UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

INTRODUCCION AL ALGEBRA

Ing. MARIO RAUL AZOCAR
(Master of Science - New Nork University - New York City)

1975

UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

Para mi querido amigo Don
Sergio Aracciati, cordialmente
19/05/05 Mario Raúl Azócar

INTRODUCCION AL ALGEBRA

Ing. MARIO RAUL AZOCAR

(Master of Science - New York University - New York City)

1975

P R O L O G O

El presente trabajo está principalmente preparado para los estudiantes de Estadística de la Universidad Católica de Chile.

Su propósito fundamental es entregarles una guía de estudio que constituya una ayuda para su introducción en los métodos del álgebra. Se pretende que el joven estudiante logre habilidad operatoria y conocimientos teóricos que respalden su trabajo.

Bien conocida es, la falta de hábitos de estudios y la modesta preparación matemática con que los estudiantes de secundaria ingresan a la universidad. Pareciera que, en la enseñanza media, los reformadores educacionales hayan puesto en álgebra el énfasis en el formalismo teórico de las estructuras, relegando al abandono la ejercitación que busca la destreza. Ello es comprensible cuando no hay propósitos, pues una destreza sin propósitos carece de sentido.

Para nuestros estudiantes de Estadística, el conocimiento de la matemática, obviamente tiene metas bien definidas. Por ello es necesario ir en busca de la capacidad operatoria, la cual se adquiere con la ejercitación, base tradicional de todo aprendizaje.

Finalmente como la simple ejercitación, sin respaldo conceptual carece de consistencia, pretendemos que este trabajo sea un paso provechoso hacia la coexistencia entre la teória y la práctica.

Ing. MARIO RAUL AZOCAR

ALGEBRA EN EL CUERPO R.

1.1 EL CUERPO DE LOS REALES.

Desde los estudios de Secundaria nuestros alumnos están familiarizados con las propiedades fundamentales del cuerpo R de los números reales. Por esta razón nuestro principal objetivo será sistematizar estas propiedades para luego poder hacer adecuado uso de ellas.

Suponemos la existencia de un conjunto R cuyos elementos se llaman números reales.

A). Axiomas de adición.

En el conjunto R se define una operación llamada suma, que asocia a cada par ordenado de números reales: a y b un número real: $a + b$, de tal modo que se cumplen los axiomas siguientes:

A1). $a + b = b + a \qquad \forall\, a, b, \in R$

A2). $(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \forall\, a, b, c \in R$

A3). Existe: $0 \in R$, tal que: $a + 0 = a \qquad \forall\, a \in R$

A4). Para cada $a \in R$, existe $(-a) \in R$, tal que: $a+(-a) = 0$

El número 0 se llama elemento neutro de la suma y $(-a)$ es el opuesto del número a.

B). Axiomas de multiplicación.

En el conjunto R se define una operación llamada producto que asocia a cada pareja ordenada de números reales a y b un número real ab, de tal modo que se verifican los axiomas siguientes:

M1). $ab = ba$ $\quad \forall\, a,b \in R$

M2). $(ab)c = a(bc)$ $\quad \forall\, a,b,c \in R$

M3). Existe en R: $1 \neq 0$ tal que: $a1 = a$ $\quad \forall\, a \in R$

M4). Para cada $a \in R$, $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in R$, tal que: $aa^{-1} = 1$

El número real 1 es elemento neutro de la multiplicación y el número (a^{-1}) es el inverso o recíproco de a.

C). Axioma de distribución.

D1). $(a + b)\, c = ac + bc$ $\quad \forall\, a,b,c \in R$

Un conjunto de elementos en el cual se ha definido dos operaciones (+) y (·) que verifican la axiomática (A), (B) y (C) es un cuerpo conmutativo o campo.

TEOR. 1.1

a). El conjunto R no es vacío: $R \neq \emptyset$

b). El elemento neutro: 0 es único

c). El opuesto de cada número a, es único

d). El opuesto de $(-a)$ es a, o sea: $-(-a) = a$

e). $a + c = b + c$ implica $a = b$.

Dm.

a). Por axioma (A3) tenemos que: $0 \in R$, luego $R \neq \emptyset$.

b). Supongamos que en R, además de 0 hay otro número $\bar{\bar{0}}$, tal que: $a + \bar{\bar{0}} = a$ para todo $a \in R$, entonces: $\bar{\bar{0}} = \bar{\bar{0}} + 0 = 0 + \bar{\bar{0}} = 0$. Asi el número 0 es único.

c). Supongamos que un número $a \in R$, tenga dos opuestos: $(-a)$ y $\bar{\bar{a}}$, entonces:

$$\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}} + 0 = \bar{\bar{a}} + (a + (-a))$$
$$= (\bar{\bar{a}} + a) + (-a) = 0 + (-a) = -a$$

d). El número opuesto de $(-a)$ es $-(-a)$ luego: $(-a) + (-(-a)) = 0$ pero $a + (-a) = 0$ y como el opuesto de $(-a)$ es único, queda: $-(-a) = a$

e). De inmediato tenemos:

$$a = a + 0 = a + (c + (-c))$$
$$= (a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$$
$$= b + (c + (-c)) = b + 0 = b$$

COR: El opuesto de 0 es 0, o sea: $-0 = 0$.

TEOR. 1.2

a). Dados $a \in R$ y $b \in R$ existe un único real x, tal que: $a + x = b$

b). $a + a = a$ implica: $a = 0$

c). $0a = 0 \quad \forall a \in R$

d). $ab = 0$ implica: $(a = 0) \vee (b = 0)$

Dm.

a). Afirmamos que $x = b + (-a)$ es solución de $a + x = b$, en efecto:

$$a + x = a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$$

Falta mostrar que $x = b + (-a)$ es la única solución.

Supongamos que hay otra $\bar{x}$, entonces de: $a + x = b$ y $a + \bar{x} = b$, resulta: $a + x = a + \bar{x}$, o sea: $\bar{x} = x$.

b). $a + a = a$ implica: $(a + a) + (-a) = a + (-a)$:

luego: $a + (a + (-a)) = 0$

Asi: $a + 0 = 0$, o sea: $a = 0$.

c). De inmediato tenemos: $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$, entonces: $0a = 0$

Esta igualdad muestra que el 0 no tiene recíproco.

d). Suponiendo $b \neq 0$, existe b^{-1} tal que: $bb^{-1} = 1$ entonces:

$$a = 1a = (bb^{-1})\ a = b^{-1}\ (ab) = b^{-1}\ 0 = 0.$$

Análogamente si $a \neq 0$ se encuentra $b = 0$. Finalmente si a, b o ambos son cero, la tesis es trivial.

DEF. 1.1 Dados dos reales a y b, el único real x, tal que: $a + x = b$, se llama diferencia entre b y a y se designa por: $b - a = b + (-a)$.

TEOR.1.3

a). $(-1)a = -a$

b). $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

c). $(-a)(-b) = ab$

Dm.

a). De inmediato tenemos:

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$$

Además: $a + (-a) = 0$ y como el opuesto de a es único, concluimos: $(-1)a = (-a)$.

b). Aprovechando lo recién probado, tenemos:

$$a(-b) = a\ ((-1)b) = (-1)\ \ (ab) = -(ab)$$

$$(-a)b = ((-1)\ a)b = (-1)\ \ (ab) = -(ab)$$

c). Recordando que: $-(-x) = x$, tenemos:

$$(-a)(-b) = -(a\,(-b)) = -(-(ab)) = ab$$

COR 1. $$(-1)(-1) = 1$$

COR 2. $$-(a - b) = b - a$$

En efecto:

$$-(a - b) = (-1)(a + (-b))$$

$$= (-1)a + (-1)(-b) = -a + b = b - a$$

Haciendo: $a = b$, queda: $-0 = 0$

TEOR. 1.4

a). El elemento 1 es único

b). El inverso a^{-1} de $a \neq 0$, es único

c). El inverso de a^{-1} es a, o sea: $(a^{-1})^{-1} = a$

d). Si $c \neq 0$, $ac = bc$ implica: $a = b$

e). Dados dos reales $a \neq 0$ y b, existe un único x, tal que: $ax = b$.

Dm.

a). Supongamos que en R hay además de 1, otro número 1' tal que: $1'a = a$ para todo $a \in R$, entonces:

$$1' = 1' \cdot 1 = 1 \cdot 1' = 1$$

b). Supongamos que $a \neq 0$, tenga dos inversos a^{-1} y a', entonces:

$$a' = 1a' = (a^{-1}\ a)a' = a^{-1}\ (aa') = a^{-1}\ 1 = a^{-1}$$

c). El inverso de a^{-1} es $(a^{-1})^{-1}$, luego:

$$(a^{-1}) \cdot (a^{-1})^{-1} = 1 \qquad \text{pero} \qquad (a^{-1})a = 1$$

y como el inverso de a^{-1} es único, concluímos: $(a^{-1})^{-1} = a$

d). De inmediato tenemos:

$$a = a1 = a(cc^{-1}) = (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$$
$$= b(cc^{-1}) = b1 = b$$

e). Como $a \neq 0$, existe a^{-1} y $x = ba^{-1}$ es solución de $ax = b$, pues:

$$a(ba^{-1}) = a(a^{-1}b = (aa^{-1})b = 1 \cdot b = b$$

Ahora esta solución $x = a^{-1}b$ es única, pues suponiendo que hay otra x', de: $xa = b$ y $x'a = b$ concluímos: $xa = x'a$ y entonces: $x = x'$

<u>DEF</u>. 1.2 Dados los reales a y $b \neq 0$, el único real $x = ab^{-1}$ tal que $bx = a$, se llama cuociente entre a y b y se denota por: $x = a/b = ab^{-1}$.

De esta definición resulta inmediato que:

$$a^{-1} = 1.a^{-1} = (1/a)$$
$$a/b = ab^{-1} = a(1/b).$$

TEOR. 1.5 Sean a y b reales no nulos, entonces:

i). $(ab)^{-1} = a^{-1}\ b^{-1}$

j). $(a/b)^{-1} = b/a$

k). $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

l). $(a/-b) = (-a/b) = -(a/b)$

Dm.

i). $(ab)(b^{-1}\ a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = 1$

Así el inverso de (ab) es $(b^{-1}\ a^{-1})$ y como el inverso de (ab) es $(ab)^{-1}$, tenemos: $(ab)^{-1} = b^{-1}\ a^{-1}$.

j). $(a/b)^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}a^{-1} = ba^{-1} = b/a$.

k). $(-a)^{-1} = ((-1)a)^{-1} = (-1)^{-1}\ a^{-1}$

$= (-1)^{-1}\ 1\ a^{-1} = (-1)^{-1}(-1)(-1)a^{-1}$

$= 1\ (-1)\ a^{-1} = (-1)\ a^{-1} = -(a^{-1})$.

l). $(a/-b) = a\ (-b)^{-1} = a\ (-1)\ b^{-1} = (a\ (-1))\ b^{-1}$

$= (-a)\ b^{-1} = (-a/b)$

$(a/-b) = a\ (-b)^{-1} = a\ (-1)\ b^{-1} = (-1)(a/b) = -(a/b)$

TEOR. 1.6 $(1)^{-1} = 1$

Dm. Considerando que 1 es elemento neutro de la multiplicación tenemos: $1 \cdot (1)^{-1} = (1)^{-1}$. Pero como $(1)^{-1}$ es el inverso de 1, tenemos: $1 \cdot (1)^{-1} = 1$. Comparando ambas igualdades resulta: $(1)^{-1} = 1$.

COR 1. $(a/1) = a$. En efecto: $(a/1) = a(1)^{-1} = a\ 1 = a$

COR 2. $(-1)^{-1} = -1$

En efecto: $(-1)^{-1} = 1/(-1) = (-1)/1$

$= (-1)(1)^{-1} = (-1)1 = (-1)$.

1.2 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Descomponer en factores las expresiones:

$X = a^4 + a^2b^2 + b^4$

$Y = a^4 + 9a^2b^2 + 81b^4$

$Z = 16a^4 - 5a^2b^2 + b^4$

$W = a^4b - a^2b^3 - a^3b^2 + ab^4$

2.- Si: $x + y + z = 0$, demostrar que: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

3.- Si a, b y c son reales, demuestre que: $a^2 + b^2 + c^2 =$
$= ab + bc + ca$, implica: $a = b = c$.

4.- Factorizar la expresión: $A = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

5.- Dividir $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ por $(a + b + c)$, luego demostrar que si: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, se tiene:

$a + b + c = 0 \quad \vee \quad a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$

6.- Si $a + b + c = 2s$, demostrar que:

i). $$1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2}{ab}(s - a)(s - b)$$

j). $$(s - a)^2 + (s - b)^2 + (s - c)^2 + s^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

k). $$\frac{1}{s - a} + \frac{1}{s - b} + \frac{1}{s - c} - \frac{1}{s} = \frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

7.- Demuestre que:

$$A = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$$

$$B = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1$$

$$C = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c$$

$$D = \frac{bc\,(a + d)}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca\,(b + d)}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab\,(c + d)}{(c-a)(c-b)} = d$$

8.- Resolver las ecuaciones:

a). $(0.75)^x = (3 + 13/81)^{-2}$

b). $(2^x - 8^{(x-1)/2})(3^{2x-4} - 729) = 0$

c). $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$

d). $2^{x+1} + 2^{x+2} + \ldots\ldots\ldots + 2^{x+10} = 4092$

e). $3 \cdot 2^{x+3} = 192 \cdot 3^{x-3}$

9.- Si $x : y : z = a : b : c$, demostrar que:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$$

10.- Si a, b, c, x, y, z son positivos, tales que:

$x : a = y : b = z : c$, demostrar que:

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = \sqrt{(a + b + c)(x + y + z)}$$

11.- Factorizar:

$$A = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$$

12.- Aprovechando la identidad:

$$(x^3 + y^3) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

factorizar las expresiones:

$$A = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$$

$$B = a^3(b - c)^3 + b^3(c - a)^3 + c^3(a - b)^3$$

13.- Demostrar la identidad de Lagrange:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - xb)^2 +$$

$$+ (az - xc)^2 + (bz - yc)^2$$

14.- Demostrar que:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

15.- Descomponer en un producto de dos factores de cuatro términos cada uno:

$$A = x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - z^2)(1 - x^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2) - 4xyz.$$

<u>OBSV</u>: El conjunto precedente de ejercicios propuestos, tiene como finalidad fundamental: lograr que el joven estudiante mejore su habilidad en la operatoria algebraica. Creemos que para estudiantes de matemáticas aplicadas esta meta es de importancia vital.

Sin embargo, creemos también que un buen manejo de operatoria algebraica debe estar respaldado por una adecuada comprensión de los conceptos. Buscando satisfacer esta necesidad, incluimos a continuación un conjunto de ejercicios orientados a un mejor logro de los aspectos conceptuales.

Finalmente deseamos dejar constancia que todos los ejercicios propuestos han sido ordenados, adoptando como criterio de orden el de complijidad no decreciente.

1.3 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Usando unicamente axiomática de los reales, demostrar:

$$0 = -0 \qquad (1)^{-1} = 1$$

2.- Demostrar que:

i). $a + b = 0$ sii $a = -b$

j). $a\,b = 1$ sii $a = b^{-1}$ con: $ab \neq 0$.

3.- Usando únicamente axiomática de los reales, demostrar:

i). $(-a) + (-b) = -(a + b)$

j). $a - (b + c) = (a - b) - c$

k). $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$

4.- Demostrar que:

i). $a = -b$ sii $-a = b$

j). $a = b^{-1}$ sii $a^{-1} = b$ con: $ab \neq 0$.

5.- Usando axiomática de los reales, demostrar que:

i). $(a/b)c = (c/b)a = (ac/b)$

j). $a/(bc) = (a/b)\,(1/c)$

k). $(a/b) = (c/d)$ sii $ad = bc$

l). $(ab/cb) = a/c$ con $cb \neq 0$

6.- Demostrar que:

i). $a = b$ sii $-a = -b$

j). $a = b$ sii $a^{-1} = b^{-1}$ con: $ab \neq 0$.

7.- Usando axiomática de los reales, demostrar que:

i). $(a/b)(c/d) = ac/bd$ con $bd \neq 0$

j). $(a/b) / (c/d) = ad/bc$ con $bc \neq 0$

k). $(a/b) + (c/d) = (ad + bc) / bd$ con $bd \neq 0$

8.- Usando axiomática de los reales, demostrar que:

i). $a/b = c/d$ sii $a/c = b/d$

j). $a/b = c/d$ sii $a/b = (a + c)/(b + d)$

k). $a/b = c/d$ sii $(a+b)/(a-b) = (c+d)/(c-d)$

9.- Demostrar que:

i). Para $a \neq 0$ se tiene: $a^{-1} \neq 0$

j). Para $b \neq 0$ se tiene: $(a/b) = 0$ sii $a = 0$

10.- Demostrar que:

i). $(-1)(-1) = 1$

j). $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$ con: $a \neq 0$

k). $(a/-b) = (-a/b) = -(a/b)$.

1.4 LOS REALES: UN CUERPO ORDENADO.

En el acápite 1.1, hemos supuesto la existencia de un conjunto R de elementos llamados números reales. Luego, en dicho conjunto R, hemos introducido dos operaciones: suma (+) y producto (·) que verifican tres grupos de axiomas y con ello el conjunto R ha quedado algebraicamente estructurado, pasando a ser el cuerpo : (R, +, *).

Ahora pretendemos introducir en el cuerpo(R, +, *) una relación de orden y con ello obtendremos el cuerpo ordenado de los reales.

La introducción de esta relación de orden nos dará la oportunidad de considerar dos nociones de primera importancia en el campo de las matemáticas aplicadas, ellas son las Desigualdades y las Inecuaciones.

Manteniendo el espíritu que anima esta exposición, nuestra relación de orden será introducida mediante un axioma de orden.

D). Axioma de Orden.

O1). Existe un subconjunto R^+ de R tal que:

i). $0 \notin R^+$

j). $a \neq 0$ implica: $(a) \in R^+ \veebar (-a) \in R^+$

k). $a \in R^+ \wedge b \in R^+$ implica $(a + b) \in R^+$

l). $a \in R^+ \wedge b \in R^+$ implica $ab \in R^+$

TEOR. 1.7 $1 \in R^+$

Dm. Supongamos que: $1 \notin R^+$, entonces por (j) tenemos: $(-1) \in R^+$, pues $1 \neq 0$. Ahora $(-1) \in R^+$, implica $(-1)(-1) = 1 \in R^+$, conclusión que contradice la suposición: $1 \notin R^+$. Asi hemos demostrado que: $1 \in R^+$.

COR 1. El conjunto R^+ no es vacío, o sea $R^+ \neq \emptyset$

COR 2. $(1 + 1) = 2 \in R^+$, $(2 + 1) = 3 \in R^+$,......

DEF. 1.3 Los números de R^+ se llaman reales positivos.

DEF. 1.4 $R^- = (a \in R \mid -a \in R^+)$

TEOR. 1.8 El conjunto R^- no es vacío, o sea $R^- \neq \emptyset$.

Dm. En efecto $1 \in R^+$ implica $(-1) \in R^-$. Asi $R^- \neq \emptyset$.

DEF. 1.5 Los números de R^-, se llaman reales negativos.

TEOR. 1.9 $0 \notin R^-$

Dm. Suponiendo $0 \in R^-$, tendremos: $(-0) \in R^+$ y como $(-0) = 0$, queda $0 \in R^+$, conclusión falsa, pues contradice (i). Asi 0 no pertenece a: R^-.

Este teorema nos indica que el número 0 no es positivo ni negativo.

TEOR.1.10 $\qquad R^+ \cap R^- = \emptyset$

Dm. Supongamos $R^+ \cap R^- \neq \emptyset$, entonces existe a lo menos un real a, tal que: $a \in R^+ \wedge a \in R^-$. Ahora $a \in R^-$ implica $(-a) \in R^+$ luego: $a + (-a) = 0 \in R^+$, conclusión que se contradice con: $0 \notin R^+$. Así: $R^+ \cap R^- = \emptyset$.

Este teorema nos indica que ningún número real es positivo y negativo a la vez.

TEOR.1.11 $\qquad R = R^+ \cup \{ 0 \} \cup R^-$

Dm. Como R^+, $\{ 0 \}$ y R^- son subconjuntos de R, tenemos:

$$R^+ \cup \{ 0 \} \cup R^- \subset R \qquad (1)$$

Veamos ahora la inclusión contraria. Tomando $a \in R$, resulta $a = 0 \veebar a \in (R - \{0\})$. Si $a = 0$ es inmediato que: $a \in R^+ \cup \{ 0 \} \cup R^-$.

Ahora $a \in (R - \{0\})$ implica $a \in R^+ \veebar (-a) \in R^+$. Si $a \in R^+$ concluímos: $a \in R^+ \cup \{ 0 \} \cup R^-$.

Finalmente si $(-a) \in R^+$, resulta: $-(-a) = a \in R^-$ y entonces también $a \in R^+ \cup \{ 0 \} \cup R^-$, luego:

$$R \subset R^+ \cup \{ 0 \} \cup R^- \qquad (2)$$

De (1) y (2) concluímos: $R = R^+ \cup \{ 0 \} \cup R^-$.

Este teorema nos garantiza que cada real es positivo o negativo o nulo.

DEF. 1.6 Dados $a \in R$ y $b \in R$, diremos que: a es mayor que b y pondremos:

$(a > b)$ si y solo si $(a - b) \in R^+$

DEF. 1.7 Dados $a \in R$ $\wedge$ $b \in R$, diremos que: a es menor que b y pondremos:

$(a < b)$ si y solo si $(b > a)$

TEOR. 1.12

$(a > 0)$ si y solo si $a \in R^+$

$(a < 0)$ si y solo si $a \in R^-$

Dm. En efecto $a > 0$ sii $(a - 0) = a \in R^+$. Ahora: $a < 0$ sii $0 > a$, pero $0 > a$ sii $(0 - a) = (-a) \in R^+$, finalmente $(-a) \in R^+$ sii: $a \in R^-$.

COR 1. Para todo real a, se tiene una y solo una, de las expresiones: $(a > 0)$, $(a = 0)$, $(a < 0)$.

En efecto $a \in R$ implica:

$$a \in R^+ \veebar a = 0 \veebar a \in R^-$$

COR 2. $(a > 0)$ si y solo si: $(-a < 0)$

TEOR.1.13 Para cada par de reales a y b se tiene una y solo una de las expresiones:

$$a > b \qquad a = b \qquad a < b$$

Dm. Sea $a - b = x$, como $x \in R$, se tiene que x cumple una y solo una de las expresiones:

$$x \in R^{+} \qquad x = 0 \qquad (-x) \in R^{+}$$

Ahora, si $x \in R^{+}$, tenemos $a > b$. Si $x = 0$, tenemos $a = b$ y finalmente si $(-x) \in R^{+}$ tenemos que: $-(a - b) = (b - a) \in R^{+}$, o sea $b > a$.

TEOR.1.14 $(a > b)$ y $(b > c)$ implica $(a > c)$.

Dm. De inmediato tenemos: $a > b$ implica $(a - b) \in R^{+}$ y $b > c$ implica $(b - c) \in R^{+}$. Ahora como:

$$a - c = (a - b) + (b - c)$$

tenemos: $(a - c) \in R^{+}$, o sea: $a > c$.

COR. $(a < b)$ y $(b < c)$ implica $(a < c)$.

La propiedad de la relación (>) contenida en el teorema precedente, se expresa brevemente diciendo que la relación de orden (>) y (<) es transitiva.

TEOR.1.15 $(a > b)$ implica $(a + c > b + c)$

Dm. Como $a > b$ tenemos $(a - b) \in R^+$; además de:

$$(a + c) - (b + c) = (a - b)$$

resulta: $((a + c) - (b + c)) \in R^+$, o sea $a + c > b + c$.

COR 1. $(a + c > b + c)$ implica $(a > b)$

COR 2. $(a < b)$ si y solo si $(a + c < b + c)$

De acuerdo al teorema recién demostrado tenemos que dada una desigualdad se puede sumar a ambos mienbros de ella un mismo número y la desigualdad se mantiene.

TEOR.1.16 $(a > b)$ y $(c > d)$ implica $(a + c > b + d)$

Dm. De $a > b$ resulta: $a + c > b + c$

De $c > d$ resulta: $b + c > b + d$.

Finalmente por transitividad se tiene: $a + c > b + d$.

COR. $(a < b)$ y $(c < d)$ implica $(a + c < b + d)$

Este teorema se suele expresar brevemente diciendo que desigualdades del mismo sentido pueden sumarse mienbro a mienbro.

TEOR.1.17 $(a > b)$ y $(x > 0)$ implica: $ax > bx$

Dm. De $(a > b)$ resulta $(a - b) \in R^+$ y de $x > 0$ se tiene $x \in R^+$, luego: $x\,(a - b) = (ax - bx) \in R^+$. Asi tenemos: $ax > bx$.

COR. $(ax > bx)$ y $(x > 0)$ implica $(a > b)$

Este teorema se expresa brevemente diciendo que: si se multiplica una desigualdad por un número positivo la desigualdad se mantiene.

TEOR.1.18 $(a > b)$ y $(x < 0)$ implica: $ax < bx$

Dm. De $(a > b)$ resulta $(a - b) \in R^+$ y de $(x < 0)$ se tiene $x \in R^-$ y $(-x) \in R^+$ luego:

$(-x)\,(a - b) = (bx - ax) \in R^+$. Asi: $bx > ax$

COR. $(ax < bx)$ y $(x < 0)$ implica $(a > b)$

Tal como en el caso anterior, este teorema se suele expresar diciendo: si una desigualdad se multiplica por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

TEOR.1.19 $(a > b > 0) \wedge (x > y > 0)$ implica: $ax > by$

Dm. De $(a > b) \wedge (x > 0)$ tenemos $ax > bx$. Además de $(x > y) \wedge (b > 0)$ resulta: $bx > by$. Finalmente por transitividad tenemos: $ax > by$.

<u>TEOR</u>.1.20 Si $a \in R$ y $a \neq 0$, se tiene: $a^2 > 0$.

<u>Dm</u>. Como $a \neq 0$, tenemos $a \in R^+ \veebar (-a) \in R^+$. Si $a \in R^+$, resulta: $aa = a^2 \in R^+$, es decir: $a^2 > 0$. Si $(-a) \in R^+$, tenemos: $(-a)(-a) = a^2 \in R^+$, o sea: $a^2 > 0$.

<u>COR</u> 1. $(1 > 0)$. En efecto: $1 = 1^2 > 0$.

<u>COR</u> 2. Si $a \neq b$, tenemos: $a^2 + b^2 > 2ab$.

En efecto: $(a \neq b)$ implica $(a - b) \neq 0$ entonces:

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab > 0.$$

<u>TEOR</u>.1.21

$$(a > 0) \quad \text{implica} \quad (a^{-1} > 0)$$

$$(a < 0) \quad \text{implica} \quad (a^{-1} < 0)$$

<u>Dm</u>. Sea primero $(a > 0)$ entonces suponiendo $(a^{-1} < 0)$ resulta:

$$aa^{-1} < a.0 \qquad \text{o sea} \qquad 1 < 0$$

conclusión falsa, pues: $1 > 0$. Así para $(a > 0)$ debe tenerse $(a^{-1} > 0)$. De este modo tenemos demostrado que si un número a es positivo su recíproco a^{-1} también es positivo. La otra proposición se demuestra de análoga manera.

<u>TEOR</u>.1.22

$$(a > b) \quad y \quad (ab > 0) \quad \text{implica} \quad (1/a) < (1/b)$$

$$(a > b) \quad y \quad (ab < 0) \quad \text{implica} \quad (1/a) > (1/b)$$

Dm. Sea primero, $(ab > 0)$, entonces $(ab)^{-1} > 0$, y como $(a > b)$ resulta:

$$a(ab)^{-1} > b(ab)^{-1}$$
$$a(a^{-1}\, b^{-1}) > b(b^{-1}\, a^{-1})$$
$$(aa^{-1})b^{-1} > (bb^{-1})a^{-1}$$
$$(1/b) > (1/a)$$

Asi tenemos que $(a > b)$ con a y b del mismo signo implica $(1/a) < (1/b)$. De análoga manera se demuestra que: $(a > b)$ con a y b de signos contrarios implica: $(1/a) > (1/b)$.

TEOR.1.23 Si $(a < b)$, existe $x \in R$, tal que: $a < x < b$.

Dm. De $(a > b)$, se tiene: $(a/2) > (b/2)$, luego:

$$a = (a/2) + (a/2) < (a/2) + (b/2) = (a + b)/2$$

$$(a + b)/2 = (a/2) + (b/2) < (b/2) + (b/2) = b$$

Finalmente, haciendo $(a + b)/2 = x$, por transitividad tenemos: $a < x < b$.

DEF. 1.8

$$(a \geq b) \quad \text{sii} \quad (a > b) \veebar (a = b)$$

$$(a \leq b) \quad \text{sii} \quad (a < b) \veebar (a = b)$$

TEOR. 1.24 $(a \leq b)$ y $(b \geq a)$ implica $a = b$.

Dm.

$$(a \leq b) \quad \text{sii} \quad (a < b) \veebar (a = b)$$

$$(a \geq b) \quad \text{sii} \quad (a > b) \veebar (a = b)$$

Como $(a \leq b)$ y $(a \geq b)$ se cumplen simultaneamente, se presentan las siguientes alternativas:

i). $(a < b)$ y $(a > b)$

j). $(a < b)$ y $(a = b)$

k). $(a > b)$ y $(a = b)$

l). $(a = b)$ y $(a = b)$

Las tres primeras son proposiciones falsas, pués dados dos reales a y b, se cumple una y solo una de las afirmaciones:

$$a < b \qquad a = b \qquad a > b$$

Finalmente siendo verdadera $p \equiv (a = b)$ también es verdadera: $p \wedge p$. Asi tenemos que: $(a \leq b)$ y $(b \leq a)$ implica $(a = b)$.

CBSV: Hacemos notar que a estas alturas de nuestro desarrollo, tenemos el cuerpo $(R, +, *)$, estructurado con una relación de orden $(\leq)$ y en estas condiciones hemos obtenido el cuerpo ordenado de los reales: $(R, +, *, \leq)$.

Finalmente deseando que el joven estudiante logre hacer un efectivo uso de los teoremas contenidos en este acápite, le entregamos un conjunto de ejercicios para resolver, los cuales han sido cuidadosamente elegidos y ordenados en orden de dificultad creciente, si es que se puede hablar de dificultad frente a ejercicios que son de simple operatoria algebraica fundamentada en la directa aplicacion de los teoremas tratados.

1.5 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Si a, b, c y d son reales positivos, demostrar que:

a). $(a/b) + (b/a) \geqslant 2$

b). $(1/a + 1/b + 1/c) \geqslant 9/(a + b + c)$

c). $(a < b)$ y $(c > d)$ implica $(a/c) < (b/d)$

d). $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3$

e). $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$

f). $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geqslant 6abc$

g). $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$

h). $a^3 + 1/a^3 \geqslant a + 1/a \geqslant 2$

i). $(a + b)/2 \geqslant \sqrt{ab} \geqslant 2ab/(a + b)$

j). $2/(a + b) + 2/(b + c) + 2/(c + a) < 1/a + 1/b + 1/c$

k). $(\sqrt{a} + \sqrt{d})\sqrt{b} + (\sqrt{b} + \sqrt{d})\sqrt{c} + (\sqrt{c} + \sqrt{d})\sqrt{a} \leqslant$

k). $\leq (3/2)\cdot(a + b + c + d)$

l). $(a > b > 0)$ implica: $a^a\, b^b > a^b\, b^a$

m). $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$

n). $2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 15abc$

o). $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \geq 6abc$

p). $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc$

q). $(a^2+b^2)/(a+b)+(b^2+c^2)/(b+c)+(c^2+a^2)/(c+a) \geq a + b + c$

r). $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3)$

s). $(a + b - c)^2 > 4(ab - bc - ca)$.

