

Funciones aleatorias estacionarias

§ 5.1. Definición y propiedades principales de las funciones aleatorias estacionarias

Generalmente se llaman estacionarios a tales procesos y objetos cuyas características determinadas no dependen del tiempo de observación, es decir, no cambian al decalar arbitrariamente el tiempo (son invariantes con respecto a cualesquiera decalajes del tiempo). De acuerdo con lo dicho, se denomina *estacionaria* a una función aleatoria $X(t)$ si las determinadas características probabilísticas de la función aleatoria $X(t + \Delta)$, cualquiera que sea Δ , coinciden idénticamente con las características correspondientes de la $X(t)$.

Es evidente que la esperanza matemática y la dispersión de la función aleatoria estacionaria son constantes y su función correlativa depende solamente de la diferencia de los argumentos $t - t'$. En efecto, según la definición general de la estacionaridad, la esperanza matemática y la función correlativa de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ satisfacen las condiciones

$$m_x(t) \equiv m_x(t + \Delta), \quad (5.1.1)$$

$$K_x(t, t') \equiv K_x(t + \Delta, t' + \Delta) \quad (5.1.2)$$

cualquiera que sea Δ . Poniendo en (5.1.1) $\Delta = -t$, obtendremos

$$m_x(t) \equiv m_x(0) = \text{const.} \quad (5.1.3)$$

Poniendo en (5.1.2) $\Delta = -t'$, obtendremos

$$K_x(t, t') \equiv K_x(t - t', 0). \quad (5.1.4)$$

La dispersión de la función aleatoria $X(t)$ es igual al valor de su función correlativa cuando $t' = t$. Por eso, de (5.1.4) se deduce que

$$D_x(t) \equiv K_x(t, t) \equiv K_x(0, 0) = D_x(0) = \text{const.} \quad (5.1.5)$$

Designando la función de una variable $t - t'$ en el segundo miembro de la igualdad (5.1.4) por $k_x(t - t')$, podemos escribir

$$K_x(t, t') = k_x(t - t') = k_x(\tau), \quad \tau = t - t'. \quad (5.1.6)$$

Ahora bien, si la función aleatoria $X(t)$ es estacionaria, entonces, dondequiera que elijamos un intervalo τ de longitud dada en el eje de la variable independiente t , los valores de la función aleato-

ria $X(t)$ tienen en los extremos de este intervalo un mismo momento de correlación $k_x(\tau)$.

Para todos los problemas prácticos en los que se trata sólo con momentos de los dos primeros órdenes (esperanzas matemáticas y funciones correlativas), basta la constancia de la esperanza matemática y la dependencia de la función de correlación sólo de la diferencia de los argumentos para considerar estacionaria a una función aleatoria. Por eso, las funciones aleatorias cuyas esperanzas matemáticas son constantes y las funciones correlativas dependen sólo de la diferencia de los argumentos se llaman *estacionarias en el sentido amplio*. En aquellos casos en que se trata de otras características de la función aleatoria, la estacionaridad en el amplio sentido no es suficiente. Es necesario exigir que todas las características de la función aleatoria que nos interesan sean invariantes con respecto a los decalajes arbitrarios a lo largo del eje de la variable independiente para que se pueda considerar estacionaria dicha magnitud. Así pues, en los problemas prácticos tenemos que encontrarnos con diferente «grado de estacionaridad» de las funciones aleatorias en dependencia de cuáles son las características probabilísticas que nos interesan. Las funciones aleatorias pueden ser estacionarias «en mayor o menor grado». *La estacionaridad en el sentido amplio* representa el tipo más simple de estacionaridad. La exigencia de estacionaridad en el sentido amplio impone a una función aleatoria las mínimas limitaciones. Otro caso extremo representa la estacionaridad completa o *la estacionaridad en el sentido estricto* cuando todas las características probabilísticas de la función aleatoria, sin exclusión ninguna, son invariantes con respecto a los decalajes arbitrarios por el eje de la variable independiente. La función aleatoria $X(t)$ se denomina *estacionaria en el sentido estricto*, si todas las leyes de distribución de todos los órdenes posibles de la función aleatoria $X(t + \Delta)$, cualquiera que sea Δ , coinciden idénticamente con las correspondientes leyes de distribución de la función aleatoria $X(t)$.

A continuación, al hablar de las funciones aleatorias estacionarias, siempre tendremos en cuenta sólo las funciones aleatorias estacionarias en el sentido amplio. Por eso, para abreviar, llamaremos estacionarias a tales funciones aleatorias sin señalar que la estacionaridad se entiende siempre en el sentido amplio.

Según la definición dada, la función aleatoria con esperanza matemática variable es no estacionaria incluso si la función correlativa de la misma depende sólo de la diferencia de los argumentos. Sin embargo, tal no estacionaridad es, evidentemente, no esencial, puesto que la función aleatoria centrada $X^0(t) = X(t) - m_x(t)$ es estacionaria siempre que la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ dependa sólo de la diferencia de los argumentos.

Como la función correlativa de cualquier función aleatoria es simétrica, es decir, no cambia de valor al permutar los valores de los argumentos, entonces la función correlativa de una función aleatoria estacionaria satisface la condición

$$k_x(t' - t) = k_x(t - t')$$

o bien

$$k_x(-\tau) = k_x(\tau). \quad (5.1.7)$$

Así pues, la función correlativa de una función aleatoria estacionaria es función par de la diferencia de los argumentos.

La desigualdad (4.3.2) a que satisface la función correlativa de cualquier función aleatoria toma, en caso de una función aleatoria estacionaria $X(t)$, la forma

$$|k_x(\tau)| \leq k_x(0) = D_x. \quad (5.1.8)$$

Así pues, la función correlativa de una función aleatoria estacionaria, cualquiera que sea τ , no puede ser, en magnitud absoluta, mayor que su valor correspondiente al origen de coordenadas.

Ejemplo 5.1.1. En los ejemplos 4.2.3, 4.2.6 y 4.2.7 dados en el capítulo anterior nos encontramos con la función correlativa, dependiente sólo de la diferencia de los argumentos, de la forma

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}, \quad \tau = t - t'.$$

La función aleatoria que tiene la esperanza matemática constante y tal función correlativa es estacionaria (en el sentido amplio).

Ejemplo 5.1.2. La función aleatoria examinada en el ejemplo 4.2.1 es estacionaria solamente en el caso cuando las dispersiones de las magnitudes aleatorias U y Z son iguales. En el caso general de diferentes dispersiones de las magnitudes aleatorias U y Z esta función aleatoria no es estacionaria. Ahora bien, la oscilación armónica de cierta frecuencia, con amplitud y fase aleatorias, representa en el caso general una función aleatoria no estacionaria y sólo en el caso particular de ser iguales las dispersiones de los coeficientes aleatorios adjuntos al seno y al coseno, es una función aleatoria estacionaria.

Ejemplo 5.1.3. La función aleatoria representada en el ejemplo 4.2.3 es estacionaria cualquiera que sea la densidad de probabilidad de la frecuencia aleatoria de oscilaciones $f(\omega)$ puesto que su esperanza matemática es idénticamente igual a cero, mientras que la función correlativa, determinada por la fórmula (4.2.21), depende sólo de la diferencia de los argumentos.

Ejemplo 5.1.4. Si

$$m_x(t) = a + bt, \quad K_x(t, t') = D e^{-\alpha|t-t'|},$$

entonces la función aleatoria $X(t)$ es no estacionaria. No obstante, esta no estacionaridad no es esencial, puesto que la correspondiente función aleatoria centrada $X^0(t)$ es estacionaria.

En las aplicaciones tenemos que encontrarnos frecuentemente con la función correlativa exponencial

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}. \quad (5.1.9)$$

Otro tipo bastante frecuente de función correlativa de un proceso aleatorio estacionario es la función de la forma

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha |\tau|} \cos \omega_0 \tau \quad (5.1.10)$$

o una función más general de la forma

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha |\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \gamma \operatorname{sen} \omega_0 |\tau|). \quad (5.1.11)$$

En la fig. 5.1.1 se muestra el gráfico de una función correlativa exponencial (5.1.9). En la fig. 5.1.2 se representa el gráfico de la función correlativa exponencial de coseno (5.1.10). Vemos que

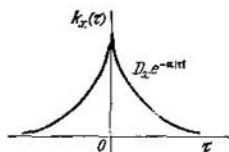


Fig. 5.1.1.

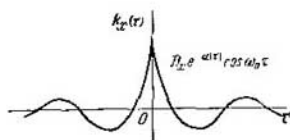


Fig. 5.1.2.

ambas funciones tienen en el origen de coordenadas un punto angular en el que la derivada de la función correlativa tiene discontinuidad de primer género. Para la aproximación de las funciones correlativas

con la derivada continua, se puede aplicar la expresión (5.1.11), eligiendo en ésta el coeficiente γ de modo que la derivada de dicha función correlativa sea igual a cero cuando $\tau = 0$ (el lector puede por sí mismo comprobar que esto se alcanza cuando $\gamma = \alpha/\omega_0$). En la fig. 5.1.3 se muestra el gráfico de tal función correlativa.

Observemos que la función que tiene

la forma de (5.1.11) puede ser correlativa sólo en aquel caso cuando $|\gamma| \leq \alpha/\omega_0$ puesto que para $|\gamma| > \alpha/\omega_0$ la condición (5.1.8) no se satisface.

En la continuación veremos que cualquier función correlativa de la función aleatoria estacionaria puede ser aproximada, con un grado cualquiera de precisión, por la combinación lineal de las funciones de la forma (5.1.9), (5.1.10) y (5.1.11).

Las fórmulas generales dadas en el § 4.6 para las esperanzas matemáticas y las funciones correlativas de las derivadas de una función aleatoria son aplicables también para las funciones aleatorias estacionarias. Valiéndonos de las fórmulas (4.6.2) y (4.6.3), hallamos la esperanza matemática y la función correlativa de la primera deri-

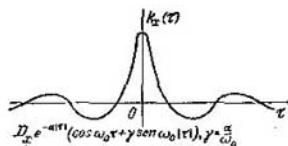


Fig. 5.1.3.

vada $Y_1(t) = X'(t)$ de la función aleatoria estacionaria $X(t)$:

$$m_{y_1}(t) = 0, \quad K_{y_1}(t, t') = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'} = -k_x''(\tau).$$

De aquí se ve que la derivada de una función aleatoria estacionaria también es estacionaria. De un modo análogo hallamos por las fórmulas (4.6.6) y (4.6.7) la esperanza matemática y la función correlativa de la derivada del orden p de la función aleatoria estacionaria $X(t)$:

$$m_{y_p} = 0, \quad K_{y_p}(t, t') = \frac{\partial^{2p} K_x(t, t')}{\partial t^p \partial t'^p} = (-1)^p k_x^{(2p)}(\tau).$$

Ahora bien, todas las derivadas de una función aleatoria estacionaria son funciones aleatorias estacionarias con esperanzas matemáticas iguales a cero; en este caso, las funciones correlativas de las derivadas se determinan por la fórmula

$$k_{y_p}(\tau) = (-1)^p k_x^{(2p)}(\tau) \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (5.1.12)$$

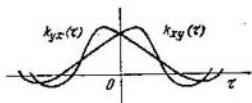


Fig. 5.1.4.

Dos funciones aleatorias del mismo argumento $X(t)$, $Y(t)$ se llaman *estacionariamente ligadas*, si su función correlativa recíproca es función de la diferencia de los argumentos:

$$K_{xy}(t, t') = k_{xy}(\tau) \quad \tau = t - t'. \quad (5.1.13)$$

De la propiedad (4.4.3) de una función correlativa recíproca se deduce que dos funciones correlativas recíprocas de dos funciones aleatorias estacionariamente ligadas $X(t)$ y $Y(t)$, tomadas en diferentes órdenes, están enlazadas por la correlación

$$k_{xy}(\tau) = k_{yx}(-\tau). \quad (5.1.14)$$

Gráficamente esto significa que la curva $k_{yx}(\tau)$ es la reflexión especular de la curva $k_{xy}(\tau)$ con respecto al eje de ordenadas (fig. 5.1.4).

La desigualdad (4.4.5) para las funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$ estacionarias y estacionariamente ligadas toma la forma

$$|k_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{k_x(0) k_y(0)} = \sqrt{D_x D_y}. \quad (5.1.15)$$

Las fórmulas (4.2.10) y (4.4.6) que determinan las funciones correlativas normadas toman, para las funciones aleatorias estacionarias y estacionariamente ligadas, respectivamente la forma

$$r_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{k_x(0)}, \quad (5.1.16)$$

$$r_{xy}(\tau) = \frac{k_{xy}(\tau)}{\sqrt{k_x(0) k_y(0)}}. \quad (5.1.17)$$

Ejemplo 5.1.5. Examinemos las funciones aleatorias

$$X(t) = Z \cos \omega_0 t + U \sin \omega_0 t,$$

$$Y(t) = -Z \sin \omega_0 t + U \cos \omega_0 t,$$

donde Z y U son magnitudes aleatorias no correlacionadas con esperanzas matemáticas iguales a cero y dispersiones iguales a D . Es evidente que las funciones correlativas de estas funciones aleatorias se expresan por la fórmula

$$k_x(\tau) = k_y(\tau) = D \cos \omega_0 \tau,$$

que se deduce lo mismo que en el ejemplo 4.2.1. La función correlativa recíproca de las funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$, en virtud de (3.9.8), se determina por la fórmula

$K_{xy}(t, t') = -D \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t' + D \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t' = D \sin \omega_0(t - t')$. Así pues, las funciones aleatorias $X(t)$ y $Y(t)$ son estacionariamente ligadas.

Ejemplo 5.1.6. Examinemos ahora las funciones aleatorias

$$X(t) = Z \cos \omega_0 t + U \sin \omega_0 t, \quad Y(t) = Z \cos \omega_0 t + V \sin \omega_0 t$$

donde Z , U , V son magnitudes aleatorias no correlacionadas con esperanzas matemáticas iguales a cero y las mismas dispersiones iguales a D . En virtud de los resultados del ejemplo 4.2.1, ambas funciones aleatorias son estacionarias puesto que

$$K_x(t, t') = K_y(t, t') = D \cos \omega_0(t - t').$$

Sin embargo, éstas no son ligadas estacionariamente debido a que su función correlativa recíproca

$$K_{xy}(t, t') = M[X(t)Y(t')] = D \cos \omega t \cos \omega t'$$

no es función de la diferencia $t - t'$.

Aplicando la fórmula (4.6.8), se puede determinar las funciones correlativas recíprocas de las derivadas de diferentes órdenes de una función aleatoria estacionaria $X(t)$:

$$K_{y_p y_q}(t, t') = \frac{\partial^{p+q} K_x(t, t')}{\partial t^p \partial t'^q} = (-1)^q k_x^{(p+q)}(\tau).$$

Así pues, las derivadas de una función aleatoria estacionaria son funciones aleatorias estacionarias y estacionariamente ligadas y sus funciones correlativas recíprocas se determinan por la fórmula

$$K_{y_p y_q}(\tau) = (-1)^q k_x^{(p+q)}(\tau) \quad (p, q = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.1.18)$$

En particular, la función correlativa recíproca de una función aleatoria estacionaria $X(t)$ y de su primera derivada se determina por la fórmula

$$k_{xy_1}(\tau) = -k'_x(\tau). \quad (5.1.19)$$

Si la función correlativa $k_x(\tau)$ de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ tiene continua la primera derivada, entonces $k'_x(0) = 0$ ya que, según (5.1.8), $k_x(\tau)$ tiene el máximo cuando $\tau = 0$. Si la primera derivada de la función correlativa es discontinua en el punto $\tau = 0$ como, por ejemplo, en los casos (5.1.9) y (5.1.10), entonces, debido a la paridad de la función correlativa (5.1.7), su derivada

izquierda en el punto $\tau = 0$ es igual en valor absoluto y contraria en signo a la derivada derecha. Como resultado, en este caso también se puede considerar que $k'_x(0) = 0$. De este modo, para cualquier función aleatoria estacionaria

$$k_{xy_1}(0) = -k'_x(0) = 0. \quad (5.1.20)$$

Esto quiere decir que cualquier función aleatoria estacionaria y el valor de su primera derivada en el mismo punto no están correlacionados.

Si la función aleatoria estacionaria está repartida normalmente, su valor, cualquiera que sea el valor del argumento, y el de su primera derivada, para el mismo valor del argumento, son independientes. Claro está, que de lo dicho no se puede deducir de ningún modo que la función aleatoria estacionaria y su primera derivada están, en general, no correlacionadas. Como la derivada de la función correlativa siempre es distinta del cero idéntico, la magnitud aleatoria estacionaria y su primera derivada siempre están correlacionadas*.

§ 5.2. Estructura de una función aleatoria estacionaria

Examinemos todas las funciones aleatorias que se pueden componer de las sinusoides de diferentes frecuencias con amplitudes y fases aleatorias. Tales funciones aleatorias se expresan por la fórmula

$$X(t) = m_x + \sum_{v=1}^n (U_v \operatorname{sen} \omega_v t + Z_v \operatorname{cos} \omega_v t), \quad (5.2.1)$$

donde $\omega_1, \dots, \omega_n$ son las frecuencias elegidas arbitrariamente, m_x es la esperanza matemática constante y $U_1, \dots, U_n, Z_1, \dots, Z_n$ son las magnitudes aleatorias cuyas esperanzas matemáticas son iguales a cero. Vamos a limitarnos al caso en que las magnitudes aleatorias $U_1, \dots, U_n, Z_1, \dots, Z_n$ no están correlacionadas y tienen por parejas dispersiones iguales $D[U_v] = D[Z_v] = D_v$. En este caso tienen lugar las igualdades

$$\left. \begin{aligned} M[U_v] &= M[Z_v] = 0, & D[U_v] &= D[Z_v] = D_v, \\ M[U_v U_\mu] &= M[Z_v Z_\mu] = 0 & \text{si } \mu \neq v, \\ M[U_v Z_\mu] &= 0 & \text{para cualesquiera } v, \mu. \end{aligned} \right\} (5.2.2)$$

La función aleatoria $X^0(t) = X(t) - m_x$ determinada por la fórmula (5.2.1) representa en este caso la suma de las funciones

*) Como excepción se puede citar solamente un caso absolutamente no interesante para los fines prácticos referente a la magnitud aleatoria estacionaria todas las realizaciones de la cual son constantes. Tal función aleatoria representa una magnitud aleatoria corriente y de hecho no es una función aleatoria.

aleatorias no correlacionadas de la forma

$$X_\nu(t) = U_\nu \operatorname{sen} \omega_\nu t + Z_\nu \operatorname{cos} \omega_\nu t \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad (5.2.3)$$

Por consiguiente, conforme a los resultados obtenidos en el § 4.5, la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ es igual a la suma de las funciones aleatorias correlativas $X_\nu(t)$. Para calcular la función correlativa de la función aleatoria $X_\nu(t)$, sustituyamos en (5.2.3) t por t' :

$$X_\nu(t') = U_\nu \operatorname{sen} \omega_\nu t' + Z_\nu \operatorname{cos} \omega_\nu t'. \quad (5.2.4)$$

Entonces, la función correlativa de la función aleatoria $X_\nu(t)$ representará el momento de correlación de dos funciones lineales (5.2.3) y (5.2.4) de las magnitudes aleatorias no correlacionadas U_ν y Z_ν para cuyo cálculo se puede aplicar la fórmula (3.9.8). Como resultado obtendremos

$$\begin{aligned} K_{x_\nu}(t, t') &= D_\nu \operatorname{sen} \omega_\nu t \operatorname{sen} \omega_\nu t' + D_\nu \operatorname{cos} \omega_\nu t \operatorname{cos} \omega_\nu t' = \\ &= D_\nu \operatorname{cos} \omega_\nu(t - t'). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Esta fórmula muestra que todas las funciones aleatorias $X_\nu(t)$ son estacionarias. Sumando las expresiones (5.2.5) correspondientes a todos los valores ν de 1 hasta n , hallaremos la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ que también dependerá solamente de la diferencia de los argumentos $\tau = t - t'$. Por lo tanto, la función aleatoria $X(t)$ determinada por la fórmula (5.2.1) es estacionaria y su función correlativa se expresa por la fórmula

$$k_x(\tau) = \sum_{\nu=1}^n D_\nu \operatorname{cos} \omega_\nu \tau. \quad (5.2.6)$$

Este resultado es válido para cualquiera n incluso para $n = \infty$. Así pues, todas las funciones aleatorias que se pueden componer de los sinusoides no correlacionadas de diferentes frecuencias, con magnitudes y fases aleatorias, son funciones aleatorias estacionarias siempre que se cumplan las condiciones (5.2.2)*. El conjunto de frecuencias $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ representa el espectro de frecuencias de la función aleatoria examinada.

Hasta ahora no hemos impuesto ningunas restricciones referentes a la frecuencia ω_ν en la expresión (5.2.1). Estas últimas podrían ser completamente arbitrarias. Ahora examinemos un caso particular concerniente al conjunto infinito de frecuencias equidistantes

$$\omega_\nu = \frac{\pi \nu}{T} \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad \Delta\omega = \omega_{\nu+1} - \omega_\nu = \frac{\pi}{T}. \quad (5.2.7)$$

* Dejamos al lector que por sí mismo se cerciore de que si las condiciones (5.2.2) no se cumplen, la función aleatoria $X(t)$ determinada por la fórmula (5.2.1) no puede ser estacionaria.

donde T es un número positivo arbitrario. En este caso la función correlativa, determinada por la fórmula (5.2.6), será una función periódica con período $2T$ y la fórmula (5.2.6) determinará su descomposición en la serie de Fourier. Los coeficientes de esta serie se determinan por la fórmula conocida en la teoría de series de Fourier

$$D_v = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} k_x(\tau) \cos \omega_v \tau \, d\tau \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Pero sabemos que la función correlativa de una función aleatoria estacionaria es una función par. Por consiguiente, en la fórmula obtenida la función subintegral es par y la fórmula puede ser escrita en la forma

$$D_v = \frac{2}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_v \tau \, d\tau \quad (v = 1, 2, \dots). \quad (5.2.8)$$

De la fórmula (5.2.6) se deriva que para $n = \infty$ la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ se determina por la fórmula

$$D_x = k_x(0) = \sum_{v=1}^{\infty} D_v. \quad (5.2.9)$$

De aquí se deduce que si deseamos obtener una función aleatoria estacionaria con dispersión finita, debemos escoger tales magnitudes aleatorias U_v y Z_v que la serie (5.2.9) compuesta de las dispersiones sea convergente.

Todo lo expuesto es aplicable a cualquier intervalo $\Delta\omega$ entre las frecuencias vecinas en la fórmula (5.2.1) o, lo que es lo mismo, a cualquier valor de T en la fórmula (5.2.7). Por eso todos los resultados obtenidos pueden hacerse extensivos también a las sumas de sumandos infinitesimales. Para pasar a este caso, ponemos que *)

$$U_v = U_T(\omega_v) \Delta\omega, \quad Z_v = Z_T(\omega_v) \Delta\omega \quad (v = 1, 2, \dots). \quad (5.2.10)$$

Entonces la fórmula (5.2.1), para $n = \infty$, tomará la forma

$$X(t) = m_x + \sum_{v=1}^{\infty} [U_T(\omega_v) \sin \omega_v t + Z_T(\omega_v) \cos \omega_v t] \Delta\omega. \quad (5.2.11)$$

Luego ponemos $D_v = s_x^T(\omega_v) \Delta\omega$, donde

$$s_x^T(\omega_v) = \frac{U_v}{\Delta\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_v \tau \, d\tau \quad (v = 1, 2, \dots) \quad (5.2.12)$$

*) Al disminuir $\Delta\omega$, el número de sumandos en (5.2.1) en cualquier intervalo dado de frecuencias (ω' , ω'') crece inversamente proporcional a $\Delta\omega$. Para que en este caso la componente de la función aleatoria, que cae en este intervalo de frecuencias, no aumente infinitamente, es necesario que cada sumando en (5.2.1) sea una magnitud infinitamente pequeña de orden $\Delta\omega$. Por eso conviene separar el multiplicador $\Delta\omega$ de U_v y Z_v en forma explícita.

Entonces la fórmula (5.2.6) tomará la forma

$$k_x(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} s_x^T(\omega_\nu) \cos \omega_\nu \tau \Delta\omega. \quad (5.2.13)$$

La fórmula (5.2.9) para la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ tomará la forma

$$D_x = k_x(0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} s_x^T(\omega_\nu) \Delta\omega. \quad (5.2.14)$$

En las fórmulas (5.2.11), (5.2.13) y (5.2.14) se muestra con evidencia que si queremos obtener una función aleatoria estacionaria con dispersión finita, entonces, aumentando el número de sumandos en la fórmula (5.2.11), debemos disminuir proporcionalmente estos sumandos. Con otras palabras, aumentando el número de frecuencias en el intervalo dado, debemos disminuir proporcionalmente las dispersiones de las sinusoides separadas para que la suma de las dispersiones de todas las sinusoides en el intervalo dado de frecuencias quede finita.

Las magnitudes $U_T(\omega_\nu)$ y $Z_T(\omega_\nu)$ en la fórmula (5.2.11) se pueden considerar como los valores de las funciones aleatorias del argumento discreto que toma solamente los valores $\omega_1, \omega_2, \dots$. Análogamente la magnitud $s_x^T(\omega_\nu)$, que se determina por la fórmula (5.2.12), se puede considerar como función del argumento discreto que toma los valores $\omega_1, \omega_2, \dots$. En virtud de las fórmulas (5.2.10) y (5.2.2), las funciones aleatorias $U_T(\omega_\nu)$ y $Z_T(\omega_\nu)$ no están correlacionadas y, además, los valores de cada una de ellas, al tomar el argumento diferentes valores, no están correlacionados:

$$\left. \begin{aligned} M[U_T(\omega_\nu) Z_T(\omega_\mu)] &= 0 \quad \text{para todos los valores de} \\ &\qquad\qquad\qquad \omega_\nu, \omega_\mu, \\ M[U_T(\omega_\nu) U_T(\omega_\mu)] &= M[Z_T(\omega_\nu) Z_T(\omega_\mu)] = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad \text{para } \omega_\mu \neq \omega_\nu. \end{aligned} \right\} (5.2.15)$$

Para hallar las dispersiones de las funciones aleatorias $U_T(\omega_\nu)$ y $Z_T(\omega_\nu)$, observemos que en virtud de las fórmulas (5.2.10) y (5.2.6) las fórmulas (5.2.2) para las dispersiones de las magnitudes aleatorias U_ν y Z_ν se pueden escribir en la forma

$$D[U_T(\omega_\nu) \Delta\omega] = D[Z_T(\omega_\nu) \Delta\omega] = s_x^T(\omega_\nu) \Delta\omega \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (5.2.16)$$

Pero en virtud de la fórmula (3.9.1)

$$\begin{aligned} D[U_T(\omega_\nu) \Delta\omega] &= D[U_T(\omega_\nu)] (\Delta\omega)^2, \\ D[Z_T(\omega_\nu) \Delta\omega] &= D[Z_T(\omega_\nu)] (\Delta\omega)^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (5.2.16) y efectuando las reducciones, obtendremos

$$D[U_T(\omega_v)] = D[Z_T(\omega_v)] = \frac{s_x^T(\omega_v)}{\Delta\omega} \quad (v = 1, 2, \dots) \quad (5.2.17)$$

Para el ulterior estudio de las propiedades de las funciones aleatorias $U_T(\omega_v)$ y $Z_T(\omega_v)$ observemos que en virtud de (5.2.15) y (5.2.17)

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{\infty} M[U_T(\omega_v)U_T(\omega_\mu)]\Delta\omega &= M[U_T^2(\omega_v)]\Delta\omega = \\ &= D[U_T(\omega_v)]\Delta\omega = s_x^T(\omega_v) \quad (v = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Pero

$$M[U_T(\omega_v)U_T(\omega_\mu)] = K_{U_T}(\omega_v, \omega_\mu) \quad (v, \mu = 1, 2, \dots) \quad (5.2.19)$$

representa la función correlativa de la función aleatoria $U_T(\omega_v)$. Por lo tanto, la fórmula (5.2.18) se puede escribir en la forma

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} K_{U_T}(\omega_v, \omega_\mu)\Delta\omega = s_x^T(\omega_v) \quad (v = 1, 2, \dots). \quad (5.2.20)$$

La misma fórmula tiene lugar para la función correlativa de la función aleatoria $Z_T(\omega_v)$.

Ahora tenemos todo lo necesario para pasar a examinar el caso referente a la suma de sinusoides con amplitudes aleatorias infinitesimales de todas las frecuencias posibles repartidas continuamente en la parte positiva del eje numérico. Sustituyamos en la fórmula (5.2.11) las magnitudes aleatorias $U_v = U_T(\omega_v)\Delta\omega$, $Z_v = Z_T(\omega_v)\Delta\omega$ por las magnitudes aleatorias infinitesimales $U(\omega)d\omega$, $Z(\omega)d\omega$. Sustituyamos correspondientemente la suma por la integral. De este modo determinaremos la función aleatoria estacionaria de la forma

$$X(t) = m_x + \int_0^{\infty} [U(\omega)\sin\omega t + Z(\omega)\cos\omega t] d\omega. \quad (5.2.21)$$

En virtud de la última fórmula (5.2.7) la sustitución de la magnitud $\Delta\omega$ por la infinitesimal $d\omega$ corresponde al paso a la magnitud infinitamente grande T . Por eso la función $s_x^T(\omega)$ determinada por la fórmula (5.2.12) se sustituirá por la función

$$S_{ix}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \quad (5.2.22)$$

Con ello, las dispersiones de las magnitudes aleatorias infinitesimales $U(\omega)d\omega$ y $Z(\omega)d\omega$, en virtud de la fórmula (5.2.17), serán iguales a $s_{ix}(\omega)d\omega$.

Sustituyendo en la fórmula (5.2.13) las dispersiones $s_x^T(\omega_v) \Delta\omega$ de las magnitudes aleatorias $U_T(\omega_v) \Delta\omega$, $Z_T(\omega_v) \Delta\omega$ por las dispersiones infinitesimales $s_{1x}(\omega) d\omega$ de las magnitudes aleatorias $U(\omega) d\omega$, $Z(\omega) d\omega$, obtendremos la fórmula siguiente para la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ que se determina por la fórmula (5.2.21):

$$k_x(\tau) = \int_0^{\infty} s_{1x}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (5.2.23)$$

La sustitución análoga en la fórmula (5.2.14) da la siguiente expresión de la dispersión de la función aleatoria $X(t)$:

$$D_x = k_x(0) = \int_0^{\infty} s_{1x}(\omega) d\omega. \quad (5.2.24)$$

Esta fórmula se obtiene también de (5.2.23) cuando $\tau = 0$.

Si en vez de todas las frecuencias posibles tomamos solamente todas las frecuencias del intervalo dado (ω_1, ω_2) , obtendremos la función aleatoria estacionaria

$$X_{\omega_1, \omega_2}(t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} [U(\omega) \operatorname{sen} \omega t + Z(\omega) \operatorname{cos} \omega t] d\omega, \quad (5.2.25)$$

cuya dispersión se determinará por la fórmula

$$D[X_{\omega_1, \omega_2}(t)] = \int_{\omega_1}^{\omega_2} s_{1x}(\omega) d\omega. \quad (5.2.26)$$

Si en la fórmula (5.2.21) se divide todo el intervalo de frecuencias $(0, \infty)$ en subintervalos, la función aleatoria $X(t)$ se expresará como la suma de funciones aleatorias no correlacionadas de la forma (5.2.25). Como era de esperar, la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ se expresará como la suma de dispersiones de los sumandos iguales a las integrales de la forma (5.2.26) extendidas a los subintervalos correspondientes de frecuencias.

De la fórmula (5.2.24) y de las observaciones anteriores se deduce que la función $s_{1x}(\omega)$ caracteriza la distribución de la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ por las frecuencias. En virtud de la fórmula (5.2.16) la magnitud $D_v = s_x^T(\omega_v) \Delta\omega$ representa la dispersión de un armónico de la frecuencia ω_v que forma parte de la función aleatoria examinada de la forma (5.2.11). Por eso la magnitud $s_{1x}(\omega) d\omega$ es la dispersión infinitesimal de un armónico de la frecuencia dada ω que forma parte de la función aleatoria (5.2.21). Si separamos ahora de la función aleatoria $X(t)$ el sumando correspondiente a un inter-

valo pequeño de frecuencias (ω , $\omega + \Delta\omega$), la dispersión de este sumando se determinará por la fórmula (5.2.26) cuando $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$:

$$D[X_{\omega, \omega+\Delta\omega}(t)] = \int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} s_{1x}(\omega) d\omega.$$

Suponiendo que la función $s_{1x}(\omega)$ es continua en el punto ω y aplicando el teorema del valor medio, obtendremos

$$D[X_{\omega, \omega+\Delta\omega}(t)] = s_{1x}(\omega') \Delta\omega,$$

donde ω' es cierto valor de la frecuencia comprendido entre ω y $\omega + \Delta\omega$. Por consiguiente, al pasar al límite para $\Delta\omega \rightarrow 0$ la magnitud ω' tiende a ω y obtendremos que

$$s_{1x}(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{D[X_{\omega, \omega+\Delta\omega}(t)]}{\Delta\omega}.$$

De aquí está claro que la función $s_{1x}(\omega)$ caracteriza la densidad con que las dispersiones de armónicos separados de la función aleatoria (5.2.21) van repartidas por el espectro de frecuencias.

En virtud de las propiedades estudiadas de la función $s_{1x}(\omega)$ esta función se llama *densidad espectral* de la función aleatoria estacionaria $X(t)$. La integral de la densidad espectral

$$S_{1x}(\omega) = \int_0^{\omega} s_{1x}(\mu) d\mu \quad (5.2.27)$$

se denomina *función espectral* de la función aleatoria estacionaria $X(t)$. Es evidente que la densidad espectral es la derivada de la función espectral

$$s_{1x}(\omega) = S'_{1x}(\omega). \quad (5.2.28)$$

Sustituyendo en la fórmula (5.2.27) la expresión (5.2.22) de la densidad espectral, cambiando el orden de integración y cumpliendo la integración con respecto a μ , obtendremos la siguiente expresión de la función espectral de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ a través de su función correlativa:

$$S_{1x}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \frac{\text{sen } \omega\tau}{\tau} d\tau. \quad (5.2.29)$$

Comparando la fórmula (5.2.27) con la (5.2.26), vemos que la función espectral representa la dispersión sumaria de los armónicos de todas las frecuencias de 0 a ω que forman parte de la función aleatoria $X(t)$.

La fórmula (5.2.21) expresa la función aleatoria estacionaria $X(t)$ del tipo examinado a través de otras dos funciones aleatorias

$U(\omega)$ y $Z(\omega)$ cuyo argumento es la frecuencia ω . Estudiemos las propiedades de estas funciones aleatorias partiendo de las propiedades ya estudiadas de las funciones aleatorias $U_T(\omega_j)$ y $Z_T(\omega_j)$. De (5.2.15) está claro que las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ no están correlacionadas. Además, de (5.2.15) se ve que los valores de cada una de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ para cualesquiera valores, tan próximos como se quiera pero diferentes, del argumento ω están no correlacionados. Las dispersiones de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$, en virtud de la fórmula (5.2.17), son infinitas. Ahora bien,

$$K_u(\omega, \omega') = M\{U(\omega)U(\omega')\} = 0 \text{ si } \omega' \neq \omega, \quad K_u(\omega, \omega) = D[U(\omega)] = \infty. \quad (5.2.30)$$

Las igualdades análogas son válidas para la función correlativa de la función aleatoria $Z(\omega)$. Por fin, la fórmula (5.2.20), al pasar al espectro continuo de frecuencias, toma la forma

$$\int_0^{\infty} K_u(\omega, \omega') d\omega' = s_{1x}(\omega). \quad (5.2.31)$$

De las igualdades (5.2.30) y (5.2.31) se ve que la función correlativa de la función aleatoria $U(\omega)$, que se examina como función ω' para cualquier valor fijo de ω , representa una función delta impulsiva con el coeficiente $s_{1x}(\omega)$. Tal deducción es válida también con respecto a la función correlativa de la función aleatoria $Z(\omega)$. Así pues, las funciones correlativas de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ se determinan por la fórmula

$$K_u(\omega, \omega') = K_z(\omega, \omega') = s_{1x}(\omega) \delta(\omega' - \omega) \quad (5.2.32)$$

A primera vista parece que las funciones correlativas de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$, determinadas por la fórmula (5.2.32), no satisfacen la condición de simetría, obligatoria para cualquier función correlativa. Sin embargo, esto solamente parece. En efecto, como la función delta es igual a cero para cualquier $\omega' \neq \omega$, no importa absolutamente a qué sea igual el multiplicador adjunto a la función delta cuando $\omega' \neq \omega$. Lo que importa es que para $\omega' = \omega$ éste sea igual a $s_{1x}(\omega)$. Por eso la fórmula (5.2.32) se puede escribir en la forma

$$K_u(\omega, \omega') = K_z(\omega, \omega') = \sqrt{s_{1x}(\omega) s_{1x}(\omega')} \delta(\omega' - \omega). \quad (5.2.33)$$

Para cualquier $\omega' \neq \omega$ la última expresión de esta fórmula es igual a cero, lo mismo que en la fórmula (5.2.32). Cuando $\omega' = \omega$, el multiplicador adjunto a la función delta en la fórmula (5.2.33) lo mismo que en la fórmula (5.2.32), es igual a $s_{1x}(\omega)$.

Vemos que las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ de la frecuencia ω disponen de una serie de propiedades particulares. Los valores de

cada una de ellas para cualesquiera, tan próximos como se quiera; valores del argumento ω , ω' no están correlacionados y sus dispersiones son infinitas. Esto quiere decir que las realizaciones de estas funciones aleatorias se comportan desordenadamente y pueden cambiar tan fuertemente como se quiera al pasar de un valor del argumento a otro, aunque éste sea muy próximo al primero. Estas funciones aleatorias no son estacionarias, puesto que sus funciones correlativas, según muestra la fórmula (5.2.33), dependen no solamente de la diferencia de los argumentos, sino también de cada uno de los argumentos tomados por separado. No obstante, a pesar de estas particularidades, las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ son, en el caso general, considerablemente más simples que la función aleatoria estacionaria $X(t)$ que se expresa por medio de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ por la fórmula (5.2.21). Esto explica la gran importancia práctica de las descomposiciones espectrales de las funciones aleatorias estacionarias de la forma (5.2.21).

Hasta ahora hemos supuesto que las magnitudes aleatorias $U(\omega)d\omega$, $Z(\omega)d\omega$ de la fórmula (5.2.21) tienen dispersiones infinitesimales $s_{1x}(\omega)d\omega$, es decir, que el espectro de frecuencias es continuo. Sin embargo, es fácil ver que las fórmulas (5.2.21) y (5.2.23) abarcan también el caso anteriormente examinado del espectro discreto de frecuencias. En efecto, poniendo en (5.2.21) y (5.2.23)

$$U(\omega) = \sum_{\nu=1}^n U_{\nu} \delta(\omega - \omega_{\nu}), \quad Z(\omega) = \sum_{\nu=1}^n Z_{\nu} \delta(\omega - \omega_{\nu}), \quad (5.2.34)$$

$$s_{1x}(\omega) = \sum_{\nu=1}^n D_{\nu} \delta(\omega - \omega_{\nu}), \quad (5.2.35)$$

donde $U_1, \dots, U_n, Z_1, \dots, Z_n$ son magnitudes aleatorias no correlacionadas, siendo $D[U_{\nu}] = D[Z_{\nu}] = D_{\nu}$, reduciremos la fórmula (5.2.21) a la forma (5.2.4) y la fórmula (5.2.23) a la forma (5.2.6). Es fácil ver que la fórmula (5.2.22), que expresa la densidad espectral a través de la función correlativa, es válida también en este caso. En efecto, sustituyendo en la fórmula (5.2.22) la expresión (5.2.6) de la función correlativa, obtendremos

$$\begin{aligned} s_{1x}(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{\nu=1}^n D_{\nu} \cos \omega_{\nu} \tau \cos \omega \tau \, d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^n D_{\nu} \left\{ \int_0^{\infty} \cos(\omega - \omega_{\nu}) \tau \, d\tau + \int_0^{\infty} \cos(\omega + \omega_{\nu}) \tau \, d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda \tau \, d\tau = \delta(\lambda).$$

{(Véase la fórmula (2.2.24))}. Por lo tanto,

$$s_{ix}(\omega) = \sum_{v=1}^n D_v [\delta(\omega - \omega_v) + \delta(\omega + \omega_v)].$$

Pero, como $\omega > 0$, $\omega_v > 0$, entonces $\omega + \omega_v$, cualquiera que sea el valor positivo de ω , no se convierte en cero y, por consiguiente, $\delta(\omega + \omega_v) = 0$ ($v = 1, \dots, n$) y obtenemos la fórmula (5.2.35) lo que demuestra la afirmación enunciada. Así pues, las fórmulas (5.2.22) y (5.2.23) son válidas también en el caso de un espectro discreto.

