JOHN L. KELLEY

Introducción Moderna al Algebra

CENTRO REGIONAL DE AYUDA TECNICA · REGIONAL TECHNICAL AIDS CENTER

EDITORIAL Norma CALI - COLOMBIA

INTRODUCCION MODERNA
AL
ALGEBRA

EL AUTOR

JOHN L. KELLEY es profesor en el Departamento de Matemática de la Universidad de California en Berkeley, donde ocupó el cargo de Jefe del Departamento. Durante una licencia concedida por la Universidad estuvo en el Departamento de Matemática del Instituto Hindú de Tecnología, Uttar Pradesh, India, (1964-65). Anteriormente había sido profesor en las Universidades de Notre Dame y de Chicago, profesor visitante en las Universidades de Tulane y de Kansas, y profesor investigador de la fundación Fulbright en la Universidad de Cambridge. El profesor Kelley es autor de "General Topology" *y de* "Introduction to Modern Algebra" *y coautor de* "Linear Topological Spaces" *y de* "Exterior Ballistics", *libros de la editorial Van Nostrand; es, además, uno de los editores generales de la "University Series in Undergraduate Mathematics" editada por Van Nostrand.*

INTRODUCCION MODERNA AL ALGEBRA

JOHN L. KELLEY

Con la asesoría de
Roy Dubisch, Scott Taylor y Jamesine Friend

Versión española por
Víctor D. Ariza, Antonio Linares,
Ernesto Oliveros y José M. Castro,
profesores de la Universidad del Valle, Cali

CENTRO REGIONAL DE AYUDA TECNICA
AGENCIA PARA EL DESARROLLO INTERNACIONAL **A I D**
MEXICO

EDITORIAL NORMA

CALI - COLOMBIA

NOTA A ESTA EDICION

Esta publicación es traducida de **Algebra: A Modern Introduction** editada originalmente en inglés por *D. Van Nostrand Company, Inc. 1965.* La presente edición se preparó conjuntamente por el Centro Regional de Ayuda Técnica de México y la Agencia para el Desarrollo Internacional (AID), Departamento de Estado del Gobierno de los Estados Unidos de América. El Centro es un organismo dedicado a la producción de versiones en español del material fílmico e impreso de los programas de cooperación técnica de la Alianza para el Progreso.

IMPRESO EN COLOMBIA
PRINTED IN COLOMBIA

CARVAJAL & CIA.

Prólogo

Con este libro se quiere proporcionar un texto básico de álgebra, anterior al estudio del cálculo y adecuado para estudiantes de ciencias físicas, matemáticas y sociales. Se ha preparado para el primer año de un programa universitario de artes liberales y por ello incluye muchas recomendaciones de grupos profesionales diversos, relativas al curriculum de matemática.

Un trabajo anterior del autor, Introduction to Modern Algebra, *ha servido de base para desarrollar este libro.*

He redactado el texto ante todo para estudiantes que no van a seguir carreras científicas, pero no he podido olvidar los intereses de los futuros matemáticos. El material que aquí se ofrece es parte del conocimiento algebraico que se necesita en cálculo; para estudiantes que tengan esta preparación es fácil mejorar notablemente la presentación de esta materia. El esquema siguiente muestra el tema de los capítulos y la interdependencia entre ellos.

1. *Axiomas sobre los números*
   (El cuerpo de los axiomas)
2. *Conjuntos y números*
   (Conjuntos, cuerpos completamente ordenados)
3. *Vectores y rectas*
   (Adición vectorial, multiplicación escalar)
4. *El plano complejo*
5. *Productos interiores*
   (Ortogonalidad, multiplicación escalar)
6. *Geometría vectorial*
   (Rectas y planos en el espacio tridimensional, el producto vectorial de vectores)
7. *Algebra lineal. Nota: Para ésta sólo se necesitan las dos primeras secciones del Capítulo 6 (Variedades lineales, ecuaciones lineales, transformaciones lineales)*

Ciertos aspectos del libro son inusitados. De las listas de problemas, algunas son realmente extensas, y muchos problemas (especialmente al final de las listas) son importantes teoremas matemáticos. El objeto de tales problemas no es atemorizar al estudiante sino capacitarlo para que prosiga en el estudio de los temas que son de interés especial para él. Es de esperarse que la mayoría de los estudiantes sólo resuelva pocos de los problemas más difíciles. Relativamente, hay contados problemas de "adiestramiento" porque el propósito primordial del curso es la comprensión racional antes que la adquisición de destreza.

El lector hallará, muy prontamente incorporadas, la convención de suma y la noción de espacio vectorial m*-dimensional; sin embargo, todo el material sobre espacios de dimensiones superiores, que precede al último capítulo, puede omitirse sin que se pierda continuidad. En el último capítulo se incluye un estudio sobre las variedades lineales en espacios de* m *dimensiones y los teoremas elementales relativos a transformaciones lineales, y sus inversos.*

Al Alumno

Para muchos alumnos éste será el primer curso en que se plantean los axiomas y se demuestran los teoremas del álgebra; sin embargo, no hay por qué asustarse. Acostumbrarse a las demostraciones algebraicas al igual que a las pruebas geométricas, es simplemente cuestión de poco tiempo y de práctica. Si se le dificulta la comprensión de los teoremas, puede servirle de ayuda una mirada a los primeros problemas de la lista que se halla al final de cada sección, ya que tales problemas se han ideado precisamente para ayudarle a comprender el significado de los teoremas. Si después de leer la exposición y trabajar en los problemas, todavía no se siente seguro, no tema seguir adelante sin la comprensión completa del asunto. Relea la sección más tarde y es posible que llegue a sorprenderse de ver cómo cosas que antes se le escapaban, las llega a comprender mediante los conocimientos ulteriores.

Existe una técnica para estudiar la demostración de un teorema. Primero, lea el teorema y determine con precisión qué se afirma. Luego, antes de estudiar la demostración que trae el texto, piense cómo podría encontrar una suya propia. Si se le dificulta, lea las primeras líneas de la demostración y piense nuevamente; pero si *tiene éxito, entonces lea rápidamente la que trae el texto. Si su demostración no es igual a la del texto, no crea que está equivocado, pues para la mayoría de los teoremas se pueden dar varias demostraciones diferentes. Por ningún motivo debe aprender de memoria una demostración.*

Hay, también, una técnica para hacer demostraciones, aunque el requisito primordial es ser ingenioso. Ante todo, debe estar seguro de que entiende con precisión lo que se va a demostrar; considere ejemplos y luego busque mentalmente las diversas posibilidades de lograr la demostración. No comience a escribir antes de estar bastante seguro del camino que desea seguir. Frecuentemente, vale la pena revisar los teoremas, definiciones y axiomas de que se dispone para construir la demostración. Esto es particularmente cierto para teoremas de los dos primeros capítulos en los que existen muy pocos teoremas y definiciones disponibles.

Y un breve consejo final: No se quede atrás en el curso.

JOHN L. KELLEY

Contenido

CAPITULO 1

Axiomas sobre los Números

Este primer capítulo está dedicado a la revisión y replanteamiento del álgebra elemental. Procederemos con mucha lentitud y cuidado y haremos todo el esfuerzo que sea necesario para llegar a una cabal comprensión de la naturaleza del tema. Presuponemos que el lector posee muy pocos conocimientos de álgebra o geometría; pero, desde luego, será muy útil la familiaridad con los procesos ordinarios del álgebra.

1 TERMINOS NO DEFINIDOS

A algunos estudiantes puede caerles de sorpresa descubrir que este curso de álgebra sigue en gran parte el mismo patrón que el curso clásico de geometría plana; se dan en él axiomas, definiciones y teoremas con demostraciones. Usamos este método de exposición porque queremos exhibir la estructura total de esta parte de la matemática. Aunque con frecuencia un primer curso de álgebra trata y hasta cierto punto tiene que tratar de cuestiones técnicas, v. g., del *cómo* hacer las cosas, aquí nos interesaremos mucho más en el "*porqué*". Por otra parte, debemos recalcar que la matemática no es un deporte para espectadores, y para poderlas comprender y apreciar es necesaria una gran dosis de meditación personal y la resolución de un buen número de problemas. (En pocas palabras: ¡haga sus tareas!)

Hay otro aspecto de esta presentación que puede ser un tanto sorprendente. Nos referiremos a términos (por ejemplo, "número", "conjuntos") como términos no definidos, aunque en algunos sistemas de geometría se define cada concepto a medida que se presenta. Por ejemplo, Euclides definía la línea como "aquello que no tiene anchura". Esta definición, por decir lo menos, no proporciona ninguna información y muchos estudiantes de geometría han sentido gran alivio al descubrir que nunca se necesita ni entender ni usar esta oscura definición. En realidad, desde el punto de vista de los matemáticos modernos, "línea" es uno de los términos no definidos de la geometría euclidiana.

Vale la pena examinar un poco más cuidadosamente la noción de definición. Imaginemos esta situación: hemos tropezado con la palabra "gismo" y buscamos en un diccionario su significado. En el diccionario hallamos una lista de sinónimos, por ejemplo, "frásimo", "quesés" y "solinar" y resulta que todos nos son desconocidos. Entonces buscamos la palabra "frásimo" y hallamos que los vocablos "quesés", "solinar" y "gismo" aparecen en la lista de sinónimos. Prosiguiendo así, buscamos la palabra "quesés" y luego "solinar". Pero, reaparece la misma lista de palabras. La cuestión es perfectamente clara: no tenemos cómo descubrir el significado de la palabra "gismo" a menos que su definición se haga con términos que ya nos sean familiares.

Ahora bien, supongamos que vamos a describir una teoría matemática del modo más cuidadoso, y, en especial, supongamos que nuestro deseo es definir todos los términos uno por uno. (Esto es precisamente lo que perseguía

Euclides en su sistema de geometría.) Consideremos la primera definición del ejemplo: tal vez leamos: "Un gismo es un...". Entonces, podemos preguntar: ¿por medio de qué se define el "gismo"? Si ésta es la primera de todas las definiciones, con qué elementos podemos llenar los puntos suspensivos en el enunciado definitorio: "Un gismo es...". Es claramente imposible dar una definición sin usar algún término y si se trata de la primera de las definiciones, entonces tal término ¡nunca ha sido definido!

La conclusión de toda esta exposición es sencillamente que en todo sistema matemático debe haber términos no definidos. Este hecho no nos debe causar excesiva preocupación, al menos no mayor que la dificultad que ofrece en geometría plana nuestra incapacidad para comprender el concepto de línea como "aquello que no tiene anchura". Todo cuanto necesitamos saber acerca de las líneas ya nos lo han dicho los axiomas de la geometría.

Es un poco difícil considerar los axiomas como "verdades evidentes por sí mismas", tal como se han considerado muchas veces en el transcurso de la historia, porque son enunciados de objetos en sí mismos indefinidos. Intuitivamente, los axiomas nos hablan de la naturaleza de objetos no definidos, mediante relaciones que se establecen entre ellos, y los empleamos para demostrar teoremas matemáticos por medio del razonamiento. Es perfectamente clara la necesidad de los axiomas porque si partimos de términos no definidos y no contamos con axiomas, careceremos totalmente de medios para iniciar la demostración de los teoremas.

2 EL LENGUAJE DE LA MATEMATICA

Comenzamos nuestra exposición matemática con una revisión de algunas nociones básicas de álgebra. Sin embargo, como aspiramos a ser muy cuidadosos en el manejo de las ideas aquí involucradas, no podemos hacer en esta sección demasiadas cosas en el terreno del álgebra. En cambio, nos interesaremos aunque no de manera demasiado obsesiva por el lenguaje de la matemática. Se ha dicho que la matemática es un lenguaje; pero esta pretensión es un tanto difícil de sustentar si aceptamos cualquiera de las definiciones ordinarias de lenguaje. Empero, es cierto que en matemática existe un tipo de terminología universalmente convenida que es mucho más concisa y breve que la fronda exuberante de un idioma. En matemática todo puede expresarse sin usar esta notación taquigráfica; sin embargo este recurso es tan útil que, en la práctica, viene a ser una verdadera necesidad.

Las nociones de número, adición y multiplicación son no definidas. Uno de los axiomas del álgebra, llamado axioma de distributividad, se establece usualmente así:

(1) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Supongamos que estamos bien seguros de saber con precisión lo que significa este enunciado; ante este hecho, discutamos brevemente lo que algunos llaman la "x-cesiva x-crecencia de las x" que encontramos en álgebra. La proposición expresada en (1) ciertamente no necesita de semejante notación; la proposición puede enunciarse así: dados tres números cualesquiera, el producto del primero por la suma de los otros dos es igual a la suma de los productos del primero por el segundo y del primero por el tercero. Claro que, como todos hemos estudiado un poco de álgebra, el enunciado (1) nos parece mucho más sencillo que la traducción que acabamos de dar en palabras corrientes del idioma. Y es éste uno de los puntos que queremos hacer resaltar: el lenguaje matemático no sólo es más abreviado sino que es mucho más fácil de comprender.

Ordinariamente no abreviaremos nuestros enunciados hasta el extremo en que aparece en (1). Incluiremos el requisito que se sobreentiende implícito en (1) y diremos:

(2) Para todo número x, y, z,

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

En lugar de la expresión "para todo" frecuentemente podemos usar "para cada", así que podemos escribir: "para cada x, cada y, cada z". Se supone que estas expresiones distintas significan lo mismo. Lo que realmente estamos afirmando es que si, en la expresión "$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$", reemplazamos "$x$", "$y$", "$z$" por números, entonces la expresión resultante es siempre correcta.

En el lenguaje matemático, hay otro hecho importante que debemos destacar:

(3) Para todo número a, b, c

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

y

(4) para todo número a, r, x

$$a \cdot (r + x) = (a \cdot r) + (a \cdot x),$$

lo que expresa exactamente el mismo hecho expuesto en (2). O sea: en un enunciado de este tipo, carece de importancia el uso de letras particulares; de este modo, nuestro lenguaje matemático tiene la curiosa propiedad de que las letras que en él intervienen ¡pueden cambiarse casi al azar! *

Existe otra clase de enunciados que frecuentemente intervendrá en nuestro trabajo. Consideremos lo siguiente:

(5) Hay un número x tal que $x + 2 = 5$.
(6) Para algún número a es: $a + 2 = 5$.
(7) Existe un número r tal que $r + 2 = 5$.

Es claro que todos estos enunciados afirman el mismo hecho: hay un número tal que cuando se le suma 2, da 5. Algunas veces se dice que los enunciados de la forma "$x + 2 = 5$" son ecuaciones condicionales y que los de la forma "$x + y = y + x$" son identidades†. Aquí no usaremos esta especie de jerigonza técnica. Hay otra cuestión acerca de los significados y que quisiéramos tratar antes de finalizar esta digresión lingüística. ¿En qué sentido preciso se usa la palabra igualdad? Si en una exposición sobre números arábigos y romanos decimos que 4 = IV, ¿qué se deduce de esa afirmación? *Usaremos siempre el término igualdad en el sentido de identidad lógica,* y la afirmación "4 = IV" significa simplemente que "4" y "IV" son, ambos, nombres del mismo objeto. Un objeto puede tener muchos nombres y podemos usarlos indistintamente. Todo cuanto pueda decirse de 4, puede decirse de IV, con el mismo valor de verdad.

Existen varios enunciados relativos a la igualdad que se toman algunas veces como axiomas; por ejemplo: "Toda cosa es igual a sí misma", "cosas iguales a una tercera son iguales entre sí" y "si, en una ecuación, elementos iguales se sustituyen por sus iguales, los resultados son iguales". Debido a que empleamos el concepto de igualdad sólo en el sentido de identidad, podemos aceptar tales enunciados (y enunciados de esta clase mucho más precisos) como parte de nuestro concepto natural de la noción de identidad. Es claro que, $4 = 4$, pues todo objeto es igual a sí mismo. Podemos colegir que $2 + 2 = 4$ si sabemos que $2 + 2 = 3 + 1$ y que $3 + 1 = 4$. Las dos últimas igualdades nos dicen que "$2 + 2$" y "$3 + 1$" son nombres de un mismo objeto, y que "$3 + 1$" y "4" también nombran el mismo objeto. En conclusión, simplemente tenemos tres nombres diferentes para un mismo número y evidentemente $2 + 2 = 4$. Una proposición sobre igualdad, intuitivamente puede considerarse siempre como una aseveración en la que los símbolos del miembro de la izquierda de la igualdad dan nombre al mismo objeto nombrado por los símbolos del miembro de la derecha.

Usaremos las letras "x", "y", etc. como si fueran nombres. Estrictamente hablando, no son nombres aunque frecuentemente hallemos en libros de matemática proposiciones tales como: "supongamos que x denota un número arbitrario pero determinado...". Enunciados como el anterior son parte de la jerga técnica, que es sicológicamente útil para la comunicación entre matemáticos, pero se debe evitar

* Quizás no estrictamente al azar; véase el problema 2.13. (N. del A.).

† En español llamamos a las ecuaciones, igualdades condicionadas. (N. de los T.).

tomarlos literalmente. En matemática, un nombre siempre se refiere a un objeto único y no, en forma promiscua, a uno cualquiera entre una colección de objetos. Usamos las letras en forma muy parecida a como se usa el pronombre. Precisamente, así como en la estructura de las proposiciones, éste se emplea como nombre o sustantivo, análogamente, en la estructura matemática se usan las letras como nombres. Reglas parecidas de "gramática" se aplicarán a letras y nombres. De este modo, si x es un número y $x + 5 = 7$, observamos que "$x + 5$" nombra el mismo número que se nombra con "7", y de aquí, sin más alharaca, colegimos que $(x + 5) + (-5) = 7 + (-5)$. Para mayores detalles podemos formular el razonamiento del modo siguiente: Es verdad que $7 + (-5) = 7 + (-5)$ pues toda cosa es idéntica a sí misma. Si $x + 5 = 7$, entonces "$x + 5$" y "7" son nombres para el mismo objeto, y en "$7 + (-5)$" podemos reemplazar "7" por su otro nombre, "$x + 5$", y así hallamos que $(x + 5) + (-5) = 7 + (-5)$.

No necesitaremos hacer uso de argumentos como el precedente. Al presentar aquí un argumento de ese estilo, nuestro único objetivo es buscar una comprensión intuitiva bien clara del significado de la igualdad. El estudiante deberá ser capaz de ver que cada una de las siguientes proposiciones es verdadera, sencillamente porque igualdad significa identidad.

(1) Si A es un triángulo y $A = B$, entonces B es un triángulo.
(2) Si x, y, u, v son números, y si $x = y$, y, $u = v$, entonces $x + u = y + v$, $x + u = x + v$, y, $x - u = y - u$.
(3) Si x y y son números, y, $x = y + 2$, entonces $17x = 17(y + 2)$ y $x + 2(y + 2) + x = (y + 2) + 2x + x$.

Por otra parte, los siguientes enunciados son verdaderos pero su verdad depende de hechos algebraicos adicionales y no justamente de la noción de igualdad.

(1) Si x y y son números, entonces $x + y = y + x$.
(2) Si x es un número, entonces $x + 2x + 3 = 3(x + 1)$.

La primera de estas proposiciones afirma un hecho relativo a la adición y su verdad depende del significado de "+". Si "+" se reemplaza por "—" la proposición que resulta es falsa. Así, pues, la validez del enunciado no depende propiamente del hecho de que la igualdad signifique identidad lógica. A la segunda proposición puede aplicársele un razonamiento análogo. Además, si $x = y$, entonces siempre podremos concluir que $x \square z = y \square z$, sin que importe el significado que se asigne a "$\square$".

PROBLEMAS

2.1 ¿Cuáles de las siguientes proposiciones necesitan para su demostración únicamente el hecho de que la igualdad se usa siempre para significar identidad lógica?

(a) Si $a = b$, entonces $a + a = b + b$.
(b) Si $a = b$, entonces $2 \cdot a + b = 3 \cdot a$.
(c) Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.
(d) Si $a = b$, entonces $(a + a) + b = a + (a + b)$.
(e) Si $a = b$, entonces $a + b = b + a$.

Los siguientes teoremas se han tomado del *Algebra*, de J. B. Clark, publicada en 1881. Traduzca cada uno de ellos al "lenguaje de la matemática".

2.2 Teorema. El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera más dos veces el producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.

2.3 Teorema. El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, menos dos veces el producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.

2.4 Teorema. El producto de la suma de dos cantidades por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

2.5 Teorema. Dadas tres cantidades cualesquiera, el producto de la suma de la primera y la segunda por la suma de la primera y la tercera, es igual al cuadrado de la primera, más la primera multiplicada por la suma de la segunda y la tercera, más el producto de la segunda y la tercera.

Traduzca lo siguiente al lenguaje ordinario:

2.6 $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.

2.7 $(a - b) + (b - a) = 0$.

2.8 "Si a, b, c, d son números enteros tales que $a = 2b + 1$ y $c = 2d + 1$, entonces existe un entero m tal que $ac = 2m + 1$". Observe que este enunciado es verdadero y llévelo al lenguaje ordinario en un corto y sencillo enunciado relativo a números enteros.
2.9 Consideremos el siguiente pasaje de *The Hunting of the Snark*, por Lewis Carroll.

> "Tomando el número Tres como punto de partida,
> para poder descubrir otro que yo desconozco,
> sumo Siete y sumo Diez y multiplico después
> por Un Millar menos Ocho.
>
> "Acto seguido, divido este resultado por
> Novecientos más Noventa y Dos.
> Luego resto Diez y Siete y la respuesta será
> cierta y exacta a perfección".

Si el punto de partida es n, ¿cuál será la respuesta exacta y verdadera a la perfección?
2.10 En Teoría de Conjuntos, dos conjuntos se dicen iguales si tienen los mismos elementos. Ello se expresa mediante un axioma que dice: "Si A y B son conjuntos y si para todo x, x pertenece a A si y sólo si x pertenece a B, entonces $A = B$". Consideremos la proposición recíproca de este axioma; es decir, establezcamos: "Si $A = B$, entonces para todo x, x pertenece a A si y sólo si x pertenece a B". ¿Se deduce esto únicamente del significado de la igualdad?
2.11 Defina la "frazimización" de x como x/π. Defina la "sicklebobulación" de x como πx^2.
Entonces, ¿qué viene a ser la "sicklebobulación" de r? ¿Qué es la frazimización de π? ¿Qué es la frazimización de la sicklebobulación de 3? ¿Qué es la sicklebobulación de la frazimización de 3?
2.12 Considerando "punto", "recta" y "sobre" como términos no definidos, haga lo siguiente: Suponga que si a y b son puntos y $a \neq b$, entonces existe exactamente una recta L tal que a y b están sobre L. Demuestre que si P y Q son rectas y $P \neq Q$, entonces existe a lo sumo un punto c tal que c está sobre P y sobre Q.
2.13 Sea la proposición: "Para cualquier número x existe un número y tal que $y \neq x$". Esta proposición tiene que ser verdadera. Sin embargo, piense si la verdad de este enunciado se puede deducir reemplazando "y" por "x".

3 AXIOMAS DE LA ADICION

Ahora, iniciaremos nuestra revisión del álgebra elemental haciendo libre uso del lenguaje matemático que acabamos de tratar. Nuestra primera tarea es describir la adición de números: Tomamos como no definidas las nociones de número y adición, denotada ésta con " + ". Adoptaremos cinco axiomas cuyos enunciados y discusión se presentarán en el siguiente orden de sucesión. El primer axioma es:

A1 Axioma de Clausura. Para todo número x y todo número y, $x + y$ es un número.

Este axioma, simplemente nos dice algo relativo a lo que es la operación de adición. Dados dos números, la adición de ellos engendra otro número. Así, $2 + 2$ es un número, $1 + 3$ es un número, de hecho, el mismo número.

A2 Axioma de Conmutatividad. Para todo número x y todo número y, $x + y = y + x$.

El axioma de conmutatividad nos dice, por ejemplo, que $3 + 7 = 7 + 3$. Debido a nuestro previo entrenamiento en matemática, este hecho se ha vuelto tan familiar que prácticamente para nosotros ha perdido su significado. No obstante, algunos podemos recordar (o bien pudimos haber observado en la infancia) que esta proposición fue una clara sorpresa durante nuestro aprendizaje inicial de las combinaciones aditivas. En virtud de que la adición es conmutativa, uno puede dejar de observar que la mayoría de operaciones no lo es. Por ejemplo, podemos preguntar si la división es conmutativa; es decir, si es cierto que, ¿para todos los números x y y, $x \div y = y \div x$? Pero, ello no es así, con toda seguridad; porque $1 \div 2$ no es igual a $2 \div 1$. Posteriormente daremos más ejemplos de operaciones no conmutativas.

A3 Axioma de Asociatividad. Para todo número x, y, z, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

El axioma de asociatividad nos dice, por ejemplo, que $(9 + 3) + 5 = 9 + (3 + 5)$. O sea, que si deseamos calcular la suma de estos tres números, siempre podemos sumar dos de ellos y a este resultado sumar el tercero. Esta ley asociativa nos expresa que (para hacer la suma de tres números) podemos seguir uno de estos caminos: o bien, agregar al tercero la suma de los dos primeros, o bien, agregar al primero la suma del segundo y el tercero, y en ambos casos se obtiene el mismo resultado. En virtud de la ley asociativa podemos escribir

$9 + 3 + 5$ sin ambigüedad; cualquiera de las formas de agrupación de estos tres números da el mismo resultado.

A4 Axioma de Identidad. Para cada número y, existe un número a tal que $a + y = y$.

Este cuarto axioma a veces se expresa así: "Existe un número que es una identidad aditiva"; se supone que tal enunciado debe significar cabalmente lo mismo que expresa el A4. Nuevamente, se presentan aquí numerosas operaciones que carecen de elemento identidad o elemento idéntico. Por ejemplo, preguntamos: ¿Existe un número tal que dividido por x sea igual a x, para todo número x? La respuesta es seguramente no; es decir, no existe un número que sea una identidad (elemento idéntico) con respecto a $\div$.

Desde luego, la identidad aditiva (es decir, el a tal que $a + y = y$ para cualquier y) se debe llamar "cero". Pero, hay una dificultad: ¿estamos seguros de que sólo existe un número de esa naturaleza? Esta seguridad la tendremos después de que demostremos el siguiente teorema sobre la unicidad de la identidad.

3.1 Teorema. Si $a + y = y$ para todo número y, y, $b + y = y$ para todo número y, entonces $a = b$.

Demostración. La demostración debe basarse en los axiomas y, de hecho, nos valdremos solamente del axioma de conmutatividad. La idea de la demostración es sencilla: En caso de haber dos "ceros", ¿cuál es su suma? Explícitamente, $a + b = b$ porque $a + y = y$ para todo y; además, $b + a = a$ porque $b + y = y$ para cualquier número y. Por otra parte, $a + b = b + a$ por el axioma A2 de conmutatividad. Así, pues, $b = a + b = b + a = a$, y, de aquí, $a = b$. ▌

Ahora podemos definir 0 como *el* elemento idéntico (la identidad) aditivo.

3.2 Definición. 0 es el número tal que $0 + y = y$ para cualquier número y.

Por supuesto, también es cierto que $y + 0 = y$ para todo número y. Usaremos a menudo este hecho.

El último axioma para la adición es

A5 Axioma de los Inversos. Para todo número a existe un número b tal que $a + b = 0$.

Este axioma A5 sobre inversos expresa intuitivamente que todo número tiene un negativo.* El número b tal que $a + b = 0$ en verdad podría llamarse $-a$, pero, nuevamente aquí surge una dificultad. ¿Puede haber dos inversos diferentes? El teorema siguiente asegura que no.

3.3 Teorema. Si $a + b = 0$ y $a + c = 0$, entonces $b = c$.

Demostración. La prueba emplea los axiomas de conmutatividad y asociatividad. Formalmente, podemos organizar la demostración en una sucesión ordenada de enunciados.

1. $b + (a + c) = (b + a) + c$, por el axioma de asociatividad
2. $a + c = 0$, por hipótesis, y
3. $b + a = a + b = 0$, por el axioma de conmutatividad y por la hipótesis.
4. luego, $0 + c = b + 0$, por los enunciados 1, 2 y 3
5. $0 + c = c$, por la definición de 0,
6. $b + 0 = 0 + b = b$, por el axioma de conmutatividad y la definición de 0, y
7. luego, $b = c$, por los enunciados 4, 5 y 6. ▌

Ahora, podemos definir el negativo de un número a, denominado a veces inverso aditivo de a. Antes de dar esta definición, queremos decir que, desafortunadamente, el término "negativo" se usa en álgebra elemental en dos sentidos completamente diferentes. En la sección 10 llamaremos positivos a algunos números y negativos a otros; pero tal cosa nada tiene qué ver con la definición *del* negativo de un número que estamos a punto de dar. El negativo de un número puede ser un número negativo o un número positivo. Si x es un número, entonces su negativo se denotará por $-x$, haciendo caso omiso de si x es un número positivo o negativo.

3.4 Definición. Para todo número a, el negativo de a, que se escribe $-a$, es el número tal que $a + (-a) = 0$.

* Mejor es llamarlo *opuesto*, para evitar anbigüedades. (N. de los T.).

Dicho en otra forma: el *opuesto** de a, $-a$, es la respuesta a la siguiente pregunta:

$$a + ? = 0$$

Si $a + b = 0$ entonces, *por definición*, $-a = b$. Así, $-0 = 0$ porque $0 + 0 = 0$.

Si c es un número tal que $c + a = 0$, entonces $a + c = 0$ en virtud del axioma de conmutatividad, y de aquí, $c = -a$. De modo que el opuesto de a también puede describirse como la respuesta al interrogante siguiente:

$$? + a = 0$$

Vamos a aplicar esta observación a la búsqueda del opuesto del opuesto de a, $-(-a)$. El opuesto de $-a$ es la respuesta a la siguiente pregunta:

$$? + (-a) = 0$$

La respuesta, ciertamente, es a. Así, pues:

3.5 Teorema sobre inversos de inversos. Para todo número a, $-(-a) = a$.

Concluimos esta exposición con la demostración del teorema llamado usualmente "regla de trasposición de números en una ecuación". Pero, primero simplifiquemos nuestra notación; "$a + (-b)$" es innecesariamente largo.

3.6 Definición. La diferencia de dos números a y b, que se escribe $(a-b)$ se define como $a + (-b)$.

3.7 Teorema de trasposición. Si $x + a = b$, entonces $x = b - a$.

Demostración. Si $x + a = b$, entonces $(x + a) + (-a) = b + (-a)$ en virtud del significado de la igualdad. Pero, $(x + a) + (-a) = x + [a + (-a)] = x + 0 = x$, usando, en su orden, la ley asociativa, la definición de $-a$ y la definición de 0. Además, $b + (-a) = b - a$, según la definición de sustracción. Luego, $x = b - a$. ▌

Para concluir esta sección, daremos dos ejemplos de una clase de pequeños teoremas que son de utilidad frecuente y que se construyen con bastante facilidad a partir de los axiomas.

3.8 Ejemplo. El problema es probar que

$$a + [b + (c + d)] = (a + b) + (c + d)$$

para todo número a, b, c, d. Por el axioma de clausura, $(c + d)$ es un número. Entonces, podemos aplicar la ley asociativa a los números a, b y $(c + d)$. (Si Ud. prefiere hacerlo de otro modo, puede poner $x = a$, $y = b$, $z = c + d$ en el enunciado del axioma de asociatividad.) Esto prueba que $(a + b) + (c + d) = a + [b + (c + d)]$. ▌

De ordinario, no nos preocuparemos de mencionar el empleo del axioma de clausura pues normalmente su utilización es bastante evidente de por sí.

3.9 Ejemplo. Demuestre que $(a + b) + c = c + (b + a)$, para cualesquiera números a, b, c. Ante todo, $a + b$ es un número, según el axioma de clausura; luego $(a + b) + c = c + (a + b)$ por el axioma de conmutatividad. Aplicando este mismo axioma a los números a y b en el segundo miembro de la última igualdad, deducimos que $a + b = b + a$. En consecuencia, $(a + b) + c = c + (a + b) = c + (b + a)$. ▌

PROBLEMAS

Nota: El lector advertirá que la siguiente colección de problemas presenta ciertas tendencias esquizofrénicas. En efecto, en algunos problemas se considera que el lector supone que, para resolverlos, sólo requiere los conocimientos del sistema numérico establecidos a través de los axiomas y teoremas de esta sección. En cambio, en otros problemas e ilustraciones, se supone que el lector debe usar su preparación previa en matemática. Espero que el enunciado de cada problema permita al lector ver claramente cuál de las dos alternativas debe adoptar.

3.1 Demuestre que son válidas cada una de las igualdades siguientes, evaluando separadamente ambos miembros:

(a) $(2 + 2) + 4 = 2 + (2 + 4)$

(b) $(1 + 2) + 3 = 3 + (2 + 1)$

(c) $\{[(1 + 2) + 4] + 7\} + 14 = 14 + \{7 + [4 + (2 + 1)]\}$

3.2 A partir de los axiomas demuestre que $-b + b = 0$.

3.3 A partir de los axiomas demuestre que

(a) $(a + b) + (c + d) = b + [a + (d + c)]$

(b) $a + [b + (c + d)] = [a + (b + c)] + d$

* En lo sucesivo usaremos el término "opuesto", en lugar de negativo en el sentido empleado por el autor (N. de los T.).

3.4 Si se ha definido el número 1 (se definirá en la sección 5), entonces podremos definir otros números más en la forma siguiente: $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$. Adopte estas definiciones y con base en ellas pruebe que $2 + 2 = 4$.

3.5 (a) ¿Es siempre cierto que $x - y = y - x$? ¿Es decir, la sustracción es conmutativa?

(b) ¿Es siempre cierto que $(x - y) - z = x - (y - z)$? ¿Es decir, la sustracción es asociativa?

3.6 (a) ¿Obedece la operación de división a la ley asociativa (axioma A3 con $\div$ en vez de $+$)? O sea: ¿Es siempre cierto que $(x \div y) \div z = x \div (y \div z)$?

(b) Aunque no existe elemento idéntico (identidad) para la división, ¿hay algún número x tal que para todo y sea $y \div x = y$?

3.7 Supóngase que a tiene la propiedad de que para todo x, $a + x = x$, y b tiene la propiedad de que para todo x, $x + b = x$. Demuestre, sin usar el axioma de conmutatividad, que $a = b$. (La anterior proposición ordinariamente se enuncia así: Toda identidad a la izquierda debe ser igual a la correspondiente identidad a la derecha. De esto, supuesta la existencia de ambas identidades, a izquierda y a derecha, se deduce que la identidad es única y se dice elemento idéntico a ambos lados.)

3.8 A partir de los axiomas demuestre que $-(a - b) = b - a$.

3.9 A partir de los axiomas demuestre que si $a + b = a + c$, entonces $b = c$. (Este teorema se conoce comúnmente como el teorema de cancelación para la adición.)

3.10 ¿Para cuáles números x, es verdad que

(a) $(x + 3) + 1 = 4 + x$?
(b) $x + 1 = x$?
(c) $x + 3 = 2$?

3.11 A partir de los axiomas demuestre que

(a) $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$
(b) $(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$.

3.12 Con base en los axiomas demuestre que $a - b = c - d$ si y solamente si $a + d = b + c$. Es decir, demuestre que si $a - b = c - d$, entonces $a + d = b + c$, y demuestre también que si $a + d = b + c$, entonces $a - b = c - d$.

3.13 Supóngase que Ud. es conductor de un bus urbano y que en el primer paradero suben al bus algunas personas; en el segundo paradero, suben cuatro y bajan dos; en el tercero, suben ocho y bajan cuatro; en el cuarto, suben dieciséis y bajan ocho; en el quinto, sube un borracho y bajan veinte personas; en el sexto paradero el borracho pregunta por el nombre del conductor y se baja. Entonces el conductor se da cuenta de que el bus está vacío. ¿Cuántas personas subieron en el primer paradero y cómo se llama el conductor?

3.14 Considere los dígitos (es decir, los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) como un sistema de números, con una nueva operación v, definida así: el resultado de $a \, v \, b$ será igual al mayor de los números a y b, si $a \neq b$, e igual a a si $a = b$. (Por ejemplo, $2v3 = 3$, $8v5 = 8$, y $2v2 = 2$.) ¿Cuáles de los axiomas, A1, A2, A3, A4, A5, permanecen válidos en este sistema si " $+$ " se reemplaza por "v" en cada uno de ellos?

3.15 Los enteros (vale decir, todo el conjuto de los números . . ., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, . . .) constituyen un sistema númerico que cumple los axiomas A1, A2, A3, A4, y A5. Por esta razón, cualquier teorema que pueda deducirse de estos axiomas será verdadero, particularmente con respecto a los enteros. Lógicamente, se desprende de aquí que cualquier enunciado (planteado como posible teorema) que no valga para los enteros, no puede deducirse del sistema de axiomas en referencia. Teniendo esto presente, reemplace el símbolo " $+$ " por el "$-$" en cada uno de los axiomas A1, . . ., A5, y determine si los enunciados resultantes pueden o no deducirse de los cinco axiomas originales. Cuando la decisión sea "no", dé un ejemplo, sacado de los enteros, con el fin de verificar que la decisión es correcta. Si la decisión es "sí" desarrolle la deducción.

3.16 Supóngase que definamos una nueva operación $\oplus$ para números por medio de las operaciones ordinarias, así: $a \oplus b = a + b - a \cdot b$. Ahora bien, si nosotros reemplazamos " $+$ " por "$\oplus$" en cada uno de los axiomas, A1, A2, A3, A4, y A5, ¿cuáles de los enunciados que resulten serán verdaderos? En otras palabras: ¿Cuáles de los axiomas de la adición son compatibles con $\oplus$?

3.17 Supóngase que existen los axiomas A1 y A3 pero no el A2. En lugar del A4, supóngase que hay una identidad 0 tal que $0 + x = x + 0 = x$ para todo número x, y en vez de A5, supóngase que para cada número a existe otro b tal que $a + b = b + a = 0$. Demuestre que, en ese caso, los inversos son únicos en el sentido de que si $a + b = b + a = 0$ y $a + c = c + a = 0$, entonces $b = c$.

4 VARIACIONES SOBRE EL TEMA ANTERIOR

Esta sección constituye una digresión de nuestro programa de revisión del álgebra elemental. Abandonando momentáneamente nuestra exposición sobre el sistema numérico, analizaremos algunos objetos matemáticos que no son números, aunque poseen algunas propiedades de éstos. Las nociones que consideraremos, hacen parte de una matemática más avanzada y en sí mismas tienen gran interés; sin embargo, aquí estamos fundamentalmente interesados en ilustrar y explorar la naturaleza de los axiomas que ya hemos aceptado.

Estudiaremos ejemplos de una colección de objetos con una operación $\oplus$ que actúa como la operación $+$ y que obedece a algunos o todos los axiomas siguientes:

1. (Clausura). Para todo objeto x y todo objeto y, $x \oplus y$ es un objeto.

2. (Conmutatividad). Para todo objeto x y todo objeto y, es $x \oplus y = y \oplus x$.
3. (Asociatividad). Para todo objeto, x, y, z, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
4. (Identidad)*. Hay un objeto a tal que $a \oplus y = y \oplus a = y$, para cualquier objeto y.

En los ejemplos que siguen representaremos la identidad por " $\odot$ " cuando exista. El quinto axioma es:

5. (Inverso). Para todo objeto a existe un objeto b tal que $a \oplus b = b \oplus a = \odot$.

Si existe un inverso de a lo designaremos por $\ominus a$. Además, $a \oplus (\ominus b)$ lo representaremos por $a \ominus b$.

Por vía de información: Los matemáticos denominan grupo a una colección de objetos con una operación $\oplus$ que satisface los axiomas 1, 3, 4, 5. Si, además, la operación cumple el axioma 2, el grupo se llama conmutativo. La teoría de grupos es una rama interesante e importante de la matemática moderna y de la física.

Para mayor información y más amplias referencias, remitimos al lector interesado a la obra de Paul Alexandroff, *An Introduction to the Theory of Groups*, Blackie, 1959.

4.1 Ejemplo. El primer ejemplo que vamos a estudiar se relaciona con el movimiento de una figura plana. Sea la figura 4.1. Supongámosla recortada en cartón y su contorno dibujado sobre una hoja de papel. Mediante un movimiento de la figura provocamos un deslizamiento y una rotación del cartón sobre la hoja de papel en tal forma que la posición final del cartón ocupe precisamente el contorno dibujado. Además, dos movimientos se suponen idénticos si los efectos finales son los mismos. O sea: una rotación de 540° es precisamente el mismo movimiento que una rotación de 180°, y una rotación de 360° es igual a otra de 0°. (Admito que este planteamiento no se caracteriza propiamente por su precisión matemática, pero abrigo la esperanza de que sea comprensible.) Con esta idea de movimiento vemos que en realidad hay justamente dos movimientos. Podemos girar la figura en 180°, y representaremos este movimiento por R, o, simplemente, podemos volverla a su posición inicial, en cuyo caso llamamos I a este movimiento. Hacemos resaltar el hecho de que el objeto de nuestras consideraciones es el movimiento de la figura, no su posición.

La figura 4.2 muestra el efecto de R e I en las posiciones posibles. El hecho que interesa en todo esto es que hay un modo muy natural de "sumar" movimientos. Damos una definición que vale para cualquier figura: Si x y y son dos

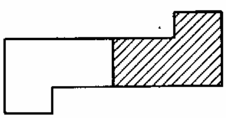


Figura 4.1

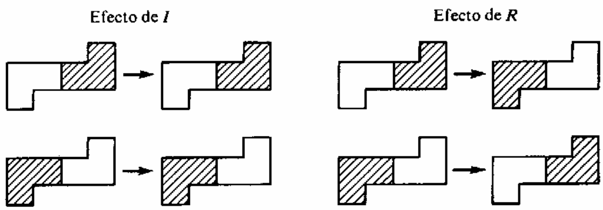


Figura 4.2

movimientos, entonces su "suma" $x \oplus y$, es el movimiento que resulta al efectuar primero el y y luego el x. Si aplicamos esta definición al caso de $I \oplus R$ se tiene que, efectuando primero una rotación de 180° y luego la rotación 0°, el resultado es justamente la rotación de

* Este axioma no es el análogo preciso de A4 porque se exige que $a \oplus y = y \oplus a$ para cualquier objeto y. El A4 es tal que, aun sin el axioma de conmutatividad, la identidad es única. (Véase el problema 3.7.) De manera parecida el quinto axioma se cambia de modo que si hay un inverso él sea único, aun sin el axioma de conmutatividad. (Véase el problema 3.17.) (N. del A.)

180^0 o sea R, así que $I \oplus R = R$. El efecto de girar primero 180^0 y nuevamente 180^0 es el mismo que se produce al girar 0^0, de modo que $R \oplus R = I$. De acuerdo con esto, podemos tabular todas las "sumas" posibles de la manera siguiente.

$\oplus$	I	R
I	I	R
R	R	I

Esta tabla se lee en la forma ordinaria: un elemento cualquiera de los comprendidos debajo y a la derecha de las líneas es la "suma" del objeto cuyo nombre figura en el extremo izquierdo de su fila con el objeto cuyo nombre aparece en el extremo superior de su columna.

Examinemos ahora los objetos I y R y la operación $\oplus$ a fin de establecer cuáles de los axiomas A1 — A5 se cumplen. En primer lugar, se satisface el axioma de clausura, pues si x y y son dos objetos, entonces $x \oplus y$ es otro objeto. El axioma de conmutatividad afirma que $x \oplus y = y \oplus x$ para cualesquiera objetos x y y, y en nuestro caso existen tres igualdades posibles para verificar:

$$I \oplus I = I \oplus I, \; I \oplus R = R \oplus I, \text{ y}$$
$$R \oplus R = R \oplus R$$

Una simple ojeada a la tabla de operación nos da la convicción que todas estas igualdades son correctas; de aquí concluimos que $\oplus$ es una operación conmutativa. El estudiante puede observar que el axioma de conmutatividad simplemente afirma que la tabla de $\oplus$ es simétrica respecto de la diagonal. No verificaremos el axioma de asociatividad. En realidad, no es difícil ver que $x \oplus y \oplus z$ es sencillamente el movimiento que se obtiene efectuando primero el z, luego el y y después el x, independientemente de la forma como se agrupen los términos. A continuación, determinamos si existe o no un elemento idéntico para $\oplus$, es decir, un objeto que "sumado" a un objeto arbitrario dé como resultado este objeto arbitrario. Una nueva inspección de la tabla de operación nos hace ver que I es un objeto de tal clase y por ello, podemos escribir $\odot = I$. (Obsérvese en la tabla que la identidad aparece al frente de una fila que es justamente copia de los encabezamientos de las columnas.) Finalmente, verifiquemos si cada objeto x tiene un inverso en el sentido de que exista un objeto que "sumado" a x dé $\odot$. Encontramos que ello ocurre y que $\ominus I = I$, y $\ominus R = R$.

De esta suerte, todos los axiomas de la adición de números se cumplen en la operación $\oplus$ definida para estos objetos. Puesto que el conjunto de objetos que hemos considerado es bien diferente del de los números, podemos colegir que ciertamente existen propiedades de los números fuera de las enumeradas hasta ahora en el sistema de axiomas. Por ejemplo, el siguiente enunciado es cierto entre números pero no lo es su correspondiente para los objetos: Existen números x, y, z tales que $x \neq y$, $y \neq z$, y, $x \neq z$. ▌

4.2 Ejemplo. Consideremos el triángulo equilátero representado en la figura 4.3. Nuevamente, imaginamos un movimiento de deslizamiento y rotación en el plano del triángulo, que hace retornar el triángulo hasta cubrir exactamente la

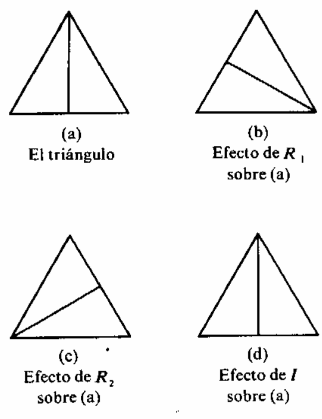


Figura 4.3

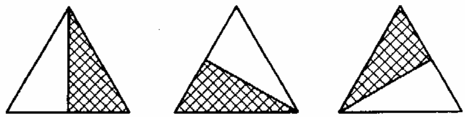
misma posición. Dos movimientos se consideran idénticos si en definitiva llevan el triángulo a la misma posición. Una ligera consideración nos hace ver que en el caso hay tres movimientos. Podemos hacer rotar el triángulo en 120° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, o en 240°, o dejarlo justamente donde estaba. Estos movimientos se denotarán R_1, R_2 e I, respectivamente (véase la figura 4.3). Igual que antes, dados los movimientos x y y, definimos $x \oplus y$ como el movimiento del triángulo que se obtiene aplicándole primero el movimiento y y luego el x. Inmediatamente damos la tabla de la operación $\oplus$ para este caso:

$\oplus$	I	R_1	R_2
I	I	R_1	R_2
R_1	R_1	R_2	I
R_2	R_2	I	R_1

El axioma de clausura se cumple, pues la "suma" de dos movimientos cualesquiera del conjunto es otro movimiento. Además, la simple inspección de la tabla nos hace ver que es simétrica respecto de la diagonal, en consecuencia, la operación satisface el axioma de conmutatividad. El axioma de asociatividad también se cumple, pero no intentaremos verificarlo. Por último, en la tabla hallamos que cada objeto tiene un inverso y que en efecto, $I = \ominus I$, $R_1 = \ominus R_2$ y $R_2 = \ominus R_1$. Obsérvese que el axioma de los inversos adopta una forma sencilla en la tabla: justamente, la exigencia de que el elemento idéntico aparezca en cada columna.

Se ve, pues, que el sistema de los objetos que se acaba de describir cumple todos los axiomas de la adición de números.

Ahora, vamos a cambiar nuestro conjunto de objetos dándole cabida a otros movimientos. Consideremos que el hecho de tomar el triángulo y voltearlo en el espacio es un movimiento permisible. Ahora bien, este triángulo particular se raya por detrás y de este modo vemos que son también posibles los movimientos adicionales que presenta la gráfica 4.4. El conjunto de objetos en este caso es I, R_1, R_2, F, F_1 y F_2; la operación $\oplus$ se define en igual forma que antes. No entraremos en los detalles de verificación de los axiomas de asociatividad, identidad e inversión, pero aseguramos que se cumplen. No obstante, obsérvese que el movimiento $R_1 \oplus F$ se obtiene aplicando primero el movimiento F que consiste en "hacer girar el triángulo sobre la vertical" y luego, aplicar el giro



(a) Efecto de F sobre 4.3 (a) (b) Efecto de F_1 sobre 4.3 (a) (c) Efecto de F_2 sobre 4.3 (a)

Figura 4.4

R_1 en el plano; el resultado es F_1. Pero, el movimiento $F \oplus R_1$, que resulta del giro R_1 seguido de la rotación F (en el espacio) alrededor de la vertical, es F_2. Así, pues, $R_1 \oplus F \neq F \oplus R_1$ y por tanto, no se cumple el axioma de conmutatividad. ▌

Es posible idear otros muchos sistemas con sus respectivas operaciones, simplemente considerando objetos matemáticos abstractos y proporcionando una tabla de "sumar". Estas tablas se pueden usar para ilustrar otras cuestiones relacionadas con los axiomas. Terminamos con dos ejemplos de este tipo.

4.3 Ejemplo. Supongamos que existen dos objetos A y B, provistos de una operación $\oplus$ definida por la tabla:

$\oplus$	A	B
A	A	A
B	A	A

Entonces, la operación con estos objetos satisface el axioma de clausura y es conmutativa y asociativa; empero, no existe elemento idéntico. ▌

4.4 Ejemplo. Supongamos que existen dos objetos A y B y que la operación $\oplus$ entre ellos está definida por la tabla:

$\oplus$	A	B
A	A	B
B	B	B

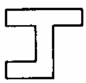
Este sistema satisface los axiomas de clausura y conmutatividad y, a menos que yo calcule mal, también el axioma de asociatividad. Además, hay elemento idéntico, a saber, A. No obstante, B no tiene inverso. ▌

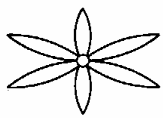
PROBLEMAS

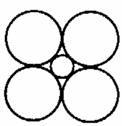
En los problemas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5,

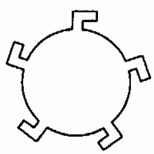
(a) Enumere los movimientos (voltear la figura alrededor de la vertical, es un movimiento permitido).
(b) Haga una tabla de adición de los movimientos, sabiendo que el movimiento $x \oplus y$ es el que resulta de aplicar primero el y y luego el x.
(c) Haga una lista que indique el opuesto de cada movimiento.
(d) Establezca si se satisface el axioma de conmutatividad.


4.1


4.2


4.3


4.4


4.5

4.6 (a) ¿Forman grupo los enteros pares con relación a la operación de adición?
(b) ¿Forman grupo los enteros impares respecto de la operación de adición?

4.7 Considere los enteros múltiplos de 5, es decir, ..., —10, —5, 0, 5, 10, 15... ¿Forman grupo respecto de la adición?

4.8 ¿Forman grupo los números positivos respecto de la operación de multiplicación? Es decir, si se usa "·" en vez de "+", trabajando sólo con los números positivos, ¿se cumplirán los axiomas de grupo?

4.9 En el sistema que tiene como elementos $\odot$, a, b, dada la tabla de adición que se muestra enseguida, ¿cuáles axiomas dejan de cumplirse?

$\oplus$	$\odot$	a	b
$\odot$	$\odot$	a	b
a	a	$\odot$	a
b	b	a	$\odot$

4.10 Verifique que en la tabla siguiente se cumplen los axiomas 1, 4 y 5. Verifique, además, que

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$
$$(b \oplus c) \oplus d = b \oplus (c \oplus d)$$
$$(a \oplus c) \oplus e = a \oplus (c \oplus e).$$

Esta es la tabla de adición de un grupo no conmutativo (verifique, por ejemplo que $c \oplus e \neq e \oplus c$). Debido a que la verificación completa de la asociatividad requeriría el examen de 125 casos, el estudiante puede omitir esta labor, estudiando sólo los tres casos especiales dados arriba.

$\oplus$	$\odot$	a	b	c	d	e
$\odot$	$\odot$	a	b	c	d	e
a	a	$\odot$	c	b	e	d
b	b	d	$\odot$	e	a	c
c	c	e	a	d	$\odot$	b
d	d	b	e	$\odot$	c	a
e	e	c	d	a	b	$\odot$

4.11 Demuestre que en cualquier grupo (es decir, en un conjunto que cuente con un $\odot$ y en el que se cumplan los axiomas 1, 3, 4 y 5) se tiene $\ominus(a \oplus b) = \ominus b \ominus a$.

4.12 ¿Por qué es imposible deducir de los axiomas 1, 2, 3, 4 y 5 el enunciado: "Si $a + a = b + b$, entonces $a = b$"?

4.13 Se dice que dos grupos son iguales si tienen la misma tabla de adición. Con base en los ejemplos siguientes, el lector entenderá qué significa el que dos tablas de operaciones sean iguales.

Las tablas 1, 2 y 3 podrían considerarse como iguales; en cambio, la tabla 4 es diferente de las 1, 2 y 3.

1.

$\oplus$	a	b
a	a	b
b	b	a

2.

$\oplus$	m	n
m	m	n
n	n	m

3.

$\oplus$	p	q
p	q	p
q	p	q

4.

$\oplus$	r	s
r	r	s
s	r	s

Utilizando las consideraciones anteriores, demuestre que sólo hay un grupo con dos elementos.

4.14 Demuestre que en cualquier grupo con sólo tres elementos, $\odot$, p, q, debe cumplirse que $p \oplus q = \odot$. Use este hecho para facilitar la tarea de demostrar que hay sólo un grupo con tres elementos.

4.15 Demuestre que si un grupo goza de la propiedad de que para todo x, perteneciente al grupo, $x \oplus x = \odot$, entonces el grupo es conmutativo.

4.16 Demuestre que todos los grupos con cuatro elementos o menos son conmutativos.

5 AXIOMAS DE LA MULTIPLICACION

Los axiomas de la multiplicación son tantos como los de la adición y de este hecho sacaremos toda la ventaja que sea posible. Hay, pues, como en el caso de la adición, cinco axiomas. Comenzamos por enumerar los cuatro primeros, haciendo corresponder a cada uno el respectivo axioma de la suma.

Axiomas de la multiplicación	Axiomas de la suma
M1 (Clausura) Para todo número x, y todo número y, $x \cdot y$ es un número.	**A1 (Clausura)** Para todo número x, y todo número y, $x + y$ es un número.
M2 (Conmutatividad) Para todo número x, y todo número y, $x \cdot y = y \cdot x$.	**A2 (Conmutatividad)** Para todo número x y todo número y, $x + y = y + x$.
M3 (Asociatividad) Para todos los números x, y, z es $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.	**A3 (Asociatividad)** Para todos los números x, y, z es $(x + y) + z = x + (y + z)$.
M4 (Identidad) Existe un número c tal que $c \cdot y = y$ para todo número y	**A4 (Identidad)** Existe un número a tal que $a + y = y$ para todo número y

Obsérvese que los axiomas de la multiplicación son precisamente los axiomas de la adición con sólo reemplazar "+" por "·". Por supuesto, el número que desempeñe el papel de elemento idéntico multiplicativo (Axioma M4) será el 1. Si queremos definir 1 como el elemento idéntico, antes es necesario que sepamos que sólo hay uno de tales números. La situación es bastante análoga a la que se presentó para la definición del 0. Así, pues, es necesario un teorema.

5.1 Teorema. Si $c \cdot y = y$ para todo número y, y, $b \cdot y = y$ para todo número y, entonces $c = b$.

No haremos la demostración del teorema, pero daremos indicaciones amplias de cómo llegar a ella. El teorema 3.1 establece: Si $a + y = y$ para todo número y, y, $b + y = y$ para todo y, entonces $a = b$. Este teorema se demostró con base en los axiomas A1, A2, A3, A4, y los primeros cuatro axiomas de la multiplicación ciertamente tienen una especie de aire de familia con aquellos. Así, pues, está abierto el camino para'la demostración.

El teorema 5.1 nos dice que existe justamente un número que actúa como el 1, de donde:

5.2 Definición. 1 es el número tal que $1 \cdot y = y$ para todo número y.

Hasta el momento hemos observado una correspondencia exacta entre los axiomas, teoremas y definiciones de la adición y los de la multiplicación; los últimos se obtienen de los enunciados de la suma, reemplazando en éstos "+" por "·" y 0 por 1. Sin embargo, el quinto axioma de la multiplicación no corresponde exactamente al quinto axioma de la adición.

Antes de establecer el quinto axioma, vamos a recordar la definición de sustracción. Primero, hemos definido el opuesto de un número y luego la diferencia entre a y b como la suma de a con el opuesto de b. Queremos ahora seguir el mismo patrón para el caso de la división, de manera que primero definiremos el recíproco b^{-1} de un número b (el cual, más tarde, escribiremos $1/b$) y luego, se definirá el cociente de a y b como el producto de a por el recíproco de b o sea, a por b^{-1}. El quinto axioma nos dice que este recíproco existe pero, a diferencia de lo que acontece con los opuestos, no todo número tiene necesariamente recíproco. Suponemos que 0 no tiene recíproco.

M5 (Inversos)
Para todo número a, diferente
de cero, existe un número b tal
que
$$a \cdot b = 1$$

A5 (Inversos)
Para todo número a existe
un número b tal que
$$a + b = 0$$

Desde luego, el número b a que se refiere el M5 se denominará recíproco de a y convenimos en representarlo por a^{-1}. Empero, necesitamos saber que solamente existe uno de tales números y por ello demostremos que:

5.3 Teorema. Si $a \cdot b = 1$ y $a \cdot c = 1$, entonces $b = c$.

Sin entrar en los detalles de la demostración de este teorema, hacemos resaltar que la demostración del 3.3 puede proporcionar indicaciones al respecto. Ahora, definimos el recíproco (será necesario que yo diga: ¿véase la definición 3.4?) en la forma siguiente:

5.4 Definición. Para todo número a, diferente de 0, el recíproco de a, que se escribe a^{-1}, es el número tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

En otros términos, a^{-1} es la respuesta a la pregunta: $a \cdot ? = 1$. Si $a \cdot b = 1$, entonces $a^{-1} = b$, *por definición*. Así, pues, $1^{-1} = 1$ porque $1 \cdot 1 = 1$.

Si c es un número tal que $c \cdot a = 1$, entonces $a \cdot c = 1$ porque la multiplicación es conmutativa, y de aquí $c = a^{-1}$. Así que a^{-1} es, también, la respuesta a la pregunta: $? \cdot a = 1$. El recíproco del recíproco de un número $a, (a^{-1})^{-1}$, es entonces la respuesta a la pregunta: $? \cdot a^{-1} = 1$. La respuesta es ciertamente a, y ello prueba el siguiente teorema.

5.5 Teorema. Para todo número a, diferente de 0, $(a^{-1})^{-1} = a$.

Ahora, definimos la división.

5.6 Definición. Si a y b son números y $b \neq 0$, entonces el cociente de a por b, se define como

$a \cdot b^{-1}$ (el producto de a por el recíproco de b) y se designa por $a/b, \frac{a}{b}$, o $a \div b$.

Obsérvese que $1/b = 1 \cdot b^{-1} = b^{-1}$; de modo que "$1/b$" es precisamente otro nombre para el recíproco de b.

Finalmente, hemos llegado a un conjunto de teoremas un tanto más emocionantes. Demostraremos las "leyes" de la multiplicación y de la división de fracciones, a partir del teorema sobre multiplicación de recíprocos.

5.7 Teorema de los Recíprocos. Si a y b son números y ambos son diferentes de cero, entonces.

$$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$

Demostración. A fin de demostrar este teorema, debemos verificar que, según la definición de recíproco, $(a \cdot b) \cdot (a^{-1} b^{-1}) = 1$. Es suficientemente claro que podemos hacer esto a partir de las leyes conmutativa y asociativa, sin embargo, damos todos los detalles:

$(a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) = [(a \cdot b) \cdot a^{-1}] \cdot b^{-1}$ por el axioma de asociatividad

$= [a^{-1} \cdot (a \cdot b)] \cdot b^{-1}$ por el axioma de conmutatividad

$= [(a^{-1} \cdot a) \cdot b] \cdot b^{-1}$ por el axioma de asociatividad

$= (1 \cdot b) \cdot b^{-1}$ por la definición de recíproco

$= b \cdot b^{-1}$ por la definición de 1

$= 1$ por la definición de recíproco. ▌

El siguiente teorema nos enseña a multiplicar fracciones.

5.8 Teorema sobre multiplicación de fracciones. Si a, b, c, d son números y b y d son diferentes de 0, entonces

$$(a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c)/(b \cdot d).$$

Se deja al lector la demostración de este teorema, pero le ayudaremos un poco. De acuerdo con la definición de división, hay que demostrar que $(a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1}$. Parece que, con bastante probabilidad, necesitaremos los axiomas de conmutatividad y de asociatividad, las definiciones de recíproco y de 1, y el hecho de que $(b \cdot d)^{-1} = b^{-1} \cdot d^{-1}$ (teorema 5.7). El próximo teorema se prueba, a lo sumo, en la misma forma y por ello refrenamos nuestra tendencia a dar más consejos.

5.9 Teorema sobre la división de fracciones. Si a, b, c, d son números y b, c, d son diferentes de 0, entonces

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right).$$

Uno de los enunciados corrientes del teorema precedente es: para dividir fracciones, invierta el denominador y multiplique. El siguiente y último teorema se enuncia frecuentemente, con un poco de imprecisión así: "Se puede multiplicar en cruz".

5.10 Teorema sobre la multiplicación en cruz. Si a, b, c, d son números y b y d son diferentes de 0, y si $a/b = c/d$, entonces $a \cdot d = b \cdot c$.

Demostración. Esbozamos la demostración, dejando en blanco los espacios para las justificaciones que se omiten para dejarlas a cargo del lector quien podrá establecer el teorema, axioma, o definición que justifica cada etapa de la prueba. Puesto que $a/b = c/d$, sabemos que $a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1}$; multiplicando este número por d, vemos que $(a \cdot b^{-1}) \cdot d = (c \cdot d^{-1}) \cdot d$, y entonces

$(a \cdot b^{-1}) \cdot d = c \cdot (d^{-1} \cdot d)$ porque __________

$(a \cdot b^{-1}) \cdot d = c \cdot (d \cdot d^{-1})$ __________

$(a \cdot b^{-1}) \cdot d = c \cdot 1$ __________

$(a \cdot b^{-1}) \cdot d = 1 \cdot c$ __________

$(a \cdot b^{-1}) \cdot d = c$ __________

$(b^{-1} \cdot a) \cdot d = c$ __________

$b^{-1} \cdot (a \cdot d) = c$ __________

Por esta razón, multiplicando por b este último número tenemos: $b \cdot (b^{-1} \cdot (a \cdot d)) = b \cdot c$, y entonces

$$(b \cdot b^{-1}) \cdot (a \cdot d) = b \cdot c \text{ porque} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$1 \cdot (a \cdot d) = b \cdot c \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$a \cdot d = b \cdot c \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \blacksquare$$

Finalizamos esta sección con algunas observaciones más sobre el paralelismo entre la adición y la multiplicación. Presentamos las siguientes analogías:

Adición	*Multiplicación*
$+$	$\cdot$
0	1
$-x$	x^{-1}
$x-y$	x/y

A cada enunciado sobre la adición le corresponde uno análogo sobre la multiplicación y viceversa. Por ejemplo, los siguientes enunciados ofrecen paralelismo:

$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
$-(-x) = x$	$(x^{-1})^{-1} = x$
$x - y = x + (-y)$	$x/y = x \cdot y^{-1}$
$-(x + y) = (-x) + (-y)$	$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$

PROBLEMAS

5.1 Compruebe, mediante un ejemplo, que el siguiente enunciado es falso. Dados los números a, b, c, d cualesquiera, si $b \neq 0$, $d \neq 0$ y $b + d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

5.2 Compruebe, mediante un ejemplo, que el siguiente enunciado es falso. Dados los números a, b, c cualesquiera, si $b \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{c}.$$

5.3 Compruebe que si a, b, e, g, l, r son números, todos diferentes de 0, entonces $\dfrac{a \cdot l \cdot g \cdot e \cdot b \cdot r \cdot a}{g \cdot a \cdot a \cdot r \cdot b \cdot l \cdot e} = 1$. Esto podría verificarse a partir de los axiomas, sólo que aquí pueden usarse los axiomas de asociatividad y conmutatividad, sin nombrarse.

5.4 Compruebe que si a, d, e, h, l, s son números, todos diferentes de 0, entonces

$$\frac{h \cdot e \cdot a \cdot d}{h \cdot e \cdot e \cdot l \cdot s} = \frac{d \cdot a \cdot d}{s \cdot l \cdot e \cdot d}.$$

5.5 El problema 3.9 establece que para números cualesquiera a, b, c, si $a + b = a + c$, entonces $b = c$. Consideremos esta proposición: "Para números cualesquiera a, b, c, si $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$ ". Este enunciado, tal como está, es falso. Pruebe que para cualesquiera números a, b, c, si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$.

5.6 Traduzca los siguientes enunciados relativos a la adición en enunciados similares para la multiplicación.

(a) $(a + b) + c = c + (a + b)$.
(b) $-(a - b) = b - a$.

5.7 Traduzca los siguientes enunciados relativos a la multiplicación en enunciados paralelos relativos a la adición.

(a) $(a^{-1} \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a$ si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

(b) $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b \cdot c}$.

5.8 Defina que para cualquier número

$$x,\ x^2 = x \cdot x,\ x^3 = x^2 \cdot x,\ x^4 = x^3 \cdot x,\ x^5 = x^4 \cdot x,$$

y compruebe que para cualquier x *es* $x^2 \cdot x^3 = x^5$.
¿Qué axiomas se presuponen para esta prueba?

5.9 Pruebe que si a, b, c son números y $b \neq 0$, entonces $a = c \cdot b$ si y sólo si $\dfrac{a}{b} = c$.

5.10 Pruebe (teorema 5.9) que si a, b, c, d son números y $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, entonces

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right).$$

5.11 Demuestre que si a y b son números y $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

5.12 Si a, b, c, d son números y b y d son diferentes de 0, y si $a \cdot d = b \cdot c$, entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

5.13 Compruebe que si a, b, c, d son números, todos diferentes de 0, entonces

$$\frac{\frac{a}{b}}{c/d} = \frac{\frac{c}{d}}{a/b}.$$

5.14 Gherkin Gesundheit, un brillante estudiante graduado en matemática, trabajaba en una tarea pero, como era un poquito distraído, olvidó si debía sumar o multiplicar los tres enteros positivos diferentes que tenía sobre el papel. Decidió hacer ambas cosas y, para gran sorpresa suya, las respuestas fueron iguales. ¿Cuáles eran los tres enteros positivos diferentes?

6 RELACIONES ENTRE LA ADICION Y LA MULTIPLICACION

Hemos examinado con bastante cuidado la adición y la multiplicación de números, pero hasta ahora no hemos dicho nada respecto a las conexiones entre estas dos operaciones. Claro que existe conexión; en aritmética elemental se nos dijo que $5 \cdot 3$ es justamente el resultado de sumar cinco tres veces, de modo que la multiplicación puede definirse mediante la adición. Sin embargo, este simple hecho no nos dice mayor cosa acerca del producto de $2/3$ por $5/7$. La conexión precisa entre la adición y la multiplicación viene dada por dos axiomas, y a esos axiomas y a sus consecuencias se consagra esta sección.

Habrá una ligera diferencia en la presentación de esta sección. Hemos explorado muy cuidadosamente las consecuencias de los axiomas de conmutatividad y de asociatividad, y por ello de aquí en adelante los usaremos libremente, en ocasiones sin mencionarlos explícitamente. El axioma más interesante sobre la adición y la multiplicación es el siguiente:

D Axioma de Distributividad. Para todos los números x, y, z,

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Este axioma se expresa algunas veces así: la multiplicación es distributiva respecto de la adición. En términos parecidos podemos preguntar: ¿Es la multiplicación distributiva respecto de la división? Es decir; ¿para todos los números x, y, z será verdadero que

$$x \cdot (y \div z) = (x \cdot y) \div (x \cdot z)?$$

Este último enunciado es falso, por supuesto, pues

$$2 \cdot (2 \div 2) \neq (2 \cdot 2) \div (2 \cdot 2).$$

De nuevo, podemos preguntar si la adición es distributiva respecto de la multiplicación; es decir: ¿será verdadero que

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

para todos los números x, y, z? No es difícil ver que este enunciado es también falso.

La primera consecuencia de este axioma es la regla sobre "cómo sumar fracciones".

6.1 Teorema de la adición de fracciones. Si a, b, c, son números y c es diferente de 0, entonces

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta la definición de división, tenemos que demostrar que $a \cdot c^{-1} + b \cdot c^{-1} = (a + b) \cdot c^{-1}$. Pero, por el axioma de distributividad, sabemos que

$$c^{-1} \cdot a + c^{-1} \cdot b = c^{-1} \cdot (a + b),$$

y la conmutatividad de la multiplicación nos proporciona inmediatamente el resultado deseado. ▮

Hay un teorema sobre adición de fracciones con distintos denominadores (véase el problema 6.10), pero es bastante claro que se puede reemplazar cualquier suma de fracciones por una suma en que los denominadores sean iguales (porque $a/b = (a \cdot d)/(b \cdot d)$; de este modo, el teorema precedente es el resultado fundamental.

La siguiente consecuencia del axioma de distributividad es igualmente fácil de probar.

6.2 Teorema $x \cdot 0 = 0$ para todo x.

Demostración. De acuerdo con el axioma de distributividad, tenemos que

$$(x \cdot 0) + (x \cdot 0) = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0,$$

y sumando $-(x \cdot 0)$ a ambos miembros de esta igualdad (y utilizando los axiomas de conmutatividad y de asociatividad de la adición), vemos que $x \cdot 0 = 0$. ▮

Del teorema precedente quisiéramos concluir que 0 no tiene recíproco (dicho en forma clásica: "No se puede dividir por 0"); en otros términos, deseamos saber que no hay un número x tal que $0 \cdot x = 1$. Esto parece inverosímil, pues sabemos que $0 \cdot x = 0$. Empero, ¡no sabemos si 0 y 1 son números diferentes! Escogemos el modo más fácil de salir de este dilema adoptando el

Axioma AM $0 \neq 1$.

Puesto que $0 \neq 1$, vemos de una vez que:

6.3 Teorema sobre imposibilidad de dividir por cero. 0 no tiene recíproco, es decir, no existe ningún número x tal que $x \cdot 0 = 1$.

Hay otra consecuencia sencilla del hecho de que el producto de 0 por cualquier número es 0.

6.4 Teorema. Si x y y son números y $x \cdot y = 0$, entonces, $x = 0$, o, $y = 0$.

Demostración. Hay dos posibilidades. Si $x = 0$, la conclusión establecida en el enunciado es correcta, y habremos terminado la prueba. Si $x \neq 0$, entonces existe su recíproco x^{-1}, y, $x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 = 0$. Pero, $x^{-1} \cdot (x \cdot y) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y$, de donde $y = 0$. Así, pues, $x = 0$, o, $y = 0$. ▮

6.5 Ejemplo. El problema es: "resolver la ecuación":

$$x \cdot (x + 1) = 0.$$

Es decir, necesitamos hallar los números x tales que $x \cdot (x + 1) = 0$. En vista del teorema anterior, si el producto $x \cdot (x + 1) = 0$, entonces $x = 0$, o, $x + 1 = 0$. Por tanto, los únicos números que hacen posible que $x \cdot (x + 1) = 0$ son $x = 0$, o, $x = -1$. Además, $0 \cdot (0 + 1) = 0$ y $-1 \cdot (-1 + 1) = 0$, y por ello 0 y -1 son las soluciones de la ecuación. ▮

El último teorema de esta sección se relaciona con la multiplicación de opuestos. No lo demostraremos, (en el problema 6.6 se pregunta por su demostración).

6.6 Teorema relativo a la multiplicación de opuestos. Si x y y son números, entonces $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ y $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Para terminar, podría decirse que en matemática son bien conocidos los conjuntos de objetos con dos operaciones que satisfacen los axiomas A1 — A5, M1 — M5, D, y AM. Se denominan *cuerpos*.

PROBLEMAS

Nota: Ocasionalmente en los problemas siguientes, y, sistemáticamente a lo largo del trabajo de ulteriores capítulos, omitiremos el punto que indica multiplicación. De este modo, si x y y son números, xy significa $x \cdot y$, etc.

6.1 Verifique las siguientes igualdades mediante la evaluación de ambos miembros.

(a) $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$.
(b) $5 \cdot (7 + 11) = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 11$.

6.2 Demuestre que para cualesquiera números a, b, c,

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

6.3 Muestre, mediante un ejemplo, que la división no es distributiva respecto de la adición. Es decir, no es necesariamente cierto que

$$a \div (b + c) = (a \div b) + (a \div c).$$

6.4 ¿Es distributiva la adición respecto de la sustracción? ¿Respecto de la adición?

6.5 En cursos inferiores a los niños se les enseñó a multiplicar enteros, por ejemplo, 82 y 56, utilizando el siguiente esquema:

$$\begin{array}{r} 82 \\ \underline{56} \\ \underline{492} \\ \underline{410} \\ 4592 \end{array}$$

¿Cómo se ha utilizado aquí la ley distributiva?

6.6 (a) Pruebe que para cualesquiera x y y, $x \cdot y + (-x) \cdot y = 0$.
(b) Pruebe que para cualesquiera x y y, $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.
(c) Pruebe que para cualesquiera x y y, $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$. (Teorema 6.6).

6.7 Escriba los axiomas A1 — A5, M1 — M5, D y AM y cambie en todas partes la palabra "números" por la palabra "entero". ¿Cuáles de los enunciados obtenidos en esta forma son verdaderos y cuáles falsos?

6.8 Demuestre cada uno de los siguientes teoremas nombrando los axiomas usados en cada etapa del desarrollo, pero, omitiendo mencionar los axiomas de conmutatividad y de asociatividad.

(a) **Teorema.** Para cualesquiera números a y b,
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
(b) **Teorema.** Para cualesquiera números a y b,
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$
(c) **Teorema.** Para cualesquiera números a y b,
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$
(d) **Teorema.** Para cualesquiera números a, b, c,
$$(a+b)(a+c) = a^2 + ab + ac + bc.$$

6.9 En cada una de las ecuaciones siguientes determine por cuáles números debe reemplazarse x para que las ecuaciones resulten enunciados verdaderos. Demuestre, a partir de los axiomas, que su determinación es correcta (es decir, que se han agotado todas las posibilidades); cite los axiomas utilizados en cada etapa del desarrollo, omitiendo mencionar los axiomas de conmutatividad y de asociatividad.

(a) $2x + 3 = 4x - 9.$
(b) $x^2 + 1 = 7 - x.$
(c) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{5x}{6}.$
(d) $3(2-x) = 5 - 3x.$

6.10 Demuestre que si a, b, c, d son números cualesquiera y si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

6.11 El señor Z tiene un número de cocos que representa el doble de lo que tiene el señor Y. El señor X tiene cinco cocos menos que el señor Y. El señor W, quien sólo cuenta con la mitad de lo que posee X, tiene la tercera parte de lo que posee V y éste sólo tiene la tercera parte de lo poseído por Z. ¿Cuántos cocos tiene cada uno de ellos?

6.12 Los siguientes problemas han sido tomados de *The Principles of Algebra*, de William Frend, 1796.

(a) ¿Cuál es el número que al multiplicarse por cuatro produce un número igual a tres veces el mismo número desconocido más cuatro?

(b) A una persona que distribuía dinero entre mendigos, le faltaban ocho peniques para darles tres peniques a cada uno; por este motivo, dió a cada uno dos peniques, y le quedaron tres peniques. ¿Cuántos eran los mendigos?

6.13 El axioma AM garantiza que cualquier sistema numérico que satisface todos los axiomas tiene al menos dos números (a saber, 0 y 1). Consideremos ahora un sistema formado sólo por las cifras 0 y 1, con una operación de "adición" modificada por el convenio de que $1 \oplus 1 = 0$; pero todo lo demás de la tabla de adición y la tabla de multiplicación es lo corriente. Verifique que este sistema cumple todos los axiomas.

6.14 Consideremos un sistema que sólo contenga las cifras 0, 1, 2 con las siguientes tablas para la adición y la multiplicación. Verifique que este sistema satisface todos los axiomas.

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\otimes$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

6.15 El siguiente problema pertenece a la obra *A Treatise on Algebra*, de Thomas Simpson, octava edición, publicada en 1804.

Cierto número de hombres y mujeres, que juntos andaban de parranda, recibieron la cuenta que ascendió a 33 chelines; para cancelarla, cada hombre pagó 3s. 6d. y cada mujer 1s. 4d.: se desea averiguar cuántas personas de ambos sexos formaban el grupo. (Un chelín vale doce peniques, esto es, 1s. = 12d.).

6.16 Un entero se denomina primo si no se puede expresar como producto de otros dos enteros (excepto el caso "trivial" del producto de sí mismo por 1). ¿Es primo el entero 999.991? (Sugerencia: recuerde el problema 6.8).

6.17 Un número se llama racional si y solamente si es el cociente de dos enteros. En cada uno de los axiomas vistos reemplace la palabra "número" por "número racional" y determine cuáles de los enunciados resultantes son verdaderos.

6.18 Observe: Si $x = y$,

$$\begin{aligned} x^2 &= xy, \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\ (x+y)(x-y) &= y(x-y), \\ x + y &= y, \\ 2y &= y, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

Haga comentarios.

6.19 Observe: $\dfrac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \dfrac{1}{4}$. Comente.

CAPITULO 2

Conjuntos y Números

Hasta ahora, hemos registrado lo que pudiéramos llamar los axiomas puramente algebraicos atinentes a los números, y hemos examinado, con bastante detalle, las consecuencias de estos axiomas. Es razonablemente claro que no podíamos describir cabalmente el sistema numérico porque existen otros sistemas de objetos, muy distintos de los números, que también satisfacen los axiomas establecidos. En este capítulo completaremos nuestra descripción de los números; resultará que necesitamos dos axiomas de orden y un axioma adicional (o mejor, de última hora, pues fue enunciado en el siglo XIX) llamado el "axioma de continuidad". Con estos axiomas se completará la descripción del sistema numérico.

Existe un teorema de unicidad para sistemas que satisfacen todos los axiomas. Se ha demostrado (aunque la demostración es bastante intrincada para darla aquí) que si hay dos sistemas que satisfacen todos los axiomas que hemos registrado, entonces uno de ellos no es sino simplemente una copia en papel carbón del otro. Podemos, en forma justificable, restringir nuestra atención a una sola copia.

Los axiomas que vamos a expresar presuponen una noción de sencillez intuitiva pero que, posiblemente, no ha formado parte del entrenamiento matemático del lector. Antes de seguir adelante necesitamos ciertamente la noción de "conjunto", por ello comenzaremos con la exposición de este concepto.

7 CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS

A lo largo de nuestra exposición del sistema numérico del álgebra elemental, se han presentado tres nociones no definidas: número, adición y multiplicación. En esta sección deseamos tratar brevemente sobre otra noción no definida que es aún más fundamental que la de número. Divagaremos un rato para explicar su importancia.

Existe en matemática un gran número de conceptos abstractos: número, adición, multiplicación, recta, plano, vector, etc. Muy bien podríamos preguntar si, a medida que vamos penetrando más hondamente en la teoría matemática, es necesario seguir catalogando más y más términos no definidos. Es decir, ¿a medida que crece la teoría, debe también crecer la lista de los objetos no definidos? Resulta que no es así. Cuanto se necesita es disponer de una lista sencilla, corta, de tales objetos no definidos. La longitud de esta lista es realmente sorprendente. Uno de los logros de la matemática del siglo XX radica en que un único concepto no definido, el de conjunto de elementos, ¡resulte adecuado para toda la matemática! Números, adición, y los demás conceptos matemáticos, pueden definirse mediante esta sola noción. Desafortunadamente, en realidad, tratar de desarrollar la matemática a partir de ese único concepto, es tarea demasiado complicada para este curso; sin embargo, tal vez el hecho de saber que ello es posible explique el porqué los conceptos de conjunto y de pertenencia a un conjunto penetran tanto en la matemática moderna.

Los términos "conjunto", "colección" y "clase" se emplearán indistintamente. Desde el punto de vista de la intuición, un conjunto es justamente una agrupación de objetos, los cuales se llaman elementos del conjunto. Un racimo de uvas, una bandada de codornices y una manada de leones, pueden considerarse como conjuntos cuyos elementos son uvas, codornices y leones*. Si un objeto x es elemento de un conjunto A, se escribe $x \in A$. Por ejemplo, si R es un conjunto de números, entonces $0 \in R$ y $1 \in R$. Suponemos que si se dan un objeto x y un conjunto A, entonces el objeto o es o no es elemento del conjunto. En el primer caso se escribe "$x \in A$", en el segundo, "$x \notin A$".

Frecuentemente se define un conjunto enumerando sus elementos del modo siguiente: $\{0, 2, 1\}$ es el conjunto cuyos elementos son 0, 2, 1, y $\{0, 1, -1\}$ tiene como elementos 0, 1, -1. No importa el orden en que se enumeren los elementos; así el conjunto $\{0, 1, 2\}$ es idéntico al conjunto $\{2, 1, 0\}$. Además, no "se cuenta un elemento sino una sola vez"; por ejemplo, $\{0, 2, 2\}$ es idéntico a $\{0, 2\}$. El hecho decisivo con relación a los conjuntos se establece en el:

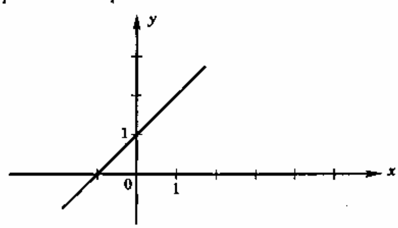
Axioma de Extensión. Dos conjuntos A y B son idénticos si tienen los mismos elementos; es decir: si todo elemento de A es elemento de B y, recíprocamente, todo elemento de B es elemento de A, entonces $A = B$.

Un conjunto está completamente definido si se conocen sus elementos. Frecuentemente, definiremos los conjuntos dando condiciones que nos permitan establecer si un objeto pertenece o no al conjunto. Ordinariamente se emplea la siguiente notación. "$\{x$: (alguna propiedad de x) $\}$", que se lee; "el conjunto de todos los x tales que se cumple la propiedad de x". Ilustraremos lo anterior mediante ejemplos, utilizando nociones de álgebra y geometría que no hemos analizado aquí, pero que deben resultar al lector intuitivamente familiares por sus anteriores estudios de matemática.*

7.1 Ejemplo. $\{x : x = 0, \text{o}, x = 1\}$ es el conjunto cuyos elementos son 0 y 1. Así, pues, $\{x : x = 0, \text{o}, x = 1\} = \{0, 1\}$, $0 \in \{0, 1\}$ y $1 \in \{0, 1\}$.
Podremos observar que $\{x : x = 0, \text{o}, x = 1\}$ es idéntico al $\{y : y = 0, \text{o}, y = 1\}$; en ambos casos describimos el conjunto cuyos elementos son 0 y 1. ∎

7.2 Ejemplo. El $\{P : P$ es un punto del plano y su distancia a un punto fijo Q es igual a 4 $\}$, es un conjunto de puntos en el plano. En efecto, se trata de la circunferencia de centro Q y radio 4. Un punto pertenece a este conjunto si y sólo si su distancia a Q es 4 unidades. En geometría a veces se define la circunferencia como "el lugar geométrico de los puntos. . .". El término "lugar geométrico" significa exactamente lo mismo que "conjunto", pero tiene la ventaja de que suena considerablemente mucho mejor. ∎

7.3 Ejemplo. El conjunto $\{(x,y)$: x y y son números y $y = x + 1\}$ es un conjunto de pares ordenados de números, y si lo representamos mediante un gráfico en coordenadas planas, el conjunto es una recta (véase la figura 7.1). Los puntos (0,1), (1,2) y (-10, -9) pertenecen todos a la recta. Esta recta es llamada algunas veces el gráfico de la ecuación $y = x + 1$, o el conjunto solución de la ecuación $y = x + 1$. Es, sencillamente, el conjunto de todas las parejas de números tales que el segundo elemento supera en 1 al primero.



$\{(x, y) : y = x + 1\}$

Figura 7.1

* O también: una cuadrilla de malhechores.

* Hablando con precisión, tomamos "$\{ : \}$" como un concepto no definido y aceptamos, como cuestión axiomá-

7.4 Ejemplo. Convengamos que $\varnothing$ sea el conjunto $\{ x : x = 0 \text{ y } x = 1 \}$. Este es un conjunto muy curioso porque, de hecho, no hay elemento que sea simultáneamente igual a 0 y a 1. Se le llama conjunto vacío o conjunto nulo; no tiene, pues, elementos. Puede sorprenderle a Ud. un poco el hecho de que "exista" tal conjunto; pero, el conjunto $\varnothing$ no es "nada", así como una caja vacía es algo muy diferente de la total inexistencia de la caja.

Observemos que hay otros modos de definir el conjunto vacío, $\varnothing$. Por ejemplo: $\{x : x \neq x\}$ es el conjunto vacío porque siempre es $x = x$. En general, cualquier propiedad o condición tal que ningún objeto la satisfaga, podría usarse para definir $\varnothing$. En general, una propiedad determinada hace posible la definición de un conjunto, pero otras muy diferentes pueden originar el mismo conjunto. ▮

7.5 Ejemplo. El conjunto $\{ x : x = 2 \}$ tiene sólo un elemento, 2. Así, pues, $\{ x : x = 2 \} = \{ 2 \}$. Sin embargo, no quiere decir esto que $\{ 2 \}$ sea idéntico a 2. Análogamente, si $\varnothing$ es el conjunto vacío, no es verdad que $\varnothing = \{ \varnothing \}$, como demostramos del modo siguiente: $\varnothing \in \{\varnothing\}$ en cambio no se cumple que $\varnothing \in \varnothing$, puesto que $\varnothing$ no tiene elementos. ▮

Entre ciertos conjuntos existe una relación sencilla que necesitaremos utilizar con frecuencia. Diremos que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B o que A está contenido en B, o que B contiene a A, o que A está incluido en B, si todo elemento de A pertenece a B. Abreviamos este enunciado escribiendo $A \subset B$. Expresado formalmente:

7.6 Definición. $A \subset B$ si y sólo si todo elemento de A es elemento de B.

Así, $\{ 0,1 \} \subset \{ 0, 1, 2 \}$. También es cierto que $\{ 0, 1 \} \subset \{ 0, 1 \}$; en efecto, intuitivamente hablando, $\{ 0, 1 \}$ es "el mayor" subconjunto de $\{ 0, 1 \}$. También, existe un subconjunto que es "el menor". El conjunto vacío es un subconjunto del $\{ 0, 1 \}$ (¿por qué?) y seguramente no hay un conjunto "menor" que éste. Efectivamente, el único subconjunto de $\varnothing$ es $\varnothing$.