2.- Si a, b, c y d son reales cualesquiera demostrar que:

a). $(a - b + c)(b + c - a) \geq c^2$

b). $(a + b + c)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

c). $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$

d). $(a + b + c)^2 \leq 3(ab + bc + ca)$

e). $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$

f). $4a(a + b)(a + c)(a + b + c) + b^2c^2 \geq 0$

g). $a^2 + 2ab + 3b^2 + 2a + 6b + 4 \geq 1$.

3.- Sea (a, b, c) y (x, y, z), reales tales que:
$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Demostrar que:

$$ax + by + cz \leqslant 1.$$

4.- Sea a y b reales positivos tales que: $a + b = 1$. Demostrar que: $a^4 + b^4 \geqslant 1/8$.

5.- Sea a y b reales positivos tales que: $a + b = 1$. Demostrar que:

$$(a + 1/a)^2 + (b + 1/b)^2 \geqslant 25/2.$$

6.- Sea a y b reales positivos tales que: $a^2 + b^2 = 4$. Demostrar que:

$$a^4 + b^4 + (1/a)^4 + (1/b)^4 \geqslant 17/2.$$

7.- Sean: a, b y c reales tales que: $a + b + c = 6$. Demostrar que: $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 12$.

8.- Sean a y b reales tales que: $2a + 4b = 1$. Demostrar que: $a^2 + b^2 \geqslant 1/20$.

9.- Si $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ son reales positivos tales que: $a_1 a_2 \ldots\ldots a_n = 1$, demostrar que: $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n$

10.- Sean a, b y c reales positivos, tales que la suma de dos de ellos es mayor que el tercero, demostrar:

i). $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) < abc$

j). $1/(a + b - c) + 1/(b + c - a) + 1/(c + a - b) \geqslant 1/a + 1/b + 1/c.$

11.- Demostrar que para todo entero positivo n, se tiene:

a). $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$

b). $\frac{1}{2} < \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}} < 1$

c). $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots (n-1)\, n \leq (n+1)^n / 2^n$

d). $(1 + 1/n)^n < (1 + 1/n + 1)^{n+1}$

e). $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots (n-1)\, n \leq n^n / 2^{n-1}$

12.- Si a y b son reales positivos diferentes y n es entero positivo demostrar que:

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} > \sqrt[n]{a^{n+1} + b^{n+1}}$$

13.- Sean a, b c y d reales positivos, tales que: $a/b < c/d$. Demostrar: $(a/b) < (a + c) / (b + d) < (c/d)$

14.- Demostrar que para todo $a > 0$, se tiene:

$$a^3 + 1/a^3 \geq a^2 + 1/a^2$$

15.- Demostrar que: $ab > 0$ implica

$$(a > 0 \text{ y } b > 0) \vee (a < 0 \text{ y } b < 0)$$

16.- Sea $a > 0$ demostrar que:

$$x^2 < a \quad \text{si y solo si} \quad -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$

1.6 LOS REALES: UN CUERPO COMPLETO.

Todos los axiomas precedentes, vale decir, los axiomas de adición, de multiplicación, de distribución y de orden, son indudablemente muy familiares para los jovenes estudiantes de secundaria. Creemos que no ocurre lo mismo con el llamado axioma de completitud o axioma de completividad, que es el que realmente permite diferenciar al campo de los números reales de cualquier otro campo ordenado.

Con el propósito de presentar en forma adecuada este axioma de completitud, debemos introducir previamente algunas nociones de fundamental importancia.

DEF. 1.9 Un conjunto S de números reales acotado superiormente, si y solo si, existe un real b, tal que:

$$\forall\, x \in S \qquad \text{se tiene:} \qquad x \leqslant b$$

El número b se llama cota superior del conjunto S.

EJEM. 1.1 El conjunto R^- de los reales negativos es acotado superiormente. En efecto: $\forall\, x \in R^-$ se tiene: $x \leqslant 0$. Asi el número 0 es cota superior de R^-.

De acuerdo a la definición anterior tenemos si un conjunto S de números reales es acotado superiormente, ningún número S es mayor que la cota superior b. Además si b es cota superior de S, todo número real c mayor que b, también es cota superior de S, pues: ($\forall x \in S,\ x \leqslant b$) y ($b < c$) implican: ($\forall x \in S,\quad x \leqslant c$).

Finalmente es conveniente observar que hay conjuntos de números reales que no son acotados superiormente. Tal cosa ocurre, por ejemplo, con el conjunto R.

EJEM. 1.2 El conjunto R de los reales no es acotado superiormente.

En efecto supongamos que R es acotado superiormente, entonces existe un real r, tal que:

$$\forall x \in R \qquad \text{se tiene:} \qquad x \leqslant r.$$

Particularmente tomando $x = r + 1$, resulta:
$(r + 1) \leqslant r$ y entonces $1 \leqslant 0$. Conclusión falsa, pues $1 > 0$. Asi el conjunto R de los reales no es acotado superiormente.

DEF. 1.10 Un conjunto S de números reales es acotado inferiormente, si y solo si, existe un real a, tal que:

$$\forall x \in S \qquad \text{se tiene:} \qquad x \geqslant a$$

El número a se llama cota inferior del conjunto S.

EJEM. 1.3 El conjunto R^+ de los reales positivos es acotado inferiormente. En efecto: $\forall x \in R^+$ se tiene: $x \geqslant 0$. Asi el número 0 es conta inferior de R^+.

Obviamente hay conjuntos de reales que no son acotados inferiormente. Veamos un ejemplo.

EJEM. 1.4 El conjunto de los reales no es acotado inferiormente.

En efecto supongamos que R es acotado inferiormente, entonces existe un real r, tal que:

$$\forall\, x \in R \qquad \text{se tiene:} \qquad x \geqslant r.$$

Particularmente tomando: $x = r - 1$, resulta: $(r - 1) \geqslant r$ y entonces $(-1) \geqslant 0$, o sea: $1 \leqslant 0$. Conclusión falsa , pues $1 > 0$. Asi el conjunto R de los reales no es acotado inferiormente.

DEF. 1.11 Un conjunto S de números reales es acotado, si es acotado superiormente e inferiormente.

Como ejemplos de conjuntos acotados podemos mencionar los intervalos:

$$(a,b) = (x \mid a < x < b)$$

$$[a,b] = (x \mid a \leqslant x \leqslant b)$$

$$(a,b] = (x \mid x < a \leqslant b)$$

$$[a,b) = (x \mid x \leqslant a < b)$$

En todos ellos el número a es cota inferior y el número b es cota superior.

DEF. 1.12 Un número real M es supremo de un conjunto S, no vacío de números reales, si y solo si:

1). $\forall\, x \in S$ se tiene: $x \leq M$

2). $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in S$ tal que: $x > M - \varepsilon$

Para indicar que M es supremo del conjunto S, pondremos: $M = \sup.(S)$.

EJEM.1.5 El conjunto $S = \{ r \in R \mid r \leq 0 \}$ tiene como supremo el número $M = 0$.

En efecto, de acuerdo a la definición de S, tenemos: $\forall\, r \in S$ se cumple $r \leq M = 0$.

Además tomado $\varepsilon > 0$, existe $r \in S$ tal que: $r > M - \varepsilon$, pues tomando $r = 0$ resulta: $0 > M - \varepsilon = -\varepsilon$

EJEM.1.6 El conjunto $S = \{ r \in R \mid r < 0 \}$ tiene como supremo el número $M = 0$.

En efecto, de acuerdo a la definición de S, se verifica: $\forall\, r \in S$ se tiene: $r \leq M = 0$.

Además tomado $\varepsilon > 0$, tenemos: $-\varepsilon < 0$, entonces para $r = -\frac{\varepsilon}{2}$ resulta: $\exists\, r = -\frac{\varepsilon}{2} \in S$ tal que: $r = -\frac{\varepsilon}{2} > M - \varepsilon = -\varepsilon$
Así $M = 0$ es supremo de S.

TEOR.1.25 Sea M el supremo de un conjunto no vacío S, entonces:

i). M es cota superior de S

j). M es la menor cota superior de S.

Dm.

i). Como M es supremo de S, tenemos que: $\forall\ x \in S$ se tiene: $x \leqslant M$. Luego M es cota superior de S.

j). Supongamos que S admite una cota superior $\bar{M} < M$. Entonces, como M es supremo tomado $\mathcal{E} = M - \bar{M} > 0$, existe : $x \in S$, tal que:

$$x > M - \mathcal{E} = M - (M - \bar{M}) = \bar{M}$$

resultado que contradice el hecho de ser $\bar{M}$ cota superior de S. Así el supremo M de un conjunto S es la menor de sus cotas superiores.

COR: Si M es supremo de S y M_o es cota superior de S, siempre se tiene: $M \leqslant M_o$

De este teorema se infiere que si un conjunto S, tiene supremo éste debe ser único. De todos modos para no dejar ninguna duda al respecto, demostraremos esta afirmación.

TEOR.1.26 Si un conjunto S de números reales tiene supremo, éste es único.

Dm. Supongamos que el conjunto no vacío S de reales, tenga dos supremos M_1 y M_2, entonces:

$M_1 \geqslant M_2$ por ser M_1 cota y M_2 supremo

$M_1 \leqslant M_2$ por ser M_2 cota y M_1 supremo

luego $M_1 = M_2$. Asi, si el conjunto S, tiene supremo, él es único.

TEOR.1.27 Si k es una cota superior del conjunto $A \subset R$, y además $k \in A$, entonces sup $(A) = k$.

Dm. Como k es cota superior de A, tenemos:

1). $\forall\ x \in A$, se tiene: $x \leqslant k$.

Ahora tomado, arbitrariamente $\varepsilon > 0$, siempre se tiene $k > k - \varepsilon$ y como $k \in A$, resulta que:

2). $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ k \in A$ tal que: $k > M - \varepsilon = k - \varepsilon$

Asi tenemos demostrado que: $M = \sup\ (A) = k$.

EJEM.1.7 Los intervalos abierto y cerrado que se indican:

$$(a,b) = (\ x \mid a < x < b\ )$$
$$[a,b] = (\ x \mid a \leqslant x \leqslant b\ )$$

tienen, ambos como supremo al número b. Pero en el primer conjunto, b no es elemento del intervalo y en el segundo, b es elemento del conjunto.

<u>DEF</u>. 1.13 Un número real m es infimo de un conjunto S, no vacío de números reales, si y solo si:

1). $\forall\, x \in S$ se tiene: $x \geqslant m$

2). $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, x \in S$ tal que: $x < m + \varepsilon$

Para indicar que m es infimo del conjunto S, pondremos: $m = \inf(S)$.

<u>EJEM</u>.1.8 El conjunto $S = (r \in R \mid r \geqslant 1)$ tiene como infimo el número: $m = 1$.

En efecto, de acuerdo a la definición de S, tenemos: $\forall\, r \in S$ se cumple $r \geqslant m = 1$.

Además tomado $\varepsilon > 0$, existe $r \in S$ tal que: $r < 1 + \varepsilon$, pues tomado $r = 1$ resulta: $1 < m + \varepsilon$

<u>EJEM</u>.1.9 El conjunto $S = (r \in R \mid r > 1)$ tiene como infimo el número: $m = 1$.

En efecto, de acuerdo a la definición de S, se verifica: $\forall\, r \in S$ se tiene: $r \geqslant m = 1$.

Además tomado $\varepsilon > 0$ existe $r \in S$ tal que: $r < 1 + \varepsilon$. En efecto basta tomar $r = 1 + \varepsilon/2$. Asi $m = 1$ es infimo de S.

<u>TEOR</u>.1.27 Sea m el infimo de un conjunto no vacío S, enton-

ces:

i). m es cota inferior de S

j). m es lamayor cota inferior de S.

Dm. Análoga a la dada en el teorema 1.25. Se deja como ejercicio.

COR: Si m es infimo de S y m_o es cota inferior de S, siempre se tiene: $m_o \leq m$

De este teorema se deduce sin dificultad que si un conjunto S, tiene infimo, éste debe ser único.

TEOR.1.28 Si un conjunto S de números reales tiene infimo, éste debe ser único.

Dm. Es análoga a la dada en el teorema 1.26. Se deja como ejercicio.

TEOR.1.29 Si h es cota inferior del conjunto $A \subset R$ y además $h \in A$, entonces $\inf(A) = h$.

Dm. Análoga a la dada en el teorema 1.27. Se deja como ejercicio.

EJEM.1.10 Los intervalos semi-abierto y semi-cerrado por la izquierda, que se indican:

$$(a,b] = (x \mid a < x \leqslant b)$$
$$[a,b) = (x \mid a \leqslant x < b)$$

ambos tienen como ínfimo al número a. En el primero de ellos a no es elemento del conjunto y en el segundo a pertenece al conjunto.

EJEM.1.11 Determinar el ínfimo del conjunto:

$$S = \{2/1,\ 3/2,\ 4/3, \ldots .(n+1)/n, \ldots .\}$$

SOL. Afirmamos que el ínfimo es: $m = 1$. Para probar esta afirmación debemos mostrar que:

1). $\forall\, x \in S$ se tiene: $x \geqslant m$

2). $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, x \in S$ tal que: $x < m + \varepsilon$

La condición (1) es inmediata pues, para todo natural n se tiene: $n + 1 > n$, es decir: $(n + 1)/n > 1$, o sea: para todo $x \in S$, se tiene: $x \geqslant 1$.

Para la condición (2) tomemos ε positivo arbitrario. Entonces hay un entero positivo n_o tal que $(1/n_o) < \varepsilon$. Así:

$$m + \varepsilon = 1 + \varepsilon > 1 + 1/n_o = (n_o + 1)/n_o = x \in S$$

Es decir, hay $x = (n_o + 1)/n_o$ en S, tal que: $x < m + \varepsilon$

OBSV: Introducidas las nociones de ínfimo y de supremo estamos en condiciones de dar el llamado axioma de completitud, que como hemos dicho es el que permite diferenciar el campo de los reales de otros cuerpos ordenados.

E). Axioma de Completitud.

C1). Todo conjunto S de números reales, no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

OBSV: Aceptado el axioma de completitud no es dificil demostrar que todo conjunto no vacío de números reales, acotado inferiormente tiene ínfimo. Obviamente puede tomarse ésta última afirmación, como axioma de completitud y en tal caso la propiedad contenida en (C1) pasa a ser un teorema.

TEOR.1.30 Todo conjunto S de números reales, no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.

Dm. Sea $S^- = (-x \mid x \in S)$. Como S es acotado inferiormente, tenemos que existe un número h, tal que:

$$\forall\, x \in S \quad \text{se tiene:} \quad x \geqslant h$$

Ahora como $(-x) \in S^-$ si y solo si: $x \in S$, tenemos:

$$\forall\, (-x) \in S^- \quad \text{se tiene:} \quad -x \leqslant -h.$$

Asi el conjunto S^- es acotado superiormente. Ahora como $S^- \neq \emptyset$, tenemos que S^- tiene un supremo M. Haremos ver que (-M) es ínfimo de S. Como M es supremo de S^- ocurre que:

i). $\forall\, (-x) \in S^-$ se tiene: $(-x) \leqslant M$

2). $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ (-x_o) \in S^- \quad$ tal que: $\quad (-x_o) > M - \varepsilon$

y considerando que $(-x) \in S^-$ si y solo si $x \in S$, queda:

1). $\forall\ x \in S \quad$ se tiene: $\quad x \geqslant -M$

2). $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ x_o \in S \quad$ tal que: $\quad x_o < -M + \varepsilon$

Estas expresiones garantizan que $(-M)$ es ínfimo de S.

TEOR.1.31 Si a y b son reales positivos, existe un entero positivo n, tal que: $na > b$. (Propiedad Arquimediana de R)

Dm. Supongamos que no existe n natural tal que: $na > b$, entonces: $na \leqslant b$ para cada $n \in N$. Es decir, el conjunto $S = \{a, 2a, 3a, \ldots.\}$ es acotado superiormente. Sea k el supremo de S. Se tiene entonces: $na \leqslant k$ para todo $n \in N$, luego: $(n + 1)a \leqslant k$ para cada $n \in N$. Ahora $(n + 1)a \leqslant k$, implica $na \leqslant k - a$ para todo n natural. Asi $(k - a)$ es cota superior de S y además, es menor que el supremo k. Esta contradicción nos garantiza la existencia de n entero positivo tal que: $na > b$.

Esta propiedad de los reales se conoce con el nombre de Propiedad Arquimediana de R.

COR.1 Si x es un real cualquiera, existe un entero positivo n, tal que: $n > x$.

En efecto, si $x \leqslant 0$, basta tomar $n = 1$. Si $x > 0$, hasta tomar en el teorema $na > b$, el número $a = 1$ y $b = x$, pues entonces queda: $n > x$.

COR 2. Si ε es positivo arbitrario, existe un entero positivo n, tal que: $(1/n < \varepsilon)$.

En efecto, por el corolario anterior existe n, tal que: $(n > 1/\varepsilon)$, entonces $(1/n < \varepsilon)$.

COR 3. Si x es un real cualquiera, existen enteros m y n, tales que: $m < x < n$.

En efecto, por corolario 1, existen enteros positivos n y p, tales que: $n > x$ y $p > -x$, luego: $-p < x < n$. Finalmente, tomando $-p = m$, queda: $m < x < n$.

EJEM.1.12 Demostrar que el conjunto de los enteros positivos no es acotado superiormente.

SOL. Supongamos que el conjunto N de los enteros positivos es acotado superiormente. Entonces existe un número $K > 0$, tal que: $n \leq K$ paratodo $n \in N$.

Por otra parte, tomados los números 1 y K, la propiedad arquimediana de los reales nos garantiza la existencia de un natural $n_0 \in N$, tal que: $n_0 \cdot 1 = n_0 > K$, expresión que contradice la afirmación: $n \leq K$ para todo $n \in N$.

Esta contradicción nos garantiza que el conjunto N de los enteros positivos no es acotado superiormente.

1.7 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Sea k una cota superior para el conjunto A. Si $k \in A$, se tiene: $k = \sup(A)$.

2.- Determine el supremo de los conjuntos:

$A = (t \in R \mid t = 1 + 6x - x^2)$

$B = (t \in R \mid t = 2 + 6x - 3x^2)$

$C = (t \in R \mid t = -19 + 12x - 2x^2)$

$D = (t \in R \mid t = 2x - x^2)$

3.- Sea h cota inferior del conjunto A. Si $h \in A$, demuestre que: $h = \inf(A)$.

4.- Determine el ínfimo de los conjuntos:

$X = (u \in R \mid u = x^2 + 4x + 6)$

$Y = (u \in R \mid u = x^2 - 4x + 29)$

$Z = (u \in R \mid u = x^2 - 5x + 6)$

5.- Sea $A = (x \mid x \in R)$, con $m = \inf(A)$ y $M = \sup(A)$. Si $\bar{A} = (-x \mid x \in A)$, demostrar que: $\inf(\bar{A}) = -M$ y $\sup(\bar{A}) = -m$.

6.- Sea A un conjunto de reales positivos, tales que: $\sup(A) = M$ e $\inf(A) = m \neq 0$. Si $A_o = (1/x \mid x \in A)$, demostrar que: $\sup(A_o) = 1/m$ e $\inf(A_o) = 1/M$.

7.- Si A y B son conjuntos no vacíos y acotados de reales con $A \subset B$, demuestre: $\sup(A) \leq \sup(B)$; $\inf(A) \leq \inf(B)$.

8.- Sean A y B conjuntos de números reales y $k \in R$. Se define, los conjuntos:

$$A + B = (a + b \mid a \in A \wedge b \in B)$$
$$A \cdot B = (ab \mid a \in A \wedge b \in B)$$
$$kA = (ka \mid a \in A)$$
$$A + k = (a + k \mid a \in A)$$

i). Si A y B son acotados superiormente, demuestre que: $A + B$ también lo es y $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

j). Si A y B son no negativos y acotados superiormente, también lo es $A \cdot B$ y: $\sup(A \cdot B) = (\sup A)(\sup B)$.

k). Si A es acotado superiormente y $k > 0$. Demuestre que: kA también lo es y: $\sup(kA) = k \sup(A)$.

l). Si A es acotado superiormente, también lo es $(A+k)$ y además: $\sup(A + k) = k + \sup(A)$.

9.- Sea $A \subseteq X \subset R$, donde X es conjunto acotado. Demostrar que A es acotado. Demostrar que el conjunto vacío $\emptyset$, es acotado. Demostrar que $\emptyset$ no tiene ínfimo, ni supremo.

1.8 VALOR ABSOLUTO EN EL CUERPO R.

Terminaremos esta introducción axiomática del cuerpo de los reales, presentando la noción de valor absoluto en R, idea de notable importancia en matematicas tanto por su desempeño funcional, como por el hecho de dar origen a una de las métricas más simples y de más frecuente aplicación.

DEF. 1.14 El valor absoluto de un real a, es el número real: $|a|$ dado por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

EJEM.1.13 Resolver la ecuación: $|3x + 1| = 7 - x$.

SOL: Necesariamente debe tenerse: $7 - x \geqslant 0$, de donde resulta: $x \leqslant 7$. Además:

$$|3x + 1| = 3x + 1 \qquad \text{para} \qquad 3x + 1 \geqslant 0$$

$$|3x + 1| = -(3x + 1) \qquad \text{para} \qquad 3x + 1 < 0$$

luego:

$$3x + 1 = 7 - x \qquad \text{condicionado por} \qquad (x \leqslant 7\ ;\ x \geqslant -1/3)$$

$$-(3x + 1) = 7 - x \qquad \text{condicionado por} \qquad (x \leqslant 7\ ;\ x < -1/3)$$

La primera nos da: $x = 6/4 = 3/2$ con: $-1/3 < 3/2 < 7$

La segunda nos da: $x = -4$ con: $-4 < -1/3$

TEOR.1.32

i). $|a| \geqslant 0 \qquad \forall a \in R$

j). $|a|^2 = a^2 \qquad \forall a \in R$

k). $-|a| \leqslant a \leqslant |a| \qquad \forall a \in R$

Dm.

i). Si $a \geqslant 0$, tenemos $|a| = a \geqslant 0$. Si $a < 0$, resulta: $|a| = -a > 0$. Asi siempre se tiene: $|a| \geqslant 0$.

j). Si $a \geqslant 0$, tenemos $|a| = a$ y luego: $|a|^2 = aa = a^2$. Cuando $a < 0$, resulta: $|a| = -a$ y $|a|^2 = (-a)(-a) = a^2$.

k). Sea primero $a \geqslant 0$, entonces $|a| = a$ y $-|a| = -a \leqslant 0$. Asi tenemos: $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

Suponiendo ahora $a < 0$, tenemos: $|a| = -a$, luego: $-|a| = a < 0 < |a|$. Asi en este caso también resulta: $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

TEOR.1.33

i). $|ab| = |a|\,|b|$

j). $|a/b| = |a|/|b|$ con $b \neq 0$

Dm.

i). Si a y b son positivos tenemos: $|a| = a$, $|b| = b$ y entonces; $|ab| = ab = |a||b|$.

Si a y b son negativos: $|a| = (-a)$ y $|b| = (-b)$

y entonces: $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a|\,|b|$.

Si $a > 0$ y $b < 0$, tenemos: $|a| = a$ y $|b| = (-b)$ entonces: $|ab| = -ab = a(-b) = |a|\,|b|$.

Si $a < 0$ y $b > 0$, tenemos: $|a| = (-a)$ y $|b| = b$ luego: $|ab| = -ab = (-a)b = |a|\,|b|$.

Finalmente, si uno o ambos números son cero es inmediato que: $|ab| = 0 = |a|\,|b|$.

j). De inmediato resulta: $|a| = |(a/b)b| = |a/b|\,|b|$ luego para $b \neq 0$, resulta: $|a/b| = |a| \;/\; |b|$.

<u>COR</u>. $|-a| = |a| \quad \wedge \quad |a^{-1}| = |a|^{-1} \quad \forall a \neq 0$

<u>TEOR</u>.1.34 $|a| < b$ si y solo si: $-b < a < b$

<u>Dm</u>. Sea primero $|a| < b$, entonces: $-|a| > -b$ y luego:

$$-b < -|a| \leqslant a \leqslant |a| < b$$

Recíprocamente sea: $-b < a < b$. Entonces: $-a < b$ y $a < b$. Además, si $a \geqslant 0$, tenemos: $|a| = a < b$.

Contrariamente si $a < 0$, tenemos: $|a| = -a < b$.

Asi: $-b < a < b$ implica $|a| < b$.

<u>COR</u>. $|a| > b$ sii $(a > b) \veebar (a < -b)$

<u>EJEM</u>.1.14 Determinar para que valores reales de x, se tiene: $|x + 5| < 2x - 3$.

SOL. De acuerdo al teorema precedente la inecuación propuesta se puede expresar por:

$$-(2x - 3) < x + 5 \leqslant 2x - 3$$

Asi tenemos las inecuaciones simultáneas:

$$\begin{array}{lcl} 2x - 3 > x + 5 & & x > 8 \\ & \text{que dan} & \\ -2x + 3 < x + 5 & & x > -2/3 \end{array}$$

Luego la solución final es: $S = \{ x \in R \mid x > 8)$

EJEM.1.15 Determinar para que valores reales de x, se tiene: $| 4x - 3 | > x + 2$.

SOL. La inecuación se expresa por las inecuaciones:

$$4x - 3 < -(x + 2) \quad \text{v} \quad 4x - 3 > (x + 2)$$

La primera de ellas da: $x < 1/5$ y la segunda da: $x > 5/3$. Asi la solución es: $S = \{ x \mid x \in (-\infty, 1/5) \cup (5/3 , \infty) \}$

TEOR.1.35 $\qquad | a + b | \leqslant |a| + |b|$

Dm. De acuerdo al teorema 1.32 (k), tenemos:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a| \quad \text{y} \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

luego:

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant (|a| + |b|)$$

y entonces por el teorema anterior, resulta:

$$| a + b | \leqslant |a| + |b|$$

COR. $|a - b| \leqslant |a| + |b|$

En efecto: $|a - b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |b|$

TEOR.1.36 $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$

Dm. De inmediato: $|a| = |b + (a - b)| \leqslant |b| + |a - b|$

Asi: $|a| - |b| \leqslant |a - b|$ (1)

Análogamente: $|b| - |a| \leqslant |b - a|$

luego: $-|a - b| \leqslant |a| - |b|$ (2)

De (1) y (2) queda: $-|a - b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a - b.|$

O sea:

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$$

COR. $|a| - |b| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|$

TEOR.1.37 $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a + b|$

Dm. En la expresión: $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ tomando $x = -a$ e $y = a + b$, se tiene: $|-a + a + b| \leqslant |-a| + |a + b|$

O sea: $|b| - |a| \leqslant |a + b|$

Análogamente: $|a| - |b| \leqslant |a + b|$

luego: $-|a + b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a + b|$

y entonces:

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a + b|$$

1.9 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Resolver las ecuaciones:

a). $|3x - 1| = 2x + 5$

b). $|x - 1| = |x - 4|$

c). $|x - 1| + |x - 5| = 4.$

2.- Demostrar que: $|a^{-1}| = |a|^{-1} \quad \forall a \neq 0$

3.- Resolver las inecuaciones:

a). $x - |x| > 2$

b). $|x - 2| \leqslant 3$

c). $|x + 3| \geqslant 2$

d). $|x - 2| > x - 4$

e). $|x - 4| \leqslant 2 - x$

f). $|x + 2| > |3 - x|$

g). $|x - 7| < 5 < |5x - 25|$

4.- Demostrar que: $a \leqslant x \leqslant b$ si y solo si:

$$|x - (a + b)/2| \leqslant (b - a)/2$$

5.- Un conjunto $S = \{x \mid x \in R\}$ está acotado si y solo si: $|x| < a$ para todo $x \in S$.

6.- Demostrar que: $|x| = \sqrt{x^2}$

7.- Aprovechando que: $|x| = \sqrt{x^2}$, demostrar:

$$|xy| = |x||y| \qquad |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

8.- Representar en un plano cartesiano, los conjuntos:

$A = ((x,y) \mid |x| + |y| = 1)$

$B = ((x,y) \mid |x| + |y| \leq 1)$

$C = ((x,y) \mid |x| - |y| = 1)$

$D = ((x,y) \mid |x| - |y| \leq 1)$

9.- Representar en un plano cartesiano las curvas:

$y = |x - 2| + (1/2)|x - 5|$

$y = |x - 3| - 2|x + 1| + 2|x| - x + 1$

10.- Sea $A = \{ x \in R \mid |x + 1| + |x| < 2 \}$, determinar sup (A) e inf (A).

11.- Sea A un conjunto de reales, tales que: sup$(A) = M$ e inf $(A) = m$. Si $A_o = (|x| \mid x \in A)$ demostrar que: $\sup(A_o) = \text{máx}\,(|m|, |M|)$.

12.- Para cada pareja de reales: x e y, se define:

$$\text{máx}\,(x,y) = \begin{cases} x & \text{sii} \quad x \geqslant y \\ y & \text{sii} \quad y \geqslant x \end{cases}$$

Demostrar que: $|x| = \text{máx}(x, -x)$

$$\text{máx}\,(x,y) = (x + y + |y - x|)/2$$

$$\text{mín}\,(x,y) = (x + y - |y - x|)/2$$

Obviamente el lector debe definir: min (x,y).

D E S I G U A L D A D E S.

2.1 DESIGUALDADES.

Hablando con generalidad, se llama desigualdad toda expresion de las formas:

$$(a < b) \qquad (a \leqslant b) \qquad (a > b) \qquad (a \geqslant b)$$

donde a y b son números reales.

Al tratar la axiomática de orden en los reales, implícitamente quedan, entre sus consecuencias, los teoremas que rigen la mecánica operatoria con desigualdades. Estos teoremas pueden resumirse fundamentalmente en las proposiciones siguientes:

01).- Para cada $a \in R$ y $b \in R$ se tiene una y solo una de las expresiones:

$$a < b \qquad a = b \qquad a > b$$

02).- Para cada a, b, c en R, se tiene que:

$$a < b \quad y \quad b < c \qquad \text{implica:} \quad a < c$$

(3).- Para cada a, b, c en R, se tiene que:

$$a < b \qquad \text{implica} \qquad a + c < b + c$$

(4).- Para cada a, b, c en R se tiene que:

$$a < b \quad y \quad 0 < c \qquad \text{implica} \qquad ac < bc$$

En rigor y buscando simplificar la introducción de una relación de orden en el cuerpo $(R, +, *)$, es usual tomar las proposiciones: (01), (02), (03) y (04) como axiomas, pués ademas de ser independientes y compatibles se puede obtener desde ellas y sin dificultad todos los teoremas ya tratados sobre desigualdades en R. (Véase teorema 1.13 y siguientes).