En el caso general, cuando las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ representan las sumas de las funciones aleatorias $U_1(\omega)$ y $Z_1(\omega)$ del tipo anteriormente examinado y de las combinaciones lineales de las funciones delta con coeficientes aleatorios no correlacionados, la fórmula (5.2.21) determina la función aleatoria estacionaria con un espectro mixto, que es un espectro continuo con frecuencias aisladas, repartidas en él, a las cuales corresponden armónicos aislados con dispersiones finitas. La densidad espectral de tal función aleatoria contiene, en forma de sumando, una combinación lineal de funciones delta correspondientes a todas las frecuencias aisladas.

Así, hemos estudiado una clase determinada de funciones aleatorias estacionarias que tienen una estructura definida, es decir, todas las funciones aleatorias estacionarias que constan de oscilaciones armónicas de diferentes frecuencias con amplitudes y fases aleatorias. Todas las funciones aleatorias de este tipo se expresan por la fórmula (5.2.21) y para ellas son válidas las correlaciones (5.2.22) y (5.2.23) entre la función correlativa y la densidad espectral. Cabe preguntar: ¿existen o no otras funciones aleatorias estacionarias, no representables por la descomposición espectral (5.2.21), para las cuales las fórmulas (5.2.22) y (5.2.23) no son válidas? Resulta que no. Cualquier función aleatoria estacionaria es representable por la descomposición espectral (5.2.21). Para toda función aleatoria estacionaria que se puede encontrar en los problemas prácticos existe la densidad espectral (que puede contener como sumando una combinación lineal de funciones delta), determinable por la fórmula (5.2.22), y su función correlativa se expresa mediante la densidad espectral por la fórmula (5.2.23). Nosotros demostraremos esto en el § 6.6.

La fórmula (5.2.23) fue obtenida por primera vez por N. Wiener para una clase limitada de procesos aleatorios estacionarios y un poco más tarde por A. Ya. Jinchin para cualesquiera procesos aleatorios estacionarios. Por eso las fórmulas (5.2.22) y (5.2.23) se llaman comúnmente fórmulas de Wiener-Jinchin y el hecho de que la función correlativa de cualquier función aleatoria estacionaria puede ser representada en la forma (5.2.23) se denomina teorema de Wiener-Jinchin.

Si en la fórmula (5.2.21)

$$U(\omega) = U \delta(\omega - \Omega), \quad Z(\omega) = Z \delta(\omega - \Omega),$$

donde U , Z son magnitudes aleatorias no correlacionadas con equivalentes dispersiones iguales a D , y Ω es una magnitud aleatoria independiente de U y Z , entonces la fórmula (5.2.21) toma la forma

$$X(t) = m_x + U \operatorname{sen} \Omega t + Z \operatorname{cos} \Omega t. \quad (5.2.36)$$

Ahora bien, la fórmula (5.2.21) abarca, como un caso particular, también funciones aleatorias estacionarias que representan sinusoides de frecuencia aleatoria con amplitudes y fases aleatorias. En el ejemplo 4.2.3 se mostró que la función correlativa de una función aleatoria (5.2.36) se determina por la fórmula

$$k_x(\tau) = D \int_0^{\infty} f(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (5.2.37)$$

donde $f(\omega)$ es la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Ω . Comparando la fórmula (5.2.37) con (5.2.23), vemos que la densidad espectral de la función aleatoria (5.2.36) es igual al producto de la dispersión de las funciones aleatorias U y Z por la densidad de probabilidad de la frecuencia aleatoria Ω :

$$s_{1x}(\omega) = Df(\omega) \quad (5.2.38)$$

De la fórmula (5.2.38) se ve que para cualquier densidad espectral asignada $s_{1x}(\omega)$ se puede escoger tal densidad de probabilidad $f(\omega)$ de la frecuencia aleatoria de oscilaciones Ω que la función aleatoria (5.2.36) tenga la densidad espectral $s_{1x}(\omega)$. En efecto, integrando la fórmula (5.2.38) con respecto a ω de 0 a ∞ y teniendo en cuenta que $f(\omega) = 0$ cuando $\omega < 0$, obtendremos

$$\int_0^{\infty} s_{1x}(\omega) d\omega = D \int_0^{\infty} f(\omega) d\omega = D. \quad (5.2.39)$$

Al determinar de este modo D , hallaremos de la fórmula (5.2.38) $f(\omega)$:

$$f(\omega) = \frac{s_{1x}(\omega)}{D} = \frac{s_{1x}(\omega)}{\int_0^{\infty} s_{1x}(\omega) d\omega}. \quad (5.2.40)$$

Así pues, entre la infinidad de todas las funciones aleatorias estacionarias posibles que tienen la densidad espectral dada $s_{1x}(\omega)$ y dispersión finita, siempre existen tales funciones aleatorias todas las realizaciones posibles de las cuales son sinusoides puras. Estas funciones aleatorias se determinan por la fórmula (5.2.36) en la cual

la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria Ω se define por la fórmula (5.2.40). Además de estas funciones aleatorias, existe una infinidad de otras funciones aleatorias estacionarias, con la densidad espectral dada $s_{1x}(\omega)$, cuyas realizaciones no son sinusoides, sino que representan las combinaciones lineales de una infinidad de sinusoides. Tales realizaciones pueden ser funciones continuas o pueden tener también puntos de discontinuidad de primer género, como vimos en los ejemplos dados en el § 4.2.

Las fórmulas (5.2.22) y (5.2.23) muestran que la densidad espectral es una característica muy importante de la función aleatoria estacionaria. Conociendo la densidad espectral, se puede hallar por la fórmula (5.2.23) la función correlativa y, al contrario, conociendo la función correlativa, se puede determinar por la fórmula (5.2.22) la densidad espectral. Ahora bien, para la función aleatoria estacionaria no importa absolutamente cuál es la característica que se asigna: la función correlativa o la densidad espectral. Generalmente en las aplicaciones es más conveniente asignar la densidad espectral de una función aleatoria estacionaria.

Ejemplo 5.2.1. Hallar la densidad espectral de una función aleatoria estacionaria con función correlativa exponencial

$$k_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|}. \quad (5.2.41)$$

Por la fórmula (5.2.22) hallamos

$$s_{1x}(\omega) = \frac{2D}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega \tau d\tau = \frac{2D}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega \tau d\tau \quad (5.2.42)$$

La integral en esta fórmula se calcula fácilmente mediante la integral por partes. Teniendo en vista obtener fórmulas más generales necesarias para los ejemplos que se dan a continuación, sustituyamos ω por la magnitud μ . Entonces obtendremos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \mu\tau d\tau &= \frac{e^{-\alpha\tau}}{-\alpha} \cos \mu\tau \Big|_0^{\infty} - \frac{\mu}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \sin \mu\tau d\tau = \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{\mu}{\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \sin \mu\tau d\tau. \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

Volviendo a integrar por partes, obtendremos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \mu\tau d\tau &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha^2} e^{-\alpha\tau} \sin \mu\tau \Big|_0^{\infty} - \frac{\mu^2}{\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \mu\tau d\tau = \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{\mu^2}{\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \mu\tau d\tau. \end{aligned}$$

De aquí hallamos

$$\alpha^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \mu\tau \, d\tau = \alpha - \mu^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \mu\tau \, d\tau$$

y

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \mu\tau \, d\tau = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu^2}. \quad (5.2.44)$$

Sustituyendo esta expresión en el primer miembro de la fórmula (5.2.43) y despejando la integral que ha quedado en la ecuación obtenida, tendremos

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \operatorname{sen} \mu\tau \, d\tau = \frac{\mu}{\alpha^2 + \mu^2}. \quad (5.2.45)$$

Sustituyendo la expresión (5.2.44) siendo $\mu = \omega$ en la fórmula (5.2.42), hallaremos la densidad espectral de la función aleatoria que nos interesa:

$$s_{1x}(\omega) = \frac{2D}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (5.2.46)$$

Por el contrario, considerando asignada la densidad espectral, podemos determinar, por la fórmula (5.2.23), la función correlativa:

$$k_x(\tau) = \frac{2D\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega\tau}{\alpha^2 + \omega^2} \, d\omega.$$

Esta integral se puede calcular por la fórmula (23) del suplemento. Como resultado obtendremos la fórmula (5.2.41).

Ejemplo 5.2.2. Hallar la densidad espectral de la función aleatoria estacionaria cuya función correlativa se determina por la fórmula

$$k_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0\tau. \quad (5.2.47)$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (5.2.22), hallamos

$$\begin{aligned} s_{1x}(\omega) &= \frac{2D}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0\tau \cos \omega\tau \, d\tau = \\ &= \frac{D}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega - \omega_0)\tau \, d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega + \omega_0)\tau \, d\tau \right\}. \end{aligned}$$

La primera de estas integrales se determina por la fórmula (5.2.44) siendo $\mu = \omega - \omega_0$ y la segunda, por la misma fórmula (5.2.44) siendo $\mu = \omega + \omega_0$. Por consiguiente,

$$s_{1x}(\omega) = \frac{D}{\pi} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$$

o bien

$$s_{1x}(\omega) = \frac{2D\alpha}{\pi} \frac{\beta^2 + \omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}, \quad \beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2. \quad (5.2.48)$$

El problema inverso referente a la determinación de la función correlativa, teniendo dada la densidad espectral, lo resolveremos para el caso en cuestión en el párrafo siguiente.

Ejemplo 5.2.3. Hallar la densidad espectral de la función aleatoria estacionaria cuya función correlativa se determina por la fórmula

$$k_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \gamma \operatorname{sen}(\omega_0 |\tau|)). \quad (5.2.49)$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (5.2.22), hallamos

$$\begin{aligned} s_{1x}(\omega) &= \frac{2D}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \gamma \operatorname{sen} \omega_0 |\tau|) \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{D}{\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0 - \omega) \tau d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0 + \omega) \tau d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \operatorname{sen}(\omega_0 - \omega) \tau d\tau + \gamma \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \operatorname{sen}(\omega_0 + \omega) \tau d\tau \right]. \end{aligned}$$

Las integrales de esta fórmula se calculan fácilmente por las fórmulas (5.2.44) y (5.2.45). Como resultado obtendremos

$$s_{1x}(\omega) = \frac{D}{\pi} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \frac{\gamma(\omega_0 - \omega)}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} + \frac{\gamma(\omega_0 + \omega)}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \right]$$

o bien

$$s_{1x}(\omega) = \frac{2D}{\pi} \frac{(\alpha + \gamma\omega_0) \beta^2 + (\alpha - \gamma\omega_0) \omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2) \omega^2 + \omega^4}, \quad \beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2. \quad (5.2.50)$$

El problema inverso referente a la determinación de la función correlativa, teniendo dada la densidad espectral, lo resolveremos también para este caso en el párrafo siguiente.

Puesto que la densidad espectral, por su sentido, no puede ser negativa para ningún valor de ω , la fórmula (5.2.50) tiene sentido solamente cuando $|\gamma| \leq \alpha/\omega_0$ lo que antes fue mostrado por otra vía.

Ejemplo 5.2.4. Hallar la función correlativa de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ cuya densidad espectral es constante en el intervalo $(0, \omega_0)$ e igual a cero fuera de este intervalo:

$$s_{1x}(\omega) = \begin{cases} s_1 & \text{si } 0 \leq \omega \leq \omega_0, \\ 0 & \text{si } \omega > \omega_0. \end{cases} \quad (5.2.51)$$

Por la fórmula (5.2.23) hallamos

$$k_x(\tau) = s_1 \int_0^{\omega_0} \cos \omega \tau d\omega = s_1 \frac{\operatorname{sen} \omega \tau}{\tau} \Big|_0^{\omega_0} = s_1 \frac{\operatorname{sen} \omega_0 \tau}{\tau}.$$

Así pues

$$k_x(\tau) = s_1 \frac{\operatorname{sen} \omega_0 \tau}{\tau}. \quad (5.2.52)$$

Dejamos al lector que por sí mismo compruebe que a esta función correlativa le corresponde una densidad espectral constante en el intervalo $(0, \omega_0)$, que se determina por la fórmula (5.2.51).

§ 5.3. Descomposición espectral de una función aleatoria estacionaria en forma compleja

En el párrafo precedente obtuvimos la descomposición espectral de una función aleatoria estacionaria real en forma real [fórmula (5.2.21)]:

$$X(t) = m_x + \int_0^{\infty} [U(\omega) \operatorname{sen} \omega t + Z(\omega) \operatorname{cos} \omega t] d\omega. \quad (5.3.1)$$

Sin embargo, en los problemas prácticos es más conveniente de ordinario representar las oscilaciones armónicas en forma compleja con ayuda de las conocidas fórmulas de Euler que expresan las funciones trigonométricas a través de las funciones exponenciales del argumento imaginario. Por eso reducimos la descomposición espectral (5.3.1) a la forma compleja. Sustituyendo en la fórmula (5.3.1) las expresiones de las funciones trigonométricas por las fórmulas de Euler

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad \operatorname{cos} \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

obtendremos

$$\begin{aligned} X(t) = m_x + \int_0^{\infty} \left[\frac{U(\omega)}{2i} + \frac{Z(\omega)}{2} \right] e^{i\omega t} d\omega + \\ + \int_0^{\infty} \left[-\frac{U(\omega)}{2i} + \frac{Z(\omega)}{2} \right] e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Sustituyamos en la segunda integral las variables $\omega = -\mu$. Entonces obtendremos

$$X(t) = m_x + \int_0^{\infty} \frac{Z(\omega) - iU(\omega)}{2} e^{i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^0 \frac{Z(-\mu) + iU(-\mu)}{2} e^{i\mu t} d\mu.$$

En la segunda integral podemos sustituir de nuevo la variable de integración μ por la variable ω puesto que la designación de la variable de integración en la integral definida no es esencial:

$$X(t) = m_x + \int_0^{\infty} \frac{Z(\omega) - iU(\omega)}{2} e^{i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^0 \frac{Z(-\omega) + iU(-\omega)}{2} e^{i\omega t} d\omega.$$

Introduciendo la función aleatoria compleja $V(\omega)$ determinada por la fórmula

$$V(\omega) = \begin{cases} \frac{Z(\omega) - iU(\omega)}{2} & \text{si } \omega > 0, \\ \frac{Z(-\omega) + iU(-\omega)}{2} & \text{si } \omega < 0. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

podemos unir ambas integrales en una única y escribir la fórmula obtenida en la forma

$$X(t) = m_x + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.3.3)$$

Esta fórmula ofrece la descomposición espectral buscada de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ en forma compleja. Esta descomposición se puede aplicar con mayor sencillez que la (5.3.1) puesto que todas las operaciones del análisis se cumplen mucho más simplemente con una función exponencial que con las trigonométricas, y además, la expresión (5.3.3) es más compacta que (5.3.1). Por fin, la fórmula (5.3.3) expresa la función aleatoria estacionaria $X(t)$ a través de una función aleatoria $V(\omega)$, mientras que la fórmula (5.3.1) la expresa mediante dos funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$.

Comparando las fórmulas (5.3.1) y (5.3.3), vemos que la integración en la fórmula (5.3.1) se extiende a todos los valores positivos de la frecuencia ω , y en la fórmula (5.3.3), a todos los valores de ω tanto positivos como negativos. Este hecho puramente matemático no tiene sentido físico y es consecuencia de que el seno y el coseno de la frecuencia positiva ω se expresan por las fórmulas de Euler por medio de dos funciones exponenciales $e^{i\omega t}$ y $e^{-i\omega t}$. En realidad, ambas estas funciones representan una forma compleja de las oscilaciones armónicas de una misma frecuencia ω que, por su sentido físico, siempre es positiva. Por eso, como siempre al emplear la forma compleja de oscilaciones armónicas, las frecuencias negativas son una abstracción matemática y se introducen solamente para mayor sencillez y comodidad.

Estudiemos ahora las propiedades de la función aleatoria compleja $V(\omega)$. Ante todo, de la definición (5.3.2) de la función aleatoria $V(\omega)$ está claro que su esperanza matemática es idénticamente igual a cero, puesto que las esperanzas matemáticas de las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ son iguales a cero. Hallemos la función correlativa de la función aleatoria $V(\omega)$. Cuando $\omega > 0$, $\omega' > 0$, teniendo en cuenta que las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ no están correlacionadas, podemos escribir

$$\begin{aligned} K_v(\omega, \omega') &= M \left[\frac{Z(\omega) - iU(\omega)}{2} \cdot \overline{\frac{Z(\omega') - iU(\omega')}{2}} \right] = \\ &= M \left[\frac{Z(\omega) - iU(\omega)}{2} \cdot \frac{Z(\omega') + iU(\omega')}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \{ M [Z(\omega) Z(\omega')] + M [U(\omega) U(\omega')] \} = \\ &= \frac{1}{4} [K_z(\omega, \omega') + K_u(\omega, \omega')]. \end{aligned}$$

De aquí, tomando en consideración la fórmula (5.2.32) para las funciones correlativas de las funciones aleatorias $Z(\omega)$ y $U(\omega)$, obtendremos

$$K_v(\omega, \omega') = \frac{1}{2} s_{1x}(\omega) \delta(\omega - \omega') \text{ si } \omega > 0, \omega' > 0. \quad (5.3.4)$$

Cuando $\omega < 0, \omega' < 0$

$$\begin{aligned} K_v(\omega, \omega') &= M \left[\frac{Z(-\omega) + iU(-\omega)}{2} \cdot \frac{\overline{Z(-\omega') + iU(-\omega')}}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \{M[Z(-\omega)Z(-\omega')] + M[U(-\omega)U(-\omega')]\} = \\ &= \frac{1}{4} [K_z(|\omega|, |\omega'|) + K_u(|\omega|, |\omega'|)]. \end{aligned}$$

De aquí, volviendo a aplicar la fórmula (5.2.32) y teniendo en cuenta que $|\omega'| - |\omega| = \omega - \omega'$ cuando $\omega < 0, \omega' < 0$, obtendremos

$$K_v(\omega, \omega') = \frac{1}{2} s_{1x}(|\omega|) \delta(\omega - \omega') \text{ si } \omega < 0, \omega' < 0. \quad (5.3.5)$$

Para $\omega > 0, \omega' < 0$

$$\begin{aligned} K_v(\omega, \omega') &= M \left[\frac{Z(\omega) - iU(\omega)}{2} \cdot \frac{\overline{Z(-\omega') + iU(-\omega')}}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \{M[Z(\omega)Z(-\omega')] - M[U(\omega)U(-\omega')]\} = \\ &= \frac{1}{4} [K_z(\omega, |\omega'|) - K_u(\omega, |\omega'|)]. \end{aligned}$$

De aquí, en virtud de la fórmula (5.2.32) se deriva que para $\omega > 0, \omega' < 0$

$$K_v(\omega, \omega') = \frac{1}{4} [s_{1x}(\omega) \delta(\omega - |\omega'|) - s_{1x}(\omega) \delta(\omega - |\omega'|)] = 0. \quad (5.3.6)$$

El mismo resultado obtendremos también cuando $\omega < 0, \omega' > 0$ lo que, además, está claro directamente de la propiedad de simetría de la función correlativa. Introduciendo una nueva función

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2} s_{1x}(|\omega|), \quad (5.3.7)$$

podemos escribir la expresión obtenida de la función correlativa de la función aleatoria $V(\omega)$ para todos los valores de ω y ω' en la forma

$$K_v(\omega, \omega') = s_x(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (5.3.8)$$

Ahora bien, la función aleatoria $V(\omega)$ posee completamente las mismas propiedades que las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ en la fórmula (5.3.1). Los valores de la función aleatoria $V(\omega)$ para cualesquiera valores diferentes de ω y ω' no están correlacionados. Su dis-

persión es infinita y la función correlativa es proporcional a la función delta.

Sustituyendo en la fórmula (5.3.7) la expresión (5.2.22) de la densidad espectral $s_{1x}(\omega)$ y tomando en consideración que $\cos |\omega| \tau = \cos \omega \tau$, obtendremos

$$s_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Aquí la función subintegral es par. Por eso la integral en los límites de 0 a ∞ puede ser sustituida por la mitad de la integral en los límites de $-\infty$ a ∞ . Entonces tendremos

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (5.3.9)$$

Por otro lado, podemos escribir

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) \operatorname{sen} \omega \tau d\tau, \quad (5.3.10)$$

puesto que la función subintegral es aquí impar y la integral se toma en límites simétricos. Multiplicando la fórmula (5.3.10) por la unidad imaginaria i , sustrayéndola de la fórmula (5.3.9) y teniendo en cuenta que

$$\cos \omega \tau - i \operatorname{sen} \omega \tau = e^{-i\omega\tau},$$

obtendremos

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (5.3.11)$$

Sustituyamos ahora en la fórmula (5.2.23) la expresión de la densidad espectral $s_{1x}(\omega)$ de (5.3.7). Entonces tendremos

$$k_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} s_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (5.3.12)$$

Pero la función $s_x(\omega)$ es par:

$$s_x(-\omega) = s_x(\omega), \quad (5.3.13)$$

lo que se ve directamente de su definición (5.3.7) o de la fórmula (5.3.9). Por consiguiente, la integral en (5.3.12) es igual a la mitad de la integral extendida a todo el eje numérico de $-\infty$ a ∞ y podemos escribir esta fórmula en la forma

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (5.3.14)$$

Ahora observemos que debido a la paridad de la función $s_x(\omega)$ y la imparidad del seno

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \operatorname{sen} \omega \tau d\tau.$$

Multiplicando esta igualdad por la unidad imaginaria i , sumándola miembro a miembro (5.3.14) y tomando en consideración que

$$\cos \omega \tau + i \operatorname{sen} \omega \tau = e^{-i\omega \tau},$$

obtendremos

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega. \quad (5.3.15)$$

De este modo hemos obtenido la descomposición espectral de la función correlativa de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ en forma compleja.

Poniendo en (5.3.15) $\tau = 0$, obtendremos la siguiente expresión para la dispersión de la función aleatoria $X(t)$:

$$D_x = k_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) d\omega. \quad (5.3.16)$$

Así pues, hemos obtenido la descomposición espectral de la función aleatoria estacionaria (5.3.3), que representa su descomposición en sumandos infinitesimales no correlacionados de la forma $V(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ que expresan las oscilaciones armónicas con amplitudes aleatorias infinitesimales en forma compleja, y las descomposiciones correspondientes de la función correlativa y de la dispersión (5.3.15) y (5.3.16). Las magnitudes aleatorias $V(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ y $V(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ cualquiera que sea el valor de ω , tienen una misma dispersión igual a $s_x(\omega) d\omega$. La fórmula (5.3.16) enuncia que la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ es igual a la suma de dispersiones de los sumandos no correlacionados que forman parte de la expresión (5.3.3).

Lo expuesto muestra que la función $s_x(\omega)$ caracteriza la distribución de la dispersión de una función aleatoria estacionaria referente al espectro de frecuencias, al igual que la función $s_{1x}(\omega)$ introducida en el párrafo anterior. La diferencia entre ellas consiste solamente en que la función $s_{1x}(\omega)$, de acuerdo con el sentido físico, determina por completo la dispersión del armónico correspondiente a cada valor dado de la frecuencia $\omega > 0$, mientras que la función $s_x(\omega)$ divide a esta dispersión en partes iguales entre las dos componentes complejas $V(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ y $V(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ que corresponden al valor dado de la frecuencia ω . Con otras palabras, en una descomposición espectral real (5.2.21) de una función aleatoria estacionaria cada armónico

está representado por un sumando

$$[U(\omega) \sin \omega t + Z(\omega) \cos \omega t] d\omega,$$

correspondiente al valor dado de la frecuencia $\omega > 0$, mientras que en una descomposición espectral compleja (5.3.3) cada armónico está representado por dos sumandos

$$V(\omega) e^{i\omega t} d\omega \text{ y } V(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

y la dispersión de este armónico se divide en partes iguales entre estos sumandos. Por eso la función $s_{1x}(\omega)$ está determinada sólo en el campo de frecuencias positivas reales físicamente, mientras que la función $s_x(\omega)$ está determinada para todas las frecuencias tanto negativas como positivas, aunque las últimas existen sólo matemáticamente. En la fig. 5.3.1 se muestra la relación entre las funciones $s_x(\omega)$ y $s_{1x}(\omega)$.

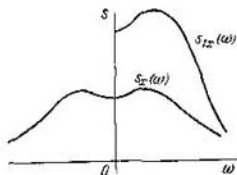


Fig. 5.3.1.

Como la función $s_x(\omega)$ tiene el mismo sentido que la $s_{1x}(\omega)$ y la diferencia entre ellas se determina solamente por la forma matemática de registro de la descomposición espectral de una función aleatoria estacionaria real, la función $s_x(\omega)$ se llama *densidad espectral* de la

función aleatoria estacionaria $X(t)$ al igual que la función $s_{1x}(\omega)$. Las fórmulas (5.3.11) y (5.3.15) que ligan la función correlativa y la densidad espectral $s_x(\omega)$ representan una forma compleja de las fórmulas de Wiener—Jinchin (5.2.22) y (5.2.23).

En aplicaciones prácticas es siempre más conveniente utilizar la forma compleja de la descomposición espectral. Por eso, en lo sucesivo, al hablar de la densidad espectral, siempre tendremos en cuenta la densidad espectral $s_x(\omega)$ determinada en todo el eje numérico ω .

Además de la densidad espectral $s_x(\omega)$, para la descomposición espectral de una función aleatoria estacionaria es conveniente introducir la función espectral

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} s_x(\mu) d\mu. \quad (5.3.17)$$

Es obvio que la densidad espectral es la derivada de la función espectral:

$$s_x(\omega) = S'_x(\omega). \quad (5.3.18)$$

Sustituyendo en la fórmula (5.3.17) la expresión (5.3.11) de la densidad espectral y cumpliendo la integración con respecto a μ obtendremos la siguiente expresión de la función espectral a través de la fun-

ción correlativa:

$$S_x(\omega) - S_x(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) \frac{1 - e^{-i\omega\tau}}{\tau} d\tau. \quad (5.3.19)$$

Ejemplo 5.3.1. Para la función correlativa exponencial

$$k_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \quad (5.3.20)$$

la fórmula (5.3.14) ofrece la siguiente expresión de la densidad espectral:

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau.$$

Para cumplir la integración, observemos que $|\tau| = \tau$ cuando $\tau > 0$ y $|\tau| = -\tau$ cuando $\tau < 0$. Por eso, dividiendo el intervalo de integración en dos partes, obtendremos

$$\begin{aligned} s_x(\omega) &= \frac{D}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{D}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} \right] \end{aligned}$$

o bien, reduciendo los quebrados a un común denominador,

$$s_x(\omega) = \frac{D}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (5.3.21)$$

Esto resulta concuerda por completo con (5.2.46).

Ejemplo 5.3.2. Para la función correlativa

$$k_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau \quad (5.3.22)$$

la fórmula (5.3.14) da

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau.$$

Dividiendo el intervalo de integración en dos partes y expresando el coseno por medio de las funciones exponenciales, obtendremos

$$\begin{aligned} s_x(\omega) &= \frac{D}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - i\omega + i\omega_0)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{(\alpha - i\omega - \omega_0)\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega - i\omega_0)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega + i\omega_0)\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{D}{4\pi} \left[\frac{1}{\alpha + i(\omega_0 - \omega)} + \frac{1}{\alpha - i(\omega_0 + \omega)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha - i(\omega_0 - \omega)} + \frac{1}{\alpha + i(\omega_0 + \omega)} \right]. \end{aligned}$$

Reduciendo los quebrados a un común denominador y poniendo $\beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2$, obtendremos

$$s_x(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi} \cdot \frac{\beta^2 + \omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}. \quad (5.3.23)$$

Ejemplo 5.3.3. Para una función correlativa más general

$$k_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \gamma \operatorname{sen} \omega_0 |\tau|). \quad (5.3.24)$$

hallamos de un modo completamente análogo

$$s_x(\omega) = \frac{D}{4\pi} \left[\frac{1+i\gamma}{\alpha+i(\omega_0-\omega)} + \frac{1-i\gamma}{\alpha-i(\omega_0+\omega)} + \frac{1-i\gamma}{\alpha-i(\omega_0-\omega)} + \frac{1+i\gamma}{\alpha+i(\omega_0+\omega)} \right]$$

o bien, suprimiendo las magnitudes imaginarias,

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi} \left[\frac{\alpha - \gamma(\omega - \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\alpha + \gamma(\omega + \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]. \quad (5.3.25)$$

Reduciendo los quebrados a un común denominador, obtendremos

$$s_x(\omega) = \frac{D}{\pi} \cdot \frac{(\alpha + \gamma\omega_0)\beta^2 + (\alpha - \gamma\omega_0)\omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}. \quad (5.3.26)$$

Es evidente que la fórmula (5.3.23) es un caso particular de esta fórmula cuando $\gamma = 0$. En otro caso particular, cuando $\gamma = \alpha/\omega_0$, la fórmula (5.3.26) toma la forma

$$s_x(\omega) = \frac{2D\alpha}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}. \quad (5.3.27)$$

Este caso particular tiene una importancia práctica especial, puesto que corresponde a la función aleatoria diferenciable $X(t)$ que tiene la derivada con dispersión finita (véase el ejemplo 4.6.1).

Resolvamos ahora el problema inverso: considerando asignada la densidad espectral (5.3.26), hallamos la función correlativa. Sustituyendo la expresión (5.3.25) en la fórmula (5.3.15), tendremos

$$k_x(\tau) = \frac{D}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha - \gamma(\omega - \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} e^{i\omega\tau} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha + \gamma(\omega + \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} e^{i\omega\tau} d\omega \right].$$

Sustituyendo las variables $\omega = \mu + \omega_0$ en la primera integral y $\omega = \mu - \omega_0$ en la segunda, la fórmula obtenida se reduce a la forma

$$k_x(\tau) = \frac{D}{\pi} \left[\alpha \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} - i\gamma \operatorname{sen} \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu e^{i\mu\tau} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} \right].$$

De aquí, tomando en consideración que [véase las fórmulas (16) y (22) del suplemento]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu e^{i\mu\tau} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \begin{cases} i\pi e^{-\alpha|\tau|} & \text{si } \tau > 0, \\ -i\pi e^{-\alpha|\tau|} & \text{si } \tau < 0, \end{cases}$$

obtendremos, como era de esperar, la fórmula (5.3.24). En el caso particular, cuando $\gamma = 0$, obtendremos para la función correlativa la fórmula (5.3.22).

En el § 5.1 vimos que la derivada de una función aleatoria estacionaria diferenciable es siempre estacionaria. Por eso se puede plantear el problema: hallar la densidad espectral de la derivada de una función aleatoria estacionaria. Conforme a la fórmula (5.1.12) la función correlativa de la derivada $Y_1(t) = X'(t)$ de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ es

$$k_{y_1}(\tau) = -k_x''(\tau).$$

Sustituyendo aquí la expresión (5.3.15) de la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ obtendremos

$$k_{y_1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 s_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

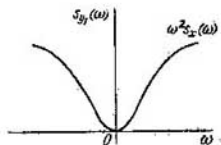


Fig. 5.3.2.

Comparando esta fórmula con (5.3.15), vemos que la densidad espectral de la derivada $Y_1(t)$ se determina por la fórmula

$$s_{y_1}(\omega) = \omega^2 s_x(\omega). \quad (5.3.28)$$

Así pues, la derivación de una función aleatoria estacionaria conduce a la multiplicación de su densidad espectral por ω^2 .

De la fórmula (5.3.28) se ve que la densidad espectral de la derivada de una función aleatoria estacionaria es igual a cero para $\omega = 0$ y la curva que la refleja toca al eje de abscisas en el origen de coordenadas (fig. 5.3.2). De aquí resulta que, para que la integral de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ sea una función aleatoria estacionaria con dispersión finita, es necesario que la densidad espectral de la función aleatoria $X(t)$ y su primera derivada se conviertan en cero cuando $\omega = 0$.

Examinando las expresiones de la densidad espectral obtenidas en los ejemplos anteriores, vemos que la integral de la densidad espectral, multiplicada por ω^2 , se convergerá y, por consiguiente, la dispersión de la derivada de la función aleatoria será finita sólo para la densidad espectral (5.3.26) cuando $\gamma = \alpha/\omega_0$.

Es fácil comprender que toda densidad espectral continua $s_x(\omega)$ que no se convierte en cero cualquiera que sea el valor de ω y que tiende asintóticamente a cero cuando $\omega \rightarrow \pm \infty$, se puede aproximar, con cualquier grado de precisión, por una función fraccionaria racional, es decir, por la relación de dos polinomios. En efecto, como es sabido, toda función continua, en cualquier intervalo finito de variación de la variable independiente, puede ser aproximada, con el grado de precisión deseado, por un polinomio. Puesto que por suposición, la densidad espectral $s_x(\omega)$ no es igual a cero para ningún valor de ω y tiende asintóticamente a cero cuando $\omega \rightarrow \pm \infty$, es conveniente aproximar por el polinomio la magnitud inversa $1/s_x(\omega)$. Con ello, la densidad espectral $s_x(\omega)$ será representada por un que-

brado racional con numerador constante. Claro está que al tomar también en el numerador un polinomio en vez de la constante, se puede todavía más fácilmente alcanzar el grado deseado de precisión de aproximación de la densidad espectral. En este caso en la expresión de la densidad espectral figurarán solamente las potencias pares de ω puesto que la densidad espectral es una función par. Además, todos los coeficientes existentes en el numerador y en el denominador de la expresión de la densidad espectral serán reales. Por eso todas las raíces del numerador y del denominador serán por parejas complejas conjugadas. Ahora bien, todas las raíces del numerador y del denominador de la densidad espectral racional fraccionaria siempre se disponen de un modo simétrico con respecto a los ejes real e imaginario en el plano de la variable compleja ω . Al descomponer este quebrado racional en quebrados simples, siempre podemos agrupar las fracciones correspondientes a cada pareja de las raíces conjugadas puramente imaginarias del denominador y las fracciones correspondientes a cada cuatro raíces del denominador dispuestas simétricamente con respecto a los ejes real e imaginario. Como resultado obtendremos para cada cuatro raíces complejas dispuestas simétricamente un sumando de la forma (5.3.25). A los sumandos del primer tipo les corresponderán en la expresión de la función correlativa las funciones exponenciales, mientras que a los sumandos del segundo tipo les corresponderán las funciones de la forma (5.3.22) o (5.3.24). Así pues, vemos que la función correlativa de prácticamente toda función aleatoria estacionaria se puede aproximar, con un grado de precisión cualquiera, por una combinación lineal de las tres funciones correlativas tipo examinadas en los ejemplos anteriores. Esto es lo que determina la importancia de las tres funciones correlativas tipo estudiadas.

Está claro que, al igual que en todos otros problemas de aproximación, la representación aproximada de la función correlativa obtenida por esta vía no será única.

Para calcular la integral (5.3.16) al determinar las dispersiones de las funciones aleatorias estacionarias valiéndose de las densidades espectrales conocidas, se puede aplicar la fórmula

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0 (i\omega)^{2n-2} + b_1 (i\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-2} (i\omega)^2 + b_{n-1}}{|a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} i\omega + a_n|^2} d\omega = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{a_0} \frac{\Delta_n}{D_n}, \quad (5.3.29)$$

donde D_n es el determinante de n -ésimo orden que se obtiene por la regla siguiente: en la diagonal principal se ponen los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n y los sitios vecinos a ellos se llenan por aquellos de los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n que entran en la línea dada de modo que sus números en cada línea se dispongan en orden decreciente;

los sitios que quedan libres se llenan de ceros

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix} \quad (5.3.30)$$

Δ_n es el determinante que se obtiene sustituyendo en D_n los elementos de la primera columna por los coeficientes b_0, b_1, \dots, b_{n-1} :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix} \quad (5.3.31)$$

en particular

$$I_1 = \frac{\pi}{a_0} \frac{b_0}{a_1}, \quad I_2 = -\frac{\pi}{a_0} \frac{b_0 a_2 - b_1 a_0}{a_1 a_2},$$

$$I_3 = \frac{\pi}{a_0} \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 \\ b_1 & a_2 & a_1 \\ b_2 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}, \quad I_4 = \frac{\pi}{a_0} \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_3 & 0 & 0 & a_4 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

§ 5.4. Noción de ruido blanco

Examinemos la función aleatoria estacionaria $X(t)$ con la densidad espectral constante s_0 . Su función correlativa, en virtud de la fórmula (5.3.15), es

$$k_x(\tau) = s_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Pero conforme a la fórmula (2.2.22) que expresa la función delta impulsiva en forma de la integral de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi\delta(\tau).$$

Por consiguiente, la función correlativa de una función aleatoria estacionaria con densidad espectral constante s_0 se determina por

la fórmula

$$k_x(\tau) = 2\pi s_0 \delta(\tau). \quad (5.4.1)$$

La función aleatoria estacionaria con densidad espectral constante se llama *ruido blanco estacionario*. Este nombre se explica por cierta analogía que tiene tal función aleatoria con la luz blanca: la luz mencionada representa la suma de todas las componentes espectrales que poseen una misma intensidad; el ruido blanco es la suma de las oscilaciones armónicas de todas las frecuencias que tienen una misma dispersión de amplitud. Con otras palabras, la luminosidad sumaria de la luz blanca está repartida uniformemente en componentes espectrales, es decir, en frecuencias de las oscilaciones electromagnéticas que la componen; la dispersión sumaria del ruido blanco está repartida uniformemente en frecuencias de las oscilaciones armónicas que lo componen.

El multiplicador adjunto a la función delta

$$v = 2\pi s_0 \quad (5.4.2)$$

se denomina *intensidad* del ruido blanco estacionario. La función correlativa del ruido blanco estacionario se expresa por medio de la intensidad del mismo por la fórmula

$$k_x(\tau) = v\delta(\tau). \quad (5.4.3)$$

La fórmula (5.4.2) muestra que la intensidad del ruido blanco estacionario es igual a la densidad espectral del mismo multiplicada por 2π y, al contrario, la densidad espectral del ruido blanco estacionario es igual a la intensidad del mismo dividida por 2π .

Generalizando la noción de ruido blanco, llamemos *ruido blanco* a toda función aleatoria cuya función correlativa contiene como multiplicador la función delta. En concordancia con esta definición la función correlativa del ruido blanco $X(t)$ se determina por la fórmula

$$K_x(t, t') = G(t) \delta(t - t') = \sqrt{G(t)G(t')} \delta(t - t'). \quad (5.4.4)$$

La función $G(t)$ que representa el multiplicador adjunto a la función delta en la expresión de la función correlativa del ruido blanco se denomina *intensidad del mismo*. En el caso particular, cuando la intensidad del ruido blanco es constante, éste es estacionario. En el caso general, siendo variable la intensidad, el ruido blanco no es estacionario.

La fórmula (5.2.32) muestra que las funciones aleatorias $U(\omega)$ y $Z(\omega)$ son ruidos blancos que tienen una misma intensidad igual a la densidad espectral $s_{1x}(\omega)$ de la función aleatoria estacionaria $X(t)$. Semejantemente la fórmula (5.3.8) muestra que la función aleatoria $V(\omega)$ representa un ruido blanco cuya intensidad es igual a la densidad espectral $s_x(\omega)$ de la función aleatoria estacionaria

$X(t)$. La fórmula (5.2.21) ofrece la expresión de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ por medio de los ruidos blancos reales no correlacionados $U(\omega)$ y $Z(\omega)$. Análogamente la fórmula (5.3.3) expresa la función aleatoria estacionaria $X(t)$ mediante el ruido blanco complejo $\check{V}(\omega)$.