Si imaginamos el plano geométrico como un conjunto de puntos, entonces toda línea es un subconjunto del plano. El conjunto $\{ -1, 2, 0 \}$ es un subconjunto del conjunto de los números. El conjunto de los enteros pares es un subconjunto del conjunto de todos los enteros, pero, no es un subconjunto del conjunto de los múltiplos enteros de 3 porque hay enteros pares (por ejemplo, 4) que no son múltiplos enteros de 3.

Sobre la inclusión de conjuntos hay dos proposiciones sencillas cuya utilización es necesaria. Veámoslas:

7.7 Teorema. Si A y B son conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$.

Demostración. Si $A \subset B$, entonces todo eleto de A es elemento de B, en virtud de la definición de $\subset$, y si $B \subset A$, entonces todo elemento de B es elemento de A, por la misma razón. En consecuencia, cualquier elemento de A lo es de B y cualquier elemento de B lo es de A, y por ello $A = B$, en virtud del axioma de extensión.

7.8 Teorema. (Bárbara). Si A, B y C son conjuntos tales que $A \subset B$, y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Demostración. Si x es un elemento de A, entonces $x \in B$ porque $A \subset B$, y puesto que $x \in B$ se sigue que $x \in C$ porque $B \subset C$. De modo que todo elemento de A es elemento de C y esto demuestra que $A \subset C$.

A veces este teorema se expresa así: La relación $\subset$ es transitiva.

tica, que para cada posible condición existe un conjunto cuyos elementos son justamente los objetos que cumplen esa condición.

PROBLEMAS

7.1 Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.

(a) $1 \in \{1, 2\}$; (b) $\{1\} \in \{1, 2\}$; (c) $1 \subset \{1, 2\}$; (d) $\{1\} \subset \{1, 2\}$; (e) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 1, 2, 1\}$; (f) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 1, 2, 1\}$; (g) $a \in \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$; (h) $a \subset \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$; (i) $\{a\} \in \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$; (j) $\{a\} \subset \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$; (k) $\{1, 2\} \subset \{2, 1\}$; (l) $\{\{1\}\} = \{1, \{1\}\}$; (m) $\{1, 2\} = \{1, 2, 1, 2, 1\}$.

7.2 $\varnothing$ es denominado el conjunto vacío. Para estar seguros de que es único (como lo implica el artículo "el") demuestre la siguiente proposición: Si A es un conjunto que no tiene elementos y B es un conjunto que no tiene elementos, entonces $A = B$.

7.3 Mediante el uso del axioma de extensión demuestre que $\{a, m\} = \{m, a, m\}$ y que $\{m, a, i, d\} = \{m, a, d, a, m, i, m, a, d, a, m\}$.

7.4 Haga una lista de todos los subconjuntos de cada uno de los conjuntos siguientes:

$$\{0, 1, 1\};\ \{a\};\ \{a,b\};\ \{a, b, c\};\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

7.5 Demuestre que para todo conjunto, A, B, y C, si $A \subset B$, y, $B \subset C$, y, $C \subset A$, entonces $B = C$.

7.6 ¿Cuáles son los nombres corrientes para los números que pertenecen a cada uno de los conjuntos siguientes?

(a) $\{x : x$ es un entero, y para algún entero m, es $x = 2m\}$.
(b) $\{x : x$ es un entero, y para algún entero m, es $x = 2m + 1\}$.

7.7 Entre cada dos de los tres conjuntos que se presentan enseguida se cumple la relación $\in$ o la $\notin$, y también la relación $\subset$ o la $\not\subset$. Haga una lista que muestre cuál relación se cumple en cada uno de los 12 casos posibles.

$$\{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\},\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

7.8 Si el número de elementos de un conjunto es $n = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5, calcule el número de subconjuntos que tiene un conjunto de n elementos. (Sugerencia: La labor será más sencilla si primero se puede probar que al agregar un elemento a un conjunto, se origina otro conjunto que tiene el doble de subconjuntos que el anterior). ¿Puede Ud. pergeñar una fórmula para el caso general?

7.9 Demuestre que para todos los conjuntos x, y, z, si $\{x, y\} = \{x, z\}$, entonces $y = z$. Más aún, demuestre que, para cualesquiera conjuntos, a, b, c, d, si $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, entonces $a = c$ y $b = d$.

7.10 Supóngase que para conjuntos cualesquiera x y y, si $x \in y$, entonces $y \notin x$. Utilizando esta hipótesis y el axioma de extensión, demuestre que si a, b, c, d son conjuntos y $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$, entonces $a = c$ y $b = d$.

7.11 Sean A, B, C, D, E cinco personas en una tertulia. Cualquier par de ellas puede considerarse como un conjunto de dos elementos (v. g., A y E, como $\{A, E\}$). Sea K el conjunto de pares de personas que se conocen entre sí y S el conjunto de pares de personas que son mutuamente extrañas. Suponemos que cada pareja pertenece a K o a S, pero no a ambos. Suponga Ud. que tres de las personas no son totalmente extrañas y que tres de ellas no se conocen todas entre sí y dé un ejemplo de un conjunto de parejas que podría ser en este caso K.

8 UNIONES, INTERSECCIONES Y DIFERENCIAS

Esta sección se dedica a estudiar tres modos típicos de construir conjuntos a partir de otros. Necesitaremos muy pocos teoremas relativos a conjuntos; el principal propósito de esta sección es, realmente, proporcionar una cierta familiaridad con la noción de conjunto; ello también nos da la oportunidad de presentar algunos problemas entretenidos.

Comenzamos por definir la unión, la intersección y la diferencia de dos conjuntos.

8.1 Definiciones. Si A y B son conjuntos, entonces la unión de A y B, que se escribe $A \cup B$, es $\{x : x \in A$, o $x \in B\}$; la intersección de A y B, que se representa por $A \cap B$, es $\{x : x \in A$, y, $x \in B\}$; y la diferencia entre A y B (que a veces se llama complemento de B respecto de A) y que se escribe $A \sim B$, es $\{x : x \in A$, y, $x \notin B\}$.

La figura 8.1 ilustra estas definiciones. En ella se supone que el conjunto A es el conjunto de todos los puntos interiores a la circunferencia mayor y B es el conjunto de los puntos interiores a la circunferencia menor. El conjunto $A \cup B$ está formado por todos los puntos que pertenecen a A o a B;* la $A \cap B$ está constituida por todos los puntos de A y B; y $A \sim B$ está formado por los puntos que pertenecen a A pero no a B.

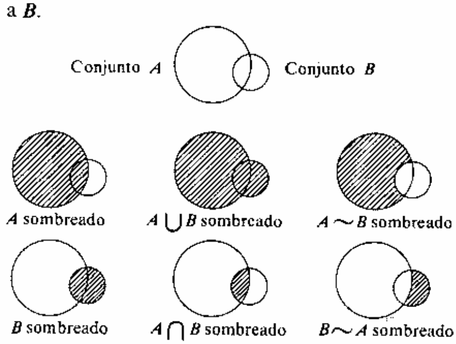


Figura 8.1

* Usamos "o" en el sentido matemático corrientemente aceptado, a saber: Si afirmamos que $x \in A$, o, $x \in B$, no excluimos la posibilidad de que x sea elemento de A y B simultáneamente.

La figura 8.1 nos indica cierto número de relaciones entre conjuntos. Por ejemplo, podemos conjeturar que $A \cup B = B \cup A$, que $A \cap B \subset A$, que no hay puntos que pertenezcan simultáneamente a $A \sim B$ y a $B \sim A$, y que el conjunto $A \cap B$ no es el conjunto vacío. Algunos de los enunciados anteriores son en realidad verdaderos para cualesquiera conjuntos A y B. Sin embargo, no pueden demostrarse mediante el simple examen de los dibujos. Los demostraremos en forma muy sencilla, valiéndonos del axioma de extensión y de las definiciones que hemos hecho. Por ejemplo:

8.2 Teorema. La unión es una operación conmutativa; es decir, si A y B son conjuntos, entonces $A \cup B = B \cup A$.

Demostración. Por la definición de unión, $x \in A \cup B$ si y sólo si x pertenece a A, o, a B, y, $x \in B \cup A$, si y sólo si x pertenece a B, o, a A. Pero, es claro que x pertenece a A, o, a B si y sólo si x, pertenece a B, o, a A. Así, pues, que $x \in A \cup B$ si y sólo si $x \in B \cup A$ y, en virtud del axioma de extensión, $A \cup B = B \cup A$. ▌

Podemos preguntar si existe un conjunto que haga las veces de elemento idéntico en el caso de la unión; es decir: ¿Hay un conjunto A tal que $A \cup X = X$ para todo conjunto X? Evidentemente, tal conjunto existe. El conjunto vacío, $\varnothing$, tiene la propiedad de que $\varnothing \cup X = X$ para todo conjunto X. Dejamos al estudiante como un problema (no difícil), la cuestión de si siempre existe o no un inverso respecto de la operación unión; en otras palabras: ¿es cierto que para todo conjunto A existe un conjunto B tal que $A \cup B = \varnothing$?

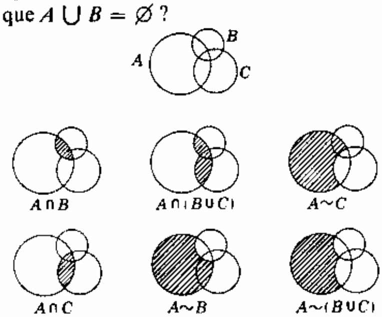


Figura 8.2

Demostraremos dos sencillos teoremas relativos a la combinación de tres conjuntos. La figura 8.2 presenta algunos de los conjuntos que pueden construirse a partir de tres dados A, B, C, e insinúa la validez de los siguientes teoremas:

8.3 Teorema. La intersección es distributiva respecto de la unión, en el sentido de que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para cualesquiera conjuntos A, B, C.

Demostración. Un objeto x pertenece a $A \cap (B \cup C)$ si y sólo si, $x \in A$, y, $x \in B \cup C$, en virtud de la definición de $\cap$. De aquí, $x \in A \cap (B \cup C)$ si y sólo si $x \in A$, y, $x \in B$, o, $x \in C$, de acuerdo con la definición de $\cup$. Pero esto sucede si y sólo si $x \in A$, y, $x \in B$, o, $x \in A$, y, $x \in C$, lo cual es lo mismo que decir $x \in A \cap B$, o, $x \in A \cap C$, en virtud de la definición de $\cap$. Finalmente $x \in A \cap B$, o, $x \in A \cap C$ si y sólo si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ por la definición de $\cup$. Así, pues, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ si y sólo si $x \in A \cap (B \cup C)$, y el axioma de extensión permite asegurar que los dos conjuntos en cuestión son idénticos. ▌

El siguiente teorema, llamado teorema de De Morgan, algunas veces se expresa así: La intersección de complementos es el complemento de la unión.

8.4 Teorema de De Morgan. Si A, B, C, son conjuntos, entonces $(A \sim B) \cap (A \sim C) = A \sim (B \cup C)$.

Demostración. Un objeto x es elemento de $(A \sim B) \cap (A \sim C)$ si y sólo si x es elemento de A y no de B y, además, si x es elemento de A y no de C (en virtud de la definición de $\sim$ e $\cap$). Pero, ello ocurre si y sólo si x pertenece a A y no pertenece ni a B ni a C; o sea, teniendo en cuenta la definición de $\cup$, si $x \in A$, y, $x \notin B \cup C$. Así, pues, $x \in (A \sim B) \cap (A \sim C)$ si y sólo si $x \in A \sim (B \cup C)$, y el axioma de extensión asegura que los dos conjuntos son idénticos. ▌

Los teoremas anteriores no se deben aprender de memoria y, ciertamente, no debería hacerse esfuerzo alguno por memorizar sus demostraciones. Estas y otras sencillas relaciones teóricas entre conjuntos pueden deducirse intuitivamente con base en las gráficas (a veces llamadas diagramas de Venn); una demostración formal de ellas se apoya sencillamente en las definiciones, en algún raciocinio elemental y en el axioma de extensión. Lo que aquí tratamos de lograr es cierta familiaridad general con los conjuntos y sus diversas combinaciones.

El concepto de conjunto y el hecho, algo sorprendente, de que muchas proposiciones afirmativas pueden interpretarse como enunciados relativos a conjuntos, pueden servir de base a cierta gimnasia intelectual no desprovista de interés. Daremos dos ejemplos.

8.5 Ejemplo. Si tenemos los siguientes enunciados:

(1) Sócrates es hombre.
(2) Todos los hombres son mortales.
(3) Por tanto Sócrates es mortal.

El problema radica en descubrir y establecer un teorema matemático del cual este silogismo sea un caso especial. Empezamos por observar que el primer enunciado puede considerarse como la afirmación de que Sócrates es elemento de un determinado conjunto. Sea A el conjunto de todos los hombres; entonces, la primera proposición puede expresarse por "Sócrates $\in A$". La segunda es un enunciado sobre inclusión de conjuntos; si M denota el conjunto de todos los seres mortales, entonces esta proposición dice que todo elemento de A es elemento de M; es decir, $A \subset M$. Se supone que la conclusión es: Sócrates $\in M$. Así, pues, de "Sócrates $\in A$", y, " $A \subset M$ ", suponemos que se deduce que Sócrates $\in M$. Utilizando términos distintos, la cuestión es: Si $x \in B$, y, $B \subset C$, entonces $x \in C$. Seguramente, este es un teorema de teoría de conjuntos.

Antes de concluir este ejemplo, consideremos cómo podrían traducirse al lenguaje teórico otras determinadas afirmaciones. Supongamos que se dice que ningún hombre es mortal, lo cual sencillamente afirma que no existe objeto que pertenezca simultáneamente a A y M; es decir, $A \cap M$ es el conjunto vacío. A su vez, si se afirma que algunos hombres son mortales ello equivale a decir que existen objetos que pertenecen simultáneamente a A y M, esto es, $A \cap M$ no es el conjunto vacío. ▌

8.6 Ejemplo. (De Lewis Carroll, con saludos a Schroeder.) De las tres aseveraciones siguientes vamos a sacar cuantas deducciones sean posibles.

(1) Nadie que realmente admire a Beethoven deja de guardar silencio mientras se ejecuta la sonata Claro de Luna.

(2) Los conejillos de Indias son irremediablemente ignorantes en música.

(3) Nadie que sea irremediablemente ignorante en música guarda siempre silencio mientras se ejecuta la sonata Claro de Luna.

Lo anterior, puede interpretarse como enunciados sobre diversos conjuntos. Sean:

$G =$ el conjunto de los conejillos de Indias.
$H =$ el conjunto de criaturas irremediablemente ignorantes en música.
$K =$ el conjunto de criaturas que guardan silencio mientras se ejecuta la sonata Claro de Luna, y
$R =$ el conjunto de criaturas que realmente admiran a Beethoven.

Los tres enunciados se traducen ahora así:

(1)' $R \subset K$

(2)' $G \subset H$

(3)' $H \cap K$ es el conjunto vacío $\varnothing$.

La figura 8.3 muestra la relación entre los cuatro conjuntos R, K, G, H. Es evidente que no hay objetos que pertenezcan simultáneamente a R y G. (El teorema matemático es: Si $R \subset K$, $G \subset K$, y, $H \cap K = \varnothing$, entonces $R \cap G = \varnothing$). Traduciendo esto del lenguaje matemático a frases corrientes, concluimos que los conejillos de Indias realmente no admiran a Beethoven.

Antes de dejar atrás este caprichoso problema, quisiera hacer observar que precisamente este es el modo como se aplica la matemática. Siempre comenzamos con una especie de hipótesis física (en el caso presente, los enunciados (1), (2), y (3)); enseguida, por analogía o mediante conjeturas, llevamos el problema al te-

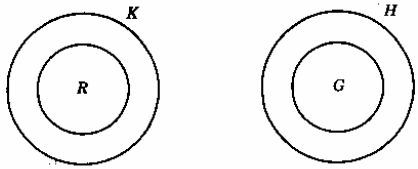


Figura 8.3

rreno de la hipótesis matemática (los enunciados (1)', (2)', (3)'), establecemos uno o varios teoremas matemáticos (si $R \subset K$, $G \subset H$, y, $H \cap K = \varnothing$, entonces $R \cap G = \varnothing$), y, finalmente, traducimos el teorema matemático al lenguaje corriente para inferir algo relativo al problema físico (los conejillos de Indias realmente no admiran a Beethoven). ■

PROBLEMAS

8.1 Demuestre que si A y B son conjuntos cualesquiera, entonces los enunciados siguientes son verdaderos:

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

8.2 Demuestre que si A es un conjunto cualquiera, cada uno de los enunciados siguientes es verdadero:

$A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup \varnothing = A$; $A \sim \varnothing = A$, y $A \sim A = \varnothing$.

8.3 (a) Demuestre que la $\cap$ es asociativa.

(b) Dé un ejemplo de tres conjuntos, A, B, C, tales que $A \cap B \neq \varnothing$, y $B \cap C \neq \varnothing$, y $A \cap C \neq \varnothing$, pero $A \cap B \cap C = \varnothing$.

8.4 Demuestre que si A y B son conjuntos cualesquiera, entonces son verdaderos los enunciados siguientes: $A \cap B \subset A$, y, $A \subset A \cup B$.

8.5 (a) Demuestre que para todos los conjuntos A y B $A \sim B = \varnothing$ si y sólo si $A \subset B$.

(b) Demuestre que para conjuntos cualesquiera A, B y C.

$$A \cap (B \sim C) = (A \cap B) \sim C.$$

8.6 Demuestre que para conjuntos cualesquiera A y B, $A \cap B = A$ si y sólo si $A \subset B$ y $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

8.7 Demuestre que para conjuntos cualesquiera A, B y C,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

8.8 Demuestre que para conjuntos cualesquiera A, B y C, los siguientes enunciados son verdaderos:

$(A \sim B) \cup (B \sim A) = (A \cup B) \sim (A \cap B)$ y $(A \sim B) \cup (A \sim C) = A \sim (B \cap C)$.

8.9 (De P. Suppes, *Introduction to Logic*). Si se tiene:

V = el conjunto de todas las personas,
A = el conjunto de todos los americanos,
C = el conjunto de todas las personas que toman café,
F = el conjunto de todos los franceses,
M = el conjunto de todos los asesinos,
P = el conjunto de todos los filósofos,
T = el conjunto de todas las personas que toman té, y
W = el conjunto de todas las personas que toman vino,

traducir al lenguaje de símbolos los siguientes enunciados:

(a) Algunos americanos bebedores de vino son filósofos;
(b) Ningún francés es americano;
(c) Las personas que toman vino y café también toman té;
(d) Todos los asesinos franceses toman café, té y vino;
(e) Algunos asesinos americanos toman café y té, pero no vino;
(f) Algunos asesinos franceses que toman vino, no toman café ni té;
(g) Un filósofo no toma té ni café;
(h) Algunos franceses son o filósofos o asesinos;
(i) Todos los bebedores de café, toman té o vino.

Los enunciados traducidos deben ser enunciados de inclusión, igualdad o desigualdad entre dos conjuntos. (Por ejemplo, (e) puede expresarse como:

$$(A \cap M \cap C \cap T) \sim W \neq \varnothing .)$$

8.10 Los siguientes problemas aparecen en *Symbolic Logic*, de Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll). Saque cuantas conclusiones sean posibles de las hipótesis siguientes:

(1) Las proezas de acrobacia que no se enuncian en los boletos de un circo, nunca se presentan.
(2) Ninguna proeza acrobática que implique dar cuatro saltos mortales es posible.
(3) Las proezas acrobáticas imposibles, nunca se anuncian en los boletos de un circo.

Comience con las definiciones: U = el conjunto de las proezas de acrobacia; a = el conjunto de las proezas de acrobacia que se anuncian en los boletos de circo; b = el conjunto de las proezas de acrobacia que se presentan en un circo; c = el conjunto de las proezas de acrobacia que incluyen saltos de cuatro volteretas; d = el conjunto de las proezas de acrobacia posibles. Sugerencia: Utilice el problema 8.5.

8.11 Otro problema de la *Symbolic Logic*. Se trata de hacer lo mismo que en el problema 8.10.

(1) Cuando trabajo un ejemplo de lógica sin refunfuñar, se puede estar seguro de que lo estoy entendiendo;
(2) Estos sorites no están colocados en un orden normal, como los ejemplos a que estoy acostumbrado;

(3) Los ejemplos difíciles siempre me dan dolor de cabeza;
(4) No puedo entender los ejemplos no ordenados normalmente, como aquellos a que estoy acostumbrado;
(5) Nunca refunfuño por un ejemplo, a menos que me produzca dolor de cabeza.

U = el conjunto de los ejemplos lógicos trabajados por mí; a = el conjunto de los ejemplos lógicos puestos en orden normal, como los ejemplos a que estoy acostumbrado; b = el conjunto de los ejemplos lógicos fáciles; c = el conjunto de los ejemplos lógicos que me hacen refunfuñar; d = el conjunto de los ejemplos lógicos que me hacen doler la cabeza; e = el conjunto de estos sorites; h = el conjunto de los ejemplos de lógica que yo entiendo. (Supóngase que todos los ejemplos de lógica ya expuestos pertenecen a U.)

8.12 Supuesta la especial hipótesis de que si x es cualquier conjunto, entonces $x \not\in x$, demuestre que no existe un conjunto U tal que, para todos los conjuntos y, $y \in U$.

9 EL CONJUNTO DE LOS ENTEROS POSITIVOS

Ahora, volvemos a nuestro estudio del sistema numérico. En esta sección, enumeraremos unos axiomas, llamados a veces axiomas de orden, y de ellos deduciremos las "reglas" usuales para el manejo de desigualdades. Hasta el momento, no tenemos noción de qué puede ser un número positivo o negativo. Claro está que con base en los axiomas que hasta aquí hemos supuesto, no es posible seleccionar los números que deben llamarse positivos. A fin de subrayar este punto, repetiremos un teorema, ya demostrado, y que, según lo indicamos antes, podría interpretarse mal en el sentido de tomarlo como un enunciado sobre números positivos y negativos. El teorema 6.6 establece:

Si x y y son números*, entonces $(-x)y = -(xy)$, y a su vez, $(-x)(-y) = xy$. Esto no nos dice que el producto de dos números negativos es un número positivo. El teorema simplemente establece que si x y y son números, el opuesto de x multiplicado por el opuesto de y, es el producto de x por y. Lo que deseamos saber sobre los números positivos y los negativos, será establecido en breve.

* Recordamos que ahora hemos omitido el punto, que significa producto; de modo que "$(-x)y$" debe leerse "$(-x)\cdot y$".

Supongamos que se nos da un nuevo objeto P (no definido). Supongamos, además, que P es un conjunto de números. Diremos que un número es positivo si y sólo si es elemento de P. Supondremos, por otra parte, los siguientes:

Axiomas de Orden

(1) (Tricotomía). Para todo número x, es verdadero exactamente uno (es decir, uno y sólo uno) de los siguientes enunciados: $x \in P$, $-x \in P$, o, $x = 0$.

(2) Si x y y pertenecen a P, también $x + y$, y, xy pertenecen a P.

Dicho en palabras: Suponemos que cualquiera que sea el número x, o, x es positivo, o, $-x$ es positivo, o, $x = 0$, y que sólo se realiza una de esas tres posibilidades. Suponemos también que la suma y el producto de números positivos es positiva.

Los números negativos se definen del modo siguiente:

9.1 Definición. Un número x es negativo si y sólo si $-x \in P$; es decir, x es negativo si y sólo si $-x$ es positivo.

El axioma de tricotomía nos dice que: o x es positivo, o $-x$ es positivo, o que $x = 0$; de acuerdo con la definición que acabamos de hacer, ello quiere decir que: dado un número x, o x es positivo, o x es negativo, o $x = 0$, y sólo puede ocurrir una de esas tres posibilidades. Si x es positivo ($x \in P$), entonces $-x$ es negativo (porque $-(-x) = x \in P$), y si x es negativo, ($-x \in P$), entonces claramente $-x$ es positivo.

El primer teorema identifica un número positivo.

9.2 Teorema. El número 1 es positivo.

Demostración. De acuerdo con el primer enunciado del axioma de orden, $1 \in P$, o, $-1 \in P$, o, $1 = 0$, y sólo se cumple una de estas tres posibilidades. Sabemos que $1 \neq 0$, por el axioma AM. Supondremos que $-1 \in P$ y de ello deduciremos una contradicción; este hecho nos probará que $1 \in P$, es decir, que 1 es positivo. Si -1 es positivo, entonces $(-1)(-1)$ es también positivo, porque el producto de dos números positivos es positivo. Pero, $(-1)(-1)$

$= 1$, según el teorema 6.6, y de aquí resulta que 1 es positivo. De esto resulta que si $-1 \in P$, entonces $1 \in P$, lo que contradice el enunciado de tricotomía del axioma de orden. Inferimos, pues, que $1 \in P$. ▌

Ahora, estamos en capacidad de probar muy fácilmente las bien conocidas reglas sobre productos de números positivos y negativos.

9.3 Teorema sobre productos de números positivos y negativos. El producto de dos números negativos es positivo, y el producto de un número positivo por otro negativo es negativo.

Demostración. Si x y y son números negativos, entonces $-x \in P$, y, $-y \in P$; de donde: $(-x)(-y) = xy \in P$, según el axioma (2) de orden y el teorema 6.6. Así pues, xy es positivo y queda demostrada la primera afirmación del teorema. Si x es positivo y y negativo, entonces $x \in P$, y, $-y \in P$; de aquí, $x(-y) = -(xy) \in P$, y por tanto, xy es negativo en virtud de la definición de número negativo. ▌

(Asegúrese de comprender la diferencia entre el teorema 9.3 y el 6.6. El 9.3 dice, por ejemplo, que $(-2)(-3)$ es un, número positivo, pero nada más; el 6.6 dice que $(-2)(-3)$ es $2 \cdot 3$, pero no dice nada de que $2 \cdot 3$ sea positivo.)

Todos los teoremas ordinarios sobre desigualdades se deducirán fácilmente de las propiedades de los números positivos. Comenzamos con la siguiente:

9.4 Definición. Si x y y son números, se dice que x es menor que y y y mayor que x si y sólo si $y - x$ es positivo. Si x es menor que y, se escribe $x < y$.

Así, $1 < 2$ porque $2 - 1 = 1$ es positivo, y $-1 < 0$ porque $0 - (-1) = 1$ es positivo. Si representamos los números con puntos marcados sobre una recta, como indica la figura 9.1, entonces se tiene una sencilla interpretación geométrica de la desigualdad. Los números x menores que 0 son precisamente aquellos para los cuales $0 - x$ es positivo; estos son, justamente, los números negativos. Los números positivos son, geométricamente, exactamente aquellos que se encuentran a la derecha de 0, y, en general, $x < y$ si y sólo si x está a la izquierda de y. Geométricamente es manifiesto que si x está a la izquierda de y y y está a la izquierda de z, entonces x está a la izquierda de z. También es fácil demostrar este hecho.

9.5 Teorema. Si x, y, z son números tales que $x < y$, y $y < z$, entonces $x < z$.

Demostración. Si $x < y$, entonces $y - x$ es positivo, y si $y < z$, entonces $z - y$ es positivo, de acuerdo con la definición de $<$. Pero si $y - x$, y, $z - y$ son positivos, será $(y - x) + (z - y) = z - x$, porque la suma de dos números positivos es positiva. Pero si $z - x$ es positivo, entonces, $x < z$, por definición. ▌

Este teorema a veces se enuncia diciendo que "$<$ *es una relación transitiva*".

Existen otros dos teoremas relativos a desigualdades; son típicos y deben comprenderse. Sólo demostraremos una parte de uno de ellos. (Constituyen aplicaciones legítimas de las definiciones y de los axiomas de orden. El estudiante debe construir demostraciones por sí mismo.)

9.6 Teorema sobre adición de desigualdades. Si x, y, a, son números, y, $x < y$, entonces $x + a < y + a$.

Si x, y, u, v, son números tales que $x < y$, y, $u < v$, entonces $x + u < y + v$.

La primera de estas proposiciones se enuncia a veces así: "Se puede sumar un número a ambos miembros de una desigualdad", y la segunda, así: "Se pueden sumar dos desigualdades del mismo sentido".

Antes de proseguir, conviene definir los símbolos "$>$", "$\leq$" y "$\geq$". Por supuesto, podríamos trabajar sin ellos, pero parece natural usarlos.

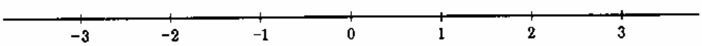


Figura 9.1

9.7 Definición. Si x y y son números entonces: $x > y$ si y sólo si $y < x$ (también puede decirse, si $x - y$ es positivo); $x \leq y$ si y sólo si $x < y$, o, $x = y$; y, $x \geq y$ si y sólo si $x > y$, o, $x = y$.

9.8 Teorema sobre multiplicación de desigualdades. Si x, y, a son números y, $x < y$, entonces:

Si a es positivo, entonces $ax < ay$, y
Si a es negativo, entonces $ax > ay$.

Demostración. Demostraremos únicamente el segundo enunciado, a saber: Si x, y, a son números, y si, $x < y$, y, a es negativo, entonces $ax > ay$. Puesto que $x < y$, y $-x$ es positivo, por la definición de $<$; el producto $a(y - x)$ del número negativo a y del positivo $y - x$ es negativo, de acuerdo con el teorema 9.3. En consecuencia, $-[a(y-x)]$ es positivo; por consiguiente, $-ay + ax = -[a(y - x)]$ es positivo. De aquí, pues, $ay < ax$, y, así, $ax > ay$. ▌

La primera de las anteriores proposiciones se expresa algunas veces así: "Se puede multiplicar una desigualdad (ambos miembros de ella) por un número positivo"; la segunda, suele enunciarse así: "Si se multiplica una desigualdad por un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad". Por ejemplo, $-2 < -1$ (-2 está a la izquierda de -1); multiplicando por 2 tenemos: $-4 < -2$ (y -4 está a la izquierda de -2). En cambio, al multiplicar por -2, se obtiene $8 > 4$ (y 4 está a la izquierda de 8).

Vale la pena hacer notar el significado geométrico de la inversión de una desigualdad. Consideremos el movimiento de la recta que transporta el punto correspondiente a cada número x hasta el punto correspondiente al número $-x$, es decir, la transformación que resulta al multiplicar cada número por -1. Ello equivale sencillamente a la rotación de la recta en 180°, alrededor del punto 0. Si inicialmente, un punto se halla a la izquierda de otro, después de la rotación el orden será el inverso; es decir, si $x < y$, entonces $-y < -x$. En general, es claro que la multiplicación de cada número por un número positivo corresponde a un movimiento que conserva el orden, mientras que la multiplicación por un número negativo equivale a un movimiento que invierte el orden.

En la próxima sección, nos ocuparemos en dibujar interpretaciones geométricas de ciertos conjuntos de números que se definen mediante la utilización de desigualdades. Concluimos esta sección presentando dos ejemplos que, es de creer, habrán de destruir el sentido de seguridad del lector.

9.9 Ejemplo. El problema es éste: ¿Para cuáles números x es válida la desigualdad $1/x < 1$? Multiplicando por x, se concluye que $1/x$ es menor que 1 si y sólo si $1 < x$. Por otra parte, si $x = -1$, entonces $1/x = 1/(-1) = -1$, y -1 es ciertamente menor que 1. ¿Dónde está el error?

9.10 Ejemplo. (Desafortunadamente, este ejemplo sólo puede ser entendido por estudiantes que estén familiarizados con los logaritmos.) Se observa que $1 < 2$; multiplicando por $\frac{1}{4}$, se obtiene: $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Es decir, $(\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2}$ y por tanto $\log(\frac{1}{2})^2 < \log(\frac{1}{2})$. Puesto que $\log(\frac{1}{2})^2 = 2\log(\frac{1}{2})$, se tiene que $2\log(\frac{1}{2}) < \log(\frac{1}{2})$. Dividiendo por $\log(\frac{1}{2})$, deducimos que $2 < 1$ ▌

PROBLEMAS

9.1 (a) En cada uno de los casos siguientes, reemplace el signo de interrogación por el símbolo $<$, $>$, $=$, que corresponda:

$$3 \mathbin{?} 4; \quad \frac{1}{2} \mathbin{?} \frac{1}{3}; \quad -1 \mathbin{?} -2; \quad 0 \mathbin{?} 1; \quad 0 \mathbin{?} -1.$$

(b) En cada caso, suponga que x es un número cualquiera y reemplace "?" por el símbolo $<$, $>$, $=$, que corresponda:

$$x - 1 \mathbin{?} x - 3; \quad x + 2 \mathbin{?} x + 6; \quad 2x + 2 \mathbin{?} 2(x + 1).$$

9.2 Demuestre que 2 es positivo, y que si a es positivo, entonces su recíproco a^{-1} es positivo.

9.3 Supóngase que a y b son números y que $a < b$.
¿Se deduce de ello que $a < 2b$? Explique.
¿Se deduce de ello que $2a < 2b$? Explique.
¿Se deduce de ello que $a - 3 < b - 3$? Explique
¿Se deduce de ello que $a + 2 < b + 3$? Explique.

9.4 (a) Demuestre (teorema 9.6) que si x, y, a, son números, y si $x < y$, entonces $x + a < y + a$, y que si x, y, u, v, son números tales que $x < y$, y $u < v$, entonces $x + u < y + v$.

(b) Demuestre (teorema 9.8) que si x, y, a son números y si $x < y$, y a es positivo, entonces $ax < ay$.

9.5 Demuestre que el conjunto P de los números positivos, es idéntico al $\{x : -x < 0\}$, y que el conjunto Q de los números negativos es idéntico al $\{x : 0 < -x\}$.

9.6 Demuestre que para todos los números x y y nunca es cierto que $x < x$; y tampoco es cierto que si $x < y$ es $y < x$.

9.7 ¿Cuál es el caso verdadero?

$$\frac{47}{49} < \frac{41}{43}, \quad \frac{47}{49} = \frac{41}{43}, \quad \text{o} \quad \frac{47}{49} > \frac{41}{43}.$$

9.8 ¿Cuál es el caso verdadero?

$$\frac{577}{408} < \sqrt{2}, \quad \frac{577}{408} = \sqrt{2}, \quad \text{o} \quad \frac{577}{408} > \sqrt{2}.$$

9.9 ¿Para cuáles números x es verdad que $1/x < 1$?

9.10 De las propiedades del conjunto P deduzca que si x es un número y $x^2 \neq 0$, entonces $x^2 \in P$.

9.11 Demuestre que si a y b son números y $a \neq b$, entonces $a^2 + b^2 > 2ab$.

9.12 Demuestre que para cualesquiera números a y b,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}.$$

9.13 Demuestre que si a y b son números y $a < b$, entonces existe otro número c tal que $a < c < b$.

9.14 Un sistema compuesto sólo por tres elementos, 0, 1, a, y que tiene las siguientes tablas de adición y de multiplicación:

$+$	0	1	a
0	0	1	a
1	1	a	0
a	a	0	1

$\cdot$	0	1	a
0	0	0	0
1	0	1	a
a	0	a	1

cumple los axiomas A1 — A5 y M1 — M5 y D. Demuestre que no existe un subconjunto P de $\{0, 1, a\}$ que satisfaga los axiomas de orden.

9.15 (a) Demuestre que si a y b son números, $a < 0$, $b < a$, entonces $a^2 < b^2$.

(b) Demuestre que si a y b son números, $0 < a$, $a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

(c) Dé un ejemplo para comprobar que si $a < 0$, y, $0 < b$, entonces puede suceder que $b^2 < a^2$.

9.16 Demuestre que $0 \neq 2$. ¿Se puede demostrar este hecho sin recurrir a los axiomas de orden? Explique.

10 CONJUNTOS-SOLUCION DE DESIGUALDADES

La finalidad de esta sección es que el estudiante adquiera una mayor familiaridad con las desigualdades y los conjuntos. Las desigualdades se usan comúnmente para definir conjuntos; muchos conjuntos de números pueden definirse, en forma muy conveniente, como el conjunto de todos los números que satisfacen una o varias desigualdades específicas. (Usamos la expresión "satisfacer una desigualdad" en el sentido intuitivo natural; por ejemplo: 2 satisface la desigualdad "$x > 1$" porque $2 > 1$, en cambio 0 no la satisface porque no es cierto que sea $0 > 1$.) A veces se dice que el conjunto de todos los números que satisfacen una desigualdad, por ejemplo, el $\{x : x < 1\}$, es el conjunto-solución de la desigualdad; en nuestro caso, la $x < 1$. La correspondencia que se observa entre conjuntos y desigualdades es de alguna importancia; y resulta muy útil cierta agilidad de gimnasia mental como la que se pone de manifiesto en los ejemplos siguientes:

10.1 Ejemplo. La cuestión es dibujar el conjunto-solución de la desigualdad $x < 1$, utilizando la representación gráfica de los números. En otras palabras, se desea representar el conjunto

$\{x : x < 1\}$. Es evidente que tal conjunto está formado por todos los números que están a la izquierda de 1, y podemos representarlo mediante la figura 10.1 ▮

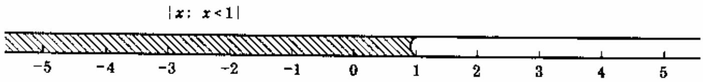


Figura 10.1

Deseamos resaltar la convención que empleamos en el dibujo de conjuntos. La gráfica anterior, que ahora mostramos parcialmente, sirve para indicar

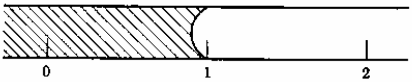


Figura 10.2

que 1 no pertenece al conjunto indicado. Al contrario, el conjunto $\{x : x \leq 1\}$ debe representarse como en la figura 10.3

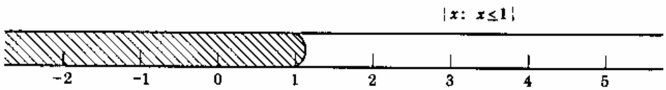


Figura 10.3

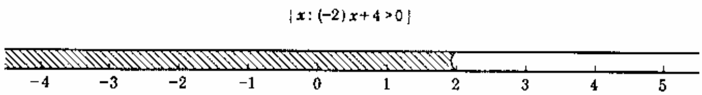


Figura 10.5

10.2 Ejemplo. Representar gráficamente el conjunto solución de la desigualdad $x^2 < 0$, utilizando la representación geométrica de los números. Es decir, dibujar el conjunto $\{x : x^2 < 0\}$, o, en otras palabras, dibujar el conjunto de los números cuyos cuadrados son negativos. Pero, sabemos que el cuadrado de un número positivo es positivo, el cuadrado de un número negativo es positivo (teorema 9.3) y el cuadrado de 0 es 0. Así que $\{x : x^2 < 0\}$ es el conjunto vacío $\varnothing$. En la figura 10.4 se muestra un bosquejo de este conjunto cuidadosamente dibujado.

$\{x : x \cdot x < 0\}$

Figura 10.4

10.3 Ejemplo. Utilizando la representación geométrica de los números, haga un dibujo del conjunto de los números x tales que $-2x + 4 > 0$. Si x es uno de tales números, se deduce que $-2x > -4$ y de aquí, $x < 2$. (El lector debe estar en capacidad de dar las razones de estas deducciones.) Por otra parte, si $x < 2$, entonces $(-2)x > -4$, y de aquí, $-2x + 4 > 0$. (¿Por qué?) Por consiguiente, $-2x + 4 > 0$ si y sólo si $x < 2$, y el conjunto de los números requeridos aparece dibujado en la figura 10.5 ▮

10.4 Ejemplo. Represente el conjunto de los números tales que

$$(x - 1)(x + 2)(-x - 1) > 0.$$

La figura 10.6 muestra cómo dibujar fácilmente este conjunto. Los tres primeros gráficos presentan los conjuntos $\{x : x - 1 > 0\}$, $\{x : x + 2 > 0\}$, y $\{x : -x - 1 > 0\}$.

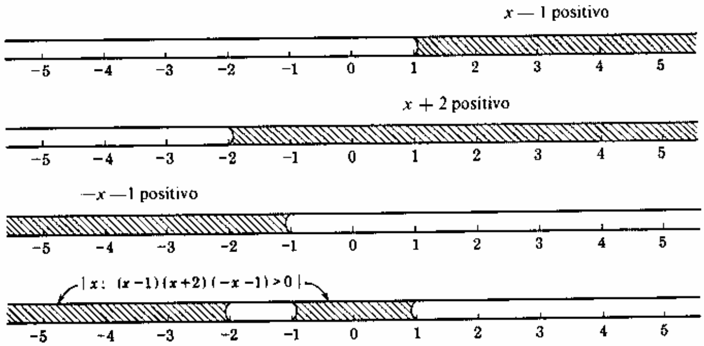


Figura 10.6

Entonces, utilizando el teorema 9.3 sobre multiplicación de números positivos y negativos, podemos identificar sin dificultad el conjunto deseado, $\{ x : (x - 1)(x + 2)(-x - 1) > 0 \}$. El producto de tres números es positivo si y sólo si los tres son positivos, o si uno de ellos es positivo y los otros dos negativos. Si observamos la figura 10.6, vemos que dos de los tres números considerados son negativos y uno positivo si x está a la izquierda de -2, o si x está entre -1 y $+1$. No hay valores de x (que pertenezcan al conjunto) cuando todos son positivos. Así, el conjunto puede definirse también como $\{ x : x < -2$ ó $-1 < x < 1 \}$. ▮

10.5 Ejemplo. Represente el conjunto de números x tales que

$$x^2 > x + 2.$$

Ante todo, deducimos que $x^2 > x + 2$ si y sólo si $x^2 - x - 2 > 0$, y enseguida, aprovechando el hecho de que $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, vemos que el conjunto puede definirse también como el $\{ x : (x - 2)(x + 1) > 0 \}$. Ahora, utilizando el método del ejemplo anterior, obtendremos los resultados que aparecen en la figura 10.7.

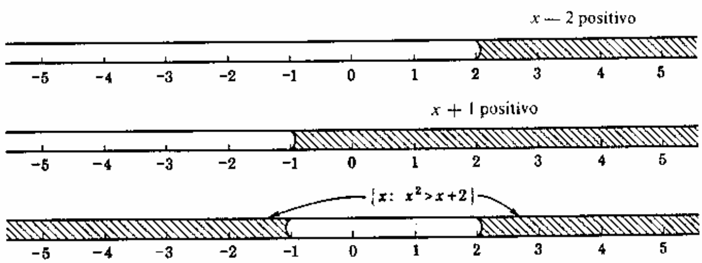


Figura 10.7

De acuerdo con la figura, observamos que: el $\{x : x^2 > x + 2\} = \{x : x < -1, \text{o}, x > 2\}$. Ello equivale a observar que también el $\{x : x^2 > x + 2\} = \{x : x < -1\} \cup \{x : x > 2\}$. ▮

10.6 Ejemplo. Dibuje el conjunto-solución de la desigualdad $2/(x + 1) < 1$. Mostraremos dos métodos distintos para resolver el problema.

$$\begin{aligned}\{x: 2/(x + 1) < 1\} &= \{x: [2/(x + 1)] - 1 < 0\} \\ &= \{x: [2/(x + 1)] - [(x + 1)/(x + 1)] < 0\} \\ &= \{x: [2 - (x + 1)]/(x + 1) < 0\} \\ &= \{x: (1 - x)/(x + 1) < 0\} \\ &= \{x: (1 - x)[1/(x + 1)] < 0\}.\end{aligned}$$

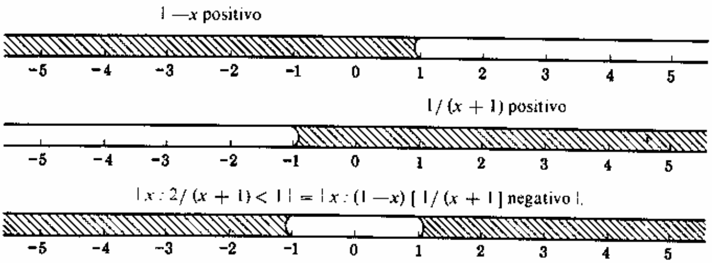


Figura 10.8

La figura 10.8 muestra un gráfico de este conjunto.
Según el caso, podemos discurrir del modo siguiente:

Caso 1: Si $2/(x + 1) < 1$, y $x + 1$ es positivo, entonces $2 < x + 1$, y, $1 < x$. Así, pues, en este caso tenemos que $x > 1$, y, $x > -1$, que es precisamente la condición para que $x > 1$. Recíprocamente, si $x > 1$, entonces $x + 1 > 2$, y de aquí, $2/(x + 1) < 1$.

Caso 2: Si $2/(x + 1) < 1$, y, $x + 1$ es negativo, entonces $2 > x + 1$, y, $x < 1$. Puesto que $x + 1 < 0$, tendremos que $x < -1$. Recíprocamente, si $x < -1$, entonces $x < 1$ y de aquí, $x + 1 < 2$, y puesto que $x + 1 < 0$ tenemos que $2/(x + 1) < 1$.

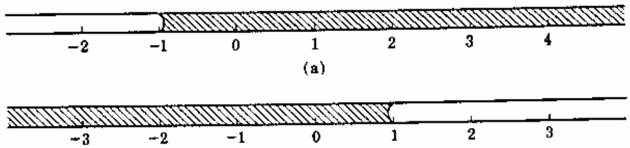
Considerando conjuntamente estos dos casos vemos que $2/(x + 1) < 1$ si y sólo si $x < -1$, o, $x > 1$. ▮

PROBLEMAS

10.1 ¿Entre cuáles de los siguientes conjuntos se da la igualdad? $A = \{x : x < 1 \text{ o } x > 0\}$; $B = \{x : x < 1 \text{ y } x > 0\}$; $C = \{x : 0 < x < 1\}$; $D = \{x : 0 < 1\}$.

10.2 (a) Represente gráficamente el conjunto $\{y : 2 < y\}$.
(b) Represente gráficamente el conjunto $\{z : z < 3\}$.
(c) Represente gráficamente el conjunto $\{u : 0 < u + 2\}$.
(d) Represente gráficamente el conjunto $\{v : v + 3 < 0\}$.

10.3 Defina mediante desigualdades cada uno de los gráficos siguientes:

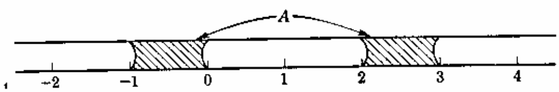


10.3

10.4 Defina mediante desigualdades el conjunto que se representa enseguida.

10.4

10.5 Defina mediante desigualdades el conjunto cuya gráfica es la siguiente:



10.5

10.6 ¿Cuál es el mayor de todos los números que no está en el conjunto $\{x : x > 2\}$?

10.7 ¿Hay un número menor que todos los demás que pertenezca al conjunto $\{x : 0 < x\}$?

10.8 Cuál es el menor de todos los números que no pertenece al conjunto $\{x : x < 2\}$?

10.9 ¿Cuáles números no pertenecen al conjunto $\{x : 1 < x\} \cup \{x : x < 1\}$?

10.10 ¿Cuáles números no pertenecen al conjunto $\{x : (x-2)^2(x-3)^2 > 0\}$?

10.11 Dibuje el conjunto $\{x : 0 < x < 3\}$.

10.12 Dibuje el conjunto $\{y : y > 1\} \cap \{x : 1 < x\}$.

10.13 Dibuje el conjunto $\{y : y > 1\} \cap \{x : 1 < x\}$.

10.14 Dibuje el conjunto $\left\{x : 0 < \dfrac{1}{x} < 1\right\}$.

10.15 Dibuje el conjunto $\left\{x : 0 < \dfrac{1}{x^2} < 1\right\}$.

10.16 Dibuje el conjunto $\{x : x^2 > 0\}$.

10.17 Dibuje el conjunto $\{x : x^2 + 1 > 2x\}$.

10.18 Dibuje el conjunto $\{x : x^2 - x - 2 > 0\}$.

10.19 Dibuje el conjunto $\{t : t(t+2)(t-1) < 0\}$.

10.20 Dibuje el conjunto $\left\{y : \dfrac{y}{y+1} > 2\right\}$.

11 NUMEROS NATURALES

Nuestra exposición sobre álgebra comenzó con el estudio de axiomas aplicables a todos los números. Veremos que existen diferentes clases de números: naturales, enteros, racionales e irracionales. Estas clases de números tienen una cierta cronología, entendida del modo siguiente: La definición formal de número que hemos venido dando, ciertamente ha estado precedida de una concepción intuitiva, y los conjuntos de números que ahora definiremos, fueron captados intuitivamente antes que lográramos una comprensión racional y clara del sistema completo de los números, tal como ahora lo conocemos. Históricamente, estas distintas clases de números no fueron descubiertas, o, si se prefiere, inventadas, simultáneamente. En verdad, los números naturales, 1, 2, 3,. . . , se usaron primero. El número cero se empleó por primera vez hace apenas unos pocos siglos y todavía soporta el estigma de ser considerado antinatural. Los números negativos * aparecieron muy tardíamente en la historia. Finalmente, aquellos misteriosos objetos, los números irracionales, sólo alcanzaron respetabilidad y posición estable en el siglo XIX, a pesar del malogrado esfuerzo por penetrar en la matemática durante la era helénica.

Los axiomas para los números, usados por nosotros, no son los únicos posibles. Es completamente factible comenzar con los axiomas sobre números naturales, y luego construir todos los demás números. También es posible principiar haciendo una teoría de conjuntos, construir luego los números naturales y más tarde el resto de los números *. Hemos escogido el conjunto, de axiomas empleado, precisamente porque por este camino llegamos a saber más acerca de los números en menos tiempo que siguiendo otra cualquiera de las vías posibles.

El camino de acceso que hemos escogido presenta una dificultad. No sabemos, hasta aquí, qué números deberían denominarse naturales, enteros o racionales. Esta sección y la siguiente se consagran a la definición de estas clases especiales de números. El desarrollo ulterior del libro no requerirá de las ideas expuestas en estas secciones y, por tanto, no penetraremos demasiado profundamente en el tema. Pero, parece conveniente tratar de relacionar nuestro sistema de axiomas con los diversos conceptos de número estudiados anteriormente por los lectores.

La primera tarea que debemos acometer es esta: ¿Cómo definimos los números naturales? Damos por sentado que 1 es un número natural, y si n es natural, entonces $n + 1$ también lo será. Comenzamos observando algunos conjuntos que son tan amplios que cualquier número natural es elemento suyo.

11.1 Definición. Un conjunto A de números se denomina inductivo si y sólo si 1 es elemento de A, y si $x + 1$ es elemento de A siempre que lo sea x.

Demos varios ejemplos de conjuntos inductivos. El conjunto de todos los números es ciertamente inductivo, de acuerdo con el axioma

* De la obra *Principles of Algebra*, de William Frend, Londres 1,796, tomamos esta cita: "Después de ver que un matemático tan capaz como Monsieur Clairaut pudiera estar tan enceguecido y perplejo por esta extraña doctrina de las cantidades negativas (introducidas innecesariamente en la, por otros respectos, clara y sencilla Ciencia del Algebra, o Aritmética Universal) como para ponerse a discurrir tan débilmente en favor de ella, tal cual lo hemos visto en el párrafo anterior, ya ciertamente ha llegado el momento de que todo fiel amante de esta ciencia, celoso de su honor, de su pureza y perspicuidad, exclame como el buen Arzobispo Tillotson, a propósito del Credo de Athanasian: '¡Ojalá fuéramos suficientemente liberados de esto!'".

* Para mayor información sobre los números racionales e irracionales, véase la obra *Numbers: Rational and Irrational*, de Ivan Niven, Random House, 1961, traducida al español por Editorial Norma, 1968 bajo el título de Números Racionales e Irracionales; para estudiar la construcción del sistema numérico a partir del sistema de los naturales, véase *The Real Number System in an Algebraic Setting*, de J. B. Roberts, publicado por W. H. Freeman y Co., 1962, o *Foundations of Analysis*, de E. Landau, publicado por Chelsea Publishing Co., y para la construcción del sistema numérico basándose en la teoría de conjuntos, véase *Set Theory, The Structure of Arithmetic*, de N. Hamilton y J. Landin, publicado por Allyn y Bacon, 1962.

de clausura; el conjunto de los números positivos es inductivo; el conjunto $\{ x : x = 1, \text{o}, x = 2, \text{o}, x \geq 3 \}$ es también inductivo, y postulamos como cosa cierta que el conjunto de los números naturales es inductivo. Ningún conjunto finito de números es inductivo, y el conjunto de los enteros pares no logra serlo. El número 1 pertenece a todo conjunto inductivo, y por tanto, también pertenece el 2 (¿por qué?), y el 3. De hecho, parece muy claro que cualquier número natural debe pertenecer a cualquier conjunto inductivo; esta es la clave de nuestra definición.

11.2 Definición. Un número x es un número natural si y sólo si x pertenece a cualquier conjunto inductivo.

Hay una consecuencia de esta definición, perfectamente obvia: Si A es un conjunto inductivo, entonces todo número natural pertenece a A. Este importante teorema tiene un nombre:

11.3 Teorema. (Principio de inducción matemática) Si A es un conjunto inductivo, entonces todo número natural pertenece a A.

Usaremos este teorema y las definiciones que lo preceden, para probar algunas propiedades sencillas de los números naturales. En primer lugar, observamos que 1 es un número natural porque 1 pertenece a cualquier conjunto inductivo. En segundo lugar demostramos que:

11.4 Teorema. Si x es un número natural, también lo es $x + 1$.

Demostración. Si x es un número natural, entonces x pertenece a cualquier conjunto inductivo, por definición. Pero, si x pertenece a un conjunto inductivo, también pertenece $x + 1$, de acuerdo con la definición de conjunto inductivo. En consecuencia, $x + 1$ pertenece a todo conjunto inductivo y, de aquí, en virtud de la definición de número natural, $x + 1$ es un número natural. ▌

El teorema anterior, unido al hecho de que 1 es un número natural, demuestra que el conjunto de los números naturales es un conjunto inductivo. Esto, de seguro, representa la consumación de un hecho esperado con vehemencia.

La manera corriente de utilizar el principio de inducción matemática para establecer una propiedad de los números naturales, es demostrar que el conjunto de números que tiene tal propiedad (a veces denominado el conjunto verdad de la proposición) es inductivo, y, de aquí, concluir que todo número natural pertenece al conjunto. Así, por ejemplo, si deseamos demostrar que todo número natural es igual o mayor que 1, consideramos el conjunto $\{ x : x \geq 1 \}$. Ciertamente, 1 pertenece a este conjunto; ahora, bien, si y pertenece al conjunto (es decir, si $y \geq 1$), entonces $y + 1$ también pertenece a él (basta con "sumar" las desigualdades $y \geq 1$, y, $1 \geq 0$). En consecuencia, el conjunto $\{ x : x \geq 1 \}$ es inductivo, y, de aquí, se deduce que todo número natural pertenece al conjunto. Es decir:

11.5 Teorema. Todo número natural es igual o mayor que 1.

Demostraremos un último teorema sobre números naturales. En los problemas al final de esta sección, se establecerán muchas otras propiedades de los números naturales.

11.6 Teorema. Si x y y son números naturales, entonces $x + y$ es también natural.

Demostración. La siguiente es la estructura de la prueba: Inicialmente, desconocemos el número y, y definimos un conjunto X como el conjunto de todos los números tales que, sumados a x, originan un número natural; es decir, $X = \{ z : z \text{ es un número, y, } x + z \text{ es un número natural} \}$. Enseguida, demostraremos que 1 es elemento de X, y que si $z \in X$, entonces $z + 1 \in X$. O sea: demostraremos que x es inductivo. De todo esto, concluiremos que cualquier número natural, particularmente el y, pertenece a X. Esto demostrará que y es un número tal que $x + y$ es un número natural, y el teorema quedará demostrado.

En esto, hay dos cosas qué demostrar. En primer lugar, demostremos que $1 \in X = \{ z : z \text{ es un número, y, } x + z \text{ es un número natural} \}$; es decir, queremos mostrar que $x + 1$ es un número natural; para ello, sabemos, por la hipótesis, que x es natural, y el teorema 11.4 establece precisamente el hecho de que $x + 1$

es un número natural. En segundo lugar, debemos demostrar que si $z \in X$, entonces $z + 1 \in X$. En otros términos, debemos demostrar que si $x + z$ es un número natural, entonces $x + (z + 1)$ también lo es. Pero (¿acaso se ha olvidado el axioma de asociatividad?) es $x + (z + 1) = (x + z) + 1$; y puesto que $x + z$ es natural, el teorema 11.4 nos garantiza que $(x + z) + 1$ es un número natural. Así, pues, se habrá probado que X es un conjunto inductivo, y el argumento del parágrafo precedente completa la demostración del teorema. ▌

PROBLEMAS

11.1 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son inductivos:

El conjunto de todos los números positivos; el conjunto de todos los enteros múltiplos de 3; $\{1, 2, 3, 4\}$; $\{x : x = 1, \text{ o}, x \geq 3\}$; $\{x : x = -2, \text{ o}, x \geq 0\}$?

11.2 ¿Es siempre cierto que si n es un número natural y b no es natural, entonces $n + b$ no es un número natural? Explique.

11.3 Los conjuntos de números se pueden representar como conjuntos de puntos sobre la recta. Por ejemplo, los puntos que quedan en la parte sombreada del siguiente dibujo, forman un conjunto no inductivo porque no tiene como elemento el número (punto) 1. Figura 11.3

Dibuje un conjunto inductivo al cual no pertenezca el número ½.

Dibuje un conjunto inductivo al cual no pertenezca el número $^3/_2$.

11.4 Sea $A = \{x : x = 2n, \text{ o}, x = 2n + 1$, donde n es un número natural, o, $n = 0\}$. Demuestre que el conjunto A es inductivo.

11.5 Sea $A = \{x : x = 3n, \text{ o}, x = 3n + 1, \text{ o } x = 3n + 2$, donde n es un número natural, o, $n = 0\}$. Demuestre que el conjunto A es inductivo.

11.6 Explique en qué forma los dos problemas anteriores son los pasos fundamentales para demostrar, con base en el principio de inducción matemática, que todo número natural es par o impar, y que todo número natural es un múltiplo de 3, ó 1 más un múltiplo de tres, o, 2 más un múltiplo de 3.

11.7 Demuestre que el $\left\{ n : n \text{ es un número natural y } \frac{n(n+1)}{2} \text{ es un número natural} \right\}$ es un conjunto inductivo.

11.8 Supuesto que $2^1 = 2$ y que $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ para cualquier número natural n, demuestre que $2^n > n$ para todo número natural n, y con ello demuestre que el $\{m : m$ es un número natural, y, $2^m > m\}$ es inductivo.

11.9 Supóngase que $a^1 = a$ y que $a^{n+1} = a \cdot a^n$, para todo n natural y para cualquier número a. Demuestre que $a^{n+2} = a^n \cdot a^2$ para cualquier número natural n. Después, demuestre que si $a \neq 0$, entonces $a^{2p} > 0$ para cualquier número natural p. (Sugerencia: Considere el conjunto $\{m : m$ es un número natural y $a^{2m} > 0\}$.)

11.10 Demuestre que el $\{x : x = 1, \text{ o}, x - 1$ es un número natural$\}$ es inductivo y use este hecho para demostrar que si n es natural y $n > 1$, entonces $n - 1$ es un número natural.

11.11 Sea $B = \{n : n$ es un número natural, y para todos los números x, si $n < x < n + 1$, entonces x no es un número natural$\}$. Demuestre que B es un conjunto inductivo (utilice el 11.10 si es necesario), y represente gráficamente la conclusión de que si n es cualquier número natural, entonces no existe ningún número natural entre n y $n + 1$.

11.12 Demuestre que si p y q son números naturales y $p > q$, entonces $p - q$ es un número natural. (Considere el conjunto $\{m : m$ es un número natural y si n es otro número natural menor que m, entonces $m - n$ es un número natural$\}$, y utilice el 11.11.)

11.13 Demuestre que si x y y son números naturales, entonces $x \cdot y$ es también un número natural.

11.14 Supuesto que $a^1 = a$ y que $a^{n+1} = a^n \cdot a$ para todo número natural n, demuestre que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para todos los números naturales m y n.

11.15 **(Segundo principio de inducción matemática)** Si A es un conjunto no vacío de números naturales, entonces A tiene un elemento minimal (es decir, hay un elemento de A que es menor que todos los demás elementos de A). (Sea $B = \{m : m$ es un número natural y $m < n$ para cualquier elemento n de $A\}$; demuestre que B es no inductivo. Considere las posibilidades y recuerde el problema 11.11.)

12 LOS NUMEROS ENTEROS Y LOS NUMEROS RACIONALES

Ahora, vamos a especificar qué números se denominan enteros y cuáles racionales. Examinaremos esta clase especial de números, desde el punto de vista del sistema de axiomas para números, y descubriremos que tanto los enteros como los racionales carecen de ciertas

Fig. 11.3

propiedades que debe poseer el conjunto de todos los números reales.

La mayoría de las proposiciones que presentaremos en esta sección se pueden demostrar muy sencillamente; dejaremos las demostraciones a cargo del lector (tales demostraciones se solicitarán bajo la forma de problemas al final de la sección, donde se harán algunas sugerencias).

Vamos a pasar revista a los hechos alusivos a los números naturales que habremos de necesitar. Todos los números naturales son positivos, y 1 es el menor de todos los naturales. La suma y el producto de números naturales son números naturales, y si m y n son naturales y $m > n$, entonces $m - n$ es un número natural. Finalmente (segundo principio de inducción matemática), cada conjunto no vacío de números naturales tiene un elemento minimal.

Basándose en el hecho de que 1 es el número natural minimal, no es difícil demostrar que el recíproco de un número natural, diferente de 1, nunca es un número natural (vea el problema 12.1). Dejamos sentado este hecho para ulterior utilización.

12.1 Teorema. El único número natural cuyo recíproco es un número natural es el número 1.

Ahora, pasamos a definir los enteros.

12.2 Definición. Un número x es entero si y sólo si $x = 0$, o, si x es un número natural, o si $-x$ es un número natural.

En otras palabras, x es un entero si y sólo si $x = 0$, o si existe un número natural n tal que $x = n$, o, $x = -n$. Los siguientes teoremas se refieren a números enteros.

12.3 Teorema. 0 es un entero.

12.4 Teorema. Todo entero es la diferencia de dos números naturales; es decir, si x es un entero, entonces $x = m - n$ para algunos números naturales m y n.
Recíprocamente, si m y n son números naturales, entonces $m - n$ es siempre un entero.

12.5 Teorema. La suma de dos enteros es siempre un entero.

12.6 Teorema. El opuesto de un entero es un entero.

Es cierto que la adición de enteros es conmutativa y asociativa porque los enteros son números y la adición de números es conmutativa y asociativa. Dicho brevemente, el conjunto de los enteros, con la adición como operación, constituye un grupo conmutativo. Más aún, el teorema 12.6 afirma que si Q es el conjunto de los enteros positivos, entonces para cada entero x, sólo una de las siguientes posibilidades es verdadera: $x = 0$, $x \in Q$, o, $-x \in Q$. Este es el axioma de tricotomía para los enteros.

12.7 Teorema. 1 es un entero.

12.8 Teorema. El producto de dos enteros es un entero.

Automáticamente, debido a que los enteros son números, la multiplicación de enteros es conmutativa y asociativa, y la multiplicación es distributiva respecto de la suma. Además, la suma y el producto de enteros positivos es un entero positivo. En pocas palabras: si la palabra "número" se reemplazare por la palabra "entero" en los enunciados de los axiomas para números, todas las proposiciones resultantes serían verdaderas, excepto posiblemente la proveniente del axioma M5 que aseguraría que todo entero, diferente de cero, tiene un inverso multiplicativo (recíproco) que es un entero. Sin embargo:

12.9 Teorema. Los únicos enteros cuyos recíprocos son enteros son 1 y -1.

Definimos ahora los números racionales.

12.10 Definición. Un número x es un número racional si y sólo si existen enteros a y b, tales que $x = a/b$ (con $a \neq 0$, y, $b \neq 0$).

Desde luego, la representación de un número racional como el cociente de enteros no es única. Por ejemplo, $(-2)/3 = 4/(-6)$.

12.11 Teorema.

(i) 0 es un número racional.

(ii) El opuesto de un número racional es un número racional.

(iii) La suma de dos números racionales es un número racional.

(iv) 1 es un número racional.

(v) El producto de números racionales es un número racional.

(vi) Si x es un número racional, y $x \neq 0$, entonces x^{-1} es un número racional.

Debido a que los racionales son números, la adición y la multiplicación de racionales son conmutativas y asociativas y la multiplicación es distributiva respecto de la suma. Además, si S es el conjunto de todos los números racionales positivos, entonces la suma y el producto de dos números de S pertenecen a S; y si x es cualquier número racional, entonces únicamente es verdadero uno de los siguientes enunciados: $x = 0$, $x \in S$, o, $-x \in S$ (tricotomía). De esta suerte, si la palabra "número" se reemplaza por "número racional" en todos los axiomas A1 — A5, M1 — M5, AM, D, y en los axiomas de orden, ¡entonces todas las proposiciones que resultan son verdaderas! En la terminología corriente de la matemática esto significa que el sistema de los números racionales es un *cuerpo ordenado.*

Puesto que los números racionales tienen tan gratas propiedades, es apenas natural preguntarse por qué se necesitan otras clases de números más complicadas. Esta cuestión se la plantearon y respondieron los pitagóricos hace cerca de 2500 años. Ellos concebían el sistema de los números positivos como el conjunto de todas las posibles longitudes de segmentos de recta. Argüían (basados en el teorema de Pitágoras) que la diagonal de un cuadrado cuyo lado es la unidad de longitud, debería ser un número cuyo cuadrado es 2. Pero, también fueron capaces de demostrar, mediante el teorema siguiente, que no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2. De esto se sigue que si todo segmento de recta debe tener una longitud, entonces ésta deberá ser, en algunos casos, ¡un número que no es racional! También debe ser cierto que, en torno al sistema de números, hay hechos que no son consecuencias de los axiomas hasta ahora formulados, pues el sistema de los números racionales satisface todos estos axiomas. Plantearemos en la próxima sección el último axioma de permanencia del sistema numérico y finalizamos esta sección con el teorema mencionado atrás.

12.12 Teorema. No existe un número racional cuyo cuadrado sea 2.

Demostración. La demostración se basa en la divisibilidad por 2. Recordamos que un número natural m es par si $m = 2p$ para algún número natural p, y m es impar si $m = 2q + 1$ para algún número natural q. Todo número natural es par o impar (véase el problema 11.4), pero no ambas cosas, porque si $2p = 2q + 1$, entonces $2(p - q) = 1$, lo cual resulta imposible pues 2 no tiene inverso multiplicativo entero. Observamos, además, que el cuadrado de un número par $2p$ es $4p^2 = 2(2p^2)$ que es par, y el cuadrado de un número impar $2q + 1$ es $4q^2 + 4q + 1 = 2(2q^2 + 2q) + 1$ que es impar.

Ahora, supongamos que existe un número racional cuyo cuadrado es 2. En este caso, existiría un número racional positivo x cuyo cuadrado sería 2 y habría números naturales m y n tales que $x = m/n$. Podemos suponer que m y n se escogen entre los posibles números naturales en forma que m sea tan pequeño como se pueda*. Así las cosas, no debe ocurrir que m y n sean ambos pares, porque entonces podríamos expresar a x como el cociente $(m/2)/(n/2)$ de números naturales más pequeños. Acto seguido, demostramos que se da una contradicción; el teorema quedará, pues, establecido al demostrar que m y n son ambos pares.

Puesto que $x^2 = (m/n)^2 = 2$, $m^2 = 2n^2$. Entonces m debe ser par pues su cuadrado lo es, y, de esta suerte, $m = 2p$ para algún número natural p. Entonces, $m^2 = 4p^2 = 2n^2$ y, en consecuencia, $2p^2 = n^2$. Y n resulta par porque lo es su cuadrado. ▌

PROBLEMAS

12.1 Demuestre el teorema 12.1: El único número natural cuyo recíproco es otro número natural es el número 1. (Sugerencia: Vea el teorema 11.5.)

* Más precisamente, utilizando el segundo principio de inducción matemática, m es el menor elemento del $\{p : p$ es un número natural y para algún número natural q, $2 = p/q\}$.

12.2 ¿Cuáles de los siguientes son números naturales, cuáles enteros, y cuáles números racionales?

$$0, 1, -1, 1/3, 1{,}4142, 7/(-5), 5-7.$$

12.3 ¿Es verdad siempre que si m es un entero y b no es un entero, entonces $m + b$ no será un entero? Explíquese.
12.4 Demuestre el teorema 12.5: La suma de dos enteros es un entero.
12.5 Demuestre el teorema 12.6: El opuesto de un entero es un entero.
12.6 Demuestre el teorema 12.8: El producto de dos enteros es un entero.
12.7 Demuestre el teorema 12.9: Los únicos enteros cuyos recíprocos son enteros son 1 y -1.
12.8 Demuestre el teorema 12.11 (iii): La suma de dos números racionales es un número racional.
12.9 Demuestre el teorema 12.11 (v): El producto de dos números racionales es un número racional.
12.10 Demuestre el teorema 12.11 (vi): Si x es un número racional y $x \neq 0$, entonces x^{-1} es un número racional.
12.11 ¿Existe algún número racional cuyo cuadrado sea 3? (Véase el problema 11.5.)
12.12 ¿Existe algún número racional cuyo cubo sea 2?
12.13 Sea A el conjunto de todos los polinomios en x con coeficientes racionales. Los polinomios se pueden sumar y multiplicar en la forma ordinaria. Trate de establecer (no se exige demostración) cuáles de los axiomas A1 — A5, M1 —M5, AM, D se cumplen para A. Trate de definir un conjunto P_A de polinomios "positivos" de modo que se cumplan los axiomas de orden.

13 EL AXIOMA DE CONTINUIDAD

Esta sección tratará del último de los axiomas relativo a números y de algunas de sus consecuencias, lo cual completará nuestro estudio sobre el sistema numérico. Como anotamos en la introducción a este capítulo, es posible demostrar que si se dan dos sistemas y ambos satisfacen todos los axiomas que hemos enumerado, entonces uno de los sistemas puede considerarse como una simple copia al carbón del otro. En pocas palabras, el axioma que se estudiará en esta sección realmente completa la lista de axiomas sobre números que hemos venido estudiando*.

Comenzaremos con las nociones de elemento minimal y elemento maximal de un conjunto de números (ya hemos utilizado la noción de elemento minimal al establecer el segundo principio de inducción matemática).

13.1 Definición. Un número a es el elemento minimal de un conjunto A de números si y sólo si $a \in A$, y, $a < x$ para todo x que sea también elemento de A.

Un número b se llama elemento maximal de un conjunto A de números si $b \in A$, y, $b > x$ para todo x que sea también elemento de A.

El elemento minimal de un conjunto es justamente el elemento que se encuentra en el extremo izquierdo de nuestra representación geométrica, y el elemento maximal es el elemento que se halla al extremo derecho. El número 1 es el elemento minimal del conjunto N de los números naturales. No existe elemento maximal de N (¿por qué?). El número -2 es el elemento minimal del $\{1, -2, 4\}$ y 4 es el elemento maximal. El conjunto de todos los números no tiene un elemento minimal ni elemento maximal. No existe elemento minimal del conjunto de los números positivos, pues si x fuese uno de tales números, $x/2$ es un número positivo menor. El conjunto $\{x : 0 < x \text{ y } x \leq 2\}$ no tiene elemento minimal, en cambio, tiene a 2 como elemento maximal. Desde luego, el conjunto vacío, $\varnothing$, no tiene elemento minimal ni elemento maximal, pues carece de elementos.

El axioma de continuidad implica la situación siguiente: Supongamos que partimos el conjunto de todos los números en dos subconjuntos no vacíos, uno "a izquierda" que llamaremos conjunto L y otro "a derecha" que nombramos R, y tales que todo elemento de L es menor que todo elemento de R ¿Es posible que L no tenga elemento maximal y que R no tenga elemento minimal? Geométricamente (véase la figura 13.1), la respuesta afirmativa equivaldría a una especie de "portillo" en la recta numérica. El axioma de continuidad nos asegura que ello no puede suceder.

* Para lecturas más amplias sobre el axioma de continuidad remitimos al lector a *The Continuum and other Types of Serial Order*, de Edward V. Huntington, editado por Dover Publications, 1955; *A Survey of Modern Algebra*, de Garret Birkhoff y Saunders MacLane, publicado por MacMillan; y *Pure Mathematics*, de G. H. Hardy, publicado por Cambridge U. P., 1959.

L *R*

Figura 13.1

C Axioma de Continuidad. Supongamos que el conjunto de todos los números es la unión de dos conjuntos no vacíos L y R, tales que todo elemento de L es menor que cualquier elemento de R. Entonces, o L tiene elemento maximal o R tiene elemento minimal.

Las demostraciones que utilizan el axioma de continuidad generalmente involucran la separación de los números reales en conjuntos a izquierda y a derecha y, además, invocan el axioma. El siguiente es un buen ejemplo:

13.2 Teorema. Para todo número c existe un número natural n tal que $n > c$.

Demostración. Definamos a L como el $\{x : x < n$ para algún n natural$\}$ y $R = \{x : x \geq n$ para cualquier n natural $\}$. Así las cosas, todo número o pertenece a L o a R, y el teorema quedará demostrado si establecemos que R es vacío. Lo hacemos del modo siguiente:

En primer lugar, L no tiene elemento maximal porque si $x \in L$, entonces $x < n$ para algún número natural n; de aquí, $x + 1 < n + 1$; de esta suerte, $x + 1$ es menor que algún natural y por ello pertenece a L; en consecuencia x no puede ser el elemento maximal.

En segundo lugar, R no tiene elemento minimal porque, si suponemos que b fuese el elemento minimal de R, entonces $b - 1$ no pertenecería a R y por tanto, en virtud de la definición de R, se deduciría que $b - 1 < n$ para algún número natural n. Pero $b < n + 1$, de modo que b vendría a ser menor que un número natural y no pertenecería a R, y esto es contradictorio con lo supuesto.

Finalmente, cada elemento de L es menor que algún número natural y cada elemento de R es mayor que cualquier número natural. De aquí, se deduce que cualquier elemento de L es menor que cualquier elemento de R. Entonces, podemos concluir, a partir del axioma de continuidad, que L es vacío o que R es vacío: Pero $0 \in L$ porque 0 es menor que el número natural 1; en consecuencia R es vacío. ▌

Un corolario muy útil de este teorema nos dice intuitivamente que los recíprocos de los números naturales se acumulan cada vez más en las proximidades de 0.

13.3 Corolario. Para todo número positivo e existe un número natural n tal que $1/n < e$.

Demostración. De acuerdo con el teorema 13.2, podemos escoger un número natural n tal que $n > \frac{1}{e}$, y puesto que e es positivo, se sigue que $\frac{1}{n} < e$. ▌

Para concluir, usamos el axioma de continuidad para demostrar que todo número positivo tiene raíz cuadrada. Hemos demostrado en la sección precedente que no existe ningún número racional tal que su cuadrado sea 2. Del próximo teorema se deduce que existe un número cuyo cuadrado es 2; en consecuencia, ese número no puede ser racional. Este será entonces nuestro primer ejemplo de un número irracional.

13.4 Teorema sobre la existencia de raíces cuadradas. Para todo número positivo a existe un número x tal que $x^2 = a$.

Demostración. La idea de la demostración es partir el conjunto de los números en dos conjuntos: uno a la izquierda constituido por números negativos y no negativos cuyos cuadrados sean menores que a, y otro a la derecha formado por números positivos cuyos cuadrados sean mayores que a. Hacemos $L = \{y : y \leq 0$, o y es positivo, y, $y^2 < a\}$ y $R = \{z : z$ es positivo y $z^2 > a\}$. Si no hay un número cuyo cuadrado sea a, entonces todo número o pertenece a L o a R. Sentada esta hipótesis, el teorema se demuestra llegando a una contradicción con el axioma de continuidad. Presentamos las distintas etapas de la prueba bajo la forma de lemas.

13.5 Lema. No son vacíos L ni R.

Demostración. Observemos que $0 \in L$, luego L no es vacío. Sabemos que existe un número natural n tal que $n > a$, por el teorema 13.2. Pero, en ese caso, $n \geq 1$; de donde, $n^2 \geq n$ (basta multiplicar la desigualdad $n \geq 1$ por n), y por esta razón $n^2 \geq n > a$. Por consiguiente, $n \in R$, y hemos demostrado que R no es vacío. ▌

13.6 Lema. Cada elemento de L es menor que todo elemento de R.

Demostración. Supongamos que $y \in L$, y, $z \in R$. Si $y \leq 0$ entonces $y < z$ porque z es positivo. Si y es positivo, entonces $y^2 < a$, y, $z^2 > a$, de donde $z^2 > y^2$. En ese caso $z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$ es positivo. Pero, $z + y$ es la suma de dos números positivos y es por tanto positiva, luego $z - y$ es positiva, y, en consecuencia $z > y$. ▌

13.7 Lema. No hay en L elemento maximal.

Demostración. En primer lugar, observamos que ningún número negativo puede ser el elemento maximal de L porque $0 \in L$. Después, demostraremos que ningún elemento y, no negativo, de L, puede ser elemento maximal de L; para ello, basta demostrar que para algún número natural n, $y + \frac{1}{n}$ también pertenece a L. Puesto que $y \in L$ y $y \geq 0$, y sabemos que $y^2 < a$, entonces $a - y^2$ es positivo. Para demostrar que hay un número natural n tal que $y + 1/n \in L$, debemos demostrar que para algún número tal, es

$$\left(y + \frac{1}{n}\right)^2 = y^2 + \frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} < a,$$

o, lo que es igual, que

$$\frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(2y + \frac{1}{n}\right) < a - y^2.$$

Como quiera que $1/n \leq 1$, basta encontrar un número natural n tal que $(1/n)(2y + 1) < a - y^2$. Pero, de acuerdo con el teorema 13.3, es siempre posible escoger un número natural n tal que $1/n$ sea menor que el número positivo $\frac{a - y^2}{2y + 1}$; de donde, resulta que se cumple el lema. ▌

13.8 Lema. No existe elemento minimal en R.

Demostración. Demostraremos que si z es positivo y $z^2 > a$, entonces para algún número natural n se verifica que $z - 1/n$ es positivo y $(z - 1/n)^2 > a$. La demostración es bastante semejante a la anterior; haremos un esquema de ella tratando de reproducir la manera como un matemático podría descubrir tal demostración. Si la respuesta fuere "sí" a una cualquiera de las preguntas que se formulan a continuación, ello implicaría una respuesta positiva a la pregunta que la precede.

$? n, z - \frac{1}{n} > 0$ y $\left(z - \frac{1}{n}\right)^2 > a$

$? n, \frac{1}{n} < z$ y $z^2 - \frac{2z}{n} + \frac{1}{n^2} > a$

$? n, \frac{1}{n} < z$ y $z^2 - a > \frac{2z}{n} - \frac{1}{n^2}$

$? n, \frac{1}{n} < z$ y $z^2 - a > \frac{2z}{n}$

$? n, \frac{1}{n} < z$ y $\frac{z^2 - a}{2z} > \frac{1}{n}$

$? n, \frac{1}{n}$ menor que el menor entre z y $\frac{z^2 - a}{2z}$.

Respuesta: Sí. ▌

PROBLEMAS

13.1 Dados un número b y un número positivo a demuestre que existe un número natural n tal que $na > b$.

13.2 Utilice el hecho de que existe un número cuyo cuadrado es 2 (llamado $\sqrt{2}$) para probar que existe un número cuyo cuadrado es 8.

13.3 Utilice el hecho de que la $\sqrt{2}$ es un número irracional para demostrar que $\sqrt{8}$ es irracional.

13.4 Demuestre que si r es un número racional y q es un irracional, entonces $r + q$ es un número irracional.

13.5 Demuestre que si r es racional siendo $r \neq 0$, y si q es irracional, entonces $r \cdot q$ es un número irracional.

13.6 Halle dos números irracionales cuya suma sea 4.

13.7 Halle dos números irracionales cuyo producto sea 4.

13.8 Demuestre que el conjunto de los números racionales no satisface el axioma de continuidad; para ello presente conjuntos L y R no vacíos de números racionales tales que L no tenga elemento maximal, R no tenga elemento minimal, que cada elemento de L sea menor que todo elemento de R y que $L \cup R$ sea el conjunto de todos los números racionales.

13.9 Un número a se denomina una cota inferior de un conjunto A si $a \leq x$ para todo elemento x de A. Un número b se llama una cota superior de un conjunto A si $x \leq b$ para todo elemento x de A. Dé, si es posible, dos cotas

inferiores y dos cotas superiores distintas para cada uno de los conjuntos siguientes:
$\{x : 0 < x \leq 1\}$, $\{n : n$ es un número natural $\}$,
$\{x : 1 < x < 2$ o $x < 0\}$, $\varnothing$, $\{a : a$ es un entero $\}$.

13.10 Un conjunto puede tener o no tener cota superior, tener o no alguna cota inferior, tener o no elemento maximal, tener o no elemento minimal. Los 16 posibles arreglos de estas propiedades se enumeran abajo ("*u*" significa: "tiene cota superior", "—*u*" significa: "no tiene cota superior", "*l*" significa: "tiene cota inferior", etc.). En cada caso, dé un ejemplo de conjuntos que tengan la combinación determinada de propiedades y, en caso de ser imposible, explique por qué. ("*b*" quiere decir que tiene elemento maximal y "*s*" que tiene elemento minimal.)
ulbs; ulb—s; ul—bs; ul—b—s; u—lbs; u—lb—s; u—l—bs; u—l—b—s; —ulbs; —ulb—s; —ul—bs; —ul—b—s; —u—lbs; —u—lb—s; —u—l—bs; —u—l—b—s.

13.11 Supongamos que A es un conjunto no vacío que tiene al menos una cota superior. Sea $R = \{b : b$ es una cota superior de $A\}$ y sea $L = \{c : c$ no es una cota superior de $A\}$. Demuestre que R tiene un elemento minimal. Así, cualquier conjunto no vacío que tiene una cota superior, tiene una mínima cota superior.

13.12 Supóngase que A es un conjunto no vacío que tiene al menos una cota inferior y sea $L = \{a : a$ es una cota inferior de $A\}$. Demuestre que L tiene un elemento maximal. Así, todo conjunto no vacío que tiene una cota inferior, tiene una máxima cota inferior.

13.13 (a) Supóngase que a y b son números positivos tales que $b - a > 1$ y (atenidos al segundo principio de inducción matemática) supongamos que n sea el menor número natural que es mayor que a. Observe que $n - 1 \leq a < n$ y demuestre que $a < n < b$.

(b) Demuestre que si a y b son números cualesquiera tales que $b - a > 1$, entonces existe un entero c tal que $a < c < b$.

(c) Demuestre que si $a < b$, entonces existe un número racional r tal que $a < r < b$; es decir, entre dos números distintos cualesquiera existe un número racional. (Sugerencia: Comience por elegir un número natural p tal que $1/p < b - a$; entonces $1 < p(b - a) = bp - pa$. Luego, utilice (b) para encontrar un entero entre bp y ap.)

13.14 ¿Existe un número irracional entre dos números distintos cualesquiera?

CAPITULO 3

Vectores y Rectas

Hemos terminado nuestro repaso y revisión del álgebra elemental y estamos listos para estudiar los tópicos que forman la parte principal de este curso. Usaremos los teoremas de los capítulos anteriores libremente y sin mención explícita ya que necesitaremos solamente algunos puntos muy simples de estos capítulos. *

Las siguientes secciones comienzan con el estudio de la geometría y del álgebra de espacios vectoriales de dos y tres dimensiones. Definimos pares ordenados y ternas y luego describimos puntos geométricos como pares ordenados (o ternas) de números; a estos también los llamamos vectores. Estamos deseosos de utilizar la intuición geométrica que el estudiante debe haber obtenido en sus estudios de geometría plana, y, en consecuencia, usaremos ilustraciones geométricas sistemáticamente. Más tarde, en este capítulo, empezaremos por definir objetos geométricos, más precisamente, mediante términos no definidos y axiomas de nuestro sistema. Finalmente aplicamos el álgebra vectorial al estudio de rectas. Es interesante ver que todos los teoremas sobre rectas que aparecen en este capítulo son verdaderos tanto para dos como para tres dimensiones y, de hecho, para cualquier número de dimensiones. La última sección del capítulo se dedica a espacios vectoriales de dimensiones superiores. Definimos espacios vectoriales n-dimensionales y esbozamos el desarrollo que ya está elaborado en detalle para espacios vectoriales de dos y tres dimensiones a lo largo del capítulo.

Finalmente, así como el estudio del sistema numérico nos lleva a considerar la noción de conjunto, también surge aquí la noción de función. Definimos función utilizando conjuntos. Vale la pena anotar que la noción de función es, con la posible excepción de la noción de conjunto, el concepto más importante en matemática.

* Nota de interés para el estudiante: Si los capítulos anteriores parecieron difíciles de entender, y muy por encima de la capacidad de comprensión del lector, se puede hacer de cuenta que el curso comienza en realidad en este capítulo.

14 VECTORES

Nuestro primer objetivo es definir la noción de par ordenado. Esto es, para cada dos objetos a y b queremos tener un objeto (a, b) que tiene la propiedad de que si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c$ y $b = d$. Es perfectamente razonable tomar la noción de pares ordenados como no definido y aceptar como un axioma la propiedad que acabamos de enumerar. Sin embargo, esto parece un poco inoficioso ya que no es muy difícil definir un par ordenado en términos de conjuntos. En consecuencia, para dar al lector un poco más de práctica en la teoría de conjuntos, haremos esta definición y demostraremos como un teorema la propiedad deseada. Si el lector no desea más práctica en la teoría de conjuntos, puede suponer, sin perjudicar su comprensión de este curso, que el concepto de par ordenado es no definido y que nuestro primer teorema es un axioma.