Definida la relación de orden: "menor que" $(<)$ mediante la axiomática precedente, se puede introducir sin dificultad las relaciones: "mayor que" $(>)$, "menor o igual que" $(\leqslant)$ y "mayor o igual que" $(\geqslant)$, mediante la definición:

$$a > b \qquad \text{significa} \qquad b < a$$
$$a \leqslant b \qquad \text{significa} \qquad (a < b) \veebar (a = b)$$
$$a \geqslant b \qquad \text{significa} \qquad (a > b) \veebar (a = b)$$

Con estas ideas queda tratada la parte medular de las desigualdades. Ahora, nosotros pretendemos presentar algunas desigualdades de frecuente uso en el campo de las matemáticas.

DEF. 2.1 Dados n números reales positivos: a_1, a_2, a_3, ...
a_n, llamaremos:

i). Medio aritmético, al número:

$$A = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n)/n \qquad \frac{a+b}{2}$$

j). Medio geométrico, al número:

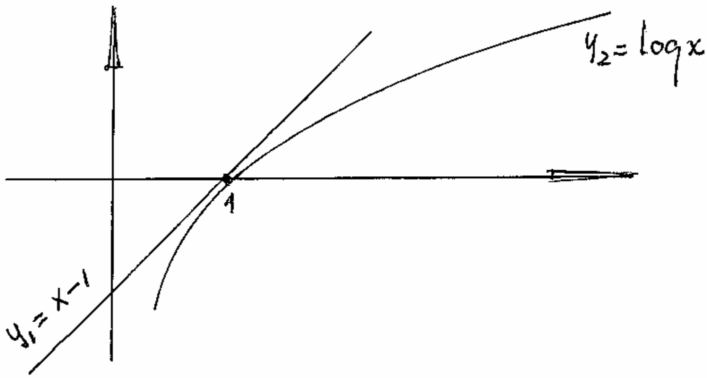
$$G = \sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_n} \qquad \sqrt{ab}$$

k). Medio armónico, al número:

$$H = n \,/\, (1/a_1 + 1/a_2 + \ldots\ldots + 1/a_n) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

OBSV: A continuación nos proponemos demostrar que: $A \geqslant G \geqslant H$.
Buscando una demostración simple, es decir de clara exposición y fácil captación haremos uso de la siguiente importante desigualdad:

$$\log x \leqslant x - 1 \qquad \forall\ x > 0.$$



La veracidad de esta proposición puede aceptarse considerando que la recta: $y_1 = x - 1$ es la tangente a la curva: $y_2 = \log x$ en el punto $(1,0)$ y que atendiendo al gráfico de ambos, siempre se tiene: $y_1 \geqslant y_2$. La igualdad sólo se cumple para: $x = 1$. Así nosotros aceptaremos que:

$$\log x \leqslant x - 1 \qquad \forall\, x > 0.$$

<u>TEOR</u>.2.1 Sean: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$, reales positivos, entonces: $A \geqslant G \geqslant H$.

<u>Dm</u>. Con $A = (a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n) / n$, definimos los números:

$$x_1 = a_1/A \;,\quad x_2 = a_2/A \;,\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_n = a_n/A$$

Como estos números x_j son todos positivos, aprovechando la desigualdad: $\log x \leqslant (x - 1) \quad \forall\, x > 0$, tenemos:

$$\log (a_1 /A) \leqslant (a_1 /A) - 1$$

$$\log (a_2 /A) \leqslant (a_2 /A) - 1$$

$$\log (a_n /A) \leqslant (a_n /A) - 1$$

de donde sumando resulta:

$$\log ((a_1\, a_2 \cdots\cdots a_n) / A^n) \leqslant \frac{1}{A} (a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n) - n$$

o sea:

$$\log ((a_1\, a_2 \cdots\cdots a_n) / A^n) \leqslant n - n = 0$$

entonces:

$$(a_1\ a_2 \cdots\cdots a_n) \ / \ A^n \leqslant 1$$

luego:

$$\sqrt[n]{a_1\ a_2\ a_3 \cdots\cdots a_n} \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \ / \ n \qquad (1)$$

Asi tenemos demostrado que: $A \geqslant G$. Para probar que: $G \geqslant H$, consideremos los números:

$$z_1 = 1 \ / \ a_1 \ , \ z_2 = 1 \ / \ a_2 \ , \cdots\cdots, \ z_n = 1 \ / \ a_n$$

entonces como: $A \geqslant G$, tenemos:

$$(z_1 + z_2 + z_3 + \cdots\cdots + z_n)/n \geqslant \sqrt[n]{z_1\ z_2\ z_3 \cdots\cdots z_n}$$

o sea:

$$(1/a_1 + 1/a_2 + \cdots\cdots + 1/a_n) \ / \ n \geqslant \sqrt[n]{1/a_1 \cdots\cdots 1/a_n}$$

luego:

$$H = \frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \cdots\cdots + 1/a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1\ a_2 \cdots\cdots a_n} = G \qquad (2)$$

Finalmente, resumiendo (1) y (2), tenemos: $A \geqslant G \geqslant H$.

COR. Si a, b, c son reales positivos diferentes, se tiene:

$$(a + b) \ / \ 2 > \sqrt{ab} > 2ab \ / \ (a + b)$$

$$(a + b + c) \ / \ 3 > \sqrt[3]{abc} > 3abc \ / \ (ab + bc + ca)$$

EJEM.2.1 Si a, b, c son reales positivos, demostrar que:

$$(a^4 + b^4 + c^4)\ (ab + bc + ca) \geqslant 9a^2b^2c^2$$

SOL. Aprovechando que: $A \geqslant G$, tenemos:

$$(a^4 + b^4 + c^4)/3 \geqslant \sqrt[3]{a^4\ b^4\ c^4}$$

$$(ab + bc + ca)/3 \geqslant \sqrt[3]{(ab)\ (bc)\ (ca)}$$

y multiplicando mienbro a mienbro queda:

$$(a^4 + b^4 + c^4)\ (ab + bc + ca) \geqslant 9a^2b^2c^2$$

EJEM.2.2 Si a, b, c son reales positivos diferentes, demostrar que:

$$\frac{9}{a+b+c} \leqslant \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

SOL. Aplicando a los números: $x_1 = a + b$, $x_2 = b + c$ y $x_3 = c + a$, el teorema $A \geqslant H$, tenemos:

$$\frac{2(a+b+c)}{3} \geqslant \frac{3}{1/(a+b) + 1/(b+c) + 1/(c+a)}$$

de donde:

$$\frac{9}{a+b+c} \leqslant \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}$$

Aplicando nuevamente el teorema $A \geqslant H$, a las parejas (a,b) , (b,c) y (ca) resulta:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{1/a+1/b} \qquad \frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2}\ (1/a + 1/b)$$

$$\frac{b+c}{2} \geqslant \frac{2}{1/b+1/c} \qquad \frac{2}{b+c} \leqslant \frac{1}{2}(1/b + 1/c)$$

$$\frac{c+a}{2} \geqslant \frac{2}{1/c+1/a} \qquad \frac{2}{c+a} \leqslant \frac{1}{2}(1/c + 1/a)$$

finalmente sumando mienbro a mienbro, obtenemos:

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

<u>TEOR</u>.2.2 Para todo número real positivo: $a \neq 1$, se tiene:

$$\frac{a^{n+1} - 1}{n+1} > \frac{a^n - 1}{n} \qquad 0 < a \neq 1.$$

<u>Dm</u>. Efectuando el cuociente que se indica, tenemos:

$$\frac{a^{n+1} - 1}{a-1} = a^n + a^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a^2 + a + 1$$

Suponiendo primero: $a > 1$, resulta que a^n es el mayor de los números del segundo mienbro, luego:

$$(a^{n+1} - 1) \leqslant (a - 1)(a^n + a^n + \ldots\ldots + a^n + a^n)$$

$$(a^{n+1} - 1) < (a - 1)(n + 1)a^n$$

$$(a^{n+1} - 1) < (n + 1)a^{n+1} - (n + 1)a^n$$

$$(n + 1)a^n - 1 < na^{n+1}$$

$$(n + 1)a^n - (n + 1) < na^{n+1} - n$$

$$(n + 1)(a^n - 1) < n(a^{n+1} - 1)$$

$$\frac{a^n - 1}{n} < \frac{a^{n+1} - 1}{n + 1} \qquad a > 1$$

Suponiendo ahora: $0 < a < 1$, la igualdad inicial nos dá:

$$a^{n+1} - 1 < (a - 1)\,(n + 1)a^n$$

y procediendo de manera análoga se reencuentra el resultado obtenido.

COR.1 Si $n > m$ son enteros positivos se tiene:

$$\frac{a^n - 1}{n} > \frac{a^m - 1}{m} \qquad 0 < a \neq 1$$

En efecto: $m < (m + 1) < (m + 2) < \ldots\ldots < n$.

COR.2 Si $p > q$ son racionales positivos se tiene:

$$\frac{a^p - 1}{p} > \frac{a^q - 1}{q} \qquad 0 < a \neq 1$$

En efecto llamado m al mínimo común múltiplo de los denominadores de p y q, los números: mp y mq son enteros positivos, luego para todo: $b > 0$ y $b \neq 1$, se tiene:

$$\frac{b^{mp} - 1}{mp} > \frac{b^{mq} - 1}{mq} \qquad 0 < b \neq 1$$

finalmente tomando b, tal que $b^m = a$, obtenemos:

$$\frac{a^p - 1}{p} > \frac{a^q - 1}{q} \qquad 0 < a \neq 1$$

EJEM.2.3 Si m y n son enteros tales que: $n > m > 0$ y $0 < a \neq 1$, demostrar que:

$$n(\sqrt{a} - 1) < m(\sqrt{a} - 1).$$

SOL. Si $p > q > 0$ son racionales, sabemos que:

$$\frac{a^p - 1}{p} > \frac{a^q - 1}{q} \qquad 0 < a \neq 1$$

Ahora de $n > m > 0$, resulta $1/m > 1/n > 0$ entonces tomando $p = 1/m$ y $q = 1/n$, resulta:

$$m(\sqrt[m]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Asi: $n(\sqrt[n]{a} - 1)$ decrece cuando n crece.

TEOR.2.3 Si r es racional positivo y $0 < a \neq 1$, se tiene:

$$a^r - 1 > r(a - 1) \qquad \text{para:} \qquad r > 1$$

$$a^r - 1 < r(a - 1) \qquad \text{para:} \quad 0 < r < 1$$

Dm. Supongamos primero que: $r = m/n > 1$, entonces $m > n$ y por ello:

$$\frac{b^m - 1}{m} > \frac{b^n - 1}{n} \qquad 0 < b \neq 1$$

$$b^m - 1 > \frac{m}{n}(b^n - 1)$$

Ahora tomando b, tal que: $b^n = a$, resulta:

$$a^{m/n} - 1 > \frac{m}{n}(a - 1)$$

es decir:

$$a^r - 1 > r\ (a - 1) \qquad a > 1$$

Finalmente tomando $m/n < 1$ y procediendo de idéntica manera se demuestra que:

$$a^r - 1 < r\ (a - 1) \qquad 0 < a < 1$$

<u>COR.</u> $$(1 + 1/n + 1)^{n+1} > (1 + 1/n)^n$$

Para obtener este resultado basta tomar en el desigualdad.

$$a^r - 1 > r\ (a - 1) \qquad r > 1$$

$$r = (n + 1)/n > 1 \qquad y \qquad a = 1 + 1\ /\ (n + 1)$$

Asi tenemos:

$$(1 + 1/n + 1)^{(n+1)/n} > 1 + 1\ /n$$

$$(1 + 1/n + 1)^{n+1} > (1 + 1/n)^n$$

<u>EJEM.</u>2.4 Si $(x > -1)$, demostrar que:

$$(1 + x)^r > 1 + rx \qquad r > 1$$

$$(1 + x)^r < 1 + rx \qquad 0 < r < 1$$

<u>SOL.</u> Sabemos que para $0 < a \neq 1$

$$a^r - 1 > r(a - 1) \qquad \text{con} \qquad r > 1$$

$$a^r - 1 < r(a - 1) \qquad \text{con} \quad 0 < r < 1$$

Haciendo: $1 + x = a$ con $(x > -1)$, queda garantizado que $a > 0$, luego:

$$(1 + x)^r - 1 > rx \qquad \text{para} \quad r > 1$$

$$(1 + x)^r - 1 < rx \qquad \text{para} \quad 0 < r < 1$$

así se tiene la tesis.

EJEM.2.5 Si a, b, x, y son positivos con x e y racionales tales que: $x + y = 1$. Demostrar que: $a^x b^y < ax + by$.

SOL. Para $0 < r < 1$ y $z > 0$, sabemos que:

$$z^r - 1 < r(z - 1)$$

Como: $x + y = 1$ con x e y racionales positivos, resulta: $0 < x < 1$, entonces tomando: $r = x$ $z = a/b$, resulta:

$$(a/b)^x - 1 < x(a/b - 1)$$

$$a^x b^{-x} < 1 + axb^{-1} - x$$

$$a^x b^{1-x} < (1 - x)b + ax$$

y como: $x + y = 1$, obtenemos: $a^x b^y < ax + by$.

TEOR.2.4 Sean: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reales positivos y r un racional positivo, entonces:

$$\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r}{n} > \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^r \qquad r > 1$$

$$\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots\cdots + a_n^r}{n} < \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a}{n}\right)^r \quad 0 < r < 1$$

Dm. Pongamos: $A = (a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n)/n$. Reemplazando en la desigualdad:

$$x^r - 1 > r(x - 1) \qquad r > 1$$

el número x por a_j/A, tenemos:

$$(a_j/A)^r - 1 > r(a_j/A - 1)$$

o sea

$$a_j^r - A^r > rA^{r-1}(a_j - A)$$

n^n n Dando a : j los valores: 1, 2, 3.......n, obtenemos:

$$a_1^r - A^r > rA^{r-1}(a_1 - A)$$

$$a_2^r - A^r > rA^{r-1}(a_2 - A)$$

$$a_n^r - A^r > rA^{r-1}(a_n - A)$$

y sumando mienbro a mienbro resulta:

$$a_1^r + a_2^r + \cdots\cdots + a_n^r - nA^r > rA^{r-1}\ (0)$$

luego:

$$\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots\cdots + a_n^r}{n} > \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}\right)^r \quad r > 1$$

La otra desigualdad se obtiene de manera análoga.

EJEM.2.6 Si a, b, c son reales positivos diferentes y n es entero positivo, demostrar que:

$$(a + b + c)^n \leqslant 3^{n-1} (a^n + b^n + c^n)$$

SOL. Para $n = 1$, se cumple la igualdad. Suponiendo $n \quad 1$, el teorema precedente nos dá:

$$\frac{a^n + b^n + c^n}{3} > \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^n$$

luego:

$$3^{n-1}(a^n + b^n + c^n) > (a + b + c)^n$$

TEOR.2.5 Si $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots\ldots b_n)$ son reales positivos no proporcionales, se tiene: (Desigualdad de Cauchy).

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) >$$

$$> (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

Dm. Como los números (a_j) y (b_j) no son proporcionales, en la expresión:

$$(a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \cdots\cdots + (a_n x + b_n)^2$$

no hay x real que anule simultaneamente, todos los binomios luego para todo x real, siempre se tiene:

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \dots + (a_nx + b_n)^2 > 0$$

así la ecuación:

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \dots + (a_nx + b_n)^2 = 0$$

o sea:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x$$
$$+ \ (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = 0$$

tiene sus raíces complejas y por ello su discriminante es menor que cero, así:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 -$$
$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) < 0$$

de donde resulta que:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq$$
$$\geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

<u>COR</u>. Si: $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots = a_n/b_n$ se tiene:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) =$$
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

En efecto, cuando hay proporcionalidad entre los (a_j) y los (b_j) los binomios de la ecuación:

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \dots + (a_nx + b_n)^2 = 0$$

se anulan todos para el valor común $x = a_1/b_1$. La ecuación tiene una raiz real doble y la discriminante: $\Delta = 0$.

<u>EJEM</u>.2.7 Si a, b, c son reales positivos no todos iguales, demostrar que:

$$(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) > (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

<u>SOL</u>. Aplicando la desigualdad de Cauchy a los números:

$$x_1 = \sqrt{a} \qquad x_2 = \sqrt{b} \qquad x_3 = \sqrt{c}$$

$$y_1 = \sqrt{a}^3 \qquad y_2 = \sqrt{b}^3 \qquad y_3 = \sqrt{c}^3$$

tenemos:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) >$$

$$> (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$$

o sea:

$$(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) > (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

2.2 <u>EJERCICIOS PROPUESTOS</u>.

1.- Si $a > 0$ demostrar que: $\log(a) \leq n(\sqrt{a} - 1)$.

2.- Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son reales positivos, tales que: $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Demostrar: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$.

3.- Si a, b, c son positivos, demostrar que:
$(a + b + c)(ab + bc + ca) \geqslant 9abc$.

4.- Si $a, b, c, \ldots, f, g$ son positivos demostrar que:

i). $a/b + b/c + c/d + d/a \geqslant 4$

j). $(a/e + b/f + c/g)(e/a + f/b + g/c) \geqslant 9$

5.- Si a, b, c son reales positivos tales que la suma de dos de ellos es mayor que el tercero, demostrar que:

$$(a + b + c)^3 \geqslant 27(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

6.- Si a, b, c son reales positivos, demostrar que:

$$2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 15abc + a^3 + b^3 + c^3$$

7.- Si $s = a + b + c + d$, con a, b, c y d positivos demostrar que:

$$(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) \geqslant 81abcd.$$

8.- Si n es entero positivo, demostrar que:

$$(n + 1)^{n+1} \leqslant n^n\, 2^{n+1}$$

9.- Si a y b son reales positivos, demostrar que:
$(a + b)^7 < 64(a^7 + b^7)$.

10.- Si a y b son reales positivos demostrar que:
$(a + b)^n < 2^{n-1} (a^n + b^n)$.

11.- Si a, b, c, d son reales positivos demostrar que:

$$(a + b + c + d)^3 < 16 (a^3 + b^3 + c^3 + d^3).$$

12.- Si a, b, c, d son reales positivos demostrar que:
$(ac + bd)(ad + bc) \geqslant cd(a + b)^2$.

13.- Si $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ y $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$ son reales positivos tales que:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots\ldots + b_n^2 = 1$$

demostrar que: $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_n b_n) \leqslant 1$.

14.- Sean los reales positivos a y b y los racionales p y q tales que $p > 1$ y $1/p + 1/q = 1$. Demostrar que:

$$a^p/p + b^q/q \geqslant ab.$$

15.- Si n es entero positivo y r un racional, demostrar que:

$$(1 + r/n)^n < (1 + r/(n + 1))^{n+1}$$

16.- Si la suma de n números positivos es constante, demostrar que su producto es máximo, cuando dichos números son iguales.

17.- Si el producto de n números positivos es constante.

demostrar que su suma es mínima, cuando dichos números son iguales.

18.- De todos los triángulos de perímetro constante $2p$, determinar el de mayor área.

19.- ¿Qué forma debe tener un paralelepípedo rectangular de volumen a^3 para que su superficie sea mínima?

20.- De todos los triángulos rectángulos de la misma hipotenusa, determinar el de área máxima.

21.- Sobre los cuatro lados de un rectángulo, de perímetro $2p$, tomados como diámetros se han descrito semi-circunferencias hacia afuera. Determinar las dimensiones del rectángulo para que la superficie así formada sea mínima.

I N E C U A C I O N E S.

3.1 INTRODUCCION.

La verdad es que nuestro título: Inecuaciones, es bastante pretencioso, dado que aquí nos preocuparemos fundamentalmente de la resolución de inecuaciones polinómicas de segundo grado.

Con el propósito de homogeneizar conocimientos básicos, empezaremos haciendo un recuento de la ecuación de segundo grado.

DEF. 3.1 Se llama ecuación de segundo grado en R, a la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con: a, b, y c reales y $a \neq 0$.

TEOR.3.1 Si la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, tiene una solución α ella tiene otra solución β tal que:

$$\alpha + \beta = -b/a \qquad \alpha\beta = c/a$$

Dm. Como α es solución de $ax^2 + bx + c = 0$, tenemos: $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, luego:

$$ax^2 + bx + c - (a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$$

$$a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) = 0$$

$$(x - \alpha)(ax + a\alpha + b) = 0$$

De donde, además de $x = \alpha$, la expresión $ax^2 + bx + c$, se anula para $x = \beta$, dado por:

$$a\beta + a\alpha + b = 0 \quad \text{o sea para} \quad \beta = -\alpha - (b/a)$$

de donde: $\alpha + \beta = -(b/a)$. Finalmente:

$$\alpha\beta = \alpha(-\alpha - b/a) = -\alpha^2 - (b/a)\alpha = -(a\alpha^2 + b\alpha)/a$$

$$\alpha\beta = (-1/a)(a\alpha^2 + b\alpha + c) + c/a = 0 + c/a = c/a.$$

TEOR.3.2 La ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, no puede tener mas de dos raices diferentes.

Dm. Supongamos que nuestra ecuación admite tres raices: α, β y γ diferentes dos a dos. Entonces como α, β, γ son soluciones, tenemos:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \qquad (1)$$

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0 \qquad (2)$$

$$a\gamma^2 + b\gamma + c = 0 \qquad (3)$$

Restando (1) y (2) y luego (1) y (3), resulta:

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0$$

$$a(\alpha^2 - \gamma^2) + b(\alpha - \gamma) = 0$$

o sea:

$$(\alpha - \beta)\ (a(\alpha + \beta) + b) = 0$$

$$(\alpha - \gamma)\ (a(\alpha + \gamma) + b) = 0$$

Ahora como $(\alpha - \beta) \neq 0$ y $(\alpha - \gamma) \neq 0$, concluimos:

$$a(\alpha + \beta) + b = 0 \qquad \wedge \qquad a(\alpha + \gamma) + b = 0$$

de donde, restándoles, se tiene: $a(\beta - \gamma) = 0$ y como $a \neq 0$, resulta $\beta = \gamma$ conclusion contraria a la hipótesis $\beta \neq \gamma$

Asi tenemos que la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, no puede tener más de dos raices diferentes.

<u>TEOR</u>.3.3 Si α y β son las raices de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, se tiene:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

<u>Dm</u>. De inmediato tenemos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 + bx + c - (a\alpha^2 + b\alpha + c) \\ &= a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) \\ &= (x - \alpha)(ax + a\alpha + b) \\ &= a(x - \alpha)(x + \alpha + b/a) \end{aligned}$$

Ahora de: $\alpha + \beta = (-b/a)$, obtenemos: $\alpha + b/a = -\beta$ que reemplazado en la igualdad anterior nos da:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

TEOR.3.4 Las raices α y β de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dm. Multiplicando la ecuación dada por $4a$, tenemos:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 + 4ac - b^2 = 0$$

$$(2ax + b)^2 + 4ac - b^2 = 0$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad \text{luego}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

COR. Si en la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, el coeficiente b es un número par: $b = 2p$, la ecuación: $ax^2 + 2px + c = 0$, tiene las raices:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - ac}}{a}$$

En efecto reemplazando en la expresión de x, el número b por $2p$, y luego simplificando por 2, se encuentra el valor propuesto para x.

DEF. 3.2 Se llama discriminante de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ al número } \Delta = b^2 - 4ac.$$

TEOR.3.5 La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, tiene:

i). Dos raices reales diferentes: sii $\Delta > 0$

j). Dos raices reales e iguales: sii $\Delta = 0$

k). Dos raices complejas : sii $\Delta < 0$

Dm.

i). Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tenemos: $-b + \sqrt{\Delta} \neq -b - \sqrt{\Delta}$ y por ello las raices:

$$\alpha = (-b + \sqrt{\Delta})/2a \qquad \beta = (-b - \sqrt{\Delta})/2a$$

son reales y diferentes. Reciprocamente si α y β son reales con $\alpha \neq \beta$ tenemos: $-b + \sqrt{\Delta} \neq -b - \sqrt{\Delta}$, luego $\sqrt{\Delta} \neq 0$ y como α y β son reales debe tenerse: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

j). Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, es inmediato que las raices:

$$\alpha = (-b + \sqrt{\Delta})/2a \qquad \beta = (-b - \sqrt{\Delta})/2a$$

son reales e iguales con valor común: $\alpha = \beta = -b/2a$, pues $\Delta = 0$ Reciprocamente si $\alpha = \beta$ tenemos: $-b + \sqrt{\Delta} = -b - \sqrt{\Delta}$ de donde: $2\sqrt{\Delta} = 0$ y entonces: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

k). Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, el número $\sqrt{\Delta}$ es imaginario de la forma: $\sqrt{\Delta} = ki$, con $i^2 = -1$, entonces las raices son los complejos:

$$\alpha = (-b + ki)/2a \qquad \beta = (-b - ki)/2a$$

Reciprocamente si α y β son números complejos, también son complejos los números: $-b + \sqrt{\Delta}$ y $b - \sqrt{\Delta}$ pues a es real. Ahora como b es real, debe tenerse $\sqrt{\Delta}$ complejo y ello exige que: $\Delta < 0$.

EJEM.3.1 Determinar de que tipo son las raices de las ecuaciones:

a). $x^2 - 7x + 10 = 0$

b). $x^2 - 6x + 9 = 0$

c). $x^2 - 4x + 13 = 0$

SOL: Para la primera tenemos: $\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$. Entonces sus raices deben ser reales y diferentes. Resolviéndola se encuentra: $\alpha = 2$ y $\beta = 5$.

Para la segunda: $\Delta = 36 - 36 = 0$. Entonces sus raices deben ser reales e iguales. Resolviéndola resulta: $\alpha = \beta = 3$.

Para la tercera: $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$, y por ello sus raices deben ser complejas. Resolviéndo se encuentra: $\alpha = 2 + 3i$ y $\beta = 2 - 3i$.

OBSV: Deseamos hacer notar que la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ definida sobre el cuerpo R, puede admitir soluciones complejas, es decir admitir como soluciones números que no están en el cuerpo R al cual pertenecen los coeficientes, a, b y c. Esta situación se presenta cada vez que el cuerpo K sobre el cual se define la ecuación, es sub-cuerpo de otro. En nuestro caso, el cuerpo R es sub-cuerpo del cuerpo C de los complejos.

Análogamente si la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ se define sobre el cuerpo Q de los racionales, puede presentarse casos de ecuaciones con coeficientes en Q, que tienen soluciones en R, tal es el caso, por ejemplo, de la ecuación: $x^2 - 6x + 7 = 0$, cuyas soluciones: $\alpha = 3 + \sqrt{2}$ y $\beta = 3 - \sqrt{2}$ no están en Q sino que son elementos del cuerpo R. Aquí el cuerpo Q es sub-cuerpo de R.

Este tema lo trataremos con alguna detención cuando nos preocupemos de la teoría de los polinomios.

3.2 EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las ecuaciones:

1.- $x^2/(x^2 - 1) + (x^2 - 1)/x^2 = 25/12$

2.- $(x - 1)/(2x + 1) + (2x + 1)/(x - 1) = 26/5$

3.- $\sqrt[x]{125} + \sqrt[x]{125^2} = 30$

4.- $\sqrt[x]{128} + \sqrt[2x]{128} = 20$

5.- $4^{x+1} + 64 \cdot 4^{-x} = 257$

6.- $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 0$

7.- $x^2 - 8x - 2\sqrt{x^2 - 8x + 40} = -5$

8.- $39 + \sqrt{7x^2 + 8x - 19} = 7x^2 + 8x$

9.- $x^3 - 1 = 0 \quad \wedge \quad x^3 + 1 = 0$

10.- $(x^2 + 1/x^2) - 3(x + 1/x) + 4 = 0$

11.- $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

12.- Resolver el sistema:

$x + y + xy = 19 \qquad xy(x + y) = 84$

13.- En las ecuaciones: $x^2 - 7x + 12 = 0$ y $x^2 - 3x + q = 0$, determinar q de modo que ambas tengan una raíz común.

14.- En las ecuaciones: $x^2 - 5x - q = 0$ y $x^2 - 7x + 2q = 0$, determinar q para que el doble de una raíz de la primera sea raíz de la segunda.

15.- En la ecuación: $x^2 + px + q = 0$, determinar p y q para que las raices sean, precisamente, p y q.

16.- En la ecuación: $x^2 - 2x + q = 0$, determinar q para que una raíz sea el cuadrado de la otra.

17.- Sin resolver la ecuación: $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ construir una ecuación de segundo grado cuyas raices sean los cuadrados de las raices de la ecuación dada.

18.- Dada la ecuación: $4x^2 - 10(2m + 1)x + 14m + 5 = 0$ determinar m para que sus raices verifiquen la condición: $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

19.- En la ecuación: $2x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$ determinar m de modo que: $x_1 = 2x_2$.

20.- Determinar m, para que las raices de la ecuación:

$$(m - 1)x^2 - (3m + 4)x + 12m + 3 = 0$$

verifiquen la igualdad: $4x_1 - 5x_2 = -13$.

3.3 EL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO.

DEF. 3.3 Se llama trinomio de segundo grado al polinomio:

$$T(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{con} \qquad a \neq 0.$$

Bajo este título, nos proponemos determinar para que valores de la variable x, el trinomio toma valores positivos y para que valores de x, dicho trinomio toma valores negativos.

DEF. 3.4 Se llama raices del trinomio $T(x) = ax^2 + bx + c$, a las raices de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$.

De acuerdo al teorema 3.5, sabemos que las raices del trinomio $T(x) = ax^2 + bx + c$, son:

i). Reales y distintas para: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

j). Reales e iguales para: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

k). Complejas conjugadas para: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

TEOR.3.6 El trinomio $T(x) = ax^2 + bx + c$, con raices complejas es para cada x real un número del mismo signo que el coeficiente a.

Dm. Como el trinomio $T(x)$ tiene por hipotesis raices complejas, se verifica que: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Para demostrar que: $T(x)$ y a son números del mismo signo, bastará probar que: $aT(x) > 0$. Para esto tenemos:

$$T(x) = ax^2 + bx + c$$

$$T(x) = a(x^2 + (b/a)x + c/a)$$

$$T(x) = a(x^2 + (b/a)x + b^2/4a^2 - b^2/4a^2 + c/a)$$

$$aT(x) = a^2(\ (x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2\ )$$

Ahora considerando que: $\Delta = b^2 - 4ac$ es menor que cero, concluimos que: $aT(x) > 0$, cualquiera sea el valor real de x, es decir: $T(x)$ y a tienen siempre el mismo signo.

EJEM.3.2 Determinar que signo tienen los trinomios:

$$T_1(x) = \underbrace{x^2 + x + 1} \qquad\qquad T_2(x) = \underbrace{-x^2 + 4x} - 13$$

para cada $x \in R$.

$b^2 - 4ac$
$1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$
$1 - 4 = -3 < 0$

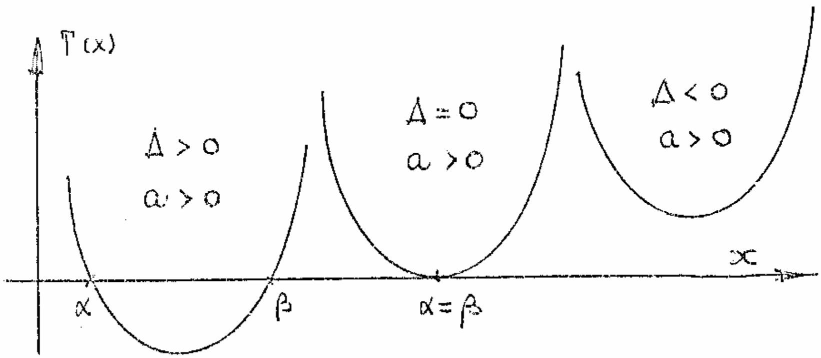
$16 + 4(-13)$
$-36 < 0$

SOL: Ambos trinomios tienen raices complejas, luego: el primero es positivo para cada x real, pués: $a = 1 > 0$. Contrariamente el segundo es negativo para todo x real, pués en este caso se tiene: $a = -1 < 0$.