En el caso general, el ruido blanco $V(\omega)$, al igual que los ruidos blancos $U(\omega)$ y $Z(\omega)$, es no estacionario. Por eso la fórmula (5.3.3) expresa en el caso general la función aleatoria estacionaria del tiempo $X(t)$ por medio del ruido blanco no estacionario de la frecuencia $V(\omega)$. Y solamente en el caso particular, cuando la densidad espectral s_0 es constante, la fórmula (5.3.3) expresa el ruido blanco estacionario del tiempo $X(t)$, que tiene la intensidad $2\pi s_0$, mediante el ruido blanco estacionario de la frecuencia $V(\omega)$ cuya intensidad es igual a s_0 . Así pues, en este caso el ruido blanco estacionario $X(t)$ tiene la densidad espectral s_0 y la intensidad $2\pi s_0$ y el ruido blanco estacionario $V(\omega)$ tiene la intensidad s_0 .

El ruido blanco es el tipo más simple de una función aleatoria debido a que sus valores, siendo diferentes los valores del argumento, no están correlacionados. A la expresión de una función aleatoria mediante una función aleatoria más simple (ruido blanco) la llamaremos *representación canónica integral* de la función aleatoria. Las fórmulas (5.2.21) y (5.3.3) dan las representaciones canónicas integrales de cualquier función aleatoria estacionaria. Las representaciones canónicas integrales de las funciones aleatorias son muy cómodas para las aplicaciones. Precisamente esto explica el gran papel que desempeñan las descomposiciones espectrales (5.2.21) y (5.3.3) en las aplicaciones de la teoría de funciones aleatorias estacionarias.

En la naturaleza no hay ruidos blancos perfectos del tipo de la función delta. Esto se explica por el hecho de que en la naturaleza no existen objetos ni procesos carentes por completo de inercia. Por eso en todo fenómeno físico el valor de la función aleatoria en el punto dado determina también en cierto grado los valores de la misma en otros puntos cercanos. No existe tal magnitud física cuyo incremento durante un intervalo de tiempo por muy pequeño que sea pudiera ser tan grande como se quiera. Para crear un proceso aleatorio con el cual alguna magnitud física obtuviera ininterrumpidamente incrementos aleatorios con dispersión infinita se exigiría una potencia infinita. Por eso en la naturaleza existen solamente tales funciones aleatorias cuyos valores, en los puntos suficientemente próximos, están correlacionados.

Así pues, la noción de ruido blanco es solamente una abstracción matemática cómoda. No obstante, como siempre en la práctica, no hay ninguna necesidad de que los objetos reales correspondan exactamente a los conceptos científicos abstractos, en particular, no hay ninguna necesidad de que exista un ruido blanco perfecto. Prácticamente el tiempo y otras magnitudes físicas se miden siempre

con precisión hasta cierto intervalo y todos los valores de la magnitud examinada, la diferencia entre los cuales es menor que este intervalo, se consideran como coincidentes. Por eso, desde el punto de vista práctico, la función aleatoria puede ser considerada como un ruido blanco siempre que la correlación entre sus valores se haga extensiva solamente a los intervalos de variación del argumento que son menores que el intervalo mínimo perceptible a la precisión de mediciones adoptada. Con otras palabras, la función aleatoria puede considerarse como un ruido blanco si el intervalo de correlación de la misma es menor que el intervalo mínimo perceptible. Con ello, se llama *intervalo de correlación* a tal intervalo mínimo que los valores de la función aleatoria divididos por cualquier intervalo más grande se puedan considerar prácticamente no correlacionados. Esta definición muestra que la noción de intervalo de correlación es puramente práctica y no es un concepto matemático riguroso. Por eso para una misma función aleatoria el intervalo de correlación tendrá diferentes valores en dependencia de cuáles sean los valores del coeficiente de correlación que vamos a considerar despreciablemente pequeños.

Supongamos que una función aleatoria estacionaria con función correlativa $k_x(\tau)$ puede ser considerada prácticamente como ruido blanco. Surge la pregunta: ¿cómo determinar la intensidad de este ruido blanco? Para responder a esta pregunta, observamos que para un ruido blanco perfecto, en virtud de (5.4.3), la intensidad se determina por la fórmula

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) d\tau. \quad (5.4.5)$$

Por esta misma fórmula se determina naturalmente también la intensidad de un ruido blanco real con función correlativa $k_x(\tau)$ distinta de la función delta. En virtud de (5.3.14) la integral en el miembro derecho de la fórmula (5.4.5) puede ser expresada por medio del valor de la densidad espectral para $\tau = 0$. Como resultado la fórmula (5.4.5) tomará la forma

$$v = 2\pi s_x(0). \quad (5.4.6)$$

Es obvio que una función aleatoria estacionaria cuyas función correlativa y densidad espectral se determinan por las fórmulas

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}, \quad s_x(\omega) = \frac{D}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (5.4.7)$$

prácticamente puede ser considerada como ruido blanco (ruido blanco real) siempre que α sea suficientemente grande. En efecto, cuando α es suficientemente grande, el valor de la función correlativa exponencial será tan pequeño como se quiera para $\tau \neq 0$ cualquiera. Por eso, cuando α es lo bastante grande, el intervalo de correlación de

esta función aleatoria será tan pequeño como se quiera. Con ello, su densidad espectral será prácticamente constante en una gama considerable de frecuencias. Es evidente que la gama de frecuencias en la cual la densidad espectral (5.4.7) puede considerarse prácticamente constante puede ser hecha tan grande como se quiera eligiendo α suficientemente grande. En virtud de (5.4.6), la intensidad de este ruido blanco real es igual a $2D/\alpha$, es decir, a la dispersión del mismo multiplicada por $2/\alpha$.

Ahora bien, la densidad espectral de cualquier ruido blanco estacionario real no es constante, pero puede considerarse prácticamente constante en cierto intervalo de frecuencias fuera del cual ella tiende a cero.

Ejemplo 5.4.1. En el ejemplo 4.2.7. fue mostrado que la función correlativa de la corriente que pasa por el circuito compuesto de un condensador de capacidad C , cargado por el flujo de partículas cargadas, y de una resistencia R es función exponencial de la diferencia de los argumentos [fórmula (4.2.43)]. Examinemos un caso particular en que la media de la carga de cada partícula q es igual a cero. En este caso la función correlativa de la corriente que pasa por el circuito se determina por la fórmula

$$k_i(\tau) = \frac{\mu D}{2T} e^{-\frac{|\tau|}{T}},$$

donde $T = RC$ es la constante del tiempo del circuito y μ es la densidad media del flujo de partículas que van a parar al condensador (la esperanza matemática del número de partículas en la unidad de tiempo). Supongamos que la densidad media del flujo de partículas μ crece ilimitadamente, mientras que la magnitud de carga de cada partícula va disminuyendo de modo que el producto μD quede constante, igual a v . En este caso

$$k_i(\tau) = \frac{v}{2T} e^{-\frac{|\tau|}{T}}.$$

Cuando $T \rightarrow 0$ esta función tiende a cero para cualquier $\tau \neq 0$ y $k_i(0) \rightarrow \infty$. La integral de esta función, en los límites infinitos, queda en este caso constante, igual a v . Así, para pequeños valores de la constante de tiempo T , la corriente que pasa por el circuito es próxima al ruido blanco con intensidad v . En el límite para $T = 0$, la corriente en el circuito representa un ruido blanco estacionario perfecto. Así pues, el ruido blanco perfecto se puede representar físicamente como una sucesión continua de impulsos infinitesimales no correlacionados que siguen uno tras otro con densidad media infinita.

Observamos que en el ejemplo examinado el ruido blanco perfecto se obtiene solamente cuando $T = 0$, es decir, durante la descarga del condensador, que va cargado por el flujo de partículas, a través de una resistencia nula. Puesto que en la naturaleza no existe la resistencia igual a cero, se puede hablar solamente de una resistencia muy pequeña. Esto ilustra el hecho de que no existe un ruido blanco perfecto, sino que existen solamente funciones aleatorias próximas al ruido blanco.

Para reflejar la limitación de la gama de frecuencias en la cual la densidad espectral es constante, se introduce generalmente la noción de ruido blanco de banda. Se denomina *ruido blanco de banda* a una función aleatoria estacionaria cuya densidad espectral es cons-

tante en cierta gama de frecuencias y es igual a cero fuera de esta gama:

$$s_x(\omega) = \begin{cases} s_0 & \text{si } |\omega| \leq \omega_0, \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_0. \end{cases} \quad (5.4.8)$$

Sustituyendo esta expresión de la densidad espectral en la fórmula (5.3.15), hallamos la función correlativa del ruido blanco de banda:

$$k_x(\tau) = s_0 \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega\tau} d\omega = s_0 \frac{e^{i\omega_0\tau} - e^{-i\omega_0\tau}}{i\tau},$$

o bien

$$k_x(\tau) = \frac{2s_0}{\tau} \operatorname{sen} \omega_0\tau. \quad (5.4.9)$$

Sustituyendo la expresión (5.4.8) de la densidad espectral en la fórmula (5.3.16), hallaremos la dispersión del ruido blanco de banda:

$$D_x = k_x(0) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} s_0 d\omega = 2s_0\omega_0. \quad (5.4.10)$$

Así pues, la dispersión del ruido blanco de banda es finita. Desde este punto de vista él es más real que el ruido blanco perfecto. Sin embargo, tampoco los ruidos blancos de banda existen en la naturaleza, puesto que no es posible una variación discontinua de la densidad espectral hasta el cero con el valor dado ω_0 de la frecuencia.

La fórmula (5.4.9) muestra que los valores del ruido blanco de banda en los puntos, divididos por cualesquiera intervalos múltiples de π/ω_0 , no están correlacionados. Así, los términos de toda secuencia aleatoria formada por los valores del ruido blanco de banda en los puntos equidistantes, divididos por el intervalo π/ω_0 , no están correlacionados. Con otras palabras, la secuencia aleatoria de los valores de un ruido blanco de banda, tomados cada intervalo π/ω_0 , se puede considerar como *ruido blanco discreto*, es decir, como sucesión de impulsos aleatorios no correlacionados. Por eso el ruido blanco de banda desempeña el mismo papel en la teoría de secuencias aleatorias que el ruido perfecto en la teoría de procesos aleatorios del argumento que varía continuamente.

§ 5.5. Funciones aleatorias estacionarias ergódicas

Para determinar la esperanza matemática de una función aleatoria es necesario conocer su densidad unidimensional de probabilidad. En el caso en que las características probabilísticas de la función aleatoria no son conocidas, entonces, para la determinación experimental de su esperanza matemática, hay que observar un número suficientemente grande de sus realizaciones para cada valor dado del argumento t . Entonces, conforme a los resultados del ejem-

plo 3.9.2, la media aritmética de la función aleatoria para cada valor de t , tomada según todas las realizaciones observadas, puede considerarse como valor de su esperanza matemática para esta t . Con otras palabras, para la determinación experimental de la esperanza matemática de una función aleatoria, se necesita obtener un número bastante grande de sus realizaciones y tomar el valor medio de estas realizaciones para cada valor dado del argumento t . Pero la esperanza matemática de una función aleatoria estacionaria es constante. Por eso cabe preguntar: ¿se podría utilizar para la determinación experimental de la esperanza matemática de una función aleatoria estacionaria los valores de una realización suya para diferentes valores del argumento en vez de los valores de un gran número de diferentes realizaciones para un mismo valor del argumento? Y en general ¿se podría aprovechar la circunstancia de que las características probabilísticas de las funciones aleatorias estacionarias no cambian, cualesquiera que sean los decalajes en tiempo (o en general a lo largo del eje del argumento), y determinar las características probabilísticas de la función aleatoria estacionaria por una realización suya, desplazándola por el eje del argumento mediante todos los procedimientos posibles? Para resolver esta cuestión, pongamos en claro cuáles son las condiciones en que una sola realización de la función aleatoria estacionaria, desplazada por el eje del argumento mediante todos los métodos posibles, puede sustituir una gran cantidad de realizaciones que se observan al tener el argumento un solo valor fijo.

Más exactamente, hallemos las condiciones en que la esperanza matemática de una función aleatoria estacionaria puede ser determinada como valor medio en tiempo de las ordenadas de una realización suya tomada arbitrariamente. Con otras palabras, determinemos cuáles son las condiciones en que para cualquier realización $x(t)$ de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ tiene lugar la igualdad aproximada

$$m_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (5.5.1)$$

Es obvio que la integral del segundo miembro de esta fórmula tiene diferentes valores para distintas realizaciones posibles de la función aleatoria $X(t)$. Por eso los valores del segundo miembro de la fórmula (5.5.1), correspondientes a distintas realizaciones posibles de la función aleatoria $X(t)$, son valores posibles de la magnitud aleatoria

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt. \quad (5.5.2)$$

La esperanza matemática de esta magnitud aleatoria es, evidentemente, igual a m_x puesto que la esperanza matemática de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ es constante e igual a m_x . Por eso, para que se pueda escribir la igualdad aproximada (5.5.1), es necesaria y suficiente la pequeñez de la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T . En virtud de la fórmula (4.7.5) para la dispersión de la integral de la función aleatoria, la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T se expresa por la fórmula

$$D[Y_T] = M \left[\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt - m_x \right\}^2 \right] = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T k_x(t-t') dt dt'. \quad (5.5.3)$$

Esta fórmula muestra que la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T y, por lo tanto, el error cuadrático medio de la igualdad aproximada (5.5.1), se puede hacer tan pequeña como se quiera eligiendo un valor de T bastante grande, siempre que el valor medio de la función correlativa en el cuadrado con el lado T tienda a cero al aumentar ilimitadamente el lado de este cuadrado. La condición suficiente para esto es la existencia de un tal valor τ_0 que la función correlativa $k_x(\tau)$ pueda ser considerada prácticamente igual a cero para $|\tau| > \tau_0$. Con otras palabras, para que la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T tienda a cero cuando $T \rightarrow \infty$, es suficiente que exista el intervalo finito de correlación de la función aleatoria estacionaria $X(t)$.

Para demostrar la afirmación expuesta, supongamos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\tau_0 > 0$ que

$$|k_x(\tau)| < \varepsilon \quad \text{si } |\tau| > \tau_0. \quad (5.5.4)$$

Dividamos el cuadrado $0 < t, t' < T$ en tres zonas con ayuda de las rectas $t - t' = \pm \tau_0$. (En la zona S_1 , sombreada en la fig. 5.5.1, la función correlativa no sobrepasa su valor en la diagonal $k_x(0) = D_x$ y en las dos zonas restantes, señaladas en la fig. 5.5.1 por la letra S_2 , la función correlativa es menor que ε . Por consiguiente,

$$\int_0^T \int_0^T k_x(t-t') dt dt' < D_x \text{ área } S_1 + \varepsilon \text{ área } S_2. \quad (5.5.5)$$

Pero el área de la zona S_1 es menor que $T \sqrt{2} \cdot \tau_0 \sqrt{2} = 2T \tau_0$ y el área sumaria de las zonas señaladas por la letra S_2 es menor que el

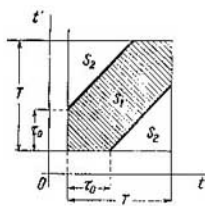


Fig. 5.5.1.

área del cuadrado T^2 . Por lo tanto,

$$\int_0^T \int_0^T k_x(t-t') dt dt' < 2D_x T \tau_0 + \varepsilon T^2$$

Y

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T k_x(t-t') dt dt' < \frac{2D_x \tau_0}{T} + \varepsilon. \quad (5.5.6)$$

Debido a la pequeñez arbitraria de ε , el segundo miembro de esta desigualdad se puede hacer tan pequeño como se quiera eligiendo un T suficientemente grande. Ahora bien, de (5.5.3) y (5.5.6) se deriva que la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T tiende a cero para $T \rightarrow \infty$ si la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ tiende a cero para $\tau \rightarrow \infty$.

Las funciones aleatorias estacionarias para las cuales la toma de un valor medio probabilístico por una numerosidad de todas las realizaciones posibles se puede sustituir, al calcular las esperanzas matemáticas, por la toma de un valor medio simple del tiempo de una sola realización tomada arbitrariamente, se denominan *ergódicas*. En dependencia de cuáles son las magnitudes, ligadas con la función aleatoria en cuestión, cuyas esperanzas matemáticas se puede calcular a base de una sola realización suya (cualquiera) tomando un valor medio del argumento, se puede hablar de diferente grado de ergodicidad. En particular, acabamos de demostrar que la tendencia de la función correlativa $k_x(\tau)$ a cero para $\tau \rightarrow \infty$ es una condición suficiente de ergodicidad de la función aleatoria estacionaria con respecto a la esperanza matemática.

La desigualdad (5.5.6) muestra que la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T depende de la relación entre la longitud de registro T de la realización de la función aleatoria $X(t)$ y el intervalo de correlación $2\tau_0$ de la misma. Así pues, para poder escribir la igualdad aproximada (5.5.1) es necesario que la longitud de registro T de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ sea lo suficientemente grande en comparación con su intervalo de correlación. Hablando metafóricamente, se puede decir que la igualdad (5.5.1) es válida si el intervalo de registro T de la función aleatoria $X(t)$ es lo suficientemente grande para que se manifieste bien su carácter aleatorio.

Ejemplo 5.5.1. ¿Cuál longitud de registro de la función aleatoria estacionaria $X(t)$, que tiene la función correlativa $D e^{-\alpha|t|}$ debe tomarse para determinar su esperanza matemática por la fórmula (5.5.1) con un error cuadrático medio que no supere a $\sqrt{D}/10$?

Según los datos, la dispersión de la magnitud aleatoria Y_T no debe superar en este caso a $D/100$. Por eso elegimos $\varepsilon = D/200$ y hallamos τ_0 partiendo de la condición

$$D e^{-\alpha \tau_0} = \frac{D}{200}.$$

Obtenemos $\tau_0 \approx 5,3/\alpha$. Para que el primer sumando del segundo miembro de la desigualdad (5.5.6) no supere a $D/200$, es suficiente elegir la longitud de registro T , partiendo de la condición

$$\frac{2D\tau_0}{T} = \frac{D}{200}.$$

De aquí hallamos $T/\tau_0 = 400$ o $T \approx 2120/\alpha$. De este modo, para que el error cuadrático medio, al determinar la esperanza matemática de la función aleatoria por la fórmula (5.5.1), no exceda el 10% con respecto a la desviación cuadrática media de la función aleatoria, en este caso es suficiente registrar la realización de la función aleatoria en el intervalo T 200 veces mayor que el intervalo de correlación $2\tau_0$.

El valor de la función correlativa $k_x(\tau_0)$ de la función aleatoria estacionaria para cualquier τ_0 es la esperanza matemática de la función aleatoria $Z(t) = X^0(t) X^0(t + \tau_0)$:

$$k_x(\tau_0) = MX^0[(t) X^0(t + \tau_0)] = M[Z(t)]. \quad (5.5.7)$$

Por eso en ciertas condiciones la función correlativa de una función aleatoria estacionaria también puede determinarse a base de una sola realización de esta función aleatoria tomando su valor medio referente al tiempo. Esto es posible si la función aleatoria $Z(t)$ es ergódica con respecto a la esperanza matemática. La condición suficiente de su ergodicidad es la tendencia a cero de su función correlativa $k_z(\tau)$ para $|\tau| \rightarrow \infty$ que se determina, evidentemente, por el momento de cuarto orden de la función aleatoria $X(t)$. Calculemos la función correlativa de la función aleatoria $Z(t)$ para el caso cuando la función aleatoria estacionaria $X(t)$ está repartida normalmente. Para esto hallemos primeramente el momento inicial de segundo orden de la función aleatoria $Z(t)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_z(t, t + \tau) &= M[Z(t) Z(t + \tau)] = \\ &= M[X^0(t) X^0(t + \tau_0) X^0(t + \tau) X^0(t + \tau_0 + \tau)]. \end{aligned}$$

Así pues, el momento inicial de segundo orden de la función aleatoria $Z(t)$ representa el momento central de cuarto orden de los valores de la función aleatoria $X(t)$ para los valores del argumento $t, t + \tau_0, t + \tau, t + \tau_0 + \tau$. Expresando este momento mediante la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ por la fórmula (3.11.34), obtendremos

$$\Gamma_z(t, t + \tau) = k_x^2(\tau_0) + k_x^2(\tau) + k_x(\tau + \tau_0) k_x(\tau - \tau_0).$$

Aplicando la fórmula (4.2.12) que liga la función correlativa de una función aleatoria con la esperanza matemática de la misma y con el momento de segundo orden, y teniendo en cuenta que la esperanza matemática de la función aleatoria $Z(t)$ es igual a $k_x(\tau_0)$, hallamos la función correlativa de la función aleatoria $Z(t)$:

$$k_z(\tau) = \Gamma_z(t, t + \tau) - k_x^2(\tau_0) = k_x^2(\tau) + k_x(\tau + \tau_0) k_x(\tau - \tau_0). \quad (5.5.8)$$

De aquí se ve que la condición $k_x(\tau) \rightarrow 0$ para $|\tau| \rightarrow \infty$ es suficiente para la ergodicidad de la función aleatoria $Z(t)$ con respecto a la esperanza matemática y para la ergodicidad de la función aleatoria $X(t)$ con respecto a la función correlativa.

Así pues, el decrecimiento ilimitado de la función correlativa de una función aleatoria estacionaria normalmente repartida para $|\tau| \rightarrow \infty$, es la condición suficiente de su ergodicidad tanto con respecto a la esperanza matemática como con respecto a la función correlativa. Al cumplir esta condición, la función correlativa de una función aleatoria estacionaria $X(t)$ normalmente repartida, cuando el valor de T es lo suficientemente grande, puede ser determinada aproximadamente por la fórmula

$$k_x(\tau_0) \approx \frac{1}{T} \int_0^T x^0(t) x^0(t + \tau_0) dt = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][x(t + \tau_0) - m_x] dt. \quad (5.5.9)$$

Ejemplo 5.5.2. Las funciones aleatorias estacionarias normalmente repartidas, con las tres funciones correlativas tipo examinadas en los párrafos anteriores, que contienen como multiplicador una función exponencial, son ergódicas tanto con respecto a la esperanza matemática como con respecto a la función correlativa, puesto que todas estas funciones correlativas tienden a cero cuando $|\tau| \rightarrow \infty$. Por eso las esperanzas matemáticas y las funciones correlativas de las mismas se pueden determinar por las fórmulas (5.5.1) y (5.5.9) para un valor de T lo suficientemente grande.

Ejemplo 5.5.3. Para una función aleatoria estacionaria sinusoidal de frecuencia determinada $X(t) = U \sin \omega_0 t + Z \cos \omega_0 t$, $M[U] = M[Z] = 0$, $D[U] = D[Z] = D$, no se cumple la condición suficiente de ergodicidad, puesto que su función correlativa $k_x(\tau) = D \cos \omega_0 \tau$ no tiende a cero cuando $|\tau| \rightarrow \infty$. Para establecer si ésta es ergódica o no, calculemos para ella los segundos miembros de las fórmulas (5.5.1) y (5.5.9). Obtendremos

$$M_x^* = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (U \sin \omega_0 t + Z \cos \omega_0 t) dt = \\ = \frac{1}{T \omega_0} [U(1 - \cos \omega_0 T) + Z \sin \omega_0 T].$$

De aquí se ve que el segundo miembro de la fórmula (5.5.1) tiende en este caso a cero, es decir, a la esperanza matemática de la función aleatoria para $T \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la función aleatoria estacionaria sinusoidal es ergódica con respecto a la esperanza matemática. De un modo semejante hallamos

$$K_x^*(\tau_0) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) X(t + \tau_0) dt \approx \frac{U^2 + Z^2}{2} \cos \omega_0 \tau_0$$

para grandes valores de T . De aquí se ve que el segundo miembro de la fórmula (5.5.9) es aproximadamente proporcional al cuadrado de la amplitud aleatoria $A^2 = U^2 + Z^2$ de la sinusoidé y por eso tiene diferentes valores para distintas

realizaciones. Por consiguiente, la función aleatoria estacionaria sinusoidal no es ergódica con respecto a la función correlativa. Para confirmar esta deducción, calculemos además la dispersión de la magnitud aleatoria $K_x^*(\tau_0)$ suponiendo que las magnitudes aleatorias U y Z están repartidas normalmente. Teniendo en cuenta que su esperanza matemática es igual a la función correlativa $k_x(\tau_0) = D \cos \omega_0 \tau_0$, obtendremos

$$D |K_x^*(\tau_0)| \approx M \left[\left(\frac{U^2 + Z^2}{2} \cos \omega_0 \tau_0 - D \cos \omega_0 \tau_0 \right)^2 \right] = \\ = M \left[\frac{U^4 + 2U^2Z^2 + Z^4}{4} - D(U^2 + Z^2) + D^2 \right] \cos^2 \omega_0 \tau_0.$$

Pero para las magnitudes aleatorias normalmente repartidas el momento central de cuarto orden es igual al cuadrado triplicado de la dispersión [véase la fórmula (2.5.11)]. Por eso $M[U^4] = M[Z^4] = 3D^2$ y obtendremos

$$D |K_x^*(\tau_0)| \approx D^2 \cos^2 \omega_0 \tau_0.$$

Ejemplo 5.5.4. Cualquier función aleatoria estacionaria con realizaciones puramente sinusoidales no es ergódica con respecto a la función correlativa incluso si su función correlativa tiende a cero cuando $|\tau| \rightarrow \infty$. En efecto, si la función aleatoria estacionaria $X(t)$ se determina por la fórmula

$$X(t) = m_x + U \sin \Omega t + Z \cos \Omega t,$$

donde U y Z son magnitudes aleatorias no correlacionadas, con esperanzas matemáticas iguales a cero y dispersiones iguales a D , y Ω es cualquier magnitud aleatoria no negativa, independiente de las magnitudes U , Z , entonces, conforme a los resultados del ejemplo anterior

$$M_x^* = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \approx m_x, \\ K_x^*(\tau_0) = \frac{1}{T} \int_0^T X^0(t) X^0(t + \tau_0) dt \approx \frac{U^2 + Z^2}{2} \cos \Omega \tau_0$$

para grandes valores de T . La primera fórmula muestra que la función aleatoria con realizaciones puramente sinusoidales es ergódica con respecto a la esperanza matemática. La segunda fórmula muestra que el segundo miembro de la fórmula (5.5.9) tiende a diferentes límites para distintas realizaciones cuando $T \rightarrow \infty$ y no tiende, para ninguna realización, a la función correlativa.

Los ejemplos examinados muestran que ninguna función aleatoria estacionaria, todas las posibles realizaciones de la cual son sinusoidales, puede ser ergódica con respecto a la función correlativa y, por consiguiente, su función correlativa no puede ser calculada con ayuda de una sola realización. En el § 5.2. vimos que, cualquiera que sea la función correlativa $k_x(\tau)$, siempre existen funciones aleatorias estacionarias, con realizaciones puramente sinusoidales, que tienen esta función correlativa. Por eso a toda función correlativa $k_x(\tau)$ le corresponden siempre funciones aleatorias estacionarias tanto ergódicas como no ergódicas con respecto a la función correlativa. Por lo tanto, conociendo solamente la función correlativa de una función

aleatoria estacionaria, no se puede determinar si es ella ergódica con respecto a la función correlativa o no. Para resolver esta cuestión, siempre se necesita disponer de una información adicional acerca de las características estadísticas de la función aleatoria estacionaria, por ejemplo, conocer que la función aleatoria está repartida normalmente. Como vimos, si se trata de funciones aleatorias estacionarias normalmente repartidas, basta conocer la función correlativa para resolver la cuestión acerca de la ergodicidad *).

Hemos visto que para una función aleatoria estacionaria, ergódica con respecto a la esperanza matemática y la función correlativa, la esperanza matemática y la función correlativa pueden ser calculadas, por una cualquiera de sus realizaciones, por las fórmulas (5.5.4) y (5.5.9), con ello, la fluctuación de los resultados de los cálculos para distintas realizaciones tiende a cero al aumentar ilimitadamente la longitud de las realizaciones T . Esto da razón para sustituir en las fórmulas (5.5.4) y (5.5.9) la realización de la función aleatoria por la propia función aleatoria y, pasando al límite, escribir las igualdades exactas

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt, \quad (5.5.10)$$

$$k_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X^0(t) X^0(t + \tau) dt. \quad (5.5.11)$$

En estas fórmulas el límite debe entenderse en el sentido probabilístico, es decir, en el sentido de que la esperanza matemática del cuadrado de la diferencia entre la magnitud y su límite tiende a cero (el así llamado *límite en la media cuadrática*). Poniendo en la fórmula (5.5.11) $\tau = 0$, obtendremos la siguiente fórmula para la dispersión de una función aleatoria estacionaria, ergódica con respecto a la función correlativa:

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [X^0(t)]^2 dt. \quad (5.5.12)$$

Expongamos ahora la interpretación física de la noción de densidad espectral de una función aleatoria estacionaria. Para esto examinemos la función aleatoria estacionaria $X(t)$ ergódica (con respecto a la función correlativa).

En los problemas prácticos la función aleatoria $X(t)$ representa frecuentemente la corriente o la tensión existente en cierto circuito.

*) Vimos que siempre basta conocer la función correlativa para juzgar acerca de la ergodicidad de la función aleatoria estacionaria con respecto a la esperanza matemática. De aquí se puede deducir que para juzgar sobre la ergodicidad de una función aleatoria estacionaria con respecto a la función correlativa es suficiente conocer el momento de cuarto orden de esta función aleatoria.

Con ello, la esperanza matemática m_x es la componente constante de corriente o de tensión, mientras que la función aleatoria centrada $X^0(t)$ representa las fluctuaciones de la corriente o de la tensión. La magnitud $[X^0(t)]^2$ es la potencia instantánea de la corriente de fluctuación, en la resistencia unitaria y la magnitud

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T [X^0(t)]^2 dt \quad (5.5.13)$$

es la potencia media de la corriente de fluctuación en la resistencia unitaria. Pero conforme a la fórmula (5.5.12) la magnitud W para la función aleatoria estacionaria ergódica $X(t)$ no difiere prácticamente de la dispersión de la función aleatoria $X(t)$ para T lo suficientemente grande, debido a lo cual se puede escribir

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T [X^0(t)]^2 dt \approx D_x \quad (5.5.14)$$

o bien, teniendo en cuenta (5.3.16)

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T [X^0(t)]^2 dt \approx \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) d\omega. \quad (5.5.15)$$

Esta fórmula muestra que la densidad espectral $s_x(\omega)$ caracteriza en este caso la distribución de la potencia media de las fluctuaciones de la corriente en el espectro de frecuencias. Debido a este sentido físico de la densidad espectral, a ésta se le llama con frecuencia *densidad espectral de potencia* de una función aleatoria estacionaria.

La fórmula (5.5.15) muestra que las fluctuaciones de corriente pueden tener una densidad espectral constante solamente en aquel caso cuando la potencia media de estas fluctuaciones es infinita. Esto confirma la deducción hecha en el párrafo precedente de que el ruido blanco no puede existir físicamente.

§ 5.6. Densidad espectral recíproca de dos funciones aleatorias estacionarias y enlazadas estacionariamente

Hallemos la función correlativa recíproca de dos funciones aleatorias estacionarias $X(t)$ e $Y(t)$. Para esto representémoslas por las descomposiciones espectrales en forma compleja:

$$X(t) = m_x + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (5.6.1)$$

$$Y(t) = m_y + \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (5.6.2)$$

donde $V(\omega)$ y $W(\omega)$ son dos ruidos blancos complejos cuyas intensidades son iguales a las densidades espectrales $s_x(\omega)$ y $s_y(\omega)$ de las funciones aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$ respectivamente. Para determinar la función correlativa recíproca, hallamos las correspondientes funciones aleatorias centrales. Con ello, teniendo en cuenta la determinación de la función correlativa recíproca de las funciones aleatorias complejas, pasemos en la expresión (5.6.2) de la función aleatoria real $Y(t)$ a las magnitudes conjugadas complejas y cambiemos la designación del argumento y de la variable de integración. Entonces obtendremos:

$$X^0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \overline{Y^0(t')} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W(\omega')} e^{-i\omega' t'} d\omega'.$$

De aquí hallamos

$$I_{xy}(t, t') = M [X^0(t) \overline{Y^0(t')}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M [V(\omega) \overline{W(\omega')}] e^{i(\omega t - \omega' t')} d\omega d\omega'.$$

Pero la esperanza matemática bajo el signo integral representa la función correlativa recíproca de los ruidos blancos $V(\omega)$ y $W(\omega)$:

$$M [V(\omega) \overline{W(\omega')}] = K_{vw}(\omega, \omega').$$

Por consiguiente, la función correlativa recíproca de las funciones aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$ se expresa por medio de la función correlativa recíproca de los ruidos blancos $V(\omega)$ y $W(\omega)$ por la fórmula

$$K_{xy}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{vw}(\omega, \omega') e^{i(\omega t - \omega' t')} d\omega d\omega'. \quad (5.6.3)$$

Esta fórmula muestra que en el caso general las funciones aleatorias estacionarias, pueden estar ligadas no estacionariamente, puesto que su función correlativa recíproca depende de dos argumentos por separado. Para que las funciones aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$ estén ligadas estacionariamente, es necesario que sea $K_{vw}(\omega, \omega') = 0$ para $\omega' \neq \omega$; es decir, que los valores de los ruidos blancos $V(\omega)$ y $W(\omega)$, siendo diferentes los valores de la frecuencia ω , estén no correlacionados. En este caso la función correlativa recíproca de los ruidos blancos $V(\omega)$ y $W(\omega)$ debe contener como multiplicador la función delta:

$$K_{vw}(\omega, \omega') = s_{xy}(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (5.6.4)$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (5.6.3) y tomando en consideración las propiedades de las funciones delta, obtendremos

$$\begin{aligned} K_{xy}(t, t') &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{xy}(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t - \omega' t')} \delta(\omega - \omega') d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{xy}(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega. \end{aligned}$$

De aquí se ve que en el caso en que la función correlativa recíproca de los ruidos blancos $V(F)$ y $W(\omega)$ se expresa por la fórmula (5.6.4), las funciones aleatorias estacionarias $X(t)$ e $Y(t)$ están ligadas estacionariamente y su función correlativa recíproca se determina por la fórmula

$$k_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (5.6.5)$$

La fórmula (5.6.5) es completamente análoga a la (5.3.15) que expresa la función correlativa de una función aleatoria estacionaria por medio de su densidad espectral. Esto da razón para llamar a la función $s_{xy}(\omega)$ *densidad espectral recíproca* de dos funciones aleatorias estacionarias y enlazadas estacionariamente $X(t)$ e $Y(t)$. Es obvio que la magnitud $s_{xy}(\omega) d\omega$ representa el momento de correlación de los armónicos $V(\omega)e^{i\omega t} d\omega$ y $W(\omega)e^{i\omega t} d\omega$ de una misma frecuencia ω que forman parte de las funciones aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$. Los armónicos de diferentes frecuencias en las funciones aleatorias ligadas estacionariamente siempre no están correlacionados; sólo los armónicos de la misma frecuencia pueden ser correlacionados. Ahora bien, la densidad espectral recíproca caracteriza la distribución del enlace correlativo entre las funciones aleatorias en el espectro de frecuencias.

La fórmula (5.6.5) muestra que la densidad espectral recíproca representa la transformación de Fourier de la función correlativa recíproca. Por eso, aplicando la fórmula de la transformación inversa de Fourier, obtendremos

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (5.6.6)$$

Esta fórmula expresa la densidad espectral recíproca de dos funciones aleatorias estacionarias y enlazadas estacionariamente mediante su función correlativa recíproca.

Ejemplo 5.6.1. Hallar la densidad espectral recíproca de las funciones aleatorias estacionarias y enlazadas estacionariamente $X(t)$ e $Y(t)$ cuya fun-

ción correlativa recíproca se determina por la fórmula

$$k_{xy}(\tau) = C e^{-\alpha|\tau|} \operatorname{sen} \omega_0 \tau, \quad \beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2.$$

Por la fórmula (5.6.6) hallamos

$$\begin{aligned} s_{xy}(\omega) &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} \operatorname{sen} \omega_0 \tau \, d\tau = \\ &= \frac{C}{4\pi i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\tau + i\omega_0\tau - i\omega\tau} \, d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau + i\omega_0\tau - i\omega\tau} \, d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\tau - i\omega_0\tau - i\omega\tau} \, d\tau - \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau - i\omega_0\tau - i\omega\tau} \, d\tau \right] \end{aligned}$$

o bien, después de cumplir la integración y transformaciones elementales

$$s_{xy}(\omega) = -\frac{2C}{\pi} \cdot \frac{i\alpha\omega\omega_0}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}.$$

Esta fórmula muestra que la densidad espectral recíproca de las funciones aleatorias reales puede ser compleja.

Ejemplo 5.6.2. Hallar la función correlativa recíproca de las funciones aleatorias

$$Y(t) = X(t) + X_1(t), \quad Z(t) = X(t) + X_2(t),$$

donde $X(t)$, $X_1(t)$ y $X_2(t)$ son funciones aleatorias estacionarias no correlacionadas con las funciones correlativas $D_1 e^{-\alpha_1|\tau|}$, $D_2 e^{-\alpha_2|\tau|}$ y $D_3 e^{-\alpha_3|\tau|}$, respectivamente. Mostrar que las funciones aleatorias $Y(t)$ y $Z(t)$ están enlazadas estacionariamente y hallar su densidad espectral recíproca.

Según la definición de la función correlativa recíproca

$$\begin{aligned} K_{yz}(t, t') &= M[Y^0(t) Z^0(t')] = M[X^0(t) X^0(t')] + \\ &\quad + M[X_1^0(t) X^0(t')] + M[X^0(t) X_2^0(t')] + M[X_1^0(t) X_2^0(t')] \end{aligned}$$

o bien, puesto que las funciones aleatorias $X(t)$, $X_1(t)$ y $X_2(t)$ no están correlacionadas,

$$K_{yz}(t, t') = M[X^0(t) X^0(t')] = k_x(t - t').$$

De aquí se ve que las funciones aleatorias $Y(t)$ y $Z(t)$ están enlazadas estacionariamente y su función correlativa recíproca coincide con la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$. Por lo tanto, la densidad espectral recíproca de las funciones aleatorias $Y(t)$ y $Z(t)$ también coincide con la densidad espectral de la función aleatoria $X(t)$:

$$s_{yz}(\omega) = s_x(\omega) = \frac{D}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

§ 5.7. Secuencias aleatorias estacionarias

Examinemos la secuencia aleatoria formada por los valores de una función aleatoria estacionaria que corresponden a la secuencia ilimitada de los valores equidistantes del argumento con el intervalo Δ :

$$X_h = X(t_0 + h\Delta) \quad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.7.1)$$

Esta secuencia aleatoria es estacionaria, puesto que su función correlativa depende solamente de la diferencia de los números de los términos de la secuencia:

$$k_m = M [X_n^0 X_{n+m}^0] = \\ = M [X^0(t_0 + h\Delta) X^0(t_0 + h\Delta + m\Delta)] = k_x(m\Delta). \quad (5.7.2)$$

Expresemos aquí la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ por la fórmula (5.3.15). Entonces, obtendremos

$$k_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) e^{i\omega m\Delta} d\omega.$$

Dividamos el intervalo de integración en los segmentos de $2\pi/\Delta$ de longitud dispuestos simétricamente con respecto al origen de coordenadas. Entonces tendremos

$$k_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{(2\nu-1)\pi/\Delta}^{(2\nu+1)\pi/\Delta} s_x(\omega) e^{i\omega m\Delta} d\omega.$$

Sustituyendo las variables $\omega = 2\nu\pi/\Delta + \omega'$, en las integrales correspondientes, las reducimos todas a los mismos límites de integración:

$$k_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} s_x\left(\omega' + \frac{2\nu\pi}{\Delta}\right) e^{i\omega' m\Delta + 2\nu\pi i} d\omega'.$$

Omitiendo la raya adjunta a la designación de la variable de integración y teniendo en cuenta que $e^{2\nu\pi i} = 1$, podemos escribir la fórmula obtenida en la forma

$$k_m = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s_x\left(\omega + \frac{2\nu\pi}{\Delta}\right) \right] e^{i\omega m\Delta} d\omega.$$

Por fin, introduciendo la designación

$$s_x^d(\omega) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s_x\left(\omega + \frac{2\nu\pi}{\Delta}\right), \quad (5.7.3)$$

obtendremos

$$k_m = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} s_x^d(\omega) e^{i\omega m\Delta} d\omega. \quad (5.7.4)$$

En particular, poniendo $m = 0$, obtendremos la siguiente expresión para la dispersión de los términos de la secuencia aleatoria estacio-

naría

$$D_x = k_0 = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} s_x^d(\omega) d\omega. \quad (5.7.5)$$

Demostremos que la función $s_x^d(\omega)$ determinada por la fórmula (5.7.3) es periódica con un período de $2\pi/\Delta$. Para eso sustituyamos en la fórmula (5.7.3) ω por la magnitud $\omega + 2\pi/\Delta$. Entonces obtendremos

$$s_x^d\left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s_x\left(\omega + \frac{2(\nu+1)\pi}{\Delta}\right).$$

Pongamos aquí $\mu = \nu + 1$ y observemos que μ , al igual que ν , recorre todos los valores enteros de $-\infty$ a ∞ . Como resultado tendremos

$$s_x^d\left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta}\right) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s_x\left(\omega + \frac{2\mu\pi}{\Delta}\right).$$

Comparando esta fórmula con (5.7.3) y teniendo en cuenta que la suma no depende de cómo está designado el índice de adición (éste recorre todos los valores enteros de $-\infty$ a ∞), obtendremos

$$s_x^d\left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta}\right) = s_x^d(\omega). \quad (5.7.6)$$

lo que demuestra precisamente la afirmación enunciada.