La idea que prevalece en la definición que damos es bastante sencilla. Dados dos objetos a y b, queremos construir un conjunto que comprenda a a y b y que tenga alguna estructura especial que nos permita "recuperar" a a y b de ese conjunto; este conjunto especial se llamará entonces el par ordenado (a, b). (El término "ordenado" es gramático y no matemático; se deriva del hecho de que (a, b) no es necesariamente igual a (b, a).) Lo primero que se nos ocurre puede ser establecer que $(a, b) = \{a, b\}$; pero este no es el caso porque $\{a, b\} = \{b, a\}$ y el teorema que tratamos sería falso. Sin embargo, una definición un poco más elaborada es más conveniente. La definición que damos sugiere la utilización de los conceptos, "primera coordenada" y "segunda coordenada", tal como lo haremos enseguida.

14.1 Definición.* $(a, b) = \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}$.

Así, los elementos del par (a, b) son $\{a, 1\}$ y $\{b, 2\}$. Es conveniente demostrar un lema antes de establecer el único teorema sobre pares ordenados.

14.2 Lema. Si $\{x, y\} = \{x, z\}$, entonces $y = z$.

Demostración. Si $\{x, y\} = \{x, z\}$, entonces $y \in \{x, z\}$ y por consiguiente $y = z$, en cuyo caso el lema queda establecido, o sea, $y = x$. En este último caso $\{x\} = \{x, y\} = \{x, z\}$ y por consiguiente $z = x$. Así en este caso, $y = x$ y $z = x$ y en consecuencia $y = z$. ▮

14.3 Teorema sobre pares ordenados. Si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c$ y $b = d$.

Demostración. Por hipótesis $\{\{a, 1\}, \{b, 2\}\} = \{\{c, 1\}, \{d, 2\}\}$, y por tanto $\{a, 1\} = \{c, 1\}$ o $\{a, 1\} = \{d, 2\}$. En el primer caso $a = c$ de acuerdo con el lema precedente, y en el segundo caso es fácil ver que $a = 2$ y $d = 1$. En forma semejante $\{c, 1\} = \{a, 1\}$ o $\{c, 1\} = \{b, 2\}$ de lo cual inferimos que $a = c$ o, $c = 2$ y $b = 1$. Así, se cumple que $a = c$ o todo lo que sigue: $a = 2$, $d = 1$, $c = 2$ y $b = 1$. De esta suerte, para cualquier caso $a = c$. Por consiguiente, podemos aplicar el lema anterior al caso $\{\{a, 1\}, \{b, 2\}\} = \{\{c, 1\}, \{d, 2\}\}$ y deducir que $\{b, 2\} = \{d, 2\}$. Si aplicamos el lema nuevamente vemos que $b = d$. ▮

Si un conjunto A es un par ordenado, entonces $A = (a, b)$ para elementos únicos a y b debido al teorema precedente. En consecuencia podemos, sin anbigüedad, definir:

14.4 Definición. La primera coordenada de (a, b) es a y la segunda es b.

Podemos hacer un par ordenado con dos objetos cualesquiera a y b, pero nos interesará particularmente lo relativo a pares ordenados de números.

14.5 Definiciones. Un par ordenado de números se llama un vector bidimensional, o un punto del plano coordenado, o simplemente un punto del plano. El plano coordenado, o simplemente el plano, o espacio vectorial bidimensional, es el conjunto de todos los pares ordenados de números; es decir, $\{(x, y): x \text{ y } y \text{ son números}\}$.

Hay una buena razón geométrica para llamar al conjunto de pares de números, el plano coordenado. Consideremos la interpretación geométrica que se muestra en la figura 14.1. Una recta horizontal se llama el eje de x, una recta vertical se llama el eje de y, y el punto donde se cortan se llama el origen. El sentido

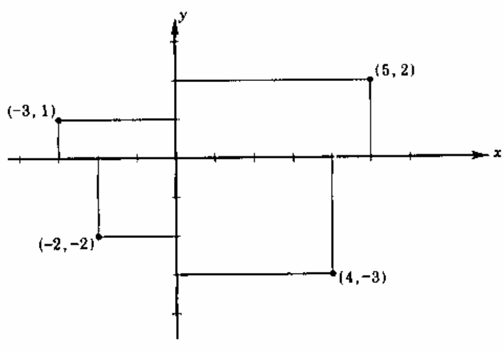


Figura 14.1

* Esta definición comprende el sistema numérico; sin embargo, puede darse una definición que comprenda sólo la teoría de conjuntos (véase el problema 7.9). Norbert Wiener del Instituto Tecnológico de Massachusetts, fue el primero en enunciar tal definición. Este logro notable y la idea luminosa de C. S. Pierce de definir las relaciones como conjuntos de pares ordenados, constituyeron avances de la mayor significación en la construcción de todas las matemáticas dentro de la teoría de conjuntos.

positivo del eje de x se toma hacia la derecha y el del eje de y, verticalmente hacia arriba; si se piensa que la figura es un mapa, entonces el sentido del eje de y es el norte y el del eje de x es el este. A cada par de números, por ejemplo (5, 2), asignamos un punto en el plano por medio del siguiente convenio: partiendo del origen, llévese en el sentido del eje de x, un número de unidades igual a la primera coordenada del par y en seguida llévese en la dirección y sentido del eje de y, un número de unidades igual a la segunda coordenada del par. De este modo (5, 2) está a 5 unidades en el sentido del eje de x y a 2 unidades en el sentido del eje de y. La primera coordenada de un par se llama frecuentemente coordenada x (o abscisa) y la segunda, la coordenada y (u ordenada). Si la coordenada x es negativa, se entiende que debemos movernos en el sentido opuesto al del eje de x el número preestablecido de unidades, y, similarmente, para la coordenada y. Así (—3, 1) es el punto que se muestra en el extremo superior izquierdo; (4, —3) está en el extremo inferior derecho. Obsérvese que la coordenada x de un punto es la distancia del eje de y al punto, con el signo correctamente escogido, y la coordenada y es la distancia del eje de x al punto.

Este método de designar puntos en el plano geométrico establece una correspondencia biunívoca entre puntos geométricos y pares ordenados; esto es, cada punto se designa exactamente por un par ordenado de números, y cada par ordenado de números designa exactamente un punto; esto constituye un logro importante que hace posible el estudio de propiedades del plano geométrico valiéndonos de propiedades algebraicas del conjunto de pares de números.

No hay mayor dificultad en definir una terna ordenada de objetos y de hallar una interpretación geométrica del conjunto de ternas ordenadas de números. De la misma manera utilizada para los pares, buscamos una definición de (a, b, c) de modo que si $(a, b, c) = (p, q, r)$, entonces $a = p$, $b = q$, $c = r$. La siguiente definición nos servirá para este propósito. *

* La definición $(a,b,c) = \{\{a, 1\}, \{b, 2\}, \{c, 3\}\}$ no funciona. Véase problema 14.17.

14.6 Definición. $(a,b,c) = ((a, b), c)$.

Esto es, la terna ordenada (a, b, c) es el par ordenado cuya primera coordenada es (a, b) y cuya segunda coordenada es c.

14.7 Teorema. Si $(a, b, c) = (p, q, r)$, entonces $a = p$, $b = q$, $c = r$.

Demostración. Si $(a, b, c) = (p, q, r)$, entonces por la definición de terna ordenada vemos que $((a, b), c) = ((p, q), r)$. Aplicando el teorema 14.3 sobre pares ordenados inferimos que $(a, b) = (p, q)$ y $c = r$, y aplicando nuevamente el mismo teorema vemos que $a = p$ y $b = q$. ▮

Nuevamente, en este caso tampoco existe inconveniente alguno en que el lector prefiera tomar la noción de terna ordenada como no definida y considerar el teorema 14.7 como axioma.

14.8 Definiciones. Una terna ordenada de números se llama un vector tridimensional o un punto en coordenadas en el espacio de 3 dimensiones. Espacio vectorial tridimensional o simplemente el espacio de 3 dimensiones es el conjunto de ternas ordenadas de números; esto es, el espacio de 3 dimensiones es el $\{(x, y, z) : x, y, z \text{ son números}\}$.

El conjunto de ternas ordenadas se llama espacio tridimensional debido a la siguiente interpretación geométrica. Consideremos, como se muestra en la figura 14.2, tres rectas mutuamente perpendiculares, los ejes x, y, z, que pasan a través de un punto llamado el origen; se

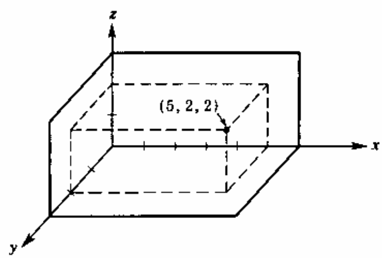


Figura 14.2

supone que el sentido positivo de x es hacia la derecha, el de z es verticalmente hacia arriba y el de y se supone saliendo del papel hacia el lector.

Cada terna de números puede utilizarse para indicar direcciones que proceden del origen hacia un punto, tomando del origen en el sentido del eje de x el número de unidades igual a la primera coordenada de la terna, en el sentido de y el número de unidades correspondiente a la segunda coordenada, y en el de z el número de unidades equivalente a la tercera coordenada. Las tres coordenadas se denominan a veces las coordenadas x, y, z del punto. Como se muestra en la figura 14.2 podemos visualizar este hecho representando una caja que tenga un vértice en el origen y cuyas aristas tengan longitudes iguales a las tres coordenadas respectivas, siendo el punto buscado el vértice de la caja que se opone al origen. Si la coordenada x es negativa, situamos el punto yendo en el sentido opuesto al del eje x, y, así sucesivamente. El plano que contiene los ejes y y z se llama el plano yz y vemos que la coordenada x de un punto es la distancia del plano yz al punto, con el signo elegido convenientemente.

Este método de designar puntos en un espacio ordinario establece una correspondencia biunívoca entre puntos y ternas ordenadas y nos permite el estudio de la geometría de cuerpos sólidos valiéndonos del álgebra de ternas de números.

PROBLEMAS

14.1 Dibuje los ejes de x y y y sitúe los siguientes puntos: $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 0)$; $(5, 0)$; $(2, 3)$; $(3, 2)$; $\left(\frac{3}{2}, 6\right)$; $(-\frac{1}{2}, -2)$; $(-\frac{1}{2}, 2)$; $(\frac{1}{2}, -2)$; $(\frac{1}{2}, 2)$; $(2, \frac{1}{2})$.

14.2 Halle los números x y y si

(a) $(x + 1, y - 2) = (0, 1)$;
(b) $(2x - 1, -5) = (x, y + 1)$;
(c) $(x + y, 0) = (2, x - y)$.

14.3 Halle los números x, y, z si

$$(x + y, z, x + z) = (6 - z, 5 - y, z + y).$$

14.4 Haga un dibujo en perspectiva de los ejes x, y, z para un espacio tridimensional como el de la figura 14.2 del texto y sitúe en él los siguientes puntos:

$(0, 0, 0)$; $(0, 0, 1)$; $(0, 1, 0)$; $(1, 0, 0)$; $(0, 0, -1)$; $(-2, -1, 0)$; $(-1, -2, 0)$; $(1, 1, 1)$; $(1, 2, 3)$.

14.5 Dibuje cada uno de los siguientes conjuntos de puntos en el plano:

(a) $\{(x,y)\colon x = 0\}$ (b) $\{(x,y)\colon x = 1\}$
(c) $\{(x,y)\colon y = 0\}$ (d) $\{(x,y)\colon x = y\}$

14.6 Dibuje cada uno de los siguientes conjuntos de puntos en el plano:

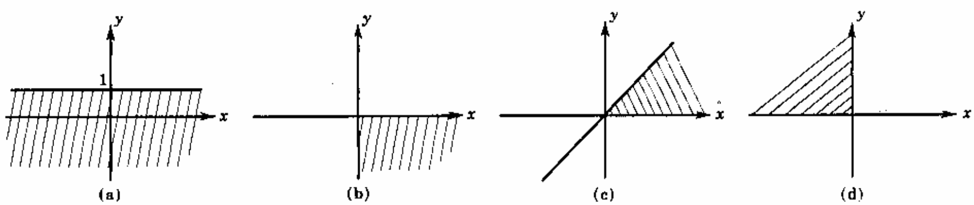
(a) $\{(x, y)\colon x > 0\}$ (b) $\{(x, y)\colon x < 0$ y $y < 0\}$
(c) $\{(x, y)\colon y < 0\}$ (d) $\{(x, y)\colon x < y\}$

14.7 Dibuje en un espacio tridimensional cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $\{(x, y, z)\colon x = 0\}$ (b) $\{(x, y, z)\colon x = 0$ y $z = 0\}$
(c) $\{(x, y, z)\colon y = 1\}$ (d) $\{(x, y, z)\colon x = y\}$

14.8 Describa cada una de las regiones dibujadas como el conjunto de puntos (x, y) que satisfagan alguna condición. (El área sombreada debe considerarse extendida indefinidamente como el modelo.)

14.9 Si (a, b) y (c, d) son puntos en el plano y $a \neq c$, entonces la pendiente de la recta que pasa por esos puntos se define como el número $\dfrac{b - d}{a - c}$. Puede parecer que esta definición dependa del orden en que se tomen los puntos, pero afortunadamente no es así. Compruebe que la definición



14.8

no depende del orden en que se tomen los puntos, demostrando que $\frac{b-d}{a-c} = \frac{d-b}{c-a}$ cuando a, b, c, d son números y $a \neq c$. Considérese también el caso $a = c$ y explique por qué ningún número es dado como la pendiente en tal caso.

14.10 Describa cada una de las siguientes expresiones como el conjunto de (x, y, z) que satisfacen alguna condición.

(a) el plano x - z (esto es, el plano que contiene los ejes x y z).
(b) el plano x - y.
(c) el plano horizontal situado a 2 unidades sobre el plano x - y.
(d) el eje x.

14.11 Los puntos (a, b) tales que tanto a como b son enteros, se llaman puntos reticulares enteros. Halle un ejemplo de una recta (representarla como un conjunto de puntos) a la cual no pertenezcan puntos reticulares enteros.

14.12 Sitúe una docena de puntos reticulares enteros de la forma $(x, 2x)$. Dibuje rectas para indicar cómo el conjunto de todos los puntos reticulares enteros de la forma $(x, 2x)$ puede usarse para establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los enteros y el conjunto de todos los enteros pares.

14.13 Si se puede establecer una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos, ambos deben tener el mismo número de elementos. Use esta sencilla idea para resolver el siguiente acertijo. ¿Cuántos encuentros se jugarán en un torneo de tenis (por eliminación sencilla) en el cual intervienen 1729 jugadores?

14.14 Dibuje cada uno de los siguientes conjuntos de puntos en el plano.

$$\{(x, y) \colon y = x^2\} \qquad \{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 1\}$$

14.15 ¿Cuántas ternas ordenadas se pueden formar con los dígitos? (Los dígitos son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.)

14.16 Los puntos (a, b, c), tales que a, b, c son enteros, se llaman puntos reticulares enteros en un espacio tridimensional. Halle cuatro puntos reticulares enteros en un espacio tridimensional que sean los cuatro vértices de un tetraedro regular.

14.17 Demuestre que $(a, b, c) = \{\{a, 1\}, \{b, 2\}, \{c, 3\}\}$ no sería una definición aconsejable de terna ordenada, aunque sabemos que $1 \neq 2 \neq 3 \neq 1$.

15 FUNCIONES

Antes de comenzar el estudio del vector geométrico, queremos definir una de las nociones más importantes de la matemática, la de función. Intuitivamente se supone que una función es una correspondencia que asigna a cada elemento de una cierta clase, llamada el dominio de la función, algún elemento correspondiente. Por ejemplo, podemos considerar la correspondencia que a cada persona le asigna su madre; esta correspondencia es una función, siendo el hecho esencial que a cada elemento del dominio, que en este caso es el conjunto de todas las personas*, hay asignado precisamente un elemento de otro conjunto (en este caso, el conjunto de todas las madres). Desde luego, varias personas diferentes (hermanos y hermanas) pueden corresponder a la misma madre. En términos matemáticos, esta correspondencia no es biunívoca. Pero a cada persona le corresponde solamente una madre. Llamemos M la correspondencia; dejamos sentado que M no es el conjunto de todas las personas, ni el de todas las madres, sino la correspondencia misma. Si C es un elemento del dominio de M, esto es, C es una persona, entonces la madre de C la denotamos por $M(C)$. Así, M (Jorge VII) = Victoria y M (Elizabeth) = Ana Bolena. En general, si f es una función y x es un elemento del dominio de f, entonces $f(x)$ es aquel objeto que corresponde a x. Este se llama el valor de f en x.

Un ejemplo más matemático nos puede ayudar. Considérese la correspondencia f dibujada esquemáticamente en la figura 15.1. El dominio de f se supone que consta de los puntos $a, b, c,$

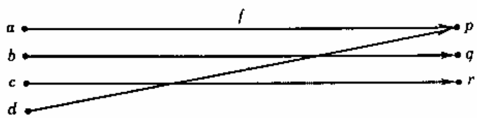


Figura 15.1

d y la correspondencia f envía a a p, b a q, c a r y d a p; esto es, $f(a) = p, f(b) = q, f(c) = r$, y $f(d) = p$.

Antes de dar más ejemplos de funciones, consideremos el mayor problema matemático de esta sección. ¿Cómo vamos a definir una función? La clave de la definición está en el hecho de que una correspondencia queda completamente descrita si sabemos qué objeto corres-

* Excepto Adán y Eva.

ponde a cada elemento del dominio. Esto sugiere que si conocemos el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (elemento del dominio, objeto correspondiente), entonces la función deberá estar completamente descrita. En otras palabras, el conjunto de todos los pares $(x, f(x))$, la describe completamente. De esta suerte, la función f definida en el parágrafo precedente está completamente descrita por el conjunto $\{(a, p), (b, q), (c, r), (d, p)\}$. Si esto presenta alguna confusión, no hay que preocuparse. La noción intuitiva de una función es precisamente la de una correspondencia y lo único que necesitamos saber sobre las funciones se da en el único teorema de esta sección*.

15.1 Definición. f es una función si y sólo si f es un conjunto de pares ordenados tales que dos de ellos no tengan la misma primera coordenada. Más formalmente, f es una función si y sólo si f es un conjunto, en donde cada miembro de f es un par ordenado, y si (x, y) y (x, z) pertenecen a f, entonces $y = z$.

Por ejemplo, $\{(0, 1), (1, 1)\}$ es una función; pero $\{(1, 0), (1, 1)\}$ no es función.

Usaremos los términos "función", "correspondencia" o "aplicación" indiscriminadamente.

Un elemento de una función f es entonces un par cuya primera coordenada es un elemento del dominio y cuya segunda coordenada es el objeto que corresponde a este elemento. La condición de que dos pares pertenecientes a f no tengan la misma primera coordenada es precisamente una manera de asegurarse de que hay sólo un elemento que corresponde a cada elemento del dominio. Podemos definir muy fácilmente el dominio de una función y el valor de la función para un elemento de su dominio.

15.2 Definiciones. El dominio de una función f es el conjunto de las primeras coordenadas de los elementos de f. El valor de f en un elemento x de su dominio, llamado $f(x)$, es la segunda coordenada de tal elemento de f cuya primera coordenada es x. El conjunto de todas las segundas coordenadas de elementos de f es el codominio de f.

Damos un ejemplo:

15.3 Ejemplo. Sea f: $\{(0, 1), (1, 1), (2, 0)\}$. ¿Cuáles son el dominio y el codominio de f, y cuál el valor de f en cada elemento de su dominio? Comenzamos observando que f es en verdad una función, ya que no hay dos elementos que tengan la misma primera coordenada. El dominio de f es el conjunto de las primeras coordenadas de sus elementos y viene dado por $\{0, 1, 2\}$. El codominio es el conjunto de las segundas coordenadas de los elementos y viene dado por $\{1, 0\}$. El valor de f en x es la segunda coordenada de tal elemento de f cuya primera componente es x, y por consiguiente $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ y $f(2) = 0$. ▮

Establecemos y probamos un único teorema sobre funciones y luego dedicamos para ejemplos el resto de la sección.

15.4 Teorema. Si f y g son funciones que tienen el mismo dominio y $f(x) = g(x)$ para cada elemento x de este dominio, entonces $f = g$.

Demostración. Supóngase $(x, y) \in f$; entonces $y = f(x)$ por razón de la definición del valor de f en x. Sabemos que x pertenece al dominio de f por la definición de dominio, y ya que se supone que f y g tienen el mismo dominio, se sigue entonces que x pertenece al dominio de g. Por consiguiente $(x, z) \in g$ para todo z, y $z = g(x)$. Pero $f(x) = g(x)$ y entonces $(x, y) = (x, z)$. Así $(x, y) \in g$, y hemos probado que $f \subset g$. El mismo argumento, intercambiando f y g, nos muestra que $g \subset f$, y por tanto $f = g$. ▮

El teorema anterior se establece algunas veces con menos precisión y con más pretensión así: una función queda determinada por sus valores. La esencia del teorema está en que para definir una función es suficiente decir cuál es su dominio y el valor de la función en cada elemento de él. El teorema nos asegura que hay una función única que satisface tales especificaciones.

Veamos ahora una serie de ejemplos de funciones.

* Si el lector sabe por su experiencia anterior lo que es el gráfico de una función, sólo necesita ver que para nuestro propósito la función se identifica con su gráfico.

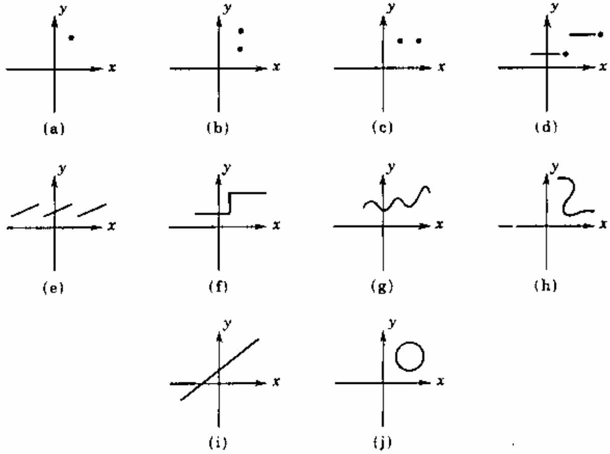


Figura 15.2

15.5 Ejemplo. Si f es una función cuyo dominio y codominio son conjuntos de números reales, entonces cada elemento de f es precisamente un vector bidimensional y f un subconjunto del plano. El problema está en hallar una condición geométrica que nos permita decidir cuáles subconjuntos del plano son funciones. Consideremos, por ejemplo, los subconjuntos del plano que están dibujados en la figura 15.2. ¿Cuáles de ellos son funciones?

En cada caso, el conjunto que se ha dibujado es un conjunto de pares ordenados de modo que la única condición que debemos comprobar es que no haya dos pares ordenados diferentes que tengan la misma primera coordenada. Pero esto tiene una interpretación geométrica sencilla: dos pares de números ordenados diferentes tienen la misma primera coordenada si uno de los puntos está situado verticalmente sobre el otro. Esto es, un subconjunto del plano es una función si y sólo si no hay rectas verticales que corten al subconjunto en más de un punto. Aplicando este criterio vemos que (a), (c), (d), (e), (g), e (i) son funciones, mientras los restantes conjuntos no son funciones. ▌

Vale la pena observar el significado geométrico del valor de una función. La figura 15.3 ilustra este significado directamente. Si (a, b) pertenece a una función f, entonces $b = f(a)$, y, de esta suerte, a es la primera coordenada de un elemento de la función siendo $f(a)$ la segunda coordenada.

15.6 Ejemplo. ¿Cuáles son el dominio y el codominio de la función f cuyo único elemento es $(1, -2)$ (esto es, $f = \{(1, -2)\}$)? El dominio es el conjunto de las primeras coordenadas de elementos de f; 1 es la única primera coordenada de un elemento de f, y en consecuencia el dominio de f es $\{1\}$. De modo semejante, el codominio de f es $\{-2\}$. ▌

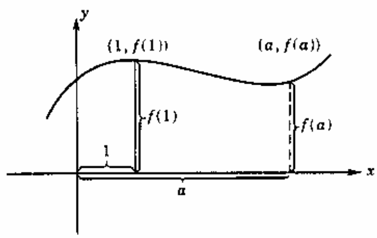


Figura 15.3

15.7 Ejemplo. Las funciones se describen frecuentemente por medio de una fórmula. Por ejemplo, sea f la función cuyo dominio es el conjunto de todos los números, y que toma el valor $x^2 + 1$ para cada número x; esto es: $f = \{(x, x^2 + 1): x$ es un número $\}$, y $f(x) = x^2 + 1$ para todos los números x. El problema es hallar $f(1)$, $f(-2)$, $f(2t)$, $f(2x)$ y $f(x-2)$. El mejor modo de manipular esta clase de problemas es pensar exactamente lo que establece la fórmula en términos menos abstractos. En este caso, la fórmula dice simplemente que el valor de f en cualquier número es ese mismo número elevado el cuadrado más 1. Así, $f(1) = 1^2 + 1 = 2$, $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$, $f(2t) = (2t)^2 + 1 = 4t^2 + 1$, $f(2x) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$, y $f(x-2) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$. ▌

15.8 Ejemplo. De hecho, la mayoría de las funciones que se presentan en matemática no están definidas por fórmulas. Damos un ejemplo de dos funciones que están estrechamente relacionadas. Sea A el conjunto de todos los pares ordenados (C, a) tales que C es un círculo y a es el área del círculo C. Podemos decir que A es la función *área* puesto que, para cada círculo, el valor de A en ese círculo es el área. El dominio de A es el conjunto de todos los círculos y su codominio, el conjunto de todos los números positivos. También podríamos definir la función *radio* R como el conjunto de pares (C, r) donde C es un círculo y r es el radio de C. Existe una relación bien conocida entre A y R. Para cada círculo C, sabemos que $A(C) = \pi[R(C)]^2$; esto es, el área de un círculo es siempre π multiplicado por el cuadrado del radio. ▌

15.9 Ejemplo. Damos un ejemplo de una función que tenga una sencilla interpretación intuitiva por medio de la operación "desplazamiento" de un conjunto de puntos. Sea T la función cuyo dominio es el conjunto de números y tal que $T(x) = x + 2$ para cada número x. Se muestra un gráfico de esta función en la figura 15.4. Sin embargo, existe una descripción geométrica que es más informativa que el dibujo. Lo que T realmente hace es trasladar cada punto de la recta dos unidades a la derecha. Esto es, T "envía" el punto x al punto $x + 2$, el cual está dos unidades a la derecha. Podemos dibujar la correspondencia T de la siguiente manera: tómese la recta y muévala hacia atrás sin doblarla ni alargarla, (sobre sí misma), dos unidades a la derecha. La correspondencia T hace que cada número x corresponda al número donde x quede después del corrimiento.

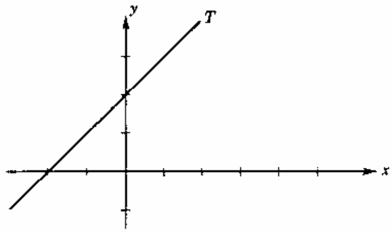


Figura 15.4

Esta clase de noción intuitiva de función es muy útil en matemática. La función T se llama a veces "traslación en dos unidades" y se denota por T_2 (así T_5 es una traslación en 5 unidades). ▌

15.10 Ejemplo. Tendremos que considerar ahora funciones cuyos dominios son subconjuntos del plano. Por ejemplo, supongamos que f es la función cuyo dominio es el plano y cuyo valor en (x, y) es $2x^2 - y$; esto es, $f((x, y)) = 2x^2 - y$. En casos como éste se acostumbra omitir uno de los pares de paréntesis y escribir $f(x, y) = 2x^2 - y$. Para la función tenemos definidos $f(1, 2) = 0$, $f(r, s) = 2r^2 - s$, y $f(y, x) = 2y^2 - x$. ▌

Una función, cuyo dominio es un subconjunto del plano y cuyo codominio es un conjunto de números, es un subconjunto del espacio tridimensional puesto que este espacio es simplemente el conjunto de todos los pares $((a, b), c)$ donde a, b y c son números. (Véase la definición 14.6). Podemos preguntarnos qué subconjuntos del espacio tridimensional son funciones. (Esto se enuncia algunas veces así: ¿Qué subconjuntos son gráficos de funciones de x y y?) De la misma manera que para los subconjuntos del plano vemos que un subconjunto del espacio tridimensional es una función si cada recta vertical contiene a lo sumo un punto del

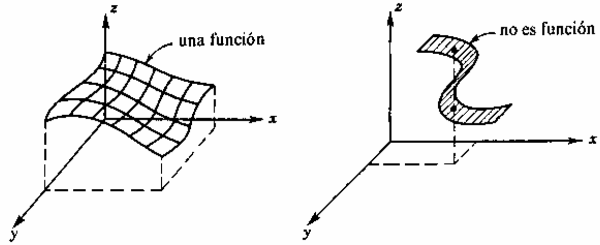


Figura 15.5

conjunto. La figura 15.5 muestra una función y un conjunto que no es función.

PROBLEMAS

15.1 Para cada uno de los conjuntos de pares siguientes ordenados diga si es una función o no, y si no lo es, diga por qué.

(a) $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}$.
(b) $\{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (0, 3)\}$.
(c) $\{(0, 1), (1, 0), (2, 1), (3, 0)\}$.
(d) $\{(1, 0), (0, 1), (1, 2), (0, 3)\}$.

15.2 Diga si cada uno de los conjuntos de pares ordenados siguientes es función o no, y si no lo es, diga por qué. Supóngase $a \neq b$, $a \neq c$, y $b \neq c$.

(a) $\{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$.
(b) $\{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$.
(c) $\{(1, a), (1, b), (1, c)\}$.
(d) $\{(1, a), (2, b), (3, c)\}$.

15.3 Diga si cada uno de los conjuntos de pares ordenados siguientes es o no función, y si no lo es, diga por qué.

(a) $\{(x, y)$: x y y son números y $y = x^2\}$.
(b) $\{(x, y)$: x y y son números y $x = y^2\}$.
(c) $\{(x, y)$: x y y son números y $x^2 + y^2 = 1\}$.

15.4 Si f es la función tal que $f(x) = x - 1$ para todos los números x, ¿cuáles son los siguientes valores?

$$f(0); f(1); f(-1); f(2); f(3); f(4); f(\sqrt{2}).$$

15.5 Si f es la función tal que $f(x) = x + 1$ para todos los números x, ¿cuáles son los siguientes valores?

$$f(0); f(1); f(-1); f(2); f(3); f(4); f(\sqrt{2}).$$

15.6 Si f es la función tal que $f(u) = u^2 + 1$ para todos los números u, ¿cuáles son los siguientes valores?

$$f(0); f(1); f(-1); f(2); f(3); f(4); f(\sqrt{2}).$$

15.7 Si f es la función tal que $f(x) = 3x + 2$ para todos los números x, ¿cuáles son los siguientes valores?

$$f(0);\ f(1);\ f(-1);\ f(2);\ f(-2);\ f(-\tfrac{2}{3}).$$

15.8 Sea f la función definida por $f(x) = x + 1$. Reemplace el signo de interrogación por el valor correcto en cada uno de los casos siguientes:

(a) $f(1) = ?$; (b) $f(0) = ?$; (c) $f(-1) = ?$;
(d) $f(x + 1) = ?$; (e) $f(y) = ?$; (f) $f(a - 2) = ?$.

15.9 Sea $f(x) = 3x - 2$. Reemplace el signo de interrogación por el valor correcto en cada uno de los casos siguientes:

(a) $f(2) = ?$; (b) $f\left(\dfrac{y + 2}{3}\right) = ?$; (c) $f(3z - 2) = ?$.

15.10 Si f es la función tal que $f(x) = x - 1$ para todo x, y g es la función tal que $g(x) = x^2$ para todo x, ¿cuáles son los siguientes valores?

$f(-2)$; $g(-2)$; $f(g(0))$; $g(f(0))$; $f(g(-1))$; $f(g(1))$; $g(f(-1))$; $g(f(1))$.

Para cualquier número a ¿cuál es el valor de $f(g(a))$ y cuál el de $g(f(a))$?

15.11 Para cada una de las siguientes funciones diga cuál es el dominio y cuál el codominio.

(a) $f = \{(a, 1)\}$; (b) $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$;
(c) $h = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d), (5, e)\}$.

15.12 Para cada una de las siguientes funciones diga cuál es el dominio y cuál el codominio.

(a) $f = \{(x, y): x \text{ es un número y } y = x^2\}$.
(b) $g = \{(x, y): x \text{ es un número natural y } y = x^2\}$.
(c) $h = \{(x, y): x \text{ es un entero y } y = 2x\}$.

15.13 El correo de primera clase cuesta 5 centavos la onza más 5 centavos por la fracción de onza restante. Haga un gráfico como el que se muestra en la figura 15.2 para la función postal hasta de 8 onzas.

15.14 La función f tal que $f(x) = x^3$ para todo x la podemos escribir $f = \{(x, y): x \text{ es un número y } y = x^3\}$.

(a) Haga lo mismo para la función g tal que $g(x) = x + 1$ para todos los números x.
(b) Haga lo mismo para la función h tal que $h(x) = x^2 + x + 1$ para todos los números x.

15.15 Si $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ para todo número x excepto 0 (f no está definida para $x = 0$; esto es, 0 no pertenece al dominio de f), y $g(u) = u^2 + 1$ para todos los números u, ¿cuáles son los siguientes valores?

$$g(f(1));\ g(f(-1));\ f(g(0));\ f(g(1));\ f(g(-1));\ f(g(2)).$$

¿Está $f(g(u))$ definida para todos los números u?

15.16 Si usted consigue una moneda de centavo en el primer día del año, dos monedas en el segundo día, cuatro en el tercer día, ocho en el cuarto día, diez y seis en el quinto día, o sea que recibe cada día el doble de monedas del día anterior, el número de monedas que usted recibe cada día dependerá del número del día. Escriba una fórmula para una función que le diga cuántas monedas recibirá usted en un día determinado. ¿Qué día del año recibirá más de un millón de pesos?

15.17 Si A, B, C y D son conjuntos y f y g son funciones tales que el dominio de f es A, el codominio de f es B, el dominio de g es C, el codominio de g es D y $D \subseteq A$, entonces podemos definir un conjunto h de pares ordenadas escribiendo $h = \{(x, y): x \in C \text{ y } y = f(g(x))\}$. Pruebe que h es una función. (Tenga presente que el codominio de h es un subconjunto de B.)

15.18 Una función "reloj" h se puede definir para cada minuto m desde 0 a 59 escribiendo $h(m)$ = minuto en el cual el minutero indica cuándo el horario señala a m. Represente h como en la figura 15.2.

15.19 Dé un ejemplo de una función f que esté definida para todos los números x y que tenga la propiedad de que si u y v son números y $u < v$, entonces $f(u) < f(v)$.

15.20 Dé un ejemplo de una función g que esté definida para todos los números x y que tenga la propiedad de que si u y v son números y $u < v$, entonces $g(u) > g(v)$.

15.21 Dé un ejemplo de una función h que esté definida por lo menos para todos los números $x > 0$, y que tenga la propiedad de que si u y v son números y que si $0 < u < v$, entonces $g(u) > g(v) > 0$.

15.22 ¿Es siempre cierto que la unión de dos funciones es una función? Explique. ¿Es siempre cierto que la intersección de dos funciones es siempre una función? Explique.

15.23 Para todo número natural n podemos definir una función $f_n = \{(x, y): x \text{ es un número y } y = nx\}$. Si admitimos que F es el conjunto de todas esas funciones, esto es, $F = \{h : h = f_n \text{ para todo } n\}$, entonces F es un ejemplo de una *familia* de funciones. F tiene la propiedad de que si $h \in F$ y $g \in F$ entonces $h \cap g = \{(0, 0)\}$ a menos que $h = g$.

(a) Dé un ejemplo de una familia G de funciones que tenga la propiedad de que si $g \in G$ y $h \in G$, entonces $h \cap g = \varnothing$, si $h \neq g$.
(b) Dé un ejemplo de una familia H de funciones que tenga la propiedad de que si $g \in H$ y $h \in H$, entonces
$$h \cap g = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$$
si $h \neq g$.

15.24 Supóngase que ningún sirviente puede servir a dos patrones y que ningún patrón está sin sirvientes.

Sea $A = \{(x, y): x \text{ es el sirviente de } y \text{ y } y \text{ es el patrón de } x\}$.
Sea $B = \{(x, y): x \text{ es el patrón de } y \text{ y } y \text{ es el sirviente de } x\}$.

¿A es una función? Si lo es, ¿cuál es su dominio? ¿B es una función? ¿Cuál es A (Sancho Panza)? Dé un argumento apropiado que señale que debe haber más sirvientes que patrones en el mundo.

15.25 Supóngase que f es una función de dominio A y codominio B y supóngase también que $\{(x, y): (y, x) \in f\}$ es una función. Entonces f define una correspondencia biunívoca entre A y B. Para hacer esto claro, compruebe que si $u \in A$ y $v \in A$ y $f(u) = f(v)$, entonces $u = v$.

15.26 (a) ¿Cuántas funciones hay con dominio $= \{0, 1\}$ y codominio $\subseteq \{0, 1\}$?
(b) ¿Cuántas funciones hay con dominio $= \{0, 1, 2\}$ y codominio $\subseteq \{0, 1\}$?
(c) Cuántas funciones hay con dominio $= \{0, 1, 2, 3\}$ y codominio $\subseteq \{0, 1\}$?

15.27 El invervalo en la recta entre 0 y 1 se designa con $[0 : 1] = \{x : x \text{ es un número y } 0 < x < 1\}$.
Sea $F = \{f : f \text{ es una función con dominio } [0 : 1] \text{ y codominio contenido en el conjunto de todos los números}\}$.

Podemos sumar funciones pertenecientes a F por medio de la siguiente definición: Para funciones f y g cualesquiera que pertenecen a F, $f \oplus g = \{(x, y) : x \in [0 : 1] \text{ y } y = f(x) + g(x)\}$. En notación abreviada, $f \oplus g$ es la función tal que para todo $x \in [0 : 1]$, $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$.

Compruebe que la operación $\oplus$ para F satisface los axiomas A1, A2, A3, A4 y A5; esto es, F es un grupo conmutativo para la operación $\oplus$.

15.28 Para cada número a definimos una función $T_a = \{(x, y) : x \text{ es un número y } y = x + a\}$ de modo que

T_a es la función tal que para todos los números x, $T_a(x) = x + a$. Considérese ahora la familia T de todas esas funciones, esto es, $T = \{f : \text{para algún número } a, f = T_a\}$.

La adición se define para funciones que pertenecen a T escribiendo $T_a \oplus T_b$ es la función tal que para todos los números x, $(T_a \oplus T_b)(x) = T_a(T_b(x))$.

(a) Demuestre que $T_a \oplus T_b = T_{a+b}$ para todos los números a y b.

(b) Demuestre que T es un grupo conmutativo para la operación de $\oplus$.

15.29 Para cada número a diferente de cero definimos una función $M_a = \{(x, y): x \text{ es un número y } y = ax\}$, de modo que M_a es la función tal que para todos los números x, $M_a(x) = ax$. Considérese ahora la familia M de todas esas funciones, esto es, $M = \{f : \text{para algún número } a, f = M_a\}$.

Se define la multiplicación para funciones que pertenecen a M escribiendo $M_a \otimes M_b$ como la función tal que para todos los números x, $(M_a \otimes M_b)(x) = M_a(M_b(x))$.

(a) Demuestre que $M_a \otimes M_b = M_{ab}$ para números cualesquiera a y b.

(b) Demuestre que M con la operación $\otimes$ es un grupo conmutativo.

16 ADICION VECTORIAL

En esta sección comenzamos con el estudio del álgebra de espacios vectoriales de 2 y 3 dimensiones. Hasta este punto no ha habido operaciones algebraicas; el plano es precisamente el conjunto de todos los pares de números y el espacio tridimensional es el conjunto de todas las ternas. La primera tarea es definir la adición vectorial.

16.1 Definición. Si a, b, c, p, q, y r son números, entonces $(a, b) + (p, q) = (a + p, b + q)$ y $(a, b, c) + (p, q, r) = (a + p, b + q, c + r)$.

Esta definición también se puede establecer así: Si A y B son vectores, entonces $A + B$ es el vector cuya primera coordenada es la suma de la primera coordenada de A y de la primera de B; la segunda coordenada $A + B$ es la suma de la segunda coordenada de A y de la segunda de B. Obsérvese que sumamos vectores bidimensionales con vectores bidimensionales y también vectores tridimensionales con vectores tridimensionales, pero nunca sumamos vectores bidimensionales con vectores tridimensionales.

Aplicando esta definición, vemos, por ejemplo, que:

$$\begin{aligned}(1, 2) + (-2, 3) &= (1 - 2, 2 + 3)\\ &= (-1, 5),\\ (2, 3, 1) + (1, -3, 2) &= (2 + 1, 3 - 3, 1 + 2)\\ &= (3, 0, 3),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(2x + 1, 3) + (3, y) &= (2x + 1 + 3, 3 + y)\\ &= (2x + 4, 3 + y).\end{aligned}$$

Es natural indagar si la adición vectorial satisface los mismos axiomas que cumple la adición de números; esto es, ¿la adición vectorial es asociativa, conmutativa, etc.? Es fácil resolver estas preguntas.

16.2 Teorema. La adición vectorial es conmutativa y asociativa; es decir, si X, Y y Z son vectores, entonces $X + Y = Y + X$ y $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$.

Demostración. Solamente probamos que la adición vectorial de vectores bidimensionales es conmutativa; las otras pruebas son similares a ésta. Si X y Y son vectores bidimensionales, entonces $X = (a, b)$ y $Y = (p, q)$ para algunos números a, b, p y q, debido a la definición de vectores bidimensionales. Entonces,

$$\begin{aligned}X + Y &= (a, b) + (p, q) = (a + p, b + q)\\ &= (p + a, q + b) = Y + X,\end{aligned}$$

haciendo uso de la definición de adición vectorial, la conmutatividad de la adición de números y nuevamente la definición de adición vectorial. ∎

Los tres primeros axiomas para la adición de números quedan entonces satisfechos por la adición vectorial. En seguida nos preguntamos si existe un vector que sea un elemento idéntico (neutro) respecto de la adición vectorial; esto es, ¿hay un vector A tal que $A + X = X$ para todo vector X? Escribiendo esta pregunta en términos de pares ordenados de números, ¿podemos llenar el espacio del paréntesis

$$(—, —) + (a, b) = (a, b)$$

de tal modo que la igualdad sea siempre correcta? Es razonablemente obvio que podemos hacerlo y en efecto $(0, 0) + (a, b) = (a, b)$. De modo semejante para vectores tridimensionales, $(0, 0, 0) + (a, b, c) = (a, b, c,)$ para todos los números a, b, c. Esto es, $(0, 0)$ es un elemento idéntico con respecto a la adición de vectores bidimensionales, y $(0, 0, 0)$ es un elemento idéntico con respecto a la adición de vectores tridimensionales. Debido a que la adición vectorial satisface el axioma de clausura y además es conmutativa, el elemento idéntico para la adición es único.

16.3 Definición. ② $= (0, 0)$ y ③ $= (0, 0, 0)$.

Siempre que no se preste a confusión omitiremos las cifras "2" y "3" que hemos utilizado como símbolos para los elementos idénticos aditivos de 2 y 3 dimensiones.

Hemos verificado que la adición vectorial es conmutativa y asociativa y que existe un vector que es el elemento idéntico para la suma. El otro axioma para la adición establece que para todo número existe un número que es su opuesto con respecto a la adición. Nos preguntamos: ¿Dado un vector X, existe un vector tal que al ser sumado con X da 0? En términos de números, dado (a, b), podemos llenar el espacio del paréntesis

$$(—, —) + (a, b) = (0, 0)$$

de tal modo que la igualdad sea correcta? Es evidente que $(-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$. En consecuencia $(-a, -b)$ es un opuesto con respecto al vector adición del vector (a, b), y es igualmente sencillo probar que $(-a, -b, -c)$ es un opuesto de (a, b, c). El opuesto aditivo de un vector es único, porque la adición vectorial satisface todos los axiomas de un grupo conmutativo. Definimos el opuesto de un vector y la diferencia de dos vectores de una manera estrictamente análoga a las correspondientes definiciones para números.

16.4 Definición. El opuesto de un vector X, que se designa por $-X$, es el vector tal que $X + (-X) = 0$. La diferencia de dos vectores X y Y, que se designa por $X - Y$, es $X + (-Y)$.

Según las observaciones previas a la definición vemos que el opuesto de (a, b, c) es $(-a, -b, -c)$. Anotamos que $(x, y, z) - (a, b, c) = (x, y, z) + [-(a, b, c)] = (x, y, z) + (-a, -b, -c) = (x - a, y - b, z - c)$.

Ahora estamos adquiriendo herramientas para el estudio de los vectores, pero antes de proceder a ello queremos analizar la interpretación geométrica de la adición de vectores. Esto, en verdad, resulta muy exacto.

Empezamos con la interpretación geométrica de la adición de números; en la figura 16.1 se muestran varios casos. Dibujando una flecha desde el 0 al número x, y otra flecha del 0 al número y, trasladamos la última flecha hasta que su extremo descanse sobre el extremo de la flecha que va de 0 a x; la punta de la flecha trasladada viene a quedar sobre $x + y$.

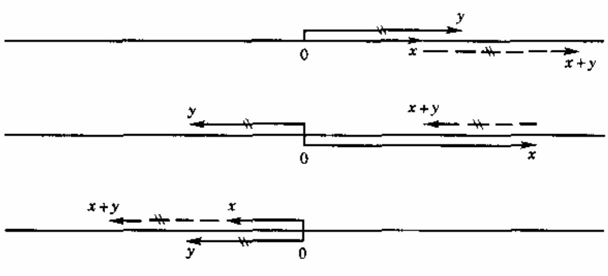


Figura 16.1

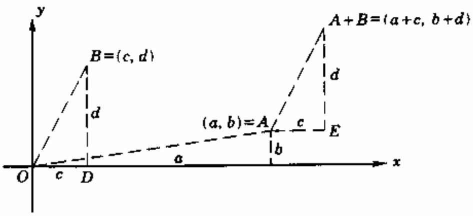


Figura 16-2

Una observación cuidadosa de la figura 16.2 nos muestra la interpretación geométrica de la adición de vectores bidimensionales. Esta es una generalización correcta de la adición de números. Observamos que el triángulo rectángulo ODB es congruente con el triángulo rectángulo $AE(A + B)$ y en consecuencia el segmento OB es igual y paralelo al segmento $A(A + B)$. Esto nos sugiere la siguiente descripción geométrica de la adición vectorial. Para sumar A y B dibujamos flechas desde O a cada uno de los puntos A y B. Si trasladamos la flecha desde O a B y lą desplazamos conservándola paralela a su posición original hasta que su extremo inferior quede sobre la punta de la flecha que va desde O a A, entonces su punta queda en $A + B$. La figura 16.3 es una copia de la figura 16.2 con las flechas dibujadas y los segmentos rectilíneos correspondientes a la distancia suprimida. Es también importante observar que la adición vectorial de vectores bidimensionales se puede realizar con regla y

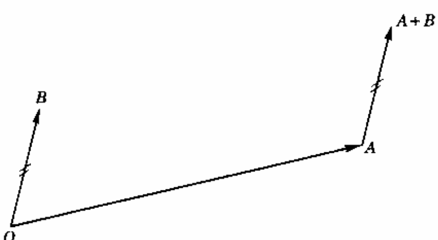


Figura 16.3

compás. La figura 16.4 muestra la construcción.

Hay una forma ligeramente diferente pero más sugestiva de expresar la descripción de la adición vectorial. Debemos notar en la figura 16.4 que los puntos O, A, B, y $A + B$ son los vértices de un paralelogramo. Podemos entonces dar la siguiente norma para la adición: completamos el paralelogramo del cual dos de sus lados son las rectas que van de O a A y de O a B; la diagonal de este paralelogramo que pasa por O tiene a $A + B$ como su otro extremo. Por esta razón, la adición de vectores es algunas veces llamada adición por el método del paralelogramo.

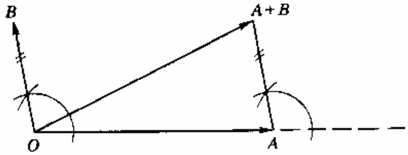


Figura 16.4

En matemática se acostumbra representar el par (a, b) por un punto y representar el vector (a, b) por una flecha que tiene un extremo en $(0, 0)$ y el otro en (a, b). Pero, por supuesto, el punto (a, b) es idéntico al vector (a, b). No hay contradicción en esto. El par ordenado de números (a, b) no es un punto ni es una flecha; es un ente matemático abstracto, y los esquemas que dibujamos para representarlo son simples ayudas para nuestra intuición. No tienen trascendencia matemática en sí mismos y creemos que podemos usar puntos, flechas o cualquier otro símbolo representativo que se nos ocurra.

Por último, existe otra variante de la interpretación geométrica de la adición vectorial. Considérese para un vector fijo A la correspondencia T_A que mueve cada punto X del plano al punto $X + A$. Esta correspondencia simplemente levanta todo el plano y lo mueve sin rotación mientras el punto que originalmente era O ahora se ubica sobre A. La función T_A se llama entonces un desplazamiento paralelo equivalente a la cantidad A. El valor de T_A en el punto B, $T_A(B)$, es simplemente $A + B$. Por consiguiente se pueden dar instrucciones para calcular $A + B$: trasládese el plano mediante un desplazamiento paralelo hasta que O caiga sobre la posición original de A; entonces B cae sobre la posición original de $A + B$.

Existe también una interpretación geométrica sencilla del opuesto de un vector. El vector $-(a, b) = (-a, -b)$ descansa sobre una recta que pasa por O y (a, b) sobre el lado opuesto a (a, b), y la distancia de $(-a, -b)$ a O es igual a la distancia de (a, b) a O (véase la figura

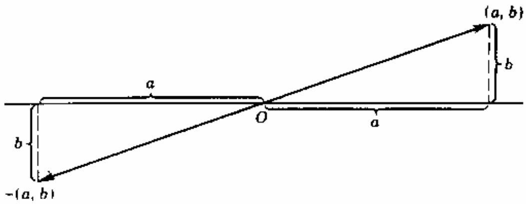


Figura 16.5

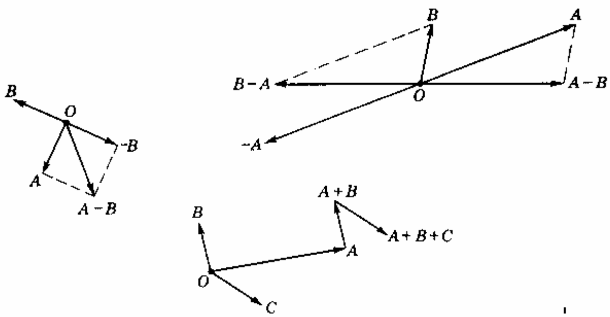


Figura 16.6

16.5). Algunas veces decimos que $-(a, b)$ es la reflexión de (a, b) respecto de $(0, 0)$.

Si tenemos en cuenta la interpretación geométrica del opuesto del vector A, no es difícil ver cómo se interpreta la diferencia $A - B = A + (-B)$. La figura 16.6 muestra varias combinaciones de A, B, C, $-A$, $-B$, y $-C$. Por último, aunque toda nuestra geometría ha sido descrita en términos de vectores bidimensionales, la misma interpretación se puede hacer para espacios tridimensionales. La suma de dos vectores tridimensionales A y B se puede construir así: en el plano que contiene O, A y B se hace una traslación paralela de la flecha que va de O a B hasta que su origen descanse en A (véase la figura 16.7); entonces, su extremo estará sobre $A + B$. El opuesto de un vector tridimensional A está sobre una recta que pasa por O y A en el lado opuesto de O y equidistante de O.

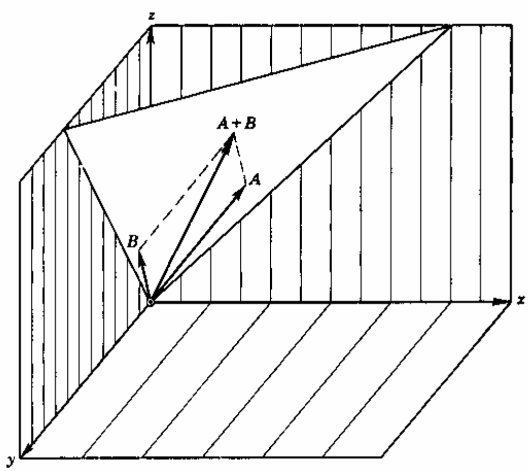


Figura 16.7

PROBLEMAS

16.1 Calcule cada una de las sumas de vectores siguientes:
(a) $(1, 1) + (3, 3)$;
(b) $(0, 1) + (1, 0) + (3, 5)$;
(c) $(\sqrt{2}, \sqrt{3}) + (\sqrt{3}, \sqrt{2})$;
(d) $(-3, 2) + (1, 0) + (1, 0) + (1, 0) - (0, 1) - (0, 1)$;
(e) $(-2, 6) + (3, -5)$.

16.2 Calcule cada una de las sumas de vectores siguientes:
(a) $(0, 0, 1) + (1, 1, 0)$;
(b) $(0, 2, 0) + (3, 0, 0) + (0, 0, 1)$;
(c) $(-3, 6, 2) + (4, -5, 3) + (-1, -1, -5)$;
(d) $(-3, 2, 1) + (1, -3, 2) + (2, 1, -3)$.

16.3 Calcule cada una de las sumas de vectores siguientes:
(a) $(a, 0) + (0, b)$;
(b) $(a + 1, b - 1) + (a - 1, b + 1)$;
(c) $(x + y, x - y) + (-x, y)$.

16.4 Calcule cada una de las sumas de vectores siguientes:
(a) $(a, 0, 0) + (0, 0, c) + (0, b, 0)$;
(b) $(a - 3, b + 5, c - 2) + (8, -b, 2 + c)$;
(c) $(x - y, a - b, r - s) + (y - z, b - c, s - t) + (z - x, c - a, t - r)$.

16.5 ¿Cuál es el inverso aditivo de cada uno de los siguientes vectores?
$(3, -3)$; $(0, 1)$; $(2, 5)$; $(-1, 1)$; $(-3, -2)$; $(0, 1, 0)$;
$(1, 1, -1)$; $(3, -4, -5)$; $(0, 0, -2)$; $(3, 5, 7)$.

16.6 Para cada vector X haga un esquema que muestre la interpretación geométrica de X, $-X$, $X + X$, $X + X + X$, y $X + X + X + X$.
(a) $X = (1, 2)$; (b) $X = (-3, 1)$; (c) $X = (1, 1, 1)$.

16.7 Mediante el empleo de regla y compás halle una interpretación geométrica para cada una de las sumas de vectores siguientes:
(a) $(0, 1) + (3, 2)$; (b) $(1, 0) + (2, 1)$;
(c) $(-1, 2) + (-1, -1)$; (d) $(-1, 2) - (1, 1)$

16.8 (a) Demuestre que la adición de vectores bidimensionales es asociativa.
(b) Demuestre que la adición de vectores tridimensionales es conmutativa.
(c) Demuestre que la adición de vectores tridimensionales es asociativa.

16.9 Si escribimos $(3, -2) = (1, 0) + (1, 0) + (1, 0) - (0, 1) - (0, 1)$, expresamos el vector $(3, -2)$ como una suma usando solamente los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y sus opuestos.
(a) Exprese $(5, 4)$ como una suma usando sólo $(1, 0)$ y $(0, 1)$.
(b) Exprese $(-3, 2)$ como una suma usando sólo $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

16.10 (a) Exprese $(7, 1)$ como una suma usando sólo $(3, 2)$ y $(2, 5)$
(b) Exprese $(7, 3)$ como una suma usando sólo $(3, 2)$ y $(4, 3)$.
(c) Exprese $(-6, 6)$ como una suma usando sólo $(1, 2)$ y $(7, 5)$.

16.11 (a) Exprese $(3, -2, 1)$ como una suma usando sólo $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
(b) Exprese $(5, 2, -1)$ como una suma usando sólo $(1, 2, 3)$ y $(3, 2, 1)$.

16.12 Demuestre que $(5, 3)$ no puede ser expresado como una suma usando sólo $(2, 5)$ y $(6, 15)$.

16.13 Demuestre que $(3, 4, 5)$ no puede expresarse como una suma usando sólo $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

16.14 (a) Represente gráficamente el conjunto de los vectores $\{(a, b) : b = 2a\}$.
(b) Represente gráficamente el conjunto de los vectores $\{(a, b) : a + b = 0\}$.

16.15 El conjunto de los vectores $\{(x, y) : x = y\}$ se llama la diagonal.
(a) Demuestre que si X y Y son vectores que están sobre la diagonal (esto es, pertenecen a la diagonal) y Z es un vector que no está sobre la diagonal, entonces
(i) $X + Y$ está sobre la diagonal,
(ii) $Y - X$ está sobre la diagonal,
(iii) $X + Z$ no está sobre la diagonal.
(b) Dé un ejemplo de dos vectores que no estén sobre la diagonal, pero cuya suma sí esté sobre la diagonal

16.16 (a) Demuestre que si (a, b) es cualquier vector entonces $(a, b) + (b, a)$ está sobre la diagonal.
(b) Demuestre que un vector (a, b) está sobre la diagonal si y sólo si $(a, b) = (b, a)$.

16.17 Si trasladamos todo el plano 3 unidades a la derecha y luego 4 unidades hacia arriba lo tendremos en una nueva posición en la cual lo hubiéramos podido colocar con una sola traslación. ¿Qué traslación única nos hubiera dado el mismo resultado? ¿A qué distancia de la posición original está el nuevo origen?

17 APLICACIONES DE LA ADICION DE VECTORES

Esta sección está dedicada a algunas aplicaciones físicas de la noción de adición de vectores. Esas aplicaciones requieren que conozcamos la noción de longitud de un vector y además debemos definir longitud y dar su interpretación geométrica.

En primer lugar debemos decir algo sobre la noción de raíz cuadrada. Hemos probado (teorema 13.4) que si a es un número no negativo, existe entonces un número no negativo x tal que $x^2 = a$. El número x es, de hecho, único, porque si y es no negativo y $y^2 = a$, entonces $x^2 = y^2$; por consiguiente $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$, por lo cual $x = y$ o $x = -y$ y en el caso de ser $x = -y$ entonces $x = y = 0$ porque tanto x como y se presupone que son no negativos.

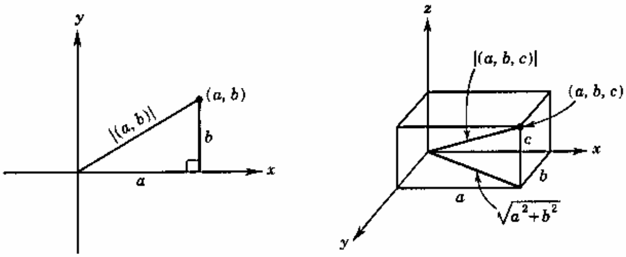


Figura 17.1

17.1 Definición. Para todo número no negativo a, la raíz cuadrada de a, $\sqrt{a}$, es el único número no negativo tal que $(\sqrt{a})^2 = a$.

Hay un punto que es necesario recalcar. El número $\sqrt{a}$ es el número no negativo cuyo cuadrado es a; así $\sqrt{4} = 2$, y es falso que $\sqrt{4} = \pm 2$. Con el objeto de saber que un número b es igual a $\sqrt{a}$, donde a es un número no negativo, debemos saber que b es no negativo y que $b^2 = a$. Por ejemplo, si c y d son números no negativos entonces $\sqrt{cd}$ es igual a $\sqrt{c}\sqrt{d}$ porque este producto es no negativo y porque $(\sqrt{c}\sqrt{d})^2 = \sqrt{c}\sqrt{d}\sqrt{c}\sqrt{d} = (\sqrt{c})^2 (\sqrt{d})^2 = cd$.

Deseamos hacer resaltar que en general *no* es cierto que $\sqrt{a^2}=a$; por ejemplo,

$$\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1;$$

desde luego, si a es no negativo entonces $\sqrt{a^2} = a$; si a es negativo, entonces $-a$ es positivo y $(-a)^2 = a^2$, de modo que $\sqrt{a^2} = -a$. Esto es,

$$\sqrt{a^2} = a \quad \text{si} \quad a \geq 0, \quad \text{y}$$
$$\sqrt{a^2} = -a \quad \text{si} \quad a < 0.$$

El número $\sqrt{a^2}$ para el cual precisamente hemos hallado una descripción alterna se llama el valor absoluto de a, o la longitud del vector unidimensional a.

17.2 Definición. El valor absoluto de un número a, que se escribe $|a|$ es a si $a \geq 0$, y es $-a$ si $a < 0$; en forma equivalente, $|a| = \sqrt{a^2}$.

Luego de esta larga digresión, volvemos a la noción de longitud de un vector.

17.3 Definición. La longitud de un vector bidimensional (a, b), que se designa $|(a, b)|$, es $\sqrt{a^2 + b^2}$. La longitud $|(a, b, c)|$ de un vector tridimensional (a, b, c) es $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Hay una interpretación geométrica muy sencilla de la longitud de un vector; es simplemente la distancia del vector al origen. La figura 17.1 y el teorema de Pitágoras deben ser suficientes para convencernos que esto es cierto.

Pasamos ahora a describir algunas aplicaciones físicas de la noción de adición de vectores. Con frecuencia se dice que un vector es "algo" que tiene longitud, dirección y sentido. La "longitud" aquí mencionada es justamente la longitud que hemos definido; la imagen de una flecha que tiene su origen en el vector cero y su extremo en el punto A nos ayudará a comprender la noción intuitiva de "dirección y sentido" del vector A.* Sabiendo la longitud de un vector, ciertamente ésta no lo describe totalmente; también se necesitan la dirección y el sentido hacia el cual apunta la flecha.

Daremos cuatro ejemplos del uso de la adición de vectores.

17.4 Ejemplo. Los desplazamientos pueden interpretarse como vectores. Considérese, por ejemplo, el siguiente problema. Un caminante al final del primer día está a 7 millas al Este y 4 millas al Norte de su posición inicial; al finalizar el segundo día está a 10 millas al Este y 2 millas al Sur de la posición que tenía al final del primer día; y al finalizar el tercer día está a 1 milla al Oeste y 11 millas al Norte respecto de su posición al finalizar el día anterior. ¿Cuál es su posición al finalizar el tercer día respecto de su posición inicial?

* Por "sentido" se entiende cada una de las dos posibilidades de recorrer una dirección. (Nota de los T.)

Si usamos un sistema de coordenadas en el cual el sentido positivo en la dirección y indica el Norte y el sentido positivo en la dirección x el Este, entonces los "desplazamientos" efectuados por el caminante en los tres días sucesivos están representados por los vectores $(7, 4)$, $(10, -2)$ y $(-1, 11)$, respectivamente. Su desplazamiento total es, en este caso, precisamente el vector suma $(7, 4) + (10, -2) + (-1, 11) = (16, 13)$. Esto es, su posición al finalizar el tercer día está 16 millas al Este y 13 millas al Norte de su posición inicial (véase la figura 17.2). ▌

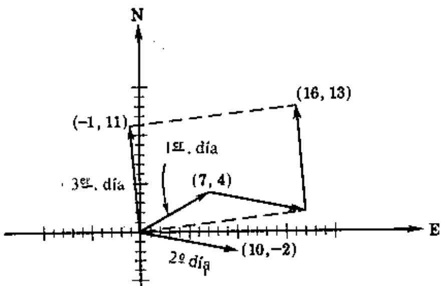


Figura 17.2

17.5 Ejemplo. Con los métodos que ahora están a nuestra disposición, el siguiente ejemplo sólo puede resolverse gráficamente. Supóngase que un barco navega en una dirección 40° al Norte del Este durante 100 millas y luego navega hacia el Norte 80 millas. ¿Cuál es su posición al final respecto de su posición inicial? La figura 17.3 muestra los dos desplazamientos vectoriales y su vector suma. Si interpretamos esta figura, hallaremos que la posición final es aproximadamente 70 millas al Este y 150 millas al Norte de la original. ▌

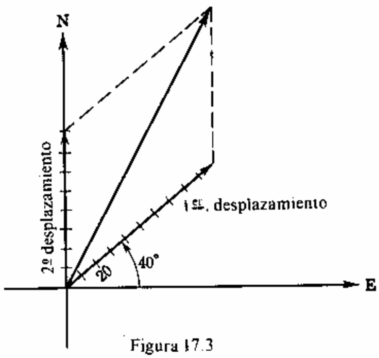


Figura 17.3

17.6 Ejemplo. La velocidad, en el sentido físico es un vector; la velocidad de un objeto se representa por una flecha cuya longitud es proporcional a la rapidez (que se puede leer en el velocímetro), y cuya dirección y sentido son los del movimiento. Lo interesante es que las velocidades se "suman" por medio de la adición vectorial. Considérese el siguiente problema: un aeroplano se dirige hacia el Norte a una velocidad (con respecto al aire que es lo que puede leerse en el tablero del aeroplano) de 300 millas por hora, mientras un viento de 80 millas por hora sopla en dirección 30° al Oeste del Norte. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano con respecto a la tierra?

La figura 17.4 muestra una solución gráfica para la velocidad con respecto a la tierra. Es fácil ver intuitivamente por qué la velocidad aumenta de esta manera. En una hora el aeroplano debería moverse 300 millas al Norte en la masa de aire y el aire mismo debería moverse 80 millas en la dirección 30° al Oeste del Norte con respecto a la tierra. Entonces el aeroplano respecto de la tierra deberá moverse justamente el vector suma de esos dos desplazamientos. ▌

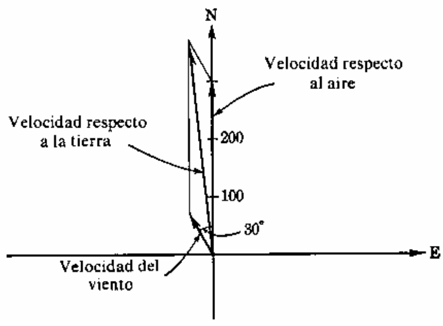


Figura 17.4

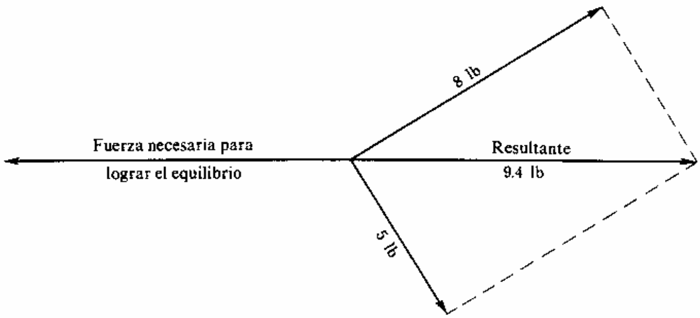


Figura 17.5

17.7 Ejemplo. Las fuerzas son vectores y se "suman" por adición vectorial. Considérese el siguiente problema. Supóngase que hay dos cuerdas atadas a una estaca en el centro de una mesa y que forman ángulo recto entre sí. Cada cuerda va sobre una polea al extremo de la mesa y una cuerda sostiene un peso de 5 libras-peso* y la otra uno de 8 libras-peso. El problema es: ¿es posible atar una cuerda adicional única a la estaca de modo que se deslice sobre la polea en alguna dirección, y atar a ésta un peso de modo que los tres pesos queden en equilibrio? Experimentalmente esto es posible, y la dirección de la tercera cuerda y la medida del peso se puede calcular así: Dibújese a lo largo de cada cuerda un vector cuya longitud sea proporcional al peso que soporta la cuerda (véase la figura 17.5); el vector suma (llamado la resultante) representa un peso y una dirección que actúa justamente como la combinación de los dos pesos componentes. Para equilibrar el sistema necesitamos un peso igual aplicado en la misma dirección y en sentido opuesto. Otra manera de enunciar esta regla es: un sistema de fuerzas está en equilibrio si la suma de los vectores correspondientes es 0. ▌

Todos los ejemplos anteriores se refieren a la adición de dos vectores bidimensionales; sin embargo, la adición de vectores tridimensionales tiene el mismo tipo de aplicaciones. Considérese por ejemplo un punto en un puente en donde concurren varias vigas. Cada una de las vigas ejercerá alguna fuerza sobre la unión (empalme) que depende del peso y de la construcción del puente. Además, esas fuerzas deben estar en equilibrio (de lo contrario el empalme se desplazaría). Es necesario calcular previamente la fuerza que se ejercerá sobre la unión y sobre las vigas para poder usar vigas de resistencia suficiente. Es obvio que el cálculo de esas fuerzas necesita el uso de la adición vectorial. No consideramos aplicaciones tridimensionales, en primer lugar, porque la misma clase de ideas se pone de manifiesto en el caso de dos dimensiones y, en segundo lugar, porque el dibujo de diagramas de figuras en tres dimensiones es más difícil.

* Entre matemáticos y físicos.

PROBLEMAS

17.1 Reemplace cada signo de interrogación impreso por el número correcto.

(a) $|-1| = ?$ (b) $|\pi| \doteq ?$ (c) $|5 - 7| = ?$

(d) $\begin{vmatrix} 3 - 6 \\ 2 - 1 \end{vmatrix} = ?$

17.2 ¿Cuál es la longitud de cada uno de los siguientes vectores?

(a) $(1, 1)$; (b) $(2, 2)$; (c) $(3, 4)$;
(d) $(-3, -4)$; (e) $(1, \sqrt{3})$;
(f) $(1, -\sqrt{3})$; (g) $(1, \sqrt{3}) + (1, -\sqrt{3})$;
(h) $(2, -3) + (-2, 3)$; (i) $(1, 1) + (2, 2)$.

17.3 ¿Cuál es la longitud de cada uno de los siguientes vectores?

(a) $(1, 1, 1)$; (b) $(1, 2, 2)$; (c) $(1, 0, 0)$;
(d) $(0, 1, 0)$; (e) $(0, 0, 1)$; (f) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

17.4 Demuestre que para todos los números a y b,

(a) $|-a| = |a|$; (b) $|a - b| = |b - a|$, y
(c) $|a| \geq a$.

17.5 Demuestre que si a y b son números y $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces, $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$.
17.6 Muestre mediante un ejemplo que aunque a y b sean números y $a \geq 0$, $b \geq 0$, puede suceder que $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
17.7 Demuestre que si a y b son números y $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, entonces $a = 0$, o $b = 0$.
17.8 Demuestre que para todos los números a y b, $|a||b| = |ab|$.
17.9 Demuestre que si b y x son números y $b \geq 0$, entonces $b|x| = |bx|$.
17.10 Demuestre que si a y b son números y $b \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{|b|} = \left|\frac{1}{b}\right|$$

y

$$\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|.$$

17.11 Un estudiante escribe $8 = |-3|5 \quad 7|-2| = 1$.
¿Dónde está el error?
17.12 Un estudiante escribe

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 1} \\ &= \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x+1)^2} \\ &= (x - 1) - (x + 1) = -2. \end{aligned}$$

Después hace $x = 0$ para obtener $1 \quad 1 = 0 = \quad 2$
¿Dónde está el error?
17.13 Demuestre que el conjunto P de los números positivos es $\{x \mid x \neq 0$ y $|x| = x\}$.
17.14 Muestre con ejemplos que

$|a - b| < |a + b|$ es posible

y que

$|a - b| > |a + b|$ es posible

17.15 Demuestre que si a y b son números, entonces $|a - b| = |a + b|$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.
17.16 Represente gráficamente cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = |x|$; (b) $g(x) = |x + 1|$;
(c) $h(x) = |x - 1|$; (d) $j(x) = |x| + 1$;
(e) $k(x) = |x| - 1$; (f) $l(x) = |x| + x$.

17.17 Demuestre que para todos los números a y b,

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

17.18 Demuestre que para todos los números a y b,

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

17.19 Una estaca está colocada en el origen de un plano coordenado. Supóngase que hay hombres parados en puntos del plano tirando la estaca hacia sí mismos con fuerzas iguales, en libras, a la distancia que están de ella. Si el señor A está parado en $(3, 4)$ y el señor B en $(3, -4)$, ¿dónde estará parado el señor C para que las fuerzas sobre la estaca sean iguales en todas direcciones?
17.20 Un barco se dirige hacia el Norte impulsándose a 8 millas por hora. Un viento sopla hacia el Este a razón de 6 millas por hora ¿Con qué velocidad se está moviendo el barco? Haga un dibujo poniendo el barco en $(0, 0)$ y mostrando mediante un vector la velocidad del barco.
17.21 Un río de 1 milla de ancho corre hacia el Sur a velocidad de 2 millas por hora. Una caja vacía arrojada al agua en la banda oriental, se mueve a 1 milla por hora en dirección Oeste en el agua debido al viento. ¿A qué distancia estará la caja antes de tocar la orilla opuesta y cuánto tiempo gastará para lograrlo?

18 MULTIPLICACION ESCALAR Y LONGITUD

Ya que hemos definido la adición de vectores con buen éxito, es natural intentar definir la multiplicación de vectores. En esta sección, que es la primera parte de un intento en este sentido, definimos la multiplicación de un vector por un número. Anticipamos lo anterior admitiendo que la multiplicación de dos vectores es un poco más complicada que la adición y que lograremos éxito sólo en espacios de dos dimensiones; nos contentamos citando el teorema en virtud del cual una multiplicación vectorial (en el sentido que se definirá posteriormente) es imposible excepto en el caso de dos dimensiones.

Aunque la multiplicación de un vector por otro presenta alguna dificultad, hay una manera muy sencilla de multiplicar un vector por un número. Parece muy razonable que $2(4, 5, 3)$ sea lo mismo que $(4, 5, 3) + (4, 5, 3) = (8, 10, 6)$ y que $3(4, 5, 3)$ sea $(4, 5, 3) + (4, 5, 3) + (4, 5, 3) = (12, 15, 9)$. También parece que $\frac{1}{2}(8, 6, 10)$ sea $(4, 3, 5)$, ya que el doble de este vector es $(8, 6, 10)$. En general, multiplicaremos un vector por un número multiplicando cada una de las componentes del vector por tal número.

18.1 Definición. El producto escalar de un número r por un vector bidimensional (a, b), designado por $r(a, b)$, es el vector (ra, rb); el producto escalar de r por el vector (a, b, c), designado por $r(a, b, c)$ es el vector (ra, rb, rc). Un escalar es un número.

Digamos primero una palabra sobre el término "escalar". Ha sido tradicional llamar a un número un "escalar" al estudiar la multiplicación escalar. En estudios más avanzados de matemática hay espacios vectoriales de una clase más complicada donde los objetos fundamentales serán algo diferente a números y esos objetos también se llaman escalares.

Existen ciertas propiedades algebraicas útiles de la multiplicación escalar que enumeraremos en los teoremas siguientes. Las demostraciones de la mayoría de esos teoremas se dejan para que las haga el lector. (Véanse los problemas al final de la sección.)

18.2 Teorema. Si X es un vector, entonces $1X = X$ y $0X = 0$.

Así, $1(3, 4) = (1 \cdot 3, 1 \cdot 4) = (3, 4)$ y $0(3, 4) = (0 \cdot 3, 0 \cdot 4) = (0, 0) = 0$.

Obsérvese que en la expresión "$0X = 0$" el primer "0" se refiere al número 0 y el segundo se refiere al vector cero.

18.3 Teorema. Si r y s son números y X es un vector, entonces $r(sX) = (rs)X$. Así, por ejemplo, $2(5(3, 4)) = 2(15, 20) = (30, 40)$ y $(2 \cdot 5)(3, 4) = 10(3, 4) = (30, 40)$.

18.4 Teorema. Para cada número r y para cada vector X, $(-r)X = -(rX)$.

Así, $(-2)(3, 4) = (-6, -8)$ y $-(2(3, 4)) = -(6, 8) = (-6, -8)$.

18.5 Teorema. Para cada número r y para todos los vectores X y Y, $r(X + Y) = rX + rY$.

Así, $2((3, 4) + (-1, 5)) = 2(2, 9) = (4, 18)$ y $2(3, 4) + 2(-1, 5) = (6, 8) + (-2, 10) = (4, 18)$.

18.6 Teorema. Si r y s son números y X es un vector, entonces $(r + s)X = rX + sX$.

Demostración. Vamos a probar el teorema para vectores bidimensionales. Si X es un vector bidimensional, entonces $X = (a, b)$ para algunos números a y b. Luego, $(r + s)X = (r + s)(a, b) = ((r + s)a, (r + s)b) = (ra + sa, rb + sb) = (ra, rb) + (sa, sb) = r(a, b) + s(a, b) = rX + sX$, siendo las razones sucesivas de esas igualdades: identidad lógica, definición de multiplicación escalar, propiedad distributiva de la multiplicación de números, definición de adición de vectores, definición de multiplicación escalar e identidad lógica. ▌

Varios de los teoremas precedentes parecen axiomas para números y en efecto, la misma terminología se emplea a veces. El teorema 18.3 se enuncia algunas veces como "multiplicación de números asociada a la multiplicación escalar" y el teorema 18.5, "la multiplicación por un escalar fijo es distributiva sobre la adición vectorial". Todo lo dicho sobre los teoremas precedentes parece muy natural y los hace fáciles de usar. Es indispensable que el lector adquiera pericia razonable en el cálculo con multiplicación escalar y para ello le damos un ejemplo.

18.7 Ejemplo. Tomemos como problema simplificar la siguiente expresión: (esto es, escribirla como una terna de números)

$$x(2, 3, -1) + (y + 1)(-4, 5, -2).$$

Ejecutaremos el cálculo en dos formas, citando razones para los pasos que comprendan adición vectorial o multiplicación escalar y omitiendo las razones de aquellos pasos que comprenden sólo las propiedades de los números.

$$\begin{aligned} &x(2, 3, -1) + (y + 1)(-4, 5, -2) = \\ &(2x, 3x, -x) + (-4(y + 1), \\ &5(y + 1), -2(y + 1)) \end{aligned}$$

por la definición de multiplicación escalar,

$$\begin{aligned} &= (2x, 3x, -x) + (-4y - 4, \\ &\quad 5y + 5, -2y - 2) \end{aligned}$$

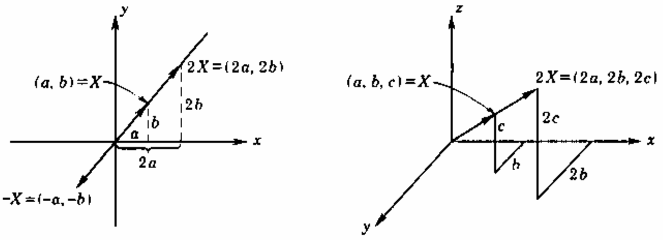


Figura 18.1

$$= (2x - 4y - 4, 3x + 5y + 5, -x - 2y - 2)$$

por la definición de adición vectorial.

Alternativamente

$$x(2, 3, -1) + (y + 1)(-4, 5, -2) = x(2, 3, -1) + [y(-4, 5, -2) + 1(-4, 5, -2)]$$

por el teorema 18.6 .

$$= (2x - 4y - 4, 3x + 5y + 5, -x - 2y - 2)$$

por las definiciones de multiplicación y adición vectorial. ∎

Quisiéramos tener una interpretación geométrica de la multiplicación escalar y tal interpretación no es difícil de hallar. Considérese la figura 18.1. Esta figura sugiere que si se traza una recta de modo que pase por el origen y contenga al vector X, entonces $2X$ está sobre esa recta a doble distancia del origen que el vector X, $3X$ está a una distancia tres veces mayor del origen que X, y del extremo de X al extremo de $3X$ hay una distancia igual a dos veces la longitud de X; $-X$ está sobre la misma recta que X, pero del lado opuesto respecto del origen y dista $|X|$ del origen, y así sucesivamente. Esta interpretación es intuitivamente correcta. Sin embargo, deseamos quedar completamente seguros en este paso y poder probar teoremas sobre rectas y distancias. Desgraciadamente no hemos definido las palabras "recta" ni "distancia". No obstante, el último teorema de esta sección confirma nuestra sospecha sobre la longitud de un múltiplo escalar de un vector.

18.8 Teorema. Si X es un vector y r es un número, entonces $|rX| = |r|\,|X|$.

Demostración. Damos la prueba en el caso de que X sea un vector tridimensional. Si $X = (a, b, c)$, entonces

$$|rX| = |r(a, b, c)| = |(ra, rb, rc)|$$
$$= \sqrt{r^2a^2 + r^2b^2 + r^2c^2} = \sqrt{r^2(a^2 + b^2 + c^2)}$$
$$= \sqrt{r^2}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = |r|\,|(a, b, c)| = |r|\,|X|. \quad ∎$$

PROBLEMAS

18.1 Simplifique cada una de las siguientes sumas de vectores (es decir, exprese en la forma (a, b) siendo a y b números).

(a) $5(0, 1) + 3(1, 0)$; (b) $e(0, 1) + \pi(1, 0)$;
(c) $2(4, 8) + 4(8, 2)$;
(d) $3(2, 1) + 2(1, 3) + 1(3, 2)$.

18.2 Simplifique cada una de las siguientes sumas de vectores.

(a) $a(b, c) + b(c, a) + c(a, b)$;
(b) $2(x, y) + 3(-x, y + 1) - (1 - x, 2 + 5y)$.

18.3 Simplifique cada una de las siguientes sumas de vectores.

(a) $(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1)$;
(b) $a(a, 0, 0) + b(0, b, 0) + c(0, 0, c)$;
(c) $\pi(1, 2, 3) - 3\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

18.4 ¿Para qué números x y y tenemos $x(3, 2) + y(2, 3) = (17, 13)$?

18.5 ¿Para qué números x, y y z tendremos

$$x(1, 2, 0) + y(0, 3, 1) + z(-1, 0, 1) = (2, 1, 0)?$$

18.6 Demuestre que si x es un vector bidimensional y r es un número, entonces $|rX| = |r||X|$.
18.7 Demuestre que $|-X| = |X|$ para todos los vectores X.
18.8 Demuestre (teoremas 18.2 a 18.5) que si r y s son números y X y Y vectores bidimensionales, entonces

(a) $1X = X$ y $0X = 0$; (b) $r(sX) = (rs)X$;
(c) $(-r)X = -(rX)$;
(d) $r(X + Y) = rX + rY$.

18.9 Demuestre que si r y s son números y X y Y vectores, entonces

(a) $r(X - Y) = rX - rY$
(b) $(r + s)(X + Y) = rX + sX + rY + sY$
(c) $(r - s)(X - Y) = rX - sX - rY + sY$.

18.10 Demuestre que si X es un vector, r y s son números, y $X \neq 0$, entonces $rX = sX$ sólo si $r = s$.
18.11 Dado un vector bidimensional A, definimos la función traslación T_A para todos los vectores bidimensionales X por $T_A(X) = X + A$. Demuestre que si $A + B + C = 0$, entonces para todo X, $T_A(X) + T_B(X) + T_C(X) = 3X$ y $T_A(T_B(T_C(X))) = X$.
18.12 Dé un ejemplo de tres vectores tridimensionales X, Y, Z que tengan componentes enteras tales que $|X| = |Y| = |Z| \neq 0$ y $X + Y + Z = 0$.

19. LONGITUD Y DISTANCIA

La definición de distancia se basa en el concepto de longitud y comenzaremos por establecer algunas propiedades de las longitudes de los vectores. Ya hemos demostrado la segunda aseveración del siguiente teorema que repetimos simplemente a manera de referencia.

19.1 Teorema. (a) La longitud de un vector X es no negativa, y es 0 si y sólo si X es el vector cero.

(b) Si X es un vector y r un escalar, entonces $|rX| = |r||X|$.

Demostración. Demostramos (a) para el caso de ser X un vector bidimensional. Entonces $X = (a, b)$ para algunos números a y b y $|X| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si a o b son diferentes de cero, su cuadrado es positivo; la suma de este número positivo y un cuadrado (que es no negativo) es positiva, y la raíz cuadrada que es $|X|$, es positiva. Si tanto a como b son 0, entonces $|X| = \sqrt{0} = 0$. ▌

La siguiente proposición tiene una interpretación geométrica muy sencilla (véase la figura 19.1). Dice que la longitud de un lado de un triángulo es a lo sumo igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados. Demostremos el teorema para vectores bidimensionales por medio de un cálculo bastante engorroso. En el

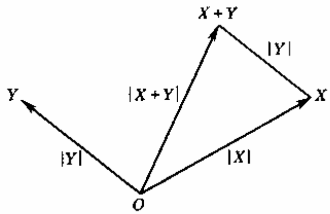


Figura 19.1

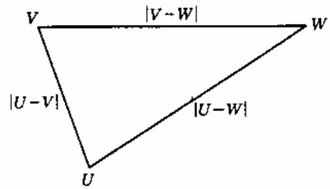


Figura 19.2

capítulo siguiente daremos una "buena" demostración que se basa en sencillas propiedades geométricas del producto interior de vectores que se estudiará en el próximo capítulo.

19.2 Teorema. Si X y Y son vectores, entonces $|X + Y| \leq |X| + |Y|$.

Demostración. Los números que están en ambos lados de la desigualdad son no negativos y por esto es suficiente probar que $|X + Y|^2 \leq (|X| + |Y|)^2 = |X|^2 + 2|X||Y| + |Y|^2$. Si $X = (a, b)$ y $Y = (r, s)$, debemos comprobar que $(a + r)^2 + (b + s)^2 \leq a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{r^2 + s^2} + r^2 + s^2$, lo cual, después de una pequeña manipulación algebraica nos permite demostrar que

$$ar + bs \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{r^2 + s^2}.$$

El número que se encuentra a la derecha de la desigualdad es no negativo, y en consecuencia, basta demostrar que su cuadrado es mayor o igual que el cuadrado del número de la izquierda. De esta suerte debemos demostrar que

$$(ar + bs)^2 = a^2r^2 + 2arbs + b^2s^2 \leq (a^2 + b^2)(r^2 + s^2)$$

$$= a^2r^2 + a^2s^2 + b^2r^2 + b^2s^2.$$

Después de una pequena manipulación la prueba se reduce a mostrar que $a^2s^2 - 2arbs + b^2r^2$ es no negativo, pero este número es sencillamente $(as - br)^2$ y es entonces no negativo. ▌

La distancia entre dos vectores (o dos puntos si se prefiere) se define como la longitud del vector diferencia:

19.3 Definición. La distancia de un vector U a un vector V es la longitud $|U - V|$ del vector $U - V$.

Así, la distancia de $(1, 2, -4)$ a $(-1, 4, -3)$ es $|(1, 2, -4) - (-1, 4, -3)| = |(2, -2, -1)| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Las propiedades importantes relativas a distancias se demuestran fácilmente en base a propiedades correspondientes relativas a longitudes de vectores. Las enumeraremos en seguida; en los problemas de esta sección se piden las demostraciones.