A manera de ejemplo indicamos que:

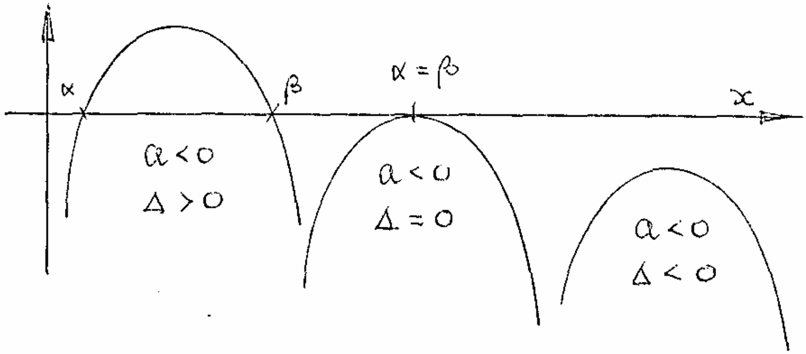
$T_1(0) = 1$	$T_1(1) = 3$	$T_1(-1) = 1$	$T_1(-2) = 3$
$T_2(0) = -13$	$T_2(1) = -10$	$T_2(-1) = -18$	$T_2(-2) = -25$

OBSV: El trinomio $T(x) = ax^2 + bx + c$, se expresa graficamente en un plano cartesiano mediante una parábola de eje vertical. Esta parábola es cóncava hacia arriba cuando $a > 0$ y cóncava hacia abajo cuando $a < 0$.



Cuando $T(x)$ tiene raices reales y distintas α y β, la parábola representativa de $T(x)$ corta al eje de abscisas en dos puntos distintos: $x = \alpha$ y $x = \beta$.

Cuando $T(x)$ tiene raices reales e iguales $\alpha = \beta$ la parábola correspondiente, toca al eje de las X en un solo punto $x = \alpha = \beta$



Finalmente cuando las raices de $T(x)$ son complejas, la parábola representativa del trinomio $T(x)$ no debe cortar al eje de las abscisas, pues si ello ocurriera habría raices reales.

<u>TEOR</u>.3.7 Si al trinomio $T(x) = ax^2 + bx + c$, tiene raices: reales y distintas, el trinomio $T(x)$ es:

i). Un número del mismo signo que el signo de a, para todo x, no contenido en el intervalo: $[\alpha, \beta]$ o sea para $x < \alpha \lor x > \beta$.

j). Un número de signo contrario al signo de a, para todo x del intervalo (α, β), o sea para: $\alpha < x < \beta$

Dm. De acuerdo al enunciado debemos demostrar que:

$$aT(x) > 0 \qquad \text{para:} \qquad x < \alpha \ \veebar \ x > \beta$$

$$aT(x) < 0 \qquad \text{para:} \qquad \alpha < x < \beta$$

Ahora de acuerdo al teorema 3.3 tenemos: $aT(x) = a^2(x-\alpha)(x-\beta)$

Entonces considerando que $\alpha < \beta$ resulta:

Si $x < \alpha$, tenemos: $aT(x) = a^2(-)(-) = a^2(+) > 0$

Si $x > \beta$, tenemos: $aT(x) = a^2(+)(+) = a^2(+) > 0$.

Asi para todo x tomado fuera del intervalo $[\alpha, \beta]$ tenemos: $aT(x) > 0$, es decir: a y $T(x)$ son números del mismo signo.

Contrariamente sea ahora x un punto del intervalo (α, β) entonces: $\alpha < x < \beta$, luego:

$$aT(x) = a^2(+)(-) < 0$$

Asi para todo x tomado en el intervalo (α, β) los números a y $T(x)$ son de signos contrarios.

COR. Si el trinomio $T(x) = ax^2 + bx + c$ tiene raices reales e iguales: $\alpha = \beta$ él es paratodo x real $(x \neq \alpha)$ un número con el mismo signo que el coeficiente: a.

En efecto, como $\alpha = \beta$, tenemos:

$$T(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) = a(x-\alpha)^2$$

de donde: $aT(x) = a^2(x-\alpha)^2 > 0$ para todo $x \neq \alpha$.
Asi $T(x)$ y a son números del mismo signo.

EJEM.3.3 Determinar el signo de los trinomios:

$$T_1(x) = x^2 - 7x + 10 \qquad T_2(x) = -4x^2 + 27x - 18$$

SOL: El trinomio $T_1(x)$ tiene como raices: $\alpha = 2$ y $\beta = 5$. Además como el coeficiente de x^2 es $a = 1 > 0$, podemos afirmar que:

$$T_1(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad x < 2 \ \veebar \ x > 5$$

$$T_1(x) < 0 \quad \text{para todo} \quad 2 < x < 5$$

Las raices del trinomio $T_2(x)$ son $\alpha = 3/4$ y $\beta = 6$ y como el coeficiente de x^2, es: $a = -4$ concluimos que:

$$T_2(x) < 0 \quad \text{para todo} \quad x < 3/4 \ \veebar \ x > 6$$

$$T_2(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad 3/4 < x < 6$$

EJEM.3.4 Determinar los signos de los trinomios:

$$T_1(x) = 4x^2 - 28x + 49 \qquad T_2(x) = -x^2 + 24x - 144$$

SOL: El trinomio $T_1(x)$ tiene una raíz real doble: $\alpha = \beta = 7/2$ y el coeficiente de x^2 es: $a = 4 > 0$, entonces:

$$T_1(x) > 0 \quad \text{para todo } x \text{ real}, \quad x \neq 7/2.$$

El trinomio $T_2(x)$ tiene una raíz real doble: $\alpha = \beta =$

$= 12$ y el coeficiente de x^2 es: $a = -1 < 0$ entonces:

$$T_2(x) < 0 \qquad \text{para todo} \qquad x \text{ real} \quad x \neq 12$$

<u>TEOR</u>.3.8 El trinomio $T(x) = ax^2 + bx + c$ tiene en el punto $x = -b/2a$, un valor mínimo o un valor máximo, según sea a positivo o negativo.

<u>Dm</u>. De inmediato tenemos:

$$T(x) = ax^2 + bx + c$$

$$4aT(x) = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac$$

$$4aT(x) = (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 + 4ac - b^2$$

$$4aT(x) = (2ax + b)^2 + 4ac - b^2$$

Ahora como el número $(2ax + b)^2$ es siempre no negativo, tenemos: $4aT(x) \geq 4ac - b^2$, luego:

$$T(x) \geq (4ac - b^2) / 4a \qquad \text{para: } a > 0$$

$$T(x) \leq (4ac - b^2) / 4a \qquad \text{para: } a < 0$$

Estas expresiones nos dicen que:

1). Cuando $(a > 0)$ el trinomio siempre es mayor o a lo sumo igual a: $(4ac - b^2)/4a$. Asi $T(x)$ tiene cuando $(a > 0)$ un valor mínimo que se alcanza en el punto $\bar{x}$ dado por $2a\bar{x} + b = 0$, o sea en: $\bar{x} = -b/2a$

2). Cuando $(a < 0)$ el trinomio siempre es menor o a lo sumo igual a: $(4ac - b^2)/4a$. Asi $T(x)$ tiene, cuando $(a < 0)$ un valor máximo, que se alcanza en: $\bar{x} = b/2a$.

EJEM.3.5 Determinar para que valor de m es mínima la diferencia de las raíces de la ecuación:

$$4x^2 - 10(2m + 1)x + 14m + 5 = 0$$

SOL: Las raíces de la ecuación están dadas por:

$$x = \frac{5(2m + 1) \pm \sqrt{25(2m + 1)^2 - 4(14m + 5)}}{4}$$

luego la diferencia de ellas es:

$$x_1 - x_2 = (1/2)\sqrt{100m^2 + 44m + 5}$$

Ahora esta diferencia será mínima, cuando sea mínimo el trinomio: $T(m) = 100m^2 + 44m + 5$. Como el coeficiente de m es positivo, este trinomio tiene efectivamente un valor mínimo, para: $m = -b/2a = -44/200 = -11/50$.

3.4 EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Para que valores de m, el trinomio:

$$T(x) = mx^2 + (m - 1)x + (m - 1)$$

es siempre negativo.

2.- Para que valores de m, el trinomio:

$$T(x) = (m - 2)x^2 - 2(2m - 3)x + 5m - 6$$

es siempre positivo.

3.- Demostrar que la ecuación: $4x^2-10(2m+1)x + 14m + 5 = 0$ tiene raices reales diferentes para todo m real.

4.- Determine entre que valores debe variar m, para que la ecuación:

$$(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 5 = 0$$

tenga sus raices reales.

5.- Determine entre que valores debe variar m, para que la ecuación:

$$(x - 1) / (2x - 1) + (2x + 1) / (x - 1) = m$$

tenga raices reales.

6.- Determine para que valores de m, la ecuación:

$$2mx^2 - 2x - (3m + 2) = 0$$

tiene una raíz menor y otra mayor que 1.

7.- Dada la ecuación:

$$(m - 2)x^2 + 2(m - 1)x + (m - 3) = 0$$

determinar valores de m para los cuales las raices son ambas mayores que 1.

8.- Valores de m, para que las raices de la ecuación:

$$2mx^2 - 2(m + 1)x + (m + 1) = 0$$

están comprendidas entre (-2) y $(+2)$.

9.- Determinar los valores de m para los cuales:

$$4x^2 + (m - 2)x + (m - 5) = 0$$

tiene raices reales diferentes y menores que 2.

10.- Valores de m para los cuales las raices de la ecuación:

$$(m^2 + 3m + 3)(x^2 + x) + m^2 = 0$$

determinan un intervalo que no contiene al número (-2).

11.- Valores de m para los cuales la ecuación:

$$(m^2 + 6m + 5)(x^2 + x) + m^2 = 0$$

tiene al número (-2) en el intervalo determinado por sus raices.

12.- Valores de m, para los cuales la ecuación:

$$2x^2 + (m - 3)x + (3 - m) = 0$$

tiene sus raices en el intervalo $(-2,3)$.

13.- Demostrar que la expresión:

$$E = 3(x^2/y^2 + y^2/x^2) - 8(x/y + y/x) + 10$$

es no negativa, cualquiera sean los reales x e y no nulos.

1 .- Determinar los coeficientes: a, b, c del trinomio $T(x) = ax^2 + bx + c$, para que él se anule en $x = 8$ y tenga un máximo igual a 12 con $x = 6$.

15.- Dividir un trazo de longitud a en dos segmentos tales que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construídos sobre ellos sea mínima.

16.- En un triángulo dado se pide inscribir un rectángulo de área máxima.

17.- Sobre la transversal t_c de un triángulo ABC, determinar un punto P, tal que: $S = PA^2 + PB^2 + PC^2$ sea mínimo.

18.- En un sólido formado al unir por sus bases dos conos iguales de radio basal R y altura $2R$, se pide inscribir un cilindro de superficie total máxima.

19.- En un triángulo equilátero de lado a se pide inscribir otro triángulo equilátero que tenga área mínima.

20.- Una ventana semicircular prolongada en forma rectangular debe tener 4m. de perímetro. Determinar sus dimensiones para que proporcione la máxima iluminación.

21.- Para que valores de m, el trinomio: $T(x) = mx^2 + (m - 1)x + m - 2$, tiene un máximo o un mínimo igual a uno.

22.- En una esfera de radio R hay inscrito un cono de generatriz: $R\sqrt{3}$. Trazar un plano paralelo a la base del cono de modo que el anillo circular determinado en-

entre la esfera y el cono tenga área máxima.

23.- Se dispone de 40 metros lineales de alambrada para cercar un jardín rectángular. Determinar el área máxima que se puede proteger.

24.- Un espejo rectángular de 80 por 90 cm, se rompió en una esquina según la recta $x/10 + y/12 = 1$. Determinar el espejo rectángular de área máxima que se puede obtener del trozo mayor.

25.- Los puntos A y B se encuentran en la vía principal y rectilínea que va del Oeste al Este. El punto B se encuentra a 9km más al Este que A. Un coche parte del punto A hacia el Este, y se desplaza uniformemente con una velocidad de 40 km/h. Al mismo tiempo, una motocicleta sale del punto B en la misma dirección con una aceleración constante igual a 32 km/h^2. Hallar la distancia máxima entre el coche y la motocicleta, en el curso de las dos primeras horas de movimiento.

3.5 INECUACIONES.

En este párrafo consideraremos el problema de determinar los números reales x para los cuales la proposición: $f(x) \geqslant 0$ es verdadera, siendo $f(x)$ una función de R a R.

El problema suele ser originalmente presentado en otras formas, las cuales pueden ser reducidas a la expresión: $f(x) \geqslant 0$. Esas otras formas fundamentalmente son:

i). $f(x) > 0$ equivalente con: $f(x) \geqslant 0 \quad \wedge \quad f(x) \neq 0$

j). $f(x) \leqslant 0$ equivalente con: $-f(x) \geqslant 0$

k). $f(x) < 0$ equivalente con: $-f(x) \geqslant 0 \quad \wedge \quad f(x) \neq 0$

l). $f(x) \geqslant g(x)$ equivalente con: $f(x) - g(x) \geqslant 0$.

Atendiendo a las consideraciones precedentes tomaremos la siguiente definición.

DEF. 3.5 Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, tales que: $(\mathrm{Dom}\ f) \cap (\mathrm{Dom}\ g) \neq \emptyset$, se llama inecuación toda expresión de la forma: $f(x) \geqslant g(x)$.

EJEM. 3.6 Sea $f(x) = x^2 - 4x + 16$ y $g(x) = 10 + x$ entonces son inecuaciones, entre otras:

$$x^2 - 4x + 16 > 10 + x \quad \text{y} \quad 10 + x \geqslant x^2 - 4x + 16$$

DEF. 3.6 Un real $x = a$, es solución de una inecuación: $f(x) \geqslant g(x)$, si y solo si: $f(a) \geqslant g(a)$.

EJEM. 3.7 Para la inecuación: $x^2 - 4x + 16 > 10 + x$ tenemos que, entre otras $x = 5$ y $x = 0$ son soluciones, pues:

$$25 - 20 + 16 > 10 + 5 \quad \text{o sea:} \quad f(5) > g(5)$$

$$0 - 0 + 16 > 10 + 0 \quad \text{o sea:} \quad f(0) > g(0)$$

Entenderemos por resolver una inecuación: $f(x) \geqslant g(x)$, la determinación de todas sus soluciones:

DEF. 3.7 Dos inecuaciones I_1 e I_2 son equivalentes si y solo si toda solución de una de ellas es solución de la otra.

TEOR.3.9 Las inecuaciones:

$$f(x) \geqslant g(x) \quad y \quad f(x) + h(x) \geqslant g(x) + h(x)$$

son inecuaciones equivalentes.

Dm. En efecto si $x = a$ es solución de la segunda tenemos:

$f(a) + h(a) \geqslant g(a) + h(a)$ de donde por los teoremas de orden, resulta: $f(a) \geqslant g(a)$. Recíprocamente como esta última desigualdad implica la anterior, concluimos que ambas inecuaciones son equivalentes, pues toda solución de una de ellas es solución de la otra.

EJEM.3.8 Dada la inecuación:

$$f(x) = x^2 - 4x + 16 > 10 + x = g(x)$$

una inecuación equivalente con ella es:

$$f(x) - g(x) = x^2 - 5x + 6 > 0 = g(x) - g(x)$$

TEOR.3.10 Las inecuaciones:

$$f(x) \geqslant g(x) \quad y \quad f(x)\, h(x) \geqslant g(x)\, h(x)$$

son equivalentes, cuando $h(x) > 0$ para todo x.

Dm. En efecto si $x = a$ es solución de una de ellas, como $h(a) > 0$, tenemos que:

$$f(a)\, h(a) \geqslant g(a)\, h(a) \quad \text{sii} \quad f(a) \geqslant g(a)$$

lo que garantiza la equivalencia de las inecuaciones.

EJEM.3.9 La inecuación:

$$f(x) = (x + 2)/(x - 5) > (x - 3) = g(x)$$

es equivalente con la inecuación:

$$f(x)\, h(x) = (x+2)(x-5) > (x-3)(x-5)^2 = g(x)\, h(x)$$

pues: $h(x) = (x - 5)^2 > 0$ para todo $x \neq 5$.

TEOR.3.11 Las inecuaciones:

$$f(x) \geqslant g(x) \quad y \quad f(x)\, h(x) \leqslant g(x)\, h(x)$$

son equivalentes cuando $h(x) < 0$ para todo x.

Dm. Análoga a la dada en el teorema anterior.

COR. $f(x) \geqslant g(x)$ y $h(x) - f(x) \leqslant h(x) - g(x)$ son inecuaciones equivalentes. En efecto de inmediato, tenemos:

$$f(x) \geqslant g(x) \text{ equivalentes con: } -f(x) \leqslant -g(x)$$

y esta última es equivalente con la inecuación:

$$h(x) - f(x) \leqslant h(x) - g(x)$$

TEOR.3.12 Si $g(x) > 0$ para todo x real, las inecuaciones: $|f(x)| \leqslant g(x)$ y $-g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ son equivalentes.

Dm. En efecto si $x = a$ es solución de una cualesquiera de ellas, tenemos:

$$|f(a)| \leqslant g(a) \quad \text{sii} \quad -g(a) \leqslant f(a) \leqslant g(a)$$

lo que garantiza su equivalencia.

EJEM.3.10 Resolver la inecuación: $|2x - 4| + 3 > x$

SOL:

$$|2x - 4| + 3 > x \quad \text{sii} \quad |2x - 4| > x - 3$$

Para aprovechar el teorema precedente, resolveremos como alternativa la inecuación contraria: $|2x - 4| \leqslant x - 3$.

Cuando $x \geqslant 3$ ella es equivalente con:

$$-(x - 3) \leqslant 2x - 4 \leqslant x - 3$$

de donde simultáneamente, tenemos:

$$-x + 3 \leqslant 2x - 4 \qquad\qquad 2x - 4 \leqslant x - 3$$

$$4 + 3 \leqslant 3x \qquad\qquad x \leqslant 1$$

$$7/3 \leqslant x \qquad\qquad x \leqslant 1$$

No hay ningún x real que verifique ambas condiciones por ello el conjunto de soluiones de la inecuación:

$$|2x - 4| \leqslant x - 3$$

es vacío, entonces las soluciones de:

$$|2x - 4| > x - 3$$

la forman todos los reales.

EJEM.3.11 Resolver la inecuación: $\log(x^2 - 5x + 6) < 0$

SOL: De acuerdo a ideas básicas sobre logaritmos tenemos que:

que:

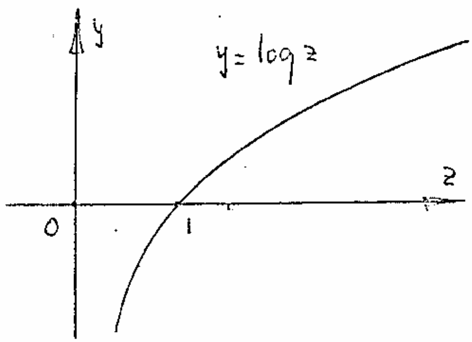
$$\log(x^2 - 5x + 6) < 0$$

si y solo si:

$$0 < x^2 - 5x + 6 < 1$$

De donde se obtiene las inecuaciones simultáneas:

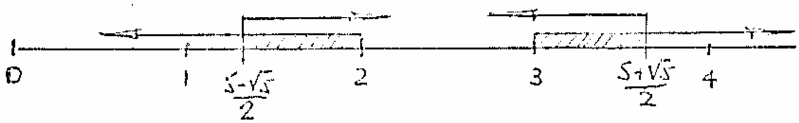
$$x^2 - 5x + 6 > 0$$
$$x^2 - 5x + 5 > 0$$



El primer trinomio tiene las raices: $\alpha = 2$ y $\beta = 3$, y el segundo las raices: $\alpha = (5 + \sqrt{5})/2$ y $\beta = (5 - \sqrt{5})/2$. De aquí que las inecuaciones se verifican:

La primera para: $(x < 2 \wedge x > 3)$ y la segunda para:

$((5 - \sqrt{5})/2 < x < (5 + \sqrt{5})/2)$.



Asi la inecuación propuesta, tiene como solución al conjunto de reales x, tales que:

$$(5-\sqrt{5})/2 < x < 2 \quad \wedge \quad 3 < x < (5+\sqrt{5})/2$$

EJEM.3.12 Resolver la inecuación: $(1-\sqrt{1-4x^2})/x < 3$

SOL: La raíz es real para: $1-4x^2 \geq 0$, o sea para: $(-1/2) < x < (1/2)$. En este intervalo y con $x \neq 0$, siempre se tiene: $1-\sqrt{1-4x^2} > 0$, luego cuando x es negativa, o sea para:

$$(-1/2) < x < 0 \qquad \text{se tiene} \qquad (1-\sqrt{1-4x^2})/x < 0 < 3$$

Para analizar el caso: $0 < x < 1/2$, tenemos:

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} = \frac{1-(1-4x^2)}{x(1+\sqrt{1-4x^2})} = \frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}}$$

y como el numerador $4x$ es siempre menor que 2 y el denominador mayor que 1, concluimos que para:

$$0 < x < 1/2 \qquad \text{se tiene} \qquad (1-\sqrt{1-4x^2})/x < 2 < 3.$$

Resumiendo vemos la solución de nuestra inecuación es:

$$(-1/2) < x < (1/2) \qquad \text{con} \qquad x \neq 0.$$

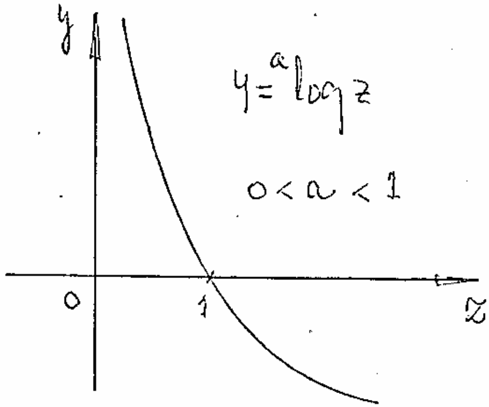
EJEM.3.13 Resolver: ${}^{\frac{1}{2}}\log\,({}^{4}\log(x^2-5)\,) > 0.$

SOL: La primera condición a cumplirse es: $x^2-5 > 0$, la cual es inmediato que se verifica para: $x < -\sqrt{5} \;\wedge\; x > \sqrt{5}$

Ahora como el primer logaritmo tiene base: $(1/2) < 1$, la ine-

inecuación propuesta es equivalente con:

$$0 < {}^{4}\log(x^2 - 5) < 1$$



y como la base de este logaritmo es $4 > 1$, ella es equivalente con:

$$1 < x^2 - 5 < 4$$

o sea con:

$$6 < x^2 < 9$$

Asi tenemos la solución: $\sqrt{6} < x < 3 \quad \wedge \quad -3 < x < -\sqrt{6}$.

3.6 EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las inecuaciones.

1.- $(x^2 - 3x + 2) / (x^2 + 2x + 6) < 3$

2.- $(x^2 - 5x + 4) / (x - 3) < 0$

3.- $(x^2 - 6x - 7) / (x - 2) > 0$

4.- $(x^2 + 3x - 4)(2x^2 + 4) > 0$

5.- $x(x^4 - 7x^2 + 12) > 0$

6.- $1 + 6/(x^2 + 3x + 2) > 6/(x + 2)$

7.- $(2x - 25) / (x^2 + 2x - 3) + (2x + 11)(x^2 - 1) > 2/(x + 3)$

8.- $$\frac{x^2 + 12}{x^2 - 7x + 12} - \frac{x + 8}{(x - 3)(x - 4)} > 1 + \frac{2}{x - 3}$$

9.- $(x^2 - 3x + 2) / (x^2 + 2x + 6) < 3$

10.- $(x^4 - 45x^2 + 96) / (x^2 - 7x + 12) > 7$

11.- $(x^4 - 56x^2 + 95) / (x^2 - 7x + 10) > 8$

12.- $| (x + 2) / (3 - x) | < 1$

13.- $| (x^2 - x) / (x^2 - 4) | < 1$

14.- $| (x^2 - 2x + 3) / (x^2 - 5x + 6) | > 1/5$

15.- $2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

16.- $\sqrt{(x - 5)(x - 7)} + 4 < \sqrt{x^2 + 51}$

17.- $\sqrt{(x - 6)(x - 9)} > 8x - 3$

18.- $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 4} < 3$

19.- $\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} > \sqrt{2x - 5}$

20.- $| \log(x^2 + x) | > 1$

21.- $\log x + \log(x + 1) < \log(2x + 6)$

22.- $\log(x^2 - 5x + 16) < 1$

23.- $1 / {}^2\log x - 1 / ({}^2\log x - 1) < 1$

24.- Resolver el sistema:

$9/x < 8 - 7 / (x + 2) \qquad x > (11x + 24)/(3x + 11)$

25.- Demostrar que: $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ para todo x real.

26.- Para que valores de m, se verifica que:

$-3 < (x^2 + mx - 2) / (x^2 - x + 1) < 2$

cualquiera sea el número real x.

EJERCICIOS RESUELTOS

A.- EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

EJER.1 Efectuando las operaciones indicadas, determinar el valor numérico de la expresión:

$$A = \frac{b^2c^2}{y^2z^2} + \frac{(b^2-y^2)(c^2-y^2)}{y^2(y^2-z^2)} + \frac{(b^2-z^2)(c^2-z^2)}{z^2(z^2-y^2)}$$

SOL: Efectuando la suma se encuentra: $A = 1$.

EJER.2 Valor numérico de la expresión:

$$A = \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3 - \frac{x-2a+b}{x+a-2b} \qquad \text{para: } x = (a+b)/2$$

SOL: Haciendo el reemplazo indicado se obtiene: $A = 0$

EJER.3 Efectuar en A las operaciones que se indican y simplificar:

$$A = \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1\right)\frac{ab}{a^2+b^2}$$

SOL: Sin dificultad resulta: $A = (a + b)/(a - b)$

EJER.4 Sabiendo que: $a + b + c = 0$, con a, b y c no nulos. Determinar valor numérico de:

$$A = a^2/bc + b^2/ca + c^2/ab$$

SOL: Sumando se tiene: $A = (a^3 + b^3 + c^3)/ abc$ y como $a = -(b + c)$, reemplazando se obtiene: $A = 3$.

EJER.5 Valor de la expresión:

$$A = 2a\sqrt{1+x^2}\ (x+\sqrt{1+x^2}\ )^{-1}$$

para: $x = (\sqrt{a/b} - \sqrt{b/a}\ ) / 2$.

SOL: De inmediato se tiene: $x = (a - b) / 2\sqrt{ab}$, luego:

$$1 + x^2 = (a + b)^2 / 4ab$$

$$\sqrt{1 + x^2} = (a + b) / 2\sqrt{ab}$$

$$x + \sqrt{1 + x^2} = a / \sqrt{ab}\ ,$$ luego: $A = (a + b)$

EJER.6 Efectuar la suma:

$$A = \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

SOL: Tomando el común denominador: $abc(a-b)(b-c)(c-a)$ y sumando se encuentra: $1 / abc$.

EJER.7 Sabiendo que: $a + b + c = 0$, calcular el valor numérico de la expresión:

$$A = \left(\frac{a-c}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)$$

SOL: Efectuando la operatoria indicada en cada parentesis y luego aprovechando que: $c = -(a + b)$, se obtiene:

$$A = \frac{2a^3+3a^2b-3ab^2-2b^3}{ab(a+b)} \cdot \frac{9ab(a+b)}{(a+2b)(b+2a)(a-b)}$$

pero:

$$(a+2b)(b+2a)(a-b) = 2a^3+3a^2b-3ab^2-2b^3$$

Asi simplificando se obtiene: $A = 9.$

__EJER__.8 Descomponer en factores:

$$X = a^4 + a^2b^2 + b^4$$

$$Y = a^4 + 9a^2b^2 + 81b^4$$

$$Z = 16a^4 - 5a^2b^2 + b^4$$

$$W = a^4b - a^2b^3 - a^3b^2 + ab^4$$

__SOL__:

$$X = a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$$

$$X = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 + ab).$$

Las expresiones Y y Z tienen solución análoga. Veamos W.

$$W = a^4b + ab^4 - a^2b^2(b + a)$$

$$W = ab(a^3 + b^3) - a^2b^2(a + b)$$

$$W = ab(a + b)(a^2 - ab + b^2) - a^2b^2(a + b)$$

$$W = (a + b)\ ab\ (a^2 - 2ab + b^2) = ab(a + b)(a - b)^2$$

EJER.9 Si: $x + y + z = 0$, demostrar: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

SOL:

$$x + y + z = 0 \quad \text{implica} \quad x + y = -z$$

Elevando al cubo, resulta:

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = -z^3$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = -3xy(x + y)$$

$$= -3xy(x + y + z) + 3xyz = 3xyz.$$

EJER.10 Si a, b, c son reales tales que:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

demuestre que: $a = b = c$.

SOL:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$(a - b^2) + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0.$$

De donde concluimos: $(a - b) = 0$; $(b - c) = 0$ y $(c - a) = 0$.

Asi tenemos: $a = b = c$.

EJER.11 Factorizar la expresión:

$$A = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3.$$

SOL:

$$(x + y + z)^3 = (x + y)^3 + 3(x + y)^2 z + 3(x + y)z^2 + z^3$$
$$= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3z(x+y)(x+y+z)+z^3$$

Asi tenemos que:

$$A = 3xy(x + y) + 3z(x + y)(x + y + z)$$

$$A = 3(x + y)(xy + zx + zy + z^2)$$

$$A = 3(x + y)(y(x + z) + z(x + z))$$

$$A = 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

EJER.12 Dividir $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ por $(a + b + c)$, luego demostrar que si: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, se tiene:

$$a + b + c = 0 \ \vee \ a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

SOL: Efectuando la división se encuentra:

$$(a^3+b^3+c^3-3abc):(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

Entonces si: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$, resulta:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) = 0$$

de donde se concluye la veracidad de la tesis propuesta.

EJER.13 Si $a + b + c = 2s$, demostrar que:

$$\text{i). } \quad 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2}{ab}(s - a)(s - b)$$

$$\text{j). } \quad (s - a)^2 + (s - b)^2 + (s - c)^2 + s^2 = a^2+b^2+c^2$$

$$\text{k). } \quad \frac{1}{s - a} + \frac{1}{s - b} + \frac{1}{s - c} - \frac{1}{s} = \frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

SOL:

$$\text{i). } \quad 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab}$$

$$= \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab}$$

$$= \frac{(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)}{2ab}$$

$$= \frac{(2s-2b)(2s-2a)}{2ab} = \frac{2}{ab}(s-a)(s-b)$$

Los números restantes (j) y (k) son aún mas simples y quedan a cargo del lector.