La función periódica puede ser descompuesta en la serie de Fourier *). Por eso la función $s_x^d(\omega)$ también puede ser representada por una serie compleja de Fourier:

$$s_x^d(\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p e^{i\omega p \Delta}. \quad (5.7.7)$$

Los coeficientes de esta serie se determinan por la fórmula conocida de la Teoría de series de Fourier:

$$a_p = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} s_x^d(\omega) e^{-i\omega p \Delta} d\omega.$$

Comparando esta fórmula con la (5.7.4) para $m = -p$, vemos que los coeficientes de Fourier de la función $s_x^d(\omega)$ se expresan por medio de la función correlativa de la secuencia aleatoria:

$$a_p = \frac{\Delta}{2\pi} k_{-p}.$$

*) Para esto es suficiente que la función periódica sea continua o tenga un número finito de puntos de discontinuidad de primer género.

Sustituyendo esta expresión en (5.7.7), obtendremos

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} k_{-p} e^{i\omega p \Delta}.$$

Por fin, poniendo aquí $-p = m$ y teniendo en cuenta que m , al igual que p , recorre todos los valores enteros de $-\infty$ a ∞ , obtendremos

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m e^{-i\omega m \Delta}. \quad (5.7.8)$$

Expresemos ahora la función aleatoria estacionaria $X(t)$ por la descomposición espectral (5.3.3). Entonces obtendremos la siguiente fórmula para los términos de la secuencia aleatoria estacionaria que se examina:

$$X(t_0 + t\Delta) = X_h = m_x + \int_{-\infty}^{+\infty} V_d(\omega) e^{i\omega(t_0 + t\Delta)} d\omega.$$

Cumpliendo aquí las mismas transformaciones que al deducir la fórmula (5.7.4), obtendremos

$$X_h = m_x + \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} V_d(\omega) e^{i\omega h \Delta} d\omega, \quad (5.7.9)$$

donde

$$V_d(\omega) = e^{i\omega t_0} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} V\left(\omega + \frac{2\pi\nu}{\Delta}\right). \quad (5.7.10)$$

Así pues, hemos obtenido la representación espectral de una secuencia aleatoria estacionaria. Con ello, debido a la periodicidad de la función exponencial del argumento puramente imaginario, el espectro de frecuencias de la secuencia aleatoria se puede considerar concentrado en el intervalo $|\omega| < \pi/\Delta$. Las fórmulas (5.7.4) y (5.7.8) son análogas a las de Wiener-Jinchin (5.3.11) y (5.3.15).

Mostremos ahora que la función aleatoria $V_d(\omega)$ en la representación espectral de una secuencia aleatoria estacionaria no es más que un ruido blanco cuya intensidad es igual a $s_x^d(\omega)$. Para esto hallems la función correlativa de la función aleatoria $V_d(\omega)$. Con ello, es suficiente considerarla solamente en el intervalo de frecuencias $|\omega| < \pi/\Delta$. Puesto que los sumandos en la suma que figura en (5.7.10) han sido obtenidos decaando el ruido blanco $V(\omega)$ en intervalos múltiples del período $2\pi/\Delta$, todos ellos no están correlacionados en los límites de un período $|\omega| < \pi/\Delta$. Por eso la función correlativa de la suma en (5.7.10) es igual a la suma de las funciones correlativas de los sumandos. El multiplicador $e^{i\omega t_0}$ en (5.7.10)

dará el multiplicador $e^{i(\omega - \omega')t_0}$ en la expresión de la función correlativa de la función aleatoria $V_d(\omega)$. Por eso, teniendo en cuenta la fórmula (5.3.8) para la función correlativa del ruido blanco $V(\omega)$, obtendremos

$$K_{v_d}(\omega, \omega') = e^{i(\omega - \omega')t_0} \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s_x \left(\omega + \frac{2\pi\nu}{\Delta} \right) \right] \delta(\omega - \omega').$$

Tomando en consideración que el segundo miembro de esta fórmula es igual a cero, siendo $\omega' \neq \omega$, podemos sustituir en el multiplicador, delante de la función delta, ω' por ω . Entonces, teniendo en cuenta la fórmula (5.7.3), obtendremos

$$K_{v_d}(\omega, \omega') = s_x^d(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (5.7.11)$$

Esta fórmula demuestra que la función aleatoria $V_d(\omega)$ en el intervalo $|\omega| < \pi/d$ representa un ruido blanco con intensidad $s_x^d(\omega)$.

La función $s_x^d(\omega)$ representa la densidad espectral de una secuencia aleatoria estacionaria. La magnitud $s_x^d(\omega) d\omega$ es igual a la dispersión de los armónicos $V_d(\omega) e^{i\omega h \Delta} d\omega$ y $V_d(-\omega) e^{-i\omega h \Delta} d\omega$ que forman parte de la descomposición espectral (5.7.9) de la secuencia aleatoria estacionaria.

Ejemplo 5.7.1. Hallar la densidad espectral de una secuencia aleatoria estacionaria con la función correlativa $k_m = Dq^{|m|}$, $0 < q < 1$.

Representemos previamente la fórmula (5.7.8) en la forma

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \left(k_0 + \sum_{m=-\infty}^{-1} k_m e^{-i\omega m \Delta} + \sum_{m=1}^{\infty} k_m e^{-i\omega m \Delta} \right).$$

Poniendo en la primera suma $-m = p$ y en la segunda, $m = p$ y teniendo en cuenta que $k_{-p} = k_p$, escribamos la fórmula obtenida en la forma

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \left(k_0 + \sum_{p=1}^{\infty} k_p e^{i\omega p \Delta} + \sum_{p=1}^{\infty} k_p e^{-i\omega p \Delta} \right). \quad (5.7.12)$$

Sustituyendo aquí la expresión de la función correlativa, nos cercioramos de que ambas sumas representan en este caso progresiones geométricas. Sumándolas, obtendremos la siguiente expresión de la secuencia aleatoria estacionaria que so examina:

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta D}{2\pi} \left(1 + \frac{q e^{i\omega \Delta}}{1 - q e^{i\omega \Delta}} + \frac{q}{e^{i\omega \Delta} - q} \right). \quad (5.7.13)$$

Ejemplo 5.7.2. Hallar la densidad espectral de la secuencia aleatoria estacionaria formada por los valores de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ con la función correlativa $D e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, tomados cada intervalo Δ .

La función correlativa de la secuencia en cuestión se determina por la fórmula

$$k_m = D e^{-\alpha|m|\Delta} \cos \omega_0 m \Delta = \frac{D}{2} (q_1^{|m|} + q_2^{|m|}),$$

donde $q_1 = e^{-\alpha\Delta + i\omega_0\Delta}$, $q_2 = e^{-\alpha\Delta - i\omega_0\Delta}$. Sustituyendo la expresión obtenida de la función correlativa de la secuencia en la fórmula (5.7.12) y sumando las progresiones geométricas, hallaremos la densidad espectral:

$$s_x^d(\omega) = \frac{\Delta D}{4\pi} \left(2 + \frac{q_1 e^{i\omega\Delta}}{1 - q_1 e^{i\omega\Delta}} + \frac{q_1}{e^{i\omega\Delta} - q_1} + \frac{q_2 e^{i\omega\Delta}}{1 - q_2 e^{i\omega\Delta}} + \frac{q_2}{e^{i\omega\Delta} - q_2} \right). \quad (5.7.14)$$

Le dejamos al lector que por sí mismo demuestre que en el caso de una función correlativa más general (5.3.24) la densidad espectral se expresará por la fórmula que se diferencia de (5.7.14) solamente por el multiplicador adicional $1 - i\gamma$ en los sumandos con q_1 y por el multiplicador adicional $1 + i\gamma$ en los sumandos con q_2 .

Las fórmulas (5.7.13) y (5.7.14) muestran que para todas las funciones correlativas tipo de las funciones aleatorias estacionarias, las densidades espectrales de las secuencias aleatorias estacionarias correspondientes son funciones racionales de la magnitud $e^{i\omega\Delta}$. Esto da razón para introducir en las fórmulas (5.7.4) y (5.7.8) en vez de ω una nueva variable $z = e^{i\omega\Delta}$. Entonces, poniendo

$$\sigma_x^d(z) = \frac{1}{\Delta} s_x^d(\omega) = \frac{1}{\Delta} s_x^d \left(\frac{1}{i\Delta} \ln z \right) \quad (5.7.15)$$

y teniendo en cuenta que $dz = iz \Delta d\omega$, reduzcamos las fórmulas (5.7.4), (5.7.5) y (5.7.8) a la forma

$$k_m = \frac{1}{i} \int_{C_1} \sigma_x^d(z) z^{m-1} dz, \quad (5.7.16)$$

$$D_x = \int_{C_1} \sigma_x^d(z) \frac{dz}{iz}, \quad (5.7.17)$$

$$\sigma_x^d(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m z^{-m}, \quad (5.7.18)$$

donde la integración se efectúa por las circunferencia C_1 de radio unitario con centro en el origen de coordenadas en el plano de la variable compleja z . Esto se ve del hecho de que para todas las ω reales, la variable z es en módulo igual a la unidad y su argumento varía de $-\pi$ a π al variar ω de $-\pi/\Delta$ a π/Δ .

Las fórmulas (5.7.16), (5.7.17) y (5.7.18) se utilizan al llevar a cabo las investigaciones teóricas de la precisión de los sistemas automáticos discretos (de impulso); ellas no son cómodas para efectuar los cálculos prácticos.

Con el fin de reducir las integrales de las fórmulas (5.7.4) y (5.7.5) a las integrales de las funciones racionales fraccionarias en los límites infinitos de la forma (5.3.29), conviene introducir una nueva varia-

ble, poniendo

$$i\lambda = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{i\omega\Delta} - 1}{e^{i\omega\Delta} + 1} = i \operatorname{tg} \frac{\omega\Delta}{2}. \quad (5.7.19)$$

De aquí se ve que para los valores reales de ω , la variable λ es real y varía monótonamente de $-\infty$ a $+\infty$ al variar ω de $-\pi/\Delta$ a π/Δ . Además, λ es función racional de z y, por lo tanto, para todas las funciones correlativas tipo y sus combinaciones lineales, las densidades espectrales de las secuencias aleatorias estacionarias correspondientes representan funciones racionales fraccionarias de λ . De (5.7.19) se puede expresar la variable z en función de λ :

$$z = e^{i\omega\Delta} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}. \quad (5.7.20)$$

Derivando (5.7.19), hallamos

$$d\lambda = \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega\Delta}{2}} \frac{\Delta}{2} d\omega = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega\Delta}{2}\right) \frac{\Delta}{2} d\omega = \frac{\Delta}{2} (1 + \lambda^2) d\omega,$$

de donde

$$\Delta d\omega = \frac{2 d\lambda}{1 + \lambda^2}. \quad (5.7.21)$$

En virtud de las fórmulas (5.7.20) y (5.7.21), introduciendo la designación

$$\tilde{s}_x(\lambda) = \frac{2}{\Delta} s_x^d \left(\frac{2}{\Delta} \operatorname{arctg} \lambda \right) = 2\sigma_x^d \left(\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda} \right). \quad (5.7.22)$$

podemos representar las fórmulas (5.7.4) y (5.7.5) en la forma

$$k_m = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_x(\lambda) \left(\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda} \right)^m \frac{d\lambda}{1+\lambda^2},$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_x(\lambda) \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}. \quad (5.7.23)$$

Esta integral se puede calcular por la fórmula (5.3.29). La fórmula para la función correlativa debe ser transformada, suprimiendo las magnitudes imaginarias en el denominador. Entonces obtendremos

$$k_m = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_x(\lambda) \frac{(1+i\lambda)^{2m}}{(1+\lambda^2)^{m+1}} d\lambda$$

o bien, descomponiendo el numerador por la fórmula del binomio de Newton y teniendo en cuenta que la función $\tilde{s}_x(\lambda)$ es par y que la integral de la función impar en los límites simétricos con respecto al origen de coordenadas es igual a cero,

$$k_m = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_x(\lambda) \sum_{p=0}^m C_{2m}^{2p} (i\lambda)^{2p} \frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)^{m+1}}. \quad (5.7.24)$$

Representaciones canónicas de las funciones aleatorias

§ 6.1. Tipos de representaciones canónicas

Para aplicar la Teoría de funciones aleatorias a los problemas prácticos, tienen gran importancia las expresiones de funciones aleatorias arbitrarias en función de objetos aleatorios más simples. Las magnitudes aleatorias escalares corrientes representan los objetos aleatorios más simples. En los §§ 3.8 y 3.9 vimos que las esperanzas matemáticas, las dispersiones y los momentos de correlación de las funciones lineales de una cantidad cualquiera de magnitudes aleatorias se calculan muy sencillamente. Con ello, las fórmulas para las dispersiones y los momentos de correlación se simplifican considerablemente, si las magnitudes aleatorias de partida no están correlacionadas. Así, por ejemplo, para determinar la dispersión de la función lineal de diez magnitudes aleatorias debemos, en el caso general, calcular 100 sumandos, mientras que en caso de magnitudes no correlacionadas, es necesario calcular solamente 10 sumandos. Esta ventaja de las magnitudes no correlacionadas crece rápidamente al aumentar el número de las mismas. Por eso, naturalmente, surge la idea de procurar representar la función aleatoria arbitraria $X(t)$ en la forma

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{v=1}^{\infty} V_v x_v(t), \quad (6.1.1)$$

donde V_1, V_2, \dots son magnitudes aleatorias no correlacionadas cuya esperanzas matemáticas son iguales a cero. Los coeficientes adjuntos a las magnitudes aleatorias V_v dependen, evidentemente, de la variable t , es decir, son funciones (no aleatorias) de la variable t . A toda representación de una función aleatoria en forma de una combinación lineal de magnitudes aleatorias no correlacionadas la llamaremos *descomposición canónica* de la misma. A las funciones aleatorias V_v las denominaremos *coeficientes aleatorios* de la descomposición canónica y a las funciones $x_v(t)$, *funciones coordenadas*.

Expresando la función aleatoria $X(t)$ por la descomposición canónica, se puede hallar también la descomposición correspondiente para su función correlativa. Para ello pongamos en (6.1.1) $t = t'$:

$$X(t') = m_x(t') + \sum_{v=1}^{\infty} V_v x_v(t'). \quad (6.1.2)$$

Para cualesquiera valores fijos de t y t' , las magnitudes $X(t)$ y $X(t')$ determinadas por las fórmulas (6.1.1) y (6.1.2) representan las funciones lineales de unas mismas magnitudes aleatorias no correlacionadas V_ν . Por lo tanto, el momento de correlación de las magnitudes aleatorias $X(t)$ y $X(t')$ para cualesquiera valores fijos de t y t' se puede calcular por la fórmula (3.9.8). Como resultado obtendremos para la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ la fórmula

$$K_x(t, t') = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu x_\nu(t) \overline{x_\nu(t')}, \quad (6.1.3)$$

donde D_ν son las dispersiones de las magnitudes aleatorias V_ν . Al deducir la fórmula (6.1.3), admitimos que en el caso general los coeficientes de la descomposición canónica V_ν y las funciones coordenadas $x_\nu(t)$ pueden ser complejos, puesto que en los problemas prácticos conviene frecuentemente representar las funciones reales por series con términos complejos. A título de ejemplo puede servir la descomposición de la función real en la serie de Fourier con términos complejos.

A toda descomposición de la función correlativa de la forma (6.1.3) la llamaremos *descomposición canónica* de la misma.

Poniendo en la fórmula (6.1.3) $t' = t$, obtendremos la descomposición correspondiente para la dispersión de la función aleatoria $X(t)$:

$$D_x(t) = K_x(t, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu |x_\nu(t)|^2. \quad (6.1.4)$$

El ruido blanco representa el tipo más simple de una función aleatoria. Por eso se puede suponer que muchas operaciones sobre una función aleatoria arbitraria se harán más simples, si esta función aleatoria se expresa en función del ruido blanco. En el ejemplo 5.4.1 vimos que el ruido blanco se puede representar en forma de una secuencia continua de impulsos aleatorios infinitesimales no correlacionados cada uno de los cuales tiene una dispersión infinitesimal. Por eso la expresión de la función aleatoria en función del ruido blanco es la extensión de la representación de su descomposición canónica (6.1.1) para el caso de sumandos infinitesimales. Como resultado, la suma en (6.1.1) será sustituida por una integral y obtendremos la representación de la función aleatoria $X(t)$ en la forma

$$X(t) = m_x(t) + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda) x(t, \lambda) d\lambda, \quad (6.1.5)$$

donde $V(\lambda)$ es el ruido blanco de parámetro λ que varía en el intervalo $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$. A toda representación de una función aleatoria en forma de integral (6.1.5) la llamaremos *representación canónica integral* de la misma. A las funciones $x(t, \lambda)$ de la variable t , corres-

pondientes a distintos valores fijos del parámetro λ en el intervalo (λ_1, λ_2) , las denominaremos *funciones coordenadas* de la representación canónica integral.

De la representación canónica integral (6.1.5) de la función aleatoria $X(t)$ se deduce fácilmente la representación correspondiente de su función correlativa. Con ello, teniendo en cuenta que los sumandos elementales $V(\lambda) x(t, \lambda) d(\lambda)$ en la expresión (6.1.5) pueden ser complejos, a pesar de que la propia función aleatoria $X(t)$ es real, vamos a pasar en la fórmula (6.1.5) a las magnitudes conjugadas complejas, sustituyendo en esta fórmula t por t' . Entonces obtendremos

$$X(t') = m_x(t') + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \overline{V(\lambda')} x(t', \lambda') d\lambda'. \quad (6.1.6)$$

Transponiendo en las fórmulas (6.1.5) y (6.1.6) la esperanza matemática al primer miembro y multiplicando los valores obtenidos de la función aleatoria centrada, tendremos

$$X^0(t) X^0(t') = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda) \overline{V(\lambda')} x(t, \lambda) \overline{x(t', \lambda')} d\lambda d\lambda'. \quad (6.1.7)$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición (4.2.13) de la función correlativa de una función aleatoria compleja, expresemos la función correlativa del ruido blanco $V(\lambda)$ por la fórmula

$$K_V(\lambda, \lambda') = M |V(\lambda) \overline{V(\lambda')}| = G(\lambda) \delta(\lambda - \lambda'). \quad (6.1.8)$$

donde $G(\lambda)$ es la intensidad del ruido blanco $V(\lambda)$. De la fórmula (6.1.7), en virtud de (6.1.8), obtenemos

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} K_V(\lambda, \lambda') x(t, \lambda) \overline{x(t', \lambda')} d\lambda d\lambda' = \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') x(t, \lambda) \overline{x(t', \lambda')} d\lambda d\lambda'. \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Cumpliendo aquí la integración con respecto a λ' , obtendremos definitivamente

$$K_x(t, t') = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G(\lambda) x(t, \lambda) \overline{x(t', \lambda)} d\lambda. \quad (6.1.10)$$

Esta fórmula ofrece la *representación canónica integral* de la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$.

Poniendo en la fórmula (6.1.10) $t = t'$, obtendremos la siguiente fórmula para la dispersión de la función aleatoria $X(t)$:

$$D_x(t) = K_x(t, t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G(\lambda) |x(t, \lambda)|^2 d\lambda. \quad (6.1.11)$$

La fórmula (6.1.5) muestra que la representación canónica integral de la función aleatoria la expresa en forma de una combinación lineal de magnitudes aleatorias infinitesimales no correlacionadas $V(\lambda) d\lambda$ con los coeficientes $x(t, \lambda)$ dependientes de t ; con ello, la dispersión de la magnitud aleatoria $V(\lambda) d\lambda$ es igual a $G(\lambda) d\lambda$. Aplicando la fórmula (3.9.7) para la dispersión de una combinación lineal de las magnitudes aleatorias no correlacionadas y sustituyendo la suma por la integral, obtendremos precisamente la fórmula (6.1.11).

Las descomposiciones espectrales de funciones aleatorias estacionarias, examinadas en el capítulo precedente, son tipos particulares de las representaciones canónicas integrales del tipo (6.1.5).

§ 6.2. Descomposición canónica de una función aleatoria

Sean V_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) magnitudes aleatorias no correlacionadas arbitrarias con esperanzas matemáticas iguales a cero y dispersiones iguales a D_ν :

$$\left. \begin{aligned} M[V_\nu] = 0, \quad M[V_\nu \overline{V}_\mu] = 0 \quad \text{si } \mu \neq \nu, \\ D_\nu = M[|V_\nu|^2]. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.1)$$

Hallemos las condiciones en las que la función aleatoria $X(t)$ puede ser representada por la descomposición canónica (6.1.1) cuyos coeficientes deben ser dichas magnitudes aleatorias V_ν . Para esto escribamos la fórmula (6.1.1) en la forma

$$X^0(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu x_\nu(t). \quad (6.2.2)$$

Suponiendo que esta descomposición ha sido obtenida, tendremos

$$M[X^0(t) \overline{V}_\mu] = \sum_{\nu=1}^{\infty} M[V_\nu \overline{V}_\mu] x_\nu(t). \quad (6.2.3)$$

En virtud de (6.2.1) todos los términos de esta suma son iguales a cero, a excepción de uno para el cual el índice de adición ν es igual a μ . Por lo tanto, las fórmulas (6.2.3) y (6.2.1) dan

$$M[X^0(t) \overline{V}_\mu] = D_\mu x_\mu(t). \quad (6.2.4)$$

De donde hallamos

$$x_{\mu}(t) = \frac{1}{D_{\mu}} M [X^0(t) \overline{V_{\mu}}] \quad \mu = 1, 2, \dots \quad (6.2.5)$$

Ahora bien, para que la función aleatoria $X(t)$ pueda ser representada por la descomposición canónica (6.1.1), es necesario que todas las funciones coordenadas $x_{\mu}(t)$ se expresen por la fórmula (6.2.5), es decir, sean iguales a las relaciones entre los momentos de correlación de la función aleatoria $X^0(t)$ con las magnitudes aleatorias V_{μ} y las dispersiones de las magnitudes correspondientes V_{μ} .

La fórmula (6.2.5) muestra que para hallar la descomposición canónica de la función aleatoria $X(t)$ tiene sentido tomar solamente tales magnitudes aleatorias V_{ν} que estén correlacionadas con la función aleatoria $X(t)$. Si cualquiera de las magnitudes aleatorias V_{ν} no está correlacionada con la función aleatoria $X(t)$, entonces la función coordenada correspondiente $x_{\nu}(t)$, de acuerdo con la fórmula (6.2.5), es idénticamente igual a cero y el término correspondiente desaparece de la descomposición (6.1.1).

El tipo más simple de magnitudes aleatorias, correlacionadas con la función aleatoria $X(t)$, son las combinaciones lineales de sus valores para los valores del argumento t que nos interesan. Por eso, para representar la función aleatoria $X(t)$ por la descomposición canónica en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ conviene determinar las magnitudes aleatorias V_{ν} por la fórmula *)

$$V_{\nu} = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{a_{\nu}(t)} X^0(t) dt, \quad (6.2.6)$$

donde $a_{\nu}(t)$ son ciertas funciones que deben ser elegidas de modo que las magnitudes V_{ν} estén no correlacionadas.

Cambiando en la fórmula (6.2.6) la designación de la variable de integración y sustituyendo la expresión obtenida en la fórmula (6.2.5), tendremos

$$\begin{aligned} x_{\mu}(t) &= \frac{1}{D_{\mu}} M \left[X^0(t) \int_{\alpha}^{\beta} a_{\mu}(t') X^0(t') dt' \right] = \\ &= \frac{1}{D_{\mu}} \int_{\alpha}^{\beta} a_{\mu}(t') M [X^0(t) X^0(t')] dt' \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

o bien

$$x_{\mu}(t) = \frac{1}{D_{\mu}} \int_{\alpha}^{\beta} a_{\mu}(t') K_x(t, t') dt'. \quad (6.2.8)$$

*) Teniendo en cuenta que las magnitudes aleatorias V_{ν} pueden ser complejas, para que los cálculos posteriores sean más cómodos, determinamos las funciones $a_{\nu}(t)$ de modo que en (6.2.6) bajo el signo integral haya funciones conjugadas complejas $\overline{a_{\nu}(t)}$.

Esta fórmula expresa las funciones coordenadas $x_\mu(t)$ por medio de las funciones $a_\mu(t)$ y la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$.

Para deducir las condiciones a las que deben satisfacer las funciones $a_\nu(t)$ con el fin de que las magnitudes aleatorias V_ν , determinadas por la fórmula (6.2.6), sean no correlacionadas, escribamos en virtud de (6.2.5)

$$M[V_\nu \overline{V}_\mu] = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{a_\nu(t)} M[X^0(t) \overline{V}_\mu] dt = D_\mu \int_{\alpha}^{\beta} \overline{a_\nu(t)} x_\mu(t) dt. \quad (6.2.9)$$

De aquí se ve que para que las magnitudes aleatorias V_ν sean no correlacionadas y sus dispersiones sean iguales a los números correspondientes D_ν , las funciones $a_\nu(t)$ y $x_\nu(t)$ deben satisfacer las condiciones

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{a_\nu(t)} x_\mu(t) dt = 0 \quad \text{si } \mu \neq \nu, \quad (6.2.10)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{a_\nu(t)} x_\nu(t) dt = 1. \quad (6.2.11)$$

Comúnmente estas condiciones se escriben brevemente en la forma

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{a_\nu(t)} x_\mu(t) dt = \delta_{\nu\mu}, \quad (6.2.12)$$

donde $\delta_{\nu\mu}$ es una magnitud igual a la unidad cuando los índices son iguales e igual a cero cuando los índices son diferentes ($\delta_{\nu\nu} = 1$, $\delta_{\nu\mu} = 0$ para $\mu \neq \nu$).

Generalmente la igualdad (6.2.12) se llama *condición de biortogonalidad* de dos sistemas de funciones $x_\nu(t)$ y $a_\nu(t)$.

Así pues, para que las magnitudes aleatorias V_ν , determinadas por la fórmula (6.2.6), sean no correlacionadas y al mismo tiempo la función aleatoria $X(t)$ pueda ser representada por la descomposición (6.1.1) es necesario que las funciones $a_\nu(t)$ y las funciones $x_\nu(t)$ determinadas por la fórmula (6.2.8) satisfagan la condición de biortogonalidad (6.2.12). Es evidente que las condiciones (6.2.8) y (6.2.12) son también suficientes para que las magnitudes aleatorias V_ν , determinadas por la fórmula (6.2.6), sean no correlacionadas, pero, desde luego, esto no demuestra todavía, que, al cumplir las condiciones (6.2.8) y (6.2.12), la función aleatoria $X(t)$ puede ser representada por la descomposición canónica (6.1.1).

Mostremos ahora que se puede hallar un sistema de pares de funciones $a_\nu(t)$, $x_\mu(t)$ que satisfagan las condiciones (6.2.8) y (6.2.12). Para esto tomemos una secuencia arbitraria de funciones independien-

tes linealmente $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), \dots$ *) y determinemos las magnitudes aleatorias

$$U_r = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f_r(t)} X(t) dt \quad (r=1, 2, \dots). \quad (6.2.13)$$

Las magnitudes aleatorias centradas correspondientes se expresarán por una fórmula análoga

$$U_r^0 = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f_r(t)} X^0(t) dt \quad (r=1, 2, \dots). \quad (6.2.14)$$

Hallemos las dispersiones y los momentos de correlación k_{rs} de las magnitudes aleatorias $U_1, U_2 \dots$. En virtud de la definición (3.7.6) y la fórmula (6.2.14) tenemos

$$k_{rs} = M[U_r^0 \overline{U_s^0}] = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f_r(t)} f_s(t') M[X^0(t) X^0(t')] dt dt' \quad (6.2.15)$$

o bien

$$k_{rs} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f_r(t)} f_s(t') K_x(t, t') dt dt' \quad (r, s=1, 2, \dots) \quad (6.2.16)$$

Introduciendo, para mayor comodidad, las funciones

$$z_s(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f_s(t') K_x(t, t') dt' \quad (s=1, 2, \dots). \quad (6.2.17)$$

y tomando en consideración que debido a la simetría de la función correlativa

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{f_r(t)} K_x(t, t') dt = \overline{\int_{\alpha}^{\beta} f_r(t) K_x(t', t) dt} = \overline{z_r(t')}. \quad (6.2.18)$$

podemos escribir la fórmula (6.2.16) en la forma

$$k_{rs} = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f_r(t)} z_s(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{z_r(t)} f_s(t) dt \quad (r, s=1, 2, \dots) \quad (6.2.19)$$

Ahora podemos construir el sistema de funciones aleatorias no correlacionadas V_v , procediendo del modo siguiente. La primera función aleatoria V_1 puede ser elegida arbitrariamente, por ejemplo, se

*) Las funciones $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), \dots$ se denominan independientes linealmente, si para ningún valor de n y ninguno de los valores c_1, c_2, \dots, c_n distintos de cero, la combinación lineal de estas funciones $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t)$ es idénticamente igual a cero.

las magnitudes D_v , $c_{v\mu}$:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= k_{11}, \quad c_{v1} = \frac{k_{v1}}{D_1} \quad (v=2, 3, \dots), \\ D_v &= k_{vv} - \sum_{\mu=1}^{v-1} |c_{v\mu}|^2 D_\mu \quad (v=2, 3, \dots), \\ c_{v\mu} &= \frac{1}{D_\mu} \left(\sum_{\lambda=1}^{\mu-1} c_{v\lambda} \overline{c_{\mu\lambda}} D_\lambda - k_{v\mu} \right) \quad \left. \begin{array}{l} (\mu=2, \dots, v-1, \\ v=3, 4, \dots \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.25)$$

Por estas fórmulas se puede determinar sucesivamente las magnitudes D_1 , c_{v1} , D_2 , c_{v2} , D_3 , c_{v3} . . . Como resultado serán hallados todos los coeficientes $c_{v\mu}$ en las fórmulas (6.2.20) y las dispersiones de las magnitudes aleatorias no correlacionadas V_v . Empleando el procedimiento expuesto, se puede construir el sistema de magnitudes aleatorias no correlacionadas partiendo de cualquier sistema de magnitudes aleatorias independiente linealmente. Ya hicimos uso de este procedimiento en el § 3.11, donde en vez de $c_{v\mu}$ eran los coeficientes $\gamma_{v\mu} = -c_{v\mu}$.

Sustituyendo en (6.2.20) la expresión (6.2.14) de las magnitudes aleatorias centradas U_r^0 , expresemos las magnitudes aleatorias V_v por la fórmula (6.2.6) donde las funciones $a_v(t)$ se determinan por las fórmulas

$$a_1(t) = f_1(t), \quad a_v(t) = \sum_{\mu=1}^{v-1} c_{v\mu} a_\mu(t) + f_v(t) \quad (v=2, 3, \dots). \quad (6.2.26)$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (6.2.8) para $\mu = 1, 2, \dots$ y teniendo en cuenta (6.2.17), obtendremos

$$x_1(t) = \frac{z_1(t)}{D_1}, \quad x_v(t) = \frac{1}{D_v} \left[\sum_{\mu=1}^{v-1} c_{v\mu} D_\mu x_\mu(t) + z_v(t) \right] \quad (6.2.27)$$

$$(v=2, 3, \dots).$$

Así pues, el método expuesto ofrece la posibilidad de hallar tal sistema de funciones $a_v(t)$, que las magnitudes aleatorias correspondientes V_v , determinadas por la fórmula (6.2.6), sean no correlacionadas, y el sistema correspondiente de funciones coordenadas $x_v(t)$, determinadas por la fórmula (6.2.8). Estas funciones $a_v(t)$ y $x_v(t)$ satisfacen la condición de biortogonalidad (6.2.12), puesto que esta condición, como hemos visto, es consecuencia de la no correlatividad de las magnitudes aleatorias V_v y de la fórmula (6.2.5) que en este caso tiene la forma (6.2.8). Le dejamos al lector que por sí mismo lleve a cabo la comprobación directa del hecho de que las funciones $a_v(t)$ y $x_v(t)$, determinadas por las fórmulas (6.2.25), (6.2.26) y (6.2.27), satisfacen la condición de biortogonalidad (6.2.12).

Eligiendo diversas funciones iniciales $f_r(t)$ de las cuales se exige solamente la independencia lineal, obtendremos diferentes sistemas de pares de funciones $a_v(t)$, $x_v(t)$ que satisfacen las condiciones (6.2.8) y (6.2.12). Ahora bien, debido a la arbitrariedad de las funciones iniciales $f_r(t)$ se puede por una infinidad de procedimientos determinar las funciones $a_v(t)$, $x_v(t)$ que satisfacen las condiciones (6.2.8) y (6.2.12).

Puesto que las realizaciones de la mayoría de las funciones aleatorias que se encuentran en la práctica tienen carácter oscilatorio, prácticamente es conveniente elegir en calidad de funciones de partida $f_r(t)$ funciones trigonométricas, correspondientes a distintos períodos, o los productos de las funciones trigonométricas por las funciones exponenciales escogidas de un modo correspondiente. Por ejemplo, al elegir arbitrariamente la sucesión de frecuencias $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ cuando $\omega_n \rightarrow \infty$, se puede tomar

$$f_1(t) = 1, f_{2n}(t) = \operatorname{sen} \omega_n t, f_{2n+1}(t) = \operatorname{cos} \omega_n t \quad (6.2.28) \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Al escoger las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \dots$, es necesario solamente preocuparse de que las funciones (6.2.28) sean linealmente independientes en el correspondiente intervalo de variación de la variable t . Por lo demás, la elección de las frecuencias ω_n no se limita en nada. Para resolver algunos problemas de la Teoría de mando automático es conveniente añadir a las funciones (6.2.28) aún las funciones delta con las particularidades en los extremos del intervalo de integración $\delta(t - \alpha)$, $\delta(t - \beta)$ y sus derivadas hasta un orden determinado.

Ejemplo 6.2.1. Hallar la descomposición canónica de la función aleatoria $X(t)$ con esperanza matemática idénticamente igual a cero y la función correlativa

$$K_x(t, t') = D e^{-\alpha|t-t'|},$$

en el intervalo $0 \leq t \leq T$.

Una vez determinadas las funciones $f_r(t)$ por las fórmulas (6.2.28), hallamos por la fórmula (6.2.17) las funciones $z_s(t)$. Teniendo en cuenta que en este caso $\alpha = 0$, $\beta = T$, obtendremos

$$z_1(t) = D \int_0^T e^{-\alpha|t-t'|} dt' = D \left\{ \int_0^t e^{-\alpha(t-t')} dt' + \int_t^T e^{-\alpha(t'-t)} dt' \right\} = \\ = D \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} + \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \right\} = \frac{D}{\alpha} [2 - e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(T-t)}]$$

y análogamente

$$z_{2n}(t) = D \int_0^T e^{-\alpha|t-t'|} \operatorname{sen} \omega_n t' dt' = \\ = \frac{D\alpha}{\alpha^2 + \omega_n^2} \left[2 \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{\omega_n}{\alpha} e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(T-t)} \left(\operatorname{sen} \omega_n T + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega_n}{\alpha} \operatorname{cos} \omega_n T \right) \right] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$x_{2n+1}(t) = D \int_0^T e^{-\alpha|t-t'|} \cos \omega_n t' dt' = \frac{D\alpha}{\alpha^2 + \omega_n^2} \left[2 \cos \omega_n t - e^{-\alpha t} - e^{+\alpha(t-T)} \left(\cos \omega_n T - \frac{\omega_n}{\alpha} \operatorname{sen} \omega_n T \right) \right] \quad (n=1, 2, \dots).$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas y las (6.2.28) de las funciones $f_r(t)$ en la fórmula (6.2.19), hallamos los momentos de correlación de las magnitudes aleatorias U_r determinadas por la fórmula (6.2.13). Con ello, todas las integrales (6.2.13) se calculan en este caso de un modo absolutamente elemental. Para abreviar, nos limitaremos al caso cuando las frecuencias ω_k se han elegido múltiples de la frecuencia fundamental $\omega_1 = 2\pi/T$ correspondiente al período T :

$$\omega_k = k\omega_1 = 2\pi k/T \quad (k = 1, 2, \dots).$$

En este caso $\cos \omega_n T = 1$, $\operatorname{sen} \omega_n T = 0$ y la fórmula (6.2.19) da

$$k_{11} = \int_0^T z_1(t) dt = \frac{2D}{\alpha^2} (e^{-\alpha T} - 1 + \alpha T),$$

$$k_{1, 2n} = k_{2n, 1} = \int_0^T z_{2n}(t) dt = 0,$$

$$k_{1, 2n+1} = k_{2n+1, 1} = \int_0^T z_{2n+1}(t) dt = \frac{2D(1 - e^{-\alpha T})}{\alpha^2 + \omega_n^2},$$

$$k_{2n+1, 2n+1} = \int_0^T z_{2n+1}(t) \cos \omega_n t dt = \frac{D\alpha}{\alpha^2 + \omega_n^2} \left[T - \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_n^2} (1 - e^{-\alpha T}) \right],$$

$$k_{2n+1, 2m+1} = \int_0^T z_{2n+1}(t) \cos \omega_m t dt = -\frac{2D\alpha^2(1 - e^{-\alpha T})}{(\alpha^2 + \omega_n^2)(\alpha^2 + \omega_m^2)},$$

$$k_{2n, 2n} = \int_0^T z_{2n}(t) \operatorname{sen} \omega_n t dt = \frac{D\alpha}{\alpha^2 + \omega_n^2} \left[T + \frac{2\omega_n^2}{\alpha(\alpha^2 + \omega_n^2)} (1 - e^{-\alpha T}) \right],$$

$$k_{2n, 2m} = \int_0^T z_{2n}(t) \operatorname{sen} \omega_m t dt = \frac{2D\omega_n \omega_m (1 - e^{-\alpha T})}{(\alpha^2 + \omega_n^2)(\alpha^2 + \omega_m^2)},$$

$$k_{2n, 2m+1} = k_{2m+1, 2n} = 0 \quad (n, m = 1, 2, \dots).$$

Una vez determinados los momentos de correlación k_{rs} , calculamos, por las fórmulas (6.2.25), sucesivamente las magnitudes $D_1, c_{v1}, D_2, c_{v2}, D_3, c_{v3}, \dots$. Con ello, nos convencemos de que en este caso todos los coeficientes $c_{v\mu}$, con los índices de distinta paridad, son iguales a cero. Por fin, con ayuda de las fórmulas (6.2.26) y (6.2.27) hallamos las funciones $a_v(t)$ y las funciones coor-

denadas $x_v(t)$:

$$a_1(t) = 1, \quad a_2(t) = \text{sen } \omega_1 t, \quad a_3(t) = c_{31} + \text{cos } \omega_1 t,$$

$$a_{2n}(t) = \sum_{m=1}^{n-1} c_{2n, 2m} a_{2m}(t) + \text{sen } \omega_n t,$$

$$a_{2n+1}(t) = \sum_{m=1}^n c_{2n+1, 2m-1} a_{2m-1}(t) + \text{cos } \omega_n t \quad (n=2, 3, \dots),$$

$$x_1(t) = \frac{z_1(t)}{D_1}, \quad x_2(t) = \frac{z_2(t)}{D_2},$$

$$x_3(t) = \frac{c_{31}x_1(t) + z_3(t)}{D_3},$$

$$x_{2n}(t) = \frac{1}{D_{2n}} \left[\sum_{m=1}^{n-1} c_{2n, 2m} x_{2m}(t) + z_{2n}(t) \right],$$

$$x_{2n+1}(t) = \frac{1}{D_{2n+1}} \left[\sum_{m=1}^n c_{2n+1, 2m-1} x_{2m-1}(t) + z_{2n+1}(t) \right] \quad (n=2, 3, \dots).$$

§ 6.3. Fórmula para el término residual de la descomposición canónica

La precisión con que la función aleatoria viene representada por el segmento final de la descomposición canónica se puede estimar por la magnitud relativa de la esperanza matemática del cuadrado del módulo del término residual o bien, lo que es lo mismo, de la dispersión de este término. Poniendo

$$R_n(t) = X^0(t) - \sum_{v=1}^n V_v x_v(t), \quad (6.3.1)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} M[|R_n(t)|^2] &= M[R_n(t) \overline{R_n(t)}] = M[|X^0(t)|^2] - \\ &- \sum_{v=1}^n \{M[X^0(t) \overline{V_v} x_v(t)] + M[\overline{X^0(t)} V_v] x_v(t)\} + \\ &+ \sum_{v, \mu=1}^n M[V_v \overline{V_\mu}] x_v(t) \overline{x_\mu(t)} \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

o bien, teniendo en cuenta (6.2.1) y (6.2.5),

$$\begin{aligned} M[|R_n(t)|^2] &= D_x(t) - \sum_{v=1}^n \{D_v x_v(t) \overline{x_v(t)} + D_v \overline{x_v(t)} x_v(t)\} + \\ &+ \sum_{v=1}^n D_v x_v(t) \overline{x_v(t)} = D_x(t) - \sum_{v=1}^n D_v |x_v(t)|^2. \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Ahora bien, la dispersión del término residual de la descomposición canónica (6.1.1) de la función aleatoria $X(t)$ se expresa por la fór-

mula

$$M[|R_n(t)|^2] = D_x(t) - \sum_{v=1}^n D_v |x_v(t)|^2. \quad (6.3.4)$$

Como una característica práctica cómoda de la precisión con que la función aleatoria viene representada aproximadamente por el segmento final de su descomposición canónica sirve el error relativo en la dispersión de la función aleatoria

$$e_n(t) = \frac{M[|R_n(t)|^2]}{D_x(t)}. \quad (6.3.5)$$

Si la dispersión del término residual tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ para todas las t en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[|R_n(t)|^2] = 0 \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \quad (6.3.6)$$

entonces se dice que la descomposición (6.1.1) converge en la media cuadrática en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$. Se puede demostrar que para cualquier función aleatoria con dispersión finita existe una infinidad de descomposiciones canónicas que convergen en la media cuadrática a esta función aleatoria en el intervalo finito asignado de antemano. Aquí nos limitaremos a la demostración de esta afirmación para un tipo particular de descomposiciones canónicas cuando en calidad de coeficientes aleatorios de la descomposición V_v se eligen las combinaciones lineales de los valores de la función aleatoria centrada $X^0(t)$ en la serie discreta de puntos de intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ *).