19.4 Teorema. La distancia entre los vectores U y V es no negativa, y es cero si y sólo si $U = V$.

19.5 Teorema. Si U y V son vectores, entonces $|U - V| = |V - U|$.

19.6 Teorema. Desigualdad triangular. Si U, V y W son vectores, entonces

$$|U - V| + |V - W| \geq |U - W|.$$

El último teorema tiene una interpretación geométrica sencilla de la cual deriva su nombre. Considérense tres vectores U, V y W (véase la figura 19.2) y obsérvese que los lados del triángulo con vértices U, V y W tienen longitudes iguales a las distancias $|U - V|$, $|V - W|$, y $|U - W|$, respectivamente. La aseveración de que $|U - V| + |V - W|$ es mayor que, o igual a $|U - W|$ es precisamente la afirmación de que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es al menos igual a la longitud del tercer lado. Este es el mismo hecho intuitivo que se enuncia algunas veces en geometría al decir que "una recta es la distancia mínima entre dos puntos".

Concluimos la sección con un problema que muestra cómo puede aplicarse la noción de distancia para dar las fórmulas algebraicas de algunos problemas geométricos. *

19.7 Ejemplo. Recordemos que en un espacio bidimensional el círculo de radio r con centro en A se define como el conjunto de todos los puntos cuya distancia de A es igual a r. Preguntamos: (i) ¿Pertenece $(3, 1)$ al círculo de radio 5 con centro $(-2, 2)$? (ii) ¿Existe una ecuación que comprenda un vector x que sea correcta si y sólo si x pertenece al círculo?

Para responder la primera pregunta debemos decidir, en vista de la definición de círculo, si la distancia de $(3, 1)$ a $(-2, 2)$ es o no igual a 5. Pero esta distancia es $|(3, 1) - (-2, 2)| = |(5, -1)| = \sqrt{26} \neq 5$, y, en consecuencia, el punto no pertenece al círculo.

Para responder la segunda pregunta observamos que un vector X pertenece al círculo si y sólo si su distancia desde $(-2, 2)$ es igual a 5; es decir, si y sólo si $|X - (-2, 2)| = 5$. Así, $|X - (-2, 2)| = 5$ es la ecuación deseada. A esta ecuación se le llama a veces ecuación vectorial del círculo para distinguirla de la ecuación escalar que podemos obtener del modo siguiente. Si $X = (x, y)$, entonces $|X - (-2, 2)| = |(x, y) - (-2, 2)| = |(x + 2, y - 2)| = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2}$, y por tanto (x, y) pertenece al círculo si y sólo si $\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2} = 5$, y esto sucede si y sólo si $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$. ▌

* Este problema, tanto como algunos de los enumerados en el problema que se encuentra al final de la sección, constituye una digresión en el sentido de que no son necesarios para ulteriores desarrollos.

PROBLEMAS

19.1 ¿Cuál es la distancia de X a Y en cada caso?

(a) $X = (0, 1)$ y $Y = (1, 0)$;

(b) $X = (3, 0)$ y $Y = (0, 4)$;

(c) $X = (5, 2)$ y $Y = (2, 6)$.

19.2 ¿Cuál es la distancia de X a Y en cada caso?

(a) $X = (1, 1, 1)$ y $Y = (1, -1, 1)$;

(b) $X = (2, 1, 1)$ y $Y = (1, 2, -1)$.

19.3 Demuestre que la distancia del vector (x_1, y_1) al vector (x_2, y_2) es $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, y establezca y pruebe una fórmula similar para la distancia entre los vectores tridimensionales (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2).

19.4 Demuestre el teorema 19.4: La distancia entre los vectores U y V es no negativa y es cero si y sólo si $U = V$.

19.5 Demuestre que si U y V son vectores y r es un escalar, entonces $|rU - rV| = |r||U - V|$. Muestre a partir de esto (teorema 19.5) que

$$|U - V| = |V - U|.$$

19.6 Demuestre el teorema 19.6: si U, V y W son vectores, entonces

$$|U - V| + |V - W| \geq |U - W|.$$

19.7 Demuestre, utilizando el teorema 19.2, que para todos los vectores U y V

$$|U| - |V| \leq |U - V|.$$

19.8 Demuestre que si X y Y son vectores bidimensionales, entonces

$$|X + Y|^2 + |X - Y|^2 = 2(|X|^2 + |Y|^2).$$

19.9 Escriba una ecuación que incluya x y y que sea correcta si y sólo si (x, y) pertenece al círculo de centro $(-1, 1)$ y radio 5. Decida si $(2, 5)$ pertenece o no a este círculo.

19.10 Demuestre que $\{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0\}$ es un círculo y halle su centro y su radio.

19.11 Escriba una ecuación que incluya x y y y que sea correcta si y sólo si (x, y) equidista de los puntos $(-1, 2)$ y $(3, 6)$.

19.12 Describa geométricamente el conjunto

$$\{X: |X - (1, -2, 1)| = 5\}.$$

19.13 Describa geométricamente el conjunto

$$\{X: |X - (1, 3)| < 2\}.$$

19.14 Demuestre que si X y Y son vectores tridimensionales, entonces

$$|X + Y| \leq |X| + |Y|.$$

19.15 Demuestre que si $X = (a, b)$ y $Y = (r, s)$ y $as - br = 0$, entonces uno de los vectores X y Y es un múltiplo escalar del otro. A partir de este hecho, y después de examinar la prueba del teorema 19.2 demuestre que si $|X + Y| = |X| + |Y|$ entonces uno de los vectores X, Y es múltiplo escalar del otro.

19.16 Dado un vector A, definimos la función traslación T_A por $T_A(X) = X + A$ para todos los vectores X. Demuestre que $|T_A(X) - T_A(Y)| = |X - Y|$ para todos los vectores X y Y.

20 RECTAS

Tenemos, por fin, información suficiente para estudiar con eficiencia la noción de recta. Una recta, en espacios vectoriales de 2 ó 3 dimensiones, debe ser ciertamente un subconjunto de ese espacio. Debemos determinar cuáles conjuntos son rectas. El punto de partida es una interpretación geométrica de la multiplicación escalar. Parece razonable que el conjunto de los múltiplos de vectores B, diferentes de cero, debe ser una recta que pase por el origen (véase la figura 20.1). Consideremos todas las posibles sumas de la forma $A + tB$, donde A y B son

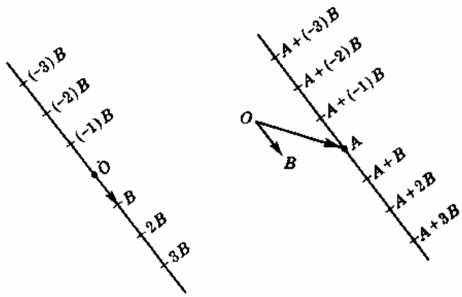


Figura 20.1

vectores fijos y t un escalar. Según la figura parece razonable suponer que el conjunto de todos esos puntos sea una recta y esto es lo que motiva la definición que adoptaremos.

Puede no ser errado hacer una pausa para explicar un poco la terminología. Se supone que una recta es un conjunto de puntos en espacios de 2 ó 3 dimensiones. Esto parece natural puesto que intuitivamente podemos concebir una recta como un conjunto de puntos. También es cierto que una recta es un conjunto de vectores, porque de acuerdo con nuestras definiciones, un vector es un par de ternas ordenado y estos son precisamente los objetos que denominamos puntos. Puede provocar reacción en algunos el hecho de que una recta sea un conjunto de vectores, pues usualmente tenemos la idea de que los vectores son flechas, y hablar de un haz de flechas que sale desde un punto 0 a cada punto de una recta se presta a confusión. Por otra parte, la noción de puntos que se "suman" puede también provocar reacciones. La dificultad aquí es un asunto de sicología e intuición. Un vector es un punto, es un par ordenado (o terna), es un ente matemático abstracto, exactamente como una rosa es una rosa. El dibujo con que ilustramos el objeto es asunto de conveniencia.

20.1 Definición. Un subconjunto L de un espacio vectorial, bien sea el plano o el espacio tridimensional, es una recta si y sólo si hay un vector A y un vector B, diferente de cero, tal que

$$L = \{ A + tB\colon t \text{ es un escalar} \}.$$

En otras palabras, un conjunto L es una recta si y sólo si podemos hallar vectores A y B, con B diferente de cero, de modo que L sea precisamente el conjunto de todos los vectores suma de A y múltiplos escalares de B. Para ilustrar esta definición damos un ejemplo.

20.2 Ejemplo. ¿Los puntos $(-10, -8)$ y $(8, 9)$ pertenecen a la recta $L = \{ (0, 1) + t\,(1, 1)\colon t$ es un escalar $\}$? En primer lugar decidamos respecto de $(-10, -8)$; si este punto pertenece a la recta, entonces $(-10, -8) = (0, 1) + t\,(1, 1)$ para algún t. Trabajando un poco la aritmética vectorial: $(-10, -8) = (0, 1) + t\,(1, 1) = (0, 1) + (t, t) = (t, 1 + t)$. Se deduce que en este caso $-10 = t$ y $-8 = 1 + t$; pero esto es claramente imposible y así podemos concluir que $(-10, -8)$ no pertenece a L. Apliquemos el mismo procedimiento para determinar si $(8, 9)$ pertenece a L. Si es así, entonces para algún t será:

$$(8, 9) = (0, 1) + t(1, 1) = (0, 1) + (t, t) = (t, 1 + t).$$

Por tanto $8 = t$ y $9 = 1 + t$, que es muy razonable. Pero esto no muestra que $(8, 9)$ pertenezca a L; muestra que si $(8, 9)$ pertenece a L, entonces el múltiplo escalar adecuado es 8. Con un paso más verificamos que $(8, 9) = (0, 1) + 8(1, 1)$ lo cual prueba que $(8, 9) \in L$. ▌

Decimos a veces que la recta $L = \{ A + tB\colon t$ es un escalar $\}$ tiene por ecuación "$X(t) = A + tB$", o que "$X(t) = A + tB$" es una ecuación paramétrica * de la recta L. Esta es una manera abreviada de indicar la situación precisa que sigue a continuación. Consideremos la correspondencia que asigna a cada número real t el vector $A + tB$. Esta correspondencia es una función cuyo dominio es el conjunto de números, y su codominio (el conjunto de sus valores) es precisamente el conjunto de puntos de la recta. Si a esta correspondencia la llamamos X, entonces X se define mediante la expresión "$X(t) = A + tB$" para cada número t, y el codominio de X es precisamente la recta L. Algunas veces se dice que "$X(t) = A + tB$" es una ecuación vectorial paramétrica, y la misma ecuación también se escribe en "la forma escalar" de la manera siguiente. En lugar de la función X cuyos valores son vectores podemos considerar las funciones correspondientes a cada coordenada y esas funciones tendrán valores escalares (numéricos). De esta manera, si $A = (a, b, c)$ y $B = (p, q, r)$, entonces

$$(x(t), y(t), z(t)) = ((a, b, c) + t(p, q, r))$$

es una ecuación de la recta, y las

$$x(t) = a + tp$$
$$y(t) = b + tq$$
$$z(t) = c + tr$$

se llaman ecuaciones escalares paramétricas de una recta. No usaremos esta clase de representación; en lo que tenemos que ver, la forma vectorial es más simple y geométricamente más natural.

* No estoy muy seguro de lo que es un parámetro, pero creo que se llama parámetro a un número cuando se piensa en un función cuyo dominio es un conjunto de números.

Es importante tener presente que una ecuación paramétrica de una recta de ningún modo es única. No examinaremos detalladamente este asunto, pero intuitivamente debe resultar bastante claro que $\{A + tB: t \text{ es un escalar}\}$ se pueda también escribir en términos de vectores distintos de A y B. Parece probable que cualquier punto que pertenezca a la recta pueda ser usado en lugar de A y que cualquier múltiplo escalar de B, distinto de cero, podría comportarse como B. Intuitivamente el vector B especifica la dirección de la recta. A pesar de esto, deseamos definir el concepto de dirección de una manera más geométrica.

20.3 Definición. Un vector V es un vector-dirección para una recta L si y sólo si existen diferentes puntos X y Y que pertenecen a L tales que $V = X - Y$ (véase la figura 20.2).

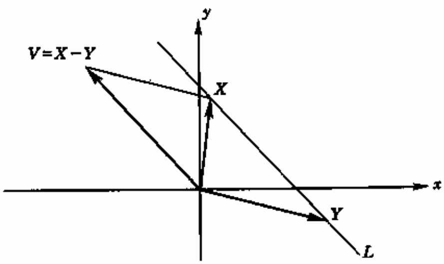


Figura 20.2

Por ejemplo, consideremos la recta $L = \{(0, 1) + t(1, 1): t \text{ es un escalar}\}$ del ejemplo 20.2. Vimos en ese ejemplo que $(8, 9) \in L$. También es cierto que $(0, 1)$ y $(1, 2) \in L$, como lo podemos ver tomando $t = 0$ y $t = 1$. Cada uno de los vectores, $(8, 9) - (0, 1) = (8, 8)$, $(8, 9) - (1, 2) = (7, 7)$, y $(0, 1) - (1, 2) = (-1, -1)$ es un vector-dirección para L.

Un vector-dirección también se llama un "conjunto de números directores". No usaremos esta terminología; un vector-dirección es, por supuesto, un par ordenado o una terna ordenada de números, pero no es un conjunto de números.

Observamos que el vector cero no es un vector-dirección para cualquier recta, puesto que un vector-dirección es la diferencia de dos vectores distintos. Muchos vectores diferentes pueden ser vectores-dirección para una misma recta, pero, como lo muestra el sencillo teorema siguiente, hay una relación estrecha entre varios vectores-dirección.

20.4 Teorema. Sea V un vector-dirección de una recta L que tiene por ecuación: $X(t) = A + tB$. Entonces V es un múltiplo escalar de B, y B es también un vector-dirección de L.

Demostración. El vector-dirección V es la diferencia de los vectores Y y Z que pertenecen a L. Por consiguiente, existen escalares s y t tales que $Y = A + sB$ y $Z = A + tB$. Entonces

$$\begin{aligned} V = Y - Z &= (A + sB) - (A + tB) \\ &= sB - tB = (s - t)B, \end{aligned}$$

y hemos mostrado que V es un escalar múltiplo de B.

Para demostrar que B es un vector-dirección de L, simplemente observamos que $X(1)$ y $X(0)$ son elementos de L, y que $X(1) - X(0) = A + B - A = B$. Así, B es la diferencia de dos elementos diferentes de L y por consiguiente es un vector-dirección de L. ▮

Una consecuencia particular de este teorema es que dos vectores-dirección cualesquiera de la misma recta de ecuación $X(t) = A + tB$ son múltiplos escalares el uno del otro, puesto que cada uno es un múltiplo escalar (distinto de cero) de B. Así, por ejemplo, encontramos que $(8, 8)$, $(7, 7)$ y $(-1, -1)$ son vectores-dirección de la recta $L = \{(0, 1) + t(1, 1): t \text{ es un escalar}\}$, y observamos que cada uno de esos vectores-dirección es un múltiplo escalar de cada uno de los otros.

Hay una interesante interpretación física de la ecuación paramétrica $X(t) = A + tV$. Pensemos en una partícula que está inicialmente en la posición A y que tiene una velocidad (constante) V; ¡después de t unidades de tiempo la posición de la partícula es $A + tV$! De este modo, se puede interpretar A como la posición inicial de una partícula, V como su velocidad y la recta podría ser llamada la huella dejada por la partícula.

Si damos un punto A y un vector-dirección V, es obvio que podemos escribir la ecuación de una recta que pasa por A con el vector-dirección B; es claro que $X(t) = A + tV$ es una ecuación de una recta que pasa por A (porque $X(0) = A$) y en vista del teorema precedente, V es un vector-dirección. Damos dos ejemplos que muestran cómo se pueden emplear estos resultados.

20.5 Ejemplo. Necesitamos hallar la ecuación de una recta que pase por $(-1, 4, 3)$ con vector-dirección $(1, -2, 7)$. Es claro que $X(t) = (-1, 4, 3) + t(1, -2, 7)$ es la ecuación de tal recta. ▌

20.6 Ejemplo. El problema consiste en hallar una ecuación de una recta que pase por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 2)$. Por la definición de vector-dirección sabemos que $(0, 1) - (1, 2) = (-1, -1)$ es un vector-dirección, y siendo $(0, 1)$ un punto de la recta, $X(t) = (0, 1) + t(-1, -1)$ es una ecuación de la recta buscada. Desde luego esta ecuación no es única; $X(t) = (1, 2) + t(1, 1)$ es también una ecuación de esa clase. La figura 20.3 nos muestra una interpretación geométrica del problema. ▌

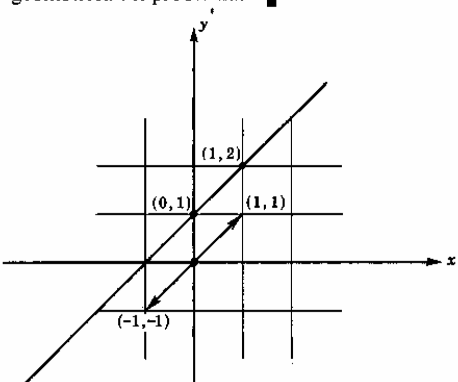


Figura 20.3

PROBLEMAS

20.1 ¿Cuáles de los siguientes puntos están sobre $\{(0, 0) + t(1, 1): t$ es un escalar $\}$?
$(3, 3)$; $(-1, 1)$; $(2, 0)$; $(-1, -1)$.

20.2 ¿Cuáles de los siguientes puntos están sobre $\{(1, 1) + t(-1, 1): t$ es un escalar $\}$?
$(0, 0)$; $(1, 1)$; $(3, -1)$; $(-3, 1)$; $(-1, 3)$.

20.3 ¿Cuáles de los siguientes puntos están sobre $\{(1, 1, 1) + t(-1, 2, 1): t$ es un escalar $\}$?
$(0, 0, 0)$; $(0, 3, 2)$; $(2, -1, 0)$.

20.4 Represente gráficamente la recta $\{(0, 0) + t(1, -1): t$ es un escalar $\}$ y señale tres puntos sobre ella.

20.5 Represente gráficamente la recta $\{(2, 3) + t(1, 2): t$ es un escalar $\}$ y señale tres puntos sobre ella.

20.6 Encuentre una ecuación (vectorial) de la recta que pasa por $(3, 4)$ y que tiene $(1, -1)$ como vector-dirección.

20.7 Encuentre una ecuación (vectorial) de la recta que pasa por $(1, 1, 1)$ y que tiene $(1, 2, 3)$ como vector-dirección.

20.8 (a) Encuentre una ecuación (vectorial) de la recta que pasa por $(0, 1)$ y $(1, 0)$.
(b) Haga lo mismo para la recta que pasa por $(0, -1)$ $(-1, 0)$.

20.9 Encuentre una ecuación (vectorial) de la recta que pasa por $(0, 1)$ y $(2, \pi)$.

20.10 (a) Encuentre una ecuación (vectorial) de la recta que pasa por $(-1, 2, -1)$ y $(0, 3, -2)$.
(b) Haga lo mismo para la recta que pasa por $(0, 2, -2)$ y $(5, -1, 3)$.

20.11 (a) ¿Están todos los puntos $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(e, 2e)$ sobre una recta?
(b) ¿Están todos los puntos $(2, 3)$, $(-866, 871)$ y $(3, 2)$ sobre una recta?

20.12 En cada caso encuentre los vectores bidimensionales A, B tales que:
(a) $\{A + tB: t$ es un escalar $\} =$ eje de x.
(b) $\{A + tB: t$ es un escalar $\} =$ eje de y.
(c) $\{A + tB: t$ es un escalar $\} =$ la diagonal que bisecta el primero y tercer cuadrantes.

20.13 (a) Demuestre que $\{(0, 0) + t(1, 2): t$ es un escalar $\} = \{(x, y): y = 2x\}$.
(b) Demuestre que $\{(1, 1) + t(-1, 2): t$ es un escalar $\} = \{(x, y): y = 3 - 2x\}$.

20.14 Demuestre que si U y V son vectores-dirección de una recta L, entonces para algún escalar r, $U = rV$.

20.15 ¿En qué punto se cortan las rectas $\{(0, 0) + t(1, 1): t$ es un escalar $\}$ y $\{(0, 2) + s(-1, 1): s$ es un escalar $\}$?

20.16 Demuestre que si U y V son vectores (ambos bidimensionales o tridimensionales) y $U \neq V$, entonces hay una y sólo una recta que pasa tanto por U como por V.

20.17 Demuestre que si P y Q son rectas (ambas en el espacio bidimensional o tridimensional) y $P \neq Q$, entonces hay por lo menos un vector X tal que $X \in P \cap Q$.

20.18 Demuestre que si A y B son vectores y $B \neq 0$, entonces existe una y sólo una recta que pasa por A y tiene a B como vector-dirección.

20.19 Considérese la recta $\{A + r(B - A): r$ es un escalar $\}$. Observe que tanto A como B pertenecen a esta recta. ¿Qué valores de r corresponden a puntos sobre la recta ubicados entre A y B?

20.20 Dé un ejemplo en forma vectorial de una recta en el espacio bidimensional a la cual no pertenezcan puntos reticulares enteros (problema 14.11).

21 CONSTRUCCIONES CON RECTAS

Esta sección está dedicada a la solución de unos pocos problemas que comprenden rectas. Se dan para familiarizar al estudiante con la noción de recta y con técnicas que incluyen la utilización de rectas. Pocas cosas de las que se estudien en esta sección se necesitarán en el trabajo posterior. Sólo haremos énfasis en la definición de vector unitario y en su construcción corriente (teorema 21.3); en la definición de rectas paralelas y en la fórmula para el punto medio de un segmento rectilíneo.

Comenzamos reconsiderando algunos resultados de las secciones anteriores. La combinación vectorial $A + rV$, donde A y B son vectores, $V \neq 0$, y r es un escalar, se encuentra sobre la recta $\{A + Vt: t$ es un escalar $\}$ y $X(t) = A + tV$ es una ecuación de esta recta. Esta recta pasa por A porque $X(0) = A$, y ésta es la recta* que pasa por A según el vector-dirección V puesto que $X(1) - X(0) = A + V - A = V$. Observemos también que la distancia de A a $A + rV$ es $|(A + rV) - A| = |rV| = |r|\,|V|$, de modo que la distancia de A a $A + rV$ es sencillamente $|r|$ multiplicado por la longitud del vector V.

Vamos a usar estos resultados para resolver un problema sencillo.

21.1 Ejemplo. Dados dos puntos diferentes, A y B, queremos hallar una fórmula para el punto medio del segmento rectilíneo AB; más precisamente, deseamos hallar un punto de la recta que pasa por A y B que sea equidistante de cada uno de ellos. Daremos dos soluciones, una geométrica y la otra algebraica.

En primer lugar, observando la figura 21.1 parece obvio que para ir de A al punto medio se necesita "atravesar" la mitad del vector $B - A$. Si se utiliza la adición vectorial, el punto medio X deberá ser $A + (\frac{1}{2})(B - A)$ que, haciendo un poco de aritmética vectorial, es $(\frac{1}{2})(A + B)$. Es fácil verificar que $(\frac{1}{2})(A + B)$ es equidistante de A y B; la distancia es, como esperábamos, justamente $(\frac{1}{2})|B - A|$.

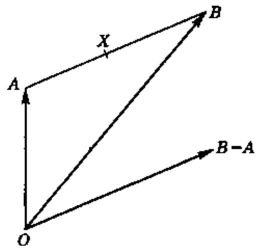


Figura 21.1

Algebraicamente, podemos proceder como sigue. Se supone que el punto medio X pertenece a la recta que pasa por A y B. El vector $B - A$ es el vector-dirección de esta recta, y por tanto hay un escalar r tal que el punto medio es $A + r(B - A)$. Puesto que el punto medio se supone equidistante de A y B, tenemos $|A + r(B - A) - A| = |A + r(B - A) - B|$. Si omitimos algún vector aritmético vemos que $|r(B - A)| = |A - B + r(B - A)|$, de donde $|r|\,|B - A| = |1 - r|\,|B - A|$, y puesto que $B - A$ no es cero, sabemos que $|r| = |1 - r|$. A partir de esto no es difícil ver (aunque omitamos los detalles) que r debe ser $\frac{1}{2}$. En fin, se puede comprobar directamente que $A + (\frac{1}{2})(B - A)$ es equidistante de A y de B.

La fórmula para el punto medio es muy conveniente. Por ejemplo, el punto medio del segmento rectilíneo trazado de $(-1, 5, 6)$ a $(3, 1, -2)$ es $(\frac{1}{2})[(-1, 5, 6) + (3, 1, -2)] = (\frac{1}{2})(2, 6, 4) = (1, 3, 2)$. ▌

El resultado del ejemplo precedente, es decir, que $(\frac{1}{2})(A + B)$ es el punto medio del segmento rectilíneo que va desde A hasta B, se emplea con mucha frecuencia de modo que es importante recordarlo. Observamos que el argumento geométrico estaba lejos de ser simple, pero el argumento algebraico nos dio información adicional; nos mostró que hay exactamente un punto sobre la recta que es equidistante de

* Decimos *la* recta aunque en el texto no hemos probado que haya sólo una recta que pase por un punto y que tenga un vector-dirección dado. Sin embargo, los problemas 20.18 y 20.16 afirman que existe precisamente una recta, y que esta recta es única, que pasa por dos puntos diferentes cualesquiera. Supondremos que el lector ha resuelto estos problemas satisfactoriamente.

los extremos, mientras el argumento geométrico escogió precisamente un punto que es el punto medio. Trataremos dos ejemplos más de naturaleza semejante, fiándonos inicialmente en argumentos geométricos.

21.2 Ejemplo. El problema consiste en hallar un punto de la recta que pasa por A y B cuya distancia a A sea el doble de la distancia B. Se deduce de la figura 21.2 que no hay uno sino dos de tales puntos: $A + (\frac{2}{3})(B - A)$ o $A + 2(B - A)$. Nos detenemos a ver si esos puntos en realidad satisfacen o no las condiciones del problema. Es claro que ambos puntos se encuentran sobre la recta que pasa por A y B porque $X(t) = A + t(B - A)$ es una ecuación de esta recta. Confrontando las condiciones de la distancia hallamos que la distancia de A a $A + (\frac{2}{3})(B - A)$ es $(\frac{2}{3})|B - A|$ y que la distancia de B a $A + (\frac{2}{3})(B - A)$ es $|B - A - (\frac{2}{3})(B - A)| = (\frac{1}{3})|B - A|$. La primera es ciertamente dos veces la segunda, y entonces $A + (\frac{2}{3})(B - A) = (\frac{1}{3})A + (\frac{2}{3})B$ satisface la condición del problema. Se puede comprobar que $A + 2(B - A)$ también resuelve el problema.

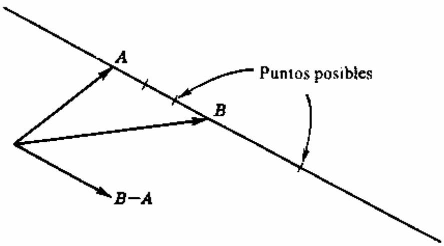


Figura 21.2

Este ejemplo puede realizarse por métodos algebraicos, tal como se hizo el ejemplo anterior. Estos métodos muestran que las dos soluciones dadas son las únicas posibles. ∎

Existe una construcción íntimamente relacionada a aquella de los dos ejemplos anteriores. Supóngase que se nos pide cómo hallar una fórmula para determinar el punto X que está a dos unidades de A en la dirección paralela y en el mismo sentido de la flecha que va de O a B, como se muestra en la figura 21.3. Si B fuese de longitud uno, el problema sería fácil de resolver; en efecto, X podría ser $A + 2B$. Es, por consiguiente, natural tratar de hallar un vector que sea un múltiplo escalar positivo de B, de modo que, hablando de una manera intuitiva, señale el mismo sentido y dirección que B, y tal que el vector tenga longitud uno. Pero es muy fácil hacer esto.

21.3 Teorema. Si B es un vector distinto de cero, entonces $(1/|B|)B$ tiene longitud unidad.

Demostración. Si r es cualquier escalar, entonces $|rB| = |r|\,|B|$; en particular, $|(1/|B|)B| = |1/|B||\,|B|$. Ahora bien, $1/|B|$ es positivo, y su valor absoluto es por tanto justamente $1/|B|$. ∎

Por ejemplo, si $B = (3, 4)$, entonces $(1/|B|)B$ es $(1/5)(3, 4) = (3/5, 4/5)$ y este vector es de longitud unidad.

Los vectores de longitud unidad resultan de uso conveniente ya que tienen nombre determinado.

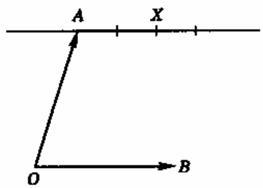


Figura 21.3

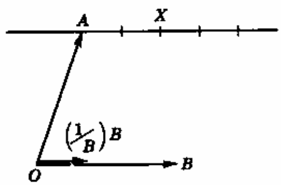


Figura 21.4

21.4 Definición. Un vector unitario es aquel cuya longitud es 1.

Volvamos al problema inicial de esta discusión. Parece evidente según la figura 21.4 que el punto situado a dos unidades de A en la dirección paralela a la de la flecha que va de O

a B debe ser $A + 2(1/|B|)B$. No es difícil verificar que este punto está, efectivamente, a dos unidades de A y, ciertamente, sobre la recta que pasa por A cuyo vector direccional es igual a B.

Resulta interesante que muchos de los teoremas de la Geometría Plana se puedan comprobar fácilmente por métodos vectoriales. Daremos ejemplos de comprobaciones de esta clase en esta sección y en la siguiente, pero antes de proceder, es necesario hacer una pequeña explicación. No necesitamos definir todas las nociones geométricas de la geometría plana, como triángulo, paralelogramo, rombo, etc., en este texto. En consecuencia, procederemos de manera informal utilizando una gran cantidad de diagramas y, contando con ellos y con experiencias anteriores, comunicaremos al estudiante las ideas requeridas. Existe, sin embargo, una definición formal y sencilla que queremos introducir.

21.5 Definición. Dos rectas son paralelas, si existe un vector que sea un vector-dirección de ambas.

De igual manera, dos rectas son paralelas si tienen vectores-dirección tales que uno sea múltiplo escalar del otro. Así, la recta $\{(0, 1) + t(1, 1): t \text{ es un escalar}\}$ es paralela a $\{(2, -2) + t(7, 7): t \text{ es un escalar}\}$, pues, por ejemplo, $(3, 3)$ es un vector-dirección para cada una de ellas; desde luego, $(1, 1)$ y $(7, 7)$ son también vectores-dirección ambas.

Finalmente, al demostrar teoremas geométricos, supondremos cuando sea conveniente que una figura se puede mover a cualquier posición en el plano, mediante un movimiento rígido. Así, en el siguiente ejemplo, primero movemos el triángulo hasta que un vértice descanse sobre el vector 0. Esto no es absolutamente esencial para una demostración, pero simplifica muchísimo las cosas.

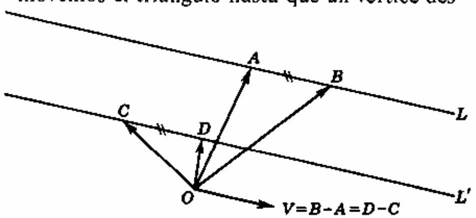


Figura 21.5

21.6 Ejemplo. Demuéstrese que el segmento rectilíneo que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de la del tercer lado. Comenzamos, como se muestra en la figura 21.6, colocando el triángulo con un vértice en O, y llamando a los otros dos vértices A y B, respectivamente. Si X es el punto medio de OA, entonces $X = (\frac{1}{2})(O + A) = (\frac{1}{2})A$ y si Y es el punto medio de OB, entonces $Y = (\frac{1}{2})B$. Así pues, la recta que pasa por X y Y tiene el vector-dirección $X - Y = (\frac{1}{2})A - (\frac{1}{2})B$, mientras la recta que pasa por A y B tiene al vector-dirección $A - B$. Puesto que uno de ellos es un múltiplo escalar del otro, se deduce que la recta XY es realmente paralela a la recta AB. Finalmente, la distancia de X a Y es $|X - Y| = (\frac{1}{2})|A - B|$ y ésta es precisamente la mitad de la distancia de A a B.

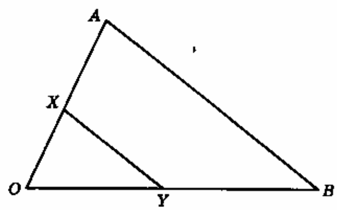


Figura 21.6

En conclusión, se puede observar que esta proposición hubiera podido demostrarse con la misma facilidad sin transportar el triángulo hasta que un vértice coincidiera con O. La figura 21.7 indica cómo hubiera podido hacerse la demostración si el triángulo estuviese en una posición "arbitraria". ▌

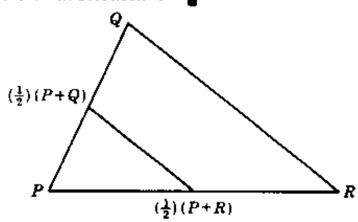


Figura 21.7

PROBLEMAS

21.1 En cada uno de los siguientes casos halle el punto medio del segmento rectilíneo entre

(a) $(0, 0)$ y $(0, 2)$; (b) $(1, 1)$ y $(3, 5)$;
(c) $(2, 1)$ y $(2, -1)$; (d) $(-1, 2)$ y $(1, -2)$.

21.2 En cada uno de los siguientes casos encuentre el punto medio del segmento rectilíneo entre

(a) $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$; (b) $(1, 1, 2)$ y $(3, 3, 0)$;
(c) $(1, 2, 3)$ y $(3, 2, 1)$; (d) $(0, 5, 7)$ y $(2, 3, 5)$.

21.3 En cada uno de los casos siguientes halle los puntos que disten de A el doble que de B en la recta que pasa por A y B.

(a) $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$;
(b) $A = (1, 1)$, $B = (1, 7)$;
(c) $A = (1, 3)$, $B = (-3, -2)$;
(d) $A = (-1, 2)$, $B = (5, -4)$.

21.4 En cada uno de los casos siguientes halle los puntos que disten de A el doble que de B en la recta que pasa por A y B.

(a) $A = (0, 0, 0)$, $B = (3, 3, 3)$;
(b) $A = (0, 1, 2)$, $B = (3, 7, 11)$;
(c) $A = (-1, 2, -1)$, $B = (5, -4, 11)$;
(d) $A = (e, \pi, \sqrt{2})$, $B = (\pi, \sqrt{3}, e)$.

21.5 En cada uno de los casos siguientes halle el punto que está a 5 unidades de A en el sentido y dirección de U.

(a) $A = (0, 1)$, $U = (1, 0)$;
(b) $A = (0, 1)$, $U = (-1, 0)$;
(c) $A = (3, 4)$, $U = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
(d) $A = (3, 4)$, $U = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

21.6 En cada uno de los casos siguientes halle el punto que está a 3 unidades de A en el sentido y dirección de U.

(a) $A = (0, 0, 0)$, $U = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
(b) $A = (1, 2, 3)$, $U = (0, 0, 1)$;
(c) $A = (-3, 2, -5)$, $U = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

21.7 En cada uno de los casos siguientes exprese X en la forma $X = rU$, donde r es un escalar y U es un vector unitario.

(a) $X = (0, \pi)$; (b) $X = (-\pi, 0)$;
(c) $X = (3, 3)$; (d) $X = (3, -3\sqrt{3})$.

21.8 En cada uno de los casos siguientes exprese X en la forma $X = rU$, donde r es un escalar y U es un vector unitario.

(a) $X = (0, 0, 3)$; (b) $X = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$;
(c) $X = (\pi, e\sqrt{5})$.

21.9 Demuestre que si r es un número y $|r| = |1 - r|$, entonces $r = \frac{1}{2}$. (Véase el ejemplo 21.1).

21.10 Demuestre que $A + \frac{2}{3}(B - A)$ y $A + 2(B - A)$ son los únicos puntos que distan el doble de A que de B sobre la recta que pasa por los dos vectores A y B. (Véase el ejemplo 21.2.)

21.11 Demuestre que si L es una recta y P es un punto, entonces sólo hay una recta que pasa por P y es paralela a L.

21.12 Dé un ejemplo de dos rectas L y R en el espacio tridimensional tales que $L \cap R = \varnothing$, pero sin que L y R sean paralelas.

21.13 Demuestre que si L y R son rectas paralelas y $L \neq R$, entonces $L \cap R = \varnothing$.

21.14 Dé un ejemplo de tres vectores unitarios A, B, y C en un espacio bidimensional, tales que $A + B + C = 0$.

21.15 Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

21.16 Demuestre que si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan mutuamente, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

21.17 Demuestre que los segmentos rectilíneos que unen los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero, forman un paralelogramo.

21.18 Demuestre que las medianas de un triángulo concurren todas en un mismo punto.

21.19 Demuestre que si dos medianas de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es isósceles.

22 ESPACIO VECTORIAL n-DIMENSIONAL

Parece muy natural preguntar, ya que conocemos espacios vectoriales bidimensionales y tridimensionales, si existen espacios vectoriales 4-dimensionales, 5-dimensionales o, igualmente, 13-dimensionales. No hay, en absoluto, dificultad en definir y usar tales espacios vectoriales y, en verdad, definiremos espacios vectoriales n-dimensionales para cada número natural n. Esta sección está dedicada a definir y estudiar espacios vectoriales n-dimensionales. También debe ser útil esta sección para revisar el trabajo del capítulo.

Antes de comenzar esta tarea nos parece bien decir algo sobre la utilidad de los espacios vectoriales de dimensiones superiores. Muchos experimentos requieren una medición de la posición de un objeto y del tiempo en el cual el objeto ocupa tal posición. Así, se necesita una cuaterna de números para determinar un acontecimiento (en posición y en tiempo). El conjunto de cuaternas es frecuentemente llamado espacio-evento. * Este es un concepto que es más útil en física que en ciencia ficción. Hay otros casos en los cuales necesitamos registrar tanto la posición como la velocidad de partículas, obteniéndose así una 6-upla de números para cada observación, y hasta puede ocurrir que se presenten 13-uplas (vectores 13-dimensionales).

Un vector tetradimensional es precisamente una 4-upla de números tales como (2, 7, —9, 3), y un vector exadimensional es una 6-upla tal como (1, —1, 2, 3, 3, 2). Si X es un vector tetradimensional, de ordinario denominamos sus coordenadas como X_1, X_2, X_3, X_4 de modo que $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$. En general un vector n-dimensional, x, es una n-upla de números $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Si $X = (2, 7, -9, 3)$, entonces $X_1 = 2$, $X_3 = -9$, y, en general, si x es un vector n-dimensional, entonces X_i es la i-sima coordenada o, como se dice frecuentemente, la i-sima componente de X para cada número natural i, siendo $1 \leq i \leq n$.

Debemos dar ahora una definición precisa de un vector n-dimensional (o n-upla), y la notación que hemos adoptado informalmente nos da la idea. Un vector tetradimensional X es un objeto matemático tal que X_1, X_2, X_3, X_4, son números. En pocas palabras, X es una función cuyo dominio es $\{1, 2, 3, 4\}$, y X_1 será $X(1)$, X_2 será $X(2)$, y, así sucesivamente. De esta manera llegamos a las definiciones siguientes:

22.1 Definiciones. * Un vector n-dimensional, x, es una función cuyo dominio es el conjunto $\{k: k$ es un número natural y $1 \leq k \leq n\}$ y cuyo codominio es un conjunto de números. Una n-upla es un vector n-dimensional. Si X es un vector n-dimensional, entonces la i-sima coordenada, o i-sima componente, X_i de X es el valor $X(i)$ de X en el número natural i, para cada número natural i, siendo $1 \leq i \leq n$.

Sabemos que dos funciones son iguales si y sólo si tienen el mismo dominio y el mismo valor en cada punto de tal dominio. Si X y Y son vectores n-dimensionales, entonces tienen el mismo dominio, el conjunto $\{k: k$ es un número natural y $1 \leq k \leq n\}$, y en consecuencia $X = Y$ si y sólo si la i-sima coordenada de X, X_i, es igual a la correspondiente coordenada Y_i para todos los números i para los cuales $1 \leq i \leq n$.

Para definir un vector n-dimensional, X, debemos especificar el número X_i que es la i-sima coordenada (el valor de X en i) para cada número natural i con $1 \leq i \leq n$. En particular, para definir la suma $X + Y$ de dos vectores n-dimensionales, debemos especificar la i-sima coordenada $(X + Y)_i$ para cada i.

22.2 Definición. La suma $X + Y$ de dos vectores n-dimensionales X y Y es el vector cuya i-sima coordenada es $X_i + Y_i$ para cada i siendo $1 \leq i \leq n$.

En otras palabras, tenemos por definición: $(X + Y)_i = X_i + Y_i$, para cada número natural i con $1 \leq i \leq n$.

No es difícil demostrar que un espacio vectorial n-dimensional es un grupo conmutativo

* Véase "De Pitágoras a Einstein", de K. O. Friedrichs. Editorial Norma, 1967, página 75. (N. de los T.)

* La definición no es compatible con la que se da para vectores bidimensionales y tridimensionales en la sección 14, pero puede emplearse para reemplazar tal definición. Desde luego, esta definición se basa en la noción de función y en el concepto de par ordenado, de modo que la primera definición no es inútil.

respecto de la operación $+$. Expresamos los hechos necesarios en la siguiente secuencia de teoremas y demostramos uno de ellos como ejemplo.

22.3 Teorema. La adición de vectores n-dimensionales es conmutativa.

Demostración. Si X y Y son vectores n-dimensionales, entonces para todo i tal que $1 \leq i \leq n$, tenemos: $(X + Y)_i = X_i + Y_i$ por definición de la adición vectorial, $X_i + Y_i = Y_i + X_i$ porque la adición de números es conmutativa; $Y_i + X_i = (Y + X)_i$ de acuerdo con la definición de la adición vectorial, y, por consiguiente, $(X + Y)_i = (Y + X)_i$, en virtud de la identidad lógica. En consecuencia, $X + Y = Y + X$ porque esos dos vectores tienen la misma i-sima componente para cada i. ▌

22.4 Teorema. La adición de vectores n-dimensionales es asociativa.

22.5 Definición. El vector n-dimensional cero, $ⓝ$, es el vector cuya i-sima componente es el número 0 para cada i tal que $1 \leq i \leq n$. Esto es, $ⓝ_i = 0$ para todo i.

22.6 Teorema. Si X es un vector n-dimensional, entonces $ⓝ + X = X$.

22.7 Teorema. Si X es un vector n-dimensional existe entonces un vector Y tal que $X + Y = ⓝ$.

El vector Y mencionado en el último teorema es, desde luego, único y, por definición, es el vector $-X$. ¿Cuáles son sus componentes (es decir, $(-X)_i = ?$)?

La multiplicación escalar de vectores n-dimensionales es igualmente sencilla. Su demostración la dejamos al lector.

22.8 Definición. Para cada vector n-dimensional X y para cada escalar r, rX es el vector cuya i-sima componente, para $1 \leq i \leq n$ es $r(X_i)$; esto es, $(rX)_i = rX_i$ para todo i.

22.9 Teorema. Si r y s son escalares y X y Y son vectores n-dimensionales, entonces

(i) $1X = X$ y $0X = ⓝ$,

(ii) $r(sX) = (rs)X$,

(iii) $(-r)X = -(rX)$,

(iv) $r(X + Y) = rX + rY$, y

(v) $(r + s)X = rX + sX$.

Finalmente, definimos la longitud de un vector n-dimensional y a partir de ella damos la noción de distancia entre tales vectores de manera obvia.

22.10 Definición. La longitud de un vector n-dimensional X, designada $|X|$, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes. Esto es,

$$|X| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}.$$

Así, $|(1, -1, 2, 3)| = \sqrt{1 + 1 + 4 + 9} = \sqrt{15}$.

22.11 Teorema. Si X y Y son vectores n-dimensionales y r es un escalar, entonces

(i) $|X| \geq 0$, y $|X| = 0$ si y sólo si $X = 0$,

(ii) $|rX| = |r|\,|X|$, y

(iii) $|X + Y| \leq |X| + |Y|$.

22.12 Definición. La distancia entre los vectores X y Y es la longitud $|X - Y|$ del vector diferencia $X - Y$.

Justamente, como en los casos bi y tridimensionales, las propiedades de la longitud implican las propiedades de la distancia.

22.13 Teorema. Si X y Y son vectores n-dimensionales, entonces

(i) $|X - Y| \geq 0$, y $|X - Y| = 0$ si y sólo si $X = Y$,

(ii) $|X - Y| = |Y - X|$, y

(iii) $|X - Y| + |Y - Z| \geq |X - Z|$.

Todos los teoremas de esta sección se pueden demostrar fácilmente con excepción del teorema 22.11 (iii) relativo a la longitud de la suma de dos vectores. No hay realmente aquí mayor dificultad, pero una demostración en esta etapa del problema podría resultar cargada de operaciones tediosas. El teorema se deducirá fácilmente a partir de una última proposición sobre productos interiores; así, ni siquiera usaríamos el recurso disimulado de incluir el teorema en la lista de problemas.

PROBLEMAS

22.1 Si $X = (2, 1, 0, -2)$, halle $X_1 - X_3, |-2X|, \sqrt{|X|}$. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que X.

22.2 Dados $X = (2, 3, 1, 7)$ y $Y = (4, 2, -1, 5)$ halle $2X - 3Y$ y $|X + 2Y|$, y verifique que $|X + Y| \leq |X + Y|$.

22.3 Dados $X = (1, 0, -1, 2, 3)$ y $Y = (1, 2, 1, -2, -1)$.

(a) Halle una ecuación de la recta que pasa por X y Y.

(b) ¿$(1, -2, -1, 2, 7)$ pertenece a esta recta?

(c) Halle el punto medio del segmento que va de X a Y.

(d) ¿Existe un punto U de la recta, tal que $U_1 = U_2$?

22.4 Demuestre el teorema 22.4: La adición de vectores n-dimensionales es asociativa.

22.5 Demuestre el teorema 22.5: Si X es un vector n-dimensional, entonces $n + X = X$.

22.6 Demuestre el teorema 22.7: Si X es un vector n-dimensional, entonces existe un vector Y tal que $X + Y = n$.

22.7 Demuestre el teorema 22.9 (i): Si X es un vector n-dimensional, entonces $1X = X$ y $0X = n$.

22.8 Demuestre el teorema 22.9 (ii): Si X es un vector n-dimensional y r y s son escalares, entonces $r(sX) = (r)X$.

22.9 Demuestre el teorema 22.9 (iv): Si X y Y son vectores n-dimensionales y r es un escalar, entonces $r(X + Y) = rX + rY$.

22.10 Demuestre el teorema 22.9 (v): Si X es un vector n-dimensional y r y s son escalares, entonces $(r + s)X = rX + sX$.

22.11 Demuestre el teorema 22.11 (ii): Si X es un vector n-dimensional y r es un escalar, entonces $|rX| = |r|\,|X|$.

22.12 Demuestre que el conjunto siguiente es inductivo: $\{ n : n$ es un número natural y la suma de cualesquiera números n no negativos es no negativa $\}$.

22.13 Sea F el conjunto de todas las funciones f tales que el dominio de f es el conjunto de todos los números y el codominio de f es un subconjunto del conjunto de números. Intente definir suma y multiplicación escalar en F de manera que las propiedades algebraicas (lista de resultados del teorema 22.9 de esta sección) de los espacios vectoriales n-dimensionales tengan imágenes correctas para F.

23 LA NOTACION Σ

Para indicar sumas de varios números existe una notación que facilita grandemente nuestros cálculos. Expresiones tales como "$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$" son enredadas y difíciles de trabajar, y hay cálculos sencillos que se pueden realizar más fácil y naturalmente con la notación $\sum$, los cuales son menos claros en la notación extensa. La notación $\sum$ es verdaderamente esencial en un estudio eficiente de los espacios vectoriales n-dimensionales para $n > 3$, aunque si el lector está interesado sólo en espacios vectoriales bi o tridimensionales, no necesita prepararse con el material de esta sección.

Supóngase que f es una función, que m y n son enteros tales que $m \leq n$, y que cada entero k tal que $m \leq k \leq n$ pertenece al dominio de f. Entonces $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ representa la suma $f(m) + f(m+1) + \ldots + f(n)$ de todos los números que se obtienen de "$f(k)$" reemplazando "k" sucesivamente por: $m, m+1, \ldots,$ y n. Así $\sum_{k=2}^{4} 2k = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 18$ y $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$. También observamos que $|X| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$ y que ésta es la raíz cuadrada de $\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ siempre que X sea un vector n-dimensional.

Desarrollaremos el uso de la notación $\sum$ muy informalmente porque nuestro propósito principal es un buen entendimiento intuitivo de su mecanismo. Empezamos echando una mirada cuidadosa a la notación en sí misma. Ocurre a veces que en lugar de la notación funcional usual "$f(k)$" para el valor de la función f en k usamos la notación alterna con subíndice "f_k". Ya hemos encontrado en nuestro recorrido un ejemplo para describir la longitud de un vector n-dimensional.

Es muy importante entender precisamente qué objetos dependen del número $\sum_{k=m}^{n} f(k)$. Es evidente que este número depende de la función f. Así, $\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = 6$ (este es el caso en que $f(k) = k$), pero $\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$(en este caso $f(k) = k^2$). Es también evidente que $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ depende de m y de n, y, por ahora, nos abstenemos de dar más ejemplos. Por último $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ no depende de k. Así,

$$\sum_{k=2}^{4} (k-2) = \sum_{u=2}^{4} (u-2) = 0 + 1 + 2.$$

La letra "k" en "$\sum_{k=m}^{n} f(k)$" se toma en el mismo sentido arbitrario que "x" en "$\{x : x$ es un entero$\}$" y "t" en "la función" g cuyo valor en t es t^3 ".

Hay algunas identidades muy usadas en sumas. Por ejemplo podemos observar que

$\sum_{k=1}^{3} 2k = 2\sum_{k=1}^{3} k$, porque $\sum_{k=1}^{3} 2k = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 = 2(1 + 2 + 3) = 2\sum_{k=1}^{3} k$. Algunas veces se dice que "podemos sacar una constante del signo $\sum$ ". Generalmente es cierto que para cada número r,

23.1 $$\sum_{k=m}^{n} rf(k) = r\sum_{k=m}^{n} f(k).$$

Esto se puede llamar la ley distributiva generalizada.

Existe una propiedad aditiva en la notación $\sum$. Así, $\sum_{k=1}^{3} (k + k^2) = (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) = (1 + 2 + 3) + (1^2 + 2^2 + 3^2) = \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} k^2$. En general, tenemos

23.2

$$\sum_{k=m}^{n} (f(k) + g(k)) = (\sum_{k=m}^{n} f(k)) + (\sum_{k=m}^{n} g(k)).$$

Hay una función especial que aparece a menudo en los cálculos y para la cual podemos computar la suma trivialmente. Supóngase que $f(k) = 1$ para cada entero k. ¿Qué es $\sum_{k=1}^{n} f(k)$? Este número es el resultado de agregar 1 a sí mismo n veces y la respuesta es ciertamente n. Así,

23.3 $$\sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Por otra parte, la suma $\sum_{k=m}^{n} 1$ es el resultado de agregar 1 a sí mismo tantas veces como hayamos reemplazado "k", y que es tantas veces como enteros hay en el conjunto $\{m, m+1, m+2, \ldots, n\}$. Al contar los miembros de este conjunto vemos que

23.4 $$\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1.$$

Las fórmulas anteriores pueden ser usadas para justificar los pasos en la siguiente expresión:

$$\sum_{k=1}^{3} (3 + 2k) = \sum_{k=1}^{3} 3 + \sum_{k=1}^{3} 2k = 3\sum_{k=1}^{3} 1 + 2\sum_{k=1}^{3} k = 3\cdot 3 + 2(1 + 2 + 3) = 21.$$

Tendremos aplicaciones menos triviales.

Algunas veces es conveniente escribir una suma mediante subsumas de la siguiente manera: Supóngase que m, n y p son enteros y que $m \leq n < p$. Entonces el conjunto $\{k : k$ es un entero y $m \leq k \leq p\}$ es la unión de los conjuntos disjuntos $\{k : k$ es un entero y $m \leq k \leq n\}$ y $\{k : k$ es un entero y $n + 1 \leq k \leq p\}$. Vemos entonces que

23.5 $$\sum_{k=m}^{n} f(k) + \sum_{k=n+1}^{p} f(k) = \sum_{k=m}^{p} f(k).$$

Por ejemplo, $\sum_{k=1}^{3} k^2 + \sum_{k=4}^{7} k^2 = \sum_{k=1}^{7} k^2$.

Existe un último artificio común usado en conexión con la notación $\sum$. Es posible cambiar el conjunto de valores que reemplazamos sucesivamente sin cambiar la suma, suponiendo que también cambiamos la función apropiadamente. Un ejemplo sencillo será suficiente para indicar esta clase de manipulación. El número $\sum_{k=2}^{4}(k-1)$ es igual a $\sum_{k=1}^{3}k$ (escríbanse estas sumas si no se ve el por qué), y esto es igual a $\sum_{j=-1}^{1}(j+2)$. En general,

23.6 $$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{j=m+p}^{n+p} f(j-p),$$

porque ambas son justamente $f(m) + f(m+1) + \cdots f(n)$.

Finalmente, el estudiante no debe memorizar las seis fórmulas que aparecen en esta sección. Debe usar, mejor, la notación $\sum$ lo suficiente como para que todas ellas se vuelvan operaciones obvias y naturales.

Terminamos con un ejemplo sencillo de carácter un poco más complicado que indica algo sobre la utilidad de la notación $\sum$.

23.7 Ejemplo. Usamos los recursos anteriores para establecer la bien conocida fórmula para la suma de los n primeros números naturales. Empezamos por observar que

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+1) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1,$$

y que por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n}k^2 - n = 2\sum_{k=1}^{n}k.$$

Ahora bien, una cuidadosa mirada a las dos primeras sumas (vuélvanse a ver las fórmulas 23.5 y 23.6 si se desea) debe convencernos que su diferencia es, precisamente, $(n+1)^2 - 1$, porque la primera suma es, justamente, $\sum_{k=2}^{n+1}k^2$. En consecuencia,

$$(n+1)^2 - 1 - n = n^2 + n = 2\sum_{k=1}^{n}k.$$

Así, $$\sum_{k=1}^{n}k = \tfrac{1}{2}\,n(n+1).$$

Por ejemplo, la suma de los 100 primeros números naturales es $\frac{1}{2}(100)(101) = (50)(101) = 5050$.

Existen, desde luego, muchas otras maneras de llegar al resultado que acabamos de obtener. Podemos, por ejemplo, probar por inducción que $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$ como sigue. Sea A el conjunto $\left\{n : \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}\right\}$.

Debemos demostrar que todo número natural pertenece a A y este hecho establecerá el teorema. Empleamos el principio de inducción matemática y comprobamos que $1 \in A$, y que si $m \in A$, entonces $m+1 \in A$. En primer lugar, $1 \in A$ porque $\sum_{k=1}^{1}k = \frac{1(1+1)}{2}$. En seguida debemos mostrar que si $m \in A$, de modo que $\sum_{k=1}^{m}k = \frac{m(m+1)}{2}$, entonces $m+1 \in A$. Esto es, debemos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{m+1}k = \frac{(m+1)(m+1+1)}{2}.$$

Pero $$\sum_{k=1}^{m+1}k = \sum_{k=1}^{m}k + (m+1),$$

y si aplicamos el resultado de que $m \in A$, esto es $\frac{m(m+1)}{2} + (m+1)$. Una sencilla manipulación nos convence de que este último número es $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$, y se deduce que $m+1 \in A$. En consecuencia, A es inductivo, y hemos probado que cada número natural n tiene la propiedad de que $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$. ∎

PROBLEMAS

23.1 Calcule $\sum_{k=-2}^{3}(k+k^3)$, $\sum_{k=-2}^{3}k$, y $\sum_{k=-2}^{3}k^3$ directamente y verifique que

$$\sum_{k=-2}^{3}(k+k^3)=\sum_{k=-2}^{3}k+\sum_{k=-2}^{3}k^3.$$

23.2 Calcule $\sum_{k=1}^{4}(3k+2k^2)$, $\sum_{k=1}^{4}k$, y $\sum_{k=1}^{4}k^2$, y verifique que $\sum_{k=1}^{4}(3k+2k^2)=3\sum_{k=1}^{4}k+2\sum_{k=1}^{4}k^2$.

23.3 Calcule $\sum_{k=-2}^{4}(2|k|-1)$, $\sum_{k=-2}^{4}|k|$ y verifique que $\sum_{k=-2}^{4}(2|k|-1)=2\sum_{k=-2}^{4}|k|-7$.

23.4 Calcule $\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$, $\sum_{j=1}^{3}(2j-1)$, y $\sum_{r=3}^{4}(2r+1)$; observe directamente que $\sum_{k=1}^{5}(2k-1)=\sum_{j=1}^{3}(2j-1)+\sum_{r=3}^{4}(2r+1)$. ¿Puede explicar alguna razón para esta igualdad?

23.5 Supóngase que m es un número natural. A partir de $\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2}$, demuestre que $\sum_{k=1}^{m}(a+(k-1)d)=\frac{m}{2}(2a+(m-1)d)$.

(Esta fórmula para la suma de los m primeros términos de una progresión aritmética se escribe frecuentemente así:

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d).)$$

23.6 Demuestre que si a es un número, r es un número diferente de 1 y n es un número natural, entonces

$$\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

(Esta fórmula para la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica se escribe frecuentemente así:

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{(1-r)}.$$

La comprobación de la fórmula podría empezar con el examen de $r\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}$.)

23.7 Demuestre que para cada número a y para cada número d el conjunto $\left\{n:\sum_{k=1}^{n}(a+(k-1)d)=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)\right\}$ es inductivo.

23.8 Demuestre que para cada número a y para cada número r diferente de 1 el conjunto

$$\left\{n:\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}=\frac{a(1-r^n)}{(1-r)}\right\}\text{ es inductivo.}$$

23.9 Observe que

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+3k+1).$$

Con este resultado y el de $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3=\sum_{k=2}^{n+1}k^3$, demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

23.10 Hemos obtenido fórmulas para $\sum_{k=1}^{n}k$ y $\sum_{k=1}^{n}k^2$. Trate de encontrar una fórmula para $\sum_{k=1}^{n}k^3$.

CAPITULO 4

El Plano Complejo

Este capítulo está dedicado al estudio de aquellas propiedades del espacio vectorial bidimensional, que no se extienden al espacio tridimensional, siendo el propósito fundamental el de definir y sacar provecho de una multiplicación de vectores bidimensionales. Empezamos el estudio considerando la solución de ecuaciones cuadráticas. Si a, b y c son números y a no es cero, entonces puede o no suceder, que haya un número x tal que $ax^2 + bx + c = 0$. Por ejemplo, es fácil ver que no hay número x tal que $x^2 + 1 = 0$, aunque existe ciertamente un número x tal que $x^2 - 1 = 0$. Definimos una multiplicación para vectores bidimensionales tal que haya un vector bidimensional A con la propiedad de que el vector suma de A^2 y el elemento idéntico de la multiplicación sea el vector cero; en este sentido obtenemos una solucción de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Llamaremos los vectores bidimensionales "números complejos" y para hacer énfasis en la diferencia entre números y números complejos, llamamos "reales" a los números ordinarios. De esta suerte, ocurrirá que mientras no existen números reales x tales que $x^2 + 1 = 0$, hay números complejos con esta propiedad. (Acabamos de hacer una formulación más precisa de este hecho.)

Después de estudiar las propiedades algebraicas y geométricas de los números complejos, dedicamos la última sección a una breve discusión de la posibilidad de definir la multiplicación en espacios vectoriales distintos del plano.

Valdría la pena mencionar, al concluir, algo sobre la utilidad del álgebra de vectores bidimensionales. Hay una teoría matemática extensa y bella, denominada teoría de las funciones complejas, que se basa en los números complejos. Esta teoría se originó, justamente como una creación matemática abstracta, más de medio siglo antes de que la corriente eléctrica alterna se generara por primera vez y mucho antes de que volara el primer aeroplano. Sin embargo resulta que la teoría de las funciones complejas es precisamente la herramienta matemática que se necesita para estudiar la transmisión de la corriente alterna o para diseñar una cápsula para vuelos subsónicos. Hay otras aplicaciones igualmente sorprendentes.

24 ECUACIONES CUADRATICAS

Nuestro primer problema es la solución de las ecuaciones cuadráticas. Esto es, intentamos hallar precisamente para cuáles números x es verdad que $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números. Si a es 0, entonces el problema de hallar la solución es fácil, de modo que siempre supondremos que el coeficiente de x^2 no es 0.

Demostraremos un teorema sencillo y haremos una aplicación simple de él. Podríamos decir que el objeto principal de la sección no es precisamente conocer y entender el teorema, sino también entender y estar en capacidad de aplicar el proceso mediante el cual se demuestra el teorema. El lector, en resumen, debe adquirir alguna destreza en la resolución de ecuaciones cuadráticas, tanto por medio del teorema y de esta sección, como por medio del procedimiento en que se fundamenta el teorema.

La única idea que fundamenta la resolución de las ecuaciones cuadráticas es ésta: es fácil decidir cuáles son los números x tales que $x^2 + 2px + p^2 = q$, si p y q son números cualesquiera. La razón de esta facilidad radica en que $x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2$, y los números x tales que $(x + p)^2 = q$ pueden ser clasificados como sigue: si q es positivo, entonces $x + p$ debe ser $\sqrt{q}$ o $-\sqrt{q}$ y, por tanto, debe ser $-p + \sqrt{q}$ o $-p - \sqrt{q}$; si q es negativo, no habrá números* x tales que $(x + p)^2 = q$; y si $q = 0$, el único número tal que $(x + p)^2 = q$ es $-p$. El método para resolver otras ecuaciones cuadráticas es ligeramente éste: observemos cuidadosamente la ecuación

(1) $\quad x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2 = q$

e intentemos, sin hacer esfuerzo, disponer la ecuación para ser resuelta de modo que se ajuste a la anterior. Más precisamente, intentemos disponer la ecuación de modo que el miembro de la izquierda sea un "cuadrado perfecto" y el miembro de la derecha un número. Damos algunos ejemplos.

24.1 Ejemplo. Nos piden hallar los números x tales que $x^2 + 2x - 1 = 0$, o, lo que es lo mismo, buscar el conjunto-solución de la ecuación $x^2 + 2x - 1 = 0$. Si x es tal número, entonces

(2) $\quad x^2 + 2x = 1.$

Escribiendo $x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2$, vemos que en el caso especial en que $p = 1$, tenemos $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Sumando 1 a cada lado de la ecuación (2), obtenemos $x^2 + 2x + 1 = 1 + 1 = 2$. Entonces $(x + 1)^2 = 2$, $x + 1$ debe ser $\sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}$ y por tanto x debe ser igual a $-1 + \sqrt{2}$ o $-1 - \sqrt{2}$. Esto es, los únicos números x posibles tales que $x^2 + 2x - 1 = 0$ son $-1 + \sqrt{2}$ o $-1 - \sqrt{2}$. Usualmente abreviamos esto poniendo $-1 \pm \sqrt{2}$. No sabemos que esos números sean soluciones; solamente probamos que ellos son las posibles soluciones. Sin embargo, si $x = -1 \pm \sqrt{2}$, deducimos, sucesivamente,

$$x + 1 = \pm\sqrt{2},$$
$$(x + 1)^2 = 2,$$
$$x^2 + 2x + 1 = 2,$$

y, por tanto que $x^2 + 2x - 1 = 0$. Así pues, $-1 + \sqrt{2}$ y $-1 - \sqrt{2}$ son soluciones y son las únicas. Esto es, el conjunto-solución es $\{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$. ▌

El procedimiento empleado en el ejemplo precedente se llama frecuentemente método de "completar el cuadrado". Quizá el procedimiento se puede recordar así: si nos dan un número $x^2 +$ (número) x, entonces el número que debe ser sumado para obtener un "cuadrado perfecto" es $\left(\frac{\text{número}}{2}\right)^2$.

24.2 Ejemplo. Necesitamos hallar aquellos números x tales que $x^2 + 4x + 8 = 0$. Si x es uno de tales números, entonces

$$x^2 + 4x = -8$$
$$x^2 + 4x + (2)^2 = -8 + (2)^2$$
$$(x + 2)^2 = -8 + 4 = -4.$$

Puesto que no hay números cuyo cuadrado sea -4, concluimos que no hay ningún número x tal que $x^2 + 4x + 8 = 0$. En otras palabras, no hay soluciones para la ecuación dada y el conjunto-solución es el conjunto vacío. ▌

24.3 Ejemplo. Necesitamos hallar aquellos números x tales que $x^2 + 6x + 9 = 0$. Observamos satisfechos que $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, y así el problema está en descubrir aquellos números x tales que $(x + 3)^2 = 0$. Pero $(x + 3)^2 = 0$ si y sólo si $x + 3 = 0$, y $x + 3 = 0$ si y sólo si x es -3. De modo que -3 es la única solución de la ecuación y el conjunto-solución es $\{-3\}$. ▌

24.4 Ejemplo. Necesitamos encontrar aquellos números x tales que $2x^2 + x - 1 = 0$. Si x es uno de tales números, entonces

* Recuérdese que desde el principio la palabra "número" se refiere aquí, como en todo el texto anterior, a lo que llamaremos más tarde número real. Veremos que hay un número complejo x tal que $(x + p)^2 = q$ cuando $q < 0$.

$$2x^2 + x = 1,$$

$$x^2 + (\tfrac{1}{2})x = \tfrac{1}{2},$$

$$x^2 + (\tfrac{1}{2})x + (\tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4})^2,$$

$$(x + \tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{9}{16},$$

$$x + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} \quad \text{o} \quad -\tfrac{3}{4}, \quad \text{y}$$

$$x = \tfrac{1}{2} \quad \text{o} \quad -1.$$

De esta suerte, $\frac{1}{2}$ y -1 son las únicas soluciones posibles. Ahora podemos ver que esas son las soluciones observando que $2(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}) - 1 = 0$ y $2(-1)^2 + (-1) - 1 = 0$. El conjunto-solución es por tanto $\{\frac{1}{2}, -1\}$. ▌

Finalmente, demostremos un teorema que satisface completamente el problema de resolver ecuaciones cuadráticas.

24.5 Teorema. Consideremos los números a, b y c con $a \neq 0$. Entonces los números x tales que $ax^2 + bx + c = 0$ se pueden clasificar del modo siguiente:

(i) si $b^2 - 4ac > 0$, entonces

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ii) si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $x = -b/2a$,

y (iii) si $b^2 - 4ac < 0$,

entonces no existe tal número x.

Demostración. Si x es un número tal que $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$ax^2 + bx = -c,$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

y

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces, evidentemente, no existe tal número y la parte (iii) queda demostrada. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ y $x = -\frac{b}{2a}$. Además, en este caso,

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$\frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 0,$$

de modo que $-\frac{b}{2a}$ es una solución, la cual prueba la parte (ii). Finalmente, si $b^2 - 4ac > 0$, entonces vemos que $x + \frac{b}{2a}$ debe ser $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ o $-\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ puesto que la raíz cuadrada de $4a^2$ es $2a$ o $-2a$ (según que a sea positivo o negativo), vemos que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Queda por demostrar que estos dos números son soluciones. Si $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, entonces deducimos, sucesivamente, que:

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac,$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$4a(ax^2 + bx + c) = 0,$$

y en consecuencia,

$$ax^2 + bx + c = 0. \text{ ▌}$$

Damos un ejemplo que ilustre el uso del teorema.

24.6 Ejemplo. (El mismo problema 24.4). Deseamos hallar aquellos números x tales que $2x^2 + x - 1 = 0$. Este es un caso especial del teorema, donde $a = 2$, $b = 1$ y $c = -1$. Entonces $b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$. Este número es positivo y por tanto hay dos soluciones que son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

y por tanto $x = \frac{1}{2}$ y $x = -1$ son las soluciones. ▌

Finalmente, damos una aplicación sencilla de estas ideas a un problema de física elemental, precisamente para mostrar que las ecuaciones cuadráticas se presentan en partes distintas de la imaginación acalorada de los matemáticos.

24.7 Aplicación. Es un hecho experimental que un objeto que cae partiendo de su estado de reposo lo hace a $16t^2$ pies en t segundos (realmente esto es verdadero sólo aproximadamente, bajo ciertas condiciones, etc.). Si un objeto es lanzado hacia arriba con una velocidad de 64 pies por segundo, su altura al final de t segundos podría ser $64t$ pies, si la gravedad no existiera. La altura verdadera al final de t segundos sería $64t - 16t^2$ (ordinariamente, la distancia alcanzada por el objeto menos la distancia perdida). Suponiendo que éste es el caso, deseamos hallar a qué hora el objeto está a 48 pies por encima del suelo. Matemáticamente el problema es sencillamente: ¿para qué números t es $48 = 64t - 16t^2$? Transponiendo términos y dividiendo por 16 ¿para cuáles números t es cierto que $t^2 - 4t + 3 = 0$? Realizando cálculos por medio del teorema previo, hallamos

$$t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

de modo que 1 y 3 son las soluciones. Así, el objeto está 48 pies por encima del suelo después de un segundo (cuando asciende) y, nuevamente, después de 3 segundos (cuando cae). ▌

PROBLEMAS

24.1 Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado y pruebe el resultado utilizando la fórmula cuadrática.

(a) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (d) $x^2 + 10x + 20 = 0$
(b) $x^2 + x - 12 = 0$ (e) $2x^2 + 5x + 1 = 0$
(c) $x^2 + 6x + 6 = 0$ (f) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

24.2 Factorizar una expresión cuadrática significa escribirla como un producto de dos expresiones lineales. Por ejemplo, la expresión cuadrática $x^2 - 1$ se factoriza escribiendo $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ puesto que $x - 1$ y $x + 1$ son ambos lineales.

Factorice cada una de las siguientes expresiones cuadráticas:

(a) $x^2 + 7x + 12$ (c) $x^2 + x - 2$
(b) $x^2 + 5x + 6$ (d) $2x^2 + 5x + 3$.

24.3 Factorice $x^2 - 5x + 6$ y use el resultado para demostrar directamente que $x^2 - 5x + 6 = 0$ si y sólo si $x = 2$ o $x = 3$.

24.4 Resuelva la ecuación cuadrática $x^2 - 5x - 14 = 0$ por factorización.

24.5 ¿Para qué número x es $x^2 + 1$ mínimo? ¿Para qué número z es $1 - z^2$ máximo? Explique.

24.6 La suma de dos números es 7 y su producto es 5. Halle los números.

24.7 Si el precio de un huevo fuera 1 centavo más, entonces con \$5.04 compraría una docena menos. ¿Cuál es el precio de los huevos?

24.8 Demuestre que si b y c son números, entonces, para algún número x, $x^2 + bx + c > 0$.

24.9 Demuestre que si $b^2 - 4ac > 0$, entonces, para algún número x, $ax^2 + bx + c < 0$ y, para algún número x, $ax^2 + bx + c > 0$.

24.10 Demuestre que si $b^2 - 4ac < 0$, entonces, para todos los números x, $ax^2 + bx + c > 0$, o para todos los números x, $ax^2 + bx + c < 0$.

25 NUMEROS COMPLEJOS

Volvemos nuevamente al problema de dar una "buena" definición de multiplicación de vectores. Hemos definido el producto escalar de un escalar por un vector, el cual da un vector, pero no hemos definido la multiplicación de dos vectores la cual da como resultado un vector. En esta sección definimos tal multiplicación para vectores bidimensionales, y veremos luego que esta multiplicación tiene aplicaciones interesantes en el problema de resolver ecuaciones.

Desgraciadamente, hay un exceso de notación en matemática. Los números complejos generalmente se denominan vectores bidimensionales cuando haya necesidad de multiplicarlos. Damos la siguiente definición formal:

25.1 Definición. Un número complejo es un vector bidimensional; esto es, un número complejo es un par ordenado de números. Un número real es un número.

Es decir, lo que hemos llamado simplemente un número hasta ahora, se llamará un número real para distinguirlo de un número complejo.

Así, (1, 2) es un número complejo mientras que 2 es un número real. La terminología es, desde luego, histórica; en los problemas relativos a la multiplicación escalar, un número se llama un escalar, y en los problemas relativos a lo que llamamos multiplicación de complejos, un número se llama un número real. El adjetivo "real" no supone que los números complejos no lo sean. Ahora aclaramos la confusión semántica.

25.2 Definición. La parte real de un número complejo es su primera coordenada; la parte imaginaria de un número complejo es su segunda coordenada.

Así, 2 es la parte real de (2, 3) y 3 es la parte imaginaria. (No se me pregunte cuál es la parte imaginaria de 3.) En concordancia con esta interesante terminología, el eje de x se conoce generalmente como el eje real, y el eje de y como el eje imaginario.

La manera corriente de escribir un número complejo es expresarlo como la suma de múltiplos escalares de dos números complejos particulares. Definimos:

25.3 Definición. * $I = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$.

En otras palabras, I es el vector unitario sobre el eje de las x e i es el vector unitario sobre el eje de las y. Si (a, b) es un número complejo arbitrario, es evidente que $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = aI + bi$, donde la adición es la adición vectorial conocida. Recíprocamente si c y d son números reales, entonces $cI + di = (c, d)$. Así, la parte real de $cI + di$ es c y su parte imaginaria es d. Por ejemplo, la parte real de $2I + 7i$ es 2 y su parte imaginaria es 7. Por otro lado, las partes real e imaginaria determinan el número; si la parte real de A es 4 y la parte imaginaria es 3, entonces $A = 4I + 3i = (4, 3)$.

Todo lo referente a esta notación puede contribuir a oscurecer un poco nuestros conocimientos tan difícilmente adquiridos. Si dos números complejos son iguales, entonces sus partes reales (primeras coordenadas) son iguales y sus partes imaginarias (segundas coordenadas) son iguales; y, recíprocamente, si las partes real e imaginaria de dos números complejos son iguales, entonces los números son iguales. Así, si x y y son números reales tales que $2xI + yi = 4I - 3i$, entonces inferimos que $2x = 4$ y $y = -3$, justamente como si hubiéramos hecho la misma inferencia de las proposiciones equivalentes, es decir, $(2x, y) = (4, -3)$.

Los números complejos están ya provistos de la operación de adición bajo la cual forman un grupo conmutativo. También tenemos la multiplicación escalar y nuestra próxima tarea es definir la multiplicación entre complejos. Hacemos esto de modo que I sea el elemento idéntico para la multiplicación y que $i \cdot i = -I$.

25.4 Definición. El producto de los números complejos $aI + bi$ y $cI + di$, se define como $(ac - bd)I + (bc + ad)i$. De la misma manera, $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$.

Podemos aplicar la definición directamente para ver que $(1, 0)(c, d) = (1 \cdot c - 0 \cdot d, 0 \cdot c + 1 \cdot d) = (c, d)$, y por consiguiente $IA = A$ para cada número complejo A. Además, $i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -I$. Las dos primeras condiciones del siguiente teorema quedan entonces establecidas. Dejamos la correcta demostración de las condiciones restantes para los problemas al final de la sección.

25.5 Teorema

(i) $IA = A$ para cada número complejo A,
(ii) $i \cdot i = -I$,
(iii) La multiplicación de complejos es conmutativa,

* La letra "i" se representa en ingeniería como una "j".

(iv) La multiplicación de complejos es asociativa,

(v) La multiplicación de complejos es distributiva respecto a la adición, y

(vi) Si r y s son escalares y A y B son números complejos, entonces $(rA)(sB) = (rs)(AB)$.

Si tenemos presente los resultados enumerados en este teorema no necesitamos recordar la definición de multiplicación, porque podemos argüir que

$$\begin{aligned}
&(aI + bi)(cI + di)\\
&= (aI + bi)(cI) + (aI + bi)(di)\\
&= (cI)(aI + bi) + (di)(aI + bi)\\
&= (cI)(aI) + (cI)(bi) + (di)(aI) + (di)(bi)\\
&= (ca)(II) + (cb)(Ii) + (da)(iI) + (db)(ii)\\
&= (ca - db)I + (cb + da)i,
\end{aligned}$$

siendo las partes (v), (iii), (v), (vi) y (i), (ii) y (iii) las razones para las igualdades sucesivas del teorema (la última igualdad se deduce directamente de las propiedades conocidas de la multiplicación escalar). Es deseable que el estudiante siga este modelo para calcular los productos de números complejos. El siguiente cálculo, por ejemplo, debe explicarse por sí mismo: $(2I + 3i)(-I + 4i) = -2I^2 + 8Ii - 3iI + 12i^2 = -2I + 8i - 3i - 12I = -14I + 5i$.

Casi hemos logrado demostrar que los números complejos, junto con la adición vectorial y la multiplicación de complejos, forman un cuerpo. Si la palabra "número" se reemplaza por "número complejo" en cada uno de los axiomas A1 — A5, M1 — M4, D y AM, entonces los enunciados resultantes son verdaderos. Todavía no hemos comprobado M5, es decir, la existencia del inverso multiplicativo para un número complejo diferente de cero lo cual no es difícil si observamos que $(aI + bi)(aI - bi) = a^2I^2 - b^2i^2 = (a^2 + b^2)I$. Si $aI + bi \neq (0, 0)$, entonces $a^2 + b^2 \neq 0$ y por tanto $(aI + bi)\left[\dfrac{1}{a^2 + b^2}(aI - bi)\right] = I$.

Así, el inverso multiplicativo de $aI + bi$, que es la respuesta a la pregunta "$(aI + bi)$ (?) $= I$", es $\dfrac{1}{a^2 + b^2}(aI - bi)$.

El lector no necesita recordar la fórmula para el inverso multiplicativo que acabamos de obtener. Es mucho mejor recordar el artificio que da la fórmula. Así, podemos calcular: $(2I + 3i)^{-1} = \dfrac{I}{2I + 3i} = \dfrac{I(2I - 3i)}{(2I + 3i)(2I - 3i)} = \dfrac{2I - 3i}{4I^2 - 9i^2} = \dfrac{2I - 3i}{13I} = \dfrac{2}{13}I - \dfrac{3}{13}i$, y $\dfrac{I + i}{-2I + i} = \dfrac{(I + i)(-2I - i)}{(-2I + i)(-2I - i)} = \dfrac{-I - 3i}{5I} = \dfrac{-1}{5}I - \dfrac{3}{5}i$.

Hemos utilizado en lo que antecede el hecho de que el recíproco I^{-1} de I (la respuesta a la pregunta I (?) $= I$), es I, y, por consiguiente, $A / I = A$ para todo número complejo A.

El artificio que acabamos de usar para calcular cocientes tiene variantes y su utilidad justifica la siguiente definición.

25.6 Definición. El conjugado del número complejo $A = aI + bi$, simbolizado por A^{-}, $\bar{A}$ o $(aI + bi)^{-}$, se define como $aI - bi$.

Así, el conjugado de $3I + 4i$ es $3I - 4i$; el conjugado de $(2, -6)$ es $(2, 6)$; el conjugado de i es $-i$, y el conjugado de I es I. En términos del conjugado de un número complejo, los resultados establecidos atrás los podemos volver a escribir como sigue.

25.7 Teorema. Si A es un número complejo, entonces $A\bar{A} = |A|^2 I$, y si $A \neq (0, 0)$, entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|^2}\bar{A}$.

Finalmente, hay un asunto de notación que debe explicarse. Es costumbre en la discusión de números complejos suprimir el símbolo "I" completamente, y, por ejemplo, escribir "(2, 3)" o "$2I + 3i$" como "$2 + 3i$". En general, "$aI + bi$" se abrevia como "$a + bi$". Seguiremos esta convención en las secciones sucesivas. Sin embargo, no discutiremos sobre el hecho de que esta convención puede causar problemas. Se acostumbra escribir "(4, 0)" como "$4I + 0i$", o "$4 + 0i$", o simplemente como "4". Pero esto es inconsecuente; ¿si escribimos "4" estamos refiriéndonos al número real 4 o al número complejo (4, 0)? Sólo podemos decir, no con mucha claridad, que el contexto deberá mostrar claramente qué uso queremos significar: si decimos "el número complejo 4" queremos significar (4, 0), y el número real 4 es justamente 4.

PROBLEMAS

25.1 Halle en cada caso el número complejo X.

(a) $(I + i) + X = (0, 0)$ (c) $(I + i)i = X$
(b) $(I + i)(I - i) = X$ (d) $(I + i)(-i) = X$.

25.2 Halle en cada caso el número complejo Z.

(a) $(3I + 4i)(3I - 4i) = Z$
(b) $(2I - 6i)(2I + 6i) = Z$
(c) $(I + \sqrt{3}i)(\sqrt{3}I + i) = Z$
(d) $(I - \sqrt{3}i)(\sqrt{3}I - i) = Z$.

25.3 Halle en cada caso el número complejo Z.

(a) $(\sqrt{2}I + \sqrt{3}i)(\sqrt{2}I - \sqrt{3}i) = Z$
(b) $(\sqrt{2}I + \sqrt{3}i)(\sqrt{3}I - \sqrt{2}i) = Z$
(c) $\left(\frac{1}{2}I + \frac{3}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}I + \frac{3}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}I + \frac{3}{2}i\right) = Z$
(d) $\left(\frac{-1}{2}I + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{-1}{2}I + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{-1}{2}I + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = Z$.

25.4 Encuentre en cada caso el número complejo Z.

(a) $iZ = I$ (c) $\left(\frac{1}{5}I - \frac{2}{5}i\right)Z = I$
(b) $(I + i)Z = I$ (d) $\left(\frac{1}{5}I + \frac{2}{5}i\right)Z = I$.

25.5 Encuentre en cada caso el número complejo Z. *

(a) $(3 - i)Z = i$ (b) $\frac{1}{Z} = i$
(c) $(a + bi)Z = (a^2 + b^2)i$.

25.6 Reduzca cada una de las siguientes expresiones a la forma $x + yi$ donde x y y son números reales.

(a) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}$ (b) $\dfrac{(2 - i)(3 + i)}{i}$

(c) $1 + \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{1 + \cfrac{i}{1 + i}}}$

25.7 Factorice $Z^4 - 1$ y luego halle en números complejos todas las soluciones de la ecuación $Z^4 - 1 = 0$.

25.8 Demuestre que la multiplicación de complejos es asociativa y que la multiplicación de complejos es distributiva respecto de la adición de complejos.

25.9 Demuestre que si A y B son números complejos, entonces:

(a) $\overline{(\bar{A})} = A$
(b) $\overline{(AB)} = \bar{A}\,\bar{B}$
(c) $\overline{(A + B)} = \bar{A} + \bar{B}$.

25.10 Demuestre que si A y B son números complejos y $B \neq 0$, entonces $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A\,\bar{B}}{|B|^2}$.

25.11 Considere las siguientes condiciones:

(1) Para cada número complejo X exactamente uno de los siguientes enunciados es verdadero: $X \in P$, $-X \in P$, o $X = 0$.

(2) Si X y Y pertenecen a P, también pertenece $X + Y$ y XY.

Demuestre que si P es cualquier conjunto de números complejos, entonces (1) es falso o (2) es falso. (Así los axiomas de orden fallan para los números complejos.)

25.12 Los puntos integrantes de un retículo bidimensional (problema 14.11) se llaman enteros Gaussianos. Su relación con los números complejos es similar a la relación entre números enteros y reales. Demuestre que (con la adición y la multiplicación de complejos) los enteros Gaussianos satisfacen los axiomas A1 — A5, M1 — M4 y D, pero no el M5.

* De aquí en adelante adoptaremos la convención descrita al final de la sección.

25.13 5 es un número entero primo pero no un entero Gaussiano primo. Halle enteros Gaussianos de la forma $a + bi$ y $c + di$ (donde ni $a + bi$ ni $c + di$ tengan valor absoluto 1) tales que $(a + bi)(c + di) = 5$.

26 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA MULTIPLICACION

Los números complejos son vectores. La adición de números complejos es simplemente una adición vectorial, de la que conocemos bien su significado geométrico. También la multiplicación de números complejos tiene una útil e interesante interpretación geométrica; esta sección está dedicada a dicha interpretación. Empecemos por un lema respecto a la longitud. La longitud de un vector bidimensional (número complejo) se llama también "valor absoluto".

26.1 Lema. Si A y B son números complejos, entonces $|AB| = |A|\,|B|$.

Demostración. Si dejamos todo rigorismo y procedemos directamente, encontramos que, si $A = a + bi$ y $B = c + di$, entonces

$$\begin{aligned}|AB| &= |ac - bd + (ad + bc)i| \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\ \sqrt{c^2 + d^2} = |A||B|.\end{aligned}$$

Si aceptamos la parte (b) del problema 25.9, que establece que el conjugado de un producto es el producto de los conjugados, y si recordamos que $A\bar{A} = |A|^2$, podemos construir una prueba menos burda. Razonamos: $|AB|^2 = (AB)(AB)^- = AB\overline{AB} = A\bar{A}B\bar{B} = |A|^2|B|^2$, de donde $|AB| = |A|\,|B|$. ▮

Así, $|(1 + 2i)(3 - i)|$ puede ser calculado en dos formas. Directamente tenemos que $|(1 + 2i)(3 - i)| = |3 + 2 + (6 - 1)i| = |5 + 5i| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$. Por otra parte, si hacemos uso del lema anterior, podemos escribir que $|(1 + 2i)(3 - i)| = |1 + 2i|\,|3 - i| = \sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{5}\sqrt{10} = \sqrt{50}$.

Ahora examinamos la interpretación geométrica de la multiplicación desde el siguiente punto de vista. Consideremos la función que multiplica todo número complejo por un número complejo A, fijo, y tratemos de encontrar las propiedades de esta función.

26.2 Teorema. Si A es un número complejo y M_A es la función definida por $M_A(X) = AX$ para todo número complejo X, entonces M_A multiplica todas las distancias por $|A|$, en el sentido de que

$$|M_A(X) - M_A(Y)| = |A||X - Y|.$$

Demostración. Vemos por la definición de M_A, que $|M_A(X) - M_A(Y)| = |AX - AY| = |A(X - Y)| = |A|\,|X - Y|$. (La última igualdad se deduce del lema 26.1.) ▮

Si U es un vector unitario (un número complejo de longitud uno), entonces la multiplicación por U conserva las distancias; esto es, si $|U| = 1$, entonces $|M_U(X) - M_U(Y)| = |X - Y|$. También es claro que $M_U(0) = 0$. Así, la multiplicación por un vector unitario deja fijo a 0 y conserva las distancias. La figura 26.1 muestra un esquema geométrico de un posible caso. Si X y Y son números complejos, entonces M_U transforma el triángulo OXY en un triángulo congruente. Si UX está como se muestra en la figura 26.1, entonces existen exactamente dos posiciones posibles para UY, y éstas son los puntos A y B marcados en la figura. Parece intuitivamente muy claro, en

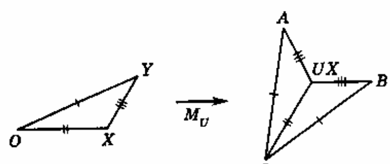


Figura 26.1

vista de estas consideraciones, que la multiplicación por un vector unitario es una rotación del plano alrededor de O, o una rotación del plano seguida de un "rebatimiento". El resultado principal de esta sección es que la multiplicación por un vector unitario produce precisamente una rotación a través de cierto ángulo sin "rebatimiento".