EJER.14 Demuestre que:

$$A = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} - \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$$

SOL: Haciendo simplemente la suma se encuentra:

$$A = \frac{-a(b - c) - b(c - a) - c(a - b)}{(a - b)(b - c)(c - a)}$$

$$= \frac{-ab + ca - bc + ab - ca + cb}{(a - b)(b - c)(c - a)} = 0$$

EJER.15 Resolver las ecuaciones:

a). $(0.75)^x = (3 + 13/81)^{-2}$

b). $(2^x - 8^{(x-1)/2})(3^{2x-4} - 729) = 0$

c). $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$

d). $2^{x+1} + 2^{x+2} + \ldots\ldots + 2^{x+10} = 4092$

e). $3\ 2^{x+3} = 192\ 3^{x-3}$

SOL: Veamos las ecuaciones (a) y (c), pues las otras dos son análogas.

a). $(0.75)^x = (3 + 13/81)^{-2}$

$(0.75)^x = (243/81 + 13/81)^{-2}$

$(0.75)^x = (256/81)^{-2}$

$(0.75)^x = (81/256)^2 = (9^2/16^2)^2$

$(0.75)^x = (9/16)^4 = (3/4)^8 = (0.75)^8$

Así tenemos $x = 8$.

Pasemos a la ecuación:

c). $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$

Sacando factor común a 3^x, queda:

$$3^x(1 + 1/3 + 1/3^2 + 1/3^3 + 1/3^4) = 363$$

$$3^x \frac{3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1}{3^4} = 363$$

$$3^x(81 + 27 + 9 + 3 + 1) = 363 \cdot 81$$

$$3^x = \frac{363 \cdot 81}{121} = 3 \cdot 81 = 3^5$$

Asi tenemos $x = 5$.

<u>EJER</u>.16 Si $x : y : z = a : b : c$, demostrar que:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$$

<u>SOL</u>: De $x : y : z = a : b : c$, obtenemos:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{ax}{a^2} = \frac{by}{b^2} = \frac{cz}{c^2}$$

$$= \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (1)$$

Analogamente se tiene:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{ax^2}{x^2} = \frac{by}{y^2} = \frac{cz}{z^2}$$

$$= \frac{ax + by + cz}{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (2)$$

Multiplicando (1) y (2) mienbro a mienbro, queda:

$$\frac{x}{a} \cdot \frac{a}{x} = \frac{(ax + by + cz)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$$

luego:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$$

EJER. 17 Si a, b, c, x, y, z son positivos, tales que: $x : a = y : b = z : c$, demostrar que:

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = \sqrt{(a + b + c)(x + y + z)}$$

SOL: De

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad \text{concluimos} \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{c}}$$

Haciendo: $\sqrt{a} = A$, $\sqrt{b} = B$, $\sqrt{c} = C$, $\sqrt{x} = X$, $\sqrt{y} = Y$, $\sqrt{z} = Z$, de $A : B : C = X : Y : Z$ usando la misma operatoria del ejercicio anterior obtenemos:

$$(A^2 + B^2 + C^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = (AX + BY + CZ)^2$$

$$(a + b + c)\ (x + y + z) = (\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz})^2$$

EJER. 18 Factorizar:

$$A = ab\ (a + b) + bc\ (b + c) + ca\ (c + a) + 2abc$$

SOL:

$$A = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc$$

$$A = a(ab + bc + ca + c^2) + b(ab + bc + ca + c^2)$$

$$A = (ab + bc + ca + c^2)\ (a + b)$$

$$A = (a(b + c) + c(b + c))\ (a + b)$$

$$A = (a + b)\ (b + c)\ (c + a).$$

EJER.19 Aprovechando la identidad:

$$(x^3 + y^3) = (x + y)\ (x^2 - xy + y^2)$$

factorizar las expresiones:

$$A = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$$

$$B = a^3\ (b - c)^3 + b^3\ (c - a)^3 + c^3\ (a - b)^3$$

SOL: Haciendo uso de la identidad dada, se tiene:

$$A = (a-b+b-c)((a-b)^2 - (a-b)(b-c) + (b-c)^2) + (c-a)^3$$

$$A = (a-c)\ ((a-b)^2 - (a-b)(b-c) + (b-c)^2 - (c-a)^2)$$

$$A = (a-c)\ ((c-b)(2a-b-c) + (c-b)^2 + (a-b)(c-b))$$

$$A = (a-c)\ (c-b)\ (2a-b-c+c-b+a-b)$$

$$A = (a-c)\ (c-b)\ (3a-3b) = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

EJER.20 Demostrar la identidad de Lagrange:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2 +$$
$$+ (ay - xb)^2 + (az - xc)^2 + (bz - yc)^2$$

SOL.

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + a^2(y^2+z^2) +$$
$$b^2(x^2+z^2) + c^2(x^2+y^2)$$
$$= (ax+by+cz)^2 - 2abxy - 2acxz - 2bcyz + a^2y^2 + a^2z^2 +$$
$$+ b^2x^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2$$
$$= (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (bz-cy)^2$$

EJER.21 Descomponer en un producto de dos factores de cuatro términos cada uno.

$$A = x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2) - 4xyz$$

SOL. Efectuando la operatoria indicada se tiene:

$$A = x(1-y^2-z^2+y^2z^2)+y(1-x^2-z^2+x^2z^2)+z(1-x^2-y^2+x^2y^2)-4xyz$$
$$A = (x+y+z)-(xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2)$$
$$+(xy^2z^2+yx^2z^2+zx^2y^2) - 4xyz$$
$$A = (x+y+z)-xy(x+y+z)-yz(x+y+z)-zx(x+y+z)+xyz(xy+yz+zx)-$$
$$-xyz.$$
$$A = (x+y+z)(1-xy-yz-zx)-xyz(1-xy-yz-zx)$$
$$A = (1 - xy - yz - zx)(x + y + z - xyz)$$

EJER.22 Factorizar la expresión:

$$A = a^6 - 4b^6 - 9c^6 - 12b^3c^3$$

; luego demostrar que: $P(x) = x^3 - 4y^3 - 9z^3 - 12x^{3/2}y^{3/2}$ es divisible por: $Q(x) = x^{3/2} + 2y^{3/2} + 3z^{3/2}$.

SOL.

$$A = a^6 - (4b^6 + 12b^3c^3 + 9c^6) = a^6 - (2b^3 + 3c^3)^2$$

$$A = (a^3 + 2b^3 + 3c^3)(a^3 - 2b^3 - 3c^3)$$

Ahora haciendo en P(x) y en Q(x): $x^{\frac{1}{2}} = a$, $y^{\frac{1}{2}} = b$, $z^{\frac{1}{2}} = c$, resulta:

$$P(x) = a^6 - 4b^6 - 9c^6 - 12a^3b^3$$

$$P(x) = (a^3 + 2b^3 + 3c^3)(a^3 - 2b^3 - 3c^3)$$

$$Q(x) = a^3 + 2b^3 + 3c^3$$

Asi: $P(x) = Q(x)(a^3 - 2b^3 - 3c^3)$ y entonces P(x) es divisible por Q(x).

EJER.23 Demuestre que la expresión:

$$E = \frac{ab(x-y)^2 + bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2}{ax^2 + by^2 + cz^2}$$

se reduce a: $E = a + b + c$, cuando: $ax + by + cz = 0$.

SOL. Efectuando las operaciones indicadas en el numerador N resulta:

$$N = ab(x^2 + y^2) + bc(y^2 + z^2) + ca(z^2 + x^2) - (\,2abxy + 2bcyz + 2caxz\,).$$

Ahora elevando al cuadrado la condición dada, se tiene:

$$-(2abxy + 2bcyz + 2caxz) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

entonces reemplazando en E queda:

$$E = \frac{ax^2(a + b + c) + by^2(a + b + c) + cz^2(a + b + c)}{ax^2 + by^2 + cz^2}$$

$$E = \frac{(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2)}{ax^2 + by^2 + cz^2} = a + b + c$$

<u>EJER</u>.24 Descomponer en factores lineales:

$$A = 2x^2 - 3xy - 2y^2 + x + 13y - 15.$$

$$B = 2x^2 - 3xy - 2y^2 + 2x + 11y - 12.$$

$$C = 6x^2 - 5xy - 6y^2 - 5x + 14y - 4.$$

<u>SOL</u>. De inmediato tenemos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3xy - 2y^2 &= 2x^2 - 4xy + xy - 2y^2 \\ &= 2x(x - 2y) + y(x - 2y) \\ &= (x - 2y)(2x + y). \end{aligned}$$

Ahora nos proponemos buscar dos reales a y b tales que:

$$A = (\ (2x + y) + a\ )(\ (x - 2y) + b\ )$$

$$A = (2x + y)(x - 2y) + a(x - 2y) + b(2x + y) + ab$$

Ahora considerando la expresión dada de A y eliminando los términos que corresponde, queda:

$$\begin{aligned} x + 13y - 15 &= a(x - 2y) + b(2x + y) + ab \\ &= x(a + 2b) + y(b - 2a) + ab \end{aligned}$$

y entonces el problema se reduce a buscar a y b, tales que:

$$a + 2b = 1 \qquad b - 2a = 13 \qquad ab = -15$$

Resolviendo se encuentra: $a = -5$ $b = 3$. Asi finalmente se tiene:

$$A = (2x + y - 5)(x - 2y + 3)$$

De análoga manera se analiza la naturaleza de las otras conicas: B y C.

B.- AXIOMATICA DE LOS REALES.

EJER.1 Usando axiomática de los reales, demostrar que:

$$0 = -0 \qquad\qquad (1)^{-1} = 1$$

SOL: Como: -0 es el opuesto de 0, tenemos: $0 + (-0) = 0$ pero: $0 + 0 = 0$ y como el opuesto es unico, concluimos $0=-0$

El inveros de 1 es 1^{-1}, luego: $1\,1^{-1} = 1$ pero $1\,1 = 1$, pues 1 es elemento neutro de la multiplicación. Ahora como el inverso es único, concluimos: $1^{-1} = 1$.

EJER.2 Demostrar que:

i). $a + b = 0$ sii $a = -b$

j). $ab = 1$ sii $a = b^{-1}$ con $ab \neq 0$

SOL:

i). Sea $b + a = 0$, entonces como: $b + (-b) = 0$ y el opuesto de b es único, concluimos: $a = -b$.
Reciprocamente: $a = -b$, implica : $a+b = (-b)+b = 0$

j). Sea $ab = 1$, entonces como $bb^{-1} = 1$ y el inverso de b es único, queda: $a = b^{-1}$. Reciprocamente: $a = b^{-1}$, implica $ab = b^{-1}b = 1$.

EJER.3 Usando axiomática de los reales, demostrar que:

i). $(-a) + (-b) = -(a + b)$

j). $a - (b + c) = (a - b) - c$

k). $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$

SOL:

i). Hacemos ver primero que: $(-a) = (-1)a$. Para ello tenemos:

$$a + (-1)a = (\ 1 + (-1)\ )a = 0a = 0$$

Ahora como: $a + (-a) = 0$ y el opuesto es único, concluimos: $(-a) = (-1)a$. Asi:

$$(-a) + (-b) = (-1)a + (-1)b = (-1)(a + b) - (a + b)$$

j). De inmediato tenemos:

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= a + (-(b + c)) = a + (-1)(b + c) = \\ &= a + (-1)b + (-1)c \\ &= (a + (-1)b) + (-1)c \\ &= (a + (-b)) + (-c) = (a - b) - c \end{aligned}$$

k). $$\begin{aligned} (a - b) + (c - d) &= (a + (-b)) + (c + (-d)) \\ &= (a + c) + ((-b) + (-d)) \\ &= (a + c) + (-1)(b + d) \\ &= (a + c) - (b + d). \end{aligned}$$

EJER.4 Demostrar que:

i). $a = (-b)$ sii $(-a) = b$

j). $a = b^{-1}$ sii $a^{-1} = b$ con $ab \neq 0$

SOL:

i). Sea $a = (-b)$, entonces como: $b = -(-b)$ resulta $b = -a$. Recíprocamente si $(-a) = b$, como: $a=-(-a)$ resulta $a = -b$.

j). Sea $a = b^{-1}$, entonces como: $b = (b^{-1})^{-1}$ resulta $b = a^{-1}$. Recíprocamente si: $a^{-1} = b$, como: $a=(a^{-1})^{-1}$ resulta $a = b^{-1}$.

EJER.5 Usando axiomática de los reales, demostrar que:

i). $(a/b)c = (c/b)a = (ac/b)$

j). $a/(bc) = (a/b)\ (1/c)$

k). $(a/b) = (c/d)$ sii $ad = bc$

l). $(ab/cb) = a/c$ con: $cb \neq 0$.

SOL:

i). $(a/b)c = (ab^{-1})c = a(b^{-1}c) = a(c/b)$

$(a/b)c = (ab^{-1})c = (ac)b^{-1} = (ac/b)$

j). $a/(bc) = a(bc)^{-1} = a(b^{-1}\ c^{-1}) = (ab^{-1})c^{-1}$

$= (a/b)\ (1/c)$.

k). $a/b = c/d$ sii: $ab^{-1} = cd^{-1}$

sii: $ab^{-1}(bd) = cd^{-1}(bd)$

k). $a/b = c/d$ sii: $a(b^{-1}b)d = c(d^{-1}d)b$

sii: $ad = cb$.

l). $(ab/cb) = ab(cb)^{-1} = ab(b^{-1}c^{-1})$

$= a(bb^{-1})c^{-1} = ac^{-1} = (a/c)$.

EJER.6 Demostrar que:

i). $a = b$ sii: $(-a) = (-b)$

j). $a = b$ sii: $a^{-1} = b^{-1}$ con $ab \neq 0$.

SOL:

i). $a = b$ sii: $b + 0 = a + 0$

sii: $b + (-a) + (a) = a + (-b) + (b)$

sii: $(a + b) + (-a) = (-b) + (a + b)$

sii: $-a = -b$

j). $a = b$ sii: $b \; 1 = a \; 1$

sii: $b \; (aa^{-1}) = a(bb^{-1})$

sii: $(ba)a^{-1} = (ab)b^{-1}$

sii: $a^{-1} = b^{-1}$

EJER.7 Usando axiomática de los reales demostrar que:

i). $(a/b)\,(c/d) = ac/bd$ con $bd \neq 0$

j). $(a/b) \,/\, (c/d) = ad/bc$ con $bc \neq 0$

k). $(a/b) + (c/d) = (ad + bc) \,/\, bd$ con $bd \neq 0$

SOL:

SOL:

i). $(a/b)(c/d) = (ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac)(b^{-1}d^{-1})$
$= (ae)(bd)^{-1} = ac/bd$

j). $(a/b) \,/\, (c/d) = (ab^{-1}) \,/\, (cd^{-1})$
$= (ab^{-1})\,(cd^{-1})^{-1} = (ab^{-1})(c^{-1}d) =$
$= (ae)(bc)^{-1} = ac/bc$

k). $(a/b) + (c/d) = ab^{-1} + cd^{-1}$
$= ab^{-1}(dd^{-1}) + cd^{-1}(bb^{-1})$
$= ad(b^{-1}d^{-1}) + cb(b^{-1}d^{-1})$
$= (ad + cb)\,(bd)^{-1}$
$= (ad + cb) \,/\, bd.$

EJER.8 Usando axiomática de los reales, demostrar que:

i). $a/b = c/d$ sii $a/c = b/d$

j). $a/b = c/d$ sii $a/b = (a + c) \,/\, (b + d)$

k). $a/b = c/d$ sii $(a+b)/(a-b) = (c+d)/(c-d).$

SOL:

i). $a/b = c/d$ sii $ab^{-1} = cd^{-1}$
sii $(ab^{-1})bc^{-1} = (cd^{-1})bc^{-1}$
sii $a(b^{-1}b)c^{-1} = b(cc^{-1})d^{-1}$
sii $ac^{-1} = bd^{-1}$
sii $a/c = b/d.$

j). $a/b = c/d$ sii $ab^{-1} = cd^{-1}$

j). $a/b = c/d$ sii $ab^{-1}(bd) = cd^{-1}(db)$

sii $a(b^{-1}b)d = c(d^{-1}d)b$

sii $ad = cb$

sii $ad + ab = cb + ab$

sii $a(d + b) = b(c + a)$

sii $a/b = (a + c) / (b + d)$

k). $a/b = c/d$ sii $a/c = b/d = (-b)/(-d)$

sii $a/c = (a + b)/(c+d) = (a-b)/(c-d)$

sii $(a + b)/(a - b) = (c + d)/(c - d)$.

<u>EJER</u>.9 Demostrar que:

i). Para $a \neq 0$, se tiene $a^{-1} \neq 0$

j). Para $b \neq 0$, se tiene $(a/b) = 0$ si y solo si: $a = 0$.

<u>SOL</u>:

i). Como $a \neq 0$, existe a^{-1}, tal que: $a\,a^{-1} = 1$ y entonces $a^{-1} \neq 0$, pues si fuera $a^{-1} = 0$, se tendría: $aa^{-1} = 0 \neq 1$.

j). Como $b \neq 0$, suponiendo $a = 0$ tenemos: $a/b = 0b^{-1} = 0$. Reciprocamente, sea $a/b = 0$, con $b \neq 0$, entonces: $0 = a/b = ab^{-1}$ y como $b^{-1} \neq 0$, concluimos: $a = 0$.

<u>EJER</u>.10 Demostrar que:

i). $(-1)(-1) = 1$

j). $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$ con $a \neq 0$

k). $(a/-b) = (-a/b) = -(a/b)$.

SOL:

i). Sabemos que: $(-1) + 1 = 0$, luego:

$$
\begin{aligned}
((-1) + 1)(-1) &= 0(-1) \\
(-1)(-1) + 1(-1) &= 0 \\
(-1)(-1) + 1(-1) + 1 &= 1 \\
(-1)(-1) + 1((-1) + 1) &= 1 \\
(-1)(-1) + 1\ 0 &= 1 \\
(-1)(-1) &= 1
\end{aligned}
$$

j). $(-a)^{-1} = ((-1)\ a)^{-1} = (-1)^{-1}\ a^{-1}$

$= (-1)^{-1}\ 1\ a^{-1} = (-1)^{-1}\ (-1)(-1)\ a^{-1}$

$= 1(-1)\ a^{-1} = (-1)\ a^{-1} = -(a^{-1})$

k). $(a/-b) = a(-b)^{-1} = a(-1)b^{-1} = (a(-1))b^{-1}$

$= (-a)b^{-1} = (-a/b)$

$(a/-b) = a(-b)^{-1} = a(-1)b^{-1} = (-1)(a/b) = -(a/b)$

C.- DESIGUALDADES.

EJER.1 Si a, b, c son reales positivos, demostrar que:

i). $(a/b) + (b/a) \geqslant 2$

j). $(1/a + 1/b + 1/c) \geqslant 9/(a + b + c)$.

SOL: Para (i), tenemos: $(a - b)^2 \geqslant 0$, luego: $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ y entonces:

$$(a^2 + b^2)/ab = a/b + b/a \geqslant 2$$

Para (j), tenemos:

$$(a+b+c)(1/a+1/b+1/c) = 3+(a/b+b/a) + (b/c+c/b) + (c/a+a/c) \geqslant 9$$

$$(1/a+1/b+1/c) \geqslant 9 / (a + b + c).$$

EJER.2 Sean: a, b, c y d reales positivos tales que: $(a < b)$ y $(c > d)$. Demostrar que: $(a/c) < (b/d)$.

SOL: Como $(c > 0)$ y $(d > 0)$ tenemos que:

$(c > d)$ implica $(1/c) < (1/d)$.

Ahora de: $(a < b)$ y $(1/c) < (1/d)$, obtenemos: $(a/c) < (b/d)$.

EJER.3 Sean: a y b reales positivos, demostrar que: $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3$.

<u>SOL</u>: Si $(a > b) \veebar (a < b)$, los números $(a - b)$ y $(a^3 - b^3)$ son ambos positivos o ambos negativos, luego:

$$(a - b)(a^3 - b^3) \geqslant 0$$
$$a(a^3 - b^3) \geqslant b(a^3 - b^3)$$
$$a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3.$$

<u>EJER</u>.4 Sea a, b, c reales positivos demostrar que:

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geqslant 6abc.$$

<u>SOL</u>: De inmediato tenemos:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \qquad b^2 + c^2 \geqslant 2bc \qquad c^2 + a^2 \geqslant 2ca$$

Multiplicando respectivamente por: c, a y b y luego sumando se tiene:

$$a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + a^2b \geqslant 6abc$$
$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geqslant 6abc.$$

<u>EJER</u>.5 Si a y b son reales positivos demostrar que:

i). $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$

j). $a^3 + 1/a^3 \geqslant a + 1/a$

<u>SOL</u>:

i). $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = a^3 + b^3 - ab(a + b) =$
$= (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b)$
$= (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a + b)(a - b)^2 \geqslant 0.$

Así tenemos: $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$.

j). Haciendo en la desigualdad anterior: $b = 1/a$, obtenemos: $a^3 + 1/a^3 \geqslant a + 1/a$.

EJER.6 Sea a y b reales positivos. Demostrar que:

$$(a + b)/2 \geqslant \sqrt{ab} \geqslant 2ab/(a + b)$$

SOL:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0$$

luego:

$$(a + b)/2 \geqslant \sqrt{ab} \qquad (1)$$

De aquí, tomando recíproco, se tiene:

$$2/(a + b) \leqslant 1/\sqrt{ab}$$

$$2ab/(a + b) \leqslant ab/\sqrt{ab} = \sqrt{ab} \qquad (2)$$

Resumiendo (1) y (2), tenemos:

$$(a + b)/2 \geqslant \sqrt{ab} \geqslant 2ab/(a + b)$$

EJER.7 Si a, b y c son reales positivos, demostrar que:

$$2/(a + b) + 2/(b + c) + 2/(c + a) \leqslant 1/a + 1/b + 1/c$$

SOL: Sabemos que: $(a + b)/2 \geqslant 2ab/(a + b)$ luego:

$$2/(a + b) \leqslant 1/2b + 1/2a$$

$$2/(b + c) \leqslant 1/2c + 1/2b$$

$$2/(c + a) \leqslant 1/2a + 1/2c$$

Sumando miembro a miembro se tiene:

$$2/(a + b) + 2/(b + c) + 2/(c + a) \leqslant 1/a + 1/b + 1/c.$$

EJER.8 Si a, b, c, d son reales positivos demostrar que:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{d})\sqrt{b}+(\sqrt{b}+\sqrt{d})\sqrt{c}+$$
$$+(\sqrt{c}+\sqrt{d})\sqrt{a}\leqslant(3/2)(a+b+c+d).$$

SOL: De inmediato tenemos:

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab} \qquad a+c\geqslant 2\sqrt{ac}$$
$$a+d\geqslant 2\sqrt{ad} \qquad b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$$
$$b+d\geqslant 2\sqrt{bd} \qquad c+d\geqslant 2\sqrt{cd}$$

Sumándolas todas mienbro a mienbro y factorizando adecuadamente se tiene la tesis.

EJER.9 Si $a > b > 0$, demostrar que: $a^a b^b > a^b b^a$.

SOL: De $a > b > 0$, obtenemos $a/b > 1$. Luego:

$$(a/b)^{a-b} > 1 \quad y \quad (a/b)^a / (a/b)^b > 1$$
$$(a/b)^a \; (b/a)^b > 1 \quad y \quad a^a b^b > a^b b^a$$

EJER.10 Si a, b, c son reales positivos, demostrar que:
$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$.

SOL:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+bc^2+b^2c+2abc$$
$$= a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$$

Completando el cuadrado del binomio en cada parentesis, queda:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc$$

de donde:

$$(b + c)(c + a)(a + b) \geqslant 8abc$$

EJER. 11 Si a, b, c son reales positivos demostrar que:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 9abc.$$

SOL:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = a^3+b^3+c^3+ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2$$

$$= a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Pero: $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$ y además:

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geqslant 6abc.$$

luego:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 9abc.$$

EJER. 12 Si a, b, c son reales positivos demostrar que:

$$2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant a^3 + b^3 + c^3 + 15abc.$$

SOL: Sabemos que:

$$a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(b + a) \geqslant 6abc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$$

luego:

$$2a^2(b + c) + 2b^2(c + a) + 2c^2(b + a) \geqslant 12abc$$

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$$

de donde sumando y factorizando:

$$2(a^2(a+b+c) + b^2(c+a+b) + c^2(b+a+c)) \geqslant a^3+b^3+c^3 + 15ab$$

$$2(a + b + c)(a^2+ b^2+ c^2) \geqslant a^3+ b^3+ c^3+ 15ab$$

EJER.13 Si a, b, y c son reales positivos demostrar que:

i). $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \geqslant 6abc$

j). $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geqslant 9abc.$

SOL: Para demostrar (i) tenemos: $a^2+ b^2 \geqslant 2ab$

$b^2+ c^2 \geqslant 2bc$ $\qquad c^2+ a^2 \geqslant 2ca$

Multiplicando respectivamente por c, a, b y sumando resulta:

$$ca^2+ cb^2+ ab^2+ ac^2+ bc^2+ ba^2 \geqslant 6abc \qquad (1)$$

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geqslant 6abc \qquad (i)$$

j). Sumando a ambos mienbros de (1) $3abc$, tenemos:

$$(a^2b+abc+a^2c) + (ab^2+b^2c+abc) + (abc+bc^2+c^2a) \geqslant 9abc$$

o sea:

$$a(ab+bc+ca) + b(ab+bc+ca) + c(ab+bc+ca) \geqslant 9abc$$

EJER.14 Si a, b, c son reales positivos, demostrar que:

$$(a^2+b^2)/(a+b)+(b^2+c^2)/(b+c)+(c^2+a)/(c+a) \geqslant a+b+c.$$

SOL: $a^2+ b^2 \geqslant 2ab$ implica $2(a^2+ b^2) \geqslant (a + b)^2$

luego:

$$(a^2 + b^2) / (a + b) \geqslant (a + b) / 2$$

Análogamente, se tiene:

$$(b^2 + c^2) / (b + c) \geqslant (b + c) / 2$$

$$(c^2 + a^2) / (c + a) \geqslant (c + a) / 2$$

Finalmente sumando, resulta la tesis.

EJER.15 Si a, b, y c son reales positivos, demostrar que:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \leqslant 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

SOL:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \quad \text{implica} \quad a^2 - ab + b^2 \geqslant ab$$

de donde multiplicando por $(a + b)$, tenemos:

$$ab(a + b) \leqslant (a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3$$

Análogamente, se encuentra:

$$bc(b + c) \leqslant (b^2 - bc + c^2)(b + c) = b^3 + c^3$$

$$ca(c + a) \leqslant (c^2 - ca + a^2)(c + a) = c^3 + a^3$$

Finalmente sumando se tiene el resultado esperado.

EJER.16 Si a, b, c son reales positivos demostrar que:

$$(a + b - c)^2 > 4(ab - bc - ca)$$

SOL:

SOL:

$$A = (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$A = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc + 4ab - 4bc$$

$$A = (a - b - c)^2 + 4ab - 4bc$$

$$A = (a - b - c)^2 + 4(ab - bc - ca) + 4ca$$

luego:

$$(a + b - c)^2 > 4(ab - bc - ca).$$

EJER.1.7 Si a, b, c son reales cualesquiera demostrar que:

$$(a - b + c)(b + c - a) \leqslant c^2.$$

SOL. De inmediato tenemos:

$$(a - b + c)(b + c - a) = (\, c + (a - b) \,)(\, c - (a - b) \,)$$

$$= c^2 - (a - b)^2 \leqslant c^2$$

EJER.1.8 Si a, b, c son reales positivos, demostrar que:

$$(a + b + c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

SOL.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

pero:

$$2ab \leqslant a^2 + b^2 \qquad 2bc \leqslant a^2 + c^2 \qquad 2bc \leqslant b^2 + c^2$$

entonces: $(a + b + c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

EJER.1.9 Sea: a, b y c, reales cualesquiera demostrar que:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a + b + c).$$

SOL: Sabemos que:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \qquad b^2 + c^2 \geqslant 2bc \qquad c^2 + a^2 \geqslant 2ca$$

Multiplicando estas expresiones respectivamente por: c^2, a^2 y b^2 y luego sumando se obtiene la tesis.

EJER.20 Sea a, b y c reales demostrar que:

$$(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca).$$

SOL: De inmediato tenemos:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \qquad b^2 + c^2 \geqslant 2bc \qquad c^2 + a^2 \geqslant 2ca$$

de donde sumando, se obtiene:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant (ab + bc + ca)$$

pero

$$2(ab + bc + ca) \geqslant 2(ab + bc + ca)$$

entonces sumando nuevamente, resulta:

$$(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$$

EJER.21 Demostrar que cualesquiera sean los reales: a, b, c y d, se tiene:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd.$$

SOL: De inmediato tenemos:

$$a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2 \qquad y \qquad c^4 + d^4 \geqslant 2c^2b^2$$

luego:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 2(a^2b^2 + c^2b^2)$$

pero:

$$a^2b^2 + c^2b^2 \geqslant 2\sqrt{a^2b^2c^2d^2} = 2abcd$$

Asi:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd.$$

EJER.22 Demostrar que cualesquiera sean los reales: a, b y c, se tiene:

$$A = 4a(a + b)(a + c)(a + b + c) + b^2c^2 \geqslant 0$$

SOL:

$$4a(a+b)(a+c)(a+b+c) = 4(a+b)(a+c)\ a\ (a+b+c)$$

$$A = 4(a^2 + ac + ab + bc)(a^2 + ab + ac) + b^2c^2$$

$$A = 4(a^2 + ab + ac)^2 + 4(a^2 + ab + ac)bc + b^2c^2$$

$$A = (\ 2(a^2 + ab + ac) + bc\ )^2 \geqslant 0.$$

Asi tenemos:

$$4a(a + b)(a + c)(a + b + c) + b^2c^2 \geqslant 0$$

EJER.23 Demostrar que si a y b son reales cualesquiera, se tiene:

$$a^2 + 2ab + 3b^2 + 2a + 6b + 4 \geqslant 1.$$

SOL:

$$A = a^2 + 2ab + 3b^2 + 2a + 6b + 4$$

$$A = a^2 + b^2 + 1^2 + 2ab + 2a\cdot 1 + 2b\cdot 1 + 2b^2 + 4b + 3$$

$$A = (a + b + 1)^2 + 2(b^2 + 2b + 1) + 1$$

$$A = (a + b + 1)^2 + 2(b + 1)^2 + 1 \geqslant 0$$

Asi tenemos:

$$a^2 + 2ab + 3b^2 + 2a + 6b + 4 \geqslant 0.$$

EJER.24 Sean a, b, y c reales positivos tales que la suma de dos de ellos es mayor que el tercero. Demostrar que:

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) < abc$$

SOL: De inmediato tenemos:

$$a^2 - (b - c)^2 \leqslant a^2$$

o sea:

$$(a + b - c)(a - b + c) \leqslant a^2$$

Analogamente se obtiene:

$$(b + c - a)(b - c + a) \leqslant b^2$$

$$(c + a - b)(c - a + b) \leqslant c^2$$

y multiplicando mienbro a mienbro queda:

$$(a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2 \leqslant a^2b^2c^2.$$

EJER.25 Sean a, b, y c reales positivos tales que la suma de dos de ellos es mayor que el tercero. Demostrar que:

$$1/(a+b-c) + 1/(b+c-a) + 1/(c+a-b) \geqslant 1/a + 1/b + 1/c$$

SOL: La desigualdad: $a^2 \geqslant a^2 - (b-c)^2$ nos da:

$$2a^2 \geqslant 2(a+b-c)(a-b+c)$$

$$a(a+b-c+a-b+c) \geqslant 2(a+b-c)(a-b+c)$$

$$a(a+b-c) + a(a-b+c) \geqslant 2(a+b-c)(a-b+c)$$

de donde dividiendo por: $a(a+b-c)(a-b+c)$ queda:

$$1/(a+b-c) + 1/(c+a-b) \geqslant 2/a$$

Analogamente se tiene:

$$1/(b+c-a) + 1/(a+b-c) \geqslant 2/b$$

$$1/(c+a-b) + 1/(b+c-a) \geqslant 2/c$$

Finalmente sumando mienbro y mienbro y dividiendo por 2 se tiene la desigualdad pedida.