Eligiendo como magnitudes aleatorias V_v las combinaciones lineales de los valores de la función aleatoria centrada $X^0(t)$ en una serie discreta de puntos t_1, t_2, \dots, t_n , dispuestos en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$, podemos tomar la primera combinación indicada de un modo absolutamente arbitrario; la segunda combinación debe someterse a una única condición de no correlatividad con la primera, etc.; la n -ésima combinación lineal debe ser no correlacionada con las $n - 1$ anteriores.

Como resultado expresaremos los valores de la función aleatoria $X(t)$ en los puntos t_1, t_2, \dots, t_n por la descomposición canónica (6.1.1) que contiene n sumandos sin contar la esperanza matemática $m_x(t)$. Dejando al lector que obtenga él mismo por tal vía la descomposición canónica de la función aleatoria $X(t)$ en la serie discreta de puntos t_1, t_2, \dots, t_n , observemos que esta descomposición canónica se obtendrá de las fórmulas generales deducidas anteriormente, si las funciones $a_v(t)$ se determinan en forma de combinaciones lineales

*) El lector puede hallar la demostración para el caso general en el libro de V. S. Pugachev «Teoría de funciones aleatorias y su aplicación en los problemas del mando automático», Fizmatgiz, 1962, § 60.

les de las funciones delta correspondientes

$$a_v(t) = \sum_{h=1}^n a_{vh} \delta(t - t_h). \quad (6.3.7)$$

Para esto es suficiente tomar en calidad de funciones $f_r(t)$ las combinaciones lineales arbitrarias de las mismas funciones delta:

$$f_r(t) = \sum_{h=1}^n f_{rh} \delta(t - t_h), \quad (6.3.8)$$

donde f_{rh} son coeficientes arbitrarios. Es evidente que para cualquier n finita existen solamente n combinaciones linealmente independientes de funciones delta del tipo (6.3.8). En particular, en la fórmula (6.3.8) se puede poner $f_{rr} = 1$, $f_{rh} = 0$ cuando $h \neq r$ ($r = 1, 2, \dots, n$).

Sustituyendo la expresión (6.3.8) en las fórmulas (6.2.17) y (6.2.19), determinemos las funciones $z_r(t)$, así como las dispersiones y los momentos de correlación de las magnitudes aleatorias U_r ($r = 1, 2, \dots, n$). Luego, determinando por las fórmulas (6.2.25) los coeficientes $c_{v\mu}$ y las dispersiones D_v de las magnitudes aleatorias V_v ($v = 1, 2, \dots, n$), hallaremos con ayuda de las fórmulas (6.2.26) los coeficientes a_{vh} en la fórmula (6.3.7). A continuación, sustituyendo la expresión (6.3.7) en (6.2.6) y (6.2.8) y cumpliendo la integración [teniendo en cuenta la fórmula (2.2.6)], reduzcamos las fórmulas (6.2.6) y (6.2.8) correspondientemente a la forma

$$V_v = \sum_{h=1}^n \overline{a_{vh}} X^0(t_h) \quad (v = 1, \dots, n), \quad (6.3.9)$$

$$x_v(t) = \frac{1}{D_v} \sum_{h=1}^n a_{vh} K_x(t, t_h) \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (6.3.10)$$

La condición de biortogonalidad (6.2.12) toma la forma

$$\sum_{h=1}^n a_{vh} x_\mu(t_h) = \delta_{v\mu} \quad (v, \mu = 1, \dots, n). \quad (6.3.11)$$

Por fin, la descomposición canónica (6.1.1) de la función aleatoria $X(t)$ toma la forma

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{v=1}^n V_v x_v(t). \quad (6.3.12)$$

Demostremos que esta igualdad es exacta en todos los puntos t_1, t_2, \dots, t_n . Para esto, en virtud de (6.3.9), escribamos

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^n V_v x_v(t_k) &= \sum_{v=1}^n \sum_{h=1}^n \overline{a_{vh}} X^0(t_h) x_v(t_k) = \\ &= \sum_{h=1}^n X^0(t_h) \sum_{v=1}^n \overline{a_{vh}} x_v(t_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

exactamente la función aleatoria $X(t)$ en los puntos t_1, t_2, \dots, t_n queda demostrada.

La fórmula (6.3.19) muestra que en todos los puntos t_1, \dots, t_n la función aleatoria $X(t_n)$ se expresa exactamente por la descomposición canónica que contiene n términos. Por lo tanto, la dispersión del término residual $R_n(t)$ en este caso es igual a cero cuando $t = t_1, t_2, \dots, t_n$. En el caso de una función correlativa continua las funciones coordenadas $x_v(t)$, determinadas por la fórmula (6.3.10), también son continuas, debido a lo cual también la dispersión del término residual $R_n(t)$ es función continua de t . Por eso, eligiendo n lo suficientemente grande, podemos disponer los puntos t_1, t_2, \dots, t_n de un modo suficientemente denso en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ para que la dispersión del término residual sea tan pequeña como se quiera en todos los puntos del intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$. Ahora bien, al aumentar ilimitadamente el número de puntos en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ de modo que la distancia máxima entre los puntos vecinos tienda a cero cuando $n \rightarrow \infty$, obtendremos la descomposición canónica de la función aleatoria, la dispersión de cuyo término residual tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, para todos los valores de t en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$. Como consecuencia de la arbitrariedad de los coeficientes f_{rh} en la fórmula (6.3.8), podemos obtener una infinidad de tales descomposiciones canónicas convergentes.

Así pues, hemos demostrado que toda función aleatoria que tiene una función correlativa continua puede ser representada en cualquier intervalo finito, valiéndonos de una infinidad de procedimientos, por una descomposición canónica que converge a ella en la media cuadrática.

Está claro que para la práctica tiene importancia no la convergencia de la descomposición canónica, sino la posibilidad de obtener un error medio cuadrático de representación de la función aleatoria, por un número pequeño de primeros términos de la descomposición canónica, lo suficientemente pequeño. En lo que a esto atañe, conviene observar que las perturbaciones aleatorias de entrada de los sistemas automáticos, como regla, no pueden ser representadas con precisión admisible por un número pequeño de términos de la descomposición canónica. Sin embargo, en este caso el sistema que se examina deja pasar de ordinario sólo un pequeño número de primeras funciones coordenadas y, debido a su capacidad de inercia, no deja pasar la mayor parte de dichas funciones. Por eso, para investigar la precisión de los sistemas automáticos, es suficiente de ordinario tomar en las descomposiciones canónicas de perturbaciones de entrada un número relativamente pequeño de términos (de 20 a 30), a pesar de que con ello se obtiene una precisión muy baja de representación de las propias perturbaciones aleatorias indicadas.

§ 6.4. Construcción de la descomposición canónica de una función aleatoria por la descomposición canónica de su función correlativa

En los problemas prácticos se logra a veces hallar con relativa facilidad la descomposición canónica (6.1.3) de la función correlativa. Demostremos que a esta descomposición le corresponde siempre la descomposición canónica de la propia función aleatoria con las mismas funciones coordenadas. Supongamos que se logró representar la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ por la descomposición canónica

$$K_x(t, t') = \sum_{v=1}^{\infty} D_v x_v(t) \overline{x_v(t')}. \quad (6.4.1)$$

Supongamos que esta descomposición representa la función correlativa en el cuadrado $\alpha \leq t, t' \leq \beta$. Demostremos que a la descomposición (6.4.1) le corresponde la descomposición canónica de la función aleatoria $X(t)$ en el intervalo (α, β) con las mismas funciones coordenadas:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{v=1}^{\infty} V_v x_v(t). \quad (6.4.2)$$

Para la demostración basta hallar un sistema de funciones $a_v(t)$ que satisfagan, junto con las funciones $x_v(t)$, las condiciones (6.2.8) y (6.2.12) en el intervalo (α, β) . Entonces las magnitudes aleatorias V_v , determinadas por la fórmula (6.2.6), serán no correlacionadas y sus dispersiones serán iguales a los números correspondientes de D_v . Con ello, la dispersión del término residual de la descomposición (6.4.2) tenderá a cero para todos los valores de t en el intervalo (α, β) , en virtud de las fórmulas (6.3.4) y (6.4.1).

Para abreviar, introduzcamos para las integrales del producto de dos funciones la designación

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(t) \psi(t) dt. \quad (6.4.3)$$

Esta expresión se denomina comúnmente *producto escalar* de las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, por analogía con la expresión corriente del producto escalar de vectores en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. Las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ se llaman *ortogonales* si su producto escalar es igual a cero:

$$(\varphi, \psi) = 0.$$

Primeramente hallemos el sistema de funciones auxiliares $g_1(t)$, $g_2(t)$, \dots , $g_n(t)$ que poseen la propiedad de ser cada una de ellas ortogonal a todas las funciones $x_v(t)$ con números menores y no ser

ortogonal a la función $x_\nu(t)$ con el mismo número:

$$(g_\nu, x_\mu) = 0 \quad (\mu < \nu), \quad (g_\nu, x_\nu) \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (6.4.4)$$

Para esto tomemos una función arbitraria $f_1(t)$ que satisfaga la condición

$$(f_1, x_1) \neq 0, \quad (6.4.5)$$

y pongamos

$$g_1(t) = f_1(t). \quad (6.4.6)$$

Luego tomemos una función arbitraria $f_2(t)$ independiente linealmente de $f_1(t)$ y pongamos

$$g_2(t) = b_{21}g_1(t) + f_2(t). \quad (6.4.7)$$

En virtud de (6.4.5) y (6.4.6), el coeficiente b_{21} se puede elegir de modo que la función $g_2(t)$ sea ortogonal con respecto a $x_1(t)$. Multiplicando la igualdad (6.4.7) por $x_1(t)$ e integrando en los límites de α a β , obtendremos

$$(g_2, x_1) = b_{21}(g_1, x_1) + (f_2, x_1). \quad (6.4.8)$$

Igualando esta expresión a cero, hallamos b_{21} :

$$b_{21} = -\frac{(f_2, x_1)}{(g_1, x_1)}. \quad (6.4.9)$$

Luego hallamos la magnitud (g_2, x_2) . Si esta magnitud resulta ser igual a cero, es necesario cambiar la elección de la función $f_2(t)$ para satisfacer la condición $(g_2, x_2) \neq 0$. Prosiguiendo de tal modo, suponemos que han sido halladas las funciones $g_1(t), g_2(t), \dots, g_{n-1}(t)$ que satisfacen las condiciones (6.4.4). Tomemos una función arbitraria $f_n(t)$ linealmente independiente de $f_1(t), f_2(t), \dots, f_{n-1}(t)$ y suponemos que

$$g_n(t) = b_{n1}g_1(t) + \dots + b_{n, n-1}g_{n-1}(t) + f_n(t). \quad (6.4.10)$$

Multiplicando esta igualdad por $\overline{x_1(t)}$, integrando en los límites de α a β y teniendo en cuenta que las funciones $g_2(t), \dots, g_{n-1}(t)$ son ortogonales con respecto a $x_1(t)$, obtendremos

$$(g_n, x_1) = b_{n1}(g_1, x_1) + (f_n, x_1). \quad (6.4.11)$$

Igualando a cero esta expresión, hallamos b_{n1} :

$$b_{n1} = -\frac{(f_n, x_1)}{(g_1, x_1)}. \quad (6.4.12)$$

Multipiquemos ahora la igualdad (6.4.10) por $\overline{x_\mu(t)}$ ($\mu < n$) e integremos en los límites de α a β . Entonces, tomando en consideración que las funciones $g_{\mu+1}(t), \dots, g_{n-1}(t)$ son ortogonales con respecto a $x_\mu(t)$, obtendremos

$$(g_n, x_\mu) = b_{n\mu}(g_\mu, x_\mu) + (f_n, x_\mu). \quad (6.4.13)$$

Igualando a cero esta expresión obtenemos la fórmula recurrente para los coeficientes $b_{n\mu}$:

$$b_{n\mu} = - \frac{(f_n, x_\mu) + b_{n1}(g_1, x_\mu) + \dots + b_{n, \mu-1}(g_{\mu-1}, x_\mu)}{(g_\mu, x_\mu)} \quad (6.4.14)$$

$(\mu = 2, 3, \dots, n-1).$

Una vez determinados por las fórmulas (6.4.14) los coeficientes $b_{n1}, b_{n, n-1}$, hallamos la magnitud (g_n, x_n) . Si ésta resulta igual a cero, debemos alcanzar que no sea así, variando la elección de la función $f_n(t)$. Así pues, el procedimiento expuesto permite hallar el sistema de funciones $g_r(t)$ que satisfacen las condiciones (6.4.4).

Determinemos ahora las funciones $a_v(t)$ por la fórmula

$$a_v(t) = \sum_{\lambda=v}^{\infty} c_{v\lambda} g_\lambda(t) \quad (v=1, 2, \dots). \quad (6.4.15)$$

Como las funciones $g_v(t), g_{v+1}(t), \dots$ son ortogonales con respecto a todas las funciones $x_1(t), \dots, x_{v-1}(t)$, entonces la función $a_v(t)$ es ortogonal con respecto a $x_1(t), x_2(t), \dots, x_{v-1}(t)$. Por consiguiente, eligiendo los coeficientes $c_{v\lambda}$, queda alcanzar que cada función $a_v(t)$ sea ortogonal también con respecto a todas las funciones $x_{v+1}(t), x_{v+2}(t), \dots$, y la integral de su producto por $x_v(t)$ sea igual a la unidad. Multiplicando (6.4.15) por $x_v(t)$, integrando en los límites de α a β y teniendo en cuenta que todas las funciones $g_{v+1}(t), g_{v+2}(t), \dots$ son ortogonales con respecto a $x_v(t)$, obtendremos

$$(a_v, x_v) = c_{vv} (g_v, x_v). \quad (6.4.16)$$

Igualando esta magnitud a la unidad, hallamos el coeficiente c_{vv} :

$$c_{vv} = \frac{1}{(g_v, x_v)}. \quad (6.4.17)$$

Multipiquemos ahora la igualdad (6.4.15) por $x_\mu(t)$ ($\mu > v$) e integremos en los límites de α a β . Entonces, tomando en consideración que todas las funciones $g_{\mu+1}(t), g_{\mu+2}(t), \dots$ son ortogonales con respecto a $x_\mu(t)$, obtendremos

$$(a_v, x_\mu) = c_{vv} (g_v, x_\mu) + \dots + c_{v, \mu-1} (g_{\mu-1}, x_\mu) + c_{v\mu} (g_\mu, x_\mu). \quad (6.4.18)$$

Igualando a cero esta expresión, obtenemos la siguiente fórmula recurrente para los coeficientes $c_{v\mu}$:

$$c_{v\mu} = \frac{c_{vv} (g_v, x_\mu) + \dots + c_{v, \mu-1} (g_{\mu-1}, x_\mu)}{(g_\mu, x_\mu)} \quad (6.4.19)$$

$(\mu = v+1, v+2, \dots, v=1, 2, \dots).$

Prosiguiendo por esta vía, se pueden determinar sucesivamente todos los coeficientes $c_{\nu\mu}$ de modo que las funciones $a_\nu(t)$, determinadas por la fórmula (6.4.15), satisfagan la condición de biortogonalidad (6.2.12). Demostremos que estas funciones satisfacen también todas las condiciones (6.2.8). Para esto sustituyamos en (6.2.8) la expresión (6.4.1) de la función correlativa. Entonces obtendremos *)

$$x_\mu(t) = \frac{1}{D_\mu} \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu (a_\nu, x_\nu) x_\nu(t). \quad (6.4.20)$$

Esta igualdad se convierte en identidad puesto que las funciones $a_\mu(t)$, $x_\nu(t)$ satisfacen la condición de biortogonalidad (6.2.12). Así pues, el sistema hallado de funciones $a_\nu(t)$, junto con las funciones coordenadas $x_\nu(t)$, satisface todas las condiciones necesarias. Por lo tanto, las magnitudes aleatorias V_ν , determinadas por la fórmula (6.2.6), no son correlacionadas en virtud de la igualdad (6.2.9) y sus dispersiones son iguales a los números correspondientes de D_ν . De aquí se deduce también que todos los números de D_ν son positivos. Por eso la función correlativa puede ser representada por la descomposición canónica (6.4.1) solamente con los coeficientes positivos de D_ν . Por fin, en virtud de las fórmulas (6.3.4) y (6.4.1), la dispersión del término residual de la descomposición canónica (6.4.2) de la función aleatoria $X(t)$ tiende a cero para todos los valores de t en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$. Así pues, hemos demostrado por completo la afirmación enunciada.

El proceso expuesto de determinación de las funciones $a_\nu(t)$ que satisfacen, junto con las funciones dadas $x_\nu(t)$, las condiciones de biortogonalidad (6.2.12) se puede continuar teóricamente sin límites. Prácticamente, siempre conviene limitarlo a cierto número finito de funciones. Después de determinar por el procedimiento expuesto las funciones $g_1(t)$, $g_2(t)$, ..., $g_n(t)$ que satisfacen las condiciones (6.4.4), hallamos las funciones $a_\nu(t)$ en forma

$$a_\nu(t) = \sum_{\lambda=1}^n c_{\nu\lambda} g_\lambda(t) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad (6.4.21)$$

Una vez determinados los coeficientes $c_{\nu\lambda}$ por las fórmulas (6.4.17) y (6.4.19) para $\nu = 1, \dots, n$, hallaremos las funciones $a_1(t)$, ..., $a_n(t)$ que satisfacen, junto con las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, la condición de biortogonalidad (6.2.12).

Si la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$ se expresa con suficiente precisión por los primeros n términos de la descomposición (6.4.1), entonces las funciones $a_1(t)$, ..., $a_n(t)$ halladas de

*) La integración término a término de la serie (6.4.1) es posible si esta serie converge uniformemente con respecto a cada una de las variables en el intervalo (α, β) . Generalmente esta condición se cumple, si la función correlativa $K_X(t, t')$ es limitada y continua.

este modo, satisfarán aproximadamente también, junto con las funciones $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, las condiciones (6.2.8). A consecuencia de esto la fórmula (6.4.2) ofrece la descomposición canónica aproximada de la función aleatoria $X(t)$, que contiene n términos. Con ello, la dispersión del término residual será aproximadamente igual, en virtud de (6.3.4), al término residual del segmento correspondiente de la descomposición (6.4.1) cuando $t = t'$.

Ejemplo 6.4.1. Supongamos que la función correlativa de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ se expresa en el intervalo $|\tau| < 2T$ por la fórmula

$$k_X(\tau) = \sum_{\nu=1}^n D_\nu \cos \omega_\nu \tau.$$

Al representar esta fórmula en la forma

$$k_X(t-t') = \sum_{\nu=1}^n (D_\nu \sin \omega_\nu t \sin \omega_\nu t' + D_\nu \cos \omega_\nu t \cos \omega_\nu t'),$$

observamos que ésta da la descomposición canónica de la función correlativa en el cuadrado $|t| < T, |t'| < T$ (al variar t y t' en estos límites, $\tau = t - t'$ varía en los límites $|\tau| < 2T$). Según lo demostrado, a esta descomposición canónica de la función correlativa le corresponde la de la función aleatoria $X(t)$ en el intervalo $|t| < T$:

$$X(t) = m_X + \sum_{\nu=1}^n (U_\nu \sin \omega_\nu t + Z_\nu \cos \omega_\nu t).$$

Aquí U_ν, Z_ν son magnitudes aleatorias no correlacionadas con esperanzas matemáticas iguales a cero y las dispersiones $D[U_\nu] = D[Z_\nu] = D_\nu$ ($\nu=1, \dots, n$).

Hallemos ahora por medio del método expuesto las funciones $a_\nu(t)$ que satisfacen, junto con las funciones coordenadas $x_\nu(t)$, las condiciones de biortogonalidad (6.2.12), limitándonos, para simplicidad, al caso $n=2, \omega_1 = \pi/2T, \omega_2 = \pi/4T$. En este caso tenemos cuatro funciones coordenadas:

$$x_1(t) = \sin \omega_1 t, \quad x_2(t) = \cos \omega_1 t, \quad x_3(t) = \sin \omega_2 t, \quad x_4(t) = \cos \omega_2 t.$$

Supongamos también que

$$f_1(t) = \sin \omega_1 t, \quad f_2(t) = \cos \omega_1 t, \quad f_3(t) = \sin \omega_2 t, \quad f_4(t) = \cos \omega_2 t$$

y elegimos la primera función $g_1(t)$ coincidente con $f_1(t)$:

$$g_1(t) = \sin \omega_1 t, \quad (g_1, x_1) = \int_{-T}^T \sin^2 \omega_1 t \, dt = T.$$

La segunda función $g_2(t)$, ortogonal con respecto a la primera función coordenada $x_2(t)$, la buscamos en la forma $g_2(t) = b_{21}g_1(t) + f_2(t)$. El coeficiente b_{21} lo determinamos de la condición de biortogonalidad de $g_2(t)$ con respecto a $x_1(t)$. Como resultado obtenemos $b_{21} = 0$ y

$$g_2(t) = \cos \omega_1 t, \quad (g_2, x_2) = \int_{-T}^T \cos^2 \omega_1 t \, dt = T.$$

Luego suponemos que sea $g_3(t) = b_{31}g_1(t) + b_{32}g_2(t) + f_3(t)$ y buscamos los coeficientes b_{31} y b_{32} de la condición de ortogonalidad de $g_3(t)$ con respecto a $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Como resultado hallamos

$$g_3(t) = -\frac{8}{3\pi} \operatorname{sen} \omega_1 t + \operatorname{sen} \omega_2 t, \quad (g_3, x_3) = T \left(1 - \frac{64}{9\pi^2} \right).$$

Suponiendo que $g_4(t) = b_{41}g_1(t) + b_{42}g_2(t) + b_{43}g_3(t) + f_4(t)$ y determinados los coeficientes b_{41} , b_{42} y b_{43} de la condición de ortogonalidad de $g_4(t)$ con respecto a $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$, hallamos

$$g_4(t) = -\frac{4}{3\pi} \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t, \quad (g_4, x_4) = T \left(1 - \frac{16}{9\pi^2} \right).$$

Una vez determinadas las funciones $g_v(t)$, suponemos, conforme al método expuesto, que $a_1(t) = c_{11}g_1(t) + c_{12}g_2(t) + c_{13}g_3(t) + c_{14}g_4(t)$ y hallamos el coeficiente c_{11} de la condición de que la magnitud (a_1, x_1) es igual a la unidad y los coeficientes c_{12} , c_{13} y c_{14} de la condición de ortogonalidad de la función $a_1(t)$ con respecto a $x_2(t)$, $x_3(t)$ y $x_4(t)$. Como resultado obtendremos

$$a_1(t) = \frac{3\pi}{T(9\pi^2 - 64)} (3\pi \operatorname{sen} \omega_1 t - 8 \operatorname{sen} \omega_2 t).$$

Después de poner $a_2(t) = c_{22}g_2(t) + c_{23}g_3(t) + c_{24}g_4(t)$ y determinar el coeficiente c_{22} de la condición $(a_2, x_2) = 1$ y los coeficientes c_{23} y c_{24} de la condición de ortogonalidad de la función $a_2(t)$ con respecto a $x_3(t)$ y $x_4(t)$, hallamos

$$a_2(t) = \frac{3\pi}{T(9\pi^2 - 16)} (3\pi \cos \omega_1 t - 4 \cos \omega_2 t).$$

Una vez puesto $a_3(t) = c_{33}g_3(t) + c_{34}g_4(t)$ y determinado el coeficiente c_{33} de la condición $(a_3, x_3) = 1$ y el coeficiente c_{34} de la condición de ortogonalidad de $a_3(t)$ con respecto a $x_4(t)$, obtendremos

$$a_3(t) = -\frac{3\pi}{T(9\pi^2 - 64)} (8 \operatorname{sen} \omega_1 t - 3\pi \operatorname{sen} \omega_2 t).$$

Por fin, poniendo $a_4(t) = c_{44}g_4(t)$ y habiendo determinado el coeficiente c_{44} de la condición $(a_4, x_4) = 1$, obtendremos

$$a_4(t) = -\frac{3\pi}{T(9\pi^2 - 16)} (4 \cos \omega_1 t - 3\pi \cos \omega_2 t).$$

Le dejamos al lector que por sí mismo compruebe que las magnitudes aleatorias

$$U_1 = \int_{-T}^T X^0(t) \operatorname{sen} \omega_1 t dt, \quad Z_1 = \int_{-T}^T X^0(t) \cos \omega_1 t dt,$$

$$U_2 = \int_{-T}^T X^0(t) \operatorname{sen} \omega_2 t dt, \quad Z_2 = \int_{-T}^T X^0(t) \cos \omega_2 t dt$$

no son correlacionadas; con ello, las magnitudes U_1 y Z_1 tienen la dispersión D_1 y las magnitudes U_2 y Z_2 , la dispersión D_2 .

§ 6.5. Representación canónica integral de una función aleatoria

Sea $V(\lambda)$ un ruido blanco arbitrario:

$$\left. \begin{aligned} M[V(\lambda)] &= 0, \\ K_v(\lambda, \lambda') &= M[V(\lambda)\overline{V(\lambda')}] = G(\lambda)\delta(\lambda - \lambda'), \end{aligned} \right\} \quad (6.5.1)$$

donde $G(\lambda)$ es la intensidad del ruido blanco. Hallemos las condiciones en que la función aleatoria $X(t)$ puede ser expresada por medio de este ruido blanco $V(\lambda)$ por la integral (6.1.5). Para esto hallemos la función correlativa recíproca de la función aleatoria $X(t)$ y del ruido blanco $V(\lambda)$, suponiendo que la función aleatoria $X(t)$ se expresa por la representación canónica integral (6.1.5). Aplicando (4.7.4) para la función correlativa recíproca y la integral de ella, obtendremos para todos los valores de λ en el intervalo $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

$$K_{xv}(t, \lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x(t, \mu) G(\lambda) \delta(\lambda - \mu) d\mu = G(\lambda) x(t, \lambda). \quad (6.5.2)$$

De aquí se deriva que la función coordenada $x(t; \lambda)$, para cada valor dado del parámetro λ , debe expresarse por la fórmula

$$x(t, \lambda) = \frac{K_{xv}(t, \lambda)}{G(\lambda)} = \frac{1}{G(\lambda)} M[X^0(t)\overline{V(\lambda)}]. \quad (6.5.3)$$

El segundo procedimiento posible de deducción de esta fórmula es semejante al procedimiento de deducción de la fórmula (6.2.5). Escribamos la igualdad (6.1.5) en la forma

$$X^0(t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda) x(t, \lambda) d\lambda, \quad (6.5.4)$$

multipliquémosla por la función aleatoria $\overline{V(\mu)}$ y tomemos la esperanza matemática de los miembros derecho e izquierdo de la igualdad obtenida. Entonces, en virtud de (6.5.1) obtendremos

$$\begin{aligned} M[X^0(t)\overline{V(\mu)}] &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M[V(\lambda)\overline{V(\mu)}] x(t, \lambda) d\lambda = \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x(t, \lambda) G(\lambda) \delta(\lambda - \mu) d\lambda = G(\mu) x(t, \mu). \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Es precisamente de aquí de donde obtenemos la fórmula (6.5.3). La fórmula (6.5.3) muestra que el ruido blanco $V(\lambda)$ debe ser correlacionado con la función aleatoria dada $X(t)$. El ruido blanco $V(\lambda)$ correlacionado con la función aleatoria $X(t)$ conviene buscarlo en

la misma forma en que buscamos las magnitudes aleatorias no correlacionadas V_v al hallar la descomposición canónica de la función aleatoria $X(t)$ en el § 6.2. Para esto tomemos cierta función $a(t, \lambda)$ dependiente del parámetro λ y vamos a buscar el ruido blanco en la forma

$$V(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{a(t, \lambda)} X^0(t) dt. \quad (6.5.6)$$

Halleemos las condiciones que debe satisfacer la función $a(t, \lambda)$ para que la función $V(\lambda)$ sea un ruido blanco. Para hallar estas condiciones, sustituyamos la expresión del ruido blanco (6.5.6) en la fórmula para las funciones coordenadas (6.5.3). Entonces obtendremos

$$\begin{aligned} x(t, \lambda) &= \frac{1}{G(\lambda)} M[X^0(t) \overline{V(\lambda)}] = \\ &= \frac{1}{G(\lambda)} \int_{\alpha}^{\beta} a(t', \lambda) M[X^0(t) \overline{X^0(t')}] dt' = \\ &= \frac{1}{G(\lambda)} \int_{\alpha}^{\beta} a(t', \lambda) K_x(t, t') dt'. \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

De este modo, hemos recibido la siguiente fórmula para las funciones coordenadas:

$$x(t, \lambda) = \frac{1}{G(\lambda)} \int_{\alpha}^{\beta} a(t', \lambda) K_x(t, t') dt'. \quad (6.5.8)$$

Como vemos, esta fórmula se semeja mucho a la (6.2.8) para las funciones coordenadas de la descomposición canónica; sólo que en vez del número v en ella figura el parámetro ininterrumpidamente variable λ . Así pues, hemos recibido una condición que deben satisfacer las funciones $a(t, \lambda)$ y $x(t, \lambda)$. Sin embargo, la condición (6.5.8) no es suficiente para que la función aleatoria $V(\lambda)$ sea un ruido blanco. Para obtener una condición adicional a la cual la función $V(\lambda)$ será ruido blanco, multipliquemos la fórmula (6.5.6) por $\overline{V(\lambda')}$ y tomemos la esperanza matemática de la expresión obtenida. Entonces hallaremos

$$K_v(\lambda, \lambda') = M[V(\lambda) \overline{V(\lambda')}] = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{a(t, \lambda)} M[X^0(t) \overline{V(\lambda')}] dt \quad (6.5.9)$$

o bien, teniendo en cuenta (6.5.3),

$$\begin{aligned} K_v(\lambda, \lambda') &= \int_{\alpha}^{\beta} \overline{a(t, \lambda)} G(\lambda') x(t, \lambda') dt = \\ &= G(\lambda') \int_{\alpha}^{\beta} \overline{a(t, \lambda)} x(t, \lambda') dt. \end{aligned} \quad (6.5.10)$$

Comparando esta fórmula con la segunda fórmula (6.5.1), vemos que para que la función aleatoria $V(\lambda)$ sea un ruido blanco, es necesario que las funciones $a(t, \lambda)$ y $x(t, \lambda)$ satisfagan la condición

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{a(t, \lambda)} x(t, \lambda') dt = \delta(\lambda - \lambda'). \quad (6.5.11)$$

Esta condición es el análogo de la de biortogonalidad (6.2.12). Para distintos valores de λ y λ' la integral del producto de las funciones $x(t, \lambda)$, $a(t, \lambda')$ debe ser igual a cero, es decir las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda')$ deben ser ortogonales.

Hemos visto en el caso de descomposición canónica que para cualquier función aleatoria se puede siempre hallar las funciones $x_v(t)$ y $a_v(t)$ que satisfacen las condiciones (6.2.8) y (6.2.12), mientras que en el caso de representación canónica integral no existe un método general de determinación de las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$ que satisfacen las condiciones (6.5.8) y (6.5.11). A continuación aportaremos una serie de ejemplos cuando se puede hallar fácilmente tales funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$.

Las condiciones (6.5.8) y (6.5.11) son necesarias para que la función aleatoria $V(\lambda)$, determinada por la fórmula (6.5.6), sea un ruido blanco y para que la función aleatoria $X(t)$ pueda ser expresada en función de este ruido blanco por medio de la representación canónica integral. Es evidente que estas condiciones son suficientes para que la función aleatoria $V(\lambda)$, determinada por la fórmula (6.5.6), sea un ruido blanco. Demostremos que las condiciones (6.5.8) y (6.5.11) junto con la condición

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \overline{a(t, \lambda)} x(t', \lambda) d\lambda = \delta(t - t') \quad (6.5.12)$$

son suficientes también para que la función $X(t)$ sea expresada por la representación canónica integral (6.1.5). Para esto calculemos en el segundo miembro de la fórmula (6.5.4) la integral y demostremos que, al cumplir las condiciones (6.5.8), (6.5.11) y (6.5.12), ésta es igual a la función aleatoria centrada $X^0(t)$. En virtud de las fórmulas (6.5.6) y (6.5.12) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda) x(t, \lambda) d\lambda &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \overline{a(t', \lambda)} X^0(t') dt' \right\} x(t, \lambda) d\lambda = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} X^0(t') \left\{ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \overline{a(t', \lambda)} x(t, \lambda) d\lambda \right\} dt' = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} X^0(t') \delta(t - t') dt' = X^0(t). \quad (6.5.13) \end{aligned}$$

De este modo, hemos demostrado que las tres condiciones (6.5.8), (6.5.11) y (6.5.12) son suficientes para que la función aleatoria $V(\lambda)$, determinada por la fórmula (6.5.6), sea un ruido blanco y para que la función aleatoria $X(t)$ se exprese en función de este ruido blanco por la representación canónica integral (6.1.5).

Ejemplo 6.5.1. En el ejemplo 4.6.2 hallamos que la derivada de la función aleatoria $X(t)$ con la función correlativa $D e^{-\alpha|t-t'|}$ tiene la función correlativa de la forma [véase la fórmula (4.6.17)]

$$K_{y_1}(t, t') = 2D\alpha\delta(t-t') - D\alpha^2 e^{-\alpha|t-t'|}.$$

Ahora bien, en este caso la función correlativa contiene el sumando $2D\alpha\delta(t-t')$ que es la función correlativa del ruido blanco. Sin embargo, la propia derivada $X'(t)$ no es ruido blanco, puesto que en su función correlativa hay todavía el sumando $D\alpha^2 e^{-\alpha|t-t'|}$. Puesto que este sumando tiene la misma forma que la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$, es natural suponer que se puede hallar una combinación tal de la función aleatoria $X(t)$ y de su derivada $X'(t)$, que sea un ruido blanco puro. Examinemos la suma

$$V(t) = \alpha X(t) + X'(t). \quad (6.5.14)$$

Su función correlativa, como función correlativa de la suma de dos funciones aleatorias, es igual a la suma de las funciones correlativas y correlativas recíprocas de los sumandos, es decir,

$$K_v(t, t') = K_{y_1}(t, t') + \alpha^2 K_x(t, t') + \alpha K_{xy_1}(t, t') + \alpha K_{xy_1}(t', t). \quad (6.5.15)$$

Observemos ahora que, en virtud de (4.6.14), para cualesquiera t y t'

$$K_{xy_1}(t, t') + K_{xy_1}(t', t) = 0. \quad (6.5.16)$$

En efecto, al permutar los argumentos t y t' , las expresiones (4.6.14) pasan una a la otra, puesto que con ello el signo de desigualdad entre el primero y el segundo argumento cambia en el opuesto. La suma de cualquiera de las expresiones (4.6.14) con otra expresión, que tiene los argumentos t y t' permutados, es igual a cero, que es lo que demuestra la igualdad (6.5.16). Sustituyendo las expresiones de las funciones correlativas en (6.5.15) y teniendo en cuenta (6.5.16), obtendremos

$$K_v(t, t') = 2D\alpha\delta(t-t'). \quad (6.5.17)$$

Ahora bien, la función aleatoria $V(t) = \alpha X + X'$, determinada por la fórmula (6.5.14), representa en este caso un ruido blanco con intensidad igual a $2D\alpha$. Con otras palabras, la función aleatoria examinada $X(t)$ está ligada con el ruido blanco $V(t)$, que tiene la intensidad $2D\alpha$, por la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$X' + \alpha X = V(t). \quad (6.5.18)$$

Integrando esta ecuación, para la condición inicial $X(t_0) = 0$, obtendremos

$$X(t) = e^{-\alpha t} \int_{t_0}^t V(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau.$$

Transformemos esta expresión. Introduzcamos el multiplicador $e^{-\alpha \tau}$ bajo el signo integral y extendamos el límite superior de integración hasta cierto $t_1 > t$, al multiplicar la función subintegral por la función unidad escalonada $1(t - \tau)$,

igual a cero para $\tau > t$:

$$X(t) = \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} V(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha(t-\tau)} \mathbf{1}(t-\tau) V(\tau) d\tau. \quad (6.5.19)$$

Esta expresión contiene la constante arbitraria t_0 . Para determinar esta constante hallemos la función correlativa de la función aleatoria $X(t)$. Aplicando la fórmula (4.7.3) para la función correlativa de la integral de la función aleatoria y teniendo en cuenta que en este caso

$$g(t, \tau) = e^{-\alpha(t-\tau)} \mathbf{1}(t-\tau),$$

obtendremos

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} 2\alpha D e^{-\alpha(t-\tau)} e^{-\alpha(t'-\tau')} \mathbf{1}(t-\tau) \mathbf{1}(t'-\tau') \delta(\tau-\tau') d\tau d\tau' = \\ &= 2\alpha D \int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha(t+t'-2\tau)} \mathbf{1}(t-\tau) \mathbf{1}(t'-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Primeramente examinemos el caso cuando $t < t'$. Tendremos

$$K_x(t, t') = 2\alpha D \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t+t'-2\tau)} d\tau = D [e^{-\alpha(t'-t)} - e^{-\alpha(t+t'-2t_0)}].$$

Cuando $t > t'$, en virtud de la simetría podemos escribir

$$K_x(t, t') = D [e^{-\alpha(t-t')} - e^{-\alpha(t'+t-2t_0)}].$$

Reuniendo estas fórmulas, obtendremos

$$K_x(t, t') = D [e^{-\alpha|t-t'|} - e^{-\alpha(t+t'-t_0)}]. \quad (6.5.20)$$

De aquí se ve que la función aleatoria $X(t)$ con la función correlativa $D e^{-\alpha|t-t'|}$ se expresa por medio del ruido blanco $V(t)$, cuya intensidad es $2D\alpha$, por la fórmula (6.5.19) si se pone $t_0 = -\infty$:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t_1} V(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \mathbf{1}(t-\tau) d\tau \quad (t < t_1). \quad (6.5.21)$$

Así pues, la función aleatoria estacionaria con función correlativa exponencial se expresa por la representación canónica integral (6.5.21) en un intervalo semi-infinito cualquiera $(-\infty, t_1)$. Las funciones coordenadas de esta representación canónica integral se determinan por la fórmula

$$x(t, \lambda) = e^{-\alpha(t-\lambda)} \mathbf{1}(t-\lambda). \quad (6.5.22)$$

Para hallar las funciones $a(t, \lambda)$, observemos que la fórmula (6.5.14), en la cual el ruido blanco $V(\lambda)$ va expresado mediante la función aleatoria $X(t)$, puede ser escrita en la forma

$$V(\lambda) = \int_{-\infty}^{t_1} [\delta'(\lambda-t) + \alpha\delta(\lambda-t)] X(t) dt \quad (\lambda < t_1).$$

De aquí se ve que

$$a(t, \lambda) = \delta'(\lambda - t) + \alpha\delta(\lambda - t). \quad (6.5.23)$$

En el ejemplo que sigue veremos que las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$, determinadas por las fórmulas (6.5.22) y (6.5.23), satisfacen las tres condiciones (6.5.8), (6.5.11) y (6.5.12).