Aquí existe una dificultad que trataremos de minimizar. Necesitamos hablar de ángulos y de adición de ángulos. Nuestro primer propósito es simplemente encontrar una interpretación geométrica de la multiplicación de números complejos, y suponemos que el lector tiene un buen concepto intuitivo de la noción de ángulo y de su adición. Por consiguiente, procedamos de una manera más o menos informal, confiando en el conocimiento intuitivo que posee el estudiante. Naturalmente esto tiene grandes desventajas; no es fácil esperar demostrar los teoremas sobre ángulos, sin definir previamente la noción de ángulo. Podemos solamente asegurarle al estudiante que, si hubiéramos definido ángulos y adición de ángulos, entonces las demostraciones serían correctas. El hecho fundamental está en que la multiplicación por un vector unitario conserva la distancia.

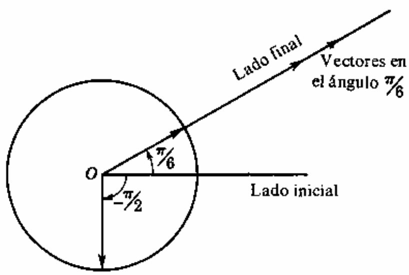


Figura 26.2

Para cada ángulo, por ejemplo, $\pi/6$ (radianes), podemos localizar su vértice en O y su lado inicial sobre el eje x. Marcamos el ángulo $\pi/6$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Todos los vectores situados sobre el lado final del ángulo están en el ángulo $\pi/6$ (véase la figura 26.2). Es evidente que dos vectores cualesquiera situados en el mismo ángulo son múltiplos escalares positivos uno del otro, y que hay precisamente un solo vector unitario en cada ángulo dado. Los ángulos negativos se miden en el sentido de las manecillas del reloj, tal como, por ejemplo, $-\pi/2$ está marcado en la figura 26.2.

26.3 Definición. Para cada ángulo α el vector unitario en α, designado por $U(\alpha)$, es el número complejo que está a una unidad de 0 y sobre el lado final del ángulo.

Naturalmente, un vector complejo puede estar en varios ángulos diferentes; así, 1 está en 0, pero también está en 6π, y en -2π. También es cierto que $U(\alpha + 2\pi) = U(\alpha - 2\pi) = U(\alpha + 4\pi) = U(\alpha)$ para cualquier ángulo α. Ahora probemos:

26.4 Teorema de la suma de argumentos*. Si α y β son ángulos, entonces el producto del vector unitario en α por el vector unitario en β es el vector unitario en $\alpha + \beta$; esto es, $U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha + \beta)$.

Antes de proceder con la demostración veamos qué quiere decir el teorema. El número complejo $U(\alpha + \beta)$ es el vector unitario en el ángulo $\alpha + \beta$, y $\alpha + \beta$ es la suma del ángulo α y el ángulo β. El teorema asegura que el número complejo $U(\alpha + \beta)$ es precisamente el producto complejo de $U(\alpha)$ y $U(\beta)$. Esto sugiere un modo de multiplicar dos vectores unitarios con regla y compás: simplemente construimos el ángulo del primer vector y el ángulo del segundo; el producto está localizado en la suma de ambos ángulos (véase la figura 26.3).

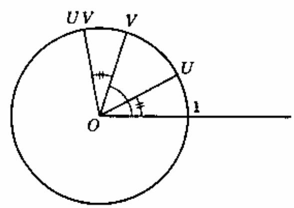


Figura 26.3

* En trigonometría, $U(\alpha)$ suele escribirse como $\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$. El teorema 26.4 establece, entonces, $\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta) = U(\alpha+\beta) = U(\alpha)U(\beta) = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + i(\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta)$. Así, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$ y $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$.

Demostración del teorema 26.4. La figura 26.4 muestra los vectores $U(\alpha)$ y $U(\beta)$. La multiplicación por el vector unitario $U(\beta)$ transforma el triángulo con vértices en O, E y $U(\alpha)$ en un triángulo congruente con vértices en O, $U(\beta)$, y $U(\beta)\ U(\alpha)$ puesto que la multiplicación por el vector unitario conserva la distancia (teorema 26.2) y triángulos con lados respectivamente iguales son congruentes (el famoso teorema l. l. l. de la geometría plana). Por consiguiente, $U(\beta)U(\alpha)$ debe ser uno de los puntos C o D señalados en la figura. Los ángulos COB y BOD son ambos iguales al ángulo AOE (elementos correspondientes de triángulos congruentes), y, por consiguiente, $C = U(\beta + \alpha)$ y $D = U(\beta - \alpha)$. Concluimos que $U(\beta)U(\alpha)$ es $U(\beta - \alpha)$ o $U(\beta + \alpha)$. Podemos repetir el

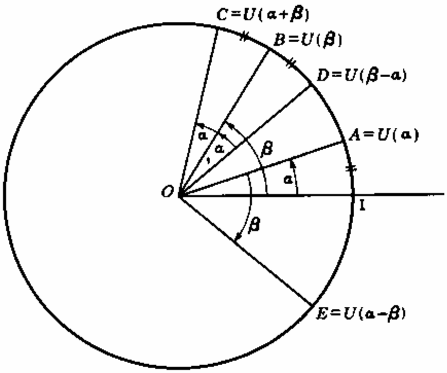


Figura 26.4

argumento cambiando los papeles de α y β, y concluiremos que $U(\alpha)U(\beta)$ es $C = U(\alpha + \beta)$ o $D = U(\alpha - \beta)$. Hemos probado, por consiguiente, que $U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha + \beta)$, o que $U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha - \beta) = U(\beta - \alpha)$. Esta última posibilidad no ocurre en los ángulos particulares que hemos mostrado en la figura 26.4, y, este caso, $U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha + \beta)$. Sin embargo, sin referirnos a la figura, se puede mostrar que, si $U(\alpha)U(\beta) = U(\alpha - \beta) = U(\beta - \alpha)$ entonces $U(\alpha - \beta) = U(\alpha + \beta)$, de modo que el teorema es correcto en cualquier caso. La prueba de este simple hecho aparecerá entre los problemas de esta sección. ▌

Es fácil ahora dar una interpretación geométrica de la multiplicación de vectores de longitud arbitraria. Si A y B son números complejos en los ángulos α y β respectivamente, entonces los vectores unitarios $(1/|A|)A$ y $(1/|B|)B$ están también en los ángulos α y β respectivamente. Por tanto, $(1/|A|)A\ (1/|B|)B = (1/|AB|)AB$ es un vector unitario en el ángulo $\alpha + \beta$, y en consecuencia, AB está en el ángulo $\alpha + \beta$. Puesto que la distancia de O a AB es $|A|\,|B|$, la posición de AB está completamente determinada. De este modo hemos demostrado:

26.5 Teorema. Si un número complejo A está en un ángulo α y un número complejo B está en un ángulo β, entonces el producto AB está en el ángulo $\alpha + \beta$ y a una distancia $|A|\,|B|$ de O.

De este teorema podemos concluir que, si, por ejemplo, A está en $\pi/4$ y tiene 2 unidades de longitud, y B está en $\pi/6$ y tiene 4 unidades de longitud, entonces AB está en $(\pi/4 + \pi/6) = 5\pi/12$ y su longitud es de 8 unidades.

Es interesante observar que podemos multiplicar gráficamente números complejos con regla y compás. No es difícil, pero exige una construcción que no es familiar al estudiante. El problema es el siguiente: dados dos segmentos de recta y una longitud unitaria, ¿cómo podemos construir un segmento de recta cuya longitud sea el producto de las longitudes de los segmentos? En la figura 26.5 presentamos un bosquejo sencillo de esta construcción. Trazamos dos rectas que se corten en un ángulo arbi-

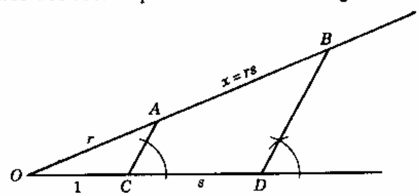


Figura 26.5

trario en O. En una de las rectas señalamos, a una unidad de distancia de O, un punto C, y, después marcamos una de las longitudes, digamos s, de C a D. Sobre la otra recta marcamos la segunda longitud, sea r, de O a A, y entonces trazamos una recta paralela a $\overline{CA}$ que pase por D. Si esta recta intercepta a la que pasa por OA en B, entonces la longitud x de $\overline{AB}$ es el producto de r y s. Podemos demostrarlo así: como el triángulo AOC es semejante al triángulo BOD, sabemos que $(x + r)/(s + 1) = r/1$. Por tanto, $x + r = rs + r$ y en consecuencia $x = rs$.

La figura 26.6 muestra una construcción con regla y compás del producto de dos complejos, $(2 + i)(-1 + i) = -3 + i$. El producto está en la suma de los ángulos correspondientes a los factores, y la longitud del producto es el producto de las longitudes de los factores.

PROBLEMAS

26.1 El número complejo A está en $\pi / 12$ y su longitud es 5; el número complejo B está en $\pi / 3$ y su longitud es 2. ¿En qué ángulo está AB y cuál es la distancia de AB a O?
26.2 El número complejo A está en $3\pi/ 2$ y su longitud es $\sqrt{3}$; el número complejo B está en $\pi/ 3$ y su longitud es $\sqrt{2}$. ¿En qué ángulo está AB y cuál es la distancia de AB a O?
26.3 Construya con regla y compás los productos siguientes:
(a) $(1 - i)(1 + i)$ (b) $(2 + i)(3 - i)$
(c) $(1 + i)(1 + i)$ (d) $i(4 + i)$
26.4 Ilustre con una gráfica que si α es cualquier ángulo, entonces $\overline{U(\alpha)} = U(-\alpha)$.
26.5 Ilustre con una gráfica que si α es un ángulo cualquiera, entonces $U(\alpha + \pi) = -U(\alpha)$.
26.6 Ilustre con una gráfica que si α es un ángulo, entonces $U(\alpha) = U(-\alpha)$ si y sólo si $\alpha = n \cdot \pi$ para algún entero n.
26.7 Demuestre que si α y β son ángulos, entonces $U(\alpha)\, U(\beta) = 1$ si y sólo si $U(\alpha) = \overline{U(\beta)}$, y $U(\alpha)\, U(\beta) = -1$ si y sólo si $U(\alpha) = -\overline{U(\beta)}$.
26.8 Demuestre que si A y B son números complejos, entonces $AB = 0$ si y sólo si $A = 0$ o $B = 0$.
26.9 Demuestre que si Z es un número complejo cualquiera, entonces $|Z| = |\overline{Z}|$.
26.10 Demuestre que si Z es un número complejo, entonces Z está sobre el eje imaginario si y sólo si $Z = -Z$.
26.11 Demuestre que si Z es un número complejo, entonces Z está sobre el eje real si y sólo si $Z = Z$.
26.12 Demuestre que si α y β son ángulos cualesquiera, entonces

$$\frac{U(\alpha)}{U(\beta)} = U(\alpha - \beta).$$

26.13 Dada la longitud unidad y una longitud $|A| > 0$, indique cómo construir la longitud $1/|A|$ con regla y compás.
26.14 Encuentre el conjunto de soluciones (en números complejos) de cada una de las ecuaciones siguientes:

(a) $Z^2 = 2i$
(b) $Z^2 = 3 + 4i$
(c) $Z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$.

26.15 Demuestre que si X, Y y Z son enteros Gaussianos (véase el problema 25.12) y $|X| = |Y| = |Z| \neq 0$, entonces $X + Y + Z \neq 0$.

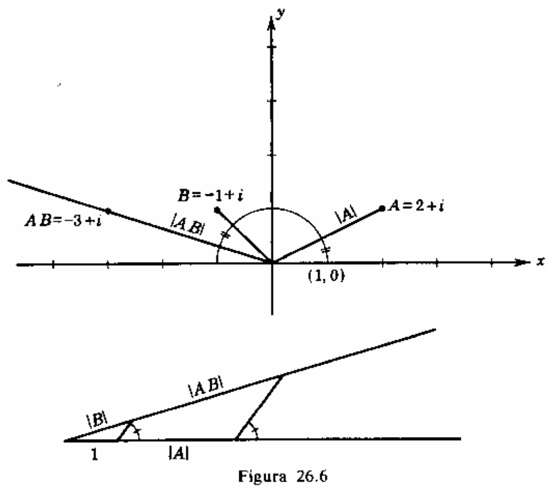


Figura 26.6

27 POTENCIAS Y RAICES

Esta sección es una continuación de la exposición iniciada en la anterior. Usando los teoremas de dicha sección podremos calcular mejor las potencias de un número complejo; por ejemplo, el cálculo de $(1-i)^{39}$ será un trabajo de pocos minutos mucho más fácil que la engorrosa multiplicación de $(1-i)$ por sí mismo 39 veces. También nos interesan las raíces cuadradas de los números complejos. Este análisis es preliminar a nuestras investigaciones posteriores sobre la solución de ecuaciones con coeficientes complejos.

El primer teorema de la sección es muy sencillo.

27.1 Teorema. Si r es un número real no negativo y U es un vector unitario en el ángulo α, entonces $[rU(\alpha)]^2 = r^2U(2\alpha)$, $[rU(\alpha)]^3 = r^3U(3\alpha)$, y $[rU(\alpha)]^4 = r^4U(4\alpha)$.

Demostración. El hecho fundamental que necesitamos para la demostración es el teorema de la suma de argumentos, teorema 26.4. Así, $[rU(\alpha)]^2 = rU(\alpha)\,rU(\alpha) = r^2U(\alpha)U(\alpha) = r^2U(\alpha+\alpha) = r^2U(2\alpha)$.

También tenemos:

$$[rU(\alpha)]^3 = rU(\alpha)[rU(\alpha)]^2 = rU(\alpha)r^2U(2\alpha) = r^3U(\alpha)U(2\alpha) = r^3U(\alpha+2\alpha) = r^3U(3\alpha).$$

Omitimos demostrar que

$$[rU(\alpha)]^4 = r^4U(4\alpha).$$

por ser muy dispendioso. ∎

Daremos unos cuantos ejemplos. El número complejo i es $1U(\pi/2)$, y por lo tanto $i^2 = 1^2U(\pi)$ y puesto que $U(\pi) = -1$, $i^2 = -1$. Este resultado no es del todo sorprendente. También concluimos que $i^4 = [1U(\pi/2)]^4 = 1^4U(2\pi) = 1$, lo cual tampoco es sorprendente puesto que $i^4 = i^2i^2 = (-1)(-1) = 1$. Podemos también usar el teorema para deducir que

$$[2U(\pi/6)]^3 = 8U(\pi/2) = 8i,$$

o que

$$[3U(32)]^4 = 3^4U(128) = 81U(128).$$

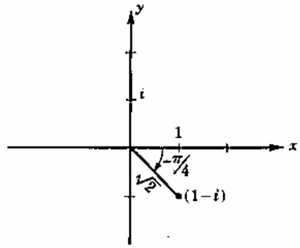


Figura 27.1

Tratemos de dar un ejemplo de una forma más complicada. Supongamos que se nos pide calcular $(1-i)^4$. Una mirada a la figura 27.1 basta para convencernos de que $1-i$ está en $-\pi/4$, y, que de hecho,

$$1 - i = \sqrt{2}U(-\pi/4).$$

Por lo tanto

$$(1-i)^4 = (\sqrt{2})^4U(-\pi),$$

y puesto que $U(-\pi) = -1$, concluimos que $(1-i)^4 = -4$. Verificamos esta igualdad observando que

$$(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = (1-2i+i^2)^2 = (1-2i-1)^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4.$$

Hay una dificultad que surge al aplicar este teorema para números complejos arbitrarios. Podemos preguntar, por ejemplo, cómo aplicar el teorema para calcular $(2+3i)^3$. No es difícil escribir $2+3i$ como el producto de un número real positivo por el vector unitario; en efecto, $2+3i = |2+3i|[1/|2+3i|](2+3i)$ $\sqrt{13}\left(\dfrac{2+3i}{\sqrt{13}}\right)$.

Ahora bien, para aplicar el teorema anterior necesitamos saber cuál es el ángulo α tal que

$$U(\alpha) = \frac{2+3i}{\sqrt{13}}.$$

También debemos saber cómo encontrar las partes real e imaginaria de $U(\alpha)$ para un ángulo α dado. La respuesta a estas dos preguntas es ésta: hay tablas, llamadas tablas trigonométricas que contienen las partes real e imaginaria de $U(\alpha)$ para varios ángulos α. La parte real de $U(\alpha)$ aparece como coseno α, y la parte imaginaria de $U(\alpha)$, como seno α. Las tablas comprenden solamente los valores de ángulos desde 0 a $\pi/4$ por razones que el estudiante debe ser capaz de descubrir si está interesado en ello. No haremos uso de las tablas trigonométricas y, como consecuencia, aplicaremos el teorema 27.1 solamente para números complejos $A = rU(\alpha)$ para los cuales es muy fácil encontrar el ángulo α.

Debe parecer muy normal al estudiante que el análogo al teorema 27.1 se aplique a las potencias mayores que 4. Así,

$$(1 - i)^{39} = \left[\sqrt{2}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right]^{39} = [\sqrt{2}U(-\pi/4)]^{39},$$

y puesto que la potencia 39 de un número es precisamente el producto del número consigo mismo 39 veces, aplicamos el teorema de la suma de argumentos 39 veces y deducimos que

$$(1 - i)^{39} = (\sqrt{2})^{39}U(\{(39)(-\pi/4)\}).$$

Escribiremos,

$$39(-\pi/4) = (-40)(\pi/4) + \pi/4 = (-5)(2\pi) + \pi/4.$$

Entonces,

$$(1 - i)^{39} = (\sqrt{2})^{39}U([-5\cdot 2\pi + \pi/4]) = (\sqrt{2})^{39} U(\pi/4) = (\sqrt{2})^{39}\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right] = 2^{19}(1 + i).$$

(Nos apresuramos a aclarar que el artificio de escribir —39 como —40 + 1 fue enteramente innecesario, pero ahorró algún cálculo operatorio, y el cálculo operatorio es notoriamente dispendioso.)

27.2 Nota. Hay una generalización del teorema 27.1 que dice: Para todo número real r, todo ángulo α, y todo número natural n, es cierto que $[rU(\alpha)]^n = r^nU(n\alpha)$. Este es el teorema de De Moivre.

No hay gran dificultad en establecer el teorema de De Moivre por inducción matemática si utilizamos la propiedad $A^{n+1} = AA^n$ para todo entero n no negativo. Procederíamos así: Sea $B = \{m : m$ es un entero no negativo y $[rU(\alpha)]^m = r^mU(m\alpha)\}$. Demostraríamos después que B es un conjunto inductivo; por tanto todo entero positivo pertenece a B, y puesto que n pertenece a B, podría concluirse que $[rU(\alpha)]^n = r^nU(n\alpha)$.

No es difícil encontrar las raíces cuadradas de números complejos que están en un ángulo α. Damos un ejemplo que muestra completamente el método.

27.3 Ejemplo. Tenemos que encontrar las raíces cuadradas de $2i$; esto es, encontrar el número o números cuyo cuadrado es $2i$. Supongamos que $rU(\alpha)$, donde r es un número real no negativo y α es un ángulo, es un número cuyo cuadrado es $2i$. Entonces $r^2\ U(2\alpha) = 2i = 2U(\pi/2)$. Concluimos, tomando las longitudes de estos dos vectores, que $r^2 = 2$, y, puesto que r es un número no negativo, $r = \sqrt{2}$. Sabemos que $U(2\alpha) = U(\pi/2)$, pero esto no implica que $2\alpha = \pi/2$; sin embargo, podemos correctamente concluir que $2\alpha = \pi/2 +$ (algún múltiplo entero n de 2π). Si $2\alpha = \pi/2 + n2\pi$, entonces $\alpha = \pi/4 + n\pi$. Si consideramos todos los posibles valores enteros de n, existen solamente dos valores posibles de $U(\alpha)$, y estos son $U(\pi/4)$ y $U(5\pi/4)$. Así $\sqrt{2}U(\pi/4)$ y $\sqrt{2}U(5\pi/4)$ son las únicas raíces cuadradas posibles de $2i$, y es fácil verificar que el cuadrado de cada una es $2i$. Una ojeada a la figura 27.2 nos convence de que

$$U(\pi/4) = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

y, por tanto las únicas raíces cuadradas de $2i$ son $1 + i$ y $-1 - i$. No es sorprendente que una de ellas sea el opuesto de la otra. ▌

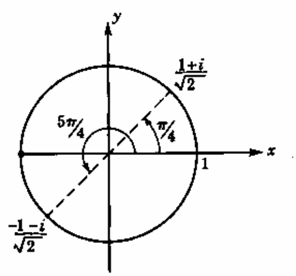


Figura 27.2

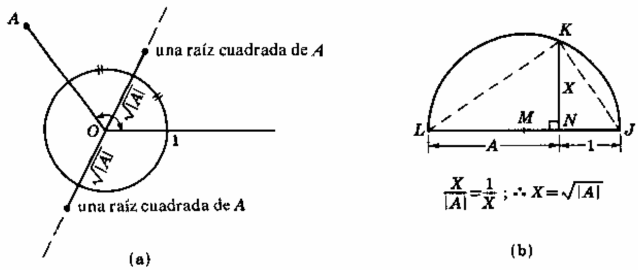


Figura 27.3

Es fácil encontrar gráficamente las raíces cuadradas de un número complejo por medio de regla y compás; mostramos tal construcción en la figura 27.3. Es razonable que las dos raíces cuadradas de un número complejo que está en un ángulo β sean $\beta/2$ y $\pi + \beta/2$, y que la longitud de una raíz cuadrada de un número complejo sea la raíz cuadrada de la longitud del número. Es sencillo bisecar un ángulo con regla y compás, y en la parte (b) de la figura 27.3 se muestra un método de construir la raíz cuadrada de un número $|A|$. La construcción es como sigue:

La distancia $|A|$ es $\overline{LN}$ y la longitud $\overline{NJ}$ es uno. Se traza una semicircunferencia por L con centro en M, punto medio de $\overline{LJ}$, y K es la intersección de la semicircunferencia y la perpendicular levantada en N. Entonces KN tiene longitud $\sqrt{|A|}$. En líneas generales el razonamiento es así: El ángulo LKJ está inscrito en una semicircunferencia y, por tanto, es recto; tanto el ángulo NLK como el ángulo NKJ son complementos del ángulo LKN, y, por tanto, son iguales; los triángulos NLK y NKJ son, por consiguiente, semejantes; de donde, $x/|A| = 1/x$; y, finalmente, $x^2 = |A|$.

Para terminar, damos un método para calcular algebraicamente las raíces cuadradas de un número complejo cuando se dan la parte real y la parte imaginaria. En la sección siguiente necesitaremos este teorema.

27.4 Teorema. Si x, y, a y b son números reales y $(x + iy)^2 = a + bi$, entonces

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \quad \text{y} \quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}.$$

Demostración. Si $(x + yi)^2 = a + bi$, entonces $x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$, de donde $x^2 - y^2 = a$ y $2xy = b$. Observamos que $|(x+yi)^2| = |x+yi|^2 = x^2 + y^2 = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$;

y tenemos

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2},$$

y

$$x^2 - y^2 = a.$$

Si sumamos estas dos ecuaciones, obtenemos

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},$$

si las restamos encontramos que

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}. \quad ∎$$

Hemos localizado las posibles raíces cuadradas del número complejo $a + bi$ excepto en lo que al signo se refiere. Decimos que dos números reales tienen el mismo signo cuando no sucede que uno de los números es positivo y el otro negativo. Si $(x + yi)^2 = a + bi$, entonces $2xy = b$ y, por consiguiente, xy y b tienen el mismo signo. Este resultado, junto con los expuestos en el teorema anterior, describen ciertos números x y y para los cuales es posible que $(x + iy)^2 = a + bi$. Ahora demostraremos que para estos números es indudablemente cierto que $(x + iy)^2 = a + bi$.

27.5 Teorema. Si x, y, a y b, son números reales, si

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$$

y

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},$$

y si b tiene el mismo signo que el producto xy, entonces $(x + yi)^2 = a + bi$.

Demostración. Se debe mostrar que, bajo estas circunstancias, $x^2 - y^2 = a$ y $2xy = b$. Ahora bien,

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right) = \frac{2a}{2} = a,$$

y

$$x^2y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} = \frac{a^2+b^2-a^2}{2} = \frac{b^2}{4}.$$

Se deduce que $4x^2y^2 = b^2$ y por tanto $|2xy| = |b|$. Finalmente, b y xy tienen el mismo signo, y se concluye que $2xy = b$. ▮

Damos un ejemplo que muestra el uso de los dos últimos teoremas.

27.6 Ejemplo. Encontrar las raíces cuadradas de $3 - 4i$. Si $(x + yi)^2 = 3 - 4i$, entonces de acuerdo al teorema 27.4, donde $a = 3$ y $b = -4$, tenemos

$$x^2 = \frac{\sqrt{3^2+4^2}+3}{2} = \frac{\sqrt{25}+3}{2} = 4$$

y

$$y^2 = \frac{\sqrt{3^2+4^2}-3}{2} = \frac{\sqrt{25}-3}{2} = 1.$$

Por tanto, x es 2 ó -2 y y es 1 ó -1. Si nos valemos del teorema 27.5, vemos que xy es negativo (del mismo signo que -4). Las posibilidades, entonces, son $x = 2$, $y = -1$ o $x = -2$, $y = 1$. Esto es, $2 - i$ y $-2 + i$ son las raíces buscadas. Al verificar encontramos que $(2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$, y que $(-2 + i)^2 = [-(2 - i)]^2 = (2 - i)^2 = 3 - 4i$. ▮

PROBLEMAS

27.1 Calcule $(1 + i)^{23}$

27.2 Calcule $(-1 + i)^{13}$

27.3 Calcule $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7$ y luego calcule

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{50}.$$

27.4 Calcule $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$ y luego calcule

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{101}.$$

27.5 Exprese el número complejo $Z = \frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$ en la forma $rU(\alpha)$ donde r es un número real no negativo y α es un ángulo; utilice el resultado para encontrar las raíces cuadradas de Z.

27.6 Haga lo mismo que en el problema 27.5 con el número complejo $-\sqrt{2}/2 - (\sqrt{2}/2)i$.

27.7 Encuentre las raíces cuadradas de los números complejos siguientes:

(a) $5 + 12i$ (b) $12 - 5i$

(c) $-1 - 2i$ (d) $-2 + 3i$.

Verifique sus respuestas en (a) y (b) por medio de una construcción con regla y compás.

27.8 Demuestre que si A es cualquier número complejo, hay a lo sumo, dos números complejos Z tales que $Z^2 = A$.

27.9 Demuestre que si $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b, y c, son números reales, y Z es un número complejo tal que $f(Z) = 0$, entonces también es $f(\bar{Z}) = 0$.

27.10 Demuestre que si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde a, b, c, y d son números reales, y Z es un número complejo tal que $f(Z) = 0$, entonces también es $f(\bar{Z}) = 0$

27.11 Dé un ejemplo de una función f tal que $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ para números complejos A, B, y C tales que $f(i) = 0$ pero $f(-i) = f(i) \neq 0$.

27.12 Reemplace cada signo de interrogación por la expresión simplificada correcta.

(a) $(x - 1)(x + 1) = ?$
(b) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = ?$
(c) $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = ?$
(d) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = ?$
(e) $(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = ?$

27.13 Encuentre las soluciones de la ecuación $Z^3 = 1$.

27.14 Encuentre cuatro soluciones a la ecuación $Z^4 = 1$ y pruebe que no hay otras (en números complejos).

27.15 Demuestre que si Z es un número complejo tal que $Z^5 = 1$ pero $Z \neq 1$, entonces $Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$.

27.16 Dé un ejemplo de un número complejo Z tal que $|Z| = 1$ pero para cualquier entero positivo n, $Z^n \neq 1$.

28 ECUACIONES COMPLEJAS

Regresamos al problema de resolver ecuaciones cuadráticas. Hemos visto que, si a, b, y c son números reales con $a \neq 0$, entonces puede haber dos, uno, o ningún número real x tal que $ax^2 + bx + c = 0$. En la terminología común, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede tener dos, una, o ninguna solución real. Si consideramos el problema correspondiente para números complejos, es obvio que el asunto es muy diferente. No hay número real x tal que $x^2 + 1 = 0$; pero ciertamente hay un número complejo i tal que $i^2 + 1 = 0$, y $-i$ es la otra solución compleja de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. En esta sección investigaremos la posibilidad de encontrar las soluciones complejas de las ecuaciones. También probaremos dos sencillos teoremas que indican la conveniencia de resolver ciertas ecuaciones.

En primer lugar consideremos el problema de encontrar números complejos x tales que $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b, y c son números reales con $a \neq 0$. No repetiremos todos los argumentos hechos en la sección 24, sino simplemente aseguraremos que, usando el proceso de "completar el cuadrado", se puede probar que $ax^2 + bx + c = 0$ si y sólo si

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

De este hecho se deduce que existirá un número complejo x tal que $ax^2 + bx + c = 0$ si y sólo si hay un número complejo cuyo cuadrado sea $(b^2 - 4ac)/4a^2$. Esto es sencillo. Si $(b^2 - 4ac)/4a^2 \geq 0$, entonces $\sqrt{(b^2 - 4ac)}/2a$ es dicho número; y si $(b^2 - 4ac)/2a < 0$, entonces

$$\left[\frac{\sqrt{|(b^2 - 4ac)|}}{2a}\right]i$$

es el número buscado puesto que

$$\left[\left(\frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}\right)i\right]^2 = -\frac{|(b^2 - 4ac)|}{4a^2}$$

y éste es $(b^2 - 4ac)/4a^2$ porque el último es negativo. Así, por ejemplo, podemos encontrar los números complejos x tales que $x^2 + 2x + 2 = 0$, observando que estos números son precisamente los números x tales que $x^2 + 2x + 1 = -1$, o, lo que es lo mismo, $(x + 1)^2 = -1$. Deducimos que $x^2 + 2x + 2 = 0$ si y sólo si $x + 1 = \pm i$, o en forma equivalente, si $x = -1 \pm i$. Así $-1 + i$ y $-1 - i$ son las soluciones complejas de la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$, y esta ecuación no tiene soluciones reales.

El argumento del párrafo anterior muestra que hay un número complejo x tal que $ax^2 + bx + c = 0$ cuando a, b, y c son números reales con $a \neq 0$. En otras palabras, una ecuación cuadrática con coeficientes reales tiene siempre soluciones complejas. Este es un resultado interesante, pero un teorema mucho más interesante es el que establece que una ecuación cuadrática con coeficientes complejos tiene siempre soluciones complejas. Informalmente podemos describir la situación como sigue: Hemos descubierto una nueva clase de números tales que toda ecuación cuadrática real puede ser resuelta en términos de estos nuevos números. Surge ahora la necesidad de investigar si toda ecuación cuadrática cuyos coeficientes pertenezcan a esta clase de números tiene solución. Podríamos sospechar que una ecuación cuadrática compleja requeriría una nueva clase de números, digamos "números hiper-complejos", para su solución; pero este no es el caso; probemos el teorema sobre el cual hemos comentado ya tanto.

28.1 Teorema. Sean a, b, y c números complejos, con $a \neq 0$; entonces $ax^2 + bx + c = 0$ si y solamente si $x = (-b + s)/2a$, donde s^2 es igual a $b^2 - 4ac$.

Antes de probar el teorema expliquemos algo la terminología que puede resultar confusa. La forma natural de enunciar el teorema anterior podría ser asegurando que $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ son las soluciones de la ecuación, pero, desafortunadamente no hemos definido $\sqrt{b^2 - 4ac}$ en el caso en que $b^2 - 4ac$ no es un número real. Más aún, no existe un modo razonable para definir $\sqrt{d}$ si d no es un número real. Es fácil ver, por ejemplo, que $1 - i$ y $-1 + i$ son raíces cuadradas de $-2i$ porque el cuadrado de cualquiera de estos números es $-2i$. Sin embargo, no tenemos modo de decidir inequívocamente cuál debe tomarse como $\sqrt{-2i}$. (Recordemos que en matemática un nombre se refiere a un solo objeto, y no indiscriminadamente a uno cualquiera de los elementos de un conjunto.) Aclarada la terminología, procedamos a la demostración del teorema.

Demostración del teorema 28.1 La demostración es una repetición de ideas ya conocidas. Es cierto que $ax^2 + bx + c = 0$, donde x es un número complejo, si y sólo si

$$\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

De aquí concluimos que $ax^2 + bx + c = 0$ si y solamente si

$$x - \frac{b}{2a}$$

es una raíz cuadrada de $(b^2 - 4ac)/4a^2$. Ahora, se concluye que el teorema es verdadero puesto que las raíces cuadradas del cociente $(b^2 - 4ac)/4a^2$ son precisamente las raíces cuadradas de $b^2 - 4ac$ divididas por $2a$. ▌

Es engorroso, pero no difícil calcular las raíces de una ecuación cuadrática compleja. Demos un ejemplo.

28.2 Ejemplo. Debemos encontrar los números complejos x tales que $x^2 + (-2 - 2i)x - 3 + 6i = 0$. Usaremos, en lugar del teorema 28.1, el procedimiento por el cual se estableció dicho teorema. Deducimos sucesivamente que x es una solución de la ecuación si y sólo si cada una de las expresiones siguientes es correcta:

$$x^2 + (-2 - 2i)x = 3 - 6i;$$

$$x^2 + (-2 - 2i)x + \left(\frac{-2 - 2i}{2}\right)^2 = 3 - 6i + \left(\frac{-2 - 2i}{2}\right)^2;$$

$$(x - 1 - i)^2 = 3 - 6i + (-1 - i)^2;$$

$$(x - 1 - i)^2 = 3 - 6i + 1 + 2i + i^2;$$

y

$$(x - 1 - i)^2 = 3 - 4i.$$

Debemos encontrar ahora las raíces cuadradas de $3 - 4i$. Por fortuna (y un poco de previsión) resulta que ya lo hicimos en el ejemplo 27.6. Las raíces cuadradas de $3 - 4i$ son $2 - i$ y $-2 + i$. En consecuencia, $x^2 + (-2 - 2i)x - 3 + 6i = 0$, si y sólo si $x - 1 - i = 2 - i$ (y en este caso $x = 3$), o $(x - 1 - i) = -2 + i$ (caso en el cual $x = -1 + 2i$). Naturalmente, a no ser que el estudiante tenga mucha confianza en su habilidad operatoria, debe verificar que estos números son, en efecto, las soluciones de la ecuación; sin embargo, parece no tener importancia efectuar este cálculo directo. ▌

Es oportuno preguntar si toda ecuación cúbica compleja tiene una solución; esto es, si a, b, c, d son números complejos y $a \neq 0$, ¿existe un número complejo x tal que $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$? Podríamos ser más optimistas aún y esperar que ecuaciones más complicadas pertenecientes a esta misma clase tengan solución, y que cualquier suma de múltiplos complejos de potencias enteras positivas de x (esto es, cualquier polinomio en x) se anula para algún número complejo x. Es de notar que esta suposición se cumple, todo polinomio complejo tiene una raíz. Esta propiedad es llamada "el teorema fundamental del álgebra". No probaremos este teorema pero queremos hacer hincapié en que su demostración requiere necesariamente el axioma de continuidad, y que el lector debe comprender por qué lo hacemos así. Puesto que nuestro método, al usar el axioma de continuidad, es esbozarlo en la forma más sencilla, la prueba del teorema fundamental del álgebra está, simplemente, más allá de nuestro alcance.

Concluimos esta sección con un solo teorema y una consecuencia que ofrece alguna información sobre el por qué son interesantes las soluciones de las ecuaciones polinómicas. Exponemos el teorema para funciones cuadráticas, pero esencialmente la misma prueba demuestra su veracidad para polinomios de cualquier grado.

28.3 Teorema del residuo. Sean b, c, y r números complejos y sea f una función tal que $f(x) = x^2 + bx + c$ para cada número complejo x. Entonces existe una función compleja* lineal g tal que $f(x) = (x - r)g(x) + f(r)$ para todo número complejo x.

Demostración. Trataremos de explicar la demostración informalmente de tal manera que el estudiante pueda visualizar la generalización del teorema para polinomios cúbicos y otros polinomios de grado superior. Si sustraemos $x(x - r)$ de $f(x)$, obtenemos una expresión que es lineal en x; si sustraemos el múltiplo conveniente de $(x - r)$ del resultado, nos deshacemos de todos los "términos x" y queda únicamente un número. Esto es, $x^2 + bx + c - x(x - r) -$ (algún número) $(x - r) =$ (un número). Llamaremos al último término el residuo R. Entonces $f(x) = x^2 + bx + c = (x - r)$ (función lineal de x) $+ R$. Por tanto, $f(r) = 0$ (función lineal de r) $+ R = R$, y hemos mostrado que $R = f(r)$. ▮

De este teorema se sigue inmediatamente que si r es una solución de la ecuación $f(x) = x^2 + bx + c = 0$ (esto es, si $f(r) = 0$), entonces $x - r$ es un factor de $x^2 + bx + c$. Esta proposición se llama el teorema del factor. Así, si $f(x) = x^2 - x - 42$, y si somos lo suficientemente afortunados para observar que $f(7) = 49 - 7 - 42 = 0$, podemos deducir que $x^2 - x - 42 = (x - 7)$(una función lineal de x) para todo x. Naturalmente, el segundo factor es precisamente, $x + 6$.

Usando sucesivamente el teorema fundamental del álgebra y el teorema del factor, podemos demostrar que cualquier polinomio complejo es el producto de factores lineales.

PROBLEMAS

28.1 Compruebe por cálculo directo que si $x = 3$ o $x = -1 + 2i$, entonces $x^2 + (-2 - 2i)x - 3 + 6i = 0$.

28.2 Resuelva para x y exprese su respuesta en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

(a) $x^2 - 4x + 13 = 0$
(b) $x^2 + \sqrt{15}x - 2i = 0$
(c) $x^2 - x + 1 = 0$
(d) $ix^2 - ix + 1 = 0$.

28.3 Encuentre todos los números complejos Z tales que:
(a) $Z^3 + 1 = 0$.
(b) $Z^4 + 1 = 0$.

28.4 Descomponga en factores lineales:
(a) $x^3 + 8$ (b) $x^4 + 81$ (c) $x^6 - 64$.

28.5 Dado un número complejo r, encuentre las funciones polinómicas f, g, h, y q tales que:
(a) $(x - r)f(x) = x^2 - r^2$
(b) $(x - r)g(x) = x^3 - r^3$
(c) $(x - r)h(x) = x^4 - r^4$
(d) $(x - r)q(x) = x^5 - r^5$

28.6 Sean b, c, y d números complejos y sea f una función tal que $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ para todo número complejo x. Demuestre que si r es cualquier número complejo, entonces hay una función cuadrática compleja g tal que $f(x) = (x - r)g(x) + f(r)$ para todo número complejo x.

28.7 Sean b, c, d, y e números complejos y sea f una función tal que $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ para todo número complejo x. Demuestre que si r es cualquier número complejo, entonces existe una función cúbica compleja g tal que $f(x) = (x - r)g(x) + f(r)$ para cada número complejo x.

28.8 Sean b, c, d, e, y n números complejos y sea f una función tal que para cada número complejo x, $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + n$. Demuestre que si r es cualquier número complejo, existe una función bicuadrada compleja (cuarto grado) g, tal que para todo número complejo x, $f(x) = (x - r)g(x) + f(r)$.

28.9 Sean b, c, d, e, y r números complejos y sea f una función tal que $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + r$ para cada número complejo x. Demuestre (teorema del factor para funciones de quinto grado) que existen números complejos Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, y Z_5, tales que $f(x) = (x - Z_1)(x - Z_2)(x - Z_3)(x - Z_4)(x - Z_5)$ para cada número complejo x. (Dé por sentado el teorema fundamental del álgebra.)

28.10 El conjunto de todas las parejas ordenadas de números racionales, con la adición y la multiplicación definidas lo mismo que para los números complejos, se llama cuerpo de los números Gaussianos. Demuestre que los axiomas A1 — A5, M1 — M5, D, y AM se cumplen en el cuerpo de los números Gaussianos. Demuestre, sin embargo, que no hay un número Gaussiano x tal que $x^2 = 2$.

29 NUMEROS HIPERCOMPLEJOS

Es muy natural intentar construir una multiplicación vectorial para vectores tridimensionales, puesto que la multiplicación de vectores

* Esto es, una función g cuyo dominio es el conjunto de todos los números complejos y que para algunos números m y b del dominio, es cierto que $g(x) = mx + b$ para todo número complejo x.

bidimensionales tuvo tan buen éxito. Esta sección está dedicada a algunos resultados sobre las posibles extensiones de la noción de multiplicación vectorial en tres dimensiones, o en un número mayor de dimensiones. El bosquejo previo de esta sección no será utilizado en el trabajo posterior; se presenta para dar al lector una idea de la situación general y del importante papel desempeñado por los números complejos. Vale recordar que los resultados de esta sección han sido establecidos durante el siglo pasado, y, sin embargo, uno de los teoremas que citamos tiene menos de cuatro años.

Una de las más recientes y más afortunadas extensiones de la multiplicación de vectores bidimensionales se basa directamente en la construcción de la multiplicación compleja a partir de la multiplicación real. Un número complejo es una pareja ordenada de números reales. Generalizamos a continuación:

29.1 Definición. Un cuaternio es una pareja ordenada de números complejos.

Así, $((1, 2), (3, 4))$ y $(2 + i, 1 - i)$ son cuaternios.

Bosquejaremos, sin definición formal ni demostración, algunas de las propiedades más sencillas de los cuaternios. Es natural extender la noción de adición conviniendo que la suma de los cuaternios (A, B) y (C, D) es $(A + C, B + D)$. Así, $((1, 2), (3, 4)) + ((5, 6), (7, 8)) = ((6, 8), (10, 12))$ y $(1 - i, 4 + i) + (7 + 2i, -5 + i) = (8 + i, -1 + 2i)$. Los cuaternios forman un grupo conmutativo respecto a la operación de adición, aunque no probaremos este hecho.

También extendemos la noción de multiplicación escalar definiendo el producto de un número complejo A por un cuaternio (B, C) como el cuaternio (AB, AC). Todas las propiedades de la multiplicación escalar (véase el problema 18.8) se extienden a la multiplicación de números complejos y cuaternios*. Definimos, por analogía con la definición de i, el cuaternio j como $((0, 0), (1, 0))$. Entonces el cuaternio (A, B) es igual a $A((1, 0), (0, 0)) + B((0, 0), (1, 0))$. Repetimos el convenio aceptado en la discusión de los números complejos y abreviamos el último resultado como $A + Bj$. Así, cada cuaternio es la suma de un número complejo con el producto de un número complejo multiplicado por j; por ejemplo, $(1 + 2i, 4 - 5i)$ se escribe como $1 + 2i + (4 - 5i)j$.

Definimos el producto de dos cuaternios de una manera ligeramente distinta a la definición de número complejo; trabajamos en un par de signos conjugados.

29.2 Definición. Si $A, B, C,$ y D son números complejos, entonces $(A + Bj)(C + Dj) = AC - B\bar{D} + (AD + B\bar{C})j$.

Esta definición se puede recordar fácilmente mediante la regla siguiente: Si $A + Bj$ se multiplica por $C + Dj$ y si se acepta que la multiplicación es distributiva a derecha e izquierda respecto a la adición, entonces $(A + Bj)(C + Dj) = AC + A(Dj) + (Bj)C + (Bj)(Dj)$. Podemos obtener de aquí la expresión definida para el producto aceptando que la multiplicación es asociativa, que $jC = \bar{C}j$, que $jD = \bar{D}j$, y que $j^2 = -1$. Dicho de otra manera, "si se mueve j a través de un número complejo, se cambia el número por su conjugado". Apliquemos esta regla para calcular el producto de dos cuaternios.

$$
\begin{aligned}
&[(2 - 3i) + (2 + 4i)j][(1 + i) + (4 - 3i)j] \\
&= (2 - 3i)(1 + i) + (2 - 3i)(4 - 3i)j + \\
&\quad (2 + 4i)j(1 + i) + (2 + 4i)j(4 - 3i)j \\
&= (5 - i) + (-1 - 18i)j + (2 + 4i) \\
&\quad (1 - i)j + (2 + 4i)(4 + 3i)(-1) \\
&= (5 - i) + (-1 - 18i)j + (6 + 2i)j - \\
&\qquad\qquad (-4 + 22i) \\
&= (9 - 23i) + (5 - 16i)j.
\end{aligned}
$$

Somos los primeros en admitir que esta multiplicación es tediosa.

* El conjunto de los cuaternios es el único ejemplo que encontraremos de un espacio vectorial complejo. Resulta siempre, que en aplicaciones tales como aquellas de ingeniería y física, estos espacios vectoriales complejos son más útiles que los reales.

Calcularemos el producto de dos cuaternios muy simples, j e i (más exactamente, calcularemos el producto $[(0 + 0i) + (1 + 0i)j]$ $[(0 + 1i + (0 + 0i)j])$. Este producto puede ser escrito, omitida una parte de ceros, como $(1 + 0i)j(0 + 1i) = (1 + 0i)(0 - 1i)j = -ij$. Observamos que la multiplicación de cuaternios no es conmutativa. Por otra parte, es cierto que la adición y la multiplicación de cuaternios satisface los axiomas de cuerpo A1 — A5, M1 — M5, D, y AM, excepto para la conmutatividad de la multiplicación. No demostraremos estas conclusiones, sino que nos contentaremos con demostrar una simple proposición que nos indica cómo calcular el inverso multiplicativo de un cuaternio distinto de cero.

29.3 Teorema. Si A y B son números complejos, entonces $(A + Bj)(\bar{A} - Bj) = (\bar{A} - Bj)(A + Bj) = A\bar{A} + B\bar{B}$.

Demostración. Usamos la definición de multiplicación de cuaternios en el caso especial en que $C = \bar{A}$ y $D = -B$. Calculamos:

$$(A + Bj)(\bar{A} - Bj) = A\bar{A} - BjBj + Bj\bar{A} - ABj = A\bar{A} - B(\bar{B}j)j + B\bar{\bar{A}}j - ABj = A\bar{A} + B\bar{B} + (BA - AB)j = A\bar{A} + B\bar{B}.$$

El cálculo del producto en orden inverso es semejante a éste. ▌

El teorema anterior indica cómo calcular el inverso multiplicativo de un cuaternio distinto de cero. Consideremos, por ejemplo,

$$Q = (1 + 2i) + (3 + 4i)j.$$

Sabemos por el teorema anterior que

$$Q[(1 - 2i) + (-3 - 4i)j] = (1 + 2i)(1 - 2i) + (3 + 4i)(3 - 4i) = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Concluimos que

$$\left(\frac{1}{30} - \frac{2}{30}i\right) + \left(-\frac{3}{30} - \frac{4}{30}i\right)j$$

es el inverso multiplicativo de Q.

El cuaternio $\bar{A} - Bj$ se llama el conjugado del cuaternio $A + Bj$. Esta clase de conjugación tiene algunas de las propiedades de la conjugación de números complejos, pero, desafortunadamente, no todas.

Dejemos los cuaternios y expongamos unos cuantos hechos sobre las posibles extensiones de este proceso. El conjunto de los cuaternios se llama "espacio real de dimensión cuatro" porque se requieren cuatro números reales para especificar un cuaternio. Vamos a considerar la clase de las parejas de cuaternios que podría llamarse real de dimensión ocho. Podemos definir la adición y la multiplicación por analogía con las definiciones de estas operaciones en los números complejos y en los cuaternios. Se comprueba que el conjunto de axiomas A1 — A5, M1 — M5, D, y AM se satisfacen, excepto que la multiplicación no es conmutativa ni asociativa. Este sistema algebraico de dimensión 8 fue estudiado primero por Cayley, y los elementos son llamados "números de Cayley". Si intentamos continuar este proceso considerando parejas de números de Cayley, la situación degenera más aún; y se ha demostrado que, para este sistema y para cualquier otro semejante, es cierto que no existen inversos multiplicativos. Este resultado es muy reciente. Es una consecuencia de teoremas establecidos dentro de los últimos años, independientemente, por John Milnor (Universidad de Princeton), M. Kervaire (Universidad de New York) y J. F. Adams (Universidad de Cambridge) como culminación de una larga sucesión de investigaciones geométricas iniciadas por H. Hopf (Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich).

Concluimos la sección con un bosquejo breve, para beneficio del estudiante inquieto, de la demostración de que no existe una multiplicación posible entre vectores tridimensionales tal que, con la adición vectorial, los axiomas A1—A5, M1—M5, D, y AM sea compatible y tal que la multiplicación escalar por el número real a sea idéntica a la multiplicación por el vector $(a, 0, 0)$.

Esto se prueba suponiendo que tal multiplicación existe y razonando por contradicción. El único hecho importante que hay que probar es:

Para cada vector tridimensional A, existen números reales a, b, y c, no todos cero, tales que $aA^2 + bA + c(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

Dado este hecho, argumentamos como sigue: No puede ser $a = b = 0$, porque entonces c sería igual a 0, lo que es una contradicción. Si $a = 0$, pero $b \neq 0 \neq c$, entonces A es un múltiplo escalar de $(1, 0, 0)$. Si $a \neq 0$, entonces usamos el método de resolver ecuaciones cuadráticas para probar que $A = d\,(1, 0, 0) + eJ$ donde d y e son números reales y $J^2 = (-1)\,(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$. Usando el argumento del teorema del factor mostramos que J y $-J$ son los únicos vectores con cuadrados iguales a $(-1, 0, 0)$, y se deduce que todo vector tridimensional es igual a $d\,(1, 0, 0) + eJ$ para algunos números reales d y e; pero el conjunto de sumas de múltiplos escalares de dos vectores tridimensionales es precisamente un plano, y no es idéntico a todo el espacio 3, lo cual es una contradicción.

Finalmente, el hecho de que todo vector tridimensional A "satisface una ecuación cuadrática" se prueba considerando los vectores A^3, A^2, A, y $(1, 0, 0)$. Es cierto (como mostraremos más tarde) que para cuatro vectores tridimensionales cualesquiera, y, en particular, para éste, existen números reales a, b, c, y d, no todos cero, tales que $aA^3 + bA^2 + cA + d\,(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Si $a = 0$, hemos terminado; de otro modo, reproducimos la demostración de que cualquier polinomio cúbico real puede ser descompuesto en factores lineales y cuadráticos para mostrar que A satisface o una ecuación lineal o una ecuación cuadrática.

PROBLEMAS

29.1 Sea $Q = 2 + 3i + (4 - 5i)j$ y $P = 3 - i + (7 + i)j$; calcule

(a) $Q + P$; (b) $Q - P$;
(c) $2P - Q$; (d) QP; (e) PQ.

29.2 Calcule los productos escalares

(a) $(1 - i)\,(3 + 2i, 4 + 3i)$;
(b) $(1 + i)\,(3 + 2i, 4 + 3i)$;
(c) $(3 + 2i)\,(5 - 7i, 6 + 5i)$.

29.3 Demuestre que el conjugado de la suma de dos cuaternios es igual a la suma de los conjugados.

29.4 Demuestre que si $Q = ((a, b), (c, d))$ es un cuaternio, entonces $Q\bar{Q} = \bar{Q}Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

29.5 Demuestre que si Q y P son cuaternios, entonces $\overline{QP} = \bar{P}\bar{Q}$.

29.6 La longitud del cuaternio $((a, b), (c, d))$ está definida por $|((a, b), (c, d))| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Demuestre que si Q y P son cuaternios, entonces $|QP| = |Q|\,|P|$.

CAPITULO 5

Productos Interiores

En el capítulo precedente hemos visto que es imposible definir una buena multiplicación que asigne a cada pareja de vectores tridimensionales un vector tridimensional. Esto es, no podemos definir una multiplicación de modo que el espacio tridimensional con esta multiplicación y con la adición vectorial satisfaga los axiomas de cuerpo, que al mismo tiempo, sea análoga a la multiplicación escalar.

Hay, sin embargo, una multiplicación que es válida en el espacio tridimensional y, de hecho, en un espacio vectorial n-dimensional, para todo número natural n, que tiene muchas propiedades útiles. Esta multiplicación asigna a cada pareja de vectores un escalar, no un vector, y este escalar se llama su producto interior. La perpendicularidad y otras nociones geométricas serán definidas en términos del producto interior, y, más tarde, encontraremos que los productos interiores son valiosísimos en nuestra investigación de geometría vectorial.

30 PRODUCTOS INTERIORES

En esta sección definimos el producto interior de dos vectores, establecemos las propiedades algebraicas de esta clase de multiplicación, y encontramos una interpretación geométrica para ella.

30.1 Definición. El producto interior de dos vectores tridimensionales (a, b, c) y (x, y, z), escrito $(a, b, c) \cdot (x, y, z)$, se define como $ax + by + cz$. En forma semejante el producto interior de los vectores bidimensionales (a, b) y (x, y) es $ax + by$.

Así, $(2, 5, 1) \cdot (3, 1, 4) = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 15$ y $(-2, 3) \cdot (4, 1) = (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 1 = -5$.

El producto interior también se llama producto *escalar*. El producto escalar $A \cdot B$ de los vectores A y B es un escalar, no un vector. Así, un espacio vectorial con la operación $\cdot$ no satisface el axioma de clausura.

Hay tres propiedades algebraicas importantes del producto interior.

30.2 Teorema. Si A, B, C son vectores y r es un número, entonces

(i) $A \cdot B = B \cdot A$,
(ii) $r(A \cdot B) = (rA) \cdot B = A \cdot (rB)$,
(iii) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$, y
$(B + C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A)$.

No probaremos estos enunciados puesto que es más fácil pedirle al lector que los demuestre en los problemas de esta sección. El primer enunciado asegura que $\cdot$ es una operación conmutativa tal como, por ejemplo, $(2, 3) \cdot (4, 7) = (4, 7) \cdot (2, 3)$. El segundo enunciado es la relación entre el producto interior y la multiplicación escalar. Esto asegura, por ejemplo, que los tres cálculos siguientes nos llevarán a la misma respuesta.

$2((3, 4) \cdot (1, -2)) = 2(3 \cdot 1 + 4(-2)) = 2(-5) = -10$.

$(2(3, 4)) \cdot (1, -2) = (6, 8) \cdot (1, -2) = 6 \cdot 1 + 8(-2) = -10.$
$(3, 4) \cdot (2(1, -2)) = (3, 4) \cdot (2, -4) = 3 \cdot 2 + 4(-4) = -10.$

La tercera parte del teorema asegura que el producto interior es distributivo respecto a la adición vectorial.

Damos, además, ejemplos del uso del teorema.

30.3 Ejemplos. Calculamos

$$(-1, 3, 1) \cdot [(2, 3, 4) + (1, -4, 6)]$$

en dos formas: primero, usando únicamente las definiciones de adición vectorial y de producto interior:

$$\begin{aligned}(-1, 3, 1) \cdot [(2, 3, 4) + (1, -4, 6)] &= (-1, 3, 1) \cdot (3, -1, 10)\\ &= (-1)(3) + (3)(-1) + (1)(10)\\ &= -3 \quad -3 \quad + 10 = 4;\end{aligned}$$

segundo, con el empleo del enunciado (iii) del teorema anterior:

$$\begin{aligned}&(-1, 3, 1) \cdot [(2, 3, 4) + (1, -4, 6)]\\ &= (-1, 3, 1) \cdot (2, 3, 4) + (-1, 3, 1) \cdot (1, -4, 6)\\ &= (-2 + 9 + 4) + (-1 - 12 + 6)\\ &= 11 - 7 = 4.\end{aligned}$$

Como otro ejemplo, podemos calcular el producto interior de dos vectores bidimensionales $a(1, 3)$ y $b(-1, 2)$, donde a y b son escalares. Usando las definiciones de multiplicación escalar y producto interior:

$$\begin{aligned}&[a(1, 3)] \cdot [b(-1, 2)] = (a, 3a) \cdot (-b, 2b)\\ &= -ab + 6ab = 5ab.\end{aligned}$$

Alternativamente, con ayuda de la parte (ii) del teorema 30.2:

$$\begin{aligned}[a(1, 3)] \cdot [b(-1, 2)] &= a\{(1, 3) \cdot [b(-1, 2)]\}\\ &= a\{[b(-1, 2)] \cdot (1, 3)\}\\ &= ab[(-1, 2) \cdot (1, 3)]\\ &= ab[-1 + 6] = 5ab. \blacksquare\end{aligned}$$

Hay una simple, pero importante relación entre productos interiores y longitud. Observamos que $(a, b) \cdot (a, b) = a^2 + b^2 = |(a, b)|^2$ y que $(a, b, c) \cdot (a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 = |(a, b, c)|^2$. Esto establece el teorema siguiente.

30.4 Teorema. Si A es un vector, entonces $A \cdot A = |A|^2$.

Ahora, con el teorema 30.2 y el anterior, podemos obtener una descripción del producto interior $A \cdot B$ de dos vectores en términos de las longitudes $|A|$, $|B|$, y $|A - B|$. Esto nos llevará a una descripción geométrica de los productos interiores.

30.5 Teorema. Si A y B son vectores, entonces

$$|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2A \cdot B;$$

por tanto

$$A \cdot B = \tfrac{1}{2}(|A|^2 + |B|^2 - |A - B|^2).$$

Demostración. Simplemente calculamos;

$$\begin{aligned}|A - B|^2 &= (A - B) \cdot (A - B)\\ &= (A - B) \cdot A + (A - B) \cdot (-B)\\ &= A \cdot A + (-B) \cdot A + A \cdot (-B) + (-B) \cdot (-B)\\ &= A \cdot A - B \cdot A - A \cdot B + B \cdot B\\ &= |A|^2 + |B|^2 - 2A \cdot B.\end{aligned}$$

Las justificaciones para las igualdades sucesivas son los teoremas 30.4, 30.2 (iii), 30.2 (iii) nuevamente, 30.2 (ii), y entonces 30.2 (i) y 30.4. $\blacksquare$

La interpretación geométrica del producto escalar depende de la ley del coseno* que, cuando se aplica (véase la figura 30.1) al triángulo con vértices O, A, y B, nos dirá que

$$|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A|\,|B| \cos \gamma,$$

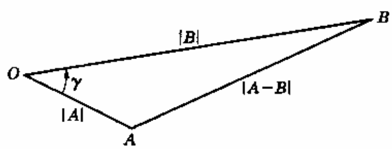


Figura 30.1

* Si no ha estudiado trigonometría, pase por alto este parágrafo y adelántese a la definición 30.6. El parágrafo se usa solamente para motivar la definición.

donde γ es el ángulo entre el vector A y el vector B. Si comparamos esta ecuación con la que afirma el teorema 30.5,

$$|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2A \cdot B,$$

concluimos que $A \cdot B = |A|\,|B| \cos \gamma$. Así, el producto escalar de dos vectores es el producto de las longitudes por el coseno del ángulo incluido entre ellos. Puesto que γ es un ángulo recto si y solamente si $\cos \gamma = 0$, y esto sucede si y sólo si $A \cdot B$ es 0, llegamos a la siguiente definición.

30.6 Definición. Dos vectores A y B son perpendiculares u ortogonales, y lo escribimos $A \perp B$, si y solamente si el producto interior $A \cdot B$ es cero.

Así, $(-1, 2, 3)$ es perpendicular a $(4, -1, 2)$ porque $(-1, 2, 3) \cdot (4, -1, 2) = -4 - 2 + 6 = 0$.

Si $A \perp B$, entonces todo múltiplo escalar de A también es perpendicular a B, porque $(aA) \cdot B = a(A \cdot B)$; y si $A \cdot B = 0$, entonces $(aA) \cdot B$ es, por consiguiente, 0. Generalizamos un poco; si $A \perp B$, entonces todo múltiplo escalar de A es perpendicular a cada múltiplo escalar de B. Como consecuencia, si L y M son rectas, entonces ocurre uno de estos dos casos: o todo vector-dirección de L es perpendicular a todo vector-dirección de M, o, ningún vector-dirección de L es perpendicular a algún vector-dirección de M. Damos la siguiente definición.

30.7 Definición. Dos rectas son perpendiculares si y sólo si algún vector-dirección de la una es perpendicular a algún vector-dirección de la otra.

Podríamos igualmente haber hecho la definición exigiendo que todo vector-dirección de la una fuera perpendicular a todo vector-dirección de la otra, en vista de las observaciones de la definición anterior.

Hacemos una última observación sobre la definición de perpendicularidad. Los vectores A y B son perpendiculares, de acuerdo con el teorema 30.5, si y solamente si $|A|^2 + |B|^2 = |A - B|^2$.

Si X, Y, y Z son puntos distintos, entonces la recta que pasa por X y Y es perpendicular a la que pasa por Y y Z si y solamente si el vector $X - Y$ es perpendicular al vector $Y - Z$. Estos dos hechos juntos nos llevan al siguiente teorema.

30.8 Teorema de Pitágoras. Si X, Y, y Z son puntos distintos, entonces la recta que pasa por X y Y es perpendicular a la que pasa por Y y Z si y sólo si $|X - Y|^2 + |Y - Z|^2 = |X - Z|^2$.

PROBLEMAS

30.1 Calcule cada uno de los siguientes productos interiores.

(a) $(0, 1) \cdot (3, 1)$
(b) $(\sqrt{2}, \sqrt{8}) \cdot (\sqrt{8}, \sqrt{2})$
(c) $(-1, 2) \cdot (3, 1)$
(d) $(7, 0) \cdot (0, 8)$
(e) $(3, -1) \cdot (1, 3)$
(f) $(-1, -1) \cdot (1, -2)$

30.2 Calcule cada uno de los siguientes productos interiores.

(a) $(1, 0, 2) \cdot (4, 2, 0)$
(b) $(\sqrt{3}, 7, \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 7)$
(c) $(1, 1, 2) \cdot (1, 1, -1)$

30.3 Sean $A = (2, 3)$, $B = (1, 4)$, y $C = (-3, -1)$, muestre por cálculo directo que

(a) $A \cdot A = |A|^2$
(b) $A \cdot B = B \cdot A$
(c) $7(A \cdot B) = (7A) \cdot B$
(d) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

30.4 Sean $A = (1, 2, 3)$, $B = (-3, -2, -1)$, y $C = (2, -3, 5)$, muestre por cálculo directo que

(a) $A \cdot A = |A|^2$
(b) $A \cdot B = B \cdot A$
(c) $4(A \cdot B) = (4A) \cdot B$
(d) $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

30.5 En cada uno de los casos que aparecen a continuación encuentre un vector $X \neq 0$ tal que $A \cdot X = 0$. Esto es, encuentre un vector $X \neq 0$ perpendicular al vector dado A.

(a) $A = (0, 1)$
(b) $A = (\sqrt{2}, 2)$
(c) $A = (-1, 3)$
(d) $A = (0, 0)$

30.6 En cada uno de los casos que aparecen a continuación encuentre un vector $X \neq 0$ tal que $A \cdot X = 0$. Esto es, encuentre un vector X perpendicular al vector dado A.

(a) $A = (2, 3, 5)$
(b) $A = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{8})$
(c) $A = (1, 1, 1)$.

30.7 Demuestre (teorema 30.2) que si A, B, y C son vectores y a es un número, entonces

(a) $A \cdot B = B \cdot A$
(b) $a(A \cdot B) = (aA) \cdot B$
(c) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ y $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.

30.8 Dé un ejemplo de vectores A, B, C tales que $(A \cdot B)C \neq (B \cdot C)A$

30.9 Demuestre que si A y B son vectores (ambos bidimensionales o ambos tridimensionales), entonces $A \perp B$ si y sólo si $|A + B| = |A - B|$.

30.10 Demuestre que en el espacio tridimensional el plano xy es $\{X : X$ es un vector tridimensional y $X \perp (0, 0, 1)\}$.

30.11 Demuestre que si A y B son vectores, entonces

$$|A + B|^2 - |A - B|^2 = 4A \cdot B.$$

30.12 Demuestre que si A, B, y C son vectores bidimensionales, con $B \neq 0$ y $C \neq 0$, pero tales que $B \cdot A = B \cdot C = 0$, entonces existe un escalar r tal que $A = rC$. Dé un ejemplo para mostrar que el resultado no se cumple en el espacio tridimensional.

30.13 Muestre que si U, X y Y son vectores y U es perpendicular tanto a X como a Y, entonces U es perpendicular a $rX + sY$ para todo escalar r y s.

30.14 Sea U un vector fijo y sea f una función definida por $f(X) = X \cdot U$ para todo vector X. Pruebe que $f(rX + sY) = rf(X) + sf(Y)$ para todos los vectores X y Y y todos los escalares r y s.

30.15 Muestre que las diagonales de un rombo son perpendiculares. (Un rombo es un paralelogramo cuyos cuatro lados tienen longitudes iguales. Aceptamos que el vector 0 es un vértice del rombo.)

30.16 Muestre que la mediana de un triángulo isósceles que pasa por el punto de intersección de los lados iguales es perpendicular al tercer lado. (Aceptamos que el punto de intersección es el vector cero.)

30.17 Muestre que cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

31 DESCOMPOSICION ORTOGONAL

Frecuentemente es útil expresar un vector arbitrario como la suma de dos vectores perpendiculares, uno de los cuales tiene un sentido y una dirección dados. Esta sección está dedicada a mostrar que tal descomposición es siempre posible y establece unas pocas de las muchas consecuencias de este hecho.

Supongamos que U es un vector unitario y A un vector arbitrario; el problema consiste en descomponer A en un vector paralelo a U (esto es, un múltiplo escalar de U) y un vector perpendicular a U (véase la figura 31.1). Parece aceptable que siempre es posible llevar a cabo esta clase de descomposición y que en el plano (figura 31.1) se puede hacer una construcción con regla y compás. Se baja una perpendicular desde A a la recta que pasa por O y U; si B es

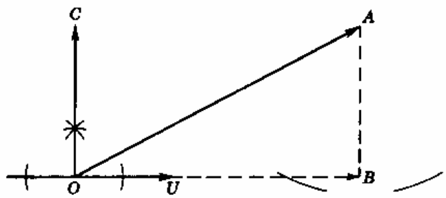


Figura 31.1

el pie de esta perpendicular, entonces el vector B es un vector paralelo a U. El segmento OC se construye paralelo y de igual longitud que BA; así, $C = A - B$. Es claro que $A = B + C$ y que $B \perp C$. A es la suma de un vector paralelo a U y un vector perpendicular a U.

Damos un ejemplo para mostrar cómo se puede aplicar esta construcción con regla y compás.

31.1 Ejemplo. Un aeroplano debe dirigirse hacia un aeropuerto que está en la dirección 42° al este del norte. Desafortunadamente en el preciso momento en que el piloto va a fijar su ruta, se distrae mirando a la cabinera que se sube la media, y parte en la dirección 24° al este del norte. Si el aeroplano vuela a 600 millas por hora ¿a qué velocidad se está alejando de la ruta correcta? A los cuatro minutos el piloto vuelve de su éxtasis y se da cuenta del error cometido. ¿Qué distancia se había alejado de la ruta?

La figura 31.2 muestra la velocidad vectorial del aeroplano y la dirección de la ruta correcta. La componente de la velocidad, perpendicular a la ruta correcta, se encuentra gráficamente. Si leemos en la gráfica, aparece que la velocidad perpendicular a la ruta correcta es aproximadamente 185 millas por hora. Como conclusión,

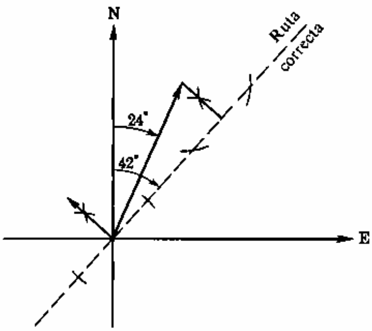


Figura 31.2

al final de los cuatro minutos el aeroplano está aproximadamente a (185) (4/60) = $12\frac{1}{3}$ millas de la ruta. ▌

Consideremos el problema algebraico de descomponer un vector A como suma de un vector paralelo a un vector $U \neq 0$ y un vector perpendicular a U. Desafortunadamente nos hemos descuidado en definir la noción de paralelismo entre vectores.

31.2 Definición. Dos vectores son paralelos si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro. Dos rectas son paralelas si un vector-dirección de la una es paralelo a algún vector-dirección de la otra.

Así, (1, —2) es paralelo a (—2, 4) y el vector cero es paralelo a todo vector. Si A y U son vectores paralelos y ninguno es 0, entonces A es múltiplo escalar de U, y U es múltiplo escalar de A (¿por qué?). Si A es paralelo a U y $U \neq 0$, entonces A es múltiplo escalar de U, porque si $U = rA$, entonces $r \neq 0$ porque $U \neq 0$ y, por lo tanto, $A = (1/r)\,U$.

31.3 Teorema sobre la descomposición ortogonal. Si U y A son vectores y U no es 0, entonces existen dos vectores únicos A_U y A_P tales que A_U es paralelo a U y A_P es perpendicular a U y $A = A_U + A_P$.

De hecho, $A_U = \dfrac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,U$ y $A_P = A - A_U$.

Demostración. Empecemos por demostrar que, si $A = B + C$, donde B es paralelo a U y C es perpendicular a U, entonces $B = \dfrac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,U$.

Puesto que se ha supuesto que B es paralelo a U y $U \neq 0$, existe un escalar r tal que $B = rU$; así que, $A = rU + C$. Por consiguiente, $A \cdot U = (rU + C) \cdot U = r(U \cdot U) + (C \cdot U)$. Pero $C \cdot U$ es 0 porque C es perpendicular a U; por tanto,

$$A \cdot U = r(\,U \cdot U\,),\ r = \frac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)},$$

$$\text{y} \quad B = \frac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,U.$$

Además, $C = A - B = A - \dfrac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,U.$

Esto prueba que $\dfrac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,U$ y $A - \dfrac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,U$ son los dos únicos vectores posibles, que son, respectivamente, paralelo y perpendicular a U, y que tienen como suma a A. Debemos, no obstante, mostrar que estos son, respectivamente, paralelo y perpendicular a U. Pero $\dfrac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,U$ es claramente paralelo a U, y $U \cdot \left(A - \dfrac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,U\right)$

$$= U \cdot A - \frac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,(U \cdot U) = 0. \ ▌$$

31.4 Definición. Si U es un vector no nulo, y A es un vector arbitrario, entonces $\dfrac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,U$ es la componente de A paralela a U, y $A - \dfrac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,U$ es la componente de A perpendicular a U.

Así, la componente de (2,1) paralela a (3,—4) es

$$\frac{(2,1) \cdot (3,-4)}{(3,-4) \cdot (3,-4)}(3,-4) = \frac{2}{25}\,(3,-4) = \left(\frac{6}{25}, \frac{-8}{25}\right),$$

y la componente perpendicular a (3, —4) es

$$(2, 1) - \left(\frac{6}{25}, \frac{-8}{25}\right) = \left(\frac{44}{25}, \frac{33}{25}\right).$$

Si U es un vector unitario, entonces la componente de un vector A paralela a U es precisamente $(A \cdot U)\,U$. Esta sencilla conclusión se usa tan frecuentemente que la estableceremos como teorema.

31.5 Teorema. Si U es un vector unitario, entonces la componente de un vector A, paralelo a U, es $(A \cdot U)\,U$, y la componente perpendicular a U es $A - (A \cdot U)\,U$.

Concluimos con una aplicación de las nociones tratadas en esta sección a problemas matemáticos que fueron muy difíciles en otro tiempo. Empezamos por observar que, si $U \neq 0$, entonces la componente de un vector A paralela a U es perpendicular a la componente de A que es perpendicular a U; por tanto, aplicamos el teorema de Pitágoras y concluimos el siguiente teorema.

31.6 Teorema. Si A y U son vectores, $U \neq 0$, y Si A_U es la componente de A paralela a U, y A_P es la componente de A perpendicular a U, entonces $|A|^2 = |A_U|^2 + |A_P|^2$.

Deducimos de lo anterior que, si $U \neq 0$, entonces $|A_U| \leq |A|$, y que $|A_U| = |A|$ si y sólo si A_P es el vector nulo. Ahora bien, $A = A_U + A_P$, y, por tanto, la igualdad ocurre si y sólo si $A = A_U$, y esta última tiene lugar si y sólo si A es paralelo a U. Entonces concluimos que

$$|A_U| = \left|\frac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}\,U\right| = \frac{|A \cdot U|}{|U \cdot U|}\,|U| = \frac{|A \cdot U|}{|U|^2}\,|U| = \frac{|A \cdot U|}{|U|} \leq |A|,$$

y esta igualdad ocurre si y solamente si U y A son paralelos. Si escribimos la desigualdad en la forma $|A \cdot U| \leq |A|\,|U|$, podemos eludir la suposición que $U \neq 0$, porque si $U = 0$, entonces $|A \cdot U| = 0 = |A|\,|U|$, y U es paralelo a A.

31.7 Teorema. (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Si U y A son vectores, entonces $|A \cdot U| \leq |A|\,|U|$, y $|A \cdot U| = |A|\,|U|$ si y solamente si A y U son paralelos.

Ahora deduciremos una propiedad de las de longitudes de vectores que ya fue aceptada sin demostración.

31.8 Teorema. Si A y U son vectores, entonces $|A + U| \leq |A| + |U|$.

Demostración. Bosquejemos la demostración, dejando que el lector idee la música para ir con el siguiente poema.

$$|A + U| \leq |A| + |U|$$
$$|A + U|^2 \leq (|A| + |U|)^2$$
$$A \cdot A + 2(A \cdot U) + U \cdot U \leq$$
$$|A|^2 + 2|A|\,|U| + |U|^2$$
$$A \cdot U \leq |A|\,|U|. \quad \blacksquare$$

PROBLEMAS

31.1 Encuentre las componentes paralela y perpendicular a (0, 1) del vector (6, 7) y muestre que (6, 7) es la suma de estas componentes.

31.2 Encuentre las componentes paralela y perpendicular a $(1, \sqrt{3})$ del vector (6, 7) y muestre que (6, 7) es la suma de esas componentes.

31.3 Encuentre las componentes paralela y perpendicular a (1, 0, 0) del vector (3, 2, —1) y muestre que (3, 2, —1) es la suma de esas componentes.

31.4 Encuentre las componentes paralela y perpendicular a $(1, -1, \sqrt{2})$ del vector (3, 2, —1) y muestre que (3, 2, —1) es la suma de estas componentes.

31.5 Encuentre las componentes paralela y perpendicular a $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ del vector (π, e) y muestre que (π, e) es la suma de estas componentes.

31.6 Encuentre un escalar r y un vector V tales que $(6, 7) = r(-5, 3) + V$ y $V \perp (-5, 3)$.

31.7 Encuentre un escalar r y un vector V tales que $(\pi, e) = r(-5, 3) + V$ y $V \perp (-5, 3)$.

31.8 Un aeroplano debe dirigirse a un aeropuerto que está en la dirección 14° al este del sur. Sin embargo, por razones que no daremos aquí, el piloto parte en la dirección 32° al este del sur. Si el aeroplano vuela a 400 millas por hora, ¿a qué velocidad se aleja de su ruta? ¿Cuánto se ha apartado de su ruta el aeroplano al cabo de tres minutos? (Resuélvalo por una construcción con regla y compás, y, si puede, verifíquelo por trigonometría.)

31.9 Se aplica una fuerza de 100 libras en la dirección 22° al norte del este. Encuentre las componentes de esta fuerza en las direcciones este y norte. (Resuélvalo por una construcción con regla y compás, y, si puede, verifíquelo por trigonometría.)

31.10 Muestre que si A, B y U son vectores, $U \neq 0$, y A y B son paralelos a U, entonces A es paralelo a B.

31.11 Muestre que si los vectores A y B son paralelos al vector U, entonces para todo r y s escalares, $rA + sB$ es paralelo a U.

31.12 Muestre que si U, V y W son vectores bidimensionales y si $V \neq 0$, $V \perp U$ y $V \perp W$, entonces U es paralelo a W.

31.13 Sea Q una recta en el espacio bidimensional con vector-dirección U. Sea V un vector tal que $V \neq 0$ y $V \perp U$. Muestre que para algún escalar r, $rV \in Q$.

31.14 Sea Q una recta en el espacio bidimensional. Sea A un vector que ni es cero ni es un vector-dirección de Q. Muestre que, para algún escalar r, $rA \in Q$.

31.15 Pruebe que si L y R son dos rectas en el espacio bidimensional y $L \cap R$ es vacía, entonces L es paralela a R. Esto es, muestre que dos rectas que no se intersectan son paralelas. (¡Seguramente este es un estado de cosas deseable!.)

31.16 Sea U un vector unitario. Definimos una función f tal que $f(X) = (U \cdot X)U$. ¿Cuál es el codominio de f, y para qué vectores X es $f(X) = 0$? Muestre que para todo X y Y vectores, y para todo r y s escalares, $f(rX + sY) = rf(X) + sf(Y)$.

31.17 Sea f la función definida en el problema anterior. Definimos una función g tal que $g(X) = X - f(X)$ para todos los vectores X. ¿Cuál es el codominio de g y para cuáles vectores X es $g(X) = 0$? Demuestre que para todo X y Y vectores y para todo r y s escalares, $g(rX + sY) = rg(X) + sg(Y)$.

31.18 Dada la recta $\{rU : r \text{ es un escalar}\}$ y dado un punto C, descompóngase C en las componentes paralela y perpendicular a U, y mediante el teorema de Pitágoras, o de otro modo, muestre que el punto de la recta más cercano a C es la componente de C paralela a U.

32 CONJUNTOS ORTONORMALES

Hemos visto que si U es un vector no nulo y A un vector arbitrario, entonces A es la suma de la componente de A en la dirección de U y la componente de A perpendicular a U. Es natural intentar extender este proceso. Supongamos que U y V son vectores distintos del vector cero y que $U \perp V$. ¿Existe un vector arbitrario A, suma de su componente paralela a U, con su componente paralela a V, y con un vector que sea perpendicular tanto a U como a V? Geométricamente esto parece verdadero (véase la figura 32.1), y esta circunstancia hace que se pueda establecer fácilmente el método que es una extensión obvia del artificio usado en el caso de un vector.

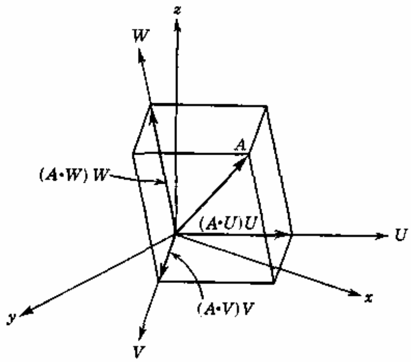


Figura 32.1

32.1 Teorema. Sean U y V vectores distintos del vector cero con $U \perp V$, y sea A un vector arbitrario. Entonces A es el vector suma de la componente de A paralela a U, con la componente paralela a V, y con un vector M que es perpendicular a ambos U y V. Además, esta representación es única, porque si $A = aU + bV + M$, donde a y b son escalares y M es perpendicular a U y a V, entonces

$$a = \frac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}, \; b = \frac{(A \cdot V)}{(V \cdot V)} \quad \text{y} \quad M = A - \frac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)} U - \frac{(A \cdot V)}{(V \cdot V)} V.$$

Demostración. Empezamos probando el segundo enunciado del teorema. Si $A = aU + bV + M$, donde M es perpendicular a U y a V, entonces tomando productos escalares con U y recordando que $U \cdot V = 0$ y $U \cdot M = 0$, vemos que $A \cdot U = a(U \cdot U) + b(V \cdot U) + M \cdot U = a(U \cdot U)$. Así $a = \dfrac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)}$. Un argumento semejante muestra que $b = \dfrac{(A \cdot V)}{(V \cdot V)}$, y el segundo enunciado del teorema se verifica. Para probar el primer enunciado del teorema debemos mostrar que

$$M = A - \frac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)} U - \frac{(A \cdot V)}{(V \cdot V)} V$$

es perpendicular a los vectores U y V. Usamos el hecho de que $U \cdot V = 0$ para ver que

$$M \cdot U = A \cdot U - \frac{(A \cdot U)}{(U \cdot U)} (U \cdot U) - \frac{(A \cdot V)}{(V \cdot V)} (V \cdot U) = (A \cdot U) - (A \cdot U) = 0.$$

Un argumento semejante muestra que $M \perp V$. ▮

Damos un solo ejemplo numérico.

32.2 Ejemplo. Los vectores $U = (2, 2, 1)$ y $V = (1, -2, 2)$ son perpendiculares y se nos pide escribir $A = (3, -6, 0)$ como la suma de un múltiplo escalar de U con un múltiplo escalar de V y con un vector perpendicular a los vectores U y V. Calculamos:

$$\frac{A \cdot U}{U \cdot U} U = \frac{(3, -6, 0) \cdot (2, 2, 1)}{(2, 2, 1) \cdot (2, 2, 1)} (2, 2, 1) = \frac{-6}{9} (2, 2, 1) = \frac{-2}{3} (2, 2, 1).$$

$$\frac{A \cdot V}{V \cdot V} V = \frac{(3, -6, 0) \cdot (1, -2,2)}{(1, -2, 2,) \cdot (1, -2,2)} (1, -2, 2,) = \frac{15}{9} (1, -2, 2) = \frac{5}{3} (1, -2, 2).$$

Por lo tanto la componente de A perpendicular a los vectores U y V es

$$(3, -6, 0) - \frac{-2}{3} (2, 2, 1) - \frac{5}{3} (1, -2, 2) = \left(\frac{8}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-8}{3}\right)$$

y

$$A = \frac{-2}{3} (2, 2,1) + \frac{5}{3} (1,-2, 2) + \left(\frac{8}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-8}{3}\right)$$

es la descomposición que se pide. Naturalmente uno verificaría que $(8/3, -4/3, -8/3)$ es en verdad perpendicular a los vectores U y V, pero dejamos esto al lector. ▮

El lector observador probablemente habrá sospechado que un teorema más fuerte que el 32.1 es verdadero para vectores en el plano. Si U y V son vectores bidimensionales, distintos de cero y perpendiculares, parece muy probable que un vector M que es perpendicular a ambos deba ser el vector cero. Probemos que este es el caso.

32.3 Lema. Si $(a, b) \neq (0, 0)$ y (c, d) es perpendicular a (a, b), entonces (c, d) es paralelo a $(-b, a)$.

Demostración. La hipótesis dice que $(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd = 0$. Vamos a suponer que $a \neq 0$. Entonces $c = (-b/a)d$, y $(c, d) = ((-b/a) d, d) = d/a (-b, a)$, y (c, d) es por consiguiente paralelo a $(-b, a)$. Si $a = 0$ entonces $b \neq 0$, y la misma clase de argumento muestra que $(c, d) = -c/b(-b, a)$. ▮

32.4 Teorema. Si U y V son vectores bidimensionales ortogonales distintos de cero, entonces 0 es el único vector que es perpendicular a los vectores U y V. Así cada vector bidimensional es la suma de su componente paralela al vector U con su componente paralela al vector V.

Demostración. Supongamos que M es perpendicular a ambos U y V, y supongamos que $U = (a, b)$. Entonces los vectores M y V son perpendiculares a (a, b) y en vista del lema, ambos son paralelos al vector $(-b, a)$ distinto de cero y como consecuencia paralelos entre sí. Así M es a la vez paralelo y perpendicular a V y es por lo tanto el vector 0 (las componentes de M a la vez paralelo y perpendicular a V deben ser 0). ▮

Hemos observado que la fórmula para la componente de un vector paralelo a un vector unitario es particularmente simple. Los conjuntos de vectores mutuamente ortogonales y unitarios tienen un nombre especial.

32.5 Definición. Un conjunto de vectores es ortonormal si y solamente si cada uno de los elementos del conjunto es un vector unitario y dos elementos cualesquiera del conjunto son perpendiculares.

Así, $\{(4/5, 3/5), (3/5, -4/5)\}$ es un conjunto ortonormal pero ninguno de los conjuntos $\{(4, 3), (3, -4)\}$ y $\{(4/5, 3/5), (3/5, 4/5)\}$ es ortonormal.

El teorema 32. 4 tiene un corolario muy útil acerca de conjuntos de dos vectores bidimensionales.

32.6 Teorema. Si $\{U, V\}$ es un conjunto de vectores bidimensionales ortonormal y A es un vector bidimensional arbitrario, entonces $A = (A \cdot U)U + (A \cdot V)V$.

Un resultado análogo es verdadero para el espacio vectorial tridimensional. No probaremos este hecho ahora, porque se deducirá más fácilmente de las últimas consideraciones. Sin embargo dejamos establecido, para referencia, el siguiente teorema.

32.7 Teorema. Si $\{U, V, W\}$ es un conjunto de vectores tridimensionales ortonormal y A es un vector tridimensional arbitrario, entonces $A = (A \cdot U)U + (A \cdot V)V + (A \cdot W)W$.

En otras palabras, cada vector tridimensional es la suma de sus componentes paralelas a tres vectores mutuamente perpendiculares. En el ejemplo siguiente verificamos un caso especial de esta proposición.

32.8 Ejemplos. Los vectores $U = (2/3, 2/3, 1/3)$, $V = (1/3, -2/3, 2/3)$, y $W = (2/3, -1/3, -2/3)$ son ortonormales. Se nos pide encontrar las componentes de $A = (3, 0, -9)$ que sean paralelas a U, V y W y verificar que su suma es A. Al hacer los cálculos tenemos:

$$(A\cdot U)U = \left[(3, 0, -9)\cdot\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right]\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
$$= -1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

$$(A\cdot V)V = \left[(3, 0, -9)\cdot\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right]\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$= -5\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{-5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{-10}{3}\right)$$

$$(A\cdot W)W = \left[(3, 0, -9)\cdot\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)\right]\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$
$$= 8\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{16}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{-16}{3}\right)$$

$$(A\cdot U)U + (A\cdot V)V + (A\cdot W)W$$
$$= \left(\frac{-2-5+16}{3}, \frac{-2+10-8}{3}, \frac{-1-10-16}{3}\right)$$
$$= (3, 0, -9).$$ ▌

Las componentes de un vector que son paralelas a los elementos de un conjunto ortonormal reciben algunas veces el nombre de coordenadas del vector con respecto a este conjunto. Si (U, V, W) es una terna ordenada de vectores unitarios en tres dimensiones, mutuamente perpendiculares y si $A = aU + bV + cW$, se dice algunas veces que la terna (a, b, c) es el vector coordenado de A con respecto a (U, V, W). No usaremos esta terminología. Sin embargo queremos probar el hecho sorprendente que el producto interior puede ser calculado en forma completamente natural con las componentes de los vectores con respecto a cualquier conjunto ortonormal.