EJER.26 Sea (a,b,c) y (x,y,z) , reales tales que:

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Demostrar que: $ax + by + cz \leqslant 1.$

SOL: De inmediato tenemos:

$$a^2 + x^2 \geqslant 2ax \qquad b^2 + y^2 \geqslant 2by \qquad c^2 + z^2 \geqslant 2cz$$

Sumando mienbro a mienbro y teniendo presente la hipótesis, resulta: $2 \geqslant 2(ax + by + cz)$. Asi entonces $ax + by + cz \leqslant 1$.

EJER.27 Sea a y b reales positivos tales que: $a + b = 1$, demostrar que: $a^4 + b^4 \geqslant 1/8$.

SOL:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 - 2ab$$

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = (1 - 2ab)^2$$

$$a^4 + b^4 = (1 - 2ab)^2 - 2a^2b^2$$

Además: $a + b = 1$, implica:

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2 = 1 - (a - b)^2 \leqslant 1$$

Asi: $ab \leqslant 1/4$ y entonces:

$$a^4 + b^4 \geqslant (1 - 2 (1/4)^2) - 2 (1/16) = 1/8.$$

EJER.28 Sea a y b reales positivos tales que: $a + b = 1$. Demostrar que:

$$(a + 1/a)^2 + (b + 1/b)^2 \geqslant 25/2$$

SOL:

$$(a + 1/a)^2 + (b + 1/b)^2 = a^2 + b^2 + 1/a^2 + 1/b^2 + 4$$

$$= (a + b)^2 - 2ab + (1/a - 1/b)^2 + 2/ab + 4.$$

Por otra parte: $a + b = 1$, implica $ab \leqslant 1/4$, pues:

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2 = 1 - (a - b)^2 \leqslant 1$$

Ahora de $4ab \leqslant 1$, tenemos:

$$(-2ab) \geqslant (-1/2) \quad y \quad (2/ab) \geqslant (+8)$$

Asi:

$$(a + 1/a)^2 + (b + 1/b)^2 \geqslant 1 - 1/2 + 8 + 4 = 25/2$$

EJER.29 Si a y b son reales positivos, tales que: $a^2+b^2=4$, demostrar que: $a^4 + b^4 + (1/a^4) + (1/b^4) \geqslant 17/2$

SOL: De inmediato tenemos:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 16 - 2a^2b^2$$

$$(1/a^4) + (1/b^4) = (1/a^2 - 1/b^2)^2 + 2/a^2b^2 \quad \text{luego:}$$

$$a^4 + b^4 + (1/a^4) + (1/b^4) \geqslant 16 - 2a^2b^2 + 2/a^2b^2$$

Por otra parte:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \qquad (a^2 + b^2)^2 = 16 \geqslant 4a^2b^2$$

Asi: $-2a^2b^2 \geqslant -8$ y $2/a^2b^2 \geqslant 1/2$ entonces:

$$a^4 + b^4 + (1/a^4) + (1/b^4) \geqslant 16 - 8 + 1/2 = 17/2.$$

EJER.30 Sean a, b y c, reales tales que: $a + b + c = 6$, demostrar que: $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 12$.

SOL: Considerando que:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \qquad b^2 + c^2 \geqslant 2bc \qquad c^2 + a^2 \geqslant 2ca$$

Sumando obtenemos: $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. Además:

$$36=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

luego: $ab+bc+ca=(36-(a^2+b^2+c^2))/2$

Asi: $a^2+b^2+c^2 \geqslant (36-(a^2+b^2+c^2))/2$

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant 36 \quad \wedge \quad a^2+b^2+c^2 \geqslant 12$$

EJER.31 Los reales a y b son tales que: $2a+4b=1$. Demostrar que: $a^2+b^2 \geqslant 1/20$.

SOL: $2a+4b=1$ sii $a=(1-4b)/2$, luego:

$$a^2+b^2=(1-4b)^2/4+b^2=(20b^2-8b+1)/4$$

$$=(100b^2-40b+5)/20 \qquad \text{Así:}$$

$$a^2+b^2-1/20=(100b^2-40b+4)/20=(10b-2)^2/20$$

Entonces: $a^2+b^2-1/20 \geqslant 0$.

EJER.32 Si $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ son reales positivos tales que: $a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots, a_n=1$, demostrar que:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n$$

SOL: Aprovechando que $(x+y)/2 \geqslant \sqrt{xy}$, tenemos:

$$1+a_1 \geqslant 2\sqrt{a_1} \qquad 1+a_2 \geqslant 2\sqrt{a_2} \quad \ldots \quad 1+a_n \geqslant 2\sqrt{a_n}$$

de donde multiplicando mienbro a mienbro queda:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n\sqrt{a_1a_2\ldots a_n} = 2^n$$

EJER.33 Demostrar que para todo entero positivo n, se tiene:

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots\ldots + 1/n^2 < 2 - 1/n.$$

SOL: Considerando que:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

obtenemos:

$$1/2^2 < 1/1 - 1/2$$

$$1/3^2 < 1/2 - 1/3$$

$$1/4^2 < 1/3 - 1/4$$

$$1/n^2 < 1/(n-1) - 1/n$$

de donde sumando mienbro a mienbro se tiene:

$$1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots\ldots + 1/n^2 < 1 - 1/n$$

EJER.34 Demostrar que para todo entero positivo n, se tiene:

$$\frac{1}{2} < \sqrt[n]{\frac{1\ 3\ 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2\ 4\ 6 \ldots\ldots\ldots\ldots 2n}} < 1$$

SOL:

$$1/2 = 1/2 < 1 \qquad 1/2 < 3/4 < 1 \qquad 1/2 < 5/6 < 1$$

$$1/2 < 7/8 < 1 \ldots\ldots\ldots \ 1/2 < (2n-1)/(2n) < 1$$

De donde multiplicando mienbro a mienbro se obtiene:

$$(1/2)^n < \frac{1\ 3\ 5\ldots\ldots(2n-1)}{2\ 4\ 6\ldots\ldots(2n)} < 1$$

y extrayendo raíz n-ésima se tien la tesis.

EJER.35 Demostrar que para todo entero positivo n, se tiene:

$$1\cdot 2\cdot 3 \ldots\ldots\ldots (n-1)n \leqslant (n+1)^n/2^n$$

SOL: Considerando que para a y b positivos, se cumple: $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, obtenemos:

$$n + 1 = (n-k) + (k+1) \geqslant 2\sqrt{(n-k)(k+1)}$$

Dando ahora a, k los valores: 0, 1, 2,....(n-1), resulta:

$$\begin{aligned} n + 1 &\geqslant 2\sqrt{n\cdot 1} \\ n + 1 &\geqslant 2\sqrt{(n-1)\cdot 2} \\ n + 1 &\geqslant 2\sqrt{(n-2)\cdot 3} \\ &\text{-----------------} \\ n + 1 &\geqslant 2\sqrt{1\cdot n} \end{aligned}$$

y multiplicando mienbro a mienbro resulta:

$$(n+1)^n \geqslant 2^n\sqrt{(1\ 2\ 3\ldots\ldots n)^2}$$

lo que demuestra la tesis propuesta.

EJER.36 Demostrar que para todo entero positivo n, se tiene:

$$(1 + 1/n)^n < (1 + 1/(n+1))^{n+1}$$

SOL: Cualesquiera sean los reales diferentes p y q, una simple división nos dá:

$$(p^{n+1} - q^{n+1})/(p - q) = p^n + p^{n-1}q + p^{n-2}q^2 + \ldots\ldots + q^n$$

Tomando ahora: $p > q > 1$, resulta $(p - q) > 0$. Además p^n es el mayor de todos los términos del segundo mienbro, entonces reemplazando cada uno de ellos por (p^n), resulta:

$$p^{n+1} - q^{n+1} < (p - q)(n + 1)p^n$$

Haciendo $p = (1 + 1/n)$ y $q = (1 + 1/(n + 1))$, se tiene:

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} < \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n})^n$$

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} - \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$$

lo que demuestra la tesis.

EJER. 37 Demostrar que para todo entero positivo n, se tiene:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots (n - 1)n \leqslant n^n/2^{n-1}$$

SOL: En el ejercicio anterior ha quedado probado que la expresión: $(1 + 1/n)^n$ crece cuando n crece. Asi el menor valor de ella es 2 que se obtiene para $n = 1$. Asi siempre:

$$(1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n \geqslant 2$$

Ahora, dando a n los valores: 1, 2, 3.....(n - 1) resulta:

$$(2/1)^1 \geqslant 2 \qquad (3/2)^2 \geqslant 2 \qquad (4/3)^3 \geqslant 2$$

$$(5/4)^4 \geqslant 2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\, n / n-1 \,)^{n-1} \geqslant 2$$

y multiplicando mienbro a mienbro queda:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdot \frac{5^4}{4^4} \cdots\cdots\cdots \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \geqslant 2^{n-1}$$

o sea:

$$n^{n-1}/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots\cdots (n-1)) \geqslant 2^{n-1}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots\cdots (n-1)n \leqslant n^n / 2^{n-1}$$

EJER.38 Si a y b son reales positivos diferentes, y n entero positivo demostrar que:

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} > \sqrt[n+1]{a^{n+1} + b^{n+1}}$$

SOL: Como $a \neq b$, supongamos: $0 < a < b$. Entonces:

$$(a^n + b^n)^{\frac{n+1}{n}} = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} (a^n + b^n)$$

$$= (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} a^n + (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} b^n$$

$$> (a^n)^{\frac{1}{n}} a^n + (b^n)^{\frac{1}{n}} b^n$$

$$(a^n + b^n)^{\frac{n+1}{n}} > aa^n + bb^n = a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} > (a^{n+1} + b^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}.$$

Resultado que se pedía establecer.

EJER.39 Demostrar que: $ab > 0$, implica: $(a > 0 \quad y \quad b > 0)$ $\veebar$ $(a < 0 \quad y \quad b < 0)$.

SOL: Como $ab > 0$, tenemos $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Ahora $a \neq 0$ implica: $(a > 0 \veebar a < 0)$. Si $a > 0$, tenemos: $a^{-1} > 0$ y entonces: de $ab > 0$, obtenemos:

$$a^{-1}(ab) > a^{-1}0 \qquad \text{o sea} \qquad b > 0$$

Contrariamente si $a < 0$, tenemos $a^{-1} < 0$ y entonces de $ab > 0$, obtenemos:

$$a^{-1}(ab) < a^{-1}0 \qquad \text{o sea} \qquad b < 0$$

EJER.40 Sea $a > 0$ entonces:

$$x^2 < a \quad \text{si y solo si} \quad -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$
$$x^2 > a \quad \text{si y solo si} \quad x < -\sqrt{a} \ \veebar \ x > \sqrt{a}$$

SOL: Supongamos primero: $x \geq 0$, entonces:

$$x^2 < a = (\sqrt{a})^2 \qquad \text{sii} \qquad x < \sqrt{a} \qquad (1)$$

Sea ahora $x < 0$, entonces $(-x) > 0$ y además:

$$x^2 = (-x)^2 < a = (\sqrt{a})^2 \qquad \text{sii} \qquad -x < \sqrt{a} \qquad (2)$$

Resumiendo (1) y (2) queda: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$

La segunda proposición se deja como ejercicio para el lector.

EJER.41 Sean a y b reales positivos entonces: $a^2 < b^2$

si y solo si $a < b$.

SOL: Veamos como: $a < b$, implica: $a^2 < b^2$

$(a < b \quad y \quad a > 0)$ implica: $a^2 < ab$

$(a < b \quad y \quad b > 0)$ implica: $ab < b^2$

entonces por transitividad: $a^2 < b^2$. Reciprocamente sea: $a^2 < b^2$. Supongamos que: $a^2 < b^2$, implica $a \geq b$. Entonces de $a \geq b$, concluimos $a^2 \geq b^2$, resultado que contradice la hipótesis: $a^2 < b^2$. Asi $a^2 < b^2$ implica $a < b$.

EJER.42 Demostrar que para todo $a > 0$ se tiene:

$$a^3 + 1/a^3 \geq a^2 + 1/a^2.$$

SOL: Multiplicando la tesis propuesta por a^3, resulta:

$$a^6 + 1 \geq a^5 + a$$

$$a^6 - a^5 \geq a - 1$$

$$a^5(a - 1) - (a - 1) \geq 0$$

$$(a - 1)(a^5 - 1) \geq 0$$

Ahora, cualquiera sea $a > 0$, se tiene que los números: $(a - 1)$ y $(a^5 - 1)$ son siempre del mismo signo, asi: $(a - 1)(a^5 - 1) \geq 0$ para todo $a > 0$. Finalmente haciendo el desarrollo desde esta ultima expresión se tiene la tesis.

EJER.43 Sean a, b, c y d reales positivos, tales que: $(a/b) < (c/d)$. Demostrar que:

$$(a/b) < (a + c) / (b + d) < (c/d).$$

D.- COTAS - INFIMO - SUPREMO.

EJER.1 Sea $A \subset X \subset R$, donde X es conjunto acotado. Demostrar que A es acotado.

SOL: Como X es acotado existen reales h y k, tales que:

$$\forall\, x \in X \quad \text{se tiene} \quad h \leq x \leq k$$

Ahora como $A \subset X$ tenemos que:

$$\forall\, a \in A \quad \text{se tiene} \quad a \in X$$

entonces como todo a es un x, resulta:

$$\forall\, a \in A \quad \text{se tiene} \quad h \leq a \leq k$$

lo que demuestra que A es acotado.

EJER.2 Demostrar que el conjunto vacío $\emptyset$ es acotado.

SOL: Sea (a,b) un intervalo en R. Dicho intervalo es acotado, pues a es cota inferior y b es cota superior.

Finalmente como: $\emptyset \subset (a,b)$ resulta que $\emptyset$ también es conjunto acotado.

Hacemos notar ademas que cada $b \in R$ es una cota superior de $\emptyset$, y por ello $\emptyset$ no tiene supremo.

EJER.3 Sea k cota superior del conjunto A. Si $k \in A$ se tiene: $k = \sup(A)$.

SOL: Como k es cota superior de A resulta:

$$1).\quad \forall\, x \in A \quad \text{se tiene:} \quad x \leq k$$

Ahora tomado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ resulta que:

$$2).\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{se tiene:} \quad k > M - \varepsilon = k - \varepsilon$$

Las condiciones (1) y (2) garantizan que k es supremo de A, pués basta recordar la definición de supremo.

EJER.4 Determine el supremo de los conjuntos:

$$A = \{ t \in R \mid t = 1 + 6x - x^2 \}$$
$$B = \{ t \in R \mid t = 2 + 6x - 3x^2 \}$$

SOL: Para el conjunto A, tenemos:

$$t = 1 + 6x - x^2 = -(x^2 - 6x - 1)$$
$$t = -(x^2 - 6x + 9 - 10) = 10 - (x - 3)^2$$

luego:

$$A = \{ t \in R \mid t = 10 - (x - 3)^2 \}$$

De aquí resulta que el supremo de A es $M = 10$, pues:
$M = 10$ es cota superior de A y además $10 \in A$.(Ver ejer. 1)

EJER.5 Sea h cota inferior de A. Si $h \in A$, demostrar que: $h = \inf(A)$.

<u>SOL</u>: Como h es cota inferior de A tenemos:

1). $\forall\, x \in A$ se cumple: $x \geq h$

Ahora tomado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, resulta:

2). $\forall\, \varepsilon > 0$ se tiene $h < h + \varepsilon = m + \varepsilon$

Las condiciones (1) y (2) garantizan que h es ínfimo de A, pués:

(1). Afirma que, no hay ningún número del conjunto A, inferior a: $m = h$

(2). Afirma que, tomado $\varepsilon > 0$ arbitrario hay un elemento del conjunto, el h, tal que: $h < m + \varepsilon = h + \varepsilon$

<u>EJER</u>.6 Determine el ínfimo de los conjuntos:

$$A = \{ u \in R \mid u = x^2 + 4x + 6 \}$$
$$B = \{ u \in R \mid u = u^2 - 5x + 6 \}$$

<u>SOL</u>: Para el conjunto A, tenemos:

$$u = x^2 + 4x + 6 = x^2 + 4x + 4 + 2$$
$$u = (u + 2)^2 + 2 \qquad \text{luego:}$$
$$A = \{ u \in R \mid u = (x + 2)^2 + 2 \}$$

Entonces el ínfimo de A es $m = 2$ pués: $2 \in A$ y además:

1). $\forall\, u \in A$ se tiene: $u \geq 2$

2). $\forall\, \varepsilon > 0$ se tiene: $2 < 2 + \varepsilon = m + \varepsilon$

EJER.7 Sea $A \subset R$ con $M = \sup(A)$ y $m = \inf(A)$. Se define: $\bar{A} = \{-x \mid x \in A\}$ Demostrar que: $\inf(\bar{A}) = -M$ y $\sup(\bar{A}) = -m$.

SOL: Como $M = \sup(A)$, tenemos:

1). $\forall x \in A$ se tiene: $x \leqslant M$

2). $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_0 \in A$ tal que: $x_0 > M - \varepsilon$

Ahora $(-x) \in \bar{A}$ si y solo si: $x \in A$ entonces:

1). $\forall (-x) \in \bar{A}$ se tiene: $-x \geqslant -M$

2). $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, -x_0 \in \bar{A}$, tal que: $-x_0 < -M + \varepsilon$

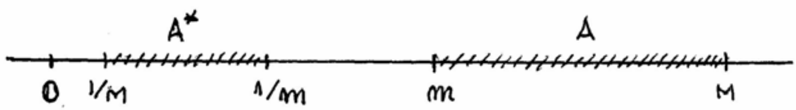
resultado que nos asegura que: $\inf(\bar{A}) = -M$. La otra proposición se demuestra en forma análoga.

EJER.8 Sea A un conjunto de reales positivos, tales que: $\operatorname{Sup}(A) = M$ e $\inf(A) = m \neq 0$. Se define: $A^* = \{1/x \mid x \in A\}$ Demostrar que: $\operatorname{Sup}(A^*) = 1/m$ e $\inf(A^*) = 1/M$.

SOL: Como m es ínfimo de A, tenemos:

1). $\forall x \in A$ se tiene: $x \geqslant m$

2). $\forall \varepsilon > 0$ existe $x_0 \in A$ tal que: $x_0 < m + \varepsilon$



Ahora como $(1/x) \in A^*$ sii: $x \in A$ queda:

1). $\forall\ (1/x) \in A^*$ se tiene $1/x \leqslant 1/m$

2). $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $(1/x_o) \in A^*$ tal que:

$$1/x_o > 1/(m + \varepsilon) > 1/m - \varepsilon$$

Asi: $(1/m)$ es supremo de $A^* = \{ 1/x \mid x \in A \}$

EJER.9 Sea $A \subset B$ conjuntos de reales con B acotado. Demostrar que:

$$\operatorname{Sup}(A) \leqslant \operatorname{Sup}(B) \qquad \operatorname{Inf}(A) \geqslant \operatorname{Inf}(B)$$

SOL: Supongamos que la proposición: $\operatorname{Sup}(A) \leqslant \operatorname{Sup}(B)$ es falsa, entonces se tiene: $M_a = \operatorname{Sup}(A) > \operatorname{Sup}(B) = M_b$, luego $M_a - M_b > 0$.

Por otra parte tomado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe x_o en A, tal que: $x_o > M_a - \varepsilon$. Particularmente tomando: $\varepsilon = M_a - M_b$, tenemos:

$$\exists\ x_o \in A \quad \text{tal que:} \quad x_o > M_a - M_a + M_b = M_b$$

Pero $x_o \in A$ implica $x_o \in B$, luego:

$$\exists\ x_o \in B \quad \text{tal que:} \quad x_o > M_b.$$

EJER.10 Sean A y B conjuntos de números reales y $k \in R$. Se definen los conjuntos:

$$A + B = (a + b \mid a \in A \wedge b \in B)$$

$$A \cdot B = (\, ab \mid a \in A \ \wedge \ b \in B)$$
$$kA = (\, ka \mid a \in A)$$
$$A + k = (\, a + k \mid a \in A\,)$$

i). Si A y B son acotados superiormente, demuestre que: $A + B$ también lo es y $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

j). Si A y B son no negativos y acotados superiormente, también lo es $A \cdot B$ y: $\sup(A \cdot B) = (\sup A)\,(\sup B)$.

k). Si A es acotado superiormente y $k > 0$. Demuestre que: kA también lo es y: $\sup(kA) = k \sup(A)$.

l). Si A es acotado superiormente, también lo es $(A + k)$ y además: $\sup(A + k) = k + \sup(A)$.

SOL:

(i). Sea M_a el supremo de A y M_b el supremo de B, entonces:

1). $\forall\, a \in A$ se tiene $a \leqslant M_a$

2). $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, a_o \in A$: $a_o > M_a - \varepsilon/2$

3). $\forall\, b \in B$ se tiene $b \leqslant M_b$

4). $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, b_o \in B$: $b_o > M_b - \varepsilon/2$

De aquí considerando primero (1) y (3) y luego (2) y (4) tenemos:

$$a + b \leqslant M_a + M_b \qquad \forall\, (a + b) \in A + B$$
$$a_o + b_o > M_a + M_b - \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

Es decir $M_a + M_b$ es el supremo de $A + B$, o sea:

$$Sup(A + B) = M_a + M_b = Sup(A) + Sup(B).$$

Las demostraciones de (j), (k) y (l) son análogas y quedan a cargo del estudiante.

EJER.11 Sea A un conjunto de reales acotado inferiormente. Demostrar que el conjunto de sus cotas inferiores es de la forma: $(-\infty, a]$.

SOL: Sea X el conjunto de las cotas inferiores de A. Como A es acotado inferiormente, tenemos que: $X \neq \emptyset$. Sea a el ínfimo de A. Hacemos ver que $X = (-\infty, a]$.

Como todo elemento x de X es cota inferior de A, tenemos $x \leqslant a$, asi: $x \in X$ implica: $x \in (-\infty, a]$, o sea $X \subset (-\infty, a]$.

Contrariamente tomado $x \in (-\infty, a]$, se tiene: $x \leqslant a$, es decir $x \in X$, luego: $(-\infty, a] \subset X$. Asi tenemos $X = (-\infty, a]$

EJER.12 Sea A un conjunto de reales acotado superiormente. Demostrar que el conjunto de sus cotas superiores es de la forma: $[a, +\infty)$

SOL: Análoga a la dada en el ejercicio precedente.

E.- **VALOR ABSOLUTO EN R.**

EJER.1 Resolver las ecuaciones:

a). $|3x - 1| = 2x + 5$

b). $|x - 1| = |x - 4|$

c). $|x - 1| + |x - 5| = 4.$

SOL: Veamos la ecuación (b) Si $x \geqslant 4$, tenemos:

$$|x - 1| = x - 1 \quad \wedge \quad |x - 4| = x - 4$$

Así en este caso la ecuación se reduce a: $x - 1 = x - 4$ que no admite solución.

Si $1 \leqslant x \leqslant 4$ tenemos:

$$|x - 1| = x - 1 \quad \wedge \quad |x - 4| = -(x - 4)$$

y entonces la ecuación es: $x - 1 = -x + 4$, que da la solución: $x = 5/2 = 2\frac{1}{2}$.

Finalmente si $x < 1$ tenemos:

$$|x - 1| = -(x - 1) \quad \wedge \quad |x - 4| = -(x - 4)$$

que tampoco dá solución.

Las dos ecuaciones restantes se resuelven de análoga manera.

<u>EJER</u>.2 Demostrar que: $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ con $x \neq 0$.

<u>SOL</u>: Sabemos que: $xx^{-1} = 1$ luego: $|xx^{-1}| = |1| = 1$. Asi $|x|\,|x^{-1}| = 1$ y entonces: $|x^{-1}| = 1/|x| = |x|^{-1}$.

<u>EJER</u>.3 Resolver las inecuaciones:

a). $x - |x| > 2$ b). $|x - 2| \leqslant 3$

c). $|x + 3| \geqslant 2$ d). $|x - 4| > x - 2$

<u>SOL</u>: Veamos el caso (d). Suponiendo primero: $x \geqslant 4$, la inecuación se expresa por:

$$x - 4 > x - 2 \quad \text{o sea} \quad -4 > -2$$

Expresión que nos garantiza que la inecuación propuesta no se cumple para ningún $x \geqslant 4$.

Supongamos ahora $x < 4$ entonces la inecuación pasa a ser:

$$-(x - 4) > x - 2 \quad \text{o sea} \quad -x + 4 > x - 2$$

de donde: $x < 6/2 = 3$. Ahora como la argumentación supone $x < 4$, la solución en este caso es:

$$\{\, x \mid (x < 4) \cap (x < 3) \,\} = \{\, x \in R \mid x < 3 \,\}$$

Los casos (a), (b) y (c) se resuelven de identica forma.

EJER.4 Resolver las inecuaciones:

a). $|x - 4| \leqslant 2 - x$ b) $|x + 2| > |3 - x|$

c). $|x - 7| < 5 < |5x - 25|$

SOL: Veamos el caso (a). Considerando que: $|x - 4|$ no es nunca negativo, el enunciado: $|x - 4| \leqslant 2 - x$, obliga que se tenga: $x \leqslant 2$. Ahora cuando $x \leqslant 2$, resulta: $(x - 4) < 0$, luego la inecuación propuesta se reduce a:

$$-(x - 4) \leqslant 2 - x \quad \text{o sea:} \quad 4 \leqslant 2$$

proposición falsa. Asi concluimos que la inecuación propuesta no tiene solución.

EJER.5 Demostrar que: $a \leqslant x \leqslant b$, es equivalente con:

$$|x - (a + b)/2| \leqslant (b - a)/2$$

SOL: De inmediato tenemos: $a \leqslant x \leqslant b$ si y solo si:

$$a - (a + b)/2 \leqslant x - (a + b)/2 \leqslant b - (a + b)/2$$
$$-(b - a)/2 \leqslant x - (a + b)/2 \leqslant (b - a)/2$$

Expresión que de acuerdo al teorema 1.34, es equivalente con:

$$|x - (a + b)/2| \leqslant (b - a)/2.$$

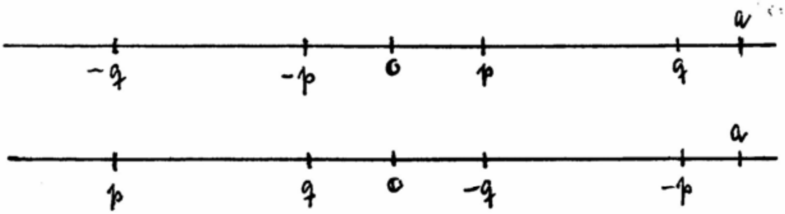
EJER.6 Un conjunto $S = \{ x \mid x \in R \}$ esta acotado si y solo si: $|x| < a$ para todo $x \in S$

SOL: Supongamos primero: $|x| < a$ para todo $x \in S$, entonces por teorema 1.34 tenemos que:

$$-a < x < a \quad \forall\, x \in S$$

es decir el conjunto S está acotado.

Reciprocamente supongamos S acotado, entonces existen p y q tales que: $p < x < q$ para todo $x \in S$.



Luego tomando un real a, tal que, $a > q \ \wedge \ a > (-p)$, resulta: $-a < p$ y entonces:

$$-a < p < x < q < a$$

es decir: $|x| < a$ para todo $x \in S$.

EJER.7 Demostrar que: $|x| = \sqrt{x^2}$.

SOL: Si $x \geqslant 0$, sabemos que: $|x| = x$. Además: $\sqrt{x^2} = x$

Luego: $|x| = \sqrt{x^2}$.

Contrariamente si: $x < 0$, tenemos: $|x| = -x$

Además: $(-x)(-x) = (-x)^2 = x^2$, luego: $\sqrt{x^2} = -x$, y entonces nuevamente tenemos: $|x| = \sqrt{x^2}$.

EJER.8 Aprovechando que: $|x| = \sqrt{x^2}$ demostrar que:

$$|xy| = |x||y| \qquad\qquad |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

SOL: Para la igualdad tenemos:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\ \sqrt{y^2} = |x|\,|y|.$$

Para establecer la desigualdad tenemos:

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2$$

$$|x + y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

$$|x + y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2$$

de donde: $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

EJER.9 Representar en un plano cartesiano, los conjuntos:

$$A = \{(x,y) \mid |x| + |y| = 1\}$$

$$B = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$$

$$C = \{(x,y) \mid |x| - |y| = 1\}$$

$$D = \{(x,y) \mid |x| - |y| \leqslant 1\}$$

SOL: Para el conjunto A la expresión: $|x| + |y| = 1$

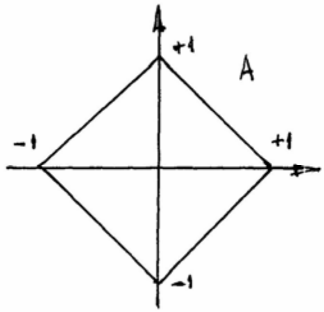
se reduce a:

En el primer cuadrante: $x + y = 1$

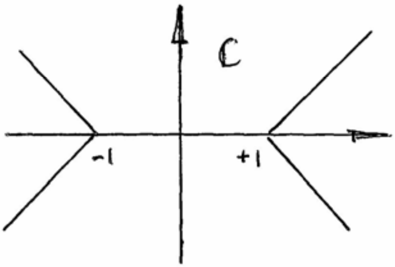
En el segundo cuadrante: $-x + y = 1$

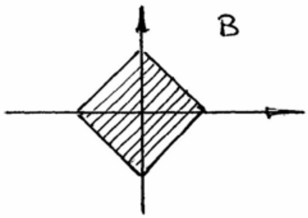
En el tercer cuadrante: $-x - y = 1$

En el cuarto cuadrante: $x - y = 1$



Trazos que graficados dan:





EJER.10 Representar en un plano cartesiano las curvas:

$$y = |x - 2| + (1/2)\,|x - 5|$$
$$y = |x - 3| - 2\,|x + 1| + 2|x| - x + 1$$

SOL: Veamos la primera de ellas. Para $x < 2$, tenemos:

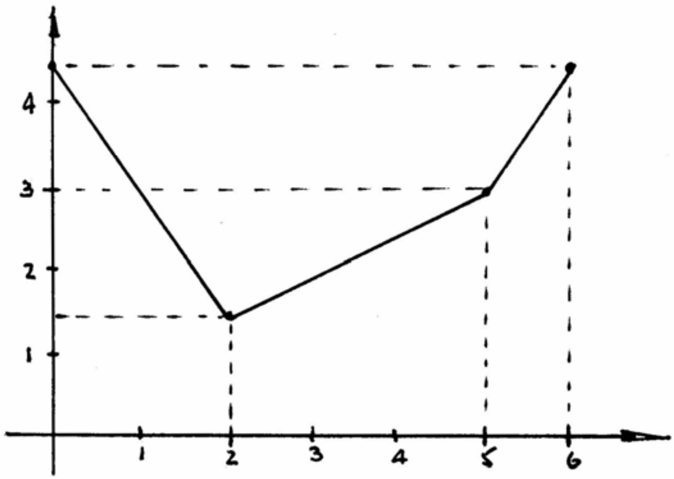
$$y = -x + 2 + (1/2)(-x + 5) = (-3/2)x + 9/2$$

Para: $2 \leq x \leq 5$, resulta:

$$y = x - 2 + (1/2)(-x + 5) = (1/2)x + 1/2$$

Finalmente para: $x > 5$, tenemos:

$$y = x - 2 + (1/2)(x - 5) = (3/2)x - 9/2$$



La otra función admite solución análoga.

