.
Introdução Cristalografia, por Ivonne Mascarenhas.
Ondas, por Enrique Gaviola y Oscar Bressan.
El Láser, por Mario Garavaglia.
Cálculo de Errores, Aplicación y Teoría, por Wolfgang Meckbach.
Oceanografía Física, por Luis E. Herrera.

Serie de química

Productos Naturales Vegetales, por Venancio Deulofeu y colaboradores.
Estereoquímica Orgánica, por Juan A. Garbarino.
Cromatografía en Papel y en Capa Delgada, por Xorge A. Domínguez.
Momento Polar, por Pedro Lehman.
Fotometría de Llama por Emisión, por Juan Ramírez Muñoz.
Fotometría de Llama por Absorción Atómica, por Juan Ramírez Muñoz.
Cromatografía de Gases, por Harold M. McNair y Benjamín Esquivel H.
Introdução à Espectrometria de Massa das Substâncias Orgânicas, por Otto R. Gottlieb.
Los Esteroides, por Josef E. Herz.
Termoquímica Moderna, por Jaime Cases.
Modernos Aspectos de la Corrosión, por T. Markovic y E. G. León López.
Paramagnetismo Electrónico, por Juan A. McMillan.

Serie de biología

Relación Huésped-Parasito, por Manuel Rodríguez Leiva.
Procesos Microbianos Aerobios de Importancia Industrial, por Carlos Casas-Campillo.
Micología, por Margarita Silva-Hutner, William G. Merz y Luiz R. Travassos.

Microbiología de Suelos, por Luis Longeri Spada.
Ecología Fisiológica, por Ernesto Medina.

Nota: Las personas interesadas en adquirir estas obras deben dirigirse a la Unidad de Ventas y Circulación, Organización de los Estados Americanos, Washington, D. C.", 20006 o a las Oficinas de la Secretaría General de la OEA en el país respectivo.