32.9 Teorema. Si $\{U, V, W\}$ es un conjunto ortonormal y si $A = aU + bV + cW$ y $B = rU + sV + tW$, entonces $A \cdot B = ar + bs + ct$.

Demostración. La demostración es precisamente una aplicación de las propiedades de los productos escalares. Así,

$$\begin{aligned} A\cdot B &= (aU + bV + cW)\cdot(rU + sV + tW) \\ &= ar(U\cdot U) + as(U\cdot V) + at(U\cdot W) \\ &\quad + br(V\cdot U) + bs(V\cdot V) + bt(V\cdot W) \\ &\quad + cr(W\cdot U) + cs(W\cdot V) + ct(W\cdot W). \end{aligned}$$

Puesto que $\{U, V, W\}$ es ortonormal,

$$U\cdot U = V\cdot V = W\cdot W = 1$$

y

$$U\cdot V = U\cdot W = V\cdot W = 0.$$

Aplicando estos hechos a la ecuación anterior se muestra que $A \cdot B = ar + bs + ct$. ▌

Damos un ejemplo sencillo que verifica un caso especial del teorema.

32.10 Ejemplo. Supongamos que $U = (5/13, 12/13)$; $V = (-12/13, 5/13)$; $A = 13U - 26V$ y $B = 13U + 13V$. El conjunto $\{U, V\}$ es ortonormal y se nos pide calcular $A \cdot B$ por medio de la definición de producto interior y por medio del teorema precedente. Por el teorema anterior, $A \cdot B = (13)(13) + (-26)(13) = 169(1 - 2) = -169$. Directamente:

$$\begin{aligned} A &= 13U - 26V \\ &= 13(5/13, 12/13) - 26(-12/13, 5/13) \\ &= (5, 12) - (-24, 10) = (29, 2), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B &= 13U + 13V \\ &= 13(5/13, 12/13) + 13(-12/13, 5/13) \\ &= (5, 12) + (-12, 5) = (-7, 17). \end{aligned}$$

Por tanto,
$A \cdot B = (29, 2) \cdot (-7, 17) = -203 + 34 = -169$. ∎

PROBLEMAS

32.1 Muestre que $U = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $V = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ son vectores unitarios perpendiculares y encuentre a y b (números reales) tales que $(3, -7) = aU + bV$.

32.2 Muestre que $U = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$, $V = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$, y $W = (0, 0, 1)$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares (esto es, $U \perp V$, $U \perp W$, y $V \perp W$), y encuentre los escalares a, b, y c tales que $(5, 7, 3) = aU + bV + cW$.

32.3 ¿Cuáles de los conjuntos siguientes son ortonormales?

(a) $\{(0, 1), (1, 0)\}$
(b) $\{(1, 1), (1, -1)\}$
(c) $\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$
(d) $\{(0, 1), (-1, 0), (1, 0)\}$

32.4 ¿Cuáles de los conjuntos siguientes son ortonormales?

(a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
(b) $\{(-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$
(c) $\{(\sqrt{3}/2, 1/2, 0), (-1/2, \sqrt{3}/2, 0), (0, 0, 1)\}$
(d) $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$

32.5 Sea $U = (2/7, 3/7, 6/7)$. Verifique que $U \cdot U = 1$ y encuentre los vectores V y W tales que $\{U, V, W\}$ sea un conjunto ortonormal.

32.6 Sea $U = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Verifique que $U \cdot U = 1$ y encuentre los vectores V y W tales que $\{U, V, W\}$ sea un conjunto ortonormal.

32.7 Pruebe que si $\{U, V\}$ es un conjunto ortonormal y $A = aU + cV$ y $B = bU + dV$ donde a, b, c y d son escalares, entonces $A \cdot B = ab + cd$.

32.8 Demuestre que no existe un conjunto ortonormal de tres vectores en el espacio de dimensión dos.

32.9 Demuestre sin utilizar el teorema 32.7 que si $\{U, V, W\}$ es un conjunto ortonormal de vectores, entonces un vector arbitrario A es la suma de sus componentes paralelas a U, a V y a W, con un vector M tal que M es perpendicular a cada uno de los vectores U, V, y W.

32.10 Demuestre, utilizando el teorema 32.7, que no existe un conjunto ortonormal de cuatro vectores en el espacio de dimensión tres.

32.11 Sea $\{U, V\}$ un conjunto ortonormal de vectores bidimensionales, y para cada vector bidimensional X sea $T(X) = (U \cdot X, V \cdot X)$.

(a) ¿Cuál es el codominio de T, y para qué vectores X, $T(X) = 0$?
(b) Muestre que $T(rX + sY) = rT(X) + sT(Y)$ para todo vector X, para todo vector Y y para todo r y s escalares.
(c) Para todo r y s escalares sea $S(r, s) = rU + sV$. Muestre que para todo vector X, $S(T(X)) = X$ y que, para todo escalar r y s, $T(S(r, s)) = (r, s)$.

33 PRODUCTOS INTERIORES EN EL ESPACIO n-DIMENSIONAL

No hay absolutamente ninguna dificultad en extender la noción de producto interior al n-espacio. Todos los teoremas de las tres secciones anteriores, excepto los teoremas (32.3, 32.4, 32.6 y 32.7) donde la suposición de dimensionalidad, 2 ó 3, es parte de la hipótesis, son igualmente válidos para un n-espacio. En esta sección esbozamos brevemente la situación para vectores n-dimensionales, dejando muchas de las demostraciones al lector.

33.1 Definición. El producto interior $X \cdot Y$ de los vectores n-dimensionales X y Y es

$$X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_nY_n = \sum_{k=1}^{n} X_kY_k.$$

Así $(2, 1, 3, 4) \cdot (1, -1, 2, -1) = 2 - 1 + 6 - 4 = 3$.

Nuestra primera tarea es establecer las propiedades algebraicas del producto interior.

33.2 Teorema. Si A, B y C son vectores n-dimensionales y r es un escalar, entonces

(i) $A \cdot B = B \cdot A$,

(ii) $r(A \cdot B) = (rA) \cdot B = A \cdot (rB)$,

(iii) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$, y $(B + C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A)$.

Demostraremos que $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$:

$$A \cdot (B + C) = \sum_{k=1}^{n} A_k(B + C)_k \qquad \text{por la}$$

definición de producto interior, y $(B + C)_k = B_k + C_k$, para cada número natural k con $1 \leq k \leq n$, por la definición de adición vectorial. Por lo tanto $A \cdot (B + C) = \sum_{k=1}^{n} A_k$ $(B_k + C_k)$ que es $\sum_{k=1}^{n} (A_kB_k + A_kC_k)$ porque la multiplicación de números es distributiva con respecto a la adición. Pero por una propiedad de la notación de $\sum$, sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n} (A_kB_k + A_kC_k) = \sum_{k=1}^{n} A_kB_k + \sum_{k=1}^{n} A_kC_k,$$

y esto es $(A \cdot B) + (A \cdot C)$ por la definición de producto interior. ∎

La relación entre el producto interior y la longitud de un vector es, como en el caso de vectores bi y tridimensionales, completamente trivial. Así, $\quad A \cdot A = \sum_{k=1}^{n} A_kA_k = |A|^2$.

Con esta relación el resto es fácil. Los demás teoremas de la sección 30, todos los de la sección 31, y el primero de la sección 32 dependen precisamente de las propiedades algebraicas dadas en el teorema 33.2 y del simple hecho que $A \cdot A = |A|^2$. Así vemos sin esfuerzo la relación entre producto interior y longitud: $|A - B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2A \cdot B$. De aquí y de la definición de ortogonalidad, se deduce el teorema de Pitágoras. La definición de vectores paralelos es exactamente la de antes: dos vectores son paralelos si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro. Si U es un vector n-dimensional, $U \neq 0$, entonces un vector arbitrario A puede ser descompuesto en sus componentes paralela y perpendicular a U, y esta descomposición es única. Este hecho tiene la misma consecuencia para un n-espacio que para espacios de dimensión 2 y dimensión 3. Así, si A y B son vectores n-dimensionales, entonces $|A \cdot B| \leq |A|\,|B|$, y la igualdad se cumple si y sólo si A y B son paralelos; y siempre es cierto que $|A + B| \leq |A| + |B|$.

El teorema 32.1 también es cierto para un n-espacio. De hecho, un enunciado más general se cumple para todo n-espacio para todo número natural n, y nosotros debemos tanto enunciarlo como probarlo. Es importante, y en esta sección demostraremos algo de él.

33.3 Teorema. Sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_r\}$ un conjunto ortonormal de r vectores de un n-espacio, sea A un vector n-dimensional arbitrario, y sea $M = A - \sum_{k=1}^{r} (A \cdot U_k)U_k$. Entonces para cada número natural i, M es perpendicular a U_i con $1 \leq i \leq r$.

Así A es la suma de sus componentes paralelas a los vectores $U_1, U_2, \ldots, U_r$ con un vector M que es perpendicular a uno de estos.

Demostración. Vemos que M $M \cdot U_i = (A - \sum_{k=1}^{r} (A \cdot U_k)U_k) \cdot U_i = (A \cdot U_i) - \sum_{k=1}^{r}$ $(A \cdot U_k)(U_k \cdot U_i)$. Obsérvese que, como $\{U_1, U_2, \ldots, U_r\}$ es un conjunto ortonormal,

$U_i \cdot U_k = 0$, a no ser que $i = k$, y que $U_i \cdot U_i = 1$. Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{r} (A \cdot U_k)(U_k \cdot U_i) = (A \cdot U_1)(U_1 \cdot U_i) + (A \cdot U_2)(U_2 \cdot U_i) + \cdots + (A \cdot U_r)(U_r \cdot U_i) = (A \cdot U_i)(U_i \cdot U_i) = A \cdot U_i.$$

De donde

$$M \cdot U_i = (A \cdot U_i) - \sum_{k=1}^{r} (A \cdot U_k)(U_k \cdot U_i) = (A \cdot U_i) - (A \cdot U_i) = 0. \quad \blacksquare$$

Existe un teorema de unicidad, cuya demostración, dejamos al lector.

33.4 Teorema. Supongamos $\{U_1, U_2, \ldots, U_r\}$ es un conjunto ortonormal de vectores y que

$$A = \sum_{k=1}^{r} a_k U_k + M \qquad \text{donde } a_1, a_2, \ldots, \text{ y } a_r$$

son escalares y M es perpendicular a U_k para cada número natural k, con $1 \leq k \leq r$. Entonces $a_k = A \cdot U_k$ para cada k.

Finalmente, nos acercamos cautelosamente a la pregunta de cuántos vectores unitarios mutuamente perpendiculares puede haber en un n-espacio. El lector, indudablemente, ha adivinado la respuesta: Precisamente n. Exponemos sin demostración el teorema siguiente que será una consecuencia de las últimas discusiones.

33.5 Teorema. Supongamos que S es un conjunto ortonormal de r vectores de un n-espacio. Entonces existe un vector diferente de cero que es perpendicular a cada elemento de S si y sólo si $r < n$.

34 RECTAS EN EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

La maquinaria algebraica de los productos interiores facilita describir las rectas en el plano en una forma nueva y útil. Hay dos formas muy comunes de describir un conjunto L de puntos. Puede suceder que L sea el codominio de una función. Así una recta es el codominio de una función X, donde $X(t) = A + tU$, y U es un vector distinto de cero. Por otra parte, L puede ser el conjunto de puntos en los cuales una función f toma el valor 0. Encontraremos una descripción de una recta en el espacio de dimensión dos que sea de esta última clase.

Revisemos brevemente los hechos que necesitamos. Un conjunto L es una recta si existen vectores A y U, con $U \neq 0$, tal que $L = \{A + tU\colon t \text{ es un escalar}\}$. Un vector es un vector-dirección de L si es la diferencia de dos elementos distintos de L. Cada vector-dirección de L es un múltiplo escalar diferente de cero, del vector U y todo múltiplo es un vector-dirección.

El otro hecho que necesitamos es éste: Si (r, s) es un vector bidimensional diferente de $(0, 0)$, entonces un vector es perpendicular a (r, s) si y sólo si es paralelo a $(-s, r)$. De esto se deduce que si U y V son vectores perpendiculares y ninguno es $(0, 0)$, entonces un vector es perpendicular a U o a V, si y sólo si es paralelo al otro. Aplicamos este hecho como sigue: Un vector X pertenece a la recta $\{A + tU\colon t \text{ es un escalar}\}$ si y sólo si $X = A + tU$ para algún escalar t, y esto sucede si y sólo si $X - A$ es múltiplo de U. Pero $X - A$ es un múltiplo de U si y sólo si $X - A$ es perpendicular a V. Entonces tenemos el siguiente teorema.

34.1 Teorema. Supongamos que U y V son vectores bidimensionales perpendiculares y que ninguno es el vector cero. Entonces $\{A + tU\colon t \text{ es un escalar}\} = \{X\colon (X - A) \cdot V = 0\}$.

Algunas veces decimos que "$(X - A) \cdot V = 0$" es una ecuación vectorial no paramétrica de la recta que pasa por A y es perpendicular a V (esto es, la recta que pasa por A con vector-dirección perpendicular a V). Así, la recta que pasa por $(1, -2)$ perpendicular al vector $(-3, 2)$ tiene la ecuación:

$$(X - (1, -2)) \cdot (-3, 2) = 0.$$

Obsérvese que esta ecuación no paramétrica tiene la ventaja de que facilita decidir cuándo o no un punto dado pertenece a la recta. Así, es obvio que $(0, 0)$ no pertenece a la recta, (sustitúyase y verifíquese). Por otra parte, el trabajo que se hace para encontrar puntos que están sobre la recta es ligeramente mayor que el que se hace al emplear una ecuación paramétrica.

Una ecuación vectorial puede ser escrita, naturalmente, en forma escalar. Si $X = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$, y $V = (a, b)$, vemos que $(X - A) \cdot V = ((x, y) - (x_0, y_0)) \cdot (a, b) = (x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = a(x - x_0) + b(y - y_0)$. Podemos deducir de aquí y del teorema 34.1 el teorema siguiente:

34.2 Teorema. Si (a, b) y (x_0, y_0) son vectores bidimensionales y $(a, b) \neq (0, 0)$, entonces $\{(x, y): a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0\}$ es la recta que pasa por (x_0, y_0) y es perpendicular a (a, b).

Así,

$$-3(x - 1) + 2(y + 2) = 0$$

es una ecuación escalar no paramétrica de la recta que pasa por $(1, -2)$ y que es perpendicular a $(-3, 2)$. El vector $(-2, -3)$ es un vector-dirección para esta recta. Podemos también inferir que

$$2x + 3y + 6 = 0$$

es una ecuación de una recta porque, podemos reescribirla como $2(x + 3) + 3(y - 0) = 0$ y ésta es claramente una ecuación de la recta que pasa por $(-3, 0)$ y es perpendicular a $(2, 1)$. En general:

34.3 Teorema. Si a, b, y c son números y $(a, b) \neq (0, 0)$, entonces $\{(x, y) : ax + by + c = 0\}$ es una recta perpendicular al vector (a, b).

Demostración. Si $a \neq 0$, entonces $ax + by + c = a(x + c/a) + b(y - 0)$ y, por consiguiente $\{(x, y) : ax + by + c = 0\}$ es una recta que pasa por $(-c/a, 0)$ y es perpendicular a (a, b). Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$, y la misma clase de argumento muestra que el conjunto es la recta que pasa por $(0, -c/b)$ perpendicular a (a, b). ▌

Vamos a sacar del teorema anterior una consecuencia acerca de ecuaciones vectoriales.

34.4 Teorema. Si V es un vector bidimensional diferente de cero y c es un escalar, entonces $\{X : X \cdot V + c = 0\}$ es una recta perpendicular a V.

Demostración. Supongamos que $V = (a, b)$ y $X = (x, y)$. Entonces $\{X : X \cdot V + c = 0\} = \{(x, y): (x, y) \cdot (a, b) + c = 0\} = \{(x, y): ax + by + c = 0\}$ que es una recta perpendicular a $(a, b) = V$ de acuerdo al teorema anterior. ▌

Así, $\{X : X \cdot (2, 3) = 27\}$ es una recta perpendicular al vector $(2, 3)$.

Es conveniente algunas veces especificar la dirección de una recta por medio de un solo número más bien que por un vector. El número que se usa comúnmente es la pendiente.

34.5 Definición. La pendiente de una recta es el número m si y sólo si $(1, m)$ es un vector-dirección de la recta.

Por ejemplo, si $(-2, 3)$ es un vector-dirección de una recta L, entonces $(1, -\frac{3}{2})$ es también un vector-dirección para L y $-\frac{3}{2}$ es la pendiente de L. No toda recta tiene pendiente. Si $(0, 2)$ es un vector-dirección para una recta M, entonces no existe un número m tal que $(1, m)$ sea también un vector-dirección. Es muy claro que una recta tiene pendiente si y solamente si no es paralela al eje y. En cada recta que intercepta al eje y, la ordenada del punto de intersección se llama el intercepto respecto a y.

34.6 Definición. El intercepto respecto al eje y de una recta es el número b, si y sólo si $(0, b)$ pertenece a la recta y la recta no es idéntica al eje y.

Hay una forma muy simple de la ecuación de la recta con pendiente m e intercepto respecto a y igual a b. La demostración del siguiente teorema la dejamos al lector.

34.7 Teorema. El conjunto $\{(x, y): y = mx + b\}$ es una recta con pendiente m y b como intercepto con relación a y.

Así $\{(x, y) : 2x + 3y + 6 = 0\}$, que es igual a $\{(x, y) : y = -\frac{2}{3}x - 2\}$, es una recta con pendiente $-\frac{2}{3}$ e intercepto respecto a y igual a -2.

Hay una interpretación geométrica muy natural de la pendiente de una recta. Si m es la pendiente de una recta, entonces $(1, m)$ es un vector-dirección de la recta (véase la figura 34.1) y el número m puede ser considerado como el aumento de altura de la recta por cada unidad de distancia horizontal. El término "gradiente" se usa con frecuencia en ingeniería. Una sección de carretera puede ser trazada con

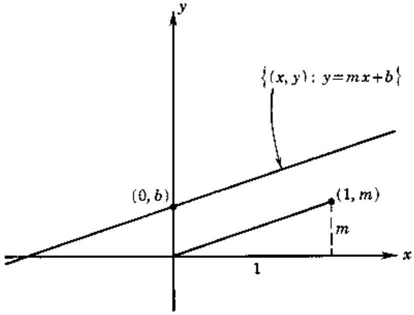


Figura 34.1

un "gradiente de 21%" lo que significa que la pendiente de la carretera es 0,21.

La pendiente de una recta que pasa por dos puntos es fácil de calcular. Por ejemplo, la recta que pasa por $(1, -2)$ y $(-4, 5)$ tiene el vector-dirección $(1, -2) - (-4, 5) = (5, -7)$. Por lo tanto $(1, -\frac{7}{5})$ es también un vector-dirección de la recta y la pendiente es $-\frac{7}{5}$.

Finalmente, hay un criterio simple en términos de pendiente que sirve para decidir cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares. Dejamos al lector la demostración del siguiente teorema.

34.8 Teorema. Dos rectas, que tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son paralelas si y solamente si $m_1 = m_2$ y son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

PROBLEMAS

34.1 Encuentre una ecuación no paramétrica de la recta con ecuación paramétrica siguiente:

(a) $X(t) = (-1, 2) + t\,(1, 1)$
(b) $X(t) = (1, -1) + t\,(2, -3)$.

34.2 Encuentre una ecuación no paramétrica de la recta con ecuación paramétrica siguiente:

(a) $X(t) = (0, 0) + t(-1, 2)$
(b) $X(t) = (2, -3) + t(1, -1)$.

34.3 Encuentre una ecuación paramétrica de la recta con la siguiente ecuación:

(a) $(X - (1, 2)) \cdot (2, -3) = 0$
(b) $x + 4y + 4 = 0$.

34.4 Encuentre una ecuación paramétrica de la recta con la siguiente ecuación:

(a) $X \cdot (1, -1) + 2 = 0$
(b) $y = 2x - 1$.

34.5 Encuentre un vector direccional de la recta con la siguiente ecuación:

(a) $(X + (1, 3)) \cdot (7, 1) = 0$
(b) $2x + 3y - 12 = 0$
(c) $y = x - 2$
(d) $X \cdot (2, -3) = 4$.

34.6 Encuentre una ecuación paramétrica de la recta que tiene pendiente 3 e intercepto respecto al eje y igual a -8.

34.7 Encuentre una ecuación vectorial no paramétrica de la recta con pendiente -3 e intercepto respecto a y igual a 8.

34.8 Encuentre una ecuación de la recta perpendicular a $\{(0, 0) + t(3, 5) : t$ es un escalar$\}$ y que pasa por el punto $(-5, 3)$.

34.9 Encuentre una ecuación de la recta perpendicular a $\{X : X \cdot (1, 4) + 6 = 0\}$ y con intercepto respecto a y igual a 2.

34.10 Sea P una recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(4, 4)$ y sea Q la recta que pasa por $(2, -3)$ y $(6, -2)$. ¿En qué punto, si hay alguno, P y Q se encuentran?

34.11 ¿En qué puntos, si hay algunos, las rectas $\{X : X \cdot (2, 1) = 5\}$ y $\{(0, 1) + t(1, 1) : t$ es un escalar$\}$ se encuentran?

34.12 Muestre que si a y b son escalares distintos de cero, entonces la recta que pasa por $(a, 0)$ y $(0, b)$ es

$$\{(x, y) : x/a + y/b = 1\}$$

34.13 Muestre que la recta que pasa por (x_0, y_0) con pendiente m es $\{(x, y) : y - y_0 = m(x - x_0)\}$.

34.14 Pruebe el teorema 34.7: El conjunto $\{(x, y) : y = mx + b\}$ es una recta con pendiente m e intercepto con respecto al eje y igual a b.

34.15 Pruebe el teorema 34.8: Dos rectas que tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son paralelas si y solamente si $m_1 = m_2$, y son perpendiculares si y solamente si $m_1 m_2 = -1$.

34.16 ¿Cuántos minutos faltan para las 6 en punto si hace 50 minutos faltaban 4 veces los minutos que habían transcurrido desde las tres en punto? (Tomado de Amusements in Mathematics, por Henry E. Dudeney).

34.17 Un vinatero tiene 100 galones de jerez al 12% de alcohol por volumen. ¿Cuántos galones de alcohol puro ha de añadir al jerez para obtener una mezcla al 20% de alcohol por volumen?

34.18 Dé un ejemplo de una recta que pasa por $(1, 1)$ y que no pase por ningún otro punto reticular. (Véase el problema 14.11 para la definición de un punto reticular.)

34.19 Considere las rectas $L = \{(x, y) : y = mx + b\}$ y $Q = \{(x, y) : y = nx + d\}$. Discuta las posibilidades para $L \cap Q$.

CAPITULO 6

Geometría Vectorial

El estudio de rectas y planos en el espacio de dimensión tres, que es el objeto de este capítulo, requiere algunas nociones algebraicas que no hemos encontrado previamente. Algunas de estas nociones son útiles en espacios de cualesquiera dimensiones, pero nuestro principal instrumento, el producto vectorial, se aplica solamente a vectores de dimensión tres. Muchos de los resultados obtenidos por nosotros tienen generalizaciones para espacios de dimensión superior y más tarde desarrollaremos métodos de demostración para establecerlas. La importancia especial del espacio de dimensión tres, en matemática, física e ingeniería justifica el uso de métodos especiales.

35 COMBINACIONES LINEALES Y DEPENDENCIA LINEAL

Hemos estudiado las rectas en espacios vectoriales de dimensiones dos y tres con algún detalle; en esta sección empezamos el estudio de planos. Un plano es un subconjunto de un espacio de dimensión tres de una clase muy especial, y nuestra primera tarea es decidir precisamente cuáles subconjuntos se llamarán planos. Para dar una definición razonable del plano contaremos con la misma clase de razonamiento utilizado para mostrar nuestra definición de recta. No hay gran dificultad en encontrar una "buena" definición. Sin embargo, encontraremos que dar respuesta aun a preguntas sencillas sobre planos y rectas, da lugar a problemas engorrosos que no somos capaces de resolver fácilmente. La verdad es que carecemos de la maquinaria algebraica necesaria para hacer un estudio eficiente sobre planos, y la primera tarea es llevar nuestro equipo algebraico a un nivel un poco más alto de eficiencia.

Empezamos con muchas de las mismas nociones que motivaron nuestra definición de recta. Supongamos que B y C son vectores de dimensión 3 y consideremos el conjunto de todas las sumas de un múltiplo escalar de B y un múltiplo escalar de C. La figura 35.1 hace razonable que este conjunto sea llamado un plano. Estamos por consiguiente inclinados a

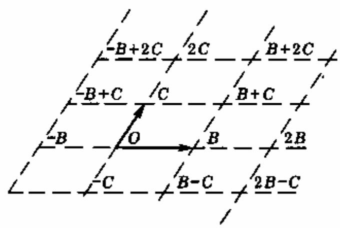


Figura 35.1

decir que el conjunto $M = \{rB + sC : r \text{ y } s \text{ son escalares}\}$ es un plano. Sin embargo, hay dificultad; si B o C es 0, entonces el conjunto M, ciertamente no parece ser un plano, y del mismo modo, si B es paralelo a C, aun cuando ni B ni C sean cero, podría M ser llamado un plano. Adoptaremos una poca terminología sistemática con la cual discutiremos la situación.

35.1 Definición. Un vector X es una combinación lineal de los vectores B y C si y solamente si existen escalares r y s tales que $X = rB + sC$.

Más generalmente, un vector X es una combinación lineal de los elementos de un conjunto de vectores si y solamente si X es la suma de múltiplos escalares de los elementos del conjunto.

El vector B es una combinación lineal de B y C porque $B = 1B + 0C$. El vector $(1, 1)$ es una combinación lineal de $(0, 1)$ y $(1, 0)$ porque $(1, 1) = 1(0, 1) + 1(1, 0)$ y en efecto, cualquier vector bidimensional (a, b) es una combinación lineal de $(1, 0)$ y $(0, 1)$ puesto que $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$. En forma semejante, cualquier vector de dimensión 3 es una combinación lineal de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Generalmente no es claro si un vector dado es una combinación lineal de otros. Para decidir si $(6, 9, 12)$ es una combinación lineal de $(1, 2, 3)$ y $(4, 5, 6)$ necesitamos saber cuándo o no existen escalares r y s tales que $(6, 9, 12) = r(1, 2, 3) + s(4, 5, 6)$, y esto nos lleva a preguntarnos si existen o no números r y s tales que $6 = r + 4s$, $9 = 2r + 5s$ y $12 = 3r + 6s$. Más tarde estableceremos una forma sistemática de decidir tales preguntas, pero queremos observar ahora que el problema nos lleva a resolver algunas ecuaciones lineales.

Tendremos que ver con el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de un conjunto de vectores. El conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de un solo vector B es precisamente el conjunto de todos los múltiplos escalares de B, y si B no es el vector cero; este conjunto es una recta que pasa por O con vector-dirección B. El conjunto de combinaciones lineales de dos vectores B y C es un candidato para el nombre de "plano", y nos gustaría que el conjunto de todas las combinaciones lineales de tres vectores de dimensión tres fuera el espacio vectorial tridimensional. Pero esto requiere un poco más de cuidado. Si A, B, y C son vectores y C es una combinación lineal de A y B, digamos $C = aA + bB$, entonces toda combinación lineal $rA + sB + tC$ de A, B y C es una combinación lineal $(rA + sB + t(aA + bB))$ de A y B solamente. En este caso esperaríamos que el conjunto de combinaciones de A, B y C, fuera precisamente un plano, o una recta o un punto (¡supongamos $A = B = C = 0$!). Hay un nombre especial para estos conjuntos de vectores en los cuales esta clase de dificultad no ocurre.

35.2 Definición. Un conjunto de dos o más vectores es linealmente independiente si y solamente si ninguno de los vectores es una combinación lineal de los otros. Un conjunto de dos o más vectores es linealmente dependiente si alguno de los vectores es una combinación lineal de los otros. Para un solo vector A el conjunto $\{A\}$ es linealmente independiente si $A \neq 0$ y dependiente si $A = 0$.

Así los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son linealmente independientes, pero los vectores $(1, 2)$ y $(2, 4)$ son linealmente dependientes. Lós vectores $(1, 2, 1)$, $(3, 0, 1)$ y $(4, 2, 2)$ son linealmente dependientes porque $(4, 2, 2)$ es la suma de los dos primeros.

Hay otra forma conveniente de describir la noción de dependencia lineal que podemos ilustrar como sigue. Supongamos A, B y C linealmente dependientes y que $A = bB + cC$. Entonces el vector cero es una combinación lineal de A, B y C, a saber, $(-1)A + bB + cC$, y no todos los coeficientes en esta combinación lineal son cero. Al contrario, si $aA + bB + cC = 0$ y no todos los a, b, y c son cero, podemos ver que uno de estos vectores es una combinación lineal de los otros; por ejemplo, si $b \neq 0$ entonces $B = -(a/b)A - (c/b)C$.

35.3 Teorema. Los vectores A, B y C son linealmente independientes si y solamente si siempre que $aA + bB + cC = 0$, entonces $a = b = c = 0$.

Naturalmente el teorema correspondiente para uno o dos vectores es verdadero.

En un capítulo posterior daremos métodos sistemáticos para decidir si un conjunto de vectores es linealmente independiente o dependiente. Para este capítulo sobre geometría vectorial necesitamos un solo teorema acerca de dos vectores linealmente independientes y el teorema correspondiente a tres vectores linealmente independientes. La demostración que damos aquí no es posiblemente la más sencilla para dos de tales vectores, pero tiene la virtud de que la misma clase de argumento establece el teorema correspondiente para cualquier número de vectores. Damos la demostración en gran detalle.

35.4 Teorema. Supongamos que A y B son vectores y que U y V son combinaciones lineales linealmente independientes de A y B. Entonces toda combinación lineal de A y B es una combinación lineal de U y V. En particular, cada uno de los vectores A y B es una combinación lineal de U y V.

Demostración. La demostración consiste en añadir al conjunto de vectores "lista" A, B un elemento del conjunto de vectores es U, V; después, omitir un elemento del conjunto resultante, y repetir el proceso. En detalle:

1. Considere las combinaciones lineales de A y B.
2. Cada combinación lineal de A y B es una combinación lineal de V, A, y B.
3. Los vectores V, A y B son linealmente dependientes, porque V es una combinación lineal de A y B.
4. A es una combinación lineal de V y B, o B es una combinación lineal de V y A, porque:

Sabemos por 3 que $vV + aA + bB = 0$ para algunos escalares v, a, y b que no son todos 0. Es imposible que a y b sean ambos 0, porque entonces tendríamos $V = 0$, que no es el caso (¿por qué?). Por lo tanto podemos "expresar" A en términos de V y B, o B en términos de V y A.

Aceptamos que A es una combinación lineal de V y B. Intercambiando A y B en el siguiente argumento completaríamos la demostración en el otro caso.

5. Cada combinación lineal de A y B es una combinación lineal de V y B, porque cada combinación de A y B es una combinación de V, A y B, y A es una combinación de V y B.
6. Cada combinación lineal de A y B es una combinación lineal de U, V y B.
7. Los vectores U, V y B son linealmente dependientes porque U es una combinación lineal de V y B.
8. B es una combinación lineal de U y V, porque:

Sabemos por 7 que $uU + vV + bB = 0$ para algunos escalares u, v y b que no son todos cero. Si b fuera cero, entonces U y V serían linealmente dependientes y por lo tanto $b \neq 0$. Por consiguiente, B es una combinación lineal de U y V.

9. Toda combinación lineal de A y B es una combinación lineal de U y V porque tanto A como B son combinaciones lineales de U y V. ▮

Hay un corolario muy importante del teorema. Supongamos que $A = (1, 0)$ y $B = (0, 1)$, y que U y V son vectores bidimensionales linealmente independientes. Entonces U y V son combinaciones lineales de A y B, y el teorema anterior nos dice que toda combinación lineal de A y B (esto es, todo vector bidimensional) es una combinación lineal de U y V. Así:

35.5 Corolario. Si U y V son vectores bidimensionales linealmente independientes, entonces todo vector bidimensional es una combinación lineal de U y V.

Aceptamos sin demostración los hechos correspondientes para tres vectores.

35.6 Teorema. Supongamos que A, B y C son vectores y que U, V y W son combinaciones lineales linealmente independientes de A, B y C. Entonces toda combinación lineal de A, B y C es una combinación lineal de U, V y W.

35.7 Corolario. Si U, V, y W son vectores tridimensionales linealmente independientes, entonces todo vector tridimensional es una combinación lineal de U, V y W.

PROBLEMAS

35.1 ¿Cuáles de los siguientes vectores son combinaciones lineales de $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$?

(a) $(0, 0, 0)$, (b) $(1, 0, 1)$,
(c) $(0, 1, 0)$, (d) $(2, 5, 3)$.

35.2 ¿En cuáles de los casos siguientes A y B son linealmente independientes?

(a) $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 0)$;
(b) $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$;
(c) $A = (1, -1, 1)$, $B = (-1, 1, -1)$.

35.3 ¿En cuáles de los casos siguientes A y B son linealmente independientes?

(a) $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$;
(b) $A = (8, 4, 8)$, $B = (2, 1, 2)$;
(c) $A = (2, 3, 5)$, $B = (4, 9, 25)$.

35.4 Supongamos que los vectores A y B son linealmente dependientes. ¿Son necesariamente paralelos? Explique.

35.5 Si A y B son paralelos ¿son necesariamente linealmente dependientes?

35.6 Supongamos que un conjunto S de vectores es linealmente independiente y que T es un subconjunto no vacío de S. ¿Es T linealmente independiente? Explique.

35.7 Supongamos que Q es un conjunto de vectores linealmente dependientes y que Q es un subconjunto de S. ¿Es S linealmente dependiente?

35.8 Supongamos que tomamos una generalización del teorema 35.3 como una definición de independencia lineal: **Definición.** Para cualquier número natural m, los vectores $A^1, A^2, \ldots, A^n$ son linealmente independientes si y solamente si $a_1A^1 + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n = 0$ entonces $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Ahora supongamos que el conjunto consta de un solo vector A, y que es linealmente dependiente. Encuentre A.

35.9 ¿Puede pertenecer el vector cero a un conjunto linealmente independiente? Explique.

35.10 Suponga que B y C son vectores linealmente independientes y que r y s son escalares diferentes de cero. Muestre que rB y sC son linealmente independientes.

35.11 Dados los vectores A, B y C que pertenecen a la recta que pasa por O, muestre que A, B y C son linealmente dependientes.

35.12 Dados los vectores A, B y C tales que dos cualesquiera de ellos son linealmente dependientes, muestre que A, B y C están sobre la recta que pasa por 0.

35.13 Demuestre que tres vectores bidimensionales cualesquiera son linealmente dependientes.

35.14 Aceptando el teorema 35.6, demuestre (corolario 35.7) que si U, V y W son vectores tridimensionales linealmente independientes, entonces todo vector tridimensional es una combinación lineal de U, V y W.

35.15 Demuestre (teorema 35.6) que si A, B y C son vectores y U, V y W son combinaciones lineales linealmente independientes de A, B y C, entonces toda combinación lineal de A, B y C es una combinación lineal de U, V y W.

35.16 Un subconjunto no vacío E de un espacio vectorial bi o tridimensional se llama un *subespacio* si cada combinación lineal de elementos de E pertenece a E. El conjunto $\{0\}$, el conjunto de todos los múltiplos de un solo vector distinto de cero, y el conjunto de las combinaciones lineales de dos vectores son ejemplos de subespacios. Demuestre lo siguiente:

(a) Si E es un subespacio de un espacio vectorial bidimensional y $E \neq \{0\}$, entonces E es o una línea recta que pasa por el origen o E es todo el espacio vectorial bidimensional.

(b) Si E es un subespacio del espacio vectorial tridimensional y $E \neq \{0\}$ entonces existe un subconjunto S de E que consta de uno, dos, o tres elementos linealmente independientes tales que E es precisamente el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S (a tal subconjunto se le llama *una base* de E).

36 PLANOS

Regresemos al problema de definir un plano. Si los vectores B y C son linealmente independientes, entonces el conjunto de todos los vectores $rB + sC$, r y s escalares, sería un plano que pasa por (0, 0, 0). Parece, según la figura 36.1, que un plano que pasa por un punto A

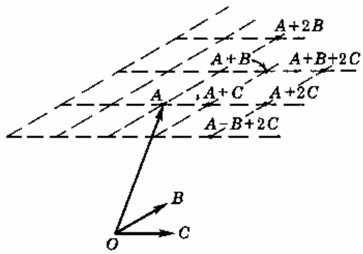


Figura 36.1

y que es paralelo al plano $\{rB + sC : r$ y s son escalares$\}$ ha de ser igual a todas las sumas posibles de A con una combinación lineal de B y C. En vista de esto, damos la definición siguiente.

36.1 Definición. Un subconjunto M de un espacio tridimensional es un plano si y solamente si existen un vector A y dos vectores B y C, linealmente independientes, tales que M es precisamente el conjunto $\{A + rB + sC : r$ y s son escalares$\}$ de todas las sumas posibles de A con una combinación lineal de B y C.

Así, $\{(1, 2, 3) + r(-1, 2, 1) + s(2, 1, 1) :$ r y s escalares$\}$ es un plano. El punto (1, 2, 3) pertenece a este plano porque (1, 2, 3) = (1, 2,

3) + (0) (—1, 2, 1) + (0) (2, 1, 1); así que (1, 2, 3) es el punto para el cual $r = s = 0$. En forma semejante, (1, 2, 3) + (2) (—1, 2, 1) —3(2, 1, 1) = (—7, 3, 2) es un punto del plano, y este es el punto que se obtiene escogiendo $r = 2$ y $s = -3$.

Es casi obvio que podemos representar un plano como el codominio de una función. Vamos a definir una función X, cuyo dominio es el conjunto de pares de números reales, mediante $X(r, s) = A + rB + sC$ para todo escalar r y s. (Aquí A, B y C son vectores tridimensionales y se supone que B y C son linealmente independientes.) El plano $\{A + rB + sC : r$ y s son escalares $\}$ es precisamente el codominio de la función X. Decimos que $X(r, s) = A + rB + sC$ para r y s escalares, es una ecuación paramétrica del plano.

Queremos recalcar que las letras utilizadas para describir un plano o una función no son importantes. El plano con ecuación $X(r, s) = A + rB + sC$ para r y s escalares, es idéntico al plano con ecuación $X(x, y) = A + xB + yC$ para x y y escalares, y $\{A + rB + sC : r$ y s son escalares $\}$ es idéntico a $\{A + xB + yC :$ x y y escalares $\}$.

Supongamos que $\{A + rB + sC : r$ y s son escalares $\}$ donde B y C son linealmente independientes es un plano dado. Desearíamos tener una interpretación geométrica de los vectores A, B y C, y el método que seguiremos es semejante al que seguimos para una recta. Recordamos que si U es un vector linealmente independiente (diferente de cero) entonces $\{D + tU :$ t un escalar$\}$ es una recta que pasa por D con vector-dirección U; en otras palabras, U es la diferencia de dos vectores distintos, que pertenecen a la recta, y U es paralelo a la recta. Pensando en esto, observamos al mismo tiempo que A es un punto de $\{A + rB + sC : r$ y s escalares$\}$ tomando $r = s = 0$. Además, $A + B$ pertenece a este plano (tomemos $r = 1$ y $s = 0$), con lo que $B = (A + B) - A$ es la diferencia de dos elementos distintos del plano. En forma semejante, C es la diferencia de elementos del plano. La figura 36.2 indica que geométricamente es razonable decir que la diferencia de

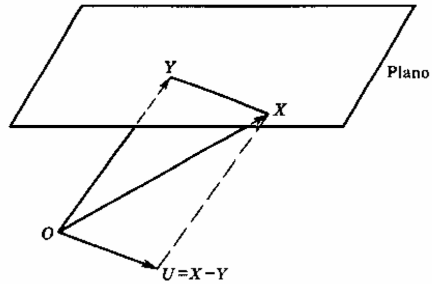


Figura 36.2

dos elementos de un plano es paralela al plano, puesto que es paralela a una recta situada en el plano. Teniendo esto en cuenta hacemos la siguiente definición:

36.2 Definición. Un vector U es paralelo a un plano M si y solamente si $U = X - Y$ para algunos puntos X y Y de M.

Así, los vectores B y C son paralelos al plano $\{A + rB + sC : r$ y s son escalares$\}$ porque son diferencias de puntos que pertenecen al plano (B es la diferencia de $A + B$ y A, y C es la diferencia de $A + C$ y A). Este plano puede por consiguiente ser descrito como un plano que contiene a A y es paralelo a B y a C. Veremos que $\{A + rB + sC : r$ y s son escalares$\}$ es el *único* plano que tiene estas propiedades.

Hemos visto que los vectores que son paralelos a la recta $\{D + tU : t$ es un escalar$\}$ precisamente son los múltiplos escalares de U, o, si queremos, las combinaciones lineales de U. El resultado análogo para planos lo da el siguiente teorema.

36.3 Teorema. Un vector U es paralelo a un plano $\{A + rB + sC : r$ y s son escalares$\}$ si y solamente si U es una combinación lineal de B y C.

Demostración. Si U es paralelo al plano, entonces existen puntos $X = A + rB + sC$ y $Y = A + uB + vC$ del plano tales que $U = X - Y$. Pero entonces, $U = X - Y = (A + rB + sC) - (A + uB + vC) = (r - u)B + (s - v)C$, y, por consiguiente, U es una combinación lineal de B y C. Recíprocamente, la combinación lineal $rB + sC$ de B y C es la diferencia de $A + rB + sC$ y A, y estos puntos pertenecen al plano. Por lo tanto tal combinación lineal es paralela al plano. ▌

Ahora estamos en posición de ver cuántas escogencias hay en los vectores A, B y C que describan el plano $\{A + rB + sC: r$ y s son escalares$\}$. Esto lo hacemos en dos pasos.

36.4 Teorema. Sea D cualquier punto del plano M. Entonces M es precisamente el conjunto $\{D + W: W$ es un vector paralelo a $M\}$ de todas las sumas de los vectores D paralelos a M.

Demostración. Supongamos que $M = \{A + rB + sC: r$ y s son escalares$\}$ y que el punto D de M es $D = A + bB + cC$. Debemos mostrar que un vector X pertenece a M si y solamente si $X \in \{D + W: W$ es paralelo a $M\}$. Si X pertenece a M, entonces $X - D$ es paralelo a M porque es la diferencia de dos elementos de M, y $X = D + (X - D)$ es la suma de D y un vector paralelo a M. De otra parte, si $X = D + W$, donde W es paralelo a M, entonces W es una combinación lineal de B y C de acuerdo al teorema anterior. Si $W = uB + vC$, entonces $X = D + W = (A + bB + cC) + (uB + vC) = A + (b + u)B + (c + v)C$ y obviamente es un elemento de M. ▌

Ahora mostremos que dos vectores cualesquiera, linealmente independientes, que son paralelos a un plano se pueden usar para dar una descripción algebraica del plano.

36.5 Teorema. Supongamos que U y V son vectores linealmente independientes paralelos a un plano M. Entonces un vector W es paralelo a M si y solamente si W es una combinación lineal de U y V.

Demostración. Si el plano M es $\{A + rB + sC: r$ y s son escalares$\}$ entonces un vector es paralelo a M si y solamente si es una combinación lineal de B y C. Por consiguiente, tanto U como V son combinaciones lineales de B y C; por lo tanto cualquier combinación lineal de U y V es una combinación lineal de B y C, y es, por consiguiente, paralela a M. De otra parte, de acuerdo al teorema 35.4, toda combinación lineal de B y C (esto es, todo vector paralelo a M) es una combinación lineal de combinaciones lineales linealmente independientes U y V de A y B. ▌

Hay un corolario inmediato a los dos resultados anteriores. Si M es un plano, $D \in M$, y U y V son vectores linealmente independientes paralelos a M, entonces, en vista de los dos últimos teoremas, $M = \{D + W: W$ es un vector paralelo a $M\} = \{D + uU + vV: u$ y v son escalares$\}$. En particular, puede haber solamente un plano que satisface estas condiciones, puesto que si M y N son tales planos, entonces cada uno debe ser igual $\{D + uU + vV: u$ y v escalares$\}$.

36.6 Corolario. El único plano que pasa por un punto D y es paralelo a dos vectores U y V linealmente independientes es $\{D + uU + vV: u$ y v son escalares$\}$.

Haremos una simple aplicación geométrica de lo anterior. Supongamos que damos tres puntos, D, E y F. ¿Hay un plano que pasa por estos tres puntos, y si es así, hay precisamente uno solo? Cada uno de los vectores-diferencia, $E - D$ y $F - D$, es paralelo a cualquiera de tales planos por la definición de vector paralelo, y, por consiguiente, si $E - D$ y $F - D$ son linealmente independientes, entonces el único plano posible es $\{D + u(E - D) + v(F - D): u$ y v son escalares$\}$. Podemos ver que D, E y F pertenecen a este conjunto: tómese $u = v = 0$ para obtener D; $u = 1$ y $v = 0$ para obtener E; y para obtener F, tómese $u = 0$ y $v = 1$. Pero recordemos que $E - D$ y $F - D$ son linealmente dependientes (esto es, paralelos) si y solamente si D, E y F están situados sobre una misma recta (son colineales). Naturalmente, no podemos esperar encontrar un único plano que pase por tres puntos si los puntos son colineales. (Pensemos en una puerta con tres bisagras.) Así el mejor resultado que podemos esperar es el siguiente.

36.7 Teorema. Si D, E y F son puntos no colineales, entonces $\{D + u(E - D) + v(F - D): u$ y v son escalares$\}$ es el único plano que contiene los tres puntos.

Por ejemplo, supongamos que deseamos encontrar una descripción algebraica del plano que pasa por $D = (1, 0, 0)$, $E = (0, 1, 2)$ y F

$= (0, 0, 1)$. Entonces $E - D = (0, 1, 2) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 2)$, $F - D = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$, y el plano que se nos pide es $\{(1, 0, 0) + u(-1, 1, 2) + v(-1, 0, 1)$: u y v son escalares$\}$. Una ecuación paramétrica para este plano es $X(u, v) = (1, 0, 0) + u(-1, 1, 2) + v(-1, 0, 1)$.

PROBLEMAS

36.1 Encuentre el plano que pasa por $(1, 2, -1)$ y que es paralelo a los vectores $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

36.2 Encuentre una ecuación vectorial paramétrica para el plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y que es paralelo a los vectores $(1, 2, 3)$ y $(-1, 1, 0)$.

36.3 Encuentre una ecuación vectorial paramétrica para el plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$.

36.4 Encuentre el plano que pasa por $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$ y $(0, 0, 1)$.

36.5 Muestre que $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$ son colineales y encuentre dos planos distintos que contengan los tres puntos.

36.6 Encuentre tres puntos D, E y F sobre el plano $M = \{(1, 0, 0) + u(1, 2, 1) + v(1, 0, 2)$: u y v son escalares$\}$.

Tomando las diferencias de D, E y F, encuentre tres vectores U, V y W que sean paralelos a M, y que ningún par de ellos sean paralelos entre sí.

Muestre que U, V y W son linealmente dependientes.

36.7 El punto $D = (0, 0, 0)$ no pertenece a la recta $L = \{(1, 0, 0) + t(1, 2, 1)$: t es un escalar$\}$.

Encuentre un plano que contenga a D y a todo punto de L.

36.8 Suponga que X y Y son puntos distintos de un plano M. Muestre que todo punto de la recta que pasa por X y Y pertenece a M.

36.9 Observe que el plano $M = \{(1, 2, 1) + r(0, 1, 0) + s(1, 1, 4)$: r y s son escalares$\}$ es igual a $\{(x, y, z)$: $(x, y, z) = (1, 2, 1) + r(0, 1, 0) + s(1, 1, 4)$ para algunos r y s escalares$\}$. Muestre que M es el conjunto de todas las ternas (x, y, z) tales que $x = 1 + s$, $y = 2 + r + s$, y $z = 1 + 4s$ para algún r y para algún s.

(Estas últimas ecuaciones se llaman ecuaciones *escalares paramétricas* para M.)

36.10 Encuentre las ecuaciones escalares paramétricas para $\{(1, 2, 0) + r(1, 1, 2) + s(-2, 4, 1)$: r y s son escalares$\}$.

36.11 Dado que

$$\begin{aligned} x &= 2 - r + s \\ y &= 1 + 2r - s \\ z &= r + 2s \end{aligned}$$

son ecuaciones escalares paramétricas para un plano M. Muestre que $M = \{(2, 1, 0) + r(-1, 2, 1) + s(1, -1, 2)$: r y s son escalares$\}$.

36.12 ¿Qué plano tienen las siguientes ecuaciones escalares paramétricas?

$$\begin{aligned} x &= 4 + r - 4s \\ y &= -1 - r + 2s \\ z &= 2 + 3r - s \end{aligned}$$

36.13 Supuesto que D, E y F son puntos no colineales. Muestre que $\{dD + eE + fF$: d, e, y f son escalares tales que $d + e + f = 1\}$ es el plano que contiene D, E y F.

37 EL PRODUCTO VECTORIAL

Nuestro estudio adicional de planos requiere todavía más maquinaria algebraica, y esta sección está dedicada al desarrollo de esta maquinaria. Necesitaremos un mecanismo que nos sirva de patrón para obtener un vector tridimensional que sea perpendicular a cada uno de los dos vectores tridimensionales A y B. Este mecanismo nos será muy útil en el estudio de planos y rectas y es, incidentalmente, la maquinaria acostumbrada de la física elemental. La forma eficiente para describir el mecanismo depende aún de otra noción, la de determinante. Afortunadamente la noción de determinante es por sí misma muy útil y aparecerá frecuentemente en estudios matemáticos posteriores. En lo que respecta a esta sección, el determinante es un mecanismo notacional conveniente.

Empezamos con una sencilla idea geométrica que motiva la definición. Supongamos que $A = (a, b)$ y $C = (c, d)$ son vectores bidimensionales como muestra la figura 37.1. Vamos a calcular el área del paralelogramo del cual C, O, A, y $A + C$ son los vértices. El área del paralelogramo es el producto de las longitudes de la base y la altura, y refiriéndonos después a la figura, vemos que el área es el producto de la longitud $|A|$ de A y la longitud de la componente de C en la dirección perpendicular a A. Ahora el vector $D = (-b, a)$ es perpendicular a A, y $D/|A|$ es un vector unitario. Por tanto, $|C \cdot (D/|A|)|$ es la longitud de la componente de C en la dirección perpendicular a A. El área del paralelogramo es $|A|\,|C \cdot (D/|A|)| = |C \cdot D| = |(c, d) \cdot (-b, a)| = |-bc + ad|$. Usaremos el número $ad - bc$, cuyo valor absoluto es el área del paralelogramo con vértices C, O, A, y $A + C$, como una clase

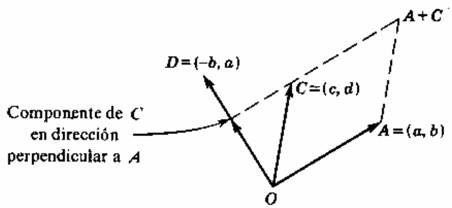


Figura 37.1

de medida del "grado de independencia lineal" de los vectores A y C. Así parece intuitivamente evidente que A y C serán linealmente dependientes si y solamente si $ad - bc = 0$.

37.1 Definición. Si $A = (a, b)$ y $C = (c, d)$ son dos vectores bidimensionales, entonces $D(A, C)$, simbolizado también como $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, se define como $ad - bc$. La función D se llama determinante.

Así,

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(4) - (2)(3) = -4 - 6 = -10.$$

El diagrama acostumbrado para recordar esta combinación de números es el siguiente: Del producto de los números a lo largo de la diagonal marcada con "+" restamos el producto de los números a lo largo de la diagonal marcada con "—", obteniendo así $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Más tarde diremos que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

es el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

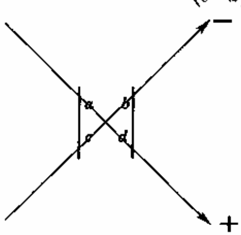


Figura 37.2

Podemos decir y lo hacemos ahora, que D es una función cuyo dominio es el conjunto de todos los pares (A, B) de vectores bidimensionales, tal que la imagen de (A, B) por D es $D(A, B)$. Así,

$$D((1, 1), (2, -3)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5.$$

Estamos listos a colegir la primera propiedad importante de la función determinante.

37.2 Teorema. Los vectores bidimensionales $A = (a, b)$ y $C = (c, d)$ son linealmente dependientes si y sólo si $D(A, C) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ es cero.

Demostración. Si (a, b) y (c, d) son linealmente dependientes, entonces uno de ellos, digamos (c, d), es un múltiplo escalar del otro. Así, $(c, d) = k(a, b)$ para algún escalar k; por tanto $c = ka$ y $d = kb$, y, por consiguiente,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = kab - kab = 0.$$

Para probar el recíproco aceptamos que $ad - bc = 0$ y tratamos de probar que en este caso (a, b) y (c, d) son linealmente dependientes. La combinación lineal $c(a, b) - a(c, d)$ sugiere por sí misma y un poco de cálculo que $c(a, b) - a(c, d) = (ca - ac, cb - ad) = -(0, ad - bc)$ que es $(0, 0)$ por nuestra hipótesis. Esto muestra la dependencia lineal a menos que $c = a = 0$. Pero en este caso los vectores $(a, b) = (0, b)$ y $(c, d) = (0, d)$ son seguramente linealmente dependientes. ∎

Del teorema anterior podemos deducir que $(1, 2)$ y $(2, 3)$ son linealmente independientes porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Naturalmente, ésta no es una forma para verificar dependencia lineal, puesto que es perfectamente obvio que ninguno de los vectores $(1, 2)$ y $(2, 3)$ es un múltiplo escalar del otro. Ahora probaremos otro teorema, que, como una prueba de dependencia lineal es igualmente inútil, pero que lo necesitamos para la demostración del principal teorema de esta sección.

37.3 Teorema. Sean (a, b, c) y (d, e, f) vectores tridimensionales. Entonces los dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si

$$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Recordamos, antes de probar el teorema, que hay una forma sencilla de escribir los tres arreglos que aparecen en la conclusión del teorema. Escribamos el siguiente arreglo:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Si quitamos la primera columna de la izquierda de este arreglo, tenemos $\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$, quitando la segunda columna, tenemos $\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}$, y quitando la tercera, tenemos $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$.

Demostración de 37.3 Si (a, b, c) y (d, e, f) son linealmente dependientes, entonces uno de ellos, digamos (d, e, f), es un múltiplo escalar del otro. Si $(d, e, f) = r(a, b, c)$ para algún escalar r, entonces $d = ra$, $e = rb$, y $f = rc$. Es fácil entonces ver que

$$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Para probar el recíproco aceptamos que

$$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Si a, b y c son 0, es claro que (a, b, c) y (d, e, f) son linealmente dependientes, por eso, necesitamos considerar solamente el caso en el cual uno de los tres números, digamos b, no es cero. Entonces calculamos: $e(a, b, c) - b(d, e, f) =$

$$(ae - bd, 0, ce - bf) = \left(\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, 0, -\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}\right),$$

y, bajo nuestra hipótesis, esto es $(0, 0, 0)$. Así hemos mostrado la dependencia lineal. ▮

Ahora exponemos el teorema más importante de la sección.

37.4 Teorema. Si los vectores (a, b, c) y (d, e, f) son linealmente independientes, entonces el vector

$$X = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}\right)$$

es un vector distinto de cero que es perpendicular a ambos vectores (a, b, c) y (d, e, f).

Demostración. Sabemos por el teorema anterior que $X \neq 0$, probemos solamente que X es perpendicular a (a, b, c). Observemos:

$$a\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a(bf - ce) - b(af - cd) + c(ae - bd) = abf - ace - baf + bcd + cae - cbd = 0. \quad ▮$$

La demostración de este teorema no sugiere cómo fue descubierto el teorema; en una nota al final de la sección indicamos brevemente cómo podría conjeturarse el teorema. Posponemos los ejemplos hasta que tengamos a nuestra disposición una notación más breve.

37.5 Definición. El producto vectorial de los vectores $A = (a, b, c)$ y $B = (d, e, f)$, simbolizado por $A \times B$, es el vector cuyas coordenadas son $\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$, $-\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$, y $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$.

El teorema 37.3 puede ahora ser expresado así: los vectores tridimensionales A y B son linealmente dependientes si y solamente si $A \times B = 0$.

37.6 Ejemplo. Se nos pide encontrar un vector que sea perpendicular a los vectores $A = (1, 2, 3)$ y $b = (3, -2, 2)$. Calculamos el producto vectorial:

$$A \times B = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\right) = (10, 7, -8).$$

Verifiquemos nuestro cálculo:

$A \cdot (A \times B) = (1, 2, 3) \cdot (10, 7, -8) = 10 + 14 - 24 = 0,$
y
$B \cdot (A \times B) = (3, -2, 2) \cdot (10, 7, -8) = 30 - 14 - 16 = 0,$
y, por consiguiente, $(10, 7, -8)$ es perpendicular a A y a B. ▮

37.7 Ejemplo. Debemos encontrar un vector que sea perpendicular a los vectores $A = (1, 2, 3)$ y $B = (2, 4, 6)$. Podríamos calcular el producto vectorial $A \times B$, pero reflexionando un momento y mirando el teorema 37.3 nos damos cuenta que $A \times B = 0$. Sin embargo, el problema es fácil. Cualquier vector que es perpendicular a A es perpendicular a B, y por inspección podemos encontrar un vector perpendicular a A. Por ejemplo, uno cualquiera de los vectores $(-2, 1, 0)$, $(0, -3, 2)$, y $(-3, 0, 1)$ cumple las condiciones. ▮

Los teoremas que hemos establecido nos dan toda la información que necesitaremos acerca de determinantes y productos vectoriales. Hacemos una lista, para la información del lector, de algunos otros resultados que serán útiles en muchas situaciones. Y concluimos la sección con la nota explicatoria sobre la génesis del teorema 37.4.

37.8 Teorema. Sean A, B y C vectores bidimensionales, sea r un escalar, y sea D la función determinante. Entonces,

(i) $D(A, B) = -D(B, A)$;
(ii) $D(A, B + C) = D(A, B) + D(A, C)$;
(iii) $D(rA, B) = rD(A, B)$; y
(iv) $D((1, 0), (0, 1)) = 1$.

Hemos escrito este teorema acerca de la función determinante porque caracteriza a D en el siguiente sentido. D es la única función cuyo dominio es el conjunto de pares de vectores bidimensionales y cuyo codominio es el conjunto de escalares que tienen las propiedades anotadas en el teorema 37.8.

37.9 Teorema. Si A, B y C son vectores tridimensionales y r un escalar, entonces

(i) $A \times B = -(B \times A)$;
(ii) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$;
(iii) $(rA) \times B = A \times (rB) = r(A \times B)$; y
(iv) $(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$.

El estudiante no tendría dificultad viendo el teorema anterior de observar que la multiplicación vectorial no es conmutativa ni asociativa. Además, no hay idéntico multiplicativo, porque $A \times A = 0$ para todo A; por tanto 0 es el único idéntico multiplicativo posible, pero $0 \times A = 0$ para todo A; así que 0 no es idéntico multiplicativo.

37.10 Nota. Podríamos haber supuesto la verdad del teorema 37.4 a partir del siguiente argumento. Tratemos de encontrar un vector (x, y, z) que sea perpendicular a los vectores (a, b, c) y (d, e, f). Esto es, tratemos de encontrar (x, y, z) tal que $xa + yb + zc = 0$ y $xd + ye + zf = 0$.

Si multiplicamos la primera de las ecuaciones por $-d$ y la sumamos con el producto de la segunda por a, eliminando x, obtenemos

$$y(ae - bd) + z(af - cd) = 0.$$

Reescribiendo este resultado como un producto interior, tenemos

$$(y, z) \cdot \left(\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \right) = 0.$$

Una posibilidad para (y, z) es entonces

$$\left(-\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right)$$

puesto que este vector es perpendicular a

$$\left(\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \right).$$

La sustitución en ambas ecuaciones anteriores nos lleva a $x = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$.

PROBLEMAS

37.1 Calcule el vector X en cada uno de los casos siguientes:

(a) $X = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1)$
(b) $X = (1, 1, 0) \times (0, 1, 1)$
(c) $X = (1, 0, 1) \times (0, 1, 0)$

37.2 Calcule el vector X en cada uno de los casos siguientes:

(a) $(0, 0, 1) \times (4, 3, 0)$
(b) $(1, 2, 3) \times (2, 3, 1)$
(c) $(-1, 2, 3) \times (3, 2, -1)$

37.3 Muestre por medio de un ejemplo que la multiplicación vectorial no es conmutativa ni asociativa.

37.4 Sean A, B y C vectores bidimensionales, sea r un escalar y D la función determinante. Pruebe (teorema 37.8) que

(a) $D(A, B) = -D(B, A)$
(b) $D(A, B + C) = D(A, B) + D(A, C)$
(c) $D(rA, B) = rD(A, B)$.

37.5 Demuestre que si A y B son vectores tridimensionales, entonces $(-A) \times (-B) = A \times B$.

37.6 Demuestre (teorema 37.9) que si A, B y C son vectores tridimensionales y r es un escalar, entonces

(a) $A \times B = -(B \times A)$;
(b) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$;
(c) $(rA) \times B = A \times (rB) = r(A \times B)$;
(d) $(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$.

37.7 Supongamos que E es una función que, como el determinante D, asigna un número a toda pareja ordenada de vectores bidimensionales. Aceptamos que

$$E(A, B) = -E(B, A), \; E(A, B + C) = E(A, B) + E(A, C), E(rA, B) = rE(A, B)$$

para todos los vectores A, B, C y para todo escalar r, y que $E(I, i) = 1$, donde $I = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$. Pruebe sucesivamente que:

(a) $E(U, U) = 0$. (Use $E(A, B) = -E(B, A)$.)
(b) $E(U + V, W) = E(U, W) + E(V, W)$.
(En primer lugar $E(U + V, W) = -E(W, U + V)$.)
(c) $E(U, vV) = vE(U, V)$.
(d) $E(uU, vV) = uvE(U, V)$.
(e) $E(aI + bi, cI + di) = (ad - bc)E(I, i)$.
(f) $E(A, B) = D(A, B)$ para todos los vectores bidimensionales A y B.

37.8 Muestre que si A y B son vectores tridimensionales, entonces $|A \times B|^2 + |A \cdot B|^2 = |A|^2 |B|^2$.
De esto concluya que si A es perpendicular a B, entonces $|A \times B| = |A| |B|$.

37.9 Sean A y B vectores tridimensionales y A_1 la componente de A que es perpendicular a B. Muestre que $A \times B = A_1 \times B$, y usando el problema anterior, deduzca que $|A \times B| = |A_1| |B|$, que es el área del paralelogramo $O, A, A + B, B$. (Si entiende trigonometría deduzca que $|A \times B| = |A| |B|$ sen θ donde θ es el ángulo entre OA y OB.)

Nota: El problema anterior da una interpretación geométrica del producto vectorial $A \times B$ de dos vectores no paralelos. La longitud de $A \times B$ es precisamente el área del paralelogramo $O, A, A + B, B$ y $A \times B$ está en dirección perpendicular a los vectores A y B. Pero hay dos sentidos posibles. Sin explicar el por qué, damos la siguiente regla para encontrar el sentido de $A \times B$: usando su mano *izquierda*, tome su pulgar paralelo a OA, su dedo índice paralelo a OB y su dedo del corazón perpendicular al pulgar y al índice. Entonces su dedo del corazón indica el sentido de $A \times B$. Puede observar que nuestro sistema de coordenadas tiene la propiedad de que es posible colocar el pulgar a lo largo del eje x, el índice a lo largo del eje y, y el del corazón a lo largo del eje z. Por esta razón se dice algunas veces que es un sistema de mano izquierda. Un sistema con el eje x a la derecha, el eje y apuntando verticalmente hacia arriba y el eje z hacia afuera es un sistema de mano derecha.

38 NORMALES A PLANOS

En esta sección completaremos nuestro desarrollo de la maquinaria algebraica para el estudio de la geometría de rectas y planos. Necesitamos dos proposiciones, ninguna difícil, acerca de vectores tridimensionales. Después de establecerlas, regresaremos de nuevo a la geometría de planos y empezaremos a aplicar la técnica algebraica que hemos desarrollado.

De la sección anterior, sabemos que si B y C son vectores tridimensionales linealmente independientes, entonces $B \times C$ es un vector distinto de cero que es perpendicular a B y a C. Hay otros hechos verdaderos.

38.1 Teorema. Si B y C son vectores tridimensionales linealmente independientes, entonces B, C y $B \times C$ son linealmente independientes y todo vector tridimensional es una combinación lineal de B, C y $B \times C$.

Demostración. Empecemos suponiendo que B, C y $B \times C$ son linealmente dependientes y razonemos para llegar a una contradicción. Si estos vectores son linealmente dependientes, entonces para algunos escalares b, c, y d, no todos 0, $bB + cC + dB \times C = 0$. Obtenemos una contradicción mostrando que $b = c = d = 0$. El artificio es tomar precisamente un producto interior con $B \times C$. Usando el hecho de que B y C son perpendiculares a $B \times C$, encontramos que $0 \cdot B \times C = (bB + cC + dB \times C) \cdot (B \times C) = d(B \times C) \cdot (B \times C)$, y, puesto que $B \times C = 0$, vemos que $d = 0$. Entonces $bB + cC = 0$; pero B y C son linealmente independientes y, por lo tanto, $b = c = 0$. Por lo tanto, B, C y $B \times C$ son linealmente independientes, y puesto que cada uno de estos es una combinación lineal de (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), *toda* combinación lineal de (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), (que es todo vector tridimensional) es una combinación lineal de B, C y $B \times C$ por el teorema 35.6. ▌

Sabemos del teorema anterior que cualquier vector tridimensional X es una combinación lineal $bB + cC + d(B \times C)$, donde B y C son vectores linealmente independientes. Puesto que B y C son perpendiculares a $B \times C$, podemos ver que $bB + cC$ es también perpendicular a $B \times C$, porque $(bB + cC) \cdot B \times C = bB \cdot (B \times C) + cC \cdot (B \times C)$.

Por consiguiente, $bB + cC$ y $dB \times C$ son, respectivamente, la componente de X perpendicular a $B \times C$ y la componente de X paralela a $B \times C$. Se deduce que X es perpedicular a $B \times C$ si y solamente si su componente $dB \times C$ paralela a $B \times C$ se anula, esto es, si y solamente si $X = bB + cC$. Esto prueba la primera parte del siguiente teorema.

38.2 Teorema. Sean B y C vectores tridimensionales linealmente independientes. Entonces para cada vector X,

(i) X es perpendicular a $B \times C$ si y solamente si X es una combinación lineal de B y C, y

(ii) X es perpendicular a B y a C si y solamente si X es una combinación lineal (esto es, un múltiplo escalar) de $B \times C$.

Demostración. Para probar la segunda parte de este teorema, primero observamos que un múltiplo escalar de $B \times C$ es seguramente perpendicular a B y a C. De otra parte, supongamos que X es perpendicular a B y a C y que $X = bB + cC + d(B \times C)$. Entonces X es perpendicular a $bB + cC$; por lo tanto, $0 = X \cdot (bB + cC) = [(bB + cC) + d(B \times C)] \cdot (bB + cC) = (bB + cC) \cdot (bB + cC) + 0$. Por lo tanto, $bB + cC = 0$, y, por consiguiente, $X = d(B \times C)$. ▌

Estamos ahora en capacidad de manipular problemas relacionados con planos con considerable agilidad. Nuestro primer objetivo es el siguiente: Un plano puede ser descrito como el codominio de una función; realmente, la misma definición de plano nos da una ecuación vectorial paramétrica de él. Vamos a encontrar una forma diferente de describir el plano. El plano será el conjunto de puntos en los cuales una función es 0. La noción de normal a un plano juega un papel esencial, y empezamos con la definición de normal.

38.3 Definición. Un vector V es perpendicular a un plano M si y solamente si es perpendicular a todo vector paralelo a M. Un vector es una normal a M si es perpendicular a M y $V \neq 0$.

Recordamos que los vectores que son paralelos al plano $M = \{A + rB + sC: r \text{ y } s \text{ son escalares}\}$ son, por definición, las diferencias de elementos de M y que, de acuerdo al teorema 36.3, son éstos precisamente las combinaciones lineales de B y C. Un vector V es perpendicular a todas estas combinaciones si y solamente si es perpendicular a B y a C, y, de acuerdo a la segunda parte del teorema anterior, este es el caso si y solamente si V es un múltiplo escalar de $B \times C$. Así, tenemos el siguiente teorema:

38.4 Teorema. Un vector V es una normal al plano $\{A + rB + sC: r \text{ y } s \text{ escalares}\}$ si y solamente si V es un múltiplo escalar, distinto de cero, de $B \times C$.

Podemos ver que $(2, -2, -6)$ es perpendicular al plano $\{(1, 2, 3) + r(1, -2, 1) + s(2, -1, 1): r \text{ y } s \text{ escalares}\}$ porque $(2, -2, -6) \cdot (1, -2, 1) = 0$ y $(2, -2, -6) \cdot (2, -1, 1) = 0$.

El teorema 38.4 nos dice que los únicos vectores que son perpendiculares al plano $\{(1, 2, 3) + r(1, -2, 1) + s(2, -1, 1)$: r y s escalares $\}$ son múltiplos escalares de

$$(1, -2, 1) \times (2, -1, 1) = \left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right) = (-1, 1, 3).$$

Observamos sin sorprendernos que $(2, -2, -6)$ es un múltiplo escalar de $(-1, 1, 3)$.

Probemos ahora uno de los teoremas principales relacionados con planos.

38.5 Teorema. Si M es un plano que pasa por el punto P y perpendicular al vector, distinto de cero, V, entonces

$$M = \{X : (X - P) \cdot V = 0\}.$$

Demostración. Consideremos el plano $M = \{A + rB + sC$: r y s son escalares $\}$, donde B y C son linealmente independientes. Entonces un vector X pertenece a M si y solamente si $X = A + rB + sC$ para algunos r y s escalares, o, reagrupando la ecuación, si y solamente si $X - A$ es una combinación lineal de B y C. Pero de acuerdo al teorema 38.2, $X - A$ es una combinación lineal de B y C si y solamente si $X - A$ es perpendicular a $B \times C$, y también sabemos del teorema anterior que V es un múltiplo escalar, diferente de cero, de $B \times C$. Reuniendo estos resultados vemos que $X \in M$ si y sólo si $X - A$ es perpendicular a V. Por último, sabemos que A y P pertenecen a M con lo que $A - P$ es una paralela a M y, por tanto, perpendicular a V. Así, $(A - P) \cdot V = 0$ y $(X - A) \cdot V = (X - A) \cdot V + (A - P) \cdot V = (X - P) \cdot V$. De aquí $(X - A) \cdot V = 0$ si y sólo si $(X - P) \cdot V = 0$ y hemos demostrado que $X \in M$ si y sólo si $(X - P) \cdot V = 0$. ▌

Deducimos inmediatamente que, por ejemplo, el plano que pasa por $(1, 2, 3)$ y que es perpendicular a $(-1, 2, 3)$ es, precisamente,

$$\{X: [X - (1, 2, 3)] \cdot (-1, 2, 2) = 0\}.$$

Más aún, es posible afirmar que existe un único plano que pasa por un punto dado P y que es perpendicular a un vector V no nulo, ya que tal plano es idéntico a $\{X: (X - P) \cdot V = 0\}$.

Algunas veces se dice que $(X - P) \cdot V = 0$, donde V y P son vectores tridimensionales y $V \neq 0$, es una *ecuación* vectorial del plano $M = \{X: (X - P) \cdot V = 0\}$, o también, para diferenciarla de la ecuación paramétrica, se dice que es una ecuación vectorial *no paramétrica* del plano. Así, $[X - (1, 2, 3)] \cdot (-1, 2, 2) = 0$ es una ecuación del plano que pasa por $(1, 2, 3)$ y es perpendicular a $(-1, 2, 3)$. Podemos también escribir esta ecuación bajo la forma

$$X \cdot (-1, 2, 2) = (1, 2, 3) \cdot (-1, 2, 2) = 9.$$

PROBLEMAS

38.1 ¿Es el vector $(1, -1, 1)$ perpendicular al plano $\{(0, 0, 1) + r(0, 1, 1) + s(1, 1, 0)$: r y s escalares $\}$?

38.2 ¿Es el vector $(0, 1, 0)$ perpendicular al plano $\{u(1, 1, 1) + v(0, 1, 0)$: u y v escalares $\}$?

38.3 Encuentre una ecuación del plano que pasa por $(4, 9, 81)$ con normal $(1, 3, 9)$.

38.4 Encuentre una ecuación del plano que pasa por $(3, 2, 1)$ con normal $(3, 2, 2)$.

38.5 Encuentre una ecuación vectorial no paramétrica del plano $\{(1, 2, 3) + r(2, 0, 4) + s(2, 1, 1)$: r y s escalares $\}$.

38.6 Encuentre una ecuación vectorial no paramétrica del plano $\{(-1, 1, 1) + u(1, -1, 2) + v(2, 3, 0)$: u y v escalares $\}$.

38.7 Encuentre una ecuación vectorial no paramétrica de $\{(9, 13, -2) + u(7, -1, 3) + v(-42, 6, -18)$: u y v escalares $\}$.

38.8 Demuestre que si A, B y C son vectores, no nulos, mutuamente ortogonales, entonces los A, B y C son linealmente independientes.

38.9 Demuestre que los vectores tridimensionales A, B y C son linealmente dependientes si y sólo si $A \cdot B \times C = 0$.

38.10 Sea E un subespacio del espacio vectorial tridimensional (véase el problema 35.16). Demuestre que E o es $\{0\}$, o es una recta que contiene a 0, o es un plano que contiene a 0, o es todo el espacio tridimensional.

38.11 Para todo subespacio E del espacio tridimensional sea $E^{\perp} = \{V : V$ es un vector perpendicular a cada elemento de $E\}$ y sea $(E^{\perp})^{\perp} = \{U : U$ es un vector perpendicular a cada elemento de $E^{\perp}\}$. Demuestre que $(E^{\perp})^{\perp} = E$.

39 ALGO MAS SOBRE LOS PLANOS

Ya conocemos las propiedades más importante de los planos. Dedicaremos esta sección a ejemplos y problemas ilustrativos. Utilizaremos, según parezca más conveniente, ecuaciones paramétricas o ecuaciones no paramétricas. Es más fácil resolver ciertos tipos de problemas mediante la forma paramétrica; por ejemplo, los problemas relacionados con el cálculo de vectores tangentes a un plano, o con la determinación de puntos pertenecientes a un plano dado. Por otra parte, encontrar la normal a un plano, o decidir si un punto dado pertenece o no a determinado plano, son problemas en los que resulta más fácil emplear la forma no paramétrica.

Existe una forma de ecuación no paramétrica del plano que es utilizada con frecuencia y que se diferencia ligeramente de la forma usual. Sabemos que el plano que contiene el punto P y que tiene por normal a V es $\{X : (X - P) V = 0\}$. Si $P = (p, q, r)$ y $V = (a, b, c)$, entonces este plano es, sencillamente,

$$\{(x, y, z):\ [(x, y, z) - (p, q, r)]\cdot(a, b, c) = 0\}$$

que equivale, realizadas las operaciones correspondientes, a

$$\{(x, y, z):\ ax + by + cz = ap + bq + cr\}.$$

Algunas veces decimos que $ax + by + cz = ap + bq + cr$ es *una ecuación escalar* del plano.

Así, por ejemplo, la ecuación vectorial del plano que pasa por $(1, 2, 3)$ y es perpendicular a $(-1, 2, 2)$ es

$$[X - (1, 2, 3)]\cdot(-1, 2, 2) = 0$$

o $X \cdot (-1, 2, 2) = (1, 2, 3) \cdot (-1, 2, 2) = 9$. Haciendo $X = (x, y, z)$ podemos transformar la ecuación en $(x, y, z) \cdot (-1, 2, 2) = 9$, o $-x + 2y + 2z = 9$.

Es factible invertir este proceso. No es difícil probar el siguiente teorema.

39.1 Teorema. Si a, b, c y d son escalares, no todos nulos, entonces $\{(x, y, z): ax + by + cz = d\}$ es un plano, y (a, b, c) es normal a dicho plano.

Demostración. Si $a \neq 0$, entonces $ax + by + cz = d$, si y sólo si $a(x - d/a) + by + cz = 0$, condición que se cumple si y sólo si $[(x, y, z) - (d/a, 0, 0)] \cdot (a, b, c) = 0$. Por tanto, $\{(x, y, z): ax + by + cz = d\} = \{[(x, y, z) - (d/a, 0, 0)] \cdot (a, b, c) = 0\}$. Ahora bien, es evidente que este último conjunto es un plano que contiene a $(d/a, 0, 0)$ y que es perpendicular a (a, b, c). Los casos en que $b \neq 0$ o $c \neq 0$ son exactamente iguales al caso en que $a \neq 0$. ∎

Damos unos pocos ejemplos del empleo de los teoremas sobre planos.

39.2 Ejemplo. Se pide encontrar una ecuación vectorial del plano $M = \{(x, y, z): 2x - 3y + 6z = 4\}$. Sabemos que $(2, -3, 6)$ es, por el teorema 39.1, perpendicular al plano M. Si conociéramos las coordenadas de algún punto del plano, podríamos aplicar el teorema 38.5 para una ecuación vectorial. No es difícil obtener un punto del plano. Por ejemplo, si $y = z = 0$, entonces $2x = 4$, y $x = 2$; por tanto, $(2, 0, 0) \in M$. También hubiéramos podido, por ejemplo, haber tomado $x = y = 0$, con lo que $6z = 4$, y $z = \frac{2}{3}$, de modo que $(0, 0, \frac{2}{3}) \in M$. En consecuencia, $[X - (2, 0, 0)] \cdot (2, -3, 6) = 0$ es una ecuación vectorial de M. ∎

39.3 Ejemplo. Se pide encontrar una ecuación vectorial y una ecuación escalar del plano $M = \{(1, 2, 3) + r(2, 1, 1) + s(1, -1, 2): r, s \text{ escalares}\}$. Por el teorema 38.4 sabemos que

$$(2, 1, 1) \times (1, -1, 2) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = (3, -3, -3)$$

es normal a M. Es claro que $(1, 2, 3) \in M$, como se puede verificar con sólo hacer $r = s = 0$ en la ecuación paramétrica de M. Por tanto, el plano M contiene a $(1, 2, 3)$, y es perpendicular a $(3, -3, -3)$. Conforme al teorema 38.5, una ecuación vectorial de M es

$$[X - (1, 2, 3)]\cdot(3, -3, -3) = 0.$$

Por supuesto que, del mismo modo, podríamos establecer que

$$[X - (1, 2, 3)]\cdot(1, -1, -1) = 0$$

es también una ecuación vectorial de M puesto que $(1, -1, -1) = (\frac{1}{3})(3, -3, -3)$. Por último, para la ecuación escalar, hagamos $X = (x, y, z)$ con lo que

$$[(x, y, z) - (1, 2, 3)] \cdot (1, -1, -1) = 0,$$

es decir

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, -1) - (1, 2, 3) \cdot (1, -1, -1) = 0,$$

lo que conduce a

$$x - y - z + 4 = 0. \blacksquare$$

39.4 Ejemplo. Se pide buscar una ecuación paramétrica del plano $M = \{(x, y, z): x + y - z = 2\}$. Probablemente el modo más fácil de resolver los problemas de este tipo consiste en encontrar tres puntos que pertenezcan al plano, y aplicar, después, el teorema 36.7. Si $x = y = 0$, entonces $z = -2$; si $y = z = 0$, entonces $x = 2$; si $x = z = 0$, entonces $y = 2$. Por tanto, $D = (0, 0, -2)$, $E = (2, 0, 0)$ y $F = (0, 2, 0)$ pertenecen a M. Entonces,

$$E - D = (2, 0, 0) - (0, 0, -2) = (2, 0, 2)$$

y

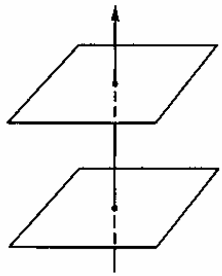
$$F - D = (0, 2, 0) - (0, 0, -2) = (0, 2, 2).$$

En consecuencia, $M = \{D + r(E - D) + s(F - D): r, s \text{ escalares}\} = \{(0, 0, -2) + r(2, 0, 2) + s(0, 2, 2): r, s \text{ escalares}\}$, de donde $X(r, s) = (0, 0, -2) + r(2, 0, 2) + s(0, 2, 2)$ es una ecuación paramétrica de M. $\blacksquare$

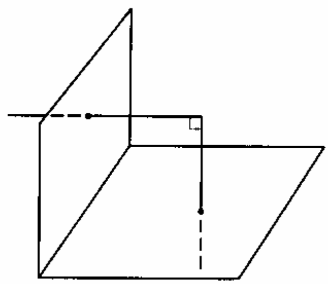
39.5 Ejemplo. Se pide encontrar el punto P que pertenece tanto al plano $M = \{X: X \cdot (2, 1, 2) = 5\}$ como a la recta L que contiene el punto $(4, 4, 1)$ y que es normal a M. El vector $(2, 1, 2)$ es normal a M, y, por tanto, es un vector direccional de la recta L. Consecuentemente, $X(t) = (4, 4, 1) + t(2, 1, 2)$ es una ecuación paramétrica de L. Necesitamos, ahora, calcular un valor escalar t tal que $X(t) \in M$: es decir, que $X(t) \cdot (2, 1, 2) = 5$, que equivale a $[(4, 4, 1) + t(2, 1, 2)] \cdot (2, 1, 2) = 5$. Supuestas las correspondientes operaciones, se obtiene que $14 + 9t = 5$, ó $9t = -9$, de donde $t = -1$. En conclusión, $X(-1) = (4, 4, 1) - 1(2, 1, 2) = (2, 3, -1)$ es el punto pedido.

Es probable que este tipo de problema pueda también resolverse fácilmente si se utilizan la ecuación escalar no paramétrica de M y la ecuación escalar paramétrica de L. $\blacksquare$

39.6 Definición. Dos planos son paralelos si existe un vector que sea normal a ambos; son perpendiculares si existe un vector que sea normal a uno de ellos y perpendicular a algún vector normal al otro plano.



Planos paralelos



Planos perpendiculares

Figura 39.1

También hubiéramos podido definir correctamente el paralelismo de dos planos estableciendo que dos planos son paralelos si *todo* vector normal a uno de ellos es también normal al otro, puesto que, si dos vectores cualesquiera son normales a un mismo plano, necesariamente cada vector es múltiplo no nulo del otro.

39.7 Ejemplo. Se pide encontrar una ecuación vectorial del plano M que contiene el punto $(1, 1, -2)$ y es paralelo al plano $2x - y +$

$3z = 1$. El vector $(2, -1, 3)$ es normal a este último plano, y, por tanto, de acuerdo con la definición 39.6, también lo es al plano M. En consecuencia, puesto que $(2, -1, 3)$ es normal al plano M y éste contiene el punto $(1, 1, -2)$, una ecuación vectorial de M será

$$[X - (1, 1, -2)] \cdot (2, -1, 3) = 0. \quad \blacksquare$$

39.8 Ejemplo. Se pide una ecuación vectorial de un plano M que pase por el punto $(1, -2, 2)$ y sea perpendicular a los planos $\{(x, y, z): x - 2y + z = 1\}$ y $\{(x, y, z): 3x - y = 2\}$. El vector $(1, -2, 1)$ es normal al primero de estos dos planos, y $(3, -1, 0)$ es normal al segundo. Según la definición 39.6, un vector normal al plano M tiene que ser perpendicular a cada uno de los vectores linealmente independientes $(1, -2, 1)$ y $(3, -1, 0)$; en consecuencia, ha de ser un múltiplo escalar de

$$\begin{aligned}(1, -2, 1) \times (3, -1, 0) &= \left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\right)\\ &= (1, 3, 5).\end{aligned}$$

Así, una ecuación vectorial de M es

$$[X - (1, -2, 2)] \cdot (1, 3, 5) = 0. \quad \blacksquare$$

PROBLEMAS

39.1 Encontrar dos vectores V y P tales que $\{X : (X - P) \cdot V = 0\} = \{(x, y, z): 3x - 2y + 7z = 8\}$.

39.2 Encontrar un vector V y un escalar r tales que $\{X : X \cdot V = r\} = \{(x, y, z): x + 2y + 3z = 6\}$.

39.3 Encontrar un vector V y un escalar r tales que $\{X : X \cdot V = r\} = \{(1, 1, 1) + s(2, 3, 5) + t(5, 3, 2): s$ y t escalares$\}$.

39.4 Dado $M = \{(x, y, z): x + y + z = 1\}$ encontrar tres vectores A, B y C tales que $M = \{A + rB + sC: r, s$ escalares$\}$.

39.5 Dar una ecuación vectorial del plano que pasa por $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano $\{(x, y, z): x - y - z = 1\}$.

39.6 Encontrar el plano que pasa por $(5, 5, 7)$ y que es perpendicular a cada uno de los planos M y N tales que $M = \{(x, y, z): x + y = 1\}$ y $N = \{(x, y, z): y + z = 1\}$.

39.7 Encontrar el punto que pertenece al plano $M = \{X: X \cdot (-2, 2, 1) = 0\}$ y a la recta que, normal a M, pasa por el punto $(3, 4, 7)$.

39.8 Encontrar el punto del plano $\{X : X \cdot (1, 1, 1) = 2\}$ que está más cerca del vector $(-2, -1, -2)$.

39.9 Demostrar que la distancia desde el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ al plano $ax + by + cz - d = 0$ (es decir, la distancia entre P y el punto más cercano del plano) es

$$\left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

39.10 Demostrar que, dados cuatro planos en el espacio tridimensional, no es posible que cada plano sea perpendicular a cada uno de los otros tres.