EJER.11 Sea $A = \{ x \in R \mid \; |x+1| + |x| < 2$ determinar Sup(A) e Inf(A).

SOL: Veamos cuales son los $x \in R$, que componen al conjunto A.

Si $x < -1$ tenemos: $|x+1| = -x-1 \quad \wedge$ $|x| = -x$, asi resulta:

$$|x+1| + |x| = -x - 1 - x < 2 \quad \wedge \quad x > -3/2$$

Luego: $\{ x \mid x < -1 \} \cap \{ x \mid x < -3/2 \} = \{ x \mid -3/2 < x < -1 \}$

Ahora cuando: $-1 \leqslant x \leqslant 0$ tenemos:

$$|x+1| + |x| = x + 1 - x = 1 < 2$$

Asi todo punto del intervalo $[-1, 0]$ es solución de la inecuación.

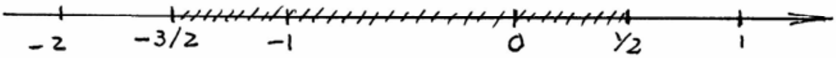
Finalmente si $x > 0$ tenemos:

$$|x + 1| + |x| = x + 1 + x = 2x + 1 < 2$$

de donde: $x < 1/2$ que junto con $x > 0$ nos dá la solución: $0 < x < 1/2$.

Resumiendo las ideas precedentes tenemos que:

$$A = \{ x \mid |x + 1| + |x| < 2 \}$$
$$A = \{ x \mid -3/2 < x < 1/2 \}$$



De aquí concluimos que: $\text{Inf}(A) = -3/2$ y $\text{Sup}(A) = 1/2$.

EJER.12 Demostrar que:

a). $|x| = \text{máx}(x, -x)$

b). $\text{máx}(x,y) = (x + y + |y - x|)/2$

c). $\text{mín}(x,y) = (x + y - |y - x|)/2$

SOL: a) Sabemos que:

$$\text{máx}(x, -x) = \begin{cases} x & \text{sii } x \geq -x \\ -x & \text{sii } -x > x \end{cases}$$

Ahora: $(x \geqslant -x)$ sii $(2x \geqslant 0)$ sii $(x \geqslant 0)$

Además: $(-x > x)$ sii $(-2x > 0)$ sii $(x < 0)$

Entonces la definición de máx $(x, -x)$, se reduce a:

$$\text{máx}(x, -x) = \begin{cases} x & \text{sii} \quad x \geqslant 0 \\ x & \text{sii} \quad x < 0 \end{cases}$$

que comparada con la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{sii} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{sii} \quad x < 0 \end{cases}$$

nos permite concluir: máx $(x, -x) = |x|$

b). Cuando $x \geqslant y$ tenemos:

$$(x + y + |y - x|)/2 = (x + y - y + x)/2 = x$$

Contrariamente cuando $x < y$ resulta:

$$(x + y + |y - x|)/2 = (x + y + y - x)/2 = y$$

Asi entonces:

$$\text{máx}\ (x, y) = (x + y + |y - x|)/2.$$

c). La demostración de esta proposición es identica a la dada en el caso (b) y queda a cargo del lector.

F.- DESIGUALDADES.

EJER.1 Si $a > 0$, demostrar que: $\log(a) \leqslant n(\sqrt[n]{a} - 1)$.

SOL: Sabemos que para $x > 0$, se tiene: $\log(x) \leqslant x - 1$.

Haciendo $x = \sqrt[n]{a}$, resulta:

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log(a) \leqslant \sqrt[n]{a} - 1$$

luego: $\log(a) \leqslant n(\sqrt[n]{a} - 1)$.

EJER.2 Si $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ son reales positivos, tales que: $a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n = 1$, demostrar que: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geqslant n$

SOL: El teorema: $A \geqslant G$ nos dá de inmediato:

$$(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)/n \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n} = 1$$

de donde: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n \geqslant n$.

EJER.3 Si a, b, c son positivos demostrar que:

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) \geqslant 9abc$$

SOL: $a + b + c \geqslant 3 \sqrt[3]{abc}$

$$ab + bc + ca \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Multiplicando mienbro a mienbro se tiene la tesis.

EJER.4 Si a, b, c,.......f, q son positivos demostrar que:

i). $a/b + b/c + c/d + d/a \geqslant 4$

j). $(a/e + b/f + c/g)(e/a + f/b + g/c) \geqslant 9$

SOL:

i). $a/b + b/c + c/d + d/a \geqslant 4\sqrt[4]{(a/a)(b/b)(c/c)(d/d)} = 4$

j). $a/e + b/f + c/g \geqslant 3\sqrt[3]{(a/e)(b/f)(c/g)}$

$e/a + f/b + g/c \geqslant 3\sqrt[3]{(e/a)(f/b)(g/c)}$

Multiplicando las dos últimas se tiene (j) de inmediato.

EJER.5 Si a, b, c son reales positivos tales que la suma de dos de ellos es mayor que el tercero, demostrar que:

$$(a + b + c)^3 \geqslant 27(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

SOL: Sea: $x = a + b - c$ $y = b + c - a$ $z = c + a - b$
entonces:

$$x + y + z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$$

luego:

$$(a + b + c)^3 \geqslant 27(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

EJER.6 Si a, b, c, son reales positivos demostrar que:

$$2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 15abc + a^3 + b^3 + c^3$$

SOL: Aprovechando que $A \geqslant G$, tenemos:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3\sqrt{a^3b^3c^3} = 3abc$$

y

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geqslant 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}$$

entonces sumando: $a^3 + b^3 + c^3$ a ambos mienbros:

$$a^2(a+b+c) + b^2(a+b+c) + c^2(a+b+c) \geqslant 6abc + a^3 + b^3 + c^3$$

$$2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 12abc + 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

Finalmente sumando el primer y último renglón se tiene la tesis.

EJER.7 Si $s = a + b + c + d$ con a, b, c y d positivos demostrar que: $(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) \geqslant 81abcd$.

SOL: Aprovechando que $A \geqslant G$, tenemos:

$$s - a = b + c + d \geqslant 3\sqrt[3]{bcd}$$

$$s - b = a + c + d \geqslant 3\sqrt[3]{acd}$$

$$s - c = a + b + d \geqslant 3\sqrt[3]{abd}$$

$$s - d = a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

de donde multiplicando queda:

$$(s - a)(s - b)(s - c)(s - c) \geqslant 81abcd$$

EJER.8 Si n es entero positivo, demostrar que:

$$(n + 1)^{n+1} \leqslant n^n\, 2^{n+1}$$

SOL: Aplicando $A \geqslant G$, al conjunto de números:

$$a_1 = a_2 = \ldots\ldots\ldots = a_n = 1/n \qquad y \qquad a_{n+1} = 1$$

resulta:

$$\frac{n(1/n) + 1}{n + 1} \geqslant \sqrt[n+1]{(1/n)^n}$$

$$\left(\frac{n + 1}{2}\right)^{n+1} \leqslant n^n$$

$$(n + 1)^{n+1} \leqslant n^n \, 2^{n+1}$$

EJER.9 Si a y b son reales positivos, demostrar que:

$$(a + b)^7 < 64(a^7 + b^7)$$

SOL: El teorema 2.4 nos dá:

$$(a^7 + b^7)/2 > ((a + b)/2)^7$$

luego:

$$64(a^7 + b^7) > (a + b)^7$$

EJER.10 Si a y b son reales positivos demostrar que:

$$(a + b)^n < 2^{n-1}(a^n + b^n)$$

SOL: Análoga a la dada en el ejercicio anterior.

EJER.11 Si r es un real positivo y n es entero positivo, demostrar que:

$$(1 + \frac{r}{n})^n < (1 + \frac{r}{n+1})^{n+1}$$

SOL: Aplicando el teorema $A \geqslant G$, a los reales positivos:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_n = 1 + r/n \quad y \quad a_{n+1} = 1$$

tenemos:

$$\frac{n(1 + r/n) + 1}{n + 1} > \sqrt[n+1]{(1 + r/n)^n}$$

$$\frac{n + r + 1}{n + 1} > \sqrt[n+1]{(1 + r/n)^n}$$

$$(1 + r/(n + 1))^{n+1} > (1 + r/n)^n$$

EJER.12 Si: a, b, c, d son reales positivos demostrar que:

$$(a + b + c + d)^3 < 16(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$$

SOL: El teorema 2.4 nos dá:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}{4} > \left(\frac{a + b + c + d}{4}\right)^3$$

de donde:

$$16(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) > (a + b + c + d)^3$$

EJER.13 Si a, b, c, d son reales positivos demostrar que:

$$(ac + bd)(ad + bc) \geqslant cd(a + b)^2$$

SOL: Sea: $x_1 = \sqrt{ac}$, $y_2 = \sqrt{bd}$, $y_1 = \sqrt{ad}$, $y_2 = \sqrt{bc}$

Aplicando la desigualdad de Cauchy tenemos:

$$(x_1^2+ x_2^2)(y_1^2+ y_2^2) \geqslant (x_1y_1+ x_2y_2)^2$$

$$(ac + bd)(ad + bc) \geqslant (a \sqrt{cd} + b \sqrt{cd})^2$$

$$(ac + bd)(ad + bc) \geqslant cd(a + b)^2$$

EJER.14 Si $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ y $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$ son reales positivos tales que:

$$a_1^2+ a_2^2+\ldots\ldots+a_n^2 = b_1^2+ b_2^2+\ldots\ldots+ b_n^2 = 1$$

demostrar que: $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n) \leqslant 1$

SOL: La desigualdad de Cauchy:

$$(a_1^2+ a_2^2+\ldots\ldots+a_n^2)(b_1^2+ b_2+\ldots\ldots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1 +\ldots\ldots+a_nb_n)^2$$

da el resultado de inmediato.

EJER.15 Sean los reales positivos a y b y los racionales p y q, tales que $p > 1$ y $1/p + 1/q = 1$. Demostrar que:

$$a^p/p + b^q/q \geqslant ab$$

SOL: Aprovechamos el teorema $A \geqslant G$. Sea los enteros positivos m y n con $m < n$. Sea ademas los reales positivos x e y. Haciendo:

$$a_1= a_2= a_3=\ldots\ldots= a_m= x$$
$$a_{m+1}= a_{m+2}=\ldots\ldots= a_n= y$$

el teorema $A \geqslant G$, nos dá:

$$\frac{mx + (n - m)y}{n} \geqslant (x^m \; y^{n-m})^{1/n}$$

Ahora llamando $m/n = r$, queda:

$$rx + (1 - r)y \geqslant x^r \, y^{1-r}$$

Como $r = (m/n) < 1$ tenemos que: $p = 1/r = (n/m) > 1$. Además: $1 - r = 1 - 1/p = 1/q$. Asi tenemos:

$$x/p + y/q \geqslant x^{1/p} \, y^{1/q}$$

Finalmente definiendo x e y por: $x = a^p$ e $y = b^q$, resulta:

$$a^p/p + b^q/q \geqslant ab$$

Este resultado es de notoria importancia en matemáticas. De ella se obtiene sin dificultad la Desigualdad de Hölder y desde ésta la desigualdad de Cauchy-Shwartz y la de Minkowski.

__EJER__.16 Si la suma de n números positivos es constante, demostrar que su producto es máximo, cuando dichos números son iguales.

__SOL__: Llamando $a, b, c, \ldots\ldots h$ los n números positivos, sabemos que:

$$(a + b + c + \ldots\ldots + h)/n \geqslant \sqrt[n]{abc\ldots h}$$

donde la igualdad vale para el caso en que los números $a, b, c, \ldots\ldots, h$ sean todos iguales.

Poniendo $a+b+c+\ldots\ldots+h = k$ y $abc\ldots h = p$, esta desigualdad nos muestra que el producto p será siempre menor que $(k/n)^n$ o a lo sumo tendrá este valor, cuando

$$a = b = c = \dots = h$$

Asi entonces el producto de n números positivos que tienen suma constante será máximo cuando dichos números sean todos iguales entre si.

EJER.17 Si el producto de n números positivos es constante, demostrar que su suma es mínima, cuando dichos números son iguales.

SOL: Llamando $a, b, c, \dots h$, los números sabemos que:

$$(a + b + c + \dots + h)/n \geqslant \sqrt{abc\dots h}$$

Poniendo $s = a+b+\dots+h$ y $k = abc\dots h$, esta desigualdad nos indica que la suma s será siempre mayor que $n\sqrt[n]{k}$ y por lo menos tendrá este valor, cuando:

$$a = b = c = \dots = h$$

Asi entonces la suma de n números positivos que tienen un producto constante será mínima cuando dichos números sean todos iguales entre si.

EJER.18 De todos los triángulos de perímetro constante $2p$, determinar el de mayor área.

SOL: Llamando x, y, z los lados del triángulo y A su área, tenemos:

$$A = \sqrt{p(p - x)(p - y)(p - z)}$$

y esta área será máxima cuando sea máxima la expresión:

$$A^2/p = (p - x)(p - y)(p - z)$$

Teniendo presente que los factores aqui contenidos tienen una suma constante:

$$(p - x) + (p - y) + (p - z) = 3p - (x + y + z) = p$$

resulta finalmente que A será máximo para:

$$p - x = p - y = p - z = 2p/3$$

o sea cuando el triángulo sea equilátero de lado:

$$x = y = z = p/3$$

EJER. 19 ¿Qué forma debe tener un paralelepípedo rectangular de volumen a^3 para que su superficie sea mínima?

SOL: Llamando x, y, z las longitudes de las aristas del paralelepípedo buscado, tenemos:

$$S = 2xy + 2yz + 2zx$$

con

$$a^3 = xyz$$

Ahora S será minimo, cuando sea minimo:

$$S/2 = xy + yz + zx$$

y como el producto de estos sumandos es constante, pues:

$$(xy)(yz)(zx) = x^2y^2z^2 = a^6$$

resulta que S será minimo cuando:

$$xy = yz = zx = \sqrt[3]{a^6} = a^2$$

o sea para $x = y = z = a$.

EJER.20 De todos los triángulos rectángulos de la misma hipotenusa, determinar el de área máxima.

SOL: Llamando c la hipotenusa, x un cateto, el otro cateto será $\sqrt{c^2 - x^2}$ y el área A del triángulo estará dada por:

$$A = x\sqrt{c^2 - x^2}/2$$

Ahora ésta área será máxima cuando sea máxima la expresión:

$$4A^2 = x^2(c^2 - x^2)$$

Como la suma de los factores de este producto es constantemente igual a c^2 dicho producto será máximo cuando:

$$x^2 = c^2 - x^2$$

es decir para:

$$x = c/\sqrt{2}$$

EJER.21 Sobre los cuatro lados de un rectángulo, de perímetro $2p$ tomados como diámetros se han descrito semi-circunferencias hacia afuera. Determinar las dimensiones del rectángulo para que la superficie así formada sea mínima.

SOL: Llamando x e y los lados del rectángulo y S la superficie considerada, tenemos:

$$S = xy + \pi x^2/8 + \pi y^2/8$$

$$S = xy + \pi(x^2 + y^2)/8$$

$$S = xy + \pi((x + y)^2 - 2xy)/8$$

$$S = \pi p^2/8 + xy(1 - \pi/4)$$

Asi entonces la superficie S será minima cuando sea minima la expresión:

$$xy = (S - \pi p^2/8)/(1 - \pi/4)$$

Ahora como los factores x e y tienen suma constante $x + y = p$, esta expresión será minima para: $x = y = p/2$.

G.- ECUACION DE SEGUNDO GRADO.

EJER.1 Resolver las ecuaciones:

i). $x^2/(x^2-1) + (x^2-1)/x^2 = 25/12$

j). $(x-1)/(2x+1) + (2x+1)/(x-1) = 26/5$.

SOL: i). Haciendo $x^2/(x^2-1) = z$, tenemos:

$z + 1/z = 25/12 \qquad 12z^2 - 25z + 12 = 0$

De donde $z = 4/3$ y $z = 3/4$. Reemplazando estos valores en: $x^2/(x^2-1) = z$, se encuentra finalmente: $x = \pm 2$ y $x = \pm i\sqrt{3}$.

j). Se resuelve de manera análoga.

EJER. 2 Resolver las ecuaciones:

i). $\sqrt[x]{125} + \sqrt[x]{125^2} = 30$

j). $5^{x-1} = 2 + 3\cdot 5^{2-x}$

k). $4^{x+1} + 64\cdot 4^{-x} = 257$

SOL: i). Haciendo $(125)^{1/x} = z$, tenemos: $z^2 + z - 30 = 0$, luego $z = 5$ y $z = -6$. Con $z = 5$, resulta: $125 = 5^x$ de donde $x = 3$. Con $z = -6$, no hay solución real.

Las ecuaciones (j) y (k) son de sol. análoga.

EJER.3 Resolver las ecuaciones:

i). $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 0$

j). $x^2 - 8x - 2\sqrt{x^2 - 8x + 40} = -5$

k). $\sqrt{7x^2 + 8x - 19} = 7x^2 + 8x - 39$

SOL: i). Haciendo: $2x^2 + 3x + 9 = z^2$, queda: $z^2 + z - 12 = 0$ de donde $z = 3 \wedge z = -4$. Asi: $2x^2 + 3x + 9 = 9 \wedge 2x^2 + 3x + 9 = 16$. La primera dá: $x = 0$ y $x = 3/2$.

La segunda asi como (j) y (k) quedan a cargo del estudiante.

EJER.4 Resolver las ecuaciones: $x^3 - 1 = 0 \wedge x^3 + 1 = 0$

SOL: Para la primera tenemos: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. De donde: $x_1 = 1$ y $x^2 + x + 1 = 0$. Resolviendo esta última se encuentra:

$$x_2 = (-1 + i\sqrt{3})/2 \qquad x_3 = (-1 - i\sqrt{3})/2.$$

La ecuación: $x^3 + 1 = 0$, sè resuelve de idéntica forma.

EJER.5 Resolver las ecuaciones:

i). $(x^2 + 1/x^2) - 3(x + 1/x) + 4 = 0$

j). $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

SOL: i). Haciendo: $(x + 1/x) = u$, tenemos:

$$u^2 = (x + 1/x)^2 = x^2 + 2 + 1/x^2 \quad y \quad x^2 + 1/x^2 = u^2 - 2.$$

Asi la ecuación se reduce a: $u^2 - 3u + 2 = 0$ de donde $u = 1$

y $u = 2$ y entonces tenemos las ecuaciones:

$$x^2 - x + 1 = 0 \qquad\qquad x^2 - 2x + 1 = 0.$$

que nos dan las soluciones buscadas.

ii). Solución identica a la dada en (i).

EJER.6 Resolver el sistema:

$$x + y + xy = 19 \qquad\qquad xy(x + y) = 84.$$

SOL: De la segunda ecuación obtenemos: $xy = 84/(x + y)$, que reemplazado en la primera nos da:

$$(x + y) + 84/(x + y) = 19$$
$$(x + y)^2 - 19(x + y) + 84 = 0$$

de donde: $(x + y) = 22$ y $(x + y) = -3$.

Asi tenemos los sistemas:

$$\begin{array}{ll} x + y = 22 & \text{equivalente con:} \\ x\,y = 42/11 & u^2 - 22u + 42/11 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x + y = -3 & \text{equivalente con:} \\ x\,y = -28 & v^2 + 3v - 28 = 0 \end{array}$$

EJER.7 En las ecuaciones: $x^2 - 7x + 12 = 0$ y $x^2 - 3x + q = 0$ determinar q de modo que ambas tengan una raíz común.

SOL: Sea a la raíz común, entonces:

$$a^2 - 7a + 12 = 0 \qquad\qquad a^2 - 3a + q = 0.$$

Resolviendo la primera se encuentra: $a = 4$ y $a = 3$.

Reemplazando estos valores en la segunda, se obtiene: $q = 0$ $\wedge$ $q = 3$.

<u>EJER</u>.8 En las ecuaciones: $x^2 - 5x - q = 0$ y $x^2 - 7x + 2q = 0$, determinar q para que el doble de una raíz de la primera sea raíz de la segunda.

<u>SOL</u>: Sea a una tal raíz, entonces:

$$a^2 - 5a - q = 0 \qquad\qquad 4a^2 - 14a + 2q = 0$$

eliminando q entre ambas queda: $6a(a - 4) = 0$ de donde: $a = 0$ $\wedge$ $a = 4$. Con estos valores obtenemos: $q = 0$ $q=-4$.

<u>EJER</u>.9 En la ecuación: $x^2 + px + q = 0$, determinar p y q para que las raices sean, precisamente, p y q.

<u>SOL</u>: Aprovechando las propiedades de las raices, tenemos:

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 = -p \\ x_2 + x_2 = q \end{matrix} \quad \text{luego} \quad \begin{matrix} p + q = -p \\ p\,q = q \end{matrix}$$

Asi obtenemos: $p = 1$ y $q = -2$.

<u>EJER</u>.10 En la ecuación: $x^2 - 2x + q = 0$, determinar q para que una raíz sea el cuadrado de la otra.

<u>SOL</u>: Sea $x_1 = a$, entonces $x_2 = a^2$, luego:

$$x_1 + x_2 = a + a^2 = 2 \qquad\qquad x_1 x_2 = a^3 = q$$

Resolviendo: $a^2 + a - 2 = 0$, obtenemos: $a = x_1 = 1$ $\wedge$

$a = x_1 = 2$, entonces: $x_2 = a^2 = 1$ y $a^2 = 4$.
Finalmente: $q = x_1\ x_2 = 1$ $q = x_1\ x_2 = -8$.

Asi obtenemos dos respuestas:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad\qquad x^2 - 2x - 8 = 0$$

<u>EJER</u>.11 Sin resolver la ecuación: $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ construir una ecuación de segundo grado cuyas raices sean los cuadrados de las raices de la ecuación dada.

<u>SOL</u>: Las raices de la ecuación dada verifican las condiciones: $x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{3}$ $\qquad x_1\ x_2 = \sqrt{3}$.

Elevando ambas al cuadrado se tiene:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 4 + 2\sqrt{3} \qquad\qquad x_1^2\ x_2^2 = 3.$$

luego:

$$x_1^2 + x_2^2 = 4 \quad \wedge \quad x_1^2\ x_2^2 = 3$$

entonces la ecuación pedida es: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

<u>EJER</u>.12 Dada la ecuación: $4x^2 - 10(2m + 1)x + 14m + 5 = 0$ determinar m para que sus raices verifiquen la condición: $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

<u>SOL</u>: Por las propiedades de las raices, tenemos:

$$x_1 + x_2 = \frac{5(2m + 1)}{2} \qquad\qquad x_1\ x_2 = \frac{14m + 5}{4}$$

luego:

$$x_1^2+ x_2^2= (x_1+ x_2)^2- 2x_1x_2= \frac{25(2m+1)^2}{4} - \frac{14m + 5}{2} = 1$$

Entonces resolviendo la ecuación:

$100m^2+ 72m + 11 = 0$ se tiene: $m_1= -1/2 \wedge m_2= -11/50$

EJER.13 En la ecuación: $2x^2- (2m + 1)x + m^2- 9m + 39 = 0$ determinar m, de modo que: $x_1 = 2x_2$.

SOL: Aprovechando las propiedades de las raices, tenemos:

$$x_1 + x_2 = 2x_2 + x_2 = 3x_2 = (2m + 1)/2$$

$$x_1 \cdot x_2 = (2x_2)x_2 = 2x_2^2 = (m^2- 9m + 39)/2$$

luego:

$$(2m + 1)^2/36 = (m^2- 9m + 39)/4.$$

o sea: $m^2- 17m + 70 = 0$, ecuación que da las soluciones: $m = 10$ y $m = 7$.

EJER.14 Determinar m, para que las raices de la ecuación:

$$(m - 1)x^2- (3m + 4)x + 12m + 3 = 0.$$

verifiquen la igualdad: $4x_1 - 5x_2 = -13$.

SOL: De inmediato tenemos:

$$x_1 + x_2 = (3m + 4) / (m - 1)$$

$$x_1x_2 = (12m + 3) / (m - 1)$$

$$4x_1 - 5x_2= -13$$

Resolviendo se encuentra: $m = -1/4$ y $m = 223/125$.

EJER.15 Dada la ecuación: $x^2 - px + q = 0$. determinar los coeficientes p y q para que: $x_1 - x_2 = 1 \wedge p - q = 1$.

SOL: De inmediato tenemos:

$$x_1 + x_2 = p \qquad x_1 - x_2 = 1 \qquad x_1 x_2 = q$$

las dos primeras dan: $x_1 = (p + 1)2 \wedge x_2 = (p - 1)/2$.
Valores que reemplazados en la tercera proporcionan:

$$p^2 - 4q = 1 \quad \text{que con} \quad p - q = 1$$

dan las soluciones finales: $(p = 3 \wedge q = 2)$ y $(p = 1 \wedge q = 0)$.

EJER.16 Determinar la razón x/y sabiendo que:

$$15(2x^2 - y^2) = 7xy.$$

SOL: Suponiendo $xy \neq 0$, dividimos la condición dada por xy, entonces se tiene:

$$30(x/y) - 15(y/x) = 7 \quad \text{o sea} \quad 30u^2 - 7u - 15 = 0$$

donde $u = x/y$. Finalmente resolviendo la ecuación de segundo grado se encuentra: $u = x/y = 5/6 \wedge u = x/y = -3/5$.

EJER.17 Formar la ecuación de segundo grado cuyas raíces son la suma y el producto de las raíces de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

H.- TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO.

EJER.1 Para que valores de m, el trinomio:

$$T(x) = mx^2 + (m - 1)x^2 + (m - 1)$$

es siempre negativo.

SOL: Desde luego debe tenerse $m < 0$ y las raices de $T(x)$ deben ser complejas, entonces:

$$\Delta = (m - 1)^2 - 4m(m - 1) < 0$$

Asi tenemos: $3m^2 - 2m - 1 > 0$. Las raices de este trinomio son: $m = -1/6$ y $m = 1/2$, de aqui que: $\Delta < 0$ para $(m < -1/6 \wedge m > 1/2)$. Finalmente como m debe ser negativo, la respuesta buscada es: $m < -1/6$.

EJER.2 Para que valores de m, el trinomio:

$$T(x) = (m - 2)x^2 - 2(2m - 3)x + (5m - 6)$$

es siempre positivo.

SOL: Análoga a la dada en el ejercicio precedente.

EJER.3 Demostrar que la ecuación:

$$4x^2 - 10(2m + 1)x + (14m + 5) = 0$$

tiene raices reales y diferentes para todo m real.

SOL: Bastará demostrar que cualquiera sea m real, siempre se tendrá:

$$\Delta = 25(2m + 1)^2 - 4(14m + 5) > 0$$

$$\Delta = 100m^2 + 44m + 5 > 0$$

Ahora este trinomio tiene raices complejas y además: $a = 100 > 0$, condiciones suficientes para garantizar que él es siempre positivo cualquiera sea m real.

EJER.4 Determine entre que valores debe variar m, para que la ecuación: $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 5 = 0$, tenga sus raices reales.

SOL: Las raices serán reales cuando:

$$\Delta = (m + 1)^2 - (2m + 5)(m - 1) > 0$$

$$\Delta = -m^2 - m + 6 > 0$$

Inecuación que se verifica para: $-3 < m < 2$.

EJER.5 Determine entre que valores debe variar m para que la ecuación:

$$(x - 1) / (2x - 1) + (2x + 1) / (x - 1) = m.$$

tenga raices reales.

SOL: Efectuando las operaciones indicadas la ecuación se reduce a: $(5 - 2m)x^2 + (3m - 2)x - m = 0$

Ahora sus raices son reales, cuando:

$$\Delta = (3m - 2)^2 + 4m(5 - 2m) \geqslant 0$$

$$\Delta = m^2 + 8m + 4 \geqslant 0$$

y esta inecuación se cumple para:

$$m \leqslant -4 - 2\sqrt{3} \qquad m \geqslant -4 + 2\sqrt{3}$$

EJER.6 Determine para que valores de m, la ecuación:

$$2mx^2 - 2x - (3m + 2) = 0$$

tiene una raiz menor y otra mayor que 1.

SOL: Deseamos que: $\alpha < 1 < \beta$ entonces poniendo:

$$T(x) = 2mx^2 - 2x - (3m + 2)$$

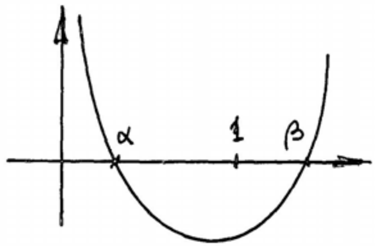
debe verificarse que: $aT(1) < 0$,

es decir:

$$2m(2m - 2 - 3m - 2) < 0$$

$$2m^2 + 8m > 0$$

$$m(m + 4) > 0$$



Luego para que $\alpha < 1 < \beta$ debe tomarse: $m < -4$ ✓ $m > 0$.

EJER.7 Dada la ecuación:

$$(m - 2)x^2 + 2(m - 1)x + (m - 3) = 0.$$

determinar valores de m, de modo que ambas raices sean mayor que 1.

SOL: Las raices de la ecuación estan dadas por:

$$x = \frac{-m + 1 \pm \sqrt{3m - 5}}{m - 2}$$

y para que ellas sean reales debe tenerse: $m \geq 5/3$. Obligando que ambas sean mayores que 1, se obtiene en último término:

$$4m^2 - 15m + 14 > 0 \qquad \text{con} \qquad m < 2$$
$$4m^2 - 15m + 14 < 0 \qquad \text{con} \qquad m > 2$$

de donde la solución final es: $5/3 \leq m < 7/4$.

<u>EJER</u>.8 Determinar los valores de m para los cuales la ecuación:

$$4x^2 + (m - 2)x + (m - 5) = 0$$

tiene raices reales diferentes menores que 2.

<u>SOL</u>: Idéntica a la dada en el ejercicio anterior. Se encuentra: $-7/3 < m < 6 \quad \vee \quad m > 14$.

<u>EJER</u>.9 Valores de m para que las raices de la ecuación:

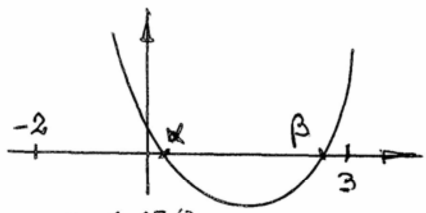
$$2x^2 + (m - 3)x + (3 - m) = 0$$

esten en el intervalo $(-2, 3)$.