Ejemplo 6.5.2. Los resultados del ejemplo anterior muestran que la función aleatoria no estacionaria $X(t)$ con la función correlativa (6.5.20) se expresa por la representación canónica integral (6.5.19) en el intervalo finito (t_0, t_1) . Con ello, las funciones coordenadas $x(t, \lambda)$ y las funciones $a(t, \lambda)$ van expresadas por las mismas fórmulas (6.5.22) y (6.5.23).

Es fácil cerciorarse de que en este caso las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$ satisfacen las tres ecuaciones (6.5.8), (6.5.11) y (6.5.12). En efecto, para $t_0 < t < \lambda < t_1$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} K_x(t, t') a(t', \lambda) dt' = \\ &= D \int_{t_0}^{t_1} [e^{-\alpha(t'-t)} - e^{-\alpha(t+t'-2t_0)}] [\delta'(\lambda - t') + \alpha\delta(\lambda - t')] dt' = \\ &= -D\alpha [e^{-\alpha(\lambda-t)} - e^{-\alpha(t+\lambda-2t_0)}] + D\alpha [e^{-\alpha(\lambda-t)} - e^{-\alpha(t+\lambda-2t_0)}] = 0. \end{aligned}$$

Para $t_0 < \lambda < t < t_1$ obtendremos

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} a(t', \lambda) K_x(t, t') dt' = \\ &= D \int_{t_0}^t [e^{-\alpha(t-t')} - e^{-\alpha(t+t'-2t_0)}] [\delta'(\lambda - t') + \alpha\delta(\lambda - t')] dt' = \\ &= D\alpha [e^{-\alpha(t-\lambda)} + e^{-\alpha(t+\lambda-2t_0)}] + D\alpha [e^{-\alpha(t-\lambda)} - e^{-\alpha(t+\lambda-2t_0)}] = 2D\alpha e^{-\alpha(t-\lambda)}. \end{aligned}$$

Al dividir las expresiones obtenidas por la intensidad del ruido blanco $V(\lambda)$, igual en este caso a $2D\alpha$, obtendremos precisamente la función $x(t, \lambda)$ determinada por la fórmula (6.5.22). Así pues, las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$ satisfacen la condición (6.5.8). Luego tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t x'(t, \lambda) \overline{a(t, \lambda')} dt = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\alpha(t-\lambda)} \mathbf{1}(t-\lambda) [\delta'(\lambda' - t) + \alpha\delta(\lambda' - t)] dt = \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda'} [e^{-\alpha(\lambda' - \lambda)} \mathbf{1}(\lambda' - \lambda)] + \alpha e^{-\alpha(\lambda' - \lambda)} \mathbf{1}(\lambda' - \lambda) = \\ &= -\alpha e^{-\alpha(\lambda' - \lambda)} \mathbf{1}(\lambda' - \lambda) + e^{-\alpha(\lambda' - \lambda)} \delta(\lambda' - \lambda) + \\ & \quad + \alpha e^{-\alpha(\lambda' - \lambda)} \mathbf{1}(\lambda' - \lambda) = e^{-\alpha(\lambda' - \lambda)} \delta(\lambda' - \lambda). \end{aligned}$$

Pero $\delta(\lambda' - \lambda) = 0$ para todos los valores de $\lambda' \neq \lambda$. Por eso el multiplicador $e^{-\alpha(\lambda' - \lambda)}$ puede ser sustituido en la expresión obtenida por la unidad. Por consiguiente, las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$ satisfacen la condición (6.5.11). De un modo absolutamente análogo nos convencemos de que ellas satisfacen también la condición (6.5.12).

Ejemplo 6.5.3. Le dejamos al lector que por sí mismo se convenza de que si $X(t)$ es una función aleatoria estacionaria con la función correlativa

$$k_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 |\tau| \right),$$

entonces la función aleatoria

$$V(t) = X''(t) + 2\alpha X'(t) + \beta^2 X(t), \quad \beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2, \quad (6.5.24)$$

representa un ruido blanco con intensidad igual a $2D\alpha\beta^2$. Al examinar la igualdad (6.5.24) como ecuación diferencial con respecto a $X(t)$ y al integrarla, nos cercioramos de que la función aleatoria $X(t)$ se expresa a través del ruido blanco $V(\lambda)$ por la fórmula

$$X(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^{t_1} V(\lambda) e^{-\alpha(t-\lambda)} \operatorname{sen} \omega_0(t-\lambda) \mathbf{1}(t-\lambda) d\lambda \quad (t \leq t_1). \quad (6.5.25)$$

Esta fórmula ofrece la representación canónica integral de la función aleatoria $X(t)$ con las funciones coordenadas

$$x(t, \lambda) = \frac{1}{\omega_0} e^{-\alpha(t-\lambda)} \operatorname{sen} \omega_0(t-\lambda) \mathbf{1}(t-\lambda). \quad (6.5.26)$$

Las funciones $a(t, \lambda)$ se determinan en este caso por la fórmula

$$a(t, \lambda) = \delta''(\lambda - t) + 2\alpha\delta'(\lambda - t) + \beta^2\delta(\lambda - t). \quad (6.5.27)$$

Al igual que en el ejemplo anterior, uno puede convencerse de que las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$, determinadas por las fórmulas (6.5.26) y (6.5.27), satisfacen las condiciones (6.5.8), (6.5.11) y (6.5.12).

§ 6.6. Representación canónica integral de una función aleatoria estacionaria

En los §§ 5.2 y 5.3 construimos una clase de funciones aleatorias estacionarias representables por las descomposiciones espectrales (5.2.21) y (5.3.3). Dado que las funciones aleatorias $U(\omega)$, $Z(\omega)$ y $V(\omega)$ en estas fórmulas son ruidos blancos, la descomposición espectral de una función aleatoria estacionaria es, al mismo tiempo, también su representación canónica integral. Aplicando la Teoría de representaciones canónicas integrales de funciones aleatorias, expuesta en el párrafo anterior, ahora podemos demostrar que cualquier función aleatoria estacionaria se expresa por la representación canónica integral (5.3.3). Este hecho ha quedado sin demostrar en los §§ 5.2 y 5.3. Al demostrarlo, podemos afirmar que la clase de funciones aleatorias estacionarias, construida en los §§ 5.2 y 5.3, incluye todas las funciones aleatorias estacionarias.

Para la demostración observemos que las funciones

$$x(t, \lambda) = e^{i\lambda t}, \quad a(t, \lambda) = \frac{1}{2\pi} e^{i\lambda t} \quad (6.6.1)$$

satisfacen las ecuaciones (6.5.11) y (6.5.12). En efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{1}{2\pi} e^{-i\lambda' t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda - \lambda')t} dt = \delta(\lambda - \lambda'),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{1}{2\pi} e^{-i\lambda t'} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-t')\lambda} d\lambda = \delta(t - t')$$

[véase la fórmula (2.2.22) que ofrece la representación de la función delta en forma de la integral de Fourier].

Para cerciorarse de que las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$, determinadas por las fórmulas (6.6.1), satisfacen también la ecuación (6.5.8), basta demostrar que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_x(t-t') a(t', \lambda) dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(t-t') e^{i\lambda t'} dt' \quad (6.6.2)$$

se distingue de la función $x(t, \lambda) = e^{i\lambda t}$ solamente por el multiplicador independiente de t y tomar este multiplicador como función $G(\lambda)$. Efectuando en la integral (6.6.2) la sustitución de las variables $\tau = t - t'$, obtendremos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(t-t') e^{i\lambda t'} dt' = e^{i\lambda t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\lambda \tau} d\tau.$$

De aquí se ve que las funciones $x(t, \lambda)$ y $a(t, \lambda)$, determinadas por las fórmulas (6.6.1), satisfacen la ecuación (6.5.8) cuando

$$G(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\lambda \tau} d\tau. \quad (6.6.3)$$

En virtud de lo demostrado en el párrafo anterior, la función aleatoria

$$V(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^0(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (6.6.4)$$

representa un ruido blanco cuya intensidad es igual a $G(\lambda)$ y la función aleatoria $X(t)$ va expresada en función de este ruido blanco por la representación canónica integral

$$X(t) = m_x + \int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \quad (6.6.5)$$

Esta fórmula difiere de (5.3.3) solamente por la designación de la frecuencia.

Comparando la fórmula (6.6.3) con la (5.3.11), nos convencemos de que la intensidad $G(\lambda)$ del ruido blanco $V(\lambda)$, determinado por la fórmula (6.6.4), coincide con la densidad espectral $s_x(\lambda)$ de la función aleatoria $X(t)$. Por fin, en virtud de la fórmula general (6.1.10), la función correlativa de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ se expresa por la representación canónica integral

$$k_x(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) e^{i\lambda t} e^{-i\lambda t'} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\lambda) e^{i\lambda(t-t')} d\lambda. \quad (6.6.6)$$

Esta fórmula se distingue también de la (5.3.15) solamente por la designación de la frecuencia.

Ahora bien, hemos demostrado que cualquier función aleatoria estacionaria se expresa por la representación canónica integral (6.6.5) que coincide con su descomposición espectral (5.3.3).

Demostremos ahora que para ninguna función aleatoria no estacionaria la descomposición espectral puede ser su representación canónica integral. En efecto, supongamos que la función aleatoria no estacionaria $X(t)$ se expresa por la representación canónica integral (6.6.5). Entonces su función correlativa debe expresarse por la fórmula (6.6.6.), es decir, debe depender solamente de la diferencia de los argumentos, lo que contradice a la suposición acerca de la no estacionariedad de esta función aleatoria. Así pues, si se logra expresar una función aleatoria no estacionaria por la descomposición espectral (6.5.5), la función $V(\lambda)$ no puede ser un ruido blanco en esta descomposición. Esto quiere decir que la descomposición espectral de una función aleatoria no estacionaria la expresa solamente a través de otra función aleatoria $V(\lambda)$, que en el caso general no es más sencilla y no da nada para la práctica.

Examinemos ahora dos funciones aleatorias reales $X(t)$ o $Y(t)$ que son estacionarias y estacionariamente ligadas. Expresemos la función aleatoria $X(t)$ por la representación canónica integral (6.6.5) y la función aleatoria $Y(t)$, por la representación canónica integral

$$Y(t) = m_y + \int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \quad (6.6.7)$$

En este caso el ruido blanco $V(\lambda)$ se expresará por la fórmula (6.6.4) y el ruido blanco $W(\lambda)$, por la fórmula semejante

$$W(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^0(t) e^{-i\lambda t} dt. \quad (6.6.8)$$

Calculemos la función correlativa recíproca de los ruidos blancos $V_1(\lambda)$ y $W(\lambda)$. Para eso pasemos en (6.6.8) a las magnitudes conjugadas complejas y cambiemos las designaciones del argumento y de

la variable de integración. Entonces obtendremos

$$M[V(\lambda)\overline{W(\lambda')}] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M[X^0(t)Y^0(t')] e^{i(\lambda't - \lambda t)} dt dt'$$

bien

$$K_{vw}(\lambda, \lambda') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{xy}(t-t') e^{i(\lambda't - \lambda t)} dt dt'.$$

La sustitución de las variables $t' = t - \tau$ en la integral con respecto a t' da

$$K_{vw}(\lambda, \lambda') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} k_{xy}(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda' - \lambda)t} dt.$$

Pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda' - \lambda)t} dt = 2\pi \delta(\lambda - \lambda').$$

Por consiguiente, introduciendo la designación

$$s_{xy}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_{xy}(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau, \quad (6.6.9)$$

obtendremos

$$K_{vw}(\lambda, \lambda') = s_{xy}(\lambda) \delta(\lambda - \lambda'). \quad (6.6.10)$$

De este modo, hemos demostrado que la función correlativa recíproca de los ruidos blancos en las representaciones espectrales de dos cualesquiera funciones aleatorias estacionarias y estacionariamente ligadas contiene como multiplicador la función delta. Esto quiere decir que los valores de estos ruidos blancos, correspondientes a diferentes valores de la frecuencia, no son correlacionados. En el § 5.6. hemos mostrado esto recurriendo a otros razonamientos.

Entropía e información contenida en las magnitudes aleatorias

§ 7.1. Medición de la indeterminación de fenómenos aleatorios. Noción de entropía

Todo fenómeno aleatorio está viuculado con cierta indeterminación. El resultado de observación de un fenómeno aleatorio no puede ser predicho con plena seguridad, es decir, es indeterminado y se hace determinado solamente después de la observación. Por eso, al planificar trabajos relacionados con la observación de fenómenos aleatorios o al calcular sistemas destinados a funcionar con señales no conocidas de antemano, debemos tomar en consideración la indeterminación de los resultados de observación de los fenómenos aleatorios, tener en cuenta que los resultados de unas mismas acciones y pruebas pueden ser en el proceso de trabajo distintos. Cabe preguntar ¿se podría medir la indeterminación de fenómenos aleatorios y tenerla en cuenta en nuestros cálculos? Para resolver esta cuestión, prestemos atención al hecho de que en ciertos casos podemos comparar la indeterminación de los resultados de diferentes experimentos y decir con seguridad que la indeterminación de una prueba es mayor que la de otra. Así, por ejemplo, si, como resultado de una prueba, el acontecimiento A puede producirse o no producirse con la probabilidad de $1/2$ y, como resultado de otra prueba, el acontecimiento B puede suceder con la probabilidad de $0,99$, entonces está claro intuitivamente que la primera prueba posee mayor indeterminación que la segunda. En efecto, el resultado del primer experimento es absolutamente imposible predecir. Al contrario, prácticamente podemos estar seguros de que no nos equivocamos al predecir que, como resultado del segundo experimento, el acontecimiento B se producirá. Si en la tercera prueba el acontecimiento C tiene la probabilidad de $0,9$ es evidente que esta prueba posee mayor indeterminación que la segunda y menor que la primera. Este ejemplo muestra claramente que la estimación cuantitativa de indeterminación de los resultados de observación de los fenómenos aleatorios es, en principio, posible.

Para hallar el modo de tratar la estimación cuantitativa de la indeterminación de los fenómenos aleatorios, imaginémosnos que participando en cualquier trabajo, por ejemplo, en el mando de un proceso de producción, hemos efectuado cierto experimento. El resultado del mismo es necesario comunicárselo a otros participantes, para que puedan cumplir su parte del trabajo. Claro está que la comunica-

ción acerca del resultado de la prueba líquida por completo la indeterminación que existía antes de llevar a cabo el experimento.

Para transmitir las comunicaciones se utilizan generalmente los medios de enlace. La transmisión de comunicaciones se efectúa por las líneas de enlace con ayuda de determinadas señales. Por eso, para transmitir una comunicación, es necesario ponerle en correspondencia una sucesión determinada de señales o, como se dice, cifrar la comunicación. El código binario es el más sencillo. En éste la transmisión de comunicaciones se efectúa por señales de dos tipos. Al ligar con un tipo de señal el cero y con el otro, la unidad, reduciremos la codificación de la comunicación a su representación en forma de una sucesión de ceros y unidades que alternan de una manera determinada. Con ello, es necesario, naturalmente, asegurar que a distintas comunicaciones les correspondan diferentes sucesiones de ceros y unidades. Desde el punto de vista teórico, al cifrar comunicaciones, es necesario tratar de gastar con mayor economía el tiempo y los medios requeridos para su transmisión. Esto se puede alcanzar eligiendo tal procedimiento de codificación con el cual sea mínimo el número esperable de signos (señales) con ayuda de los cuales se transmiten las comunicaciones. Es obvio que para asegurar el número mínimo esperable de signos para la transmisión de las comunicaciones acerca del resultado de la prueba en cuestión, es necesario representar los resultados de mayor probabilidad por las sucesiones más cortas de ceros y unidades y los de menor probabilidad, ligarlos con sucesiones más largas.

El posible número mínimo esperable de signos requerido para liquidar por completo la indeterminación del resultado de la prueba, al emplear el procedimiento más económico de codificación, conviene tomarlo por medida cuantitativa de la indeterminación del experimento. Con ello, la unidad de indeterminación será un dígito binario (en forma abreviada bit *).

Para realizar prácticamente el procedimiento de codificación más económico, con el cual la esperanza matemática del número de dígitos binarios necesarios para transmitir la comunicación sobre el resultado de la prueba sea mínima, se procede del modo siguiente. Todos los resultados posibles del experimento se dividen en dos grupos de manera que la probabilidad sumaria de los resultados de cada grupo sea lo más próxima a la mitad. A un grupo se le asigna el primer dígito binario; el cero, y al otro, la unidad. Luego cada grupo se divide en dos subgrupos de modo que la probabilidad sumaria de los resultados de cada subgrupo sea lo más próxima a un cuarto. De tal manera se continúa la división de los subgrupos hasta que se obtenga el subgrupo que contenga sólo un resultado del experimento. Los

*) «Bit» es una abreviatura del término inglés «binary digit» que significa en español «dígito binario».

subgrupos que contienen más de un resultado se siguen dividiendo. Al fin y al cabo todos los subgrupos contendrán cada uno un resultado y, con ello, a los resultados más probables les corresponderá menor cantidad de dígitos binarios y a los resultados menos probables, una cantidad mayor de los mismos.

Ejemplo 7.1.1. Si son posibles ocho resultados del experimento con las probabilidades $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/64$, $1/64$, $1/64$, $1/64$, entonces, aplicando el procedimiento expuesto de codificación, obtendremos la tabla siguiente:

i	p_i	Díg. 1	Díg. 2	Díg. 3	Díg. 4	Díg. 5	Díg. 6
1	$\frac{1}{2}$	0					
2	$\frac{1}{4}$	1	0				
3	$\frac{1}{8}$	1	1	0			
4	$\frac{1}{16}$	1	1	1	0		
5	$\frac{1}{64}$	1	1	1	1	0	0
6	$\frac{1}{64}$	1	1	1	1	0	1
7	$\frac{1}{64}$	1	1	1	1	1	0
8	$\frac{1}{64}$	1	1	1	1	1	1

Ahora bien, la comunicación sobre el resultado más probable del experimento, que tiene la probabilidad de $1/2$, se transmitirá por un solo dígito binario: 0; la comunicación sobre el segundo resultado del experimento, que tiene la probabilidad de $1/4$, se transmitirá por dos dígitos 1 y 0; la comunicación del tercer resultado, que tiene la probabilidad de $1/8$, se transmitirá por tres dígitos; la comunicación sobre el cuarto resultado que tiene la probabilidad de $1/16$, se transmitirá por cuatro dígitos y las comunicaciones acerca de cada uno de los demás resultados, cuyas probabilidades son iguales a $1/64$, se transmitirán por seis dígitos.

Hallemos la indeterminación del experimento en cuestión, la cual, según la definición anteriormente dada, es igual a la esperanza matemática del número de dígitos requeridos para transmitir la comunicación sobre el resultado de la prueba. Los valores posibles del número de signos que puede comprender la comunicación sobre el resultado de la prueba son 1, 2, 3, 4 y 6. Las probabilidades de estos valores son iguales, respectivamente, a $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$ y $4 \cdot 1/64 = 1/16$. Por eso la esperanza matemática del número de dígitos que puede com-

prender la comunicación sobre el resultado de la prueba es igual

$$H = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 6 \cdot \frac{1}{16} = 2 \text{ bits.}$$

Así pues, la indeterminación del experimento en cuestión es igual a 2 bits.

Ejemplo 7.1.2. Si son posibles ocho resultados del experimento y la probabilidad de cada uno de ellos es igual a $1/8$, entonces el procedimiento expuesto de codificación de las comunicaciones acerca de los resultados del experimento lo ofrece la tabla siguiente:

i	p_i	Díg. 1	Díg. 2	Díg. 3
1	$\frac{1}{8}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	0	0	1
3	$\frac{1}{8}$	0	1	0
4	$\frac{1}{8}$	0	1	1
5	$\frac{1}{8}$	1	0	0
6	$\frac{1}{8}$	1	0	1
7	$\frac{1}{8}$	1	1	0
8	$\frac{1}{8}$	1	1	1

Ahora bien, la comunicación sobre cualquier resultado del experimento se transmite en este caso por tres dígitos. Y esto era de esperar, puesto que todos los resultados de la prueba son equiprobables. La esperanza matemática del número de dígitos comprendidos en la comunicación es también igual a tres. Por lo tanto, la indeterminación del experimento en cuestión es igual a 3 bits.

Examinemos el experimento con n resultados posibles cuyas probabilidades son todas iguales a potencias enteras de una mitad. Es fácil comprender que, al emplear el procedimiento de codificación expuesto, al resultado de la prueba cuya probabilidad es 2^{-m} le corresponderá m dígitos binarios, lo que evidencian claramente los ejemplos citados. Así, pues, la esperanza matemática del número de dígitos comprendidos en la comunicación sobre el resultado del experimento en cuestión es igual a

$$H = \sum m 2^{-m}, \quad (7.1.1)$$

donde la adición se realiza con respecto a todos los resultados posibles de la prueba. En este caso, está claro que si ciertos resultados del experimento tienen probabilidades iguales, les corresponderán sumandos iguales. Observemos ahora que en el caso en cuestión, en que la probabilidad del i -ésimo resultado de la prueba $p_i = 2^{-m}$, el número de dígitos comprendidos en la comunicación acerca de este resultado del experimento es igual al logaritmo binario de su probabilidad tomado con el signo contrario: $m = -^2 \log p_i$ ($i = 1, \dots, n$). Por eso la fórmula (7.1.1) se puede escribir en la forma

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i {}^2 \log p_i. \quad (7.1.2)$$

Esta magnitud, obtenida por nosotros para el caso particular cuando las probabilidades de todos los resultados del experimento se expresan por potencias enteras de una mitad, se toma por medida cuantitativa de indeterminación de cualquier prueba con un número finito de resultados posibles y se llama *entropía* del experimento. En vez de experimento, se puede hablar de un sistema con número finito de estados posibles que tienen probabilidades asignadas de antemano. La entropía de este sistema, determinada por la fórmula (7.1.2), es la medida de indeterminación del sistema. Claro está que en la definición de la entropía (7.1.2) se tienen en cuenta todos los resultados posibles del experimento, es decir,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (7.1.3)$$

La entropía de un experimento con un número finito $n > 1$ de resultados (o de un sistema con un número finito de estados posibles) es siempre positiva, puesto que los logaritmos de fracciones propias son negativos. Si la prueba tiene un solo resultado posible cuya probabilidad es igual a la unidad, entonces la entropía de la prueba es igual a cero. Esto es natural ya que el experimento con un solo resultado posible carece por completo de indeterminación. Demostremos que entre todos los experimentos posibles, con n resultados posibles, la mayor entropía la poseen los experimentos de resultados equiprobables. Para la demostración, deduzcamos una desigualdad auxiliar que necesitaremos más de una vez a continuación. Observemos que para cualesquiera valores positivos de x

$$\ln x \leq x - 1. \quad (7.1.4)$$

En efecto, el logaritmo es una función monótona creciente con derivada monótona decreciente. Por consiguiente, se representa por una curva, cuya convexidad está dirigida hacia arriba, que se encuentra por completo bajo cualquier tangente a ella (fig. 7.1.1.). En particular, la curva que representa al logaritmo natural se halla por com-

pleto bajo la tangente a ella en el punto $x = 1$ que tiene la ecuación $y = x - 1$. Precisamente de aquí se deduce la desigualdad (7.1.4). El signo de igualdad en (7.1.4) tiene lugar solamente cuando $x = 1$. Poniendo $x = 1/u$, obtendremos

$$\ln \frac{1}{u} \leq \frac{1}{u} - 1.$$

de donde

$$\ln u = -\ln \frac{1}{u} \geq 1 - \frac{1}{u}.$$

Ahora bien, para cualesquiera valores positivos de u

$$\ln u \geq 1 - \frac{1}{u}. \quad (7.1.5)$$

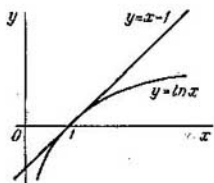


Fig. 7.1.1.

Pasando aquí de los logaritmos naturales a los binarios, obtendremos

$${}^2\log u \geq \left(1 - \frac{1}{u}\right)^2 \log e. \quad (7.1.6)$$

Esto es precisamente la desigualdad auxiliar buscada.

En virtud de la definición (7.1.2), la entropía de un experimento con n resultados equiprobables es

$$H_p = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} {}^2\log \frac{1}{n} = {}^2\log n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = {}^2\log n. \quad (7.1.7)$$

Observemos ahora que las probabilidades iguales de $1/n$, que constituyen en suma la unidad, pueden ser sustituidas en (7.1.7) por otras probabilidades cualesquiera p_1, p_2, \dots, p_n que constituyen en total la unidad. Entonces la entropía de un experimento con n resultados equiprobables se expresará por la fórmula

$$H_p = {}^2\log n \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n p_i {}^2\log n.$$

Restando de esta expresión la (7.1.2) de la entropía de un experimento con n resultados que tienen las probabilidades p_1, \dots, p_n , tendremos

$$H_p - H = \sum_{i=1}^n p_i {}^2\log n p_i.$$

De aquí, aplicando la desigualdad (7.1.6), obtenemos

$$H_p - H \geq {}^2\log e \sum_{i=1}^n p_i \left(1 - \frac{1}{n p_i}\right) = {}^2\log e \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Esto demuestra que la entropía de un experimento con resultados equiprobables no puede ser menor que la de otro experimento cual-

quiera con el mismo número de resultados posibles. Como el signo de igualdad en (7.1.6) tiene lugar solamente para $u = 1$, la entropía de un experimento con resultados equiprobables siempre es mayor que la cualquier prueba que tiene el mismo número de resultados posibles pero diferentes probabilidades de los mismos.

Observemos todavía que, como muestra la fórmula (7.17), la entropía de un experimento con resultados equiprobables será tanto mayor cuanto mayor sea el número de resultados posibles del mismo.

Todas las propiedades examinadas de la entropía se concuerdan plenamente con nuestras ideas intuitivas acerca de la indeterminación de los resultados de observación de fenómenos aleatorios.

§ 7.2. Entropía de una magnitud aleatoria.

Entropía condicional media

Extendamos ahora la definición de entropía, dada en el párrafo anterior, al caso de un conjunto infinito de resultados posibles de un experimento. Para esto introduzcamos la noción de entropía de una magnitud aleatoria. Examinemos primeramente una magnitud aleatoria discontinua X cuyos posibles valores x_1, \dots, x_n tienen las probabilidades que son iguales a p_1, \dots, p_n , respectivamente. El experimento tiene en este caso n resultados posibles y las probabilidades de éstos son iguales a las de los valores correspondientes de la magnitud aleatoria X . Tomemos la entropía de este experimento por la de la magnitud aleatoria discontinua X . De este modo, la entropía de una magnitud aleatoria discontinua representa la suma, tomada con signo contrario, de probabilidades de todos sus valores posibles multiplicados por los logaritmos de estas probabilidades:

$$H[X] = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i. \quad (7.2.1)$$

Para determinar la entropía de una magnitud aleatoria continua X , dividamos el dominio de sus valores posibles en un número finito de intervalos I_1, \dots, I_n y tomaremos por el i -ésimo resultado del experimento el encuentro del valor de la magnitud aleatoria X en el i -ésimo intervalo. Las probabilidades de estos resultados del experimento serán

$$p_i \int_{I_i} f(x) dx = f(x_i) \Delta x_i, \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (7.2.2)$$

donde x_i es cierto valor medio de x en el i -ésimo intervalo, Δx_i es la longitud del i -ésimo intervalo y $f(x)$ es la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria X que se supone ser continua en cada uno de

los intervalos I_1, \dots, I_n . La entropía del experimento, en virtud de la definición (7.1.2), será

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{i=1}^n [f(x_i) \Delta x_i]^2 \log [f(x_i) \Delta x_i] = \\ &= - \sum_{i=1}^n f(x_i) [{}^2 \log f(x_i) + {}^2 \log \Delta x_i] \Delta x_i \end{aligned}$$

o bien

$$H = - \sum_{i=1}^n f(x_i) {}^2 \log f(x_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(x_i) ({}^2 \log \Delta x_i) \Delta x_i. \quad (7.2.3)$$

En esta fórmula el paso directo al límite para $\Delta x_i \rightarrow 0$ es imposible, puesto que en este caso el segundo sumando crece ilimitadamente. Para vencer este obstáculo, observemos que en los problemas prácticos nos interesa generalmente no la indeterminación absoluta de cualquier magnitud aleatoria sino solamente en cuánto su indeterminación es mayor o menor que la de otra magnitud o bien en cuánto ha disminuido la indeterminación de la magnitud aleatoria en cuestión como resultado de uno u otro experimento. Y como las diferencias de las entropías no cambian al transferir arbitrariamente su origen, entonces el segundo sumando del segundo miembro de la fórmula (7.2.3) se puede sustituir por la magnitud constante arbitraria H_0 . Entonces la entropía del experimento en cuestión se determinará por la fórmula

$$H = H_0 - \sum_{i=1}^n f(x_i) {}^2 \log f(x_i) \Delta x_i.$$

En esta fórmula se puede pasar al límite al aumentar ilimitadamente el número de intervalos en el que se divide el dominio de valores posibles de la magnitud aleatoria X y al tender a cero las longitudes de todos los intervalos. Entonces la suma pasará a la integral y obtendremos

$$H = H_0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) {}^2 \log f(x) dx. \quad (7.2.4)$$

Comúnmente, para sencillez, se supone que $H_0 = 0$ y se determina la entropía de una magnitud aleatoria continua X por la fórmula

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) {}^2 \log f(x) dx. \quad (7.2.5)$$

Observemos ahora que la integral en (7.2.4) y (7.2.5) es la esperanza matemática de la función ${}^2 \log f(X)$ de la magnitud aleatoria X . Por eso la definición (7.2.5) de entropía de una magnitud aleatoria

continua se puede escribir también en la forma

$$H = -M [{}^2 \log f(X)]. \quad (7.2.6)$$

Puesto que el origen de la entropía ha sido cambiado arbitrariamente al deducir las fórmulas (7.2.4) y (7.2.5), la entropía de una magnitud aleatoria continua puede ser tanto positiva como negativa. Análogamente al pasar de la escala termométrica absoluta, por ejemplo, a la centígrada, obtendremos los valores de temperatura tanto positivos como negativos.

La fórmula (7.2.6) determina tanto la entropía de una magnitud aleatoria continua escalar como la de un vector aleatorio cuyas componentes son magnitudes aleatorias continuas. La fórmula (7.2.5) puede servir también para la determinación de la entropía de un vector aleatorio continuo, si la variable x se entiende como vector (es decir, como un conjunto de varias variables) y la integral, como integral múltiple extendida a todo el dominio de valores posibles del vector aleatorio X . En forma desarrollada esta fórmula se escribirá así:

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) {}^2 \log f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (7.2.7)$$

Es fácil comprender que la entropía de una magnitud aleatoria depende solamente de la distribución de las probabilidades de sus valores y no depende de la disposición de esta distribución con respecto al origen de coordenadas. En efecto, la integral (7.2.5) no cambiará si en ella se efectúa la sustitución de la variable $x = y - a$. Esto quiere decir que las magnitudes aleatorias X y $Y = X + a$ tienen la misma entropía para cualquier a . En particular, esto es válido cuando $a = -m_x$. De aquí se desprende que la entropía de cualquier magnitud aleatoria no depende de su esperanza matemática y es igual a la entropía de la magnitud aleatoria centrada correspondiente.

Ejemplo 7.2.1. La entropía de la distribución normal conforme a (7.2.5) es

$$H[X] = - \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2D}} \left(-\frac{1}{2} {}^2 \log 2\pi D - \frac{x^2}{2D} {}^2 \log e \right) dx.$$

Pero

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2D}} dx = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2D}} dx = D.$$

Por lo tanto,

$$H[X] = \frac{1}{2} {}^2 \log 2\pi D + \frac{1}{2} {}^2 \log e = {}^2 \log \sqrt{2\pi e D}.$$

Ejemplo 7.2.2. La entropía de la distribución uniforme, en virtud de (7.2.5) es

$$H[X] = - \int_a^b \frac{1}{b-a} {}^2\log \frac{1}{b-a} dx = {}^2\log(b-a).$$

Ejemplo 7.2.3. Para la distribución exponencial $f(x) = ke^{-kx}$ ($x > 0$) la entropía se determina por la fórmula

$$H[X] = - \int_0^{\infty} ke^{-kx} ({}^2\log k - kx {}^2\log e) dx.$$

Però

$$\int_0^{\infty} ke^{-kx} dx = 1, \quad \int_0^{\infty} x ke^{-kx} dx = M[X] = \frac{1}{k}.$$

Por consiguiente,

$$H[X] = -{}^2\log k + {}^2\log e = {}^2\log \frac{e}{k}.$$

Más adelante veremos que una importantísima tarea práctica es la estimación de la variación de la indeterminación de la magnitud aleatoria X después de efectuar el experimento como resultado del cual se hace conocido el valor de otra magnitud aleatoria Y . Intuitivamente está claro que la indeterminación de la magnitud aleatoria X disminuirá si las magnitudes X e Y son dependientes y permanecerá invariable si dichas magnitudes son independientes. A continuación veremos que esto es precisamente así para nuestra definición de la medida de indeterminación de una magnitud aleatoria.

Para estimar la indeterminación de la magnitud aleatoria X , que queda después de observar la magnitud aleatoria Y , conviene introducir la noción de entropía de la magnitud aleatoria X con respecto a la magnitud Y . Es evidente que para esto es suficiente sustituir en la fórmula (7.2.1) las probabilidades de los valores de la magnitud X por las probabilidades condicionales correspondientes. Sean X e Y dos magnitudes aleatorias discontinuas y

$$p_{ij} = P \left(\begin{matrix} X = x_i \\ Y = y_j \end{matrix} \right) \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m),$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1. \quad (7.2.8)$$

En virtud del principio de adición de probabilidades, las probabilidades no condicionales de los valores de la magnitud Y se determinan por la fórmula

$$q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij}, \quad \sum_{j=1}^m q_j = 1, \quad (7.2.9)$$

y análogamente las probabilidades no condicionales de los valores de la magnitud X se determinan por la fórmula

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (7.2.10)$$

Las probabilidades condicionales de los valores de la magnitud aleatoria X con respecto a Y serán

$$P_{ij} = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{q_j}, \quad \sum_{i=1}^n P_{ij} = 1, \quad (7.2.11)$$

y las probabilidades condicionales de los valores de la magnitud aleatoria Y con respecto a X serán

$$Q_{ij} = P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i}, \quad \sum_{j=1}^m Q_{ij} = 1. \quad (7.2.12)$$

Según la definición (7.2.1) la *entropía condicional* de la magnitud aleatoria X para el valor dado y_j de la magnitud Y se determinará por la fórmula

$$H[X|y_j] = - \sum_{i=1}^n p_{ij} \log P_{ij} \quad (j = 1, \dots, m). \quad (7.2.13)$$

La entropía condicional de la magnitud X depende del valor que toma la magnitud Y , es decir, ella misma es una magnitud aleatoria. Por medida de indeterminación de la magnitud aleatoria X , que queda después de observar la magnitud aleatoria Y , se toma la esperanza matemática de la entropía condicional

$$H_y[X] = M[H[X|Y]] = \sum_{j=1}^m q_j H[X|y_j].$$

Sustituyendo aquí la expresión (7.2.13) de la entropía condicional y tomando en consideración (7.2.11), obtendremos

$$H_y[X] = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \log P_{ij}. \quad (7.2.14)$$

Esta magnitud se llama *entropía condicional media* de la magnitud aleatoria X con respecto a Y .

De un modo análogo se determina la entropía condicional media de la magnitud aleatoria Y con respecto a X :

$$H_x[Y] = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \log Q_{ij}. \quad (7.2.15)$$

Para determinar la entropía condicional de la magnitud aleatoria continua X con respecto a la magnitud aleatoria continua Y ,

basta sustituir en la fórmula (7.2.5) la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria X por la densidad de probabilidad condicional correspondiente $f_1(x|y)$. Entonces obtendremos

$$H[X|y] = - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x|y) {}^2\log f_1(x|y) dx. \quad (7.2.16)$$

Esta magnitud depende del valor y de la magnitud aleatoria Y . Para determinar la entropía condicional media de la magnitud aleatoria X con respecto a Y , se debe multiplicar la expresión (7.2.16) por la densidad de probabilidad $f_2(y)$ de la magnitud aleatoria Y e integrar con respecto a y . Como resultado obtendremos

$$H_y[X] = M[H[X|Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) f_1(x|y) {}^2\log f_1(x|y) dx dy.$$

Pero

$$f_2(y) f_1(x|y) = f(x, y)$$

es la densidad conjunta de probabilidad de las magnitudes aleatorias X e Y . Ahora bien, la entropía condicional media de la magnitud aleatoria X con respecto a Y se determina por la fórmula

$$H_y[X] = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) {}^2\log f_1(x|y) dx dy. \quad (7.2.17)$$

Esta fórmula puede ser representada también en la forma

$$H_y[X] = - M[{}^2\log f_1(X|Y)]. \quad (7.2.18)$$

Si las magnitudes aleatorias discontinuas X e Y son independientes, entonces $p_{ij} = p_i q_j$, $P_{ij} = p_i$, $Q_{ij} = q_j$ y las fórmulas (7.2.14) y (7.2.15) dan

$$H_y[X] = H[X], \quad H_x[Y] = H[Y]. \quad (7.2.19)$$

Lo mismo en el caso de las magnitudes continuas independientes X e Y , sus densidades condicionales de probabilidad coinciden con las correspondientes densidades de probabilidad no condicionales y volvemos a obtener las fórmulas (7.2.19). Así pues, si las magnitudes aleatorias X e Y son independientes, todas sus entropías condicionales y las entropías condicionales medias coinciden con las correspondientes entropías no condicionales. En el § 7.4 demostraremos que si las magnitudes aleatorias X e Y son dependientes, la magnitud condicional media de cada una de ellas con respecto a la otra es siempre menor que la correspondiente entropía no condicional.