39.11 Demostrar que, si los planos M y N son paralelos, y $M \cap N$ no es vacía, entonces $M = N$.

39.12 Demostrar que un plano M es perpendicular a un plano N si y sólo si existe un vector normal a M que sea paralelo a N.

40 ALGO MAS SOBRE LAS RECTAS

En esta última sección de geometría vectorial investigaremos las "*relaciones*" existentes entre las rectas y los planos del espacio tridimensional. Hemos visto que cada plano tiene una ecuación no paramétrica, y que, con frecuencia, es más conveniente utilizar esta ecuación que una ecuación paramétrica. Con sólo observar una ecuación no paramétrica de un plano es posible, por ejemplo, encontrar un vector normal al plano, mientras que, para obtener esta misma información a partir de una ecuación paramétrica, nos vemos obligados a realizar un producto vectorial. En las rectas, sin embargo, ocurre todo lo contrario. Veremos que una recta puede determinarse mediante un par de ecuaciones no paramétricas, pero que, para obtener un vector-dirección de la recta, es necesario efectuar un producto vectorial, mientras que bastará examinar una ecuación paramétrica para conseguir el mismo resultado.

Abrimos la sección con un teorema referente a la intersección de una recta con un plano. El método de demostración empleado es directo; ya lo hemos utilizado en los ejemplos de la sección precedente.

40.1 Teorema. Si una recta L no es paralela a un plano M, entonces la intersección $L \cap M$ consta exactamente de un solo punto.

Demostración. Sean $L = \{A + tB: t, \text{ escalar}\}$ y $M = \{X : X \cdot U = a\}$. Entonces, un punto $A + tB$ de L pertenece a M si y sólo si $(A + tB) \cdot U = a$. Así ocurre, omitidas las operaciones intermedias, si y sólo si $(B \cdot U)\, t = a - A \cdot U$. Ahora bien, U es normal a M, y B es un vector-dirección de L; por tanto, U no es perpendicular a B y, en consecuencia, $B \cdot U \neq 0$. Por tanto, $t = (a - A \cdot U)/(B \cdot U)$ es el único valor de t que hace que $A + tB \in M$. La intersección $L \cap M$ consta, pues, de este único punto. ▮

El siguiente teorema es una de las dos principales conclusiones de esta sección.

40.2 Teorema. Si M y N son dos planos no paralelos, y los vectores U y V son, respectivamente, normales a M y N, entonces $M \cap N$ es una recta y $U \times V$ es un vector director de dicha recta.

Demostración. Ante todo probaremos que $M \cap N$ no es vacía. Para ello, supongamos que $M = \{A + rB + sC: r, s \text{ escalares}\}$, donde B y C son linealmente independientes. Aseguramos que no es posible que B y C sean ambos perpendiculares a V porque, entonces, V sería paralelo al vector $B \times C$, (normal a M), y hemos supuesto que M y N no son paralelos. Podemos, pues, aceptar que, por ejemplo, B no es perpendicular a V. Entonces, la recta $\{A + tB: t, \text{ escalar}\}$ no es paralela a N, y, por el teorema anterior, existe un punto de esta recta, por ejemplo el punto $A + tB$, que también pertenece a N. Ahora bien, es evidente que el punto $A + tB + 0C$ pertenece a M, y, por tanto, $M \cap N$ no es vacía.

Sea P un punto de $M \cap N$. Entonces, $M = \{X: (X - P) \cdot U = 0\}$ y $N = \{X: (X - P) \cdot V = 0\}$; de donde, un punto X pertenece al mismo tiempo a M y a N si y sólo si $X - P$ es un múltiplo escalar de $U \times V$. Así, $X \in M \cap N$ si y sólo si $X - P = tU \times V$ para algún escalar t, y, en consecuencia, $M \cap N$ es la recta $\{P + tU \times V: t, \text{ escalar}\}$. ▮

40.3 Ejemplo. Se pide encontrar una ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos

$$M = \{(x, y, z): 2x - y + z = 4\}$$

y

$$N = \{(x, y, z): x + y - z = 2\}.$$

Por el teorema precedente sabemos que la intersección es una recta, y que

$$\begin{aligned}(2, -1, 1) \times (1, 1, -1) &= \left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)\\ &= (0, 3, 3)\end{aligned}$$

es un vector-dirección de la recta. Por tanto, $(0, 1, 1) = (\frac{1}{3})(0, 3, 3)$ es también un vector-dirección de la recta. Como conocemos un vector-dirección de la recta, necesitamos, para dar una ecuación paramétrica, conocer también las coordenadas de un punto de la recta. Hay varios modos de encontrar este punto. Por ejemplo, si $z = 0$, entonces (x, y, z) pertenecerá tanto a M como a N si y sólo si

$$\begin{aligned}2x - y + 0 &= 4\\ x + y - 0 &= 2.\end{aligned}$$

Al resolver este sistema llegamos a que $x = 2$, $y = 0$; de modo que $(2, 0, 0) \in M \cap N$. Por tanto, la recta $M \cap N$ es $\{(2, 0, 0) + t(0, 1, 1): t, \text{ escalar}\}$.

Podemos verificar el resultado obtenido con sólo comprobar que, para todo t, las coordenadas del punto $(2, 0, 0) + t(0, 1, 1) = (2, t, t)$ satisfacen las ecuaciones $2x - y + z = 4$, $x + y - z = 2$; de donde, el punto pertenece tanto a M como a N. ▮

No hay dificultad en invertir el proceso que hemos expuesto. Dada una recta

$$L = \{A + tB: t, \text{ escalar}\},$$

es posible encontrar dos planos M y N tales que $L = M \cap N$. Los planos, sin embargo, no son únicos; dos planos no paralelos cualesquiera que contengan la recta dada satisfacen la condición pedida. Encontraremos todos los planos que contienen una recta dada.

40.4 Teorema. El plano que contiene la recta $\{A + tB: t, \text{ escalar}\}$ y que es paralelo a un vector U no paralelo a B, es el plano

$$M = \{X: (X - A) \cdot B \times U = 0\}.$$

Demostración. Los vectores B y U son paralelos al plano M y, por tanto, $B \times U$ es normal a M. Como hemos supuesto que A pertenece a M, concluimos que, por el teorema 38.5,

$$M = \{ X: (X - A) \cdot (B \times U) = 0 \}.$$

Así, M es el único plano que satisface la condición exigida. Sólo resta verificar que M contiene la recta $\{ A + tB: \ t, \text{ escalar} \}$. En efecto, como, para todo punto $X = A + tB$ de la recta, se cumple que $(X - A) \cdot B \times U = [(A + tB) - A] \cdot B \times U = tB \cdot B \times C = 0$, entonces todo punto de la recta está contenido en el plano M. ▌

Como consecuencia del teorema precedente podemos afirmar que el plano que es paralelo al eje y, y que contiene la recta $\{ (1, 2, 3) + t(2, 1, 2): t, \text{ escalar} \}$, tiene por ecuación

$$[X - (1, 2, 3)] \cdot (2, 1, 2) \times (0, 1, 0) = 0$$

puesto que $(0, 1, 0)$ es un vector-dirección del eje y. Como

$$\begin{aligned}(2, 1, 2) \times (0, 1, 0) &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2, 0, 2),\end{aligned}$$

entonces

$$[X - (1, 2, 3)] (-2, 0, 2) = 0.$$

Si hacemos $X = (x, y, z)$, obtenemos la ecuación escalar

$$[(x, y, z) - (1, 2, 3)] \cdot (-2, 0, 2) = 0;$$

es decir, $-2x + 2z - 4 = 0$.

El problema de encontrar planos que sean paralelos a los ejes coordenados y que contengan una recta dada se puede resolver, en general, por el procedimiento que acabamos de aplicar; el teorema 40.4 puede aplicarse a cada uno de los vectores-dirección de cada eje. No obstante, es más fácil utilizar un razonamiento *ad hoc* tal como se hace en el ejemplo siguiente:

40.5 Ejemplo. Se pide encontrar tres planos que tengan por intersección común la recta $L = \{ (1, 2, 3) + t(3, -2, 2): t \text{ escalar} \}$, y tales que cada plano sea paralelo a uno de los ejes de coordenadas. Un punto (x, y, z) pertenece a L si y sólo si $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3, -2, 2)$ para algún escalar t, o, equivalentemente si y sólo si, para algún t,

(1) $\qquad x - 1 = 3t$

(2) $\qquad y - 2 = -2t$, y

(3) $\qquad z - 3 = 2t$.

Multiplicando la ecuación (1) por 2, la ecuación (2) por 3, y sumando los resultados, obtenemos

(4) $2(x - 1) + 3(y - 2) = 2x + 3y - 8 = 0.$

Esta es la ecuación de un plano paralelo al eje z tal que la recta L está contenida en dicho plano. Del mismo modo, operando con (2) y (3), y con (1) y (3) respectivamente, llegamos a

(5) $\qquad y + z - 5 = 0$, y

(6) $\qquad 2x - 3z + 7 = 0$

que son ecuaciones de planos que también contienen la recta L. Evidentemente, (5) es la ecuación de un plano paralelo al eje x, y (6) la de un plano paralelo al eje y. La intersección de dos cualesquiera de los planos representados por (4), (5) y (6) es la recta L. ▌

En la figura 40.1 aparecen la recta L y los planos que se intersectan en L y que son, además, paralelos a los ejes de coordenadas.

Cerramos la sección con un ejemplo en el que es mucho más conveniente representar una recta mediante la intersección de planos.

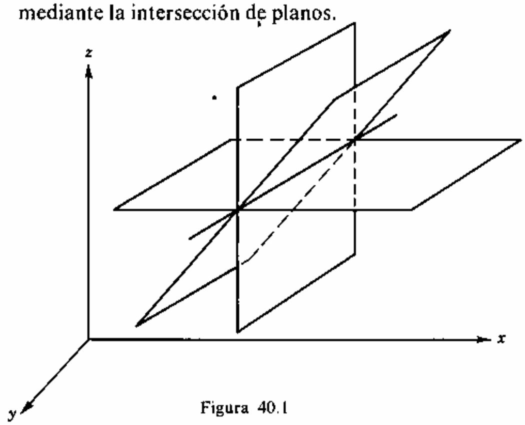


Figura 40.1

40.6 Ejemplo. Se pide encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(-2, 1, 2)$ y que contiene la recta L, intersección de dos planos M y N tales que

$$M = \{ (x, y, z): 2x - y + z - 2 = 0 \}$$

y

$$N = \{ (x, y, z): x + y - 2z + 4) = 0 \}.$$

El recurso que utilizaremos es el siguiente: Consideremos la familia de planos representada por la ecuación

(1) $(2x - y + z - 2) + k(x + y - 2z + 4) = 0,$

donde k es un escalar. Esta familia de planos contiene la recta L porque, si $(x, y, z) \in L$, entonces $2x - y + z - 2 = 0$, $x + y - 2z + 4 = 0$, y, en consecuencia, la combinación lineal $(2x - y + z - 2) + k(x + y - 2z + 4)$ es cero. El paso siguiente consiste en calcular un k tal que el punto $(-2, 1, 2)$ pertenezca a la familia (1). Es decir, buscamos un k tal que

$$\{2(-2) - (1) + (2) - 2\} + k\{(-2) + (1) - 2(2) + 4\} = 0 - 5 + k(-1) = 0.$$

Así, si $k = -5$, entonces $(-2, 1, 2)$ pertenece a la familia (1). Entonces,

$$(2x - y + z - 2) - 5(x + y - 2z + 4) = 0$$
$$-3x - 6y + 11z - 22 = 0$$

es la ecuación del plano que pasa por el punto $(-2, 1, 2)$ y que contiene la recta L. ∎

PROBLEMAS

40.1 Probar que, si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, entonces, al menos dos de los vectores $(b, a, 0)$, $(0, c, b)$ y $(c, 0, a)$ son linealmente independientes.

40.2 Encontrar la recta $M \cap N$, donde $M = \{X : X \cdot (1, 1, 1) = 0\}$ y $N = \{X : X \cdot (1, 0, 1) = 0\}$.

40.3 Encontrar la recta $M \cap N$, donde $M = \{X : X \cdot (2, 1, 1) = 2\}$ y $N = \{X : X \cdot (1, 1, 2) = 0\}$.

40.4 Encontrar la recta $M \cap N$, donde $M = \{X : X \cdot (\pi, 1, \pi) = 3\}$ y $N = \{X : X \cdot (0, 2, 0) = \pi\}$.

40.5 Encontrar una ecuación vectorial del plano que contiene la recta $\{(2, 3, 1) + t(-1, 1, 0) : t, \text{ escalar}\}$, y que es paralelo al vector $(1, 1, 3)$.

40.6 Encontrar una ecuación vectorial del plano que contiene la recta $\{(0, 0, 1) + r(-1, 1, 2) : r, \text{ escalar}\}$, y que es paralelo a $\{(3, 7, 1) + u(4, 1, 1) : u, \text{ escalar}\}$.

40.7 Encontrar el plano que pasa por $(5, 7, 12)$ y que contiene la recta $M \cap N$, donde $M = \{X : X \cdot (3, 2, 4) = 8\}$ y $N = \{X : X \cdot (2, 3, 4) = 10\}$.

40.8 Encontrar tres planos paralelos a los ejes de coordenadas y tales que la intersección de dos cualesquiera de ellos sea la recta $\{t(1, 1, 1) : t, \text{ escalar}\}$.

40.9 Encontrar tres planos paralelos a los ejes de coordenadas y tales que la intersección de dos cualesquiera de ellos sea la recta $\{(1, 2, 3) + t(3, 2, 1) : t, \text{ escalar}\}$.

40.10 Sean R y L dos rectas del espacio tridimensional tales que $L \cap R \neq \varnothing$ pero $L \neq R$. Probar que solamente existe un plano que contiene $L \cup R$.

CAPITULO 7

Algebra Lineal

En este capítulo se continúa el estudio de los espacios vectoriales. Como ahora nos dedicaremos a espacios vectoriales de cualquier dimensión, no nos resultan convenientes los métodos aplicados en la discusión de la geometría del espacio tridimensional. En particular, por ejemplo, no existe en los espacios de dimensiones mayores una operación análoga al producto vectorial definido en los vectores del espacio tridimensional. No obstante, podemos establecer teoremas donde se generalicen a espacios vectoriales de cualquier dimensión las proposiciones referentes a rectas y planos. Las rectas y los planos son casos especiales de los conjuntos llamados *variedades lineales*, y ya veremos que toda variedad lineal puede ser expresada mediante ecuaciones paramétricas o mediante ecuaciones no paramétricas.

El más importante de los nuevos conceptos que estudiaremos en este capítulo es el de *las transformaciones lineales*. Discutiremos bastante detalladamente las transformaciones lineales; las conclusiones geométricas mencionadas en el párrafo anterior se derivarán de los teoremas sobre transformaciones lineales.

41 FORMA CANONICA

En esta sección resolveremos un problema que atañe a los espacios vectoriales de cualquier dimensión; problema que los procedimientos aprendidos en los capítulos anteriores solamente pudieron resolver en los espacios de 2 y 3 dimensiones. El problema es éste: Dado un conjunto de vectores, deseamos encontrar un método que nos permita determinar si los vectores dados son linealmente independientes o no. Resultará, sin embargo, que el método encontrado será un instrumento aplicable en muchos casos donde no se investiga precisamente la dependencia lineal.

Comenzaremos por notar que existen ciertos conjuntos de vectores cuya independencia lineal es fácil de determinar. Sabemos que $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son linealmente independientes, y es fácil ver que $(1, 1)$ y $(0, 1)$ son también linealmente independientes: si $a(1, 1) + b(0, 1) = 0$, entonces, considerando las primeras componentes, $a(1) + b(0) = 0$ implica que $a = 0$; de donde, considerando las segundas componentes, $b(1) = 0$. El mismo razonamiento se aplica a un caso más generalizado. Así, los vectores (r, s) y $(0, t)$ son linealmente independientes, supuesto que $r \neq 0$ y $t \neq 0$. Todos estos argumentos son válidos en los espacios tridimensionales.

41.1 Teorema. Si ninguno de los escalares r, u, w es nulo, entonces los vectores (r, s, t), $(0, u, v)$ y $(0, 0, w)$ son linealmente independientes.

Demostración. Establezcamos la combinación lineal $a(r, s, t) + b(0, u, v) + c(0, 0, w) = (0, 0, 0)$ y probemos que $a = b = c = 0$. En primer lugar, observemos que la primera componente del vector-suma es exactamente ar; entonces, $ar = 0$, y, puesto que $r \neq 0$, tenemos que $a = 0$. Como $a = 0$, la segunda componente del vector-suma se reduce a bu; entonces, $bu = 0$, y, puesto que $u \neq 0$, obtenemos $b = 0$. Por último, ya que $a = b = 0$, la tercera componente del vector suma es cw, de donde inferimos que $c = 0$. ▌

La discusión precedente nos permite afirmar, por ejemplo, que (2, 7) y (0, —2) son linealmente independientes, y que (2, 2, 2), (0, 3, 1) y (0, 0, 4) también lo son. Parece lógico que este procedimiento pueda extenderse a otras dimensiones, y, así, podemos conjeturar que (1, 2, 3, 4), (0, 0, 2, 1) y (0, 0, 0, 7) son linealmente independientes. En realidad, si se medita un poco, es evidente que el argumento utilizado en la demostración del teorema 41.1, donde, en pasos sucesivos, dedujimos que los coeficientes de la combinación lineal eran nulos, es válido siempre que las componentes de un vector cualquiera comience por una cadena de ceros mayor que la del vector precedente. Es conveniente que añadamos que un arreglo rectangular de números tiene forma *canónica* si cada fila comienza por una sucesión de ceros mayor que la anterior. Las últimas filas pueden constar únicamente de ceros. En conclusión, podemos establecer la siguiente regla.

41.2 Regla*. Dado un conjunto de vectores, construya un arreglo escribiendo las componentes de los vectores en filas sucesivas. Si el arreglo tiene forma canónica, y si ninguna de las filas consta de ceros únicamente, entonces los vectores dados son linealmente independientes.

Consideremos, por ejemplo, los siguientes arreglos:

(a) $\begin{matrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}$

(c) $\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ (d) $\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$

(e) $\begin{matrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

Los arreglos (*a*), (*b*) y (*c*) tienen forma canónica, pero (*d*) y (*e*) no. La regla 41.2 nos dice que, en (*a*), (2, 7) y (0, —2) son linealmente independientes; que, en (*b*), (2, 2, 2), (0, 3, —1) y (0, 0, 4) son linealmente independientes; que, en (*c*), (2, 2, 2, 2), (0, 0, —1, 1) y (0, 0, 0, 0) son, sin duda, linealmente dependientes. Ninguna información nos da la regla 41.2 sobre los vectores (2, 3, 1), (—1, 2, 1) y (0, 1, 2) que aparecen relacionados en (*d*); tampoco nos brinda información sobre los vectores (0, 2) y (3, 1) que forman el arreglo (*e*). Ahora bien, los vectores del arreglo (*e*) pueden reescribirse de manera que la segunda fila pase a ser la primera; esta sencilla alteración en el orden de colocación de las filas hace evidente que dichos vectores sean, de hecho, linealmente independientes.

Esta última observación es el inicio de una discusión de un método para decidir sobre problemas de independencia lineal. Para determinar si los vectores que forman un arreglo son linealmente independientes, efectuaremos diversas clases de operaciones en las filas, (operaciones que no alteran la dependencia o la independencia lineal de los vectores), hasta obtener un arreglo que presente la forma canónica. Es evidente que el cambiar el orden de colocación de los vectores en el arreglo no afecta la independencia lineal. El único otro recurso que necesitaremos consiste en sustituir un vector por una combinación lineal conveniente de dicho vector con algún otro vector. En el lema siguiente se justifica esta sustitución en el caso de un arreglo de tres vectores.

41.3 Lema. Sean A, B, y C tres vectores, y sea $B_1 = rA + sB$, donde $s \neq 0$. Los vectores A, B y C son linealmente independientes si y sólo si A, B_1 y C son linealmente independientes.

Demostración. Supongamos que A, B y C son linealmente independientes y que $aA + bB_1 + cC = 0$. Probaremos que $a = b = c = 0$,

* Preferimos utilizar aquí "regla" en vez de "teorema" porque, como no hemos definido "regla" ni "arreglo", nuestra proposición carece de precisión matemática. Definiremos "matriz", y un "arreglo" es, precisamente, una matriz; un arreglo no es más que un conjunto finito de vectores.

con lo que A, B_1 y C serán linealmente independientes. En efecto, $aA + bB_1 + cC = aA + b(rA + sB) + cC = (a + br)A + sbB + cC = 0$. Ahora bien, como hemos supuesto que A, B y C son linealmente independientes, entonces $a + br = sb = c = 0$; más aún, puesto que $s \neq 0$, deducimos fácilmente que $a = b = c = 0$.

Para probar el recíproco, basta observar que los vectores A, B y C del arreglo corresponden exactamente a los vectores A, $(1/s)B_1 - (r/s)A$, C, y, con vista a ello, aplicar el mismo argumento. ▮

Aunque el lema precedente se refiere a un arreglo de tres vectores, es fácil comprobar que la demostración puede ampliarse a cualquier número de vectores. Damos por supuesto que el lema es aplicable a cualquier arreglo de vectores.

Para facilitar la aplicación de los conceptos anteriores es conveniente disponer de una terminología adecuada.

41.4 Definición. Dado un conjunto de vectores, cualquier conjunto que se obtenga a partir de él mediante cualquiera de las operaciones siguientes:

(a) cambio de orden en la colocación de los vectores,

(b) sustitución de un vector B del arreglo por una combinación lineal $rA + sB$, donde A es un vector del conjunto, y $s \neq 0$,

es equivalente al conjunto original.

Las conclusiones anteriores pueden quedar establecidas en el siguiente teorema:

41.5 Teorema. Supongamos que un conjunto de vectores es equivalente a otro. Entonces, los vectores del primer conjunto son linealmente independientes si y sólo si los vectores del segundo conjunto son linealmente independientes.

Ya veremos que cualquier arreglo de vectores es equivalente a un arreglo que presenta forma canónica. Comencemos por dar un ejemplo ilustrativo.

41.6 Ejemplo. Se pide investigar si los vectores $(1, 2)$, $(-2, 1)$ y $(4, 2)$, pertenecientes al espacio bidimensional, son linealmente independientes o no. Observamos el arreglo

①	1	2
②	−2	1
③	4	2

y comprobamos que lamentablemente está muy lejos de tener la forma canónica. No obstante, se nos ocurre que, si a la segunda fila le añadimos un múltiplo conveniente de la primera, obtendremos un cero al comienzo de la segunda; el mismo razonamiento nos permite la obtención de un cero al principio de la tercera fila. Sabemos también que un vector puede ser sustituido por la suma de un múltiplo no nulo de dicho vector con otro vector del conjunto, y que el arreglo resultante es equivalente al original. Parece pues, una buena idea sustituir ② por ② + 2 ①, y ③ por ③ − 4 ①. La siguiente tabla indica estas sustituciones.

①	1	2
②	−2	1
③	4	2
④ = ② + 2①	0	5
⑤ = ③ − 4①	0	−6

Esta tabla no es más que un arreglo de los vectores ① = $(1, 2)$, ④ = $(0, 5)$ y ⑤ = $(0, -6)$. Los vectores ② y ③ de la lista original han sido reemplazados, respectivamente, por los vectores ④ y ⑤. Por supuesto, el arreglo obtenido tampoco tiene forma canónica, pero la tendría si el último número de la fila ⑤ fuera cero. Para ello, sustituiremos ⑤ por una conveniente combinación de ④ y ⑤. A continuación indicamos las operaciones realizadas a partir del último arreglo ya obtenido. Se omiten los vectores ② y ③ porque ya han sido sustituidos anteriormente.

①	1	2
④ = ② + 2①	0	5
⑤ = ③ − 4①	0	−6
⑥ = 5⑤ + 6④	0	0

Hemos arribado, por fin, a una forma canónica. Concluimos que el conjunto (1, 2), (0, —6), (0, 0) es equivalente al conjunto original (1, 2), (—2, 1), (4, 2). En consecuencia, (1, 2), (—2, 1) y (4, 2) son linealmente dependientes toda vez que el conjunto equivalente formado por (1, 2), (0, —6), (0, 0) es linealmente dependiente como se desprende de (0) (1, 2) + (0) (0, —6) + (1) (0, 0) = (0, 0). Como ya sabemos que (1, 2), (—2, 1) y (4, 2) son linealmente dependientes, nos sentimos obligados a averiguar cuál es la combinación lineal de ellos que es igual a (0, 0). En realidad, no es difícil saberlo. Observemos que, mediante sustituciones sucesivas, se obtiene:

$$\begin{aligned}(0, 0) &= ⑥\\ &= 5⑤ + 6④\\ &= 5(③ - 4①) + 6(② + 2①)\\ &= -8① + 6② + 5③.\end{aligned}$$

Como comprobación, verificamos que, en efecto, —8(1, 2) + 6(—2, 1) + 5(4, 2) = (—8, —16) + (—12, 6) + (20, 10) = (0, 0). ▌

Hagamos un resumen informal del procedimiento que hemos aplicado. Nuestro problema consiste en transformar un arreglo, mediante ciertas operaciones, en otro arreglo que presente forma canónica. Las operaciones efectuadas reciben el nombre de "operaciones elementales en las filas". Para comenzar el proceso utilizamos la primera fila, supuesto que su primer elemento no es cero. La primera fila nos sirve para "eliminar" el primer elemento de cada una de las filas restantes; para ello, se sustituye cada fila por una combinación conveniente de dicha fila con la primera. A continuación, dejamos la primera fila en su forma original, y utilizamos la segunda fila, supuesto que su segundo élemento no es cero, para "eliminar" el segundo elemento de cada fila siguiente; para ello, sustituimos, como antes, cada fila por una conveniente combinación de la fila con la segunda. Se repite el proceso para ir eliminando los primeros elementos no nulos de las filas siguientes. Si encontramos un cero en el lugar crítico de la fila que pensamos utilizar para eliminar elementos de las otras, tanto mejor. Recordemos que cambiar el orden de colocación de los vectores de un arreglo produce un nuevo arreglo equivalente al anterior. De modo que la aparición inesperada de tal cero no sólo no perjudica el trabajo, sino que, por el contrario, nos ayuda a abreviar las operaciones necesarias.

El procedimiento esbozado en el párrafo anterior nos prueba lo siguiente.

41.7 Teorema. Todo conjunto de vectores es equivalente a un conjunto que se puede disponer en un arreglo de forma canónica.

Ya tenemos un método general para decidir si los vectores de un conjunto dado son linealmente independientes o no. Basta llegar, mediante operaciones elementales, a un arreglo de forma canónica. Si en el arreglo de forma canónica ninguna fila consta únicamente de ceros, los vectores de este arreglo, y, en consecuencia, los vectores del conjunto original, son linealmente independientes. Si todos los elementos de alguna fila son nulos, entonces los vectores del conjunto original son linealmente dependientes, y, por sustituciones sucesivas, podemos encontrar una combinación lineal, no trivial, nula.

Veamos el método aplicado en un ejemplo más.

41.8 Ejemplo. Se nos pide que digamos si los vectores (1, 2, 3), (2, —1, 1) y (1, 7, 8) son linealmente independientes o no. Operando:

①	1	2	3
②	2	−1	1
③	1	7	8
④ = ② − 2①	0	−5	−5
⑤ = ③ − ①	0	5	5
⑥ = ④ + ⑤	0	0	0

Los vectores son, pues, linealmente dependientes. Por sustituciones sucesivas encontramos que

$$\begin{aligned}(0, 0, 0) &= ⑥ = ④ + ⑤ = (② - 2①) + (③ - ①) = -3① + ② + ③ \\ &= -3(1, 2, 3) + (2, -1, 1) + (1, 7, 8),\end{aligned}$$

con lo que se confirma nuestro resultado.

Un comentario final: Más adelante encontraremos un método más eficiente que el de las sustituciones sucesivas para expresar el vector nulo como combinación lineal no trivial de un conjunto dado de vectores linealmente dependientes. ▌

PROBLEMAS

41.1 Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores es linealmente dependiente o no. Si los vectores de alguno de los conjuntos dados son linealmente dependientes, busque una combinación lineal, no trivial, de ellos, que sea igual al vector nulo.

(a) $(1, 3, -2)$, $(2, 2, 6)$, $(3, -2, 5)$
(b) $(1, 2, 2)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 3)$
(c) $(-2, 4, 6)$, $(5, 7, -3)$, $(4, 2, -1)$
(d) $(1, -2)$, $(3, -4)$, $(-1, 5)$
(e) $(2, -3)$, $(4, -6)$, $(6, -9)$.

41.2 Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores es linealmente dependiente o no. Si los vectores de alguno de los conjuntos dados son linealmente dependientes, busque una combinación lineal, no trivial, de ellos, que sea igual al vector nulo.

(a) $(-1, 2, 3)$, $(5, 1, 2)$ (c) $(-1, 3)$, $(-1, 4)$
(b) $(3, -1, 2)$, $(6, -2, 4)$ (d) $(3, -4)$, $(6, -8)$.

41.3 Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores es linealmente dependiente o no. Si los vectores de alguno de los conjuntos dados son linealmente dependientes, busque una combinación lineal, no trivial, de ellos, que sea igual al vector nulo.

(a) $(1, -1, 3)$, $(2, -3, 5)$, $(-1, 4, -2)$, $(4, 1, -2)$
(b) $(2, 0, 4)$, $(1, 1, -2)$, $(3, -3, 0)$, $(2, -1, 3)$
(c) $(1, -1)$, $(2, 3)$, $(-1, -2)$, $(0, 1)$
(d) $(-1, 2)$, $(-3, -1)$, $(-1, -1)$, $(1, 4)$.

41.4 Demostrar que, si A, B y C son vectores, entonces los vectores A, B, C y 0 son linealmente dependientes.

41.5 Demostrar que, si los vectores A, B, C y D son linealmente independientes, entonces los vectores A, B y C son linealmente independientes.

41.6 Buscar tres vectores A, B y C tales que A, B y C sean linealmente dependientes, pero que A y B sean linealmente independientes, B y C sean linealmente independientes, y C y A sean linealmente independientes.

41.7 Buscar cuatro vectores A, B, C y D tales que A, B, C y D sean linealmente dependientes, pero que tres cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.

41.8 Supongamos que, a partir del conjunto de vectores A, B, C, se llega, mediante las operaciones elementales definidas en 41.4, al conjunto D, E, F. Demuestre que, mediante operaciones elementales, se puede obtener el conjunto A, B, C a partir del conjunto D, E, F. (Más formalmente, pruebe que si $(D, E\ F)$ es equivalente a (A, B, C), entonces (A, B, C) es equivalente a (D, E, F).)

41.9 Demuestre a partir de las conclusiones de la sección 41, que en un espacio tridimensional no puede haber más de tres vectores linealmente independientes. ¿Se puede generalizar este resultado a espacios vectoriales de cualquier dimensión finita?

41.10 ¿Es posible encontrar números x, y, z, no todos nulos, tales que $2x - 3y + 4z = 0$ y $x + y - z = 0$? Comience por reescribir estas ecuaciones bajo la forma

$$\begin{aligned}(0, 0) &= (2x - 3y + 4z, x + y - z) \\ &= x(2, 1) + y(-3, 1) + z(4, -1).\end{aligned}$$

41.11 ¿Es posible encontrar números w, x, y, z, no todos nulos, tales que $w - 3x - y + z = 0$, $2w - x + y + z = 0$, $w + 2x + y - z = 0$? ¿Puede Ud. descubrir un teorema general sobre "ecuaciones lineales homogéneas"?

41.12 Dados los vectores (a, c), (b, d), ¿qué condiciones son necesarias para que puedan existir dos números x, y, no ambos nulos, tales que $ax + by = 0$ y $cx + dy = 0$?

42 ESPACIOS Y BASES

Iniciaremos en esta sección una generalización de los conceptos de recta y plano. El conjunto de todas las combinaciones lineales de un único vector no nulo es una recta a la que pertenece el vector nulo; el conjunto de todas las combinaciones lineales de dos vectores linealmente independientes es un plano al que pertenece el vector nulo. El conjunto de todas las combinaciones lineales de tres vectores linealmente independientes es también un conjunto interesante; quizás podríamos llamarlo "un hiper-plano". De hechos, nos estamos refiriendo a conjuntos que pueden ser definidos como todas las posibles combinaciones lineales de los elementos de algún conjunto de vectores. Comencemos por dar una descripción, ligeramente distinta, de la clase de conjuntos que nos preocupan.

42.1 Definición. Un espacio vectorial es un conjunto no vacío E de vectores n-dimensionales (n es algún entero positivo) tal que si X y Y son vectores pertenecientes a E, entonces $aX + bY \in E$ para todo escalar a y todo escalar b. Se dice que tal conjunto E es un subespacio de un espacio vectorial n-dimensional.

Así, una recta a la que pertenezca el vector nulo es un espacio vectorial; por ejemplo, $\{t(1, 2, 1)$: t, escalar$\}$. El plano $\{r(1, 1, 1, 1) + s(2, 3, 1, 5)$: r, s, escalares$\}$ es también un espacio vectorial. El conjunto de todos los vectores 3-dimensionales y el conjunto de todos los vectores 13-dimensionales son espacios vectoriales. El conjunto $\{(0, 0)\}$ es un espacio vectorial, aunque, sin duda, muy peculiar. Todos estos ejemplos pueden describirse como conjuntos de todas las combinaciones lineales de los elementos de algún conjunto de vectores. En general,

42.2 Teorema. Sea S un conjunto, no vacío, de vectores n-dimensionales. Entonces, el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los elementos de S es un espacio vectorial.

Omitimos la sencilla demostración de este teorema. La demostración consistiría simplemente en probar que, si X y Y son combinaciones lineales de los elementos de algún conjunto de vectores, entonces toda combinación lineal de X y Y es también una combinación lineal de los elementos del conjunto dado. Establezcamos la siguiente definición.

42.3 Definición. Si M es un espacio vectorial y S es un conjunto, no vacío, de vectores, entonces M es generado por S si y sólo si M es precisamente el conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S. Si M es generado por S, se dice que M es una generación lineal de S.

Así, el espacio bidimensional es generado por $\{(1, 0), (0, 1)\}$, pero también es generado por $\{(1, 1), (1, 2), (3, 0)\}$. El espacio vectorial $\{r(1, 1, 1) + s(-1, 2, 1)$: r, s, escalares$\}$ es generado por $\{(1, 1, 1), (-1, 2, 1)\}$. El conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es generador del espacio tridimensional. En general, no es difícil encontrar, para cada entero positivo n, un conjunto de n vectores que genere un espacio n-dimensional.

Nos interesa, en particular, el problema de encontrar un conjunto de vectores linealmente independientes que sean generadores de un espacio vectorial.

42.4 Definición. Un conjunto B de vectores es base de un espacio vectorial $M \neq \{0\}$ si y sólo si B es un conjunto de vectores linealmente independientes y, además, B es un generador de M. El conjunto $\varnothing$ es base del espacio vectorial $\{0\}$.

Así, $\{(2, 1), (0, 2)\}$ es base del espacio vectorial bidimensional, mientras que $\{(2, 1), (0, 1), (3, 1)\}$, aunque genera dicho espacio, no es base del mismo porque los vectores no son linealmente independientes. Parece igualmente lógico, y no es difícil probarlo, que toda base de un espacio bidimensional tiene que constar de dos elementos. La generalización de esta proposición es uno de los principales resultados de esta sección. Esta generalización se derivará del siguiente teorema.

42.5 Teorema. Si S es generador de un espacio vectorial M, y B un conjunto de elementos de M linealmente independientes, entonces existen en S, al menos, tantos elementos como en B.

Demostración. La demostración se fundamenta en un proceso de sustituciones. Es posible sustituir un elemento de S por un elemento de B, y obtener un conjunto que también sea generador de M. Formalmente, es posible que existen $Y \in S$ y $X \in S$ tales que $S \sim \{Y\} \cup \{X\}$ sea generador de M. Supongamos que hemos realizado sucesivamente cuantas operaciones de esta clase sean posibles para obtener un conjunto S' que sea generador de M. Probaremos, como se enuncia en el teorema, que B es un subconjunto de S'. Por supuesto, $X \in B$, pero $X \notin S'$. Entonces, el vector X es una combinación lineal de elementos de S' puesto que S' es un generador de M. Existe, necesariamente, algún elemento Y de $S' \sim B$ cuyo coeficiente en dicha combinación lineal no es cero, porque, de no ser así, sería X una combinación lineal de otros elementos de B, y hemos supuesto que B es linealmente independiente. En consecuencia, podemos "despejar Y" y encontrar que Y es una combinación lineal de X y otros elementos de $S' \sim \{Y\}$. Entonces, toda combinación lineal de elementos de S es una combinación lineal de X con elementos de $S' \sim \{Y\}$, y, por tanto, Y puede ser sustituido por X. Ahora bien, como previamente se supuso que se habían hecho todas las sustituciones posibles, el resultado obtenido es una contradicción. ▌

Si tanto B como C son bases de un espacio vectorial M, entonces B tiene, al menos, tantos elementos como C, puesto que B es un generador y C es linealmente independiente. Argumento semejante vale para probar que C tiene, al menos, tantos elementos como B. Entonces,

42.6 Corolario. Si tanto B como C son bases de un espacio vectorial M, entonces B y C tienen el mismo número de elementos.

Es verdadero, aunque no obvio, que todo espacio vectorial tiene una base. La demostración de esta proposición será planteada como problema al final de esta sección.

42.7 Definición. La dimensión de un espacio vectorial es el número de elementos que posee una base de dicho espacio.

Así, el espacio bidimensional tiene dimensión 2 porque $\{(1, 0), (0, 1)\}$ es una base de tal espacio. El plano $\{r(1, 1, 1) + s(2, 3, 1): r, s \text{ escalares}\}$ también tiene dimensión 2. La recta $\{r(1, 2, 1, 1): r, \text{ escalar}\}$ tiene dimensión 1, y $\{r(1, 1, 1, 1) + s(0, 1, 1, 1) + t(0, 0, 1, 1): r, s, t \text{ escalares}\}$ tiene dimensión 3.

Si conocemos un conjunto de vectores que generan un espacio vectorial M, no es difícil encontrar una base de M. La forma canónica que estudiamos en la sección anterior nos sirve perfectamente; el único concepto nuevo que necesitamos es el siguiente.

42.8 Teorema. Si dos conjuntos de vectores son equivalentes, entonces el espacio vectorial generado por los elementos del primer conjunto es idéntico al generado por los elementos del segundo conjunto.

Demostración. Daremos la demostración para un conjunto de tres vectores, digamos X, Y y Z. Alterar el orden de colocación de los vectores dados no altera el espacio vectorial que ellos generan. Por tanto, todo lo que tenemos que demostrar es que, si sustituimos un vector, digamos Y, por una combinación lineal $Y_1 = rX + sY$, donde $s \neq 0$, entonces la generación lineal de X, Y y Z es igual a la generación lineal de X, Y_1 y Z. Toda combinación lineal de X, Y_1 y Z es una combinación lineal de X, Y y Z puesto que Y_1 es una combinación lineal de X, Y y Z. Por otra parte, $Y = (-r/s)X + (1/s)Y_1$, y, por tanto, toda combinación lineal de X, Y y Z es una combinación lineal de X, Y_1 y Z. ▌

42.9 Ejemplo. Buscar una base para el espacio vectorial M generado por $(1, 2, 1, 1)$, $(2, 1, 0, 2)$, $(3, 3, 1, 3)$ y $(-4, -5, -2, -4)$. Operando:

①	1	2	1	1
②	2	1	0	2
③	3	3	1	3
④	−4	−5	−2	−4
⑤ = 2① − ②	0	3	2	0
⑥ = 3① − ③	0	3	2	0
⑦ = 4① + ④	0	3	2	0
⑧ = ⑤ − ⑥	0	0	0	0
⑨ = ⑥ + ⑦	0	0	0	0

Por tanto, M es generado por los vectores $(1, 2, 1, 1)$, $(0, 3, 2, 0)$, $(0, 0, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 0)$, y, en consecuencia, $\{(1, 2, 1, 1), (0, 3, 2, 0)\}$ es base de M. Así, M es de dimensión 2, y, de hecho, M es un plano. ∎

Establezcamos formalmente la consecuencia del teorema 42.8 que nos ha sugerido el método que acabamos de aplicar.

42.10 Teorema. Dado un espacio vectorial, siempre es posible encontrar una base, tal que los vectores de la base puedan disponerse en forma canónica.

PROBLEMAS

42.1 Compruebe si es verdadera o falsa la siguiente proposición: Si M y N son subespacios de un espacio vectorial de dimensión n, entonces $M \cap N$ es un espacio vectorial.

42.2 Compruebe si es verdadera o falsa la siguiente proposición: Si M y N son subespacios de un espacio vectorial de dimensión n, entonces $M \cup N$ es un espacio vectorial.

42.3 Compruebe si es verdadera o falsa la siguiente proposición: Si M y N son subespacios de un espacio vectorial de dimensión n, entonces $\{X : X = Y + Z$, donde Y es algún elemento de M, y Z algún elemento de $N\}$ es un espacio vectorial.

42.4 Busque un conjunto de vectores que genera el espacio de todos los vectores 5-dimensionales.

42.5 Encuentre una base del espacio vectorial generado por $\{(1, 2, 1), (3, 1, 0), (-1, 3, 2)\}$.

42.6 Encuentre una base del espacio vectorial generado por $\{(1, 2), (-3, 1), (1, 4)\}$.

42.7 Encuentre una base del espacio vectorial generado por $\{(1, 1, 2, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 3, 1, 2)\}$.

42.8 Pruebe que $\{(x, y): x + 2y = 0\}$ es un espacio vectorial, y encuentre una base de dicho espacio.

42.9 Demuestre que $\{(x, y, z): x - y = 0, 2y + z = 0\}$ es un espacio vectorial, y encuentre una base de dicho espacio.

42.10 Supongamos que M es un espacio vectorial y que B es un conjunto maximal de elementos linealmente independientes de M; es decir, B es linealmente independiente, y si X es un elemento cualquiera de M que no pertenece a B, entonces $B \cup \{X\}$ no es linealmente independiente. Pruebe que B es una base de M.

42.11 Supongamos que M es un espacio vectorial y que S es un conjunto minimal generador de M; es decir, S es generador de M, y ningún subconjunto propio de S es generador de M. Pruebe que S es una base de M.

42.12 Pruebe que todo espacio vectorial tiene una base.

42.13 Pruebe que, si M y N son espacios vectoriales tales que $M \subset N$, entonces para cada base B de M es posible encontrar un conjunto C de vectores tales que $B \cup C$ sea base de N.

42.14 Pruebe que, si M y N son espacios vectoriales y M es un subconjunto propio de N, entonces la dimensión de M es menor que la dimensión de N.

43 TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES

El resto del libro lo dedicaremos a una clase especial de funciones que llamaremos transformaciones lineales. Las transformaciones lineales son de gran utilidad en muchas ramas matemáticas; aquí, sin embargo, nos contentaremos con un simple ejemplo que nos muestre cómo puede surgir este concepto.

Supongamos que A, B y C son vectores bidimensionales, y que se nos pide encontrar los escalares x, y, z tales que $xA + yB + zC = 0$. Podemos replantear el problema de la manera siguiente: para cada terna (x, y, z) sea $T(x, y, z) = xA + yB + zC$. Entonces, T es una función. Para cada vector tridimensional (x, y, z), se tiene que $T(x, y, z)$, es el vector bidimensional $xA + yB + zC$. El dominio de T es el espacio tridimensional, y el codominio de T es el conjunto de todas las combinaciones lineales de A, B y C; este conjunto es un subespacio del espacio bidimensional. El conjunto de todas las ternas (x, y, z) tales que $xA + yB + zC = 0$ es, precisamente, el conjunto de todos los vectores X tridimensionales tales que $T(X) = 0$. Más adelante llamaremos a este conjunto "espacio nulo de T". Vale observar que T tiene una propiedad especial:

$$T(r(x, y, z) + s(u, v, w)) = T(rx + su, ry + sv, rz + sw) = (rx + su)A + (ry + sv)B + (rz + sw)C = r(xA + yB + zC) + s(uA + vB + wC) = rT(x, y, z) + sT(u, v, w).$$

En otras palabras, si X y Y son vectores tridimensionales, entonces $T(rX + sY) = rT(X) + sT(Y)$. Las funciones que poseen esta propiedad reciben el nombre de transformaciones lineales.

43.1 Definición. T es una transformación lineal del m-espacio en un n-espacio si y sólo si T

es una función cuyo dominio es el espacio de todos los vectores m-dimensionales, y cuyo codominio es un subconjunto del espacio de todos los vectores n-dimensionales, y tal que $T(rX + sY) = rT(X) + sT(Y)$, para todos los vectores m-dimensionales X y Y, y para todos los escalares r y s.

Algunas veces se suele decir que una transformación lineal T "preserva las combinaciones lineales". Fácilmente se ve, por ejemplo, que si T es lineal, entonces $T(rX + sY + tZ) = rT(X) + sT(Y) + tT(Z)$. En general, T de una combinación lineal de vectores es la misma combinación lineal de T de los vectores.

Consideremos una función T cuyo efecto sea triplicar la longitud original de cada vector; es decir, a cada vector bidimensional (x, y) la función T le asigna otro vector bidimensional de la misma dirección y sentido pero cuya medida es tres veces mayor. Entonces, $T(x, y) = (3x, 3y)$. T es una transformación lineal puesto que T es una función cuyo dominio es el espacio bidimensional, y cuyo codominio es un subconjunto del mismo espacio, y, más aún, $T(r(x, y) + s(u, v)) = T(rx + su, ry + sv) = (3(rx + su), 3(ry + sv)) = r(3x, 3y) + s(3u, 3v) = rT(x, y) + sT(u, v)$. A este tipo de transformación lineal se le suele dar, por razones obvias, el nombre de "dilatadora".

Otra clase de función es la que se define mediente la multiplicación de cada vector bidimensional (número complejo) por un número complejo fijo. Por ejemplo, sea T una función que asigna a cada vector (x, y) el producto de (x, y) por $(3, 4)$ conforme a la multiplicación definida para números complejos. Entonces, $T(x, y) = (x, y)(3, 4) = (3x - 4y, 4x + 3y)$. La función T hace rotar la dirección del vector un ángulo fijo (el ángulo del número complejo $(3, 4)$) y, además, multiplica la medida del vector por un número constante (la medida de $(3, 4)$). De nuevo se ha definido una función que resulta ser una transformación lineal. Evidentemente el dominio de T es el espacio bidimensional, y su codominio es un subconjunto del mismo espacio. Además, $T(r(x, y) + s(u, v)) = \{r(x, y) + s(u, v)\}(3, 4) = r\{(x, y)(3, 4)\} + s\{(u, v)(3, 4)\}$ (según las propiedades de los números complejos) $= rT(x, y) + sT(u, v)$.

Hemos visto una función dilatadora que ha resultado ser, de hecho, una transformación lineal, y hemos visto también una transformación lineal cuyo efecto es "dilatar" y "rotar". Parece razonable que una simple rotación sea también una transformación lineal. Así es, en efecto, y la demostración queda a cargo del lector como problema.

El primer resultado interesante sobre transformaciones lineales es éste: Una transformación lineal T queda completamente determinada por los vectores a los que aparecen asociados los vectores unitarios de igual dirección y sentido que los ejes coordenados. Por ejemplo, si T es una transformación lineal del espacio tridimensional en el espacio bidimensional tal que

$$T(1, 0, 0) = (2, 3),$$

$$T(0, 1, 0) = (1, 4),$$

y

$$T(0, 0, 1) = (7, 0),$$

entonces, podemos calcular $T(x, y, z)$ para todos los escalares x, y, z. Explícitamente,

$$\begin{aligned} &T(x, y, z) \\ &= T(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \\ &= x(2, 3) + y(1, 4) + z(7, 0). \end{aligned}$$

De modo que el arreglo

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

determina completamente a T.

Acabamos de ver que esta transformación del espacio tridimensional en el espacio bidimensional determina y, a su vez, es determinado por un arreglo rectangular 3×2; es decir, por un arreglo que tiene 3 filas y 2 columnas. A estos arreglos rectangulares los llamaremos *matrices*.

Todos los arreglos siguientes son matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, F = (3 \quad 1 \quad 1).$$

Para describir la forma de una matriz especificamos el número de filas y el número de columnas que posee. (Las filas son horizontales; las columnas, verticales.) Así, A tiene dos filas y dos columnas, y de ella decimos que es una matriz 2×2. La matriz B tiene 2 filas y 3 columnas; es una matriz 2×3. Del mismo modo, C es una matriz 3×2, D es una matriz 3×1, E es una matriz 3×3, y F es una matriz 1×3.

Para designar cada elemento de una matriz especificamos la fila y columna a las que pertenece. Así, el elemento que se encuentra en la segunda fila y tercera columna de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ es -2; el elemento de la tercera fila y primera columna es 4; etcétera. La matriz que está formada por sólo una fila, por ejemplo $F = (3 \; 1 \; 1)$, recibe algunas veces el nombre de "matriz fila", y la que, como $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, no tiene más que una sola columna recibe el nombre de "matriz columna". Tales nombres son justificables porque, al igual que un vector tridimensional, toda matriz 3×1 ó 1×3 determina y es, a su vez determinada por tres números tomados en un orden definido.

Por supuesto, no hemos definido una matriz. (Una matriz es un arreglo, pero, ¿qué es un arreglo?) Existen varias definiciones posibles. El hecho clave es que toda matriz determina y es determinada por sus elementos, y que dos matrices son idénticas si tienen la misma "medida" y los mismos elementos en lugares correspondientes.

Nuestra definición de matriz se basa en la conveniencia de la notación. Si consideramos una matriz arbitraria 2×3 podríamos designarla por $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Sin embargo, esta notación no es muy sugestiva, y preferiríamos tener un procedimiento para designar las matrices de modo que quedaran especificadas, para cada uno de los elementos, la fila y columna a que pertenece cada uno de ellos. El método siguiente se recomienda por sí mismo. Rotulemos el elemento que está, por ejemplo, en la segunda fila y tercera columna, con los subíndices 2 y 3. Demos a este elemento el nombre de $A_{2,3}$. Entonces, el elemento que aparece en la primera fila y segunda columna será $A_{1,2}$, etc. La matriz tomará entonces la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix}$$

Podríamos, pues, llamar A a la matriz, y al elemento que aparece en la i-ésima fila y j-ésima columna, $A_{i,j}$; es decir, el primer subíndice indica la fila, y el segundo indica la columna a las cuales pertenece el elemento. Nos toca ahora decidir qué clase de ente matemático es A. Obsérvese que A es un ente tal que a cada par (i, j), $(i = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3)$, le asigna un número, $A_{i,j}$. Como ya estos conceptos son familiares, pasemos a la definición.

43.2 Definición. Una matriz $m \times n$ es una función cuyo dominio es el conjunto de todos los pares ordenados (i, j) de números enteros positivos tales que $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, y cuyo codominio es un conjunto de números reales. Para cada elemento (i, j) del dominio, definimos $A_{i,j}$, como el valor $A(i, j)$ de la función A en el punto (i, j). El elemento $A_{i,j}$ recibe el nombre de "elemento i - j de la matriz A".

Así, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ tenemos que $A_{1,2} = 1$, $A_{2,1} = 3$, etc. El uso de los subíndices no es más que una variante de la notación de la función. Por conveniencia, omitimos la coma entre los subíndices de $A_{i,j}$, siempre que ello no implique confusión. Así, escribimos A_{ij}, A_{12}, A_{23}, etc., pero, sin embargo, es obvio que se debe utilizar la coma en, por ejemplo, $A_{21,3}$.

Describimos ahora lo que entendemos por matriz *de una* transformación lineal T. Tal matriz es el arreglo que se obtiene cuando se escriben en filas sucesivas las coordenadas de T de los vectores unitarios que tienen la misma dirección y el mismo sentido que los ejes coordenados. Así, por ejemplo, si $T(x, y, z) = x(2, 1, 1, 1) + y(1, 2, 1, 1) + z(3, 1, 0, 4)$, podemos preparar una tabla de valores de T:

X			$T(X)$			
1	0	0	2	1	1	1
0	1	0	1	2	1	1
0	0	1	3	1	0	4

y deducir que la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Formalmente:

43.3 Definición. La matriz de una transformación lineal del m-espacio en un n-espacio es la matriz $m \times n$ tal que el i-j elemento A_{ij} es la j-ésima coordenada de $T(U^i)$, donde U^i es el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido del i-ésimo eje de coordenadas.

(Esto es, el vector U^i tiene nulos todos sus elementos, excepto el i-ésimo, y éste es, precisamente, 1. El i-j elemento A_{ij} es $T(U^i)_j$.)

Si conocemos la matriz A de una transformación lineal T, conocemos el valor de T para cada uno de los vectores unitarios que tienen la misma dirección y sentido de los ejes coordenados (en realidad, si U^i es el i-ésimo de los tales vectores, entonces, $T(U^i)$ es, precisamente la i-ésima fila de la matriz). Puesto que todo vector X es una combinación lineal de los vectores unitarios $U^1, U^2, \ldots, U^n$, entonces, es evidente que $T(X)$ es la correspondiente combinación lineal de $T(U^1), T(U^2), \cdots, T(U^m)$. Así, la matriz A determina perfectamente la transformación lineal T. Es conveniente mostrar formalmente tal determinación. Supongamos que $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es un vector m-dimensional. Entonces,

$$\begin{aligned}
&(x_1,x_2,\cdots,x_m) \\
&= x_1(1,0,\cdots,0) + x_2(0,1,0,\cdots,0) \\
&\quad + \cdots + x_m(0,0,\cdots,1) \\
&= x_1U^1 + x_2U^2 + \cdots + x_mU^m = \sum_{i=1}^{m} x_iU^i,
\end{aligned}$$

de donde

$$T(x_1,x_2,\cdots,x_m) = x_1T(U^1) + x_2T(U^2) + \cdots + x_mT(U^m) = \sum_{i=1}^{m} x_iT(U^i).$$

Para cada entero j, $(1 \leq j \leq n)$, tendremos que la j-ésima coordenada de $T(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ es

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_m)_j = \sum_{i=1}^{m} x_iT(U^i)_j$$

y, por definición de la matriz A, será

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_m)_j = \sum_{i=1}^{m} x_iA_{ij} = x_1A_{1j} + x_2A_{2j} + \cdots + x_mA_{mj}.$$

Esta suma puede mirarse desde un punto de vista interesante: es el producto interior de $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ con el vector $(A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{mj})$ cuyas coordenadas son los elementos de la j-ésima columna de A. Como futura referencia dejemos establecido formalmente este resultado.

43.4 Teorema. Supongamos que T es una transformación lineal del m-espacio en un n-espacio, y que A es la matriz de la transformación. Entonces, para cada vector m-dimensional X y para cada j, $(1 \leqq j \leqq n)$, la j-ésima coordenada de $T(X)$ es $\sum_{i=1}^{m} x_iA_{ij}$, que es el producto interior de X con la j-ésima columna de la matriz A.

Veamos un ejemplo.

43.5 Ejemplo. Supongamos que T es una transformación lineal cuya matriz es $A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide encontrar $T(1, 2, -2)$. A partir de la definición de matriz de una transformación lineal podemos proceder directamente como sigue:

$$\begin{aligned} &T(1, 2, -2) \\ &= T(1, 0, 0) + 2T(0, 1, 0) - 2T(0, 0, 1) \\ &= (2, 1, 1) + 2(-1, 2, 2) - 2(3, -1, 3) \\ &= (-6, 7, -1). \end{aligned}$$

También podemos aplicar el teorema precedente.

$$\begin{aligned} T(1, 2, -2)_1 &= (1, 2, -2)\cdot(2, -1, 3) = -6 \\ T(1, 2, -2)_2 &= (1, 2, -2)\cdot(1, 2, -1) = 7 \\ T(1, 2, -2)_3 &= (1, 2, -2)\cdot(1, 2, 3) = -1 \end{aligned}$$

de donde,

$$T(1, 2, -2) = (-6, 7, -1).$$ ▮

Es posible realizar en la tabla de valores de una transformación lineal ciertas operaciones muy convenientes. Por ejemplo, supongamos que sabemos que $T(1, 0) = (2, 3, 1)$ y $T(2, 2) = (1, 3, 0)$. Podemos resumir estos datos:

	X		$T(X)$		
①	1	0	2	3	1
②	2	2	1	3	0

y calcular:

③ = −2① + ②	0	2	−3	−3	−2

Este resultado nos sugiere que $T(0, 2) = (-3, -3, -2)$, como, en efecto, es. En general, si en una fila aparece X seguido de $T(X)$, y en otra fila aparece Y seguido de $T(Y)$, entonces la primera fila multiplicada por un escalar r y añadida a la segunda fila, (multiplicada previamente por un escalar s), producirá $rX + sY$, $rT(X) + sT(Y)$ que es igual a $rX + sY$, $T(rX + sY)$ puesto que T es una transformación lineal. Es decir, *toda combinación de filas de una tabla de valores de una transformación lineal da lugar a otra fila de la tabla de valores.* En los siguientes ejemplos utilizaremos esta propiedad.

43.6 Ejemplo. Se pide encontrar la matriz de la transformación lineal T tal que $T(2, 1) = (0, 1, 3)$ y $T(-1, 1) = (1, 2, 1)$. Es decir, tenemos que encontrar el arreglo cuya primera fila es $T(1, 0)$, y cuya segunda fila es $T(0, 1)$. Tenemos dos elementos de una tabla de valores de T, pero sabemos que realizando operaciones elementales con las filas podemos encontrar nuevos elementos de la tabla, de modo que intentaremos obtener $(1, 0)$ y $(0, 1)$ a la izquierda de la tabla. Para ello aplicaremos el mismo procedimiento que ya hemos utilizado en los problemas referentes a las formas canónicas. Así,

	X		$T(X)$		
①	2	1	0	1	3
②	−1	1	1	2	1
③ = ① + 2②	0	3	2	5	5
④ = $\frac{1}{3}$③	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
⑤ = −② + ④	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Como $T(1, 0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$T(0, 1) = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$

la matriz de T es $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$. ▮

PROBLEMAS

43.1 Sea T una transformación lineal cuyo dominio es el espacio bidimensional, y tal que $T(1, 0) = (5, 7)$ y $T(0, 1) = (7, 5)$. Encontrar la matriz de T.

43.2 Sea T una transformación lineal cuyo dominio es el espacio tridimensional y tal que $T(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$, $T(0, 1, 0) = (3, 2, 1)$ y $T(0, 0, 1) = (3, 3, 0)$. Encontrar la matriz de T.

43.3 En cada uno de los casos siguientes, T es la transformación lineal cuyo valor en el punto (x, y, z) del espacio tridimensional aparece dado. Encontrar la matriz de T correspondiente a cada uno de los casos.

(a) $T(x, y, z) = (x, 0)$.
(b) $T(x, y, z) = (2y, 0)$.
(c) $T(x, y, z) = (0, 0, z, 0)$.
(d) $T(x, y, z) = (x, 0, z)$.
(e) $T(x, y, z) = (0, y, z)$.
(f) $T(x, y, z) = (0, z, y)$.

43.4 Sea S una función cuyo dominio es el espacio bidimensional y tal que $S(r, s) = (2r - s, r + s, r + 2s)$. Probar que S es una transformación lineal y encontrar su matriz.
43.5 Sea S una función cuyo dominio es el espacio tridimensional y tal que $S(x, y, z)_1 = x - y + z$ y $S(x, y, z)_2 = 3x + y - 2z$. Probar que S es una transformación lineal y encontrar su matriz.
43.6 En cada uno de los casos siguientes T es la función cuyo valor en el punto (x, y, z) del espacio tridimensional aparece dado. Decida en cada caso si es T una transformación lineal o no. Si T es una transformación lineal encuentre la matriz de T. Si T no es una transformación lineal, pruebe que, en efecto, no lo es.

(a) $T(x, y, z) = (z, y, x)$.
(b) $T(x, y, z) = (3z, x, 2y)$.
(c) $T(x, y, z) = (0, z^2, 0)$.
(d) $T(x, y, z) = (0, x + y, y + z)$.
(e) $T(x, y, z) = (0, 1, 0)$.
(f) $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

43.7 En cada uno de los casos siguientes, T es la función cuyo valor en el punto (x, y, z) del espacio tridimensional aparece dado. Decida en cada caso si es T una transformación lineal o no. Si T es una transformación lineal, encuentre la matriz de T. Si T no es una transformación lineal, pruebe que, en efecto, no lo es.

(a) $T(x, y, z) = (x, yz, 0)$.
(b) $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$.
(c) $T(x, y, z) = (x, y + 1, z)$.
(d) $T(x, y, z) = (x + 2y, 3y, 2y + z)$.

43.8 (a) Si la matriz de la transformación lineal T es $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ encuentre $T(1, 2)$ y $T(-3, 4)$.

(b) Si la matriz de la transformación T es $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ encuentre $T(-1, 2, 1)$ y $T(x, y, z)$.

(c) Si la matriz de la transformación lineal T es $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ encuentre $T(1, 3, 1)$ y $T(a, b, c)$.

43.9 (a) Si T es una transformación lineal tal que $T(3, 1) = (4, 1, 2, 1)$ y $T(-1, 2) = (3, 0, -2, 1)$, encuentre la matriz de T.
(b) Si T es una transformación lineal tal que $T(2, 1, 1) = (3, -2)$, $T(3, 1, 3) = (2, 1)$, y $T(1, 0, 1) = (-1, 1)$, encuentre la matriz de T.
(c) Supongamos que $T(2, 1, 1) = (3, -2)$, $T(3, 1, 3) = (2, 1)$, $T(-1, 0, -2) = (-1, 1)$. Determine si es T una transformación lineal, y, en caso de serlo, encuentre su matriz.

43.10 Sea P_i una función definida en el m-espacio, y tal que, para todo $1 \leqq i \leqq m$, $P_i\ (X)$ es la i-ésima coordenada de X; es decir, $P_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_i$. Probar que P_i es una transformación lineal y encontrar su matriz.
43.11 Supongamos que T es una transformación lineal del espacio bidimensional en el espacio bidimensional, y que su matriz es A. Sea $S(X) = T(X)_2$ la segunda coordenada de $T(X)$. Probar que S es lineal, y encontrar su matriz en términos de A.
43.12 Sea $\{V^1, V^2, \ldots, V^m\}$ una base del m-espacio, y sean $W^1, W^2, \ldots, W^m$ vectores m-dimensionales. Probar que existe una transformación lineal T única, tal que $T(V^i) = W^i$ para todo entero i tal que $1 \leqq i \leqq m$.
43.13 (a) Probar que la función dilatadora T definida por $T(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ es una transformación lineal, y encontrar su matriz.
(b) Sea T la función que asocia cada vector bidimensional con el resultado obtenido al rotar el vector un ángulo $\pi/2$ en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. Probar que T es una transformación lineal, y encontrar su matriz.
(c) (Para los lectores que han estudiado trigonometría.) Sea T la función que asocia cada vector bidimensional con el resultado obtenido al rotar el vector un ángulo θ en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. Probar que T es una transformación lineal, y encontrar su matriz.

44 NULIDAD Y RANGO

Introduciremos esta discusión mediante la exposición de algunos problemas conocidos. Supongamos que A, B, C son vectores. Preguntamos: ¿Qué vectores son combinaciones lineales de A, B y C? ¿Cuáles son los escalares x, y, z tales que $xA + yB + zC = 0$? Replanteemos estas dos preguntas en términos de una transformación lineal. Para cada terna (x, y, z) definimos $T(x, y, z) = xA + yB + zC$. Entonces, T es una transformación lineal, y las dos preguntas pueden ahora proponerse de la siguiente manera: ¿Cuál es el codominio de T? ¿Cuáles son los vectores X tales que $T(X) = 0$? El primer paso en la búsqueda de las respuestas a estas preguntas es observar que el codominio de una transformación lineal T, y el conjunto $\{X: T(X) = 0\}$ son espacios vectoriales.

44.1 Teorema. Si T es una transformación lineal, entonces el codominio de T y $\{X: T(X) = 0\}$ son espacios vectoriales.

Demostración. Supongamos que U y V son vectores pertenecientes al codominio de T. Entonces, $T(X) = U$, $T(Y) = V$ para algún vector X y algún vector Y. Si r y s son escalares, entonces $T(rX + sY) = rT(X) + sT(Y) = rU + sV$, y, por tanto, $rU + sV$ también pertenece al codominio de T. Así, el codominio de T es un espacio vectorial.

Si $T(Y) = 0$ y $T(Z) = 0$, entonces para todos los escalares r, s, $T(rY + sZ) = rT(Y) + sT(Z) = 0$. Así, si Y y Z pertenecen a $\{X: T(X) = 0\}$, entonces $rY + sZ$ también pertenece a dicho conjunto. ▌

Nos conviene introducir aquí alguna terminología.

44.2 Definición. La dimensión del codominio de una transformación lineal T recibe el nombre de rango de T. En toda transformación lineal T, se define el espacio nulo de T como el conjunto $\{X: T(X) = 0\}$, cuya dimensión es la nulidad de T.

De hecho ya poseemos un método que nos permite describir el espacio nulo y el codominio de una transformación lineal. Ilustrémoslo con un ejemplo.

44.3 Ejemplo. Se pide encontrar una base del espacio nulo y una base del codominio de la transformación lineal T cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Construimos una tabla que en cierto modo nos es familiar.

	X			$T(X)$		
①	1	0	0	1	2	3
②	0	1	0	2	−1	1
③	0	0	1	−1	8	7
④ = 2① − ②	2	−1	0	0	5	5
⑤ = ① + ③	1	0	1	0	10	10
⑥ = 2④ − ⑤	3	−2	−1	0	0	0

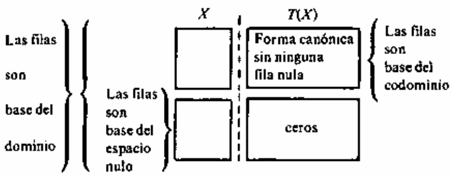
El trabajo en la tabla se realizó mediante operaciones elementales en las filas hasta que el arreglo de la derecha tomó forma canónica. De la tabla resultante podemos deducir los hechos siguientes. El codominio de T es, evidentemente, el conjunto de todas las transformaciones lineales de los vectores $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$ y $(-1, 8, 7)$. Puesto que estos vectores son equivalentes a $(1, 2, 3)$, $(0, 10, 10)$ y $(0, 0, 0)$, se sigue que el codominio es el plano $\{r(1, 2, 3) + s(0, 10, 10)$: r y s escalares$\}$. Del mismo modo, $\{(1, 2, 3), (0, 10, 10)\}$ es una base del codominio de T. El rango de T es, por tanto, igual a 2.

Consideremos el espacio nulo. Observamos, al leer la fila ⑥, que cualquier múltiplo de $(3, -2, -1)$ pertenece al espacio nulo, pero, por el momento, no podemos asegurar que, recíprocamente, todo vector que pertenezca al espacio nulo sea múltiplo de $(3, -2, -1)$. Podemos convencernos, no obstante, de la verdad del recíproco; veamos: Todo vector tridimensional es una combinación lineal de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y, por tanto, también es una combinación lineal de los vectores $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(3, -2, -1)$ por ser éstos equivalentes a aquellos. Ahora bien, el valor de T en una combinación lineal cualquiera de estos últimos vectores es precisamente la misma combinación lineal de $(1, 2, 3)$, $(0, 10, 10)$, $(0, 0, 0)$, pero a su vez, la única combinación lineal nula de éstos exige coeficientes nulos para $(1, 2, 3)$ y $(0, 10, 10)$ por ser linealmente independientes. En consecuencia los únicos elementos del espacio nulo son, precisamente, los múltiplos de $(3, -2, -1)$. Así, el espacio nulo es la recta $\{r(3, -2, -1)$: r escalar$\}$ o, equivalentemente, $\{(3, -2,$

—1)} es una base del espacio nulo. La nulidad de T, es por tanto, 1. ▌

Sinteticemos el procedimiento que acabamos de utilizar. Para encontrar una base del espacio nulo y el codominio de una transformación lineal T, preparamos una tabla donde aparezcan los vectores unitarios que tienen la dirección y sentido de los ejes coordenados, y los correspondientes valores de T.

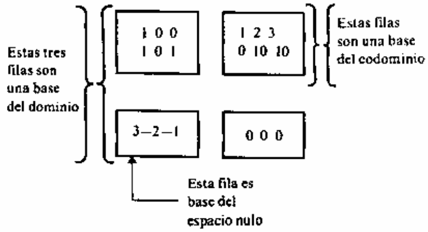
Entonces, mediante operaciones elementales en las filas, buscamos un arreglo tal que la matriz que aparece a la derecha tome la forma canònica. El resultado muestra la siguiente forma:



Del diagrama anterior se puede extraer una conclusión inmediata. El número de filas en el arreglo inferior izquierdo es la dimensión del espacio nulo; es decir, el número de filas indica la nulidad de T. El número de filas en el arreglo superior derecho es el rango de T, y el número total de filas que existen en los arreglos de la izquierda es la dimensión del dominio. De donde,

44.4 Teorema. Si T es una transformación lineal, entonces la dimensión del dominio es la suma del rango de T más la nulidad de T.

En el ejemplo 44.3, el arreglo final (filas ①, ⑤, ⑥) quedó en la forma siguiente:



Confirmamos que la nulidad es 1, puesto que {(3, —2, —1)} es base del espacio nulo; el rango es 2, puesto que {(1, 2, 3), (0, 10, 10)} es base del codominio; y $1 + 2 = 3$ es la dimensión del dominio.

Se presenta la ocasión de considerar dos clases especiales de transformaciones lineales. La primera:

44.5 Definición. Una función T es uno a uno si y sólo si, para elementos distintos X y Y del dominio de T, ocurre siempre que $T(X) \neq T(Y)$.

En otras palabras, T es uno a uno si elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas.

Es fácil comprobar que si T es una transformación lineal uno a uno, entonces se puede determinar T en términos del espacio nulo.

44.6 Teorema. Una transformación lineal T es uno a uno si y sólo si su espacio nulo consta de un único elemento: el vector nulo; es decir, si y sólo si la nulidad de T es cero.

Demostración. Si la nulidad de T es 0, y si X y Y son dos vectores distintos, entonces $X - Y \neq 0$, y, en consecuencia, $X - Y$ no pertenece a $\{0\}$, que es el espacio nulo. Por tanto, $T(X - Y) \neq 0$ y $T(X) \neq T(Y)$. Recíprocamente, si T es uno a uno, y si X es un elemento del espacio nulo, entonces $T(X) = T(0)$, de donde $X = 0$, con lo que el espacio nulo es $\{0\}$. ▌

Como la suma del rango y la nulidad de una transformación lineal es la dimensión del dominio (teorema 44.4) tenemos que

44.7 Corolario. Una transformación lineal T es uno a uno si y sólo si la dimensión del dominio de T es igual a la dimensión del codominio.

Así, si T es una transformación lineal cuya matriz es $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, entonces el rango de T es 2 porque (2, 3) y (1, 4) son linealmente independientes, y, como la dimensión del dominio es 2, inferimos que T es uno a uno.

De la relación existente entre rango y nulidad se deriva otra consecuencia útil. Supongamos que T es una transformación lineal de un m-espacio en un n-espacio, entonces, ¿en qué circunstancias es el codominio de T igual al n-espacio? Esto es, ¿cuándo se cumple que para cada vector n-dimensional C existe un vector m-dimensional X tal que $T(X) = C$? Algunas veces éste problema se plantea de la manera siguiente: ¿En qué circunstancias tiene siempre solución la ecuación $T(X) = C$, sea cual fuere el vector n-dimensional C? No es difícil encontrar una respuesta.

44.8 Teorema. Sea T una transformación lineal de un m-espacio en un n-espacio. El codominio de T es el n-espacio (se dice entonces que T es una aplicación sobre el n-espacio) si y sólo si la nulidad de T es $m - n$.

Demostración. Observamos que todo vector n-dimensional pertenece al conjunto de imágenes de T si y sólo si el rango de T es n (si en el conjunto de imágenes existen n vectores linealmente independientes, entonces todo vector n-dimensional es una combinación lineal de aquellos). Ahora bien, el rango es m-(nulidad de T), que será igual a n si y sólo si la nulidad es $m - n$. ∎

Por ejemplo, si T es la transformación lineal cuya matriz es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, entonces el rango es 2; obsérvese que, por ejemplo, (2, 1) y (1, 2) son linealmente independientes. Por tanto, T aplica el espacio tridimensional sobre el espacio bidimensional, y la nulidad es, en consecuencia, $3 - 2 = 1$.

Un último corolario puede aún sacarse de esta discusión. Supongamos que T es una transformación lineal del m-espacio en el m-espacio. T aplicará el m-espacio sobre el m-espacio si y sólo si la nulidad es $m - m = 0$, condición que es también necesaria y suficiente para que T sea uno a uno. Entonces,

44.9 Corolario. Sea T una transformación lineal del m-espacio en el m-espacio, T será una aplicación del m-espacio sobre el m-espacio si y sólo si T es uno a uno.

Con frecuencia, para resumir esta proposición, se dice que T es sobre si y sólo si es uno a uno, supuesto que T tiene una matriz cuadrada. Así, la transformación cuya matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es necesariamente uno a uno, puesto que sus imágenes son los elementos del conjunto formado por las combinaciones lineales de (1, 2, 1), (0, 3, 2) y (0, 0, 4), y este conjunto es, evidentemente, el espacio tridimensional.

PROBLEMAS

44.1 Encontrar bases del espacio nulo y del conjunto de imágenes de las transformaciones cuyas matrices son las siguientes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

44.2 Encontrar bases del espacio nulo y del conjunto de imágenes de las transformaciones cuyas matrices son las siguientes:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

44.3 Si se sabe que T es una transformación lineal cuyo dominio es el espacio tridimensional y cuyo conjunto de imágenes es el espacio bidimensional, ¿qué puede decirse del espacio nulo de T?

44.4 Si sabemos que T es una transformación lineal cuyo dominio es el espacio bidimensional y cuyo conjunto de imágenes es una recta, ¿qué podemos decir del espacio nulo de T?

44.5 Si sabemos que T es una transformación lineal cuyo espacio nulo es una recta y cuyo conjunto de imágenes es una recta, ¿qué podemos decir del dominio de T?

44.6 Encontrar una transformación lineal cuyo dominio sea el espacio tridimensional, cuyo conjunto de imágenes es el plano $x - y$ (en el espacio tridimensional), y cuyo espacio nulo sea el eje z.

44.7 ¿Existe alguna transformación lineal cuyo dominio sea el espacio tridimensional, cuyo codominio sea el plano $x - y$, y cuyo espacio nulo sea el eje x?

44.8 Sea T una transformación lineal cuya matriz sea cuadrada. Probar que:

(a) Si C es un vector tal que la ecuación $T(X) = C$ no tiene solución, entonces la ecuación $T(X) = 0$ tiene infinitas soluciones.

(b) Probar que si, para todo vector C, la ecuación $T(X) = C$ tiene solución, entonces, para cada vector C, la solución es única; es decir, para cada C existe uno y sólo un vector X tal que $T(X) = C$.

44.9 Sean E y F dos espacios vectoriales subespacios de m-espacios. Probar que el conjunto $E + F$, cuyo dominio es el conjunto $\{X + Y: X \in E \text{ y } Y \in F\}$ de todas las posibles sumas de elementos de E con elementos de F, es un espacio vectorial.

44.10 Sean E y F dos espacios vectoriales subespacios del m-espacio tales que $E \cap F = \{0\}$. Probar que, si B es una base de E y C una base de F, entonces $B \cup C$ es base de $E + F$. (Para la definición de $E + F$ véase el problema 44.9.)

44.11 Sea T una transformación lineal del m-espacio. Probar que existen subespacios E y F del m-espacio tales que $E \cap F = \{0\}$, $E + F = m$-espacio, E es el espacio nulo de T, y T es uno a uno en el sentido de que, si X y Y son dos elementos distintos de F, entonces $T(X) \neq T(Y)$. ¿Cuál es la dimensión de F?

45 COMPOSICION Y MULTIPLICACION DE MATRICES

Supongamos que f es una función de un conjunto A hacia un conjunto B, y que g es una función de un conjunto B hacia un conjunto C. Si x es un elemento de A, entonces $f(x)$ es elemento de B, y $g(f(x))$ es elemento de C. Esta relación que asigna a cada elemento x de A el elemento $g(f(x))$ de C es una función que, en cierto sentido, es un "producto" de g y f. En esta sección consideraremos este tipo de multiplicación de funciones, y, en particular, investigaremos los "productos" de combinaciones lineales.

45.1 Definición. Sea f una función de un conjunto A hacia un conjunto B, y sea g una función de un conjunto B hacia un conjunto C. Entonces $g \circ f$, la composición de g y f, se define como la función cuyo dominio es A, y tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo elemento x de A.

Supongamos, por ejemplo, que f es la función tal que $f(t) = 2t + 1$ para todo número real t, y que g, la función "cuadrado", es la función tal que $g(s) = s^2$ para todo número real s. Equivalentemente, $f = \{(x, y): y = 2x + 1\}$ y $g = \{(u, v): v = u^2\}$. Entonces, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2$, de donde $g \circ f = \{(x, y): y = (2x + 1)^2\}$. Podríamos también buscar $f \circ g$: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$, de donde $f \circ g = \{(x, y): y = 2x^2 + 1\}$. Observemos que $f \circ g \neq g \circ f$, puesto que, por ejemplo, $(f \circ g)(1) = 3$ y $(g \circ f)(1) = 9$. La composición no es, pues, necesariamente conmutativa. Sin embargo, la composición es asociativa, como probaremos inmediatamente.

45.2 Teorema. Si f es una función de un conjunto A hacia un conjunto B, y g es una función de B hacia un conjunto C, y h es una función de C hacia un conjunto D, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$; es decir, la composición es asociativa.

Demostración. Para cada elemento x de A sabemos que $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$; pero $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ con lo que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ∎

Volvamos a nuestra discusión de las transformaciones lineales. Primero:

45.3 Teorema. Si S es una transformación lineal de un m-espacio en un n-espacio y si T es una transformación lineal del n-espacio en el p-espacio, entonces $T \circ S$ es una transformación lineal del m-espacio en el p-espacio; es decir, la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.

Demostración. Basta probar que $T \circ S$ es lineal. Si X y Y son vectores m-dimensionales, y r y s son escalares, sabemos, por definición de composición, que $(T \circ S)(rX + sY) = T(S(rX + sY))$, pero, como S es lineal, $T(S(rX + sY)) = T(rS(X) + sS(Y))$, y, como T también es lineal, $T(rS(X) + sS(Y)) = rT(S(X)) + sT(S(Y))$. Estos resultados nos llevan, por la definición de composición, a que $rT(S(X)) + sT(S(Y)) = r(T \circ S)(X) + s(T \circ S)(Y)$. De donde, $(T \circ S)(rX + sY) = r(T \circ S)(X) + s(T \circ S)(Y)$ y, por tanto, $T \circ S$ es una transformación lineal. ▌

El teorema precedente nos lleva al problema de mayor importancia de esta sección. Si T es una transformación lineal del m-espacio en el n-espacio, entonces la matriz A de T es una matriz $m \times n$. Del mismo modo, si S es una transformación lineal del n-espacio en el p-espacio, entonces la matriz B de S es una matriz $n \times p$. $T \circ S$ es una transformación lineal del m-espacio en el p-espacio, y tiene, a su vez, una matriz C. ¿Cómo podemos calcular C en términos de A y B? Debe existir, sin duda, alguna forma de hacer este cálculo puesto que A determina a T, B determina a S, S y T determinan a $T \circ S$, y $T \circ S$ determina a C. Necesitamos un procedimiento explícito que nos será ofrecido por el siguiente teorema.

45.4 Teorema. Supongamos que S es una transformación lineal del m-espacio en el n-espacio, y que T es una transformación lineal del n-espacio en el p-espacio. Sea A la matriz de S, y B la de T. Entonces, el elemento i-j de la matriz de $T \circ S$ es el producto escalar

$$\sum_{p=1}^{n} A_{ip}B_{pj}$$

de la i-ésima fila de A y la j-ésima columna de B.

Demostración. Recordemos que, por definición, el elemento i-j de la matriz de $T \circ S$ es la j-ésima coordenada de la imagen $(T \circ S)(U^i)$ de U^i, donde U^i es el vector unitario en la dirección y sentido del i-ésimo eje coordenado (U^i tiene un 1 por i-ésima coordenada, y nulas las demás). Ahora, $(T \circ S)(U^i) = T(S(U^i))$, y $S(U^i)$, imagen de U^i dada por S, es precisamente la i-ésima fila $(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})$ de la matriz A de S. En consecuencia, $(T \circ S)(U^i) = T(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})$. Conforme al teorema 43.4, la j-ésima coordenada de esta imagen es el producto escalar de $(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})$ con la j-ésima columna de la matriz B de T, $(B_{1j}, B_{2j}, \ldots, B_{nj})$. Así la matriz de $T \circ S$ es $(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}) \cdot (B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{nj}) = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj} =$

$$\sum_{p=1}^{n} A_{ip}B_{pj}. \quad ▌$$

Antes de ofrecer ejemplos sobre el uso de este teorema definamos una multiplicación de matrices.

45.5 Definición. El producto CD de una matriz $m \times n$, C, por una matriz $n \times p$, D, es la matriz $m \times p$ cuyo elemento i-j es el producto escalar de la i-ésima fila de C con la j-ésima columna de D; es decir, $(CD)_{ij} = \sum_{p=1}^{n} C_{ip}D_{pj}$.

La multiplicación de matrices recibe el nombre de *multiplicación de fila por columna*. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, y entonces el elemento que aparece en la segunda fila y primera columna de AB es el producto escalar de la segunda fila de A con la primera columna de B, y es, por tanto, $(3, 2) \cdot (1, 3) = 3 + 6 = 9$. Indicaremos los factores de todos los elementos de AB. Con todos los productos escalares formados por cada una de las filas de A con cada una de las columnas de B obtendremos una matriz 2×3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1, 2)\cdot(1, 3) & (1, 2)\cdot(2, -1) & (1, 2)\cdot(3, 2) \\ (3, 2)\cdot(1, 3) & (3, 2)\cdot(2, -1) & (3, 2)\cdot(3, 2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Por supuesto, para poder multiplicar dos matrices es necesario que se adapten entre sí convenientemente. El producto escalar de una fila de la primera por una columna de la segunda exige que la fila y la columna sean de la misma longitud. En otras palabras, el número de columnas de la primera, que expresa la longitud de cada una de sus filas, debe ser igual al número de filas de la segunda, que expresa, a su vez, la longitud de cada una de las columnas. Si A es una matriz $m \times n$, es necesario, para que AB esté definida, que B sea una matriz $n \times p$.

El producto AB tiene entonces m filas y p columnas, y es, por tanto, una matriz $m \times p$. Así, el producto de una matriz 2×2 con una matriz 2×3 es una matriz 2×3, como en nuestro ejemplo; el producto de una matriz 1×3 con una matriz 3×2 es una matriz 1×2; el producto de una matriz 2×1 con una matriz 1×3 es una matriz 2×3; por último, el producto de una matriz 2×3 con una matriz 2×2 no está definido. Veamos varios ejemplos de multiplicación de matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1, 2)\cdot(5, 7) & (1, 2)\cdot(6, 8) \\ (3, 4)\cdot(5, 7) & (3, 4)\cdot(6, 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 2\ -1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= ((1, 2, -1)\cdot(-1, -2, -3) \quad (1, 2, -1)\cdot(0, 2, 1) \quad (1, 2, -1)\cdot(3, 1, 0)) = (-2, 3, 5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1, 2, 1)\cdot(-2, 2, -1) & (1, 2, 1)\cdot(-1, 2, 1) \\ (-1, 0, 2)\cdot(-2, 2, -1) & (-1, 0, 2)\cdot(-1, 2, 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos reenunciar el teorema 45.4 en términos de multiplicación de matrices.

45.6 Teorema. Si A es la matriz de una transformación S del m-espacio, en el n-espacio, y B es la matriz de una transformación lineal T del n-espacio en el p-espacio, entonces AB es la matriz de la transformación lineal $T \circ S$ del m-espacio en el p-espacio.

En otras palabras, si T y S son transformaciones lineales, entonces,

(matriz de S) (matriz de T) = matriz de $T \circ S$.

Obsérvese que el orden en que aparecen "T" y "S" a un lado de esta igualdad es el contrario al del otro. *

Podemos utilizar la relación existente en la multiplicación de matrices y la composición de transformaciones lineales para establecer una proposición sobre la multiplicación de matrices. Sabemos que la composición es asociativa. Esta propiedad nos da la posibilidad de sospechar que la multiplicación de matrices ha de ser asociativa.

45.7 Teorema. Supongamos que A es una matriz $m \times n$, B una matriz $n \times p$ y C una matriz $p \times q$. Entonces, $(AB)C = A(BC)$.

Demostración. Nos basaremos en el teorema precedente y en la asociatividad de la composición. Sean A la matriz de la transformación lineal R, B la matriz de S, y C la de T. Entonces, puesto que $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$, se cumplirá que (matriz de $S \circ R$) (matriz de T) = (matriz de R) (matriz de $T \circ S$). Ahora bien, la matriz de $S \circ R$ = (matriz de R) (matriz de S) = AB, y, del mismo modo, (matriz de $T \circ S$) = (matriz de S) (matriz de T) = BC. Por tanto, $(AB)C = A(BC)$. ▌

Sabemos que la composición de matrices no es siempre conmutativa; sospechamos, en consecuencia, que existen casos en los que la multiplicación de matrices no es conmutativa. En efecto, tales casos existen; (véanse los problemas al final de la sección).

Por último, la multiplicación de matrices nos proporciona un modo conveniente de

* Existen dos definiciones posibles de matriz de una transformación lineal; cualquiera de ellas posee sus desventajas. Esta inversión de orden es la principal desventaja de la definición que utilizamos.

describir la actuación de una transformación lineal. Recordemos (teorema 43.3) que si A es la matriz de una transformación lineal T del m-espacio, entonces la j-ésima coordenada de $T(X)$, donde X es un vector m-dimensional, es el producto escalar de X con la j-ésima columna de A. Ahora bien, si suponemos que X es una matriz $1 \times m$, * entonces dicho producto será el elemento 1-j de XA. En consecuencia,

45.8 Teorema. Si T es una transformación lineal cuya matriz es A, entonces $T(X) = XA$ para cada vector X.

Así, si T tiene por matriz $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ entonces

$$T(x, y) = (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 0\end{pmatrix} = (x + y, 2x + 2y, 3x).$$

PROBLEMAS

45.1 Calcular, en cada caso, la matriz X.

(a) $X = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

(b) $X = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

(c) $X = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

(d) $X = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

(e) $X = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

(f) $X = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

*Esta consideración no es completamente correcta. En vez de "considerar X como una matriz $1 \times m$" estamos, de hecho, considerando la matriz $\overline{X}$ de orden $1 \times m$ tal que $\overline{X}_{1j} = X_j$ para todo j.