<u>SOL</u>: Primero debe verificarse que las raices sean reales, luego: $\Delta = m^2 + 2m - 15 > 0$

Asi: $m \leq -5 \quad \vee \quad m \geq 3$

Llamando $T(x)$ al trinomio debe cumplirse:



$$T(-2) = -3m + 17 > 0 \qquad \text{o sea} \qquad m < 17/3$$
$$T(\ 3) = \ 2m + 12 > 0 \qquad \text{o sea} \qquad m > -6$$

Además deberá tenerse: $-2 < (\alpha + \beta)/2 < 3$ luego:
$-2 < (3 - m)/4 < 3$, o mejor: $-9 < m < 11$. La intersección de todas las condiciones precedentes da la solución final.

$$-6 \leqslant m \leqslant -5 \qquad\qquad 3 \leqslant m \leqslant 17/3.$$

EJER. 10 Valores de m para que las raices de la ecuación:

$$2mx^2 - 2(m + 1)x + (m + 1) = 0$$

esten comprendidas entre (-2) y $(+2)$.

SOL: Como las raices deben ser reales, tenemos:

$$\Delta = (m + 1)^2 - 2m(m + 1) = -m^2 + 1 \geqslant 0$$

de donde: $-1 \leqslant m \leqslant +1$.

La solución continúa tal como el ejercicio precedente, pero deberá considerarse dos casos: $-1 \leqslant m < 0 \quad \wedge \quad 0 < m \leqslant +1$

Trabajando en estas condiciones se obtiene la solución: $3/5 < m < 1 \quad \wedge \quad -1 < m < -5/13$.

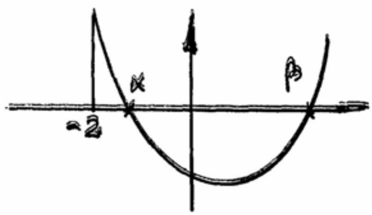
EJER. 11 Valores de m para los cuales las raices de la ecuación:

$$(m^2 + 3m + 3)(x^2 + x) + m^2 = 0$$

determine un intervalo que no contiene al número (-2).

SOL: Como: $m^2 + 3m + 3$ tiene raices complejas, ocurre que: $m^2 + 3m + 3 > 0$ para todo m real. Entonces el trinomio:

$T(x) = (m^2 + 3m + 3)(x^2 + x) + m^2$



es negativo en el intervalo (α, β) determinado por sus raices y positivo fuera de (α, β), luego debe verificarse:

$$T(-2) = 3m^2 + 6m + 6 > 0$$

y como este trinomio tiene raices complejas la condición se cumple para todo m real.

EJER. 12 Valores de m para los cuales la ecuación: $(m^2 + 6m + 5)(x^2 + x) + m^2 = 0$ tiene al número (-2) comprendido entre sus raices.

SOL: El trinomio: $m^2 + 6m + 5$ tiene las raices reales: $\alpha = -5 \wedge \beta = -1$, luego:

$$S = m^2 + 6m + 5 > 0 \qquad \text{para} \quad m < -5 \ \underline{\vee} \ m > -1$$

$$S = m^2 + 6m + 5 < 0 \qquad \text{para} \quad -5 < m < -1$$

Cuando $S(m) > 0$ deberá tenerse: $T(-2) < 0$ o sea:

$$T(-2) = 3m^2 + 12m + 10 < 0$$

que no dá solución.

Cuando $S(m) < 0$ deberá tenerse: $T(-2) > 0$ sistema que da la solución:

$$-S < m < -(6 + \sqrt{6})/3 \qquad (-6 - \sqrt{6})/3 < m < -1$$

EJER. 13 Demostrar que la expresión:

$$E = 3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10$$

no es negativa cualesquiera sean x e y no nulos y diferentes.

SOL: Haciendo $(x/y + y/x) = u$, obtenemos:

$$E = 3u^2 - 8u + 4$$

Las raices de este trinomio son: $\alpha = 2/3$ y $\beta = 2$, entonces:

$$E < 0 \quad \text{para} \quad 2/3 < u < 2$$

Pero cuando x e y son de signos contrarios, se tiene que $u < 0$ y entonces $E = 3u^2 - 8u + 4 > 0$. Ahora cuando x e y son distintos y del mismo signo tenemos: $u = (x/y + y/x) > 2$. Asi siempre se tiene: $E > 0$.

EJER.14 Determinar los coeficientes: a, b, c del trinomio $T(x) = ax^2 + bx + c$, para que él se anule en $x = 8$ y tenga un máximo igual a 12 con $x = 6$.

SOL: Es inmediato que:

$$T(6) = 36a + 6b + c = 12$$
$$T(8) = 64a + 8b + c = 0$$

Ahora como $T(x)$ debe tener un máximo en $x = 6$, se tendrá tambien: $-b/2a = 6$

Resolviendo el sistema de las tres ecuaciones anteriores para las incógnitas a, b, y c se obtiene:

$$a = -3 \qquad b = 36 \qquad c = -96$$

$$T(x) = -3x^2 + 36x = 0$$

EJER.15 Dividir un trazo de longitud a en dos segmentos tales que la suma de las áreas de los triángulos equilateros construídos sobre ellos sea mínima.

SOL: Llamando x uno de los segmentos el otro será: $a - x$ y las alturas de los triángulos equiláteros construídos sobre ellos serán:

$$h_1 = x\sqrt{3}/2 \qquad h_2 = (a - x)\sqrt{3}/2$$

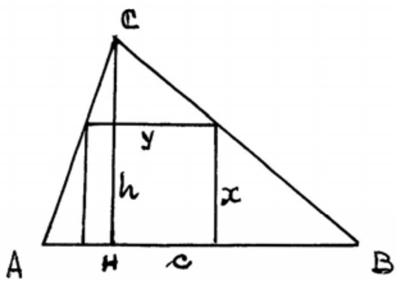
luego la suma de sus áreas será:

$$A = (1/4)\sqrt{3}\,(2x^2 - 2ax + a^2)$$

como el coeficiente de x^2 es positivo, el trinomio A tiene un mínimo para: $x = -b/2a = +2a/4 = a/2$. Asi entonces el trazo debe ser dimidiado.

EJER.16 En un triángulo dado se pide inscribir un rectángulo de área máxima.

SOL: Llamando x e y los lados del rectangulo pedido, se tiene que:



$A = xy$ pero

$y/c = (h - x)/h$ luego

$$y = \frac{c}{h}(h - x)$$

de donde:

$$A = xy = cx - cx^2/h$$

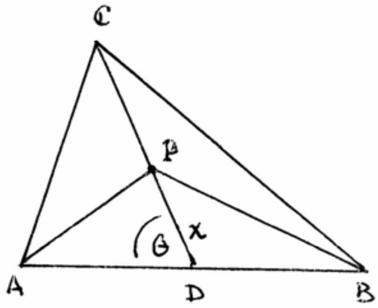
Como el coeficiente de x^2 en este trinomio es negativo, Si tendrá un máximo para:

$$x = -b/2a = -c\cdot h/-2c = h/2$$

Así entonces el problema lo resuelve una paralela a la base AB por el punto medio de la altura HC.

EJER.17 Sobre la transversal t_c de un triángulo ABC, determinar un punto P tal que: $S = PA^2 + PB^2 + PC^2$ sea mínimo.

SOL: Llamando x al segmento PD de la transversal CD t, el teorema del coseno nos da:



$$PA^2 = PD^2 + AD^2 - 2AD.PD\cos\theta$$

$$PB^2 = PD^2 + BD^2 + 2BD.PD\cos\theta$$

$$PC^2 = PC^2$$

De aquí sumando queda:

$$S = 2\ PD^2 + PC^2 + 2\ AD^2$$

$$S = 2x^2 + (t-x)^2 + 2(c/2)^2$$

$$S = 3x^2 - 2tx + t^2 + c^2/2$$

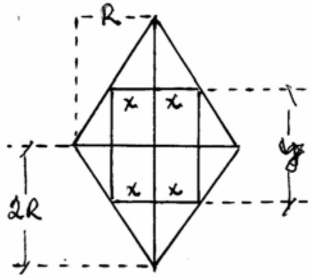
y este trinomio es mínimo para:

$$x = -b/2a = 2t/6 = t/3$$

Así entonces el punto buscado es el centro de gravedad del triángulo.

EJER.18 En un sólido formado al unir por sus bases dos conos iguales de radio basal R y altura 2R, se pide inscribir un cilindro de superficie total máxima.

SOL: Eligiendo las incógnitas como se indica en la figura, y llamando A el área total del cilindro buscado tenemos:



$A = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ Pero:

$(2R - y/2)/2R = 2x/2R$

de donde: $y = 4(R - x)$ luego:

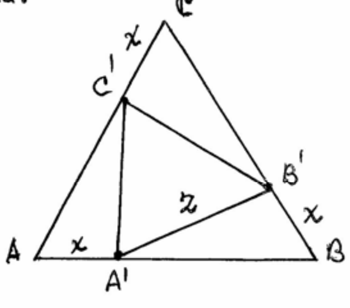
$A = 2\pi x^2 + 8\pi x(R - x)$

$A = -6\pi x^2 + 8\pi Rx$

de donde resulta que el área del cilindro buscado es máxima si: $x = -b/2a = -(8\pi R)/-12 = 2R/3$.

EJER.19 En un triángulo equilátero de lado a se pide inscribir otro triángulo equilátero que tenga área mínima.

SOL: De acuerdo con la elección de incógnitas que se indica en la figura la aplicación del teorema del coseno nos dá:



$z^2 = x^2 + (a - x)^2 - 2x(a-x)\cos 60$

$z^2 = 3x^2 - 3ax + a^2$

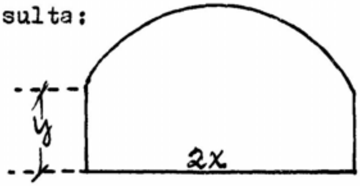
Ahora como la superficie del triángulo A'B'C' buscado es:

$A = (1/2)z(z/2)\sqrt{3} = (z^2/4)\sqrt{3}$

quedá: $A = \sqrt{3}\,(3x^2 - 3ax + a^2)/4$

EJER.20 Una ventana semicircular prologada en forma rectangular debe tener 4m. de perímetro. Determinar sus dimensiones para que proporcione la máxima iluminación.

SOL: Tomando las incógnitas como se indican en la figura, resulta:



$2x + 2y + \pi x = 4$ de donde:

$$y = \frac{4 - x(\pi + 2)}{2}$$

Ahora la iluminación máxima se tendrá para la máxima superficie de la ventana. Llamando A esta área, tendremos:

$$A = (1/2)\pi x^2 + 2xy$$

$$A = (1/2)\pi x^2 + x\,(4 - x(\pi + 2))$$

$$A = 4x - (1/2)(\pi + 4)x^2$$

Asi, entonces la iluminación máxima se tendrá para:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-(\pi + 4)} = \frac{4}{\pi + 4} = y$$

EJER.21 Para que valores de m, el trinomio: $T(x) = mx^2 + (m - 1)x + m - 2$, tiene un máximo o mínimo igual a uno.

SOL: Sabemos que $T(x)$ es máximo o mínimo en el punto:

$$x = -b/2a = -(m - 1)/2m$$

Luego se tendrá:

$$T\left(\frac{1-m}{2m}\right) = m\left(\frac{1-m}{2m}\right)^2 + (m-1)\frac{1-m}{2m} + m - 2 = 1$$

o sea:

$$m(2m^2 - 9m - 1) = 0$$

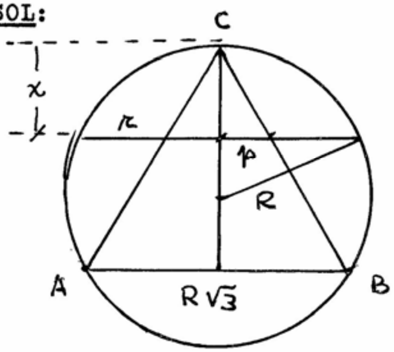
de donde:

$$m_1 = \frac{9 + \sqrt{89}}{4} \qquad\qquad m_2 = \frac{9 - \sqrt{89}}{4}$$

El valor m_1 da un mínimo igual a uno y m_2 da un máximo igual a uno.

EJER.22 En un esfera de radio R hay inscrito un cono de generatriz $R\sqrt{3}$. Trazar un plano paralelo a la base del cono de modo que el anillo circular determinado entre la esfera y el cono tenga área máxima.

SOL:



Como la generatriz del cono es $R\sqrt{3}$, toda sección perpendicular a la base y que pase por su altura es un triángulo equilátero de lado $R\sqrt{3}$ y altura:

$$h = (R\sqrt{3})/2(\sqrt{3}) = (3/2)R$$

Sea x la distancia del vértice del cono al plano pedido. Sea r el radio de la sección en la esfera; y p el radio de la sección en el cono. Llamando A el área de la sección pedida, tenemos:

$$A = \pi r^2 - \pi p^2$$

Ahora como: $r^2 = x(2R - x)$ y $p = x/\sqrt{3}$ queda:

$$A = (\pi/3)(6Rx - 4x^2)$$

de donde el área máxima se tendrá para:

$$x = -b/2a = 6R/8 = 3R/4 = h/2$$

EJER.23 Se dispone de 40 metros lineales de alambrada para cercar un jardín rectángular. Determinar el área máxima que se puede proteger.

SOL: Llamando x uno de los lados, el otro lado es: $(20 - x)$ y el área encerrada por la alambrada es:

$$A = x(20 - x) = 20x - x^2$$

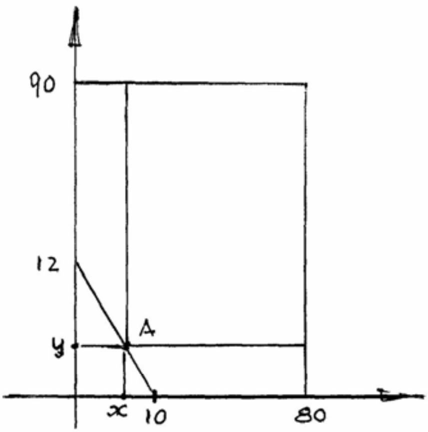
Como este trinomio tiene x^2 con coeficiente negativo, él toma un valor máximo en el punto:

$$x = -b/2a = -20/(-2) = 10$$

Asi el rectangulo de área máxima es un cuadrado de lado: 10m

EJER.24 Un espejo rectángular de 80 por 90cm, se rompió en una esquina según la recta $x/10 + y/12 = 1$. Determinar el espejo rectángular de área máxima que se puede obtener del trozo mayor.

SOL: Sea $A = (x,y)$ el punto de la recta: $x/10 + y/12 = 1$



por donde es necesario trazar paralelas a los lados primitivos del espejo para obtener el de área máxima. Entonces el área del espejo buscado es:

$$A = (80 - x)(90 - y)$$

Pero $y = 12 - 12x/10$, luego:

$$10A = -12x^2+180x+64.800$$

$$(5/3)A = -2x^2 + 30x+10.800$$

Finalmente este trinomio es máximo para:

$$x = -b/2a = (-30)/(-4) = 7{,}5\text{cm}.$$

y los lados del espejo buscado son:

$$a = 80 - x = 72{,}5\text{cm} \qquad b = 90 - y = 87\text{cm}$$

EJER.25 Los puntos A y B se encuentran en la vía principal y rectilínea que va del Oeste al Este. El punto B se encuentra a 9km más al Este que A. Un coche parte del punto A hacia el Este, y se desplaza uniformemente con una velocidad de 40 km/h. Al mismo tiempo, una motocicleta sale del punto B en la misma dirección con una aceleración constante igual a 32 km/h^2. Hallar la distancia máxima entre el coche y la motocicleta, en el curso de las dos primeras horas de movimiento.

SOL: Después de un instante t el coche esta a la distancia: $40t$ km del punto A y la motocicleta a la distancia: $(16t^2 + 9)$km del mismo punto. Asi la distancia entre ellos esta dada por: $D(x) = 16t^2 - 40t + 9$

$$D(t) = 16t^2 - 40t + 9 \qquad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2$$

El trinomio puede tener dentro del intervalo su mayor valor en los puntos:

$t = 0$ que dá: $D(0) = 9$km

$t = 2$ que dá: $D(2) = 7$km

$t = -b/2a$ que dá: $D(5/4) = 16$km

Asi la distancia entre el coche y la motocicleta es máxima despues de 1 hora y 15 minutos y dicha distancia máxima es de 16km.

I.- INECUACIONES.

EJER.1 Resolver las inecuaciones:

i). $(x^2 - 3x + 2)/(x^2 + 2x + 6) < 3$

j). $(x^2 - 5x + 4)/(x - 3) < 0$

k). $(x^2 - 6x - 7)/(x - 2) > 0$.

SOL: i). Las raices del denominador son complejas y como $a > 0$, resulta: $x^2 + 2x + 6 > 0$ para todo $x \in R$. Por ello tenemos:

$$x^2 - 3x + 2 < 3x^2 + 6x + 18$$

$$2x^2 + 9x + 16 > 0$$

Las raices de este nuevo trinomio también son complejas, y como $a = 2 > 0$, dicho trinomio es mayor que cero para todo x real.

j). Si $x > 3$, debe cumplirse: $x^2 - 5x + 4 < 0$. Ahora las raices de $T(x) = x^2 - 5x + 4$ son $\alpha = 1$ y $\beta = 4$. Además como $a = 1 > 0$, el trinomio $T(x) < 0$ para: $1 < x < 4$, pero como además tenemos $x > 3$, de ambas concluimos: $3 < x < 4$

Contrariamente si $x < 3$, debe cumplirse: $T(x) = x^2 - 5x + 4 > 0$. Ahora de acuerdo a lo dicho anteriormente, tal cosa ocurre para: $x < 1 \wedge x > 4$. Esta condición junto con $x < 3$ nos dá la solución: $x < 1$. Asi resumiendo ambos casos obtenemos la solución final: $(x < 1)$ y $(3 < x < 4)$.

k). Se deja como ejercicio al lector, quien deberá obtener la solución: $(x > 7)$ y $(-1 < x < 2)$.

<u>EJER</u>.2 Resolver las inecuaciones:

i). $(x^2 + 3x - 4)(2x^2 + 4) > 0$

j). $x(x^4 - 7x^2 + 12) > 0$

k). $(x^2 + 3x - 4)(2x^2 - 4) > 0$.

<u>SOL</u>: i). El trinomio $(2x^2 + 4)$ tiene raices complejas y como: $a = 2 > 0$, él resulta ser positivo para todo x real.

Asi el problema queda reducido a la solución de la inecuación:

$$T(x) = x^2 + 3x - 4 > 0$$

Las raices de este trinomio son $\alpha = -4$ y $\beta = 1$ luego $T(x) > 0$ para: $(x < -4) \vee (x > 1)$

j). Resolviendo la ecuación: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. se obtiene: $x^2 = 4$ y $x^2 = 3$. Asi la inecuación propuesta se expresa por

$$x(x + 2)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x - 2) > 0$$

Entonces atendiendo al cuadro siguiente:

		-2	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	2
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
SIGNO	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Obtenemos la solución:

$$-2 < x < -\sqrt{3} \qquad 0 < x < \sqrt{3} \qquad x > 2.$$

k). Procediendo tal como en (j) se obtiene:

$$x < -4 \qquad -\sqrt{2} < x < 1 \qquad x > \sqrt{2}.$$

EJER.3 Resolver la inecuación:

$$1 + 6/(x^2 + 3x + 2) > 6/(x + 2).$$

SOL: Pasando todos los términos al primer mienbro y tomando común denominador: $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, resulta:

$$(x - 1)(x - 2) / (x + 1)(x + 2) > 0.$$

Multiplicando la inecuación por: $(x + 1)^2(x + 2)^2 > 0$ queda:

$$(x + 1)(x + 2)(x - 1)(x - 2) > 0$$

inecuación que de acuerdo al cuadro:

	$x<-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<+1$	$+1<x<+2$	$x>+2$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
SIGNO	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

nos da la solución:

$$x < -2 \qquad -1 < x < 1 \qquad x > 2$$

<u>EJER</u>.4 Resolver la inecuación:

$$(2x - 25)/(x^2 + 2x - 3) + (2x + 11)/(x^2 - 1) > 2/(x + 3).$$

<u>SOL</u>: Llevando todos los términos al primer mienbro y efectuando la suma, resulta:

$$2(x^2 - 3x + 5)/(x^2 - 1)(x + 3) > 0$$

El trinomio: $T(x) = x^2 - 3x + 5$ tiene raices complejas, asi él es positivo para todo x real. En estas condiciones la inecuación se reduce a:

$$(x^2 - 1)(x + 3) = (x + 3)(x + 1)(x - 1) > 0$$

que tiene como solución: $(-3 < x < -1)$ y $(x > 1)$

EJER.5 Resolver la inecuación:

$$\frac{x^2+2}{x^2-7x+12} - \frac{x+8}{(x-3)(x-4)} > 1 + \frac{2}{x-3}$$

SOL: Reuniendo todos los términos en el primer mienbro y luego sumando se encuentra:

$$2(2x-5)/(x-3)(x-4) > 0$$

De aquí multiplicando por: $(x-3)^2(x-4)^2 > 0$, queda:

$$(x-2{,}5)(x-3)(x-4) > 0$$

luego del cuadro,

		2.5	3	4
$x-2.5$	−	+	+	+
$x-3$	−	−	+	+
$x-4$	−	−	−	+
SIGNO	−	+	−	+

se obtiene la solución: $(2{,}5 < x < 3)$ y $(x > 4)$.

EJER.6 Resolver las inecuaciones:

i). $(x^4-49x+96)/(x^2-7x+12) > 7$

j). $(x^4-56x+95)/(x^2-7x+10) > 8$

SOL: i). Pasando 7 al primer mienbro y efectuando la resta queda:

$$(x^4 - 7x^2 + 12)/(x^2 - 7x + 12) > 0$$

de donde resulta:

$$(x^2 - 4)(x^2 - 3)/(x - 4)(x - 3) > 0$$

y entonces se tiene:

$$(x - 4)(x - 3)(x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0$$

Inecuación que da la solución:

$$x < -2 \qquad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \qquad 2 < x < 3 \qquad x > 4$$

j). Procediendo tal como en el caso anterior, se obtiene primero:

$$(x^2 - 5)(x^2 - 3)/(x - 5)(x - 2) > 0$$

y entonces finalmente queda:

$$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x - 5)(x - 2) > 0$$

De aquí haciendo un cuadro como los indicados en ejemplos anteriores se obtiene la solución:

$$x < -2 \qquad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \qquad 2 < x < 3 \qquad x > 4$$

EJER.7 Resolver las inecuaciones:

i). $|(x + 2)/(3 - x)| < 1$

j). $|(x^2 - x)/(x^2 - 4)| < 1$

k). $|(x^2 - 2x + 3)/(x^2 - 5x + 6)| > 1/5$

SOL: Como las tres inecuaciones propuestas admiten resolución análoga, a manera de ejemplo, veamos el caso (j).

j). Por teorema conocido la inecuación considerada es equivalente con:

$$-1 < (x^2 - x)/(x^2 - 4) < +1$$

que a su vez se desdobla en:

$$(2x^2 - x - 4)/(x^2 - 4) > 0 \quad \text{y} \quad (4 - x)/(x^2 - 4) < 0$$

Finalmente la primera de ellas es:

$$\left(x - \frac{1 + \sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{33}}{4}\right)(x - 2)(x + 2) > 0$$

y la segunda:

$$(x - 4)(x - 2)(x + 2) > 0$$

Un esquema como los empleados en ejemplos anteriores nos da la solución:

$$(1 - \sqrt{33})/4 < x < (1 + \sqrt{33})/4 \quad \vee \quad x > 4.$$

i). Aquí debe obtenerse: $x < 1/2$.

k). Esta inecuación se cumple para todo x real.

EJER.8 Resolver las inecuaciones

i). $2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

j). $8x - 3 < \sqrt{(x - 6)(x - 9)}$

SOL: i). Debe verificarse simultáneamente que:

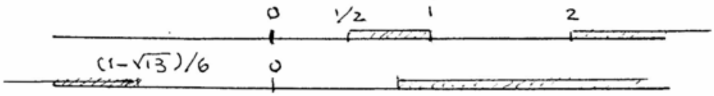
$$2x - 1 > 0 \qquad y \qquad x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$$

Resolviendo este sistema se encuentran las soluciones:

$$(1/2 < x \leqslant 1) \qquad y \qquad (x > 2)$$

En estas condiciones, elevando al cuadrado la inecuación propuesta y haciendo reducciones queda: $3x^2 - x - 1 > 0$. Trinomio que admite la solución: $x < (1 - \sqrt{13})/6 \quad \vee$ $x > (1 + \sqrt{13})/6$.

Resumiendo las condiciones precedentes, tenemos



De donde la solución buscada es: $(1 + \sqrt{3})/6 < x < 1$ $(x > 2)$.

j). Se resuelve de identica manera.

EJER.9 Resolver las inecuaciones:

i). $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 4} < 3$

j). $\sqrt{x^2 + 51} - \sqrt{(x - 5)(x - 7)} > 4$

k). $\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} > \sqrt{2x - 5}$.

SOL: Como las tres inecuaciones admiten resoluciones análogos, veremos solamente una de ellas.

(k). Los tres subradicales deben ser no negativos, luego debe tenerse:

$$x + 6 \geqslant 0 \qquad x + 1 \geqslant 0 \qquad 2x - 5 \geqslant 0$$

Estas tres inecuaciones admiten la solución: $(x \geqslant 5/2)$. Como en estas condiciones, siempre se tiene: $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} > 0$ elevando al cuadrado la inecuación propuesta y haciendo reducciones se tiene: $x^2 + 7x - 30 < 0$ que admite la solución:

$$(-10 < x < 3)$$

Considerando las condiciones simultaneas

$$(-10 < x < 3) \qquad y \qquad (x \geqslant 5/2 = 2.5)$$

obtenemos la solución final: $(2.5 \leqslant x < 3)$.

EJER.10 Resolver las inecuaciones:

i). $\log(x) + \log(x + 1) < \log(2x + 6)$

j). $\log(x^2 - 5x + 16) < 1$

k). $|\log(x^2 + x)| > 1$

SOL: i). Queda a cargo del estudiante.

j). Fué resuelto en página 90.

k). La primera condición que debe cumplirse es: $(x^2 + x) > 0$ y ello se verifica para $x > 0$. Ademas sabemos que: $\log(10) = 1$ y $\log(1/10) = -1$ y como la función logaritmo es creciente, la inecuación propuesta se cumple para:

$$x^2 + x > 10 \quad \vee \quad 0 < x^2 + x < 1/10$$

La primera de ellas dá la solución: $x > (\sqrt{41} - 1)/2$, mientras que la segunda proporciona: $0 < x < (\sqrt{35} - 5)/10$.

EJER.11 Demostrar que para todo x real siempre se tiene:

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$$

SOL: Vamos a considerar algunos casos. Supongamos primero $x \quad 0$, entonces todos los términos de la expresión propuesta son mayores o iguales a cero, luego:

$$f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0 \qquad \text{para} \quad x \geqslant 0$$

Consideramos ahora el caso: $0 < x < 1$. Como:

$$f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = x^8 + (x^2 - x^5) + (1 - x)$$

resulta que cada término es positivo, luego aquí también se cumple $f(x) > 0$ para: $0 < x < 1$.

Finalmente sea: $x \geqslant 1$ entonces como:

$$f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = x^5 + (x^3 - 1) + x(x - 1) + 1$$

y nuevamente tenemos: $f(x) > 0$.

EJER.12 Para que valores de m, se verifica que:

$$-3 < (x^2 + mx - 2)/(x^2 - x + 1) < 2$$

cualquiera sea x real.

SOL: El trinomio denominador: $x^2 - x + 1$ tiene raices complejas, luego cualquiera sea x real, siempre se tiene:

$$x^2 - x + 1 > 0$$

Asi dando forma entera, obtenemos las inecuaciones:

$$x^2 + mx - 2 > -3x^2 + 3x - 3$$

$$2x^2 + 2x + 2 > x^2 + mx - 2$$

o mejor aún, haciendo reducciones:

$$4x^2 + (m - 3)x + 1 > 0$$

$$x^2 - (m + 2)x + 4 > 0$$

Ahora para que estos trinomios sean positivos para todo x real, sus raices deben ser compl , es decir sus correspondientes discriminantes deben ser negativos, o sea debe tenerse:

$$\Delta_1 = (m - 3)^2 - 16 = m^2 - 6m - 7 < 0$$

$$\Delta_2 = (m + 2)^2 - 16 = m^2 + 4m - 12 < 0$$

Como las raices de Δ_1 son: $\alpha_1 = -1$ y $\beta_1 = 7$ y las raices de Δ_2 son: $\alpha_2 = -6$ y $\beta_2 = 2$, tenemos que:

$\Delta_1 < 0$ para: $-1 < x < 7$

$\Delta_2 < 0$ para: $-6 < x < 2$

Finalmente, de aquí obtenemos la solución: $(-1 < x < 2)$.

EJER.13 Resolver la inecuación:

$$\frac{1}{^2\log(x)} - \frac{1}{^2\log(x) - 1} < 1$$

SOL: Para simplicidad en la notación, hagamos: ${}^{2}\log x = u$, entonces la inecuación es:

$$1/u - 1/(u-1) - 1 < 0 \qquad \text{o sea:}$$

$$(u^2 - u + 1)/u(u-1) > 0$$

Ahora el trinomio del numerador es siempre positivo, pues sus raices son complejas. Asi todo queda reducido a: $u(u-1) > 0$ que se cumple para:

$$u > 1, \quad \text{es decir para} \quad {}^{2}\log x > 1$$

$$u < 0, \quad \text{es decir para} \quad {}^{2}\log x < 0$$

de donde concluimos $(x > 2) \quad \vee \quad (0 < x < 1)$.

EJER.14 Resolver la inecuación: $x^{1+\log x} > 100x$.

SOL: Desde luego debe tenerse $x > 0$. Entonces de:

$$x^{1+\log x} > 100x \qquad \text{concluimos} \qquad x^{\log x} > 100$$

Ahora tomando logaritmo de base 10, obtenemos:

$$(\log x)(\log x) > 2 \quad \text{o sea} \quad (\log x)^2 > 2$$

de donde:

$$\log x > \sqrt{2} \qquad \text{que nos dá:} \qquad x > 10^{\sqrt{2}}$$

$$\log x < -\sqrt{2} \qquad \text{que nos dá:} \qquad 0 < x < 10^{-\sqrt{2}}$$

B I B L I O G R A F I A.

1). COHEN W. LEON and ENRILICH GERTRUDE — "Real Number System". D. Van Nostrand Company- 1963

2). HAAG H. VICENT — "Structure of Algebra". Addison- Wesley- 1964

3). LANDAU EDMUND — "Foundations of Analysis". Chelsea- New York- 1957

4). OLMSTED M.H. JOHN — "The Real Number System". Appleton- Century- 1962

DACTILOGRAFIA, COMPOSICION Y GRAFICOS.-
Srta. Mónica Azócar Beiza (375530)

COMPAGINACION.- Alejo Pavez. (El Tigre)

I N D I C E

CAPITULO III INECUACIONES. PAG.

CAPITULO IV EJERCICIOS RESUELTOS.