Ejemplo 7.2.4. Las magnitudes aleatorias X e Y tienen distribución conjunta normal. Hallar la entropía de la magnitud aleatoria X y su entropía condicional media con respecto a Y .

Como, según lo demostrado en el § 3.6, las distribuciones condicionales y no condicionales de las componentes de un vector aleatorio normalmente repartido son normales, entonces, para calcular la entropía y la entropía condicional de la magnitud aleatoria X , se puede aplicar la fórmula deducida en el ejemplo 7.2.1. Puesto que conforme a (3.6.11) la dispersión condicional de la magnitud aleatoria X no depende del valor y de la magnitud Y , la entropía condicional media de la magnitud X con respecto a Y coincide con la entropía condicional. Así pues, aplicando los resultados del ejemplo 7.2.1 y las fórmulas (3.6.6) y (3.6.11) para las dispersiones y las dispersiones condicionales de las componentes de un vector aleatorio repartido normalmente, hallamos

$$H[X] = {}^2\log \sqrt{2\pi e D[X]} = \frac{1}{2} {}^2\log \frac{2\pi e c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2},$$

$$H_y[X] = {}^2\log \sqrt{2\pi e D[X|Y]} = \frac{1}{2} {}^2\log \frac{2\pi e}{c_{11}}.$$

Al comparar estas fórmulas, vemos que la entropía condicional media de la magnitud X con respecto a Y es menor que su entropía no condicional si $c_{12} \neq 0$, es decir, si las magnitudes X e Y son dependientes. Si X e Y son independientes, entonces $c_{12} = 0$ y la entropía condicional media es igual a la no condicional.

Examinemos ahora dos magnitudes aleatorias discontinuas X e Y y hallemos su entropía conjunta, es decir, la entropía del vector aleatorio con las componentes X, Y . Según la definición ella es

$$H[X, Y] = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} {}^2\log p_{ij}.$$

Pero $p_{ij} = p_i Q_{ij}$ [véase la fórmula (7.2.12)]. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} H[X, Y] &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} ({}^2\log p_i + {}^2\log Q_{ij}) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m p_{ij} \right) {}^2\log p_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} {}^2\log Q_{ij}. \end{aligned} \quad (7.2.20)$$

Observemos ahora que conforme a (7.2.10)

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} = p_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Por eso el primer sumando en (7.2.20) es la entropía de la magnitud aleatoria X . El segundo sumando, en virtud de (7.2.15), representa la entropía condicional media de la magnitud aleatoria Y con respecto a X . Por consiguiente, la fórmula (7.2.20) puede ser escrita en la forma

$$H[X, Y] = H[X] + H_x[Y]. \quad (7.2.21)$$

En virtud de la simetría se puede también escribir

$$H[X, Y] = H[Y] + H_y[X]. \quad (7.2.22)$$

Así pues, la entropía del conjunto de dos magnitudes aleatorias es igual a la suma de la entropía de una de ellas y la entropía condicional media de la otra.

Si las magnitudes aleatorias X e Y son independientes, las igualdades (7.2.21) y (7.2.22), en virtud de (7.2.19), toman la forma

$$H [X, Y] = H [X] + H [Y]. \quad (7.2.23)$$

De este modo, la entropía del conjunto de dos magnitudes aleatorias independientes es igual a la suma de sus entropías.

Aplicando el método de inducción matemática, se puede extender las fórmulas (7.2.21) y (7.2.22) a un número arbitrario de magnitudes aleatorias. Como resultado obtendremos la siguiente fórmula para la entropía del conjunto de n magnitudes aleatorias X_1, \dots, X_n (es decir, para la entropía de un vector aleatorio con las componentes X_1, \dots, X_n):

$$H [X_1, \dots, X_n] = H [X_1] + H_{x_1} [X_2] + \dots + H_{x_1, \dots, x_{n-1}} [X_n]. \quad (7.2.24)$$

Si las magnitudes aleatorias X_1, \dots, X_n son independientes, la fórmula (7.2.24) tomará la forma

$$H [X_1, \dots, X_n] = \sum_{i=1}^n H [X_i]. \quad (7.2.25)$$

§ 7.3. Propiedad extremal de la distribución normal

Demostremos que entre todas las magnitudes aleatorias que tienen la misma dispersión, las magnitudes aleatorias normalmente repartidas son las que poseen mayor entropía. En el ejemplo 7.2.1 hemos calculado ya la entropía de distribución normal

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{x^2}{2D}}. \quad (7.3.1)$$

Puesto que

$${}^2\log f_N(x) = -\frac{1}{2} {}^2\log 2\pi D - \frac{x^2}{2D} {}^2\log e, \quad (7.3.2)$$

la entropía de la magnitud aleatoria X puede ser representada por la fórmula

$$\begin{aligned} H [X] &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) {}^2\log f_N(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} ({}^2\log 2\pi D) \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) dx + \frac{1}{2D} ({}^2\log e) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_N(x) dx. \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Examinemos ahora la magnitud aleatoria arbitraria Y que tiene la esperanza matemática igual a cero y la misma dispersión D que la magnitud aleatoria normalmente repartida X . La densidad de probabilidad $f(y)$ de la magnitud Y satisface la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_N(x) dx = D. \quad (7.3.4)$$

Por lo tanto, en ambas integrales del último miembro de la fórmula (7.3.5), la densidad normal de probabilidad $f_N(x)$ puede ser sustituida por la densidad de probabilidad $f(x)$. Entonces obtendremos

$$\begin{aligned} H[X] &= \frac{1}{2} ({}^2\log 2\pi D) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{D} ({}^2\log e) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} {}^2\log(2\pi D) - \frac{x^2}{D} {}^2\log e \right] f(x) dx \end{aligned}$$

o bien, teniendo en cuenta (7.3.2)

$$H[X] = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) {}^2\log f_N(x) dx. \quad (7.3.5)$$

Ahora bien, la densidad de probabilidad de una magnitud aleatoria normalmente repartida en la expresión de su entropía, fuera del signo del logaritmo, puede sustituirse por la densidad arbitraria de probabilidad a la cual corresponden la esperanza matemática igual a cero y la misma dispersión igual a D .

Restando de la expresión (7.3.5) la expresión

$$H[Y] = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) {}^2\log f(x) dx$$

de la entropía de la magnitud aleatoria Y , obtendremos

$$H[X] - H[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) {}^2\log \frac{f(x)}{f_N(x)} dx. \quad (7.3.6)$$

Apliquemos ahora la desigualdad (7.1.6). En virtud de esta desigualdad podemos escribir

$${}^2\log \frac{f(x)}{f_N(x)} \geq \left[1 - \frac{f_N(x)}{f(x)} \right] {}^2\log e. \quad (7.3.7)$$

Dado que la densidad de probabilidad $f(x)$ no puede ser negativa, entonces de (7.3.7) se deduce que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) {}^2\log \frac{f(x)}{f_N(x)} dx &\geq {}^2\log e \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[1 - \frac{f_N(x)}{f(x)} \right] dx = \\ &= {}^2\log e \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) dx \right] = 0. \end{aligned}$$

Así pues, el segundo miembro de la fórmula (7.3.6) no puede ser negativo, de donde se deriva que

$$H[X] \geq H[Y]. \quad (7.3.8)$$

En (7.1.6) el signo de igualdad tiene lugar solamente en el caso cuando $u = 1$. Por lo tanto, también en (7.3.8) el signo de igualdad tendrá lugar sólo en el caso en que la densidad de probabilidad $f(x)$ coincide idénticamente con la densidad normal de probabilidad $f_N(x)$. Esto es lo que demuestra que la distribución normal tiene mayor entropía que otra distribución cualquiera correspondiente a la misma dispersión.

De un modo absolutamente análogo se demuestra que entre todas las distribuciones que tienen el mismo intervalo limitado de valores posibles de una magnitud aleatoria continua (a, b)

$$\int_a^b f(x) dx = 1, \quad (7.3.9)$$

la distribución uniforme en el intervalo (a, b) posee la mayor entropía.

Con ayuda del mismo método se demuestra que entre todas las magnitudes aleatorias continuas positivas con la misma esperanza matemática m

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1, \quad \int_0^{\infty} xf(x) dx = m, \quad (7.3.10)$$

las magnitudes repartidas por la ley exponencial poseen la mayor entropía.

Le proponemos al lector que por sí mismo demuestre estas aserciones en calidad de ejercicio útil.

§ 7.4. Información que se contiene en las magnitudes aleatorias

Para eliminar por completo la indeterminación de una magnitud aleatoria, es necesario efectuar un experimento y determinar el valor que ésta toma. Sin embargo, en la práctica la magnitud aleato-

ria X , que nos interesa, a menudo no se puede someter a una observación. En tales casos tenemos que contentarnos con la observación de otras magnitudes aleatorias y por los resultados de esta observación sacar conclusiones acerca de la magnitud X , es decir, obtener la información sobre la magnitud X . Si esto es posible, se dice que las magnitudes aleatorias que se observan contienen información sobre la magnitud X . Intuitivamente está claro que la información sobre la magnitud aleatoria dada X la pueden contener solamente magnitudes aleatorias ligadas de uno u otro modo con dicha magnitud X , es decir, dependientes de X . Las magnitudes aleatorias independientes de X no pueden contener ninguna información de X . Ahora bien, se puede decir que la información es una de las formas de manifestación de la dependencia entre las magnitudes aleatorias (o entre fenómenos más generales).

Es natural que como medida de cantidad de información sobre la magnitud aleatoria X que se contiene en la magnitud aleatoria Y se toma la disminución de la indeterminación de la magnitud X obtenida como resultado de la observación de la magnitud Y , es decir, la diferencia entre la entropía de la magnitud X y su entropía condicional media con respecto a la magnitud Y . Partiendo de estas consideraciones, la cantidad de información sobre la magnitud aleatoria X contenida en la magnitud aleatoria Y se determina por la fórmula

$$I_y \{X\} = H \{X\} - H_y \{X\}. \quad (7.4.1)$$

La intuición nos sugiere que la cantidad de información no puede ser negativa. Demostremos esto. Para ello basta mostrar que la entropía condicional media de una magnitud aleatoria no puede ser mayor que su entropía no condicional. Para simplicidad, nos limitaremos al caso de magnitudes discontinuas X, Y . No obstante, esto se puede demostrar también, de un modo absolutamente semejante, referente a magnitudes aleatorias continuas. Sean X e Y dos magnitudes aleatorias discontinuas cuyos valores de probabilidad se determinan por las fórmulas (7.2.8)–(7.2.12). La entropía condicional media de la magnitud aleatoria X con respecto a Y , en virtud de (7.2.14), se determina por la fórmula

$$H_y \{X\} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij}^2 \log P_{ij}. \quad (7.4.2)$$

Aplicando la fórmula (7.2.10), reduzcamos la expresión de la entropía no condicional de la magnitud X a la forma

$$H \{X\} = - \sum_{i=1}^n p_i^2 \log p_i = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij}^2 \log p_i. \quad (7.4.3)$$

Restando miembro a miembro la fórmula (7.4.2) de la (7.4.3), obtendremos

$$H[X] - H_y[X] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} {}^2\log \frac{p_{ij}}{p_i}$$

o bien, teniendo en cuenta (7.2.11)

$$H[X] - H_y[X] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} {}^2\log \frac{p_{ij}}{p_i q_j}. \quad (7.4.4)$$

En virtud de la desigualdad (7.1.6)

$${}^2\log \frac{p_{ij}}{p_i q_j} \geq \left(1 - \frac{p_i q_j}{p_{ij}}\right) {}^2\log e. \quad (7.4.5)$$

De (7.4.4.) y (7.4.5) se deduce que

$$\begin{aligned} H[X] - H_y[X] &\geq {}^2\log e \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \left(1 - \frac{p_i q_j}{p_{ij}}\right) = \\ &= {}^2\log e \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j \right). \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

Pero

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j = \sum_{i=1}^n p_i \sum_{j=1}^m q_j = 1.$$

Por consiguiente, la desigualdad (7.4.6) es equivalente a la desigualdad

$$H[X] - H_y[X] \geq 0. \quad (7.4.7)$$

En (7.4.5) y (7.4.7) el signo de igualdad puede tener lugar solamente en el caso cuando $p_{ij} = p_i q_j$ para todos los i, j , es decir, cuando las magnitudes X e Y son independientes.

Así pues, hemos demostrado que la cantidad de información no puede ser negativa y puede ser igual a cero solamente en el caso de X e Y independientes. Si las magnitudes X e Y son dependientes, cada una de ellas contiene una cantidad positiva de información sobre la otra.

De (7.2.21) y (7.2.22) se deduce que

$$H[X] + H_x[Y] = H[Y] + H_y[X],$$

de donde

$$H[X] - H_y[X] = H[Y] - H_x[Y].$$

Esto quiere decir que la cantidad de información que se contiene en Y sobre la magnitud X es igual a la cantidad de información

que se contiene en X sobre Y :

$$I_Y [X] = I_X [Y]. \quad (7.4.8)$$

De (7.2.21) y (7.4.7) se deriva también que

$$H [X, Y] \leq H [X] + H [Y]. \quad (7.4.9)$$

Puesto que según lo demostrado, la entropía condicional media de una magnitud aleatoria no puede ser nunca mayor que su entropía no condicional, entonces, de (7.2.24) se deduce la desigualdad

$$H [X_1, \dots, X_n] \leq \sum_{i=1}^n H [X_i]. \quad (7.4.10)$$

El signo de igualdad tiene lugar en (7.4.9) y (7.4.10) solamente en el caso de magnitudes independientes.

Las fórmulas (7.4.9) y (7.4.10) muestran que la entropía de un vector aleatorio no puede ser mayor que la suma de las entropías de sus componentes y puede ser igual a esta suma solamente en el caso de componentes independientes.

De la desigualdad (7.4.10) se desprende también que entre todos los vectores aleatorios cuyas componentes tienen entropías asignadas de antemano, los vectores aleatorios con las componentes independientes poseen la mayor entropía.

La desigualdad (7.4.10), junto con la propiedad extremal de la distribución normal demostrada en el párrafo anterior, muestra que entre todos los vectores aleatorios cuyas componentes tienen dispersiones asignadas de antemano los vectores normalmente distribuidos con las componentes independientes poseen la mayor entropía.

Ejemplo 7.4.1. Hallar la cantidad de información acerca de una componente del vector aleatorio normalmente repartido, contenida en otra componente.

En virtud de los resultados del ejemplo 7.2.4 y la definición (7.4.1) de la cantidad de información tenemos

$$I_Y [X] = \frac{1}{2} {}^2\log \frac{c_{11}c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$

o bien, tomando en consideración las relaciones (3.6.18) y (3.6.19) entre los coeficientes c_{ij} y las dispersiones y el coeficiente de correlación de las componentes del vector aleatorio,

$$I_Y [X] = \frac{1}{2} {}^2\log \frac{D_x D_y}{D_x D_y - k_{xy}^2} = {}^2\log \frac{1}{\sqrt{1-r^2}},$$

donde r es el coeficiente de correlación de las magnitudes aleatorias X e Y .

Se puede demostrar todavía que por ninguna transformación de la magnitud aleatoria observada Y se puede aumentar la cantidad de información que ésta contiene sobre la magnitud aleatoria X . Con otras palabras, ninguna función de la magnitud aleatoria Y puede

contener mayor cantidad de información sobre la magnitud X que Y . Solamente en el caso de una transformación recíproca unívoca, o, usando la terminología física, transformación reversible, la cantidad de información queda invariable. En el caso de una transformación irreversible, la cantidad de información disminuye obligatoriamente.

Es obvio que la cantidad de información que se contiene en una magnitud aleatoria discontinua sobre sí misma es igual a su entropía:

$$I_x [X] = H [X]. \quad (7.4.11)$$

En efecto, una vez efectuada la observación de una magnitud aleatoria, no queda en ella ninguna indeterminación. Por consiguiente, su entropía condicional media con respecto a sí misma es igual a cero. Esto es lo que demuestra a la fórmula (7.4.11).

Al comparar la fórmula (7.4.11) con (7.4.1), se deduce que ninguna magnitud aleatoria puede contener más información sobre la magnitud aleatoria discontinua X que la misma magnitud X . Esto está claro intuitivamente sin recurrir a las fórmulas.

Determinación de las características estadísticas según los resultados de los experimentos

§ 8.1. Determinación de las probabilidades de acontecimientos, las funciones de distribución y las densidades de probabilidad

Como sabemos, la estabilidad singular de las frecuencias de acontecimientos y de los valores medios aritméticos de magnitudes aleatorias es un factor experimental importantísimo que sirve de base de la Teoría de las Probabilidades y determina la posibilidad de su empleo práctico. En el § 1.2 dimos la explicación elemental de estos factores. En los ejemplos del § 3.9 los últimos fueron explicados teóricamente con ayuda de las propiedades principales de las esperanzas matemáticas y las dispersiones de magnitudes aleatorias. La estabilidad de frecuencias y medias, que se observa prácticamente y se desprende de los principios fundamentales de la Teoría de las Probabilidades, da la posibilidad de determinar por vía experimental las características estadísticas principales (las probabilidades de acontecimientos y las esperanzas matemáticas de magnitudes aleatorias). En todos los casos esta posibilidad se determina por el hecho de que las dispersiones de ciertas funciones de los resultados aleatorios de los experimentos tienden a cero al crecer ilimitadamente el número de pruebas. La frecuencia de un acontecimiento es la relación de la magnitud aleatoria (el número de veces de producirse el acontecimiento) al número de pruebas, es decir, ella misma es una magnitud aleatoria. En distintas series de n experimentos iguales cada una, la frecuencia del acontecimiento tomará distintos valores. Sin embargo, la dispersión de la frecuencia siempre puede ser hecha tan pequeña como se quiera si se realiza en la serie n un número de experimentos lo suficientemente grande. La media aritmética de la magnitud aleatoria obtenida en una serie de experimentos es una magnitud aleatoria, puesto que el valor de la magnitud aleatoria que se examina es en cada prueba aleatorio. Por consiguiente, en distintas series de n experimentos iguales la media aritmética de la magnitud aleatoria prácticamente siempre tomará diferentes valores. No obstante, teniendo la serie un número de pruebas n lo suficientemente grande, la dispersión de la media aritmética puede ser hecha tan pequeña como se quiera. Debido a esto la fluctuación de las medias aritméticas, en distintas series de n experimentos cada una, será tan pequeña como se quiera siempre que n sea lo bastante grande. Así pues, al aumentar ilimitadamente el número de pruebas, las frecuencias de acontecimientos y las medias aritméticas de magnitudes aleatorias tratan,

en cierto grado, de «dejar de ser aleatorias» y estabilizarse alrededor de las características teóricas correspondientes: probabilidades de acontecimientos y esperanzas matemáticas de magnitudes aleatorias.

Vemos que es imposible determinar exactamente las características estadísticas a base de experimentos, ya que, cualquiera que sea el número finito de experimentos, las frecuencias de acontecimientos y las medias aritméticas de magnitudes aleatorias, calculadas según los resultados aleatorios de las pruebas, serán aleatorias. Además, es difícil hablar incluso sobre una determinación aproximada de las características estadísticas, puesto que, cualquiera que sea el número finito de pruebas, las dispersiones de frecuencias y de medias aritméticas son distintas del cero debido a lo cual es imposible estimar de un modo corriente el error de los resultados. Con otras palabras, es imposible valorar un error límite posible y garantizar que éste no sea superado. Siempre existe, aunque sea, tal vez, muy pequeña, la probabilidad de que el límite asignado de un error sea sobrepasado. Por eso en la Teoría de las Probabilidades se suele hablar no sobre la determinación, según los datos experimentales, de los valores precisos o aproximados de las características estadísticas sino sobre la estimación de los mismos. La calidad de estimación, es decir, su proximidad a la característica estadística que se aprecia, se determina generalmente por la magnitud que el error de estimación no puede superar con una probabilidad asignada de antemano. Esta magnitud siempre puede ser determinada si se conoce la ley de distribución de la estimación.

En virtud de los razonamientos expuestos, se llama *estimación* de una característica estadística (probabilidad, función de distribución, esperanza matemática, dispersión, momento de correlación, etc.) a tal función de los resultados de los experimentos que puede ser tomada como valor conveniente de la característica que se aprecia. La estimación de la característica estadística es función de los resultados de los experimentos y, tal vez, de los parámetros conocidos de la distribución de los mismos, pero no puede depender de los parámetros desconocidos de la ley de distribución, en particular de la característica que se aprecia.

La estimación de la característica estadística se denomina *fundada*, si, al aumentar ilimitadamente el número de experimentos, su esperanza matemática tiende hacia la característica que se aprecia y su dispersión tiende a cero. Si, por lo menos, una de estas dos condiciones no se ha cumplido, la estimación se llama *no fundada*.

En la práctica se emplean de ordinario sólo las estimaciones fundadas, puesto que únicamente en este caso se puede obtener una estimación tan precisa como se quiera (es decir, una probabilidad de grandes errores tan pequeña como se quiera) al ser el número de experimentos lo suficientemente grande.

La estimación cuya esperanza matemática, cualquiera que sea el número de experimentos, es igual a la característica estadística que se aprecia se denomina *no desplazada*. La estimación cuya esperanza matemática no es igual a la característica estadística que se aprecia se denomina *desplazada*.

La determinación de las estimaciones de las características estadísticas, sus leyes de distribución y los errores admisibles con probabilidades correspondientes es la tarea principal de un apartado especial de la Teoría de las Probabilidades denominada Estadística Matemática. La Estadística Matemática moderna representa una vasta y bien estudiada asignatura que dispone de numerosos y eficaces métodos de investigación y a la cual se han dedicado muchos libros especiales. En esta breve introducción a la Teoría de las Probabilidades no es posible exponer ni siquiera algunos métodos fundamentales de Estadística Matemática. Por eso nos limitamos aquí a los procedimientos más elementales de la determinación de las apreciaciones de las características estadísticas principales. A los lectores que deseen conocer más profundamente los métodos de la Estadística Matemática moderna les recomendamos el excelente libro de H. Kramer*).

Es conveniente tomar por estimación de la probabilidad p de un acontecimiento la frecuencia de producción del mismo p^* obtenida como resultado de experimentos, es decir, la relación del número de veces m de suceder el acontecimiento al número n de todos los experimentos realizados:

$$p^* = \frac{m}{n}. \quad (8.1.1)$$

La frecuencia de un acontecimiento es una magnitud aleatoria que toma un valor determinado solamente después de efectuarse el experimento. En distintas series de n pruebas cada una, la frecuencia toma distintos valores. Designemos por X_n el número aleatorio de veces que ocurre el acontecimiento si se realizan n experimentos. Entonces la frecuencia del acontecimiento, considerada como magnitud aleatoria P^* , se determina por la fórmula

$$P^* = \frac{X_n}{n}. \quad (8.1.2)$$

Al calcular la estimación de la probabilidad de un acontecimiento, la magnitud aleatoria X_n se sustituye por su valor m que se ha obtenido como resultado de los experimentos. En conclusión se obtiene la fórmula (8.1.1).

*) H. Kramer. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton Univ. Press, 1946 (Versión rusa: H. Kramer. *Métodos matemáticos de Estadística*. Editorial de Literatura Extranjera, 1948).

En el ejemplo 3.9.1. fue mostrado que la esperanza matemática de la frecuencia P^* y su dispersión se determinan por las fórmulas [Véanse las fórmulas (3.9.25) y (3.9.26)]

$$M [P^*] = p, D [P^*] = \frac{pq}{n}, \quad (8.1.3)$$

donde p es la probabilidad buscada del acontecimiento y $q = 1 - p$. La primera fórmula (8.1.3) muestra que la frecuencia del acontecimiento es la estimación no desplazada de la probabilidad del mismo. La segunda fórmula (8.1.3) muestra que la dispersión de frecuencia es inversamente proporcional al número de experimentos n . Si la calidad de estimación (8.1.2) se caracteriza por su desviación cuadrática media, se puede decir que el error de la estimación de probabilidad de un acontecimiento, según la fórmula (8.1.1), decrece inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de experimentos a medida que aumenta este número. Así, por ejemplo, al aumentar el número de experimentos 100 veces, el error de estimación disminuye 10 veces.

La función de distribución de la magnitud aleatoria X representa la probabilidad del acontecimiento $X < x$ considerada como función de la variable x . Por eso en calidad de estimación de la función de distribución de la magnitud aleatoria X se puede tomar la frecuencia del acontecimiento $X < x$ calculada para todos los valores de x . Como vimos en el § 1.2, al realizar n experimentos, la frecuencia del acontecimiento $X < x$ siempre se representará por una curva escalonada, con ello, las alturas de los escalones son iguales a $1/n$ o múltiplos de este número. Para hallar la estimación de la función de distribución de una magnitud aleatoria continua, esta curva escalonada comúnmente se alisa, es decir, se sustituye por una curva más suave. Así pues, por estimación de la función de distribución de una función aleatoria X se toma generalmente la función obtenida mediante la diferenciación de la curva escalonada de la función empírica de distribución hallada como curva de la frecuencia del acontecimiento $X < x$ en función de x . La diferenciación puede ser llevada a cabo con ayuda de una curva analítica conveniente o a simple vista. En el primer caso se obtiene una expresión analítica de la estimación de la función de distribución. En el segundo caso la estimación de la función de distribución se obtiene en forma de una curva suave que la representa.

La derivación de la expresión analítica de la estimación de la función de distribución de una magnitud aleatoria es el mejor procedimiento para hallar la estimación de la densidad de probabilidad de la misma. Sin embargo, se puede encontrar también las estimaciones de las densidades de probabilidad por medio de la derivación gráfica de las curvas que representan las estimaciones de las funciones de distribución. Por fin, se puede hallar la estimación de la den-

sidad de probabilidad de una magnitud aleatoria, sin determinar previamente la función de distribución, como la densidad de la frecuencia con que el valor de la magnitud aleatoria va a parar en distintos pequeños intervalos del eje numérico. Para esto el intervalo,

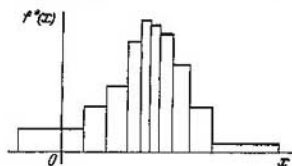


Fig. 8.1.1.

en el cual han ido a parar todos los valores de la magnitud aleatoria, observados como resultado de los experimentos, se divide en intervalos pequeños y para cada intervalo se determina la relación entre la frecuencia con que el valor de la magnitud aleatoria alcanza este intervalo y su longitud. Los resultados obtenidos se representan gráficamente.

Para esto en cada intervalo se construye un rectángulo cuya altura es igual a la relación de la frecuencia con que el valor de la magnitud aleatoria va a parar en este intervalo a su longitud (fig. 8.1.1). A semejante gráfico se le llama *polígono de frecuencias*. Para hallar la estimación de la densidad de probabilidad, el polígono de frecuencias obtenido se alisa con ayuda de una curva analítica conveniente. Como resultado se obtiene la expresión analítica de la densidad de probabilidad.

§ 8.2. Determinación de los momentos de magnitudes aleatorias

Por estimación de la esperanza matemática de una magnitud aleatoria conviene tomar su media aritmética obtenida como resultado de experimentos. Supongamos que como resultado de n pruebas independientes realizadas en iguales condiciones la magnitud aleatoria X toma los valores x_1, \dots, x_n . Entonces la estimación m_x^* de la esperanza matemática m_x se determinará por la fórmula

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (8.2.1)$$

La estimación de la esperanza matemática toma un valor determinado solamente después de llevar a cabo los experimentos, puesto que las magnitudes x_1, \dots, x_n representan los valores de la magnitud aleatoria x obtenidos como resultado de las pruebas. Designemos por medio de X_1, \dots, X_n los valores aleatorios de la magnitud aleatoria X en n experimentos dados. Entonces la estimación de la esperanza matemática de la magnitud aleatoria X , considerada antes de realizar la prueba como magnitud aleatoria, se expresará por la

fórmula

$$M_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (8.2.2)$$

En el ejemplo 3.9.2 fue demostrado que la esperanza matemática y la dispersión de la media aritmética de una magnitud aleatoria X al efectuar n experimentos se determinan por las fórmulas [véanse las fórmulas (3.9.27)]

$$M[M_x^*] = m_x, \quad D[M_x^*] = \frac{D_x}{n}, \quad (8.2.3)$$

donde D_x es la dispersión de la magnitud aleatoria X . La primera fórmula (8.2.3) muestra que la media aritmética es una estimación no desplazada de la esperanza matemática de la magnitud aleatoria. La segunda fórmula (8.2.3) muestra que siempre que la precisión de la estimación (8.2.2) se caracterice por su desviación cuadrática media, el error de la estimación de la esperanza matemática decrece inversamente proporcional a \sqrt{n} al aumentar n .

La dispersión de la magnitud aleatoria X representa, según la definición, la esperanza matemática de la magnitud aleatoria $(X - m_x)^2$. Por eso la media aritmética de la magnitud $(X - m_x)^2$ es una estimación natural D_x^* de la dispersión D_x .

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2. \quad (8.2.4)$$

Esta estimación depende de la esperanza matemática m_x de la magnitud aleatoria X . Por eso puede ser aplicada sólo en el caso en que la esperanza matemática de la magnitud aleatoria sea conocida. En este caso la estimación (8.2.4), como estimación de la esperanza matemática de la magnitud aleatoria $Y = (X - m_x)^2$, es una estimación no desplazada de la dispersión de la magnitud aleatoria X .

Sin embargo, la esperanza matemática de una magnitud aleatoria es, como regla, desconocida y se determina por los resultados de los mismos experimentos que la dispersión. En tales casos conviene sustituir en la fórmula (8.2.4) la esperanza matemática por su estimación. Como resultado, para la estimación de la dispersión de la magnitud aleatoria X se obtiene la fórmula

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2. \quad (8.2.5)$$

No obstante, esta estimación resulta ser desplazada. Para demostrar esta afirmación, sustituyamos en la fórmula (8.2.5) los valores concretos x_1, \dots, x_n de la magnitud aleatoria X , obtenidos como resul-

tado de experimentos, por las magnitudes aleatorias correspondientes X_1, \dots, X_n y vamos a considerar la estimación de la dispersión, sin enlazarla con pruebas concretas, como magnitud aleatoria:

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_x^*)^2. \quad (8.2.6)$$

Para determinar la esperanza matemática de esta estimación, basta sustituir todos los sumandos de la suma por las esperanzas matemáticas de los mismos (véase el § 3.8). Calculemos previamente las esperanzas matemáticas de los sumandos que forman la suma de la fórmula (8.2.6). Conforme a la definición de la dispersión de una magnitud aleatoria, teniendo en cuenta que la esperanza matemática de la diferencia $X_i - M_x^*$ es igual a cero, tenemos

$$M[(X_i - M_x^*)] = D[X_i - M_x^*]. \quad (8.2.7)$$

Pero

$$X_i - M_x^* = X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \left(1 - \frac{1}{n}\right) X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n {}^i X_j,$$

donde el índice i anexo a la suma muestra que la adición se realiza con respecto a todos los valores del índice j de 1 hasta n , salvo el valor $j = i$. Así pues, la diferencia $X_i - M_x^*$ representa una función lineal de n magnitudes aleatorias X_1, \dots, X_n . Estas magnitudes son independientes puesto que según la suposición los experimentos son independientes. Por eso, para calcular la dispersión de la diferencia $X_i - M_x^*$ se puede aplicar la fórmula (3.9.7) para la dispersión de una función lineal de magnitudes aleatorias no correlacionadas. Dado que los experimentos, según la suposición, se efectúan en condiciones iguales, las dispersiones de todas las magnitudes X_1, \dots, X_n son equivalentes e iguales a la dispersión D_x de la magnitud aleatoria X . Así pues, aplicando la fórmula (3.9.7), obtendremos un sumando igual al producto de D_x por el cuadrado del coeficiente anexo a X_i y $n - 1$ sumandos iguales al producto de D_x por $1/n^2$:

$$D[X_i - M_x^*] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 D_x + \frac{n-1}{n^2} D_x = \frac{n-1}{n} D_x. \quad (8.2.8)$$

Las fórmulas (8.2.7) y (8.2.8) muestran que las esperanzas matemáticas de todos los sumandos en la suma de la fórmula (8.2.6) son iguales. Por lo tanto,

$$M[Z_n] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{n-1}{n} D_x = \frac{n-1}{n} D_x. \quad (8.2.9)$$

Así pues, la esperanza matemática de la estimación de la dispersión D_x (8.2.6) no es igual a la dispersión D_x , aunque tiende a D_x cuando $n \rightarrow \infty$, como esto debe ser de acuerdo con la definición de la esti-

mación. El resultado obtenido muestra que la fórmula (8.2.5) da una estimación desplazada de la dispersión. Esto quiere decir que, aplicando la fórmula (8.2.5) para estimar la dispersión de una magnitud aleatoria, obtendremos un error sistemático. La dispersión resultará ser por término medio menor que la real.

Para hallar una estimación no desplazada de la dispersión de la magnitud aleatoria cuya esperanza matemática es desconocida, observemos que, en virtud de la fórmula (8.2.9), la esperanza matemática de una magnitud aleatoria

$$U_n = \frac{n}{n-1} Z_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M_x^*)^2 \quad (8.2.10)$$

es igual a la dispersión D_x de la magnitud aleatoria X . Por eso la estimación no desplazada de la dispersión D_x de la magnitud aleatoria X suele determinarse por la fórmula

$$D_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2. \quad (8.2.11)$$

Esta fórmula se aplica generalmente para determinar las dispersiones de magnitudes aleatorias por los resultados de los experimentos cuando las esperanzas matemáticas son desconocidas.

Análogamente se hallan las estimaciones de los momentos de correlación de magnitudes aleatorias. Como, según la definición, el momento de correlación k_{xy} de dos magnitudes aleatorias reales X e Y es la esperanza matemática de la magnitud aleatoria $(X - m_x)(Y - m_y)$, entonces la estimación natural del momento de correlación es la media aritmética de esta magnitud aleatoria:

$$k_{xy}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y). \quad (8.2.12)$$

Esta fórmula da una estimación no desplazada del momento de correlación siempre que las esperanzas matemáticas de las magnitudes aleatorias X e Y sean conocidas.

Si las esperanzas matemáticas de las magnitudes aleatorias X e Y son desconocidas, entonces la estimación no desplazada de su momento de correlación k_{xy} se ofrece por la fórmula

$$k_{xy}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*), \quad (8.2.13)$$

donde m_x^* , m_y^* son las estimaciones de las esperanzas matemáticas de las magnitudes aleatorias X , Y respectivamente:

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad m_y^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

§ 8.3. Determinación de los momentos de funciones aleatorias estacionarias

Al determinar las características de funciones aleatorias estacionarias, se supone comúnmente que éstas son ergódicas y se utiliza una sola realización suficientemente larga de la magnitud aleatoria, obtenida experimentalmente. Supongamos que como resultado de la prueba ha sido obtenida la realización $x(t)$ de la función aleatoria estacionaria ergódica $X(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq T$. Entonces, en virtud de lo expuesto en el § 5.5, por estimación de la esperanza matemática de la función aleatoria $X(t)$ se puede tomar la magnitud

$$m_x^* = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (8.3.1)$$

Según lo demostrado en el § 5.5, la esperanza matemática de esta estimación es igual a la esperanza matemática m_x de la función

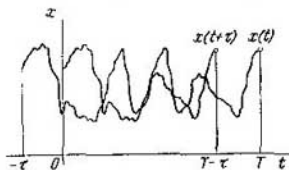


Fig. 8.3.1.

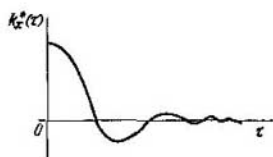


Fig. 8.3.2.

aleatoria $X(t)$ y su dispersión tiende a cero cuando $T \rightarrow \infty$. Por consiguiente, la fórmula (8.3.1) da una estimación no desplazada de la esperanza matemática de la función aleatoria estacionaria $X(t)$.

La estimación de la función correlativa $k_x(\tau)$ de una función aleatoria estacionaria ergódica (con respecto a la correlativa) se determina, en virtud de los resultados del § 5.5, por la fórmula

$$k_x^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x^*][x(t+\tau) - m_x^*] dt. \quad (8.3.2)$$

Aquí el valor medio ha sido tomado en el intervalo $(0, T - \tau)$ puesto que las funciones $x(t)$ y $x(t + \tau)$ son conocidas conjuntamente solamente en este intervalo (fig. 8.3.1). La fórmula (8.3.2) da la estimación de la función correlativa para $\tau > 0$. Cuando $\tau < 0$, la estimación de la función correlativa se determina de la condición de su paridad

Se puede recomendar que la fórmula (8.3.2) se aplique cuando $\tau < T/5$. Si τ tiene grandes valores, el error de la estimación de la función correlativa según la fórmula (8.3.2) aumentará. Si la estimación de la función correlativa, obtenida por la fórmula (8.3.2), tiende con evidencia a cero al aumentar τ (fig. 8.3.2), se considera que la suposición acerca de la ergodicidad de la función aleatoria es justa. Si la estimación de la función correlativa tiene una «cola» distinta del cero (fig. 8.3.3), se considera que la suposición acerca de la ergodicidad no se justifica. En estos casos conviene determinar cuál es la causa de no ergodicidad. En el § 5.5 hemos visto que una causa típica de no ergodicidad de un proceso aleatorio estacionario con respecto a la función correlativa es la presencia de una componente periódica en la propia función aleatoria. Si es ésta la causa de no ergodicidad (más exactamente, de «no atenuación» de la función correlativa), conviene separar de la función aleatoria la componente periódica y sólo después hallar la estimación de la función correlativa aplicando la fórmula (8.3.2).

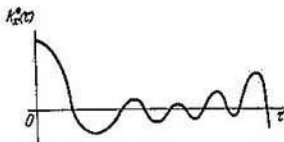


Fig. 8.3.3.

Si en la función aleatoria en cuestión hay una componente sinusoidal, entonces, en virtud de los resultados de los ejemplos 5.5.2 y 5.5.3, la fórmula (8.3.2) dará en la función correlativa una cosinusoide de la misma frecuencia, cuya amplitud es igual a la mitad del cuadrado de la amplitud de la componente sinusoidal de la función aleatoria. Prácticamente esta cosinusoide en la forma pura servirá de «cola» de la función correlativa (fig. 8.3.3). Por eso la frecuencia y la amplitud de la componente sinusoidal que forma parte de una función aleatoria estacionaria se determina fácilmente por la «cola» que se tiene en la estimación de la función correlativa. Al mismo tiempo, la fase de la componente sinusoidal puede ser determinada sólo por selección procurando obtener que desaparezca la componente periódica en la estimación correlativa. En el caso de que en la estimación de la función correlativa haya una componente periódica no sinusoidal, conviene descomponer esta última en la serie de Fourier en los cosenos de las frecuencias correspondientes al período. Con ello, serán determinadas las amplitudes y frecuencias de las sinusoides correspondientes que forman parte de la propia función aleatoria. Las fases de estas sinusoides se determinan seleccionándolas por turno de modo que se logre la desaparición de las cosinusoides correspondientes en la «cola» de la función correlativa.

De un modo absolutamente análogo se halla la estimación de la función correlativa recíproca de dos funciones aleatorias estacionarias y estacionariamente ligadas $X(t)$ y $Y(t)$. Si se supone que estas

funciones aleatorias son ergódicas con respecto a la función correlativa recíproca, entonces la estimación de esta última a base de un par de realizaciones $x(t)$ e $y(t)$ de las funciones aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$ anotadas en el intervalo $0 < t < T$ se determina por la fórmula

$$k_{xy}^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x^*][y(t+\tau) - m_y^*] dt. \quad (8.3.3)$$

Esta fórmula ofrece la estimación de la función correlativa recíproca para $\tau > 0$. Cuando $\tau < 0$, la estimación de la función correlativa recíproca, en virtud de la relación (5.1.14), se determina por la fórmula

$$k_{xy}^*(\tau) = k_{yx}^*(-\tau). \quad (8.3.4)$$

Las integrales de las fórmulas (8.3.1), (8.3.2) y (8.3.3) pueden ser calculadas con ayuda de calculadoras analógicas. Al determinar las estimaciones de las esperanzas matemáticas y funciones correlativas de funciones aleatorias estacionarias valiéndose de calculadoras digitales y de calculadoras manuales, las integrales de las fórmulas (8.3.1), (8.3.2) y (8.3.3) se sustituyen por sumas. Para esto intervalo $(0, T)$ se divide en un gran número n de intervalos iguales de longitud $\Delta = T/n$ y la integral en (8.3.1) se sustituye por la suma:

$$m_x^* = \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=1}^n x \left(i\Delta - \frac{\Delta}{2} \right) \Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x \left(i\Delta - \frac{\Delta}{2} \right).$$

Poniendo aquí, para abreviar, que

$$x_i = x \left(i\Delta - \frac{\Delta}{2} \right) \quad (i = 1, \dots, n),$$

obtendremos para la estimación de la esperanza matemática de la función aleatoria $X(t)$ la fórmula

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (8.3.5)$$

Análogamente, para las estimaciones de la función correlativa y de la función correlativa recíproca obtendremos las fórmulas

$$k_x^*(m\Delta) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} (x_i - m_x^*)(x_{i+m} - m_x^*), \quad (8.3.6)$$

$$k_{xy}^*(m\Delta) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} (x_i - m_x^*)(y_{i+m} - m_y^*). \quad (8.3.7)$$

Pasemos ahora a determinar las densidades espectrales de funciones aleatorias estacionarias. Como procedimiento más sencillo para hallar la estimación de la densidad espectral de una función aleatoria estacionaria puede servir la aproximación previa de estimación de la función correlativa de una de las tres funciones correlativas tipo, examinadas en los ejemplos de los §§ 5.2 y 5.3, o de la combinación lineal de tales funciones, con determinación sucesiva de la densidad espectral por las fórmulas (5.2.22) ó (5.3.9). Con ello, la estimación de la densidad espectral se obtiene en forma de una función racional fraccionaria, lo que es muy cómodo para resolver los problemas prácticos para los cuales se determina la densidad espectral.

En virtud de los resultados del § 5.5, la estimación de la función correlativa de una función aleatoria estacionaria, ergódica con respecto a la función correlativa

$$K_x^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} X^0(t) X^0(t+\tau) dt, \quad (8.3.8)$$

tiende a la función correlativa $k_x(\tau)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K_x^*(\tau) = k_x(\tau), \quad (8.3.9)$$

en el sentido de que la esperanza matemática del cuadrado de la diferencia entre $K_x^*(\tau)$ y $k_x(\tau)$ tiende a cero cuando $T \rightarrow \infty$. Surge la pregunta: ¿Se podría determinar la estimación de la densidad espectral sustituyendo en la fórmula (5.3.9) directamente la estimación de la función correlativa calculada por la fórmula (8.3.2)? Con ello, es necesario sustituir en la fórmula (5.3.9) el intervalo infinito de integración por el finito $(-T, T)$, puesto que, por la realización de la función aleatoria de longitud T , es imposible determinar por la fórmula (8.3.2) la estimación de la función correlativa para $|\tau| > T$. Para resolver la cuestión planteada, es necesario hallar la esperanza matemática y la dispersión de la función aleatoria

$$\tilde{S}_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T K_x^*(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^T K_x^*(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (8.3.10)$$

Es fácil ver que, en virtud de las fórmulas (8.3.9) y (5.3.9), la esperanza matemática de la función aleatoria $\tilde{S}_x^*(\omega)$ tiende hacia la densidad espectral $s_x(\omega)$ de la función aleatoria $X(t)$ para $T \rightarrow \infty$. No obstante, en el caso general, la dispersión de la función aleatoria $\tilde{S}_x^*(\omega)$ no tiende a cero cuando $T \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la función (8.3.10), obtenida como resultado de la transformación de Fourier de la estimación de la función correlativa, es una estimación no fundada de la densidad espectral y por eso prácticamente no puede servir de estimación de dicha densidad.

Para hallar la estimación fundada de la densidad espectral valiéndose directamente de la estimación de la función correlativa, sin aproximarla previamente por la expresión analítica, observemos que para la función aleatoria normalmente repartida $X(t)$ la función $\tilde{S}_x^*(\omega)$ posee la propiedad de que para cualesquiera ω_1 y ω_2 fijas*)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \tilde{S}_x^*(\omega) d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} s_x(\omega) d\omega. \quad (8.3.11)$$

En (8.3.11) el límite debe comprenderse en el sentido de que la esperanza matemática del cuadrado de la diferencia entre las integrales en (8.3.11) tiende a cero para $T \rightarrow \infty$. En virtud de (8.3.11) se puede considerar prácticamente que, cuando T sea suficientemente grande, será válida la igualdad aproximada

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \tilde{S}_x^*(\omega) d\omega \approx \int_{\omega_1}^{\omega_2} s_x(\omega) d\omega \quad (8.3.12)$$

independientemente de la realización posible de la función aleatoria $X(t)$ utilizada para el cálculo de la función $\tilde{S}_x^*(\omega)$.

Poniendo en (8.3.12) $\omega_1 = \omega_0 - \alpha$, $\omega_2 = \omega_0 + \alpha$, para un valor de α lo suficientemente pequeño, obtendremos

$$\int_{\omega_0 - \alpha}^{\omega_0 + \alpha} s_x(\omega) d\omega \approx 2\alpha s_x(\omega_0). \quad (8.3.13)$$

De otro lado, en virtud de (8.3.10)

$$\begin{aligned} \int_{\omega_0 - \alpha}^{\omega_0 + \alpha} \tilde{S}_x^*(\omega) d\omega &= \frac{1}{\pi} \int_0^T K_x^*(\tau) \frac{\text{sen}(\omega_0 + \alpha)\tau - \text{sen}(\omega_0 - \alpha)\tau}{\tau} d\tau = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^T K_x^*(\tau) \frac{\cos \omega_0 \tau \text{sen} \alpha \tau}{\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

Sustituyendo las expresiones (8.3.13) y (8.3.14) en (8.3.12), obtendremos después de dividir por 2α

$$\frac{1}{\pi} \int_0^T K_x^*(\tau) \frac{\cos \omega_0 \tau \text{sen} \alpha \tau}{\alpha \tau} d\tau \approx s_x(\omega_0). \quad (8.3.15)$$

*) Véase J. L. Doob. Stochastic Processes. John Wiley, 1953, chapt. 10, § 8 (Versión rusa: J. L. Doob. Procesos probabilísticos. Editorial de Literatura Extranjera, 1956, cap. 10, § 8).

De aquí se ve que de estimación fundada de la densidad espectral de una función aleatoria estacionaria $X(t)$ puede servir la función

$$s_x^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^T k_x^*(\tau) \frac{\cos \omega\tau \operatorname{sen} \alpha\tau}{\alpha\tau} d\tau, \quad (8.3.16)$$

donde $k_x^*(\tau)$ es la estimación de la función correlativa calculada por la fórmula (8.3.2).

Al deducir la fórmula (8.3.15), fue aplicado el teorema de la media a la integral del segundo miembro de la igualdad (8.3.12). Tenemos derecho a hacerlo siempre que la densidad espectral $s_x(\omega)$ sea continua en el intervalo $(\omega_0 - \alpha, \omega_0 + \alpha)$. Sin embargo, el teorema de la media no se puede de ningún modo aplicar a la integral del primer miembro de la igualdad (8.3.12). Esto se explica por el carácter especial de la función aleatoria $\tilde{S}_x^*(\omega)$. Todas sus realizaciones son funciones que oscilan rápidamente en una gran gama. Además, siendo T lo suficientemente grande, sus realizaciones, en un intervalo tan pequeño como se quiera (ω_1, ω_2) , realizan en amplios límites una infinidad de oscilaciones caóticas. Por eso el valor de la función aleatoria $\tilde{S}_x^*(\omega)$ en el punto ω_0 es aleatorio, tiene una gran dispersión y debido a esto no puede ser tomado por su media en este intervalo. Por este mismo carácter de las realizaciones de la función aleatoria $\tilde{S}_x^*(\omega)$ se explica el hecho de que la igualdad (8.3.11) es válida, mientras que la propia función aleatoria $\tilde{S}_x^*(\omega)$, cualquiera que sea el valor ω , no tiende hacia el valor correspondiente de la densidad espectral $s_x(\omega)$. Como resultado de la integración, las oscilaciones de la función aleatoria $\tilde{S}_x^*(\omega)$ se alisan, y al ser T lo suficientemente grande, cuando el número de oscilaciones en el intervalo (ω_1, ω_2) se hace grande, las desviaciones de esta función hacia arriba se compensan prácticamente por completo con las oscilaciones hacia abajo y la integral se hace prácticamente independiente de la realización concreta de la función aleatoria $\tilde{S}_x^*(\omega)$. La fórmula (8.3.15) es resultado de este alisado de la función $\tilde{S}_x^*(\omega)$.

Cuanto mayor sea la magnitud α en las fórmulas anteriores, tanto mejor se alisarán las oscilaciones de la función aleatoria $\tilde{S}_x^*(\omega)$, tanto más exacta será la igualdad (8.3.12) para la longitud dada de la realización T . Sin embargo, la igualdad (8.3.13) será tanto más exacta, cuanto menor sea α . Es obvio que esta igualdad es absolutamente exacta cuando la densidad espectral $s_x(\omega)$ varía linealmente en el intervalo $(\omega_0 - \alpha, \omega_0 + \alpha)$. Por eso la magnitud α debe ser elegida lo suficientemente pequeña para que la densidad espectral $s_x(\omega)$ pueda ser considerada aproximadamente como función lineal en el intervalo $(\omega_0 - \alpha, \omega_0 + \alpha)$. Ahora bien, la magnitud α debe ser escogida en la fórmula (8.3.16) satisfaciendo dos requisitos contra-

ditorios. Es evidente que estos requisitos los satisface el mayor valor de α para el cual la densidad espectral $s_x(\omega)$ puede ser considerada aproximadamente lineal en cualquier intervalo de frecuencias de longitud 2α . Prácticamente la magnitud conveniente de α se determina por selección.

De un modo semejante, para la estimación de la densidad espectral recíproca de dos funciones aleatorias estacionarias y estacionariamente ligadas $X(t)$ e $Y(t)$ se obtiene la fórmula

$$s_{xy}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T k_{xy}^*(\tau) e^{-i\omega\tau} \frac{\sin \alpha\tau}{\alpha\tau} d\tau. \quad (8.3.17)$$

§ 8.4. Determinación de los momentos de funciones aleatorias no estacionarias

El cálculo de la estimación de la esperanza matemática de una función aleatoria estacionaria, valiéndose de la fórmula (8.3.1), se puede considerar como alisado de su realización obtenida como



Fig. 8.4.1.

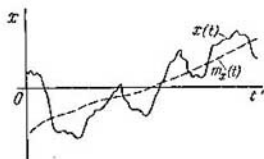


Fig. 8.4.2.

resultado del experimento (fig. 8.4.1). Es natural que surja la idea de generalizar este procedimiento para las funciones aleatorias no estacionarias y determinar la esperanza matemática de una función aleatoria no estacionaria alisando una de sus realizaciones (fig. 8.4.2). Esto es completamente posible si la realización de una función aleatoria $X(t)$, obtenida como resultado del experimento, es lo suficientemente larga. En este caso el alisado de la realización puede ser efectuado a simple vista o bien aplicando cualquier otro método de alisado de funciones. Para alisar a simple vista, es necesario construir la realización obtenida (o anotarla directamente durante la prueba) en una escala lo suficientemente pequeña por el eje de la variable independiente, para que se manifieste lo más claramente posible la banda llenada por la realización. Trazando a simple vista la línea axial de esta banda, obtendremos precisamente la curva que puede ser tomada por estimación de la esperanza matemática de la función aleatoria.

Para alisar con ayuda de calculadoras digitales o calculadoras manuales, se puede aplicar el método de la media móvil. Este método consiste en que por valor alisado de la función en cualquier punto t se toma su media en cierto intervalo con centro en el punto t . Al variar t , este intervalo se mueve a lo largo del eje t que es lo que explica el nombre dado a este método. Aplicando el método de la media móvil, obtendremos para la estimación de la esperanza matemática de una función aleatoria no estacionaria la fórmula

$$m_x^* = \frac{1}{2T_0} \int_{t-T_0}^{t+T_0} x(s) ds. \quad (8.4.1)$$

Cuanto más grande sea el intervalo $2T_0$ en esta fórmula tanto mejor será el alisado. Por otro lado, si T_0 es muy grande, se alisará también la propia esperanza matemática de la función aleatoria. Por eso se recomienda elegir T_0 lo suficientemente grande, para que en cualquier intervalo de longitud $2T_0$ el carácter aleatorio de la función aleatoria dada «se manifieste lo bastante» en la realización anotada (es decir, para que en cualquier intervalo de longitud $2T_0$ se observe una cantidad suficientemente grande de oscilaciones de la realización), y lo suficientemente pequeño para que la esperanza matemática de la función aleatoria $X(t)$ pueda ser considerada aproximadamente lineal en cualquier intervalo de longitud $2T_0$.

Si estas condiciones no se observan, es imposible en principio determinar la esperanza matemática de la función aleatoria alisando una de sus realizaciones. De ejemplo típico de esta clase puede servir la función aleatoria en la cual prácticamente todas las realizaciones posibles se representan por curvas suaves. La esperanza matemática de tal función aleatoria puede ser determinada solamente teniendo un número suficientemente grande de realizaciones.

Para determinar la estimación de la función correlativa de una función aleatoria no estacionaria por el método de alisado, partiremos de la igualdad

$$K_x(t + \tau, t) = M[X^\circ(t + \tau) X^\circ(t)] \quad (8.4.2)$$

En virtud de esta igualdad, la estimación del valor de la función correlativa, cualquiera que sea el valor fijo de τ , puede ser obtenida alisando la realización de la función aleatoria

$$Z_\tau(t) = [X(t + \tau) - M_x^*(t + \tau)] [X(t) - M_x^*(t)], \quad (8.4.3)$$

que se considera como función de τ . El alisado puede llevarse a cabo a simple vista, trazando la línea axial de la banda en la cual oscila la realización de la función aleatoria o bien aplicando cualquier otro método de alisado de funciones. Al utilizar para el alisado el método de la media móvil, obtendremos para la estimación de la función co-

relativa la fórmula

$$K_x^*(t + \tau, t) = \frac{1}{2T_1} \int_{t-T_1}^{t+T_1} [x(s + \tau) - m_x^*(s + \tau)] [x(s) - m_x^*(s)] ds. \quad (8.4.4)$$

La magnitud T_1 debe ser elegida lo más grande posible, pero tal que el valor de la función correlativa para el valor dado de τ , considerado como función de t , pueda ser estimado aproximadamente como función lineal en cualquier intervalo de longitud $2T_1$.

Convenga subrayar que la determinación de la esperanza matemática y de la función correlativa de una función aleatoria no estacionaria aplicando el método de alisado es posible solamente en el caso en que la longitud de la realización anotada supera considerablemente el intervalo de correlación de la función aleatoria. No obstante, en este caso la precisión de las estimaciones obtenidas de tal modo será considerablemente menor que en el caso de funciones aleatorias estacionarias puesto que los intervalos de mediación en las fórmulas (8.4.1) y (8.4.4) $2T_0$ y $2T_1$ deben ser por necesidad considerablemente menores que la longitud de realización T (cinco veces, por lo menos). Al determinar la esperanza matemática y la función correlativa de una función aleatoria estacionaria, como intervalo de mediación se toma prácticamente toda la longitud de realización. Por eso las esperanzas matemáticas y las funciones correlativas de funciones aleatorias no estacionarias deben determinarse, como regla, por varias realizaciones.

Para determinar la esperanza matemática y la función correlativa de una función aleatoria no estacionaria por varias realizaciones de la misma, obtenidas experimentalmente, se recomienda emplear para cada realización el método de alisado expuesto anteriormente y tomar las medias aritméticas de los resultados referentes a distintas realizaciones.

Por el método de alisado de uno o varios pares de realizaciones de dos funciones aleatorias se determina de un modo semejante la función correlativa recíproca de las mismas.

Subrayemos una vez más que el método de alisado de una o varias realizaciones se puede utilizar para hallar las estimaciones de las esperanzas matemáticas y funciones correlativas de funciones aleatorias solamente en el caso en que los intervalos de correlación de todas las funciones aleatorias anotadas son pequeños en comparación con la longitud de cada realización obtenida. Sobre el cumplimiento de esta condición se puede juzgar por el carácter de las realizaciones obtenidas. Si todas las realizaciones anotadas de las funciones aleatorias son visiblemente oscilaciones caóticas, se puede considerar que el «carácter aleatorio» de las funciones «se ha manifestado bastante bien» y para hallar las esperanzas matemáticas y las funciones correlativas recíprocas se puede emplear el método de alisado de las

realizaciones expuesto anteriormente. Con ello, cuanto más oscilaciones caóticas efectúen las funciones anotadas en el intervalo de anotación tanto menor número de realizaciones será necesario. Para las funciones aleatorias con esperanzas matemáticas y dispersiones lentamente variables, las cuales se pueden considerar próximas a las estacionarias (el caso de una no estacionaridad débil), se puede limitarse a una realización lo suficientemente larga.

Pero si la longitud de las realizaciones anotadas es comparable con el intervalo de correlación de la función aleatoria, por ejemplo, si todas las realizaciones anotadas representan curvas suaves, entonces es en principio imposible hallar las estimaciones convenientes de las esperanzas matemáticas y las funciones correlativas y correlativas recíprocas sirviéndose del método de alisado de las realizaciones. En semejantes casos el único procedimiento posible de determinación de las estimaciones de las esperanzas matemáticas y de las funciones correlativas y correlativas recíprocas consiste en tomar un número suficientemente grande de realizaciones (del orden de 100) y, examinando los valores de las funciones aleatorias para diferentes valores del argumento como magnitudes aleatorias, emplear las fórmulas del § 8.2 para el cálculo de las estimaciones de sus esperanzas matemáticas, dispersiones y momentos de correlación. Este procedimiento es, desde luego, absolutamente general y puede ser utilizado en todos los casos. Sin embargo, siempre exige un gran número de realizaciones para obtener una precisión satisfactoria de las estimaciones de las esperanzas matemáticas y funciones correlativas. Además, si la longitud de las realizaciones anotadas es grande en comparación con el intervalo de correlación, este procedimiento no es racional puesto que no utiliza toda la información comprendida en los resultados de los experimentos. Por eso, si el intervalo de correlación de la función aleatoria es pequeño en comparación con la longitud de las realizaciones obtenidas como resultado de las pruebas, para la determinación de las esperanzas matemáticas y de las funciones correlativas se recomienda emplear el método expuesto más arriba de alisado de una o varias realizaciones.

Suplementos

1. Algunas integrales determinadas

Al deducir ciertas fórmulas de la Teoría de las Probabilidades hay que aplicar la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t - h^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h} e^{\frac{\eta^2}{4h^2}}, \quad (1)$$

válida para cualquier valor real de $h > 0$ y para cualquier η complejo. En particular, cuando $\eta = 0$, la fórmula (1) toma la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h}. \quad (2)$$

Para deducir la fórmula (1), pongamos

$$I(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t - h^2 t^2} dt. \quad (3)$$

Derivando esta fórmula con respecto al parámetro η e integrando por partes, obtendremos

$$\begin{aligned} I'(\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} t e^{\eta t - h^2 t^2} dt = -\frac{1}{2h^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t} d e^{-h^2 t^2} = \\ &= -\frac{1}{2h^2} e^{\eta t} e^{-h^2 t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\eta}{2h^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t} e^{-h^2 t^2} dt = \frac{\eta}{2h^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t - h^2 t^2} dt \end{aligned}$$

o bien

$$I'(\eta) = \frac{\eta}{2h^2} I(\eta). \quad (4)$$

Esta fórmula puede ser considerada como la ecuación diferencial que determina la integral $I(\eta)$. Para determinar por completo la integral $I(\eta)$, ahora es suficiente hallar su valor para un valor cualquiera de η . Lo más sencillo es calcular el valor de esta integral para $\eta = 0$, es decir, la integral (2):

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 t^2} dt \quad (5)$$

Puesto que esta integral no depende de cómo está designada la variable de integración, se puede escribir también

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 s^2} ds. \quad (6)$$

Multiplicando miembro a miembro las fórmulas (5) y (6), obtendremos

$$\begin{aligned} I^2(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 t^2} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 s^2} ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 s^2} ds \right\} e^{-h^2 t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+s^2)h^2} dt ds. \end{aligned}$$

De este modo, hemos reducido el problema al cálculo de la integral doble. Esta integral se calcula fácilmente en las coordenadas polares. Poniendo

$$ht = r \cos \varphi, \quad hs = r \sin \varphi$$

y tomando en consideración que el jacobiano de esta transformación es igual a r/h^2 :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial r} & \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{\partial t}{\partial \varphi} & \frac{\partial s}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{h} \cos \varphi & \frac{1}{h} \sin \varphi \\ -\frac{r}{h} \sin \varphi & \frac{r}{h} \cos \varphi \end{vmatrix} = \frac{r}{h^2},$$

obtendremos

$$I^2(0) = \frac{1}{h^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = -\frac{\pi}{h^2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{h^2},$$

de donde se deduce precisamente la fórmula (2).

La integral de la ecuación (4), igual a $\frac{\sqrt{\pi}}{h}$ para $\eta = 0$, se expresa por la fórmula

$$I(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{h} e^{-\frac{\eta^2}{4h^2}}.$$

Esto es fácil comprobar por la sustitución directa. Así, pues, la fórmula (1) queda demostrada.

De (1) se deducen fácilmente las fórmulas

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k-1} e^{-h^2 t^2} dt = 0 \quad (k=1, 2, \dots), \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} e^{-h^2 t^2} dt = \frac{(2k-1)!!}{2^k h^{2k+1}} \sqrt{\pi} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (8)$$

Para deducir estas fórmulas, derivemos la fórmula (8) con respecto al parámetro η . Como resultado obtendremos

$$I^{(r)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} t^r e^{\eta t - h^2 t^2} dt \quad (r=1, 2, \dots)$$

Poniendo aquí $\eta = 0$, tendremos

$$I^{(r)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} t^r e^{-h^2 t^2} dt \quad (r=1, 2, \dots). \quad (9)$$

Así pues, todas las integrales que nos interesan son los valores de derivadas de la integral $I(\eta)$ para $\eta = 0$. La primera derivada de la integral $I(\eta)$ se determina por la fórmula (4). Para determinar las derivadas de órdenes superiores de la integral $I(\eta)$, derivamos la fórmula (4). Entonces obtendremos

$$I''(\eta) = \frac{1}{2h^2} I(\eta) + \frac{\eta}{2h^2} I'(\eta) \quad (10)$$

y en general

$$I^{(r)}(\eta) = \frac{r-1}{2h^2} I^{(r-2)}(\eta) + \frac{\eta}{2h^2} I^{(r-1)}(\eta). \quad (11)$$

Para demostrar esta fórmula, es suficiente utilizar el método de inducción matemática. Suponiendo que esta fórmula es válida para cierto valor de r , demostramos que es válida también para $r+1$. Derivando la fórmula (11), obtenemos

$$I^{(r+1)}(\eta) = \frac{r-1}{2h^2} I^{(r-1)}(\eta) + \frac{1}{2h^2} I^{(r-1)}(\eta) + \frac{\eta}{2h^2} I^{(r)}(\eta) = \frac{r}{2h^2} I^{(r-1)}(\eta) + \frac{\eta}{2h^2} I^{(r)}(\eta)$$

lo que era necesario demostrar. Así pues, puesto que la fórmula (11) es válida para $r=2$ [la fórmula (10)], ésta es válida para cualquier r .

Suponiendo en (11) que $\eta = 0$, obtendremos

$$I^{(r)}(0) = \frac{r-1}{2h^2} I^{(r-2)}(0). \quad (12)$$

Pero de (4) se deriva que $I'(0) = 0$. Por consiguiente, los valores de todas las derivadas de órdenes impares de la integral $I(\eta)$ para $\eta = 0$ son iguales a cero, lo que demuestra la fórmula (7). Además, esta fórmula está clara sin demostración, puesto que la integral de una función impar en límites simétricos siempre es igual a cero.

Poniendo en (12) sucesivamente $r = 2, 4, 6, \dots, 2k$, obtendremos

$$I''(0) = \frac{1}{2h^2} I(0), \quad I^{IV}(0) = \frac{3}{2h^2} I''(0),$$

.....

$$I^{(2k-2)}(0) = \frac{2k-3}{2h^2} I^{(2k-4)}(0),$$

$$I^{(2k)}(0) = \frac{2k-1}{2h^2} I^{(2k-2)}(0).$$

Multiplicando todas estas igualdades entre sí y efectuando las simplificaciones correspondientes, obtendremos

$$I^{(2k)}(0) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k h^{2k}} I(0).$$

Sustituyendo aquí la expresión (2) de la magnitud $I(0)$, obtendremos precisamente la fórmula (8).

Dado que la función subintegral en (8) es par, de (8) se deduce una fórmula más:

$$\int_0^{\infty} t^{2k} e^{-h^2 t^2} dt = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1} h^{2k+1}} \sqrt{\pi} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (13)$$

Para la integral análoga con potencias impares tiene lugar la fórmula

$$\int_0^{\infty} t^{2k-1} e^{-h^2 t^2} dt = \frac{(k-1)!}{2h^{2k}} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (14)$$

Para deducir esta fórmula, observemos que para cualquier $\alpha > 0$

$$\int_0^{\infty} t e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1}{2\alpha} \quad (\alpha > 0). \quad (15)$$

En efecto,

$$\int_0^{\infty} t e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} du = \frac{1}{2} \frac{e^{-\alpha u}}{-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}.$$

Derivando la fórmula (15) con respecto al parámetro, obtendremos

$$-\int_0^{\infty} t^3 e^{-\alpha t^2} dt = -\frac{1}{2\alpha^2}, \quad \int_0^{\infty} t^5 e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1 \cdot 2}{2\alpha^3}$$

.....

$$\int_0^{\infty} t^{2k-1} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{(k-1)!}{2\alpha^k}.$$

Poniendo aquí $\alpha = h^2$, obtendremos precisamente la fórmula (14).

Con ayuda de las fórmulas (1) y (2) se puede calcular algunas otras integrales determinadas que tenemos que aplicar en este libro.

Demostremos que para cualquier valor real de τ y para cualquier α positivo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (16)$$

Para deducir esta fórmula, observemos que para cualesquiera μ y α reales

$$\frac{1}{\alpha^2 + \mu^2} = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha^2 + \mu^2)z} dz. \quad (17)$$

En virtud de esta fórmula la integral en (16) puede ser sustituida por la integral doble:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu\tau} d\mu \int_0^{\infty} e^{-(\alpha^2 + \mu^2)z} dz.$$

Cambiando el orden de integración, obtendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 z} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\mu - z\mu^2} d\mu. \quad (18)$$

Pero conforme a la fórmula (1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\mu - z\mu^2} d\mu = \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{-\frac{\tau^2}{4z}}.$$

Sustituyendo esta expresión en (18), tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 z - \frac{\tau^2}{4z}} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Aumentando el exponente hasta que se obtenga el cuadrado completo, obtendremos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} &= \sqrt{\pi} e^{-\alpha|\tau|} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\alpha^2 z + 2\alpha \sqrt{z} \frac{|\tau|}{2\sqrt{z}} - \frac{\tau^2}{4z} \right\} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \\ &= \sqrt{\pi} e^{-\alpha|\tau|} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\left(\alpha \sqrt{z} - \frac{|\tau|}{2\sqrt{z}} \right)^2 \right\} \frac{dz}{\sqrt{z}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Hagamos ahora la sustitución de las variables

$$t = \alpha \sqrt{z} - \frac{|\tau|}{2\sqrt{z}}. \quad (20)$$

Al variar \sqrt{z} desde 0 hasta ∞ , la variable t cambia monótonamente desde $-\infty$ hasta ∞ . Por lo tanto, la ecuación (20) tiene una sola solución positiva con respecto a \sqrt{z} (en la figura dada se muestra t en función de \sqrt{z}). Esta solución se determina por la fórmula

$$\sqrt{z} = \frac{1}{2\alpha} (t + \sqrt{t^2 + 2\alpha|\tau|}).$$

De aquí hallamos

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = \frac{dt}{2\alpha} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2\alpha|\tau|}} \right). \quad (21)$$

Sustituyendo las expresiones (20) y (21) en (19) y teniendo en cuenta que $t = -\infty$ para $z = 0$ y $t = \infty$ para $z = \infty$, tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau\mu} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2\alpha|\tau|}} \right) dt.$$

De aquí, tomando en consideración que la integral de una función impar en límites simétricos es igual a cero y aplicando la fórmula (2) para $h = 1$, ob-

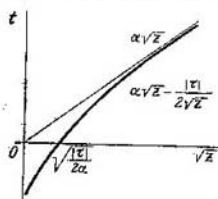


Fig. S.1.

tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu\tau} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$

que es lo que demuestra a la fórmula (16).

De la fórmula (16), derivando con respecto al parámetro τ , se obtiene la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu e^{i\mu\tau} d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \begin{cases} i\pi e^{-\alpha|\tau|} & \text{para } \tau > 0. \\ -i\pi e^{-\alpha|\tau|} & \text{para } \tau < 0. \end{cases} \quad (22)$$

En virtud de la fórmula conocida de Euler, la fórmula (16) puede ser escrita en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \mu\tau + i \operatorname{sen} \mu\tau}{\alpha^2 + \mu^2} d\mu = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}.$$

De aquí, teniendo en cuenta que en límites simétricos la integral de una función impar es igual a cero y la integral de una función par es igual a la integral duplicada de 0 a ∞ , obtendremos

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \mu\tau d\mu}{\alpha^2 + \mu^2} = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (23)$$

2. Tabla de los valores de la función de Laplace

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,00	0,0000	0,36	0,1406	0,72	0,2642	1,08	0,3599
0,01	0,0040	0,37	0,1443	0,73	0,2673	1,09	0,3621
0,02	0,0080	0,38	0,1480	0,74	0,2703	1,10	0,3643
0,03	0,0120	0,39	0,1517	0,75	0,2734	1,11	0,3665
0,04	0,0160	0,40	0,1554	0,76	0,2764	1,12	0,3686
0,05	0,0199	0,41	0,1591	0,77	0,2794	1,13	0,3708
0,06	0,0239	0,42	0,1628	0,78	0,2823	1,14	0,3729
0,07	0,0279	0,43	0,1664	0,79	0,2852	1,15	0,3749
0,08	0,0319	0,44	0,1700	0,80	0,2881	1,16	0,3770
0,09	0,0359	0,45	0,1736	0,81	0,2910	1,17	0,3790
0,10	0,0398	0,46	0,1772	0,82	0,2939	1,18	0,3810
0,11	0,0438	0,47	0,1808	0,83	0,2967	1,19	0,3830
0,12	0,0478	0,48	0,1844	0,84	0,2995	1,20	0,3849
0,13	0,0517	0,49	0,1879	0,85	0,3023	1,21	0,3869
0,14	0,0557	0,50	0,1915	0,86	0,3051	1,22	0,3888
0,15	0,0596	0,51	0,1950	0,87	0,3078	1,23	0,3907
0,16	0,0636	0,52	0,1985	0,88	0,3106	1,24	0,3925
0,17	0,0675	0,53	0,2019	0,89	0,3133	1,25	0,3944
0,18	0,0714	0,54	0,2054	0,90	0,3159	1,26	0,3962
0,19	0,0753	0,55	0,2088	0,91	0,3186	1,27	0,3980
0,20	0,0793	0,56	0,2123	0,92	0,3212	1,28	0,3997
0,21	0,0832	0,57	0,2157	0,93	0,3238	1,29	0,4015
0,22	0,0871	0,58	0,2190	0,94	0,3264	1,30	0,4032
0,23	0,0910	0,59	0,2224	0,95	0,3289	1,31	0,4049
0,24	0,0948	0,60	0,2257	0,96	0,3315	1,32	0,4066
0,25	0,0987	0,61	0,2291	0,97	0,3340	1,33	0,4082
0,26	0,1026	0,62	0,2324	0,98	0,3365	1,34	0,4099
0,27	0,1064	0,63	0,2357	0,99	0,3389	1,35	0,4115
0,28	0,1103	0,64	0,2389	1,00	0,3413	1,36	0,4131
0,29	0,1141	0,65	0,2422	1,01	0,3437	1,37	0,4147
0,30	0,1179	0,66	0,2454	1,02	0,3461	1,38	0,4162
0,31	0,1217	0,67	0,2486	1,03	0,3485	1,39	0,4177
0,32	0,1255	0,68	0,2517	1,04	0,3508	1,40	0,4192
0,33	0,1293	0,69	0,2549	1,05	0,3531	1,41	0,4207
0,34	0,1331	0,70	0,2580	1,06	0,3554	1,42	0,4222
0,35	0,1368	0,71	0,2611	1,07	0,3577	1,43	0,4236

Continuación

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
1,44	0,4251	1,73	0,4582	2,04	0,4793	2,60	0,4953
1,45	0,4265	1,74	0,4591	2,06	0,4803	2,62	0,4956
1,46	0,4279	1,75	0,4599	2,08	0,4812	2,64	0,4959
1,47	0,4292	1,76	0,4608	2,10	0,4821	2,66	0,4961
1,48	0,4306	1,77	0,4616	2,12	0,4830	2,68	0,4963
1,49	0,4319	1,78	0,4625	2,14	0,4838	2,70	0,4965
1,50	0,4332	1,79	0,4633	2,16	0,4846	2,72	0,4967
1,51	0,4345	1,80	0,4641	2,18	0,4854	2,74	0,4969
1,52	0,4357	1,81	0,4649	2,20	0,4861	2,76	0,4971
1,53	0,4370	1,82	0,4656	2,22	0,4868	2,78	0,4973
1,54	0,4382	1,83	0,4664	2,24	0,4875	2,80	0,4974
1,55	0,4394	1,84	0,4671	2,26	0,4881	2,82	0,4976
1,56	0,4406	1,85	0,4678	2,28	0,4887	2,84	0,4977
1,57	0,4418	1,86	0,4686	2,30	0,4893	2,86	0,4979
1,58	0,4429	1,87	0,4693	2,32	0,4898	2,88	0,4980
1,59	0,4441	1,88	0,4699	2,34	0,4904	2,90	0,4981
1,60	0,4452	1,89	0,4706	2,36	0,4909	2,92	0,4982
1,61	0,4463	1,90	0,4713	2,38	0,4913	2,94	0,4984
1,62	0,4474	1,91	0,4719	2,40	0,4918	2,96	0,4985
1,63	0,4484	1,92	0,4726	2,42	0,4922	2,98	0,4986
1,64	0,4495	1,93	0,4732	2,44	0,4927	3,00	0,49865
1,65	0,4505	1,94	0,4738	2,46	0,4931	3,20	0,49931
1,66	0,4515	1,95	0,4744	2,48	0,4934	3,40	0,49966
1,67	0,4525	1,96	0,4750	2,50	0,4938	3,60	0,499841
1,68	0,4535	1,97	0,4756	2,52	0,4941	3,80	0,499928
1,69	0,4545	1,98	0,4761	2,54	0,4945	4,00	0,499968
1,70	0,4554	1,99	0,4767	2,56	0,4948	4,50	0,499997
1,71	0,4564	2,00	0,4772	2,58	0,4951	5,00	0,49999937
1,72	0,4573	2,02	0,4783				

A nuestros lectores:

«MIR» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial «MIR», I Rizhski per. 2, Moscú GSP I-110 129820, URSS.

**Libros que serán publicados por la Editorial «Mir»
en 1973**

**GUELFAND I., GLAGOLEVA E., KIRILOV A
MÉTODO DE COORDENADAS**

Es un libro de Israil Guelfand, doctor en ciencias físico-matemáticas y profesor de la Universidad de Moscú, de Alejandro Kirilov, candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas y de Elena Glagóleva, colaboradora científica. Es el primero de la serie de matemáticas: «Biblioteca de la escuela físico-matemática».

En esta obra se describe el método de las coordenadas, es decir, el procedimiento para determinar la posición de un punto o cuerpo con ayuda de cifras o de otros símbolos.

De un modo ingenioso y comprensible, a la vez que rigurosamente científico, se trata de las coordenadas de un punto sobre una recta, sobre un plano, en el espacio; del espacio cuatridimensional, del cubo cuatridimensional y de otras cuestiones de interés relacionadas con la matemática moderna.

En cada una de las partes del libro se dan tareas y preguntas a resolver por el lector. Es un libro de matemáticas para los escolares del tercer año de las escuelas especiales de matemáticas y no exige conocimientos especiales que no estén incluidos en el programa escolar.

Todo el que se interese en las matemáticas, leerá este libro con satisfacción.

✓ ROZANOV YU.

PROCESOS ALEATORIOS

En el libro de Yu. Rózanov, doctor en ciencias fisicomatemáticas, se estudian la teoría de las probabilidades y los procesos aleatorios. En el mismo se exponen las nociones fundamentales y los métodos de la teoría de las probabilidades moderna, en modelos sencillos se analizan las propiedades más características de los procesos aleatorios de distintos tipos, se examinan los problemas teóricos de las probabilidades que son motivo de cierto interés para diferentes fines.

Durante la exposición del material se emplean, generalmente, «métodos directos de las probabilidades», lo cual contribuye al desarrollo de la intuición sobre este particular, de mucha importancia en la resolución de los problemas teóricos de este tipo. Gracias a ésto, el libro de Yu. Rózanov se destaca entre otros manuales por la teoría de los procesos aleatorios. Además, los primeros capítulos del libro contienen las nociones indispensables de la teoría de las probabilidades, por eso no se exige de los lectores un conocimiento previo de otros manuales ni una preparación matemática general.

Es indudable que este libro está destinado a aquellos que por vez primera estudian la teoría de las probabilidades y los procesos aleatorios. Sin lugar a dudas, será acogido con gran interés por los especialistas, sobre todo, por los profesores de estas disciplinas en los centros de enseñanza técnica superior.

Ante todo, este libro se recomienda a los estudiantes de las especialidades fisicomatemáticas y técnicas de los centros de enseñanza superior, así como a los especialistas que se interesan por la aplicación de la teoría de los procesos aleatorios.

I. SUVOROV

MATEMATICAS SUPERIORES

Este libro se debe al doctor en ciencias fisicomatemáticas IOROFEI SUVOROV. Esta obra comprende el estudio de las siguientes partes de las matemáticas superiores: geometría analítica, en el plano y en el espacio, cálculo diferencial e integral, conceptos fundamentales del análisis matemático, series, conceptos sobre líneas planas y alabeadas, diferenciación e integración de funciones de varios argumentos y ecuaciones diferenciales. Aquí también se incluyen problemas y ejemplos con sus resoluciones y algunas indicaciones de tipo metódico. El libro está ilustrado con esquemas geométricos que facilitan la comprensión del material y aclaran los métodos para la solución de los problemas. Es libro de texto para los centros de enseñanza técnica superior y media. Su principal mérito es la forma clara y concisa en que se expone el material. En ruso se han publicado cinco ediciones de este libro.

En 1974 La Editorial «Mir» Publicara:

GMURMAN V.

**LA TEORIA DE LAS PROBABILIDADES
Y LA ESTADISTICA MATEMATICA**

Este tratado ha sido escrito de conformidad con el nuevo curso de la teoría de las probabilidades y de la estadística matemática. El material de esta obra se presenta en tres partes fundamentales: las dos primeras se dedican a la teoría de las probabilidades y la última, a la estadística matemática. En este manual se estudian los temas siguientes: probabilidad de las hipótesis; fórmulas de Bayes; distribución de Poisson; nociones de estadística matemática y noción de correlación.

La cuarta edición de este libro contiene algunos capítulos nuevos: distribución exponencial, verificación de las hipótesis estadísticas y análisis dispersional uniforme.

En el libro se presta gran atención a los métodos estadísticos de elaboración de los datos experimentales, las tablas que se exponen para los cálculos son muy cómodas. Cada capítulo contiene problemas y sus respuestas que han sido elegidos adecuadamente. Además, todo capítulo va acompañado de análisis de las soluciones de los problemas del material correspondiente.

Esta obra contiene 17 capítulos, varias tablas de números, 22 figuras y un gran número de ejemplos teóricos y técnicos, se recomienda para los estudiantes de las facultades ingenierotécnicas y económicas.