45.2 Calcular, en cada caso, la matriz X.

(a) $X = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

(b) $X = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$

(c) $X = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

(d) $X = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$

(e) $X = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

(f) $X = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$.

45.3 Calcular, en cada caso, la matriz X.

(a) $X = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$

(b) $X = \begin{pmatrix}5 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}$

(c) $X = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{pmatrix}$

(d) $X = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}$

(e) $X = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & 0\\0 & d\end{pmatrix}$.

45.4 Calcular, en cada caso, la matriz X.

(a) $(1\ 5\ 3)\begin{pmatrix}2\\7\\9\end{pmatrix} = X$

(b) $\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\3 & 1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 1\\5 & 2\\-1 & 7\end{pmatrix} = X$

(c) $\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\3 & 1 & 6\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 1 & 0\\5 & 2 & 0\\-1 & 7 & 0\end{pmatrix} = X$.

45.5 Calcular, en cada caso, la matriz X.

(a) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = X$

(b) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\0 & 7 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix} = X$

(c) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&j\end{pmatrix} = X$

(d) $\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = X.$

45.6 Supongamos que S y T son transformaciones lineales del espacio bidimensional en un espacio bidimensional, que C es la matriz de S, y que D es la matriz de T. Calcular, en cada uno de los casos siguientes, la matriz de $S \circ T$.

(a) $C = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix}4&-2\\-3&2\end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix}4&-2\\-3&2\end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix}7&-3\\-5&2\end{pmatrix}$

(d) $C = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$

45.7 Calcular, en cada caso, la matriz X.

(a) $\begin{pmatrix}1&3&1\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&4&0&1\\-2&1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\end{pmatrix} = X$

(b) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\1&2\\0&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix} = X.$

45.8 Si $\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&1\end{pmatrix}$ es la matriz de S y $\begin{pmatrix}1&1\\-3&1\\1&2\end{pmatrix}$ es la matriz de T, encontrar (a) la matriz de $T \circ S$, (b) $(T \circ S)(1, 2)$, (c) $(S \circ T)(1, 3, 1)$.

45.9 Si $T(X) = X\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$ y $S(Y) = Y\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}$, encontrar $(T \circ S)(2, 0, -1, 1)$.

45.10 Si f es una función de un conjunto A hacia un conjunto B, y g es una función de B hacia un conjunto C, probar que $g \circ f = \{(x, z) : \text{para algún } y, (x, y) \in f \text{ y } (y, z) \in g\}$.

45.11 Una relación es un conjunto de pares ordenados. Si R y S son relaciones, entonces se define la compuesta $R \circ S$ como $\{(x, z)$: para algún y, $(x, y) \in S$, y $(y, z) \in R\}$. Probar que si R, S y T son relaciones, entonces $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

45.12 Se dice que una relación R es transitiva si, para todos los x, y, z tales que $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, se cumple que $(x, z) \in R$. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son transitivas?

(a) $\{(x, y) : x, y$ son números reales tales que $x < y\}$.
(b) $\{(x, y) : x, y$ son números reales tales que $x > y\}$.
(c) $\{(x, y) : x, y$ son números reales tales que $x^2 > y^2\}$.
(d) $\{(x, y) : x, y$ son números reales$\}$.
(e) $\{(x, y) : x \neq x, y = 7\}$.

45.13 Probar que una relación R es transitiva si y sólo si $R \circ R \subset R$.

46 FUNCIONES INVERSAS Y OPERADORES INVERSOS

Si S y T son transformaciones lineales del m-espacio en un m-espacio, entonces $S \circ T$ es también una transformación lineal del m-espacio en un m-espacio. En otras palabras, el conjunto de todas las transformaciones lineales del m-espacio en el m-espacio es cerrado cuando se le somente a la operación "composición de transformaciones". Encontramos aquí base para sospechar que puede existir alguna analogía con las estructuras algebraicas estudiadas anteriormente, y, así, resulta interesante investigar si existe un elemento unitario o idéntico para la composición, y si, en tal caso, existen en la composición los inversos de las transformaciones lineales. Dedicamos esta sección a la discusión de este problema. Comenzaremos, tal como hicimos al iniciar la investigación de la composición y la multiplicación de matrices, con la discusión de funciones que no son necesariamente transformaciones lineales.

Supongamos que X es un conjunto y que $F = \{f : f$ es una función de X en $X\}$. F es, pues, cerrado bajo la composición. Ahora bien, ¿existe en F un elemento que, para la composición, sea el unitario o idéntico? En otras palabras, ¿existe una función I de X en X tal que $I \circ f = f \circ I = f$ para todo f que pertenezca a F? ¿Existe una función I de X en X tal que $I(f(x)) =$

$f(I(x)) = f(x)$ para todo x de X? Existe, por cierto, una posibilidad que se sugiere a sí misma. Supongamos que sea I la función que permite asociar cada elemento de X con sí mismo; es decir, sea I la función que, para todo y de X, $I(y) = y$. Entonces, $I(f(x)) = f(x)$ y $f(I(x)) = f(x)$ para todo x de X, y, en consecuencia, $I \circ f = f = f \circ I$; esto es, la función $I = \{(y, y) : y \in X\}$ es idéntica o unitaria respecto a la composición.

46.1 Definición. En todo conjunto X se define la función I_X de X como el conjunto $\{(y, y) : y \in X\}$.

Si no hay peligro de confusión, omitiremos el subíndice "X"; escribiremos, sencillamente, I para referirnos a la función idéntica.

Acabamos de comprobar que:

46.2 Teorema. Si f es una función de X en X, entonces $I_X \circ f = f \circ I_X = f$.

Sería conveniente averiguar si la función idéntica I_X es única; es decir, que si J es una función de X en X tal que $J \circ f = f \circ J = f$ para toda función f de X en X, entonces $J = I_X$. Ahora bien, el problema propuesto tiene ciertas características que resultan familiares. Sugerimos al lector que revise el problema 3.7, o, mejor aún, que analice las igualdades:

$$J \circ I_X = I_X \circ J = I_X.$$

Investiguemos ahora la existencia de los inversos en la composición. Si f es una función de X en X, ¿existe una función g tal que $g \circ f = f \circ g = I$? Consideremos el problema dividido en dos partes. Primera, ¿existe para f, una función g que sea inverso a la izquierda? Esto es, ¿existe una función g tal que $g \circ f = I$, o que, equivalentemente, $g(f(x)) = x$ para todo x de X? Si tal g existe, tiene que poseer la siguiente propiedad: si $f(x) = y$, entonces $g(f(x)) = g(y) = x$; es decir, si $(x, y) \in f$, entonces $(y, x) \in g$. Se nos presenta una dificultad: si (x, y) y (z, y), donde $x \neq z$, pertenecen a f, entonces, tanto (y, x) como (y, z) han de pertenecer a g, con lo que g no sería una función. Concluimos que la existencia de un inverso g a la izquierda exige que f sea uno a uno. Consideremos la segunda parte del problema: ¿existe, para un f dado, una función g tal que $f \circ g = I$?, ¿existe una función g tal que $f(g(x)) = x$ para todo x de X? Observemos que si x no pertenece al codominio de f, entonces es imposible que $f(g(x)) = x$. En consecuencia, la existencia de un inverso a la derecha exige que f sea una función de X sobre X. Estos resultados nos restringen a funciones uno a uno de X sobre X. Tales funciones no tienen problemas.

46.3 Definición. Si f es una función de X sobre X, definimos la función inversa f^{-1} como $\{(x, y): (y, x) \in f\}$.

Existen otras muchas definiciones equivalentes de f^{-1}. Por ejemplo, $f^{-1} = \{(u, v): u = f(v)\}$ o $f^{-1} = \{(f(t), t): t \in X\}$. También queda bien definida f^{-1} si convenimos que $y = f^{-1}(x)$ si y sólo $x = f(y)$. Los elementos de f^{-1} se obtienen con sólo invertir el orden de las componentes de los pares ordenados pertenecientes a f. Si X es un conjunto de números reales tal que f es un subconjunto del plano, entonces f^{-1} es el subconjunto obtenido cuando se hace rotar f alrededor de la recta $\{(x, y): y = x\}$ (véase la figura 46.1).

Probaremos que si f es una función uno a uno de X sobre X, entonces f^{-1} es la función inversa de f bajo la operación composición.

46.4 Teorema. Si f es una función uno a uno de X sobre X, entonces $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_X$.

Demostración. En primer lugar, f^{-1} es una función puesto que, si (x, y) y (x, z) pertenecen a f^{-1}, entonces (y, x) y (z, x) pertenecen a f, pero, como f es uno a uno, $y = z$. Para cada x de X existe en X un y tal que $(x, y) \in f$ puesto que X es el dominio de f. Entonces, si $y = f(x)$, será $x = f^{-1}(y)$ porque $(y, x) \in f^{-1}$; por tanto, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ con lo que $f^{-1} \circ f = I_X$. Por otra parte, para cada x de X existe en X un y tal que $(y, x) \in f$ puesto que X es el codominio de f. Entonces, $(x, y) \in f^{-1}$, $y = f^{-1}(x)$, $f(f^{-1}(x)) = f(y) = x$, y, en consecuencia $f \circ f^{-1} = I_X$. ▮

Como resumen de nuestros resultados anteriores podemos concluir que, si F es el conjunto de todas las funciones uno a uno definidas en

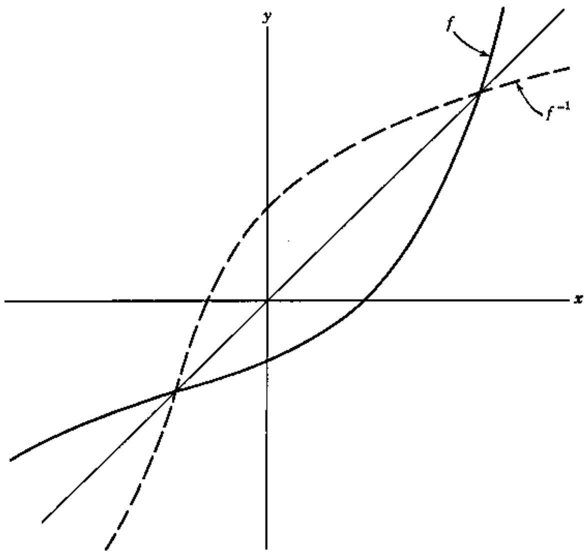


Figura 46.1

un conjunto X sobre el mismo conjunto X, entonces F dotado de la operación composición es un grupo. Es decir, $\circ$ es cerrada en F, $\circ$ es asociativa, existe en F un elemento I tal que $I \circ f = f \circ I = f$ para todo f de F, y, por último, para cada f de F existe en F un f^{-1} tal que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$. Los demás datos que necesitemos conocer acerca de F pueden deducirse de las conclusiones anteriores mediante los métodos y, en especial, los argumentos que aparecen en la sección 3.

46.5 Teorema. Sea F el conjunto de todas las funciones uno a uno definidas en X sobre X. Entonces, para todos los elementos f y g de F,

(i) si $f \circ g = I$, entonces $f = g^{-1}$ y $g = f^{-1}$,
(ii) $(f^{-1})^{-1} = f$,
(iii) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Demostración. (i) Si $f \circ g = I$, entonces, con f^{-1} a la izquierda, vemos que $f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ I$, $(f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1}$, $I \circ g = f^{-1}$, con lo que $g = f^{-1}$. La composición con g^{-1} a la derecha conduce a $f = g^{-1}$.

(ii) Como siempre se cumple que $g^{-1} \circ g = I$, entonces $(f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = I$. Otro tanto se obtiene con f a la derecha.

(iii) Sea $h = g^{-1} \circ f^{-1}$. Con vista al resultado (i) sólo necesitaremos probar que $h \circ (f \circ g) = I$. Tenemos que: $h \circ (f \circ g) = (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ (f \circ g)) = g^{-1} \circ ((f^{-1} \circ f) \circ g) = g^{-1} \circ (I \circ g) = g^{-1} \circ g = I$. ▌

Volvamos ahora a las transformaciones lineales. Estábamos discutiendo las transformaciones lineales T que, definidas en el m-espacio sobre el m-espacio, son, además, uno a uno. Conforme al teorema 44.9, una transformación lineal del m-espacio es uno a uno si y sólo si es sobre el m-espacio puesto que su nulidad es cero si y sólo si su rango es m. Tenemos, pues, varios criterios distintos para definir la clase de transformación lineal que se esté analizando. Por conveniencia adoptemos una terminología apropiada.

46.6 Definición. Un operador lineal T es una transformación lineal del m-espacio, en el m-espacio para algún m. Un operador lineal es no singular si y sólo si su nulidad es cero o, equivalentemente, si es uno a uno. Un operador es singular si su nulidad no es cero.

Probaremos que el conjunto de todos los operadores lineales del m-espacio es un grupo bajo la operación composición.

46.7 Teorema. Sea L el conjunto de todos los operadores lineales no singulares del m-espacio. Entonces,

(i) si S y T pertenecen a L, también $S \circ T$ pertenece a L,
(ii) la composición de elementos de L es asociativa,
(iii) si es I el operador unitario (es decir, si $I(X) = X$ para todo vector m-dimensional X), entonces $I \circ S = S \circ I = S$ para todo elemento S de L, y
(iv) si S pertenece a L, entonces la función inversa S^{-1} también pertenece a L.

Demostración. Sabemos que la composición de dos transformaciones lineales es, a su vez, una transformación lineal; por tanto, para probar (i) basta demostrar que, si la nulidad de T es cero y la de S también es cero, entonces la nulidad de $S \circ T$ ha de ser cero. Ahora bien, si $(S \circ T)(X) = 0$, entonces $S(T(X)) = 0$; de donde, $T(X) = 0$ puesto que S es no singular, y, en consecuencia como T es no singular, se sigue que $X = 0$. En conclusión, $S \circ T$ es no singular. La parte (ii) es obvia; los operadores *son* funciones, y la composición de funciones es asociativa. Más aún, el elemento idéntico, I, es un operador lineal, y sabemos que la composición de funciones tiene su elemento idéntico, de modo que (iii) es evidente. Resta probar que, si S es un operador lineal no singular, entonces S^{-1} es también un operador lineal no singular. Sabemos que S^{-1} es una función uno a uno del m-espacio sobre el m-espacio; basta, pues, demostrar que S^{-1} es lineal. Supongamos que U y V son vectores m-dimensionales, y que r y s son escalares. Entonces, existen vectores X y Y tales que $(X, U) \in S$ y $(Y, V) \in S$, de donde $X = S^{-1}(U)$ y $Y = S^{-1}(V)$. Puesto que $S(rX + sY) = rS(X) + sS(Y) = rU + sV$, tenemos que $(rX + sY, rU + sV) \in S$, por tanto, $S^{-1}(rU + sV) = rX + sY = rS^{-1}(U) + sS^{-1}(V)$. En conclusión, S^{-1} es lineal.

Hemos visto que cada transformación lineal posee una matriz, y que cada matriz determina una transformación lineal única. Los resultados alcanzados en nuestro análisis de la composición de transformaciones lineales y de los inversos nos inducen a sospechar que resultados correspondientes puedan conseguirse en las matrices y en los inversos multiplicativos de las matrices. La sección siguiente se dedicará por completo a tal investigación y a las operaciones con matrices que se necesitarán para ello.

PROBLEMAS

46.1 En cada uno de los ejercicios siguientes aparece un conjunto X y una función de X en X. Haga un gráfico de la función; determine si es una función uno a uno, y si es sobre X o no. Si es una función uno a uno de X sobre X, haga un gráfico de la función inversa.

(a) $X = \{x : x$ es un número real$\}$, $f = \{(x, y): y = 2x + 1\}$
(b) $X = \{x : x$ es un número real$\}$, $f = \{(x, y) : y = x^2\}$
(c) $X = \{x : x$ es un número real y $-1 \leqq x \leqq 1\}$, $f = \{(x, y) : y \geqq 0$ y $x^2 + y^2 = 1\}$
(d) $X = \{x : x$ es un número real, y $x \neq 0\}$, $f = \{(x, y): xy = 1\}$
(e) $X = \{x : x$ es un numero real$\}$, $f = \{(x, y): y = x\}$
(f) $X = \{x : x$ es un número real$\}$, $f = \{(x, y): y = x^3\}$

46.2 Sea $X = \{0, 1\}$. Enumere todas las funciones de X en X, y construya una tabla de multiplicar en la que queden especificadas las composiciones de cada par de funciones posible. Enumere los inversos de las funciones que los posean.

46.3 Sea $X = \{0, 1, 2\}$. Enumere todas las funciones uno a uno de X *sobre* X. Haga una tabla de multiplicar en la que queden especificadas las composiciones de cada posible par de funciones. Enumere los inversos.

46.4 Sea X el conjunto de todos los números reales positivos, y sea f una función definida en X tal que $f = \{(x, y): y = x + 1\}$. Probar que f, en la composición de funciones, tiene inverso a la izquierda pero no a la derecha; es decir, probar que existe una función g de X en X tal que $g \circ f = I_X$, pero que no existe función alguna h tal que $f \circ h = I_X$.

46.5 Sea X el conjunto de todos los números reales. Construya una función f de X sobre X pero que, al mismo tiempo, no sea uno a uno. Demostrar que dicha función posee un inverso a la derecha pero no a la izquierda.

46.6 Demostrar que una función f de X en X, donde X es un conjunto arbitrario cualquiera, tiene inverso a la izquierda si y sólo si f es uno a uno.

46.7 Demostrar que una función f de X en X tiene inverso a la derecha si y sólo si f aplica X sobre X.

46.8 Una relación es un conjunto de pares ordenados. Si R y S son relaciones, entonces $(R \circ S) = \{(x, z)$: para algún y, $(x, z) \in S$, $(y, z) \in R\}$. Si R es una relación, entonces la relación inversa R^{-1} se define como $\{(x, y)$: $(y, x) \in R\}$. Probar que $(R^{-1})^{-1} = R$ y que $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

46.9 Demostrar que si una relación es transitiva, entonces la relación inversa también es transitiva (véase el problema 45.12).

46.10 Supongamos que T es un operador lineal cuya matriz es $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y que S es un operador lineal cuya matriz es $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Demostrar que $S = T^{-1}$ mediante la verificación directa de $S \circ T = T \circ S = I$. (Ante todo se debe encontrar la matriz de $S \circ T$ y la de $T \circ S$.)

46.11 Sea T un operador lineal cuya matriz es $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y sea S un operador lineal cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que $S = T^{-1}$ mediante la verificación directa de $S \circ T = T \circ S = I$. (Ante todo se debe encontrar la matriz de $S \circ T$ y la de $T \circ S$.)

47 INVERSION DE MATRICES

Los teoremas que hemos demostrado en relación con los operadores lineales y sus inversos en la composición nos llevan, sin gran esfuerzo, a los correspondientes resultados en las matrices y en los inversos multiplicativos de las matrices. Basta tener presente las relaciones que existen entre las transformaciones lineales y las matrices. La matriz de un operador lineal de un m-espacio en un m-espacio es una matriz $m \times m$, y toda matriz cuadrada es matriz de un operador lineal. Un operador lineal de un m-espacio es no singular si y sólo si su codominio es todo el m-espacio. Esta expresión equivale a decir que las filas de la matriz de dicho operador lineal, que son imágenes de los vectores unitarios de igual dirección y sentido que los ejes de coordenadas, son linealmente independientes. Esta sencilla descripción de las matrices correspondientes a operadores lineales no singulares sugiere la primera de las definiciones siguientes:

47.1 Definiciones. Una matriz cuadrada es no singular si y sólo si sus filas son linealmente independientes. La matriz idéntica* o unitaria $m \times m$ será simbolizada por δ, y quedará definida por $\delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 & \text{si} & i \neq j \\ 1 & \text{si} & i = j \end{Bmatrix}$. Una matriz B es la inversa de una matriz A si y sólo si $AB = BA = \delta$. Si B es la matriz inversa de A, se dice que A^{-1} es B (es fácil comprobar que, a lo sumo, existe un inverso).

Resumamos los conocimientos que poseemos sobre las relaciones entre operadores lineales de un m-espacio en un m-espacio y las matrices $m \times m$. Para cada operador lineal T existe una única matriz que, por el momento, denotaremos $M(T)$. Sabemos que

$$(1) \qquad M(S \circ T) = M(T)M(S).$$

También sabemos que cada matriz determina un operador lineal único. Esto es, M, que es una función uno a uno en el conjunto de los operadores lineales, aplica dicho conjunto *sobre* el conjunto de todas las matrices $m \times m$. Más aún, la matriz correspondiente al operador unitario I es δ, puesto que la imagen del vector unitario de la misma dirección y sentido que el i-ésimo eje de coordenadas producida por I es, precisamente, el mismo vector, y, además, la j-ésima coordenada de este vector es 0 cuando $i \neq j$, y es 1 cuando $i = j$. Así,

$$(2) \qquad M(I) = \delta.$$

Por último, nuestra definición de matriz no singular implica que T es un operador lineal

* El símbolo "I" se emplea generalmente para designar la matriz idéntica. Sin embargo, ya hemos utilizado previamente el símbolo "I" para designar la transformación idéntica.

singular si y sólo si $M(T)$ es una matriz singular.

Los resultados precedentes bastan para poder dejar establecido el importante teorema siguiente. La demostración queda a cargo del lector.

47.2 Teorema. El conjunto de todas las matrices no singulares $m \times m$ es, con la operación multiplicación de matrices, un grupo cuyo elemento idéntico o unitario es δ. La matriz del inverso de un operador lineal es la matriz inversa de la matriz de dicho operador.

Si A y B son matrices no singulares $m \times m$, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Nos queda pendiente un problema operatorio; ¿cómo se puede calcular la inversa de una matriz no singular A? Supongamos que, para todo vector m-dimensional X, es T el operador lineal tal que $T(X) = XA$. Entonces, por el teorema precedente, sabemos que A^{-1} es la matriz de T^{-1}. En consecuencia, nuestro problema se reduce a encontrar los vectores que, mediante T^{-1}, son imágenes de los vectores unitarios de la misma dirección y sentido que los ejes coordenados. Vale decir que debemos encontrar los vectores cuyas imágenes, mediante T, son, precisamente, los vectores unitarios de la misma dirección y sentido que los ejes coordenados. Así, por ejemplo, dada la siguiente tabla de valores

$$\begin{array}{cc|cc} x & y & \multicolumn{2}{c}{T(x,y)} \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}$$

es evidente que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz de T^{-1} puesto que $T^{-1}(1, 0) = (2, 1)$ y $T^{-1}(0, 1) = (3, 4)$. Entonces A^{-1} es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Esta observación sugiere un procedimiento operatorio. Diversos ejemplos nos servirán de ilustración.

47.3 Ejemplo. Se pide calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Intentaremos encontrar los vectores (r, s) y (t, u) tales que $(r, s)A = (1, 0)$ y $(t, u)A = (0, 1)$. El método consiste en el uso racional de las operaciones elementales entre filas para llegar a obtener, a la derecha, filas cuyas componentes sean precisamente $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Si tenemos éxito en las operaciones, habremos obtenido la matriz inversa buscada; si se hace patente que no es posible conseguir $(1, 0)$ y $(0, 1)$ a la derecha, entonces la matriz A no tiene inversa.

Comenzamos por transformar a forma canónica el arreglo de la derecha

$$\begin{array}{lcc|cc} & x & y & \multicolumn{2}{c}{(x,y)A} \\ ① & 1 & 0 & 2 & 3 \\ ② & 0 & 1 & 1 & 2 \\ ③ = ① - 2② & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}$$

Las filas ① y ③ presentan, ahora, forma canónica. Utilizamos, a continuación, la fila ③ para conseguir un cero en el elemento que aparece en el extremo de la derecha de la ①. Así llegamos a

$$\begin{array}{lcc|cc} & x & y & \multicolumn{2}{c}{(x,y)A} \\ ④ = ① + 3③ & 4 & -6 & 2 & 0 \end{array}$$

Ya no es difícil obtener $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en el arreglo de la derecha.

$$\begin{array}{lcc|cc} ⑤ = (\tfrac{1}{2})④ & 2 & -3 & 1 & 0 \\ ⑥ = -③ & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

La fila ⑤ nos dice que $(2 \ \ -3)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ \ 0)$

y la fila ⑥ nos dice que $(-1 \ \ 2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0 \ \ 1)$.

Deducimos que $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es A^{-1}. Este resultado, por supuesto, se puede verificar con sólo comprobar que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. ▌

47.4 Ejemplo. Encontrar un vector bidimensional (x, y) tal que $(x, y)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (4, 3)$, y un vector (u, v) tal que $(u, v)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 1)$.

Si hacemos $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, podemos escribir

$(x, y)A = (4, 3)$, de donde $(x, y) = (4, 3)A^{-1}$. Un cálculo análogo nos prueba que $(u, v) = (1, 1)A^{-1}$. Afortunadamente, A es la matriz del ejemplo 47.3, y, por tanto, $A^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$(x, y) = (4, 3)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (5, -6)$$

y

$$(u, v) = (1, 1)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (1, -1).$$

Para verificar las soluciones basta comprobar que $(5, -6)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (4, 3)$ y que

$$(1, -1)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 1). \quad \blacksquare$$

Veamos una fácil regla para invertir matrices.

47.5 Regla. Para invertir una matriz no singular A, constrúyase una tabla donde la matriz idéntica δ aparezca a la izquierda y la matriz A a la derecha. Efectúense las operaciones elementales en las filas hasta que aparezca la matriz idéntica δ a la derecha. La matriz que aparece entonces a la izquierda es, precisamente, A^{-1}.

Consideremos varios ejemplos más.

47.6 Ejemplo. Encontrar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. De acuerdo con la regla 47.5 tenemos que

	x	y	z	$(x, y, z)A$		
①	1	0	0	2	3	4
②	0	1	0	2	1	1
③	0	0	1	1	1	2
④ = −① + ②	−1	1	0	0	−2	−3
⑤ = ① + 2③	1	0	2	0	5	8
⑥ = 5④ + 2⑤	−3	5	4	0	0	1

Interrumpimos momentáneamente las operaciones para observar que hemos obtenido a la derecha una matriz que presenta la forma canónica, (filas ①, ④, y ⑥). Podemos utilizar la fila ④ para conseguir un cero en la segunda columna de la fila ①; esta operación nos proporciona la fila ⑦. Ahora, la fila ⑥ nos permite llegar a un cero en la última columna de las filas restantes.

⑦ = 2① + 3④	1	3	0	4	0	1
⑧ = ④	1	1	0	0	2	3
⑨ = ⑥	−3	5	4	0	0	1
⑩ = ⑦ + ⑨	−4	8	4	4	0	0
⑪ = ⑧ + 3⑨	−10	16	12	0	−2	0

Por último, multiplicar ⑩ por $(\frac{1}{4})$, ⑪ por $(-\frac{1}{2})$, y ⑨ por ① nos lleva a

⑫ = $\frac{1}{4}$⑩	−1	2	1	1	0	0
⑬ = $(-\frac{1}{2})$⑪	5	−8	−6	0	1	0
⑭ = ⑨	−3	5	4	0	0	1.

Concluimos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Este resultado, por supuesto, se puede verificar* con sólo comprobar que $AA^{-1} = A^{-1}A = \delta$. $\blacksquare$

Por último, es posible encontrar una fórmula que permita calcular la inversa de una matriz 2×2 para ello, obténgase la matriz inversa de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Existe también una fórmula para obtener la inversa de una matriz 3×3, pero la aplicación de esta fórmula es casi tan complicada como el procedimiento utilizado en el ejemplo 47.6.

* Para encontrar cualquier posible error se debe, tal como se ha hecho aquí, comprobar sucesivamente cada renglón. Así, por ejemplo, el sexto renglón nos dice que $(-3, 5, 4)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (0,0,1)$, resultado que puede comprobarse fácilmente.

47.7 Ejemplo. Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donde $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

Observemos que, como $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ si y sólo si (a, b) y (c, d) son linealmente independientes, la matriz A tendrá inversa si y sólo $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Procedemos como antes.

	x	y	$(x, y)A$	
①	1	0	a	b
②	0	1	c	d
③ $= -c① + a②$	$-c$	a	0	$-bc + ad$
④ $= (ad - bc)② - d③$	cd	$-bc$	$c(ad - bc)$	0

Supuesto que $c \neq 0$, y que $ad - bc = \Delta$, obtenemos, a partir de las filas ③ y ④, la tabla siguiente

⑤ $= \frac{1}{c\Delta}$④	$\frac{d}{\Delta}$	$\frac{-b}{\Delta}$	1	0
⑥ $= \frac{1}{\Delta}$③	$\frac{-c}{\Delta}$	$\frac{a}{\Delta}$	0	1

Concluimos que, si $c \neq 0$ (ya habíamos supuesto que $\Delta \neq 0$), entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$.

Un cálculo directo nos lleva a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$ aun cuando $c = 0$. ▮

PROBLEMAS

Los cinco primeros problemas prueban el teorema 47.2. La notación utilizada es la que veníamos empleando antes de proponer dicho teorema.

47.1 Demostrar que si A es una matriz cuadrada, entonces $A\,\delta = \delta\,A = A$. Comiéncese por observar que existe una transformación lineal T tal que $M(T) = A$ y que $T \circ I = I \circ T = T$.

47.2 Demostrar que, si T es no singular y $M(T) = A$, entonces $M(T^{-1}) = A^{-1}$. Pártase de la igualdad

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I.$$

47.3 Demostrar que, si A y B son matrices cuadradas no singulares y $AB = \delta$, entonces $A = B^{-1}$ y $B = A^{-1}$.

47.4 Demostrar que si A es una matriz cuadrada no singular, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.

47.5 Demostrar que, si A y B son matrices cuadradas no singulares, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

47.6 Calcular A^{-1} en cada uno de los casos siguientes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

47.7 Calcular la matriz X en cada uno de los casos siguientes.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

47.8 Si $(2\ 1) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (a\,b)$, encontrar los valores de a y b.

47.9 Supuesto que $(x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (a\,b\,c)$.

Expresar x, y y z en términos de a, b y c.

47.10 Supuesto que A es una matriz $m \times m$ y que C es un vector m-dimensional tal que la ecuación $XA = C$ tiene solución única, probar que A es no singular.

47.11 Supuesto que A y B son matrices $m \times m$ y que AB es no singular, probar que tanto A como B son no singulares.

48 COORDENADAS RESPECTO A UNA BASE

Supongamos que A, B y C son vectores tridimensionales linealmente independientes de modo que $\{A, B, C\}$ es base del espacio tridimensional. Entonces, para cada vector tridimensional X, existen números a, b y c tales que $X = aA + bB + cC$. El vector X determina únicamente los números a, b y c. En efecto, si $X = aA + bB + cC = a'A + b'B + c'C$, entonces $(a - a')A + (b - b')B + (c - c')C = 0$, con lo que, necesariamente, $a - a' = b - b' = c - c' = 0$ puesto que los vectores A, B y C son linealmente independientes. Así, para cada vector X, los vectores A, B y C determinan una terna única (a, b, c) de números. La terna (a, b, c) recibe el nombre de *terna de coordenadas* de X respecto a la base (A, B, C). Entonces, a cada vector X aparece asociada una terna de números que son las coordenadas de X respecto a (A, B, C). Es decir, existe una función tal que la imagen del vector X es la terna de coordenadas. El objetivo principal de esta sección es encontrar un método efectivo que nos permita calcular la imagen de un vector dado, o, en otras palabras, un método para encontrar las coordenadas de un vector respecto a una base dada. Definimos:

48.1 Definición. Sean $V^1, V^2, \ldots, V^m$ vectores m-dimensionales linealmente independientes. Se dice que una función c del m-espacio es una "función coordenada" de $(V^1, V^2, \ldots, V^m)$ si, para todo vector X, se cumple que

$$X = c(X)_1V^1 + c(X)_2V^2 + \cdots + c(X)_mV^m = \sum_{j=1}^{m} c(X)_jV^j.$$

La i-ésima coordenada de la m-upla $c(X)$ es la i-ésima coordenada de X respecto a $(V^1, V^2, \ldots, V^m)$.

Si $U^1 = (1, 0, 0)$, $U^2 = (0, 1, 0)$ y $U^3 = (0, 0, 1)$, entonces, para todo vector (r, s, t) es evidente que $(r, s, t) = rU^1 + sU^2 + tU^3$. Por tanto, la función coordenada de (U^1, U^2, U^3) es la función que aplica (r, s, t) sobre (r, s, t); es decir, la función coordenada es el operador idéntico. En otras palabras, la i-ésima coordenada de un vector X respecto a (U^1, U^2, U^3) es, precisamente, X_i, esto es la i-ésima coordenada de X. Tal resultado no es sorprendente; pero, como necesitaremos referirnos a la base usual del m-espacio, daremos la conveniente definición.

48.2 Definición. La base usual del m-espacio es $\{U^1, U^2, \ldots, U^m\}$, donde U^i es el vector unitario de la misma dirección y sentido que el i-ésimo eje coordenado. Explícitamente, la j-ésima coordenada de U^i, $(U^i)_j$, es δ_{ij}.

Antes de introducirnos en nuevos ejemplos de funciones coordenadas investiguemos un método operatorio general. El método es bien sencillo porque, aunque el concepto de función coordenada apenas acaba de ser expuesto en este texto, sin embargo la función inversa la conocemos bastante. En efecto, si $V^1, V^2, \ldots, V^m$ son vectores linealmente independientes, y T es la transformación lineal que aplica U^i a V^i para todo i, entonces para todo vector m-dimensional X se cumple que $X = X_1U^1 + X_2U^2 + \ldots + X_mU^m$, puesto que

$$T(X) = X_1T(U^1) + X_2T(U^2) + \cdots + X_mT(U^m)$$
$$= X_1V^1 + X_2V^2 + \cdots + X_mV^m.$$

Ahora bien, como $V^1, V^2, \ldots, V^m$ son linealmente independientes, T es un operador lineal no singular, y, en consecuencia, tiene un inverso T^{-1}. Si aplicamos a $X = T^{-1}(Y)$ al resultado anterior, obtenemos

$$T(T^{-1}(Y)) = Y = T^{-1}(Y)_1V^1 + T^{-1}(Y)_2V^2 + \cdots + T^{-1}(Y)_mV^m.$$

En otras palabras, las coordenadas de $T^{-1}(Y)$ son las coordenadas de Y respecto a $(V^1, V^2, \ldots, V_m)$. Entonces,

48.3 Teorema. Si $V^1, V^2, \ldots, V^m$ son vectores m-dimensionales linealmente independientes, entonces la función coordenada c de $(V^1, V^2, \ldots, V^m)$ es el inverso del operador lineal T que transforma el vector unitario U^i que tiene la misma dirección y sentido que el i-ésimo eje coordenado en V^i.

De este teorema se sigue un corolario que describe la matriz de una función coordenada.

48.4 Corolario. La matriz de la función coordenada de $(V^1, V^2, \ldots, V^m)$, donde $V^1, V^2, \ldots, V^m$ son vectores m-dimensionales linealmente independientes, es la inversa de la matriz A cuyas filas son las coordenadas de los vectores $V^1, V^2, \ldots, V^m$.

Por tanto, la j-ésima coordenada de un vector X respecto a $(V^1, V^2, \ldots, V^m)$ es el producto escalar $X \cdot C^j$, donde C^j es la j-ésima columna de A^{-1}.

48.5 Ejemplo. Dados $V^1 = (2, 3, 4)$, $V^2 = (2, 1, 1)$ y $V^3 = (-1, 1, 2)$, se pide calcular las coordenadas de $(2, 0, 1)$ y de (r, s, t) respecto a (V^1, V^2, V^3). Ante todo, necesitamos calcular la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo 47.6 se hicieron, precisamente, los cálculos necesarios para obtener la inversa de esta matriz A^{-1}. Así, tenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entonces las coordenadas de $(2, 0, 1)$ respecto a (V^1, V^2, V^3) vienen dadas por

$$(2, 0, 1)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (-5, 9, 6).$$

Podemos comprobar que $(2, 0, 1) = -5V^1 + 9V^2 + 6V^3 = -5(2, 3, 4) + 9(2, 1, 1) + 6(-1, 1, 2)$. Del mismo modo,

$$(r, s, t)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (-r + 5s - 3t, 2r - 8s + 5t, r - 6s + 4t). \blacksquare$$

Los resultados de esta sección servirán para resolver un importante problema que, para el plano y el espacio tridimensional ya hemos resuelto por métodos distintos en los capítulos anteriores. Recordemos que una recta es un conjunto de vectores, $\{X: X = A + rV, r \text{ escalar}\}$, donde A es un vector cualquiera, y V es un vector no nulo, y que un plano es un conjunto $\{X: X = A + r_1V^1 + r_2V^2, r_1 \text{ y } r_2 \text{ escalares}\}$, donde A es un vector cualquiera, y V^1 y V^2 son vectores linealmente independientes. Podríamos, incluso, considerar "planos tridimensionales" $M = \{X: X = A + r_1V^1 + r_2V^2 + r_3V^3, \; r_1, r_2, r_3 \text{ escalares}\}$. Por supuesto, en el espacio tridimensional un conjunto M es un subconjunto propio de dicho espacio. En general, podemos convenir la siguiente definición:

48.6 Definición. Un subconjunto M del espacio m-dimensional es una variedad lineal k-dimensional si y sólo si existen un vector m-dimensional A y k vectores linealmente independientes, $V^1, V^2, \ldots, V^3$, tales que

$$M = \{X: X = A + r_1V^1 + r_2V^2 + r_3V^3 + \cdots + r_kV^k, \text{ siendo } r_1, r_2, \ldots, r_k, \text{ escalares}\}$$
$$= \{X : X = A + \sum_{i=1}^{k} r_iV^i, \text{ para algunos escalares } r_1, r_2, \ldots, r_k\}.$$

Así, una recta es una variedad lineal 1-dimensional, y un plano es una variedad lineal bidimensional. Del mismo modo que hemos convenido en llamar a $X(r_1, r_2) = A + r_1V^1 + r_2V^2$ ecuación vectorial paramétrica del plano, podemos ahora convenir en llamar a

$$X(r_1, r_2, \ldots, r_k) = A + \sum_{i=1}^{k} r_kV^k$$

ecuación paramétrica de una variedad lineal.

Hemos visto que un plano P en el espacio tridimensional puede describirse como un conjunto de puntos donde se anula una especie de función, y que una recta en el espacio tridimensional era el conjunto donde se anulaban dos de dichas funciones. ¿Existe una descripción análoga para una variedad lineal k-dimensional cualquiera? Comprobaremos que sí existe.

Supongamos que A es un vector m-dimensional, que $V^1, V^2, \ldots, V^k$ son k vectores m-dimensionales linealmente independientes, y que $M = \{X : X = A + \sum_{i=1}^{k} r_i V^i$ para algunos escalares $r_1, r_2, \ldots, r_k\}$. Supongamos que escogemos otros vectores $V^{k+1}, V^{k+2}, \ldots, V^m$

de modo que $\{V^1, V^2, \ldots, V^k, V^{k+1}, \ldots, V^m\}$

es una base del m-espacio. Sabemos que un vector m-dimensional arbitrario cualquiera Y puede expresarse como

$$Y = c(Y)_1V^1 + c(Y)_2V^2 + \cdots + c(Y)_kV^k + c(Y)_{k+1}V^{k+1} + \cdots + c(Y)_mV^m.$$

Observamos que Y es una combinación lineal de los vectores $V^1, V^2, \ldots, V^k$ si y sólo si todos los números

$$c(Y)_{k+1}, c(Y)_{k+2}, \ldots, c(Y)_m$$

son ceros. (Generalmente se abrevia esta última proposición: $c(Y)_j = 0$, para $j = k+1, k+2, \ldots, m$.) Volvamos a la descripción de M. Un vector X pertenece a M si y sólo si $X - A$ es una combinación lineal de $V^1, V^2, \ldots, V^k$. En consecuencia, un vector X pertenece a M si y sólo si los números

$$c(X-A)_{k+1}, c(X-A)_{k+2}, \ldots, c(X-A)_m$$

son todos ceros. Establezcamos formalmente esta conclusión.

48.7 Teorema. Sea $\{V^1, V^2, \ldots, V^m\}$ una base del m-espacio, sea A un vector m-dimensional, y sea M la variedad lineal

$$\{X: X = A + \sum_{i=1}^{k} r_i V^i$$

para escalares $r_1, r_2, \ldots, r_k\}$. Entonces $M = \{X: c(X-A)_j = 0$

para

$$j = k+1, k+2, \ldots, m\},$$

donde $c(Y)_j$, para algún vector Y, es la j-ésima coordenada de Y respecto a $(V^1, V^2, \ldots V^m)$.

Por supuesto, este teorema puede enunciarse en términos de matrices: la variedad lineal M es el conjunto $\{X : (X-A)C^j = 0$ para $j = k+1, k+2, \ldots, m\}$ donde C^j es la j-ésima columna de la inversa de la matriz cuyas filas son las coordenadas de $V^1, V^2, \ldots, V^m$. Algunas veces llamamos a

$$(X-A)C^j = 0, \qquad j = k+1, k+2, \ldots, m$$

ecuaciones no paramétricas de la variedad lineal M.

48.8 Ejemplo. Se pide encontrar ecuaciones paramétricas de la recta $\{X: X = (1, 2, 3) + r(-1, 1, 2)$ para algún escalar $r\}$. Si hacemos $V^1 = (-1, 1, 2)$ podemos escoger $V^2 = (0, 1, 0)$ y $V^3 = (0, 0, 1)$ para obtener una base $\{V^1, V^2, V^3\}$ del espacio tridimensional. La inversa de la matriz de la función coordenada c respecto a esta base es, entonces,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y tenemos, por tanto, qué calcular la inversa de esta matriz. Omitimos uno o dos pasos en las operaciones necesarias para llegar a

X			$c(X)$		
1	0	0	−1	1	2
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
−1	1	2	1	0	0

Por tanto, la matriz de la función c es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y transcribiendo las dos últimas columnas ($k = 1$), obtendremos, para la recta, las ecuaciones no paramétricas

Explícitamente, si $A \in M$, si $\{C^1, C^2, \ldots, C^k, C^{k+1}, \ldots, C^m\}$ es una base del espacio vectorial m-dimensional, y si $\{V^1, V^2, \ldots, V^m\}$ es una base dual, entonces $M = \{X\colon X = A + \sum_{i=k+1}^{m} r_i V^i$ para $r_1, r_2, \ldots, r_k$, escalares$\}$.

Demostración. Si $A \in M$, entonces $C^i \cdot A = c_1$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Como un vector X pertenece a M si y sólo si $C^i \cdot X = c_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces $X \in M$ si y sólo si $C^i \cdot X = C^i \cdot A$, o, equivalentemente, si y sólo si $C^i \cdot (X - A) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Ahora bien, sabemos que $C^i \cdot Y = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ si y sólo si $Y = \sum_{i=k+1}^{m} r_i V^i$ para algunos escalares $r_1, r_2, \ldots, r_k$; de donde se sigue que $X \in M$ si y sólo si $X - A = \sum_{i=k+1}^{m} r_i V^i$ para algunos escalares $r_1, r_2, \ldots, r_k$. ∎

El teorema precedente no aclara cuál ha de ser el método operatorio para decidir si el conjunto $\{X\colon C^i \cdot X = c_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k\}$ es vacío o si es una variedad lineal. El lema siguiente demuestra que podemos utilizar un procedimiento ya conocido para llegar a decidir la cuestión.

49.7 Lema. Supongamos que C^1, C^2 y X son vectores m-dimensionales y que c_1, c_2, a y b son escalares, $b \neq 0$. Entonces, $C^1 \cdot X = c_1$ y $C^2 \cdot X = c_2$ si y sólo si $C^1 \cdot X = c_1$ y $(aC^1 + bC^2) \cdot X = ac_1 + bc_2$.

Omitimos la demostración directa de este lema. El lema nos dice que, dada una lista de vectores y escalares

$$\begin{array}{ll} C^1, & c_1 \\ C^2, & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ C^k, & c_k \end{array}$$

es posible sustituir una fila C^i, c_i por una combinación lineal de dicha fila con otra fila cualquiera, (siempre que el coeficiente de C^i, c_i no sea cero), y obtener una nueva lista tal que el $C^j \cdot X = c_j$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ es idéntico al conjunto de soluciones de la nueva lista. Mostraremos, mediante ejemplos, cómo puede aplicarse este lema.

49.8 Ejemplo. Encontrar ecuaciones paramétricas correspondientes al conjunto de vectores 4-dimensionales $M = \{X\colon (1, 1, 2, 0) \cdot X = 1$ y $(2, 1, 3, 1) \cdot X = -2\}$. Primero buscaremos una base para el espacio vectorial de todas las combinaciones lineales de los coeficientes vectoriales,

①	1	1	2	0	1
②	2	1	3	1	−2
③ = ② − 2①	0	−1	−1	1	−4
④ = ① + ③	1	0	1	1	−3
⑤ = −③	0	1	1	−1	4

El lema garantiza que $(1, 1, 2, 0) \cdot X = 1$ y $(2, 1, 3, 1) \cdot X = -2$ si y sólo si $(1, 0, 1, 1) \cdot X = -3$ y $(0, 1, 1, -1) \cdot X = 4$. Si llevamos estas ecuaciones a la forma escalar

$$X_1 + X_3 + X_4 = -3$$
$$X_2 + X_3 - X_4 = 4$$

comprobamos que $X_1 = -3$, $X_2 = 4$, $X_3 = X_4 = 0$ es una solución. Entonces, $(-3, 4, 0, 0) \in M$, con lo que M es una variedad lineal bidimensional.

Si hacemos $C^1 = (1, 0, 1, 1)$, $C^2 = (0, 1, 1, -1)$, $C^3 = (0, 0, 1, 0)$, y $C^4 = (0, 0, 0, 1)$, entonces $\{C^1, C^2, C^3, C^4\}$ es una base. Para obtener una base dual basta invertir la matriz cuyas filas son C^1, C^2, C^3, C^4. Fácilmente,

①	1	0	0	0	1	0	1	1
②	0	1	0	0	0	1	1	1
③	0	0	1	0	0	0	1	0
④	0	0	0	1	0	0	0	1
⑤ = ① − ③ − ④	1	0	−1	−1	1	0	0	0
⑥ = ② − ③ + ④	0	1	−1	1	0	1	0	0
⑦ = ③	0	0	1	0	0	0	1	0
⑧ = ④	0	0	0	1	0	0	0	1

Entonces, por el teorema 49.2, una base dual $\{V^1, V^2, V^3, V^4\}$ se obtiene con sólo hacer $V^1 = (1, 0, 0, 0)$, $V^2 = (0, 1, 0, 0)$, $V^3 = (-1, -1, 1, 0)$, y $V^4 = (-1, 1, 0, 1)$. Ahora, según el teorema 49.6, M es el conjunto de todos los vectores X tales que $X = A + rV^3 + sV^4$, para algunos escalares r y s, y, en consecuencia, la ecuación paramétrica buscada es $X = (-3, 4, 0, 0) + r(-1, -1, 1, 0) + s(-1, 1, 0, 1)$. ▮

49.9 Ejemplo. Encontrar ecuaciones paramétricas correspondientes a $M = \{X: (1, 0, 2, 3) \cdot X = 1, (0, 1, 1, 1) \cdot X = 0, (0, 1, 3, 4) \cdot X = 3$, y $(1, -1, 1, 2) \cdot X = -1\}$. Busquemos una base para el espacio vectorial formado por todas las combinaciones lineales de los coeficientes vectoriales. Así,

①	1	0	2	3	1
②	0	1	1	1	0
③	~~0~~	~~1~~	~~3~~	~~4~~	~~3~~
④	~~1~~	~~−1~~	~~1~~	~~2~~	~~−1~~
⑤ = ③ − ②	0	0	2	3	3
⑥ = ④ − ①	~~0~~	~~−1~~	~~−1~~	~~−1~~	~~−2~~
⑦ = ⑥ + ②	0	0	0	0	−2

Sin necesidad de terminar las operaciones observamos que, conforme a ①, ②, ⑤, y ⑦ M es el conjunto de todos los vectores X tales que $(1, 0, 2, 3) \cdot X = 1$, $(0, 1, 1, 1) \cdot X = 0$, $(0, 0, 2, 3) \cdot X = 3$, y $(0, 0, 0, 0) \cdot X = 2$. Ahora bien, la última de estas ecuaciones es, evidentemente, imposible; en consecuencia, *M es vacío.* ▮

PROBLEMAS

49.1 Aplique los métodos expuestos en esta sección para resolver las ecuaciones.

(a) $5x - 3y - 2z = 0$ y $x - 7z = 0$.

(b) $2x + 3y - z = 0$, $6x - 5y + 2z = 0$ y $38x + y + z = 0$.

49.2 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneas.

(a) $x + y - z - w = 0$, $2x - y + 3z + 3w = 0$, y $x - y - z + 5w = 0$.

(b) $x - y - z = 0$, $x - 5y + 3z = 0$, y $5x - 3y + z = 0$.

(c) $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$ y $5X_1 + X_2 - X_3 - 5X_4 = 0$.

49.3 Resuelva

$$-X_1 + X_2 + 3X_3 = 1 \quad \text{y} \quad X_1 - X_2 + 2X_3 = 2.$$

49.4 Resuelva $x - 3y - 3z = 3$, $x - 2y - 2z = 2$, y $x - y - z = 1$.

49.5 Para todo subconjunto M del espacio m-dimensional, sea $M^{\perp} = \{C: C \cdot X = 0$, para todo $X \in M\}$. Probar que (a) $M^{\perp}$ es un espacio vectorial, y (b)

$$(M \cup N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}.$$

49.6 Utilizando la misma notación del problema anterior pruebe que, si M es un subespacio k-dimensional de un espacio m-dimensional, entonces $M^{\perp}$ es un subespacio $(m - k)$-dimensional, y que, si M es un subespacio cualquiera del espacio m-dimensional, entonces $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

49.7 Probar que todo sistema de ecuaciones lineales homogéneas donde existan más incógnitas que ecuaciones tiene siempre soluciones distintas de la trivial. En otras palabras, probar que, si $C^1, C^2, \ldots, C^k$ son vectores m-dimensionales, y $k < m$, entonces existe algún vector m-dimensional no nulo X tal que $C^i \cdot X = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

49.8 Supongamos que $C^1, C^2, \ldots, C^m$ son vectores m-dimensionales, y que la ecuación $C^i \cdot X = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ tiene alguna solución X, $X \neq 0$. Probar que $\{C^1, C^2, \ldots, C^m\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependiente.

Respuestas a los problemas impares

2.1 La clave de este problema, en todas sus partes, está en averiguar si ambos miembros de la igualdad se tornan *idénticos* cuando en la igualdad dada se reemplaza a por b. Así, haciendo estos reemplazos, tenemos.

(a) $b + b = b + b$
(b) $2 \cdot b + b = 3 \cdot b$
(c) $b + c = b + c$
(d) $(b + b) + b = b + (b + b)$
(e) $b + b = b + b.$

De esta suerte, las igualdades (a), (c) y (e) tienen ahora idénticos sus primeros y segundos miembros y por ello, la verdad de (a), (c) y (e) se deduce directamente de nuestro concepto de igualdad. Por otra parte, en (b) y (d) los miembros de la izquierda y de la derecha no son idénticos; para verificar la correción de esas igualdades es menester utilizar además algunas propiedades de la adición y de la multiplicación.

2.3 Para cualesquiera números x y y es

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

2.5 Para cualesquiera números x, y y z, es

$$(x + y)(x + z) = x^2 + (y + z)x + yz.$$

2.7 Dados dos números cualesquiera, la suma de la diferencia del primero y el segundo con la diferencia del segundo y el primero es cero.

2.9 $\dfrac{(n + 7 + 10)(1000 - 8)}{992} - 17 = n.$

2.11 En la terminología corriente tenemos que $F(x) = x/\pi$, y, $S(x) = \pi x^2$. Entonces, $S(r) = \pi r^2$, y, $F(\pi) = \pi/\pi = 1$.

$$F[S(3)] = F(\pi \cdot 3^2) = \pi \cdot 3^2/\pi = 3^2 = 9.$$
$$S[F(3)] = S(3/\pi) = \pi(3/\pi)^2 = 9/\pi \neq F[S(3)].$$

2.13 El resultado de la sustitución es la proposición falsa: "Para cualquier número x existe un número x tal que $x \neq x$".

3.1 (a) $(2 + 2) + 4 = 4 + 4 = 8.$
$2 + (2 + 4) = 2 + 6 = 8.$
(b) $(1 + 2) + 3 = 3 + 3 = 6.$
$3 + (2 + 1) = 3 + 3 = 6.$
(c) $\{[(1 + 2) + 4] + 7\} + 14$
$= \{[3 + 4] + 7\} + 14$
$= \{7 + 7\} + 14 = 14 + 14 = 28.$
$14 + \{7 + [4 + (2 + 1)]\}$
$= 14 + \{7 + [4 + 3]\}$
$= 14 + \{7 + 7\} = 14 + 14 = 28.$

3.3. (a) $(a + b) + (c + d)$

$= (b + a) + (d + c)$	Axioma de conmutatividad
$= b + [a + (d + c)]$	Axioma de asociatividad

(b) $a + [b + (c + d)]$

$= (a + b) + (c + d)$	Axioma de asociatividad
$= [(a + b) + c] + d$	Axioma de asociatividad
$= [a + (b + c)] + d$	Axioma de asociatividad

3.5 (a) No. Por ejemplo, $2 - 5 \neq 5 - 2$.
(b) No. $(5 - 2) - 1 = 3 - 1$, en cambio, $5 - (2 - 1) = 5 - 1 = 4$.

3.7 Puesto que $a + x = x$, para todo número x, en particular $a + b = b$, y, además, $x + b = x$, para todo x, en particular, $a + b = a$; entonces, se colige que $a = b$.

3.9 Nuestro concepto de igualdad nos dice que, como $a + b = a + c$, $-a + (a + b) = -a + (a + c)$. Pero,

$-a + (a + b)$	
$= (-a + a) + b$	Axioma de asociatividad
$= 0 + b$	Problema 3.2
$= b$	Definición de cero

Análogamente,

$-a + (a + c)$	
$= (-a + a) + c$	Axioma de asociatividad
$= 0 + c$	Problema 3.2
$= c$	Definición de cero

3.11. (a)

1.	$(a-b)+(c-d)=[a+(-b)]+[c+(-d)]$	Definición de $a-b$ y $c-d$
2.	$=a+\{(-b)+[c+(-d)]\}$	Axioma de asociatividad
3.	$=\{a+[(-b)+c]\}+(-d)$	Problema 3.3 (b)
4.	$=\{a+[c+(-b)]\}+(-d)$	Axioma de conmutatividad
5.	$=[(a+c)+(-b)]+(-d)$	Axioma de asociatividad
6.	$=a+\{c+[(-b)+(-d)]\}$	Problema 3.3 (b)
7.	$=(a+c)+[(-b)+(-d)]$	Ejemplo 3.8
8.	$=(a+c)+[(-b)-d]$	Definición de $(-b)-d$
9.	$=(a+c)-[d-(-b)]$	Problema 3.8
10.	$=(a+c)-\{d+[-(-b)]\}$	Definición de $d-(b)$
11.	$=(a+c)-(d+b)$	Teorema 3.5
12.	$=(a+c)-(b+d)$	Axioma de conmutavidad
		Definición de $(a-b)$ y $(c-d)$

(b)

1.	$(a-b)-(c-d)=(a-b)+[-(c-d)]$	
2.	$=(a-b)+(d-c)$	Problema 3.8
3.	$=(a+d)-(b+c)$	Parte (a)

3.13 Si suponemos que x = número de personas que recogió en el primer paradero, tendremos:

$$\{[(x+4)+(-2)]+8\}+(-4)+\cdots$$

con un crecido número de signos de agrupación (paréntesis curvos y rectos, corchetes, etc.). Pero, si convenimos en que la ley asociativa dice, en esencia, que no es necesario fijarse en la forma de agrupación de los términos, tendremos:

$$x+4+(-2)+8+(-4)+16+(-8)+1+(-20)+(-1)=0$$

lo cual nos da $x=6$.

Si suponemos que A = nombre del conductor, es obvio que, como yo leo el problema, A = "Roy Dubisch".

3.15 Con base en A1: $a-b$ es un número. Puede deducirse.

$a-b=a+(-b)$	Definición de $a-b$
$-b$ es un número	Axioma del inverso
$a+(-b)$ es un número	Axioma de clausura

Con base en A2: $a-b=b-a$. No es cierto, porque $2-5=-3\neq 5-2=3$. Así, pues, $a-b=b-a$ no puede deducirse de A1-A5.

Con base en A3: $a-(b-c)=(a-b)-c$. No es cierto, porque, por ejemplo, $2-(3-5)=2-(-2)=4\neq(2-3)-5=-1-5=-6$. Así, pues, $a-(b-c)=(a-b)-c$ no puede deducirse de A1-A5.

De A4 deducimos que: existe un número b tal que $y-b=y$ para todo número y. Puede deducirse. En efecto, $b=0$ porque

$$y-0=y+(-0)=y+0=y.$$

De A5 se deduce: Para cualquier número a existe un número b tal que $a-b=0$. Puede deducirse. En efecto, $b=a$ porque

$$a-a=a+(-a)=0\cdot$$

3.17 $c+(a+b)=(c+a)+b$ Axioma de asociatividad

Pero, $c+(a+b)=c+0$ $\quad a+b=0$, dado

$=c$ Axioma de la identidad

y, $(c+a)+b=0+b$ $\quad c+a=0$, dado

$=b$ Axioma de la identidad

Luego, $c=b$.

4.1 (a) Solamente son posibles la rotación idéntica, I(= giro en 360°) y un giro en el espacio, F,(= simetría axial) sobre el eje vertical.

(b) La tabla de operación del grupo es

$\oplus$	I	F
I	I	F
F	F	I

(c) $F=\ominus F$ y, desde luego, $I=\ominus I$

(d) Se satisface el axioma de conmutatividad (la tabla es simétrica respecto de la diagonal).

4.3 (a) Las únicas rotaciones posibles son la idéntica, I, y la rotación R de 180°. Hay dos ejes de simetría: uno vertical y otro horizontal. Convenimos en llamar V a la rotación en el espacio (voltear la figura) sobre el eje vertical y H a la rotación en el espacio sobre el eje horizontal.

(b)

$\oplus$	I	R	H	V
I	I	R	H	V
R	R	I	V	H
H	H	V	I	R
V	V	H	R	I

(c) $R = \ominus R,\quad H = \ominus H,\quad V = \ominus V.$

(d) Se satisface el axioma de conmutatividad.

4.5 (a) Debido a los cinco "garfios" de la figura, no existe eje de simetría y en consecuencia, no existe rotación en el espacio (acción de voltear la figura alrededor de un eje). Por otra parte, existen cinco rotaciones posibles: de 0°, 360°/5 = 72°, 144°, 216° y 228°. Representémoslas por I, R_1, R_2, R_3, R_4, respectivamente.

(b)

$\oplus$	I	R_1	R_2	R_3	R_4
I	I	R_1	R_2	R_3	R_4
R_1	R_1	R_2	R_3	R_4	I
R_2	R_2	R_3	R_4	I	R_1
R_3	R_3	R_4	I	R_1	R_2
R_4	R_4	I	R_1	R_2	R_3

(c) $R_4 = \ominus R_1,\quad R_3 = \ominus R_2,$
$R_2 = \ominus R_3,\quad R_1 = \ominus R_4.$

(d) Se satisface el axioma de conmutatividad.

4.7 Sí. Pues, $5m + 5n = 5(m + n)$, de modo que se cumple la clausuratividad. Además: puesto que $0 = 5 \cdot 0$ es un múltiplo de 5, se tiene un elemento idéntico (= identidad) aditivo, y puesto que si $a = 5m$ es múltiplo de 5, también lo es $-a = 5(-m)$, se tiene también inverso aditivo. Por otra parte, la asociatividad y la conmutatividad se deducen de la asociatividad y conmutatividad que rigen para enteros cualesquiera.

4.9 Axioma 3: $a \oplus (a \oplus b) = a \oplus a = \odot$ pero $(a \oplus a) \oplus b = \odot \oplus b = b$. (Los demás axiomas se satisfacen.)

4.11 Con base en el hecho de que el inverso es único, sólo tenemos que demostrar que

$$(a \oplus b) \oplus (\ominus b \ominus a) = \odot.$$

$$\begin{aligned}
&(a \oplus b) \oplus (\ominus b \ominus a) \\
&= (a \oplus b) \oplus [\ominus b \oplus (\ominus a)] && \text{Definición de } \ominus b \ominus a \\
&= a \oplus \{b \oplus [\ominus b \oplus (\ominus a)]\} && \text{Axioma de asociatividad} \\
&= a \oplus \{[b \oplus (\ominus b)] \oplus (\ominus a)\} && \text{Axioma de asociatividad} \\
&= a \oplus [\odot \oplus (\ominus a)] && \text{Definición de } \ominus b \\
&= a \oplus (\ominus a) && \text{Definición de } \odot \\
&= \odot && \text{Definición de } \ominus a
\end{aligned}$$

4.13 Sabemos que debemos tener dos elementos a y b y que uno de ellos, por ejemplo el a, es una identidad (elemento idéntico), de modo que $a \oplus a = a$, $a \oplus b = b \oplus a = b$. Esto determina nuestro grupo, excepto para $b \oplus b$. Pero, b debe tener un inverso que no es a puesto que $a \oplus b = b \oplus a = b$. Luego, debe ser $\ominus b = b$, $b \oplus b = a$. La tabla del grupo es, pues:

$\oplus$	a	b
a	a	b
b	b	a

Las únicas variaciones posibles se refieren a la notación y al orden de los encabezamientos de la tabla.

4.15 Por hipótesis, $(x \oplus y) \oplus (x \oplus y) = \odot$ y, en consecuencia: $[(x \oplus y) \oplus (x \oplus y)] \oplus y = \odot \oplus y = y$ por la definición de $\odot$. Omitiendo una detallada referencia al axioma de asociatividad, tenemos:

$$x \oplus y \oplus x \oplus (y \oplus y) = y.$$

Puesto que $y \oplus y = \odot$, por hipótesis, se tiene:

$$x \oplus y \oplus x \oplus \odot = y.$$

Entonces, por la definición de $\odot$, $x \oplus y \oplus x = y$ de modo que

$$x \oplus y \oplus (x \oplus x) = y \oplus x.$$

Finalmente, puesto que $x \oplus x = \odot$ por hipótesis, entonces $x \oplus y = y \oplus x$ para cualesquiera números x y y.

5.1 Contra-ejemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \neq \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$$

5.3 En primer lugar, podemos observar que el mero enunciado del problema implica que debemos desentendernos del axioma de asociatividad pues $a \cdot l \cdot g \cdot e \cdot b \cdot r \cdot a$ podría carecer de sentido fuera del uso corriente de los signos de agrupamiento, a menos que se dé por supuesto el axioma de asociatividad. Ahora, bien:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{a \cdot l \cdot g \cdot e \cdot b \cdot r \cdot a}{g \cdot a \cdot a \cdot r \cdot b \cdot l \cdot e} \\
&= (a \cdot l \cdot g \cdot e \cdot b \cdot r \cdot a) \cdot (g \cdot a \cdot a \cdot r \cdot b \cdot l \cdot e)^{-1}.
\end{aligned}$$

Mediante la aplicación reiterada del teorema de los recíprocos (más el axioma de clausuratividad), tendremos:

$$(g\cdot a\cdot a\cdot r\cdot b\cdot l\cdot e)^{-1} = g^{-1}\cdot a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot r^{-1}\cdot b^{-1}\cdot l^{-1}\cdot e^{-1}$$

Puesto que hemos convenido en omitir las etapas del proceso que utilizan las leyes asociativa y conmutativa, llegamos a la conclusión de que

$$\begin{aligned} Q &= (a\cdot a^{-1})\cdot(l\cdot l^{-1})\cdot(g\cdot g^{-1})\cdot(e\cdot e^{-1}) \\ &\quad\cdot(b\cdot b^{-1})\cdot(r\cdot r^{-1})\cdot(a\cdot a^{-1}) \\ &= 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

5.5 Si $a \neq 0$, entonces tiene un inverso a^{-1}; luego, si $a\cdot b = a\cdot c$, se obtiene: $a^{-1}\cdot(a\cdot b) = a^{-1}\cdot(a\cdot c)$. Entonces:

$$\begin{array}{lll} a^{-1}\cdot(a\cdot b) & = (a^{-1}\cdot a)\cdot b & \text{Axioma de asociatividad} \\ & = (a\cdot a^{-1})\cdot b & \text{Axioma de conmutatividad} \\ & = 1\cdot b & \text{Definición de } a^{-1} \\ & = b & \text{Definición de } 1 \end{array}$$

Además:

$$\begin{array}{lll} a^{-1}\cdot(a\cdot c) & = (a^{-1}\cdot a)\cdot c & \text{Axioma de asociatividad} \\ & = (a\cdot a^{-1})\cdot c & \text{Axioma de conmutatividad} \\ & = 1\cdot c & \text{Definición de } a^{-1} \\ & = c & \text{Definición de } 1 \end{array}$$

5.7. (a) $-(-a+b) = -b+a$
(b) $(a-b)-c = a-(b+c)$

5.9 Parte 1: Si $b \neq 0$ y $a = c\cdot b$, entonces $a/b = c$.
Demostración: Si $b \neq 0$, existirá el inverso, b^{-1}, y tendremos que $a\cdot b^{-1} = (c\cdot b)\cdot b^{-1}$.
Pero, $a\cdot b^{-1} = a/b$, por definición, y

$$\begin{array}{lll} (c\cdot b)\cdot b^{-1} & = c\cdot(b\cdot b^{-1}) & \text{Axioma de asociatividad} \\ & = c\cdot 1 & \text{Definición de } b^{-1} \\ & = c & \text{Definición de } 1 \end{array}$$

Parte 2: Si $b \neq 0$, y $a/b = c$, entonces $a = c\cdot b$.
Demostración: Si $a/b = c$, entonces $a\cdot b^{-1} = c$ por definición de a/b. Luego, $(a\cdot b^{-1})\cdot b = c\cdot b$.
Pero,

$$\begin{array}{lll} (a\cdot b^{-1})\cdot b & = a\cdot(b^{-1}\cdot b) & \text{Axioma de asociatividad} \\ & = a\cdot(b\cdot b^{-1}) & \text{Axioma de conmutatividad} \\ & = a\cdot 1 & \text{Definición de } b^{-1} \\ & = a & \text{Definición de } 1 \end{array}$$

5.11.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{1}{a/b} = \dfrac{1}{a\cdot b^{-1}} = 1\cdot(a\cdot b^{-1})^{-1} & \text{Definición de } a/b \text{ y } \dfrac{1}{a\cdot b^{-1}} \\ = (a\cdot b^{-1})^{-1} & \text{Definición de } 1 \\ = a^{-1}\cdot(b^{-1})^{-1} & \text{Teorema de los recíprocos} \\ = a^{-1}\cdot b & \text{Teorema del recíproco de un recíproco} \\ = b\cdot a^{-1} & \text{Axioma de conmutatividad} \\ = b/a & \text{Definición de } b/a \end{array}$$

5.13 Mediante la aplicación reiterada de la definición de fracción, el miembro de la izquierda se convierte en:

$$\frac{a}{\left(\dfrac{b}{c/d}\right)} = \frac{a}{\left(\dfrac{b}{c\cdot d^{-1}}\right)} = \frac{a}{b\cdot(c\cdot d^{-1})^{-1}}$$

$$\begin{array}{ll} = a\cdot[b\cdot(c\cdot d^{-1})^{-1}]^{-1} & \text{Teorema de los recíprocos} \\ = a\cdot\{b^{-1}\cdot[(c\cdot d^{-1})^{-1}]^{-1}\} & \text{Teorema del recíproco de} \\ = a\cdot[b^{-1}\cdot(c\cdot d^{-1})] & \text{un recíproco} \end{array}$$

Análogamente, la aplicación de la definición de fracción hace que el miembro de la derecha se transforme en:

$$\frac{c}{\left(\dfrac{d}{a/b}\right)} = \frac{c}{\left(\dfrac{d}{a\cdot b^{-1}}\right)} = \frac{c}{d\cdot(a\cdot b^{-1})^{-1}}$$

$$\begin{array}{ll} = c\cdot[d\cdot(a\cdot b^{-1})^{-1}]^{-1} & \text{Teorema de los recíprocos} \\ = c\cdot\{d^{-1}\cdot[(a\cdot b^{-1})^{-1}]^{-1}\} & \text{Teorema del recíproco de} \\ = c\cdot[d^{-1}\cdot(a\cdot b^{-1})] & \text{un recíproco} \\ & \text{Axioma de asociatividad} \\ = (c\cdot d^{-1})\cdot(a\cdot b^{-1}) & \text{Axioma de conmutatividad} \\ = (a\cdot b^{-1})\cdot(c\cdot d^{-1}) & \text{Axioma de asociatividad} \\ = a\cdot[b^{-1}\cdot(c\cdot d^{-1})] & \end{array}$$

6.1 (a) $2\cdot(3+4) = 2\cdot 7 = 14$; $2\cdot 3 + 2\cdot 4 = 6+8 = 14$.
(b) $5\cdot(7+11) = 5\cdot 18 = 90$; $5\cdot 7 + 5\cdot 11 = 35+55 = 90$.

6.3. $2 \div (3+4) = 2 \div 7 = \frac{2}{7}$.

$(2\div 3) + (2\div 4) = \frac{2}{3} + \frac{2}{4} = \frac{7}{6}$.

6.5 Utilizamos el hecho de que

$$\begin{array}{rll} 82\cdot 56 & = 82\cdot(5\cdot 10 + 6) & \text{Propiedad del 56.} \\ & = 82\cdot(5\cdot 10) + 82\cdot 6 & \text{Axioma de distributividad} \\ & = 410\cdot 10 + 492 = 4592 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ 56 \\ \hline 492 \\ 410 \\ \hline 4592 \end{array}$$

Obsérvese que el número 410, que está en la cuarta fila, se desplaza un lugar hacia la izquierda teniendo el cuidado de multiplicarlo por 10.

En la operación descrita hay otro modo, menos evidente, de utilizar el axioma de distributividad cuando se hace el producto de 82 por 6. El niño realiza la operación así: 2 por 6 igual 12; escribo el 2 y "llevo" 1. Utilizando nuestros axiomas eso equivale a lo siguiente:

$$\begin{aligned} 82\cdot 6 &= (8\cdot 10 + 2)\cdot 6 \\ &= (8\cdot 10)\cdot 6 + 2\cdot 6 \\ &= (8\cdot 10)\cdot 6 + 12 \end{aligned} \Bigg\} \text{ Al multiplicar 2 por 6}$$

$$\begin{aligned} &= (8\cdot 10)\cdot 6 + (10 + 2) \\ &= [(8\cdot 10)\cdot 6 + 10] + 2 \end{aligned} \Big\} \text{ Se lleva 1}$$

$$\begin{aligned} &= [(8\cdot 6)\cdot 10 + 1\cdot 10] + 2 \\ &= (8\cdot 6 + 1)\cdot 10 + 2 \\ &= (48 + 1)\cdot 10 + 2 \end{aligned} \Bigg\} \text{ Al multiplicar 8 por 6}$$

$$= 49\cdot 10 + 2 \qquad \text{Al sumar el 1 que se lleva}$$

6.7 Todos son verdaderos, excepto el M5. Obsérvese que no decimos que un entero, como número, no tenga un inverso multiplicativo; por ejemplo $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Lo que decimos es que no existe *un entero, b,* tal que $2 \cdot b = 1$.

6.9 (a) $x = 6$ es la solución única.

Demostración: Parte 1. Puesto que $2 \cdot 6 + 3 = 4 \cdot 6 - 9$, vemos que 6 es una solución.

Parte 2. Demostremos que 6 es la única solución: Si $2x + 3 = 4x - 9$, entonces

$$\begin{aligned} (2x + 3) + [(-2x) + 9] &= (4x - 9) + [(-2x) + 9] \\ 12 &= 2x \\ \tfrac{1}{2}\cdot 12 &= \tfrac{1}{2}(2x) \\ 6 &= x \end{aligned}$$

(b) $x = -3$, ó, 2.

Demostración: Parte 1. Puesto que $(-3)^2 + 1 = 7 - (-3)$ y $2^2 + 1 = 7 - 2$ vemos que -3 y 2 son soluciones.

Parte 2. Demostremos que éstas son las únicas soluciones: Si $x^2 + 1 = 7 - x$, entonces

$$\begin{aligned} (x^2 + 1) + (-7 + x) &= (7 - x) + (-7 + x) \\ x^2 + x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, bien:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ &= x(x + 3) - 2(x + 3) && \text{Axioma de Distributividad} \\ &= (x + 3)(x - 2) && \text{Problema 6.2} \end{aligned}$$

De esta suerte, $(x + 3)(x - 2) = 0$. En virtud del teorema 6.4, $x + 3 = 0$, o, $x - 2 = 0$. Luego, $x = -3$, o, $x = 2$, de acuerdo con el teorema 3.7 de trasposición.

(c) Todos los números x.

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} &= \frac{x}{2}\cdot 1 + \frac{x}{3}\cdot 1 && \text{Definición de 1} \\ &= \frac{x}{2}(3\cdot 3^{-1}) + \frac{x}{3}(2\cdot 2^{-1}) && \text{Definición de } 2^{-1} \text{ y } 3^{-1} \\ &= \frac{x}{2}\cdot\frac{3}{3} + \frac{x}{3}\cdot\frac{2}{2} && \text{Definición de } \tfrac{3}{3} \text{ y } \tfrac{2}{2} \\ &= \frac{3x}{2\cdot 3} + \frac{2x}{3\cdot 2} && \text{Teorema 5:8 relativo a la multiplicación de fracciones} \\ &= \frac{3x + 2x}{3\cdot 2} && \text{Teorema 6.1 relativo a la adición de fracciones} \\ &= \frac{(3 + 2)x}{3\cdot 2} = \frac{5x}{6} && \text{Axioma de distributividad} \end{aligned}$$

(d) No hay soluciones.

Demostración: Supongamos

$$3(2 - x) = 5 - 3x.$$

Entonces

$$6 - 3x = 5 - 3x$$

de modo que

$$(6 - 3x) + (-5 + 3x) = (5 - 3x) + (-5 + 3x)$$

y tendremos que $1 = 0$, lo cual contradice el axioma AM: $0 \neq 1$.

6.11 Sea $a =$ el número de cocos que tiene el Sr. Z. Entonces, $\frac{1}{2}\, a =$ el número de cocos que posee el Sr. Y. De esta suerte, el Sr. X tendrá $\frac{1}{2}\, a - 5$ cocos y el Sr. W, $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} a - 5)$ cocos. Finalmente, el Sr. V tendrá $\frac{1}{3}\, a$ cocos y

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}a - 5) = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}a).$$

Resolviendo la anterior ecuación, se tiene $a = 18$ *cocos* El Sr. Z tiene 18 cocos; el Sr. Y, 9; el Sr. X, 4; el Sr. W, 2; y el Sr. V, 6. Verifique estos resultados.

6.13 Las tablas de adición y de multiplicación son las siguientes:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

(1) Por las tablas, se ve que tanto la clausuratividad como la conmutatividad son obvias.
(2) 0 es la identidad aditiva y 1 la identidad multiplicativa.
(3) $\ominus 0 = 0, \ominus 1 = 1, 1^{-1} = 1$.
(4) Para verificar que $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ para todo a, todo b y todo c pertenecientes al sistema, se requiere el examen de 8 casos:

a	b	c
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0
1	0	1
1	1	1

(5) Para $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ podemos observar que si $a = 0$, $b = 0$, o, $c = 0$, ambos miembros de la igualdad se reducen a cero. Si $a = b = c = 1$, ambos miembros se reducen a 1.

(6) Para el axioma de distributividad, $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$, observamos que si $x = 0$ ambos miembros de la igualdad son iguales a 0. De esta suerte, tomamos $x = 1$ y luego consideramos las cuatro combinaciones siguientes:

y	z
0	0
0	1
1	0
1	1

(7) Es obvio que el axioma AM se cumple, en el sentido de que suponemos que los símbolos diferentes 0 y 1 representan dos objetos también diferentes. Sin embargo, ello, realmente, no puede demostrarse.

6.15 Sea x = el número de hombres y y = el número de mujeres. Entonces, puesto que 3s.6d. = 42d., 1s.4d. = 16d., y, 33s = 396d., tenemos que $42x + 16y = 396$, ó, $21x + 8y = 198$.

Puesto que x y y deben ser enteros positivos, es fácil resolver esta ecuación por el método de prueba y error; podemos tomar $x = 1$ y vemos si al despejar y éste resulta ser un entero, etc. Sólo necesitamos ensayar con $x = 1, 2, \ldots, 10$ porque si $x \geq 10$, entonces $21x + 8y \geq 210 > 198$. También podemos observar que $21x = 198 - 8y = 2(99 - 4y)$ que es un número par; en consecuencia, también x debe ser par. Así, pues, las únicas posibilidades que quedan para x son: 0, 2, 4, 6 y 8.

$$\text{Si} \quad x = 0, \quad y = \frac{198}{8}, \text{ que no es entero.}$$

$$\text{Si} \quad x = 2, \quad y = \frac{198 - 21\cdot 2}{8} \quad \ldots \text{ no entero.}$$

$$\text{Si} \quad x = 4, \quad y = \frac{198 - 21\cdot 4}{8} \quad \ldots \text{ no entero.}$$

$$\text{Si} \quad x = 6, \quad y = \frac{198 - 21\cdot 6}{8} = 9.$$

$$\text{Si} \quad x = 8, \quad y = \frac{198 - 21\cdot 8}{8} \quad \ldots \text{ no entero.}$$

En consecuencia, la solución única es: $x = 6$ y $y = 9$.

6.17 Todos ellos.

6.19 Esta clase de cancelación no es, en general, un recurso eficaz; por ejemplo, $\frac{18}{85} \neq \frac{1}{5}$. ¿Funcionará este truco con otros pares de dígitos? En otros términos, ¿cuáles dígitos x, y, y, z son soluciones de

$$\frac{10x + y}{10y + z} = \frac{x}{z}?$$

(Los dígitos son: 0, 1, . . . , 9.)
Existen las soluciones triviales: $\frac{7\cancel{7}}{\cancel{7}7} = \frac{7}{7}$, $\frac{8\cancel{8}}{\cancel{8}8} = \frac{8}{8}$, etc. (Hay nueve soluciones triviales puesto que $z \neq 0$.) Al lado de éstas, sólo son soluciones las siguientes: $\frac{19}{95}$, $\frac{16}{64}$, $\frac{26}{65}$ y $\frac{49}{98}$.

Demostración: Resolviendo la ecuación anterior para x:

$$\begin{aligned} 10xz + yz &= 10xy + xz \\ 9xz + yz &= 10xy \\ x(10y - 9z) &= yz \\ x &= \frac{yz}{10y - 9z} \end{aligned}$$

(Podemos multiplicar por el inverso multiplicativo de $10y - 9z$, porque $10y - 9z$ nunca es cero para $y = 0, 1, \ldots, 9$, y, $z = 1, 2, \ldots, 9$.)
Hay $9 \cdot 10 = 90$ pares de enteros y, y, z que debemos estudiar a fin de determinar cuáles de ellos originan valores enteros de x (entre 0 y 9). A medida que se adelante el trabajo se encontrarán varios modos de eliminar algunos de estos casos.

$y = 1$: $x = z/(10 - 9z)$. Si $z > 1$, entonces $10 - 9z < 0$ de modo que x será negativo. Esto elimina todas las posibilidades, excepto la $z = y = x = 1$ que proporciona la solución trivial $\frac{11}{11}$.

$y = 2$: $x = 2z/(20 - 9z)$. Si $z \geq 3$, entonces $20 - 9z < 0$, con lo cual x es negativo.
Si $z = 1$, $x = 2/(20 - 9)$ no entero.
Si $z = 2$, $x = 4/(20 - 18) = 2$ que da la solución $\frac{22}{22}$.

$y = 3$: $x = 3z/(30 - 9z)$. Aquí $z < 4$ (utilizando el mismo razonamiento que en los casos anteriores). También en este caso, $z = 3$ proporciona la solución trivial $\frac{33}{33}$.
Si $z = 1$, $x = 3/(30 - 9)$ . . . no entero.
Si $z = 2$, $x = 6/(30 - 18)$ . . . no entero.

$y = 4$: $x = 4z/(40 - 9z)$. Aquí $z < 5$, y, $z = 4$ proporciona la solución $\frac{44}{44}$.
Si $z = 1$, $x = 4/(40 - 9)$ . . . no entero.
Si $z = 2$, $x = 8/(40 - 18)$ . . . no entero.
Si $z = 3$, $x = 12/(40 - 27)$ . . . no entero.

$y = 5$: $x = 5z/(50 - 9z)$. Aquí $z < 6$. $z = 5$ da la solución $\frac{55}{55}$.
Se puede simplificar más el asunto: Si $z < 3$, entonces $9z < 27$, de modo que $50 - 9z > 23$ mientras que $5z < 15$, de modo que $x = 5z/(50 - 9z) < 1$, lo cual significa que x no es un entero. En consecuencia $z \geq 3$.
Si $z = 3$, $x = 15/(50 - 27)$ . . . no entero.
Si $z = 4$, $x = 20/(50 - 36)$ . . . no entero.

$y = 6$: $x = 6z/(60 - 9z)$. Aquí $z < 7$. $z = 6$ da la solución $\frac{66}{66}$.
Si $z < 4$, entonces $9z < 36$, de modo que $60 - 9z > 24$ mientras que $6z < 24$; de modo que $x = 6z/(60 - 9z) < 1$.
Si $z = 4$, $x = 24/(60 - 36) = 1$ que da la solución $\frac{16}{64}$.
Si $z = 5$, $x = 30/(60 - 45) = 2$ que da la solución $\frac{26}{65}$.

$y = 7$: $x = 7z/(70 - 9z)$. Aquí $z < 8$; $z = 7$ da la solución $\frac{77}{77}$.
Si $z < 5$, entonces $7z/(70 - 9z) < 1$.
Si $z = 5$, $x = 35/(70 - 45)$ . . . no entero.
Si $z = 6$, $x = 42/(70 - 54)$ . . . no entero.

$y = 8$: $x = 8z/(80 - 9z)$. Aquí $z < 9$; $z = 8$ proporciona la solución $\frac{88}{88}$.
Si $z < 4$, $x < 1$.
Si $z = 4$, $x = 32/(80 - 36)$ . . . no entero.
Si $z = 5$, $x = 40/(80 - 45)$ . . . no entero.
Si $z = 6$, $x = 48/(80 - 54)$ . . . no entero.
Si $z = 7$, $x = 56/(80 - 63)$ . . . no entero.

$y = 9$: $x = 9z/(90 - 9z) = z/(10 - z)$. Aquí $z > 4$. $z = 9$ da la solución $\frac{99}{99}$.
Si $z < 5$, $x < 1$.
Si $z = 5$, $x = 5/(10 - 5) = 1$ que da la solución $\frac{19}{95}$.
Si $z = 6$, $x = \frac{6}{4}$ . . . no entero.
Si $z = 7$, $x = \frac{7}{3}$ . . . no entero.
Si $z = 8$, $x = \frac{8}{2} = 4$ que da la solución $\frac{49}{98}$.

7.1	(a)	V	(d)	V	(g)	V	(j)	V
	(b)	F	(e)	F	(h)	F	(k)	V
	(c)	F	(f)	V	(i)	V	(l)	F
							(m)	V

7.3 (a) Los elementos del $\{a, m\}$ son a y m, y no más. De esta suerte, $\{a, m\}$ y $\{m, a, m\}$ tienen exactamente los mismos elementos y así, en virtud del axioma de extensión, $\{a, m\} = \{m, a, m\}$.

(b) Los elementos del $\{m, a, i, d\}$ son m, a, i, d y los del $\{m, a, d, a, m, i, m, a, d, a, m,\}$ son m, a, i, d, y, de esta suerte, al tener exactamente los mismos elementos, los dos conjuntos son iguales, de acuerdo con el axioma de extensión.

7.5 Hemos dado $A \subset B$, $B \subset C$ y $C \subset A$. Puesto que $C \subset A$ y $A \subset B$, tenemos $C \subset B$, de acuerdo con el teorema 7.8. Pero, también, sabemos que $B \subset C$; en consecuencia, de acuerdo con el teorema 7. 7, $B = C$. (Esto también pudo colegirse utilizando directamente el axioma de extensión. De esta suerte, si $x \in B$, entonces $x \in C$ puesto que $B \subset C$. También: si $x \in C$, $x \in A$ porque $C \subset A$; luego, $x \in B$ puesto que $A \subset B$. Así, pues, $C = B$ en virtud del axioma de extensión.)

7.7
$$\begin{array}{ll}
\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\} & \{\varnothing\} \not\subset \{\{\varnothing\}\} \\
\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\} & \{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
\{\{\varnothing\}\} \notin \{\varnothing\} & \{\{\varnothing\}\} \not\subset \{\varnothing\} \\
\{\{\varnothing\}\} \notin \{\varnothing, \{\varnothing\}\} & \{\{\varnothing\}\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \notin \{\varnothing\} & \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \not\subset \{\varnothing\} \\
\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \notin \{\{\varnothing\}\} & \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \not\subset \{\{\varnothing\}\}
\end{array}$$

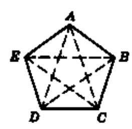
7.9 (a) Suponemos que $\{x, y\} = \{x, z\}$. Puesto que $y \in \{x, y\}$ se colige que $y \in \{x, z\}$, y esto significa que $y = x$, o, $y = z$. Puesto que $z \in \{x, z\}$ tendremos que $z \in \{x, y\}$, de modo que $z = x$, o, $z = y$. De este modo, tenemos que $y = x$, o, $y = z$, y, $z = x$; en uno u otro caso, $y = z$.

(b) Suponemos ahora que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Puesto que $\{a\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$ tenemos que $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$ y, en consecuencia, $\{a\} = \{c\}$, o, $\{a\} = \{c, d\}$; en uno u otro caso, $c \in \{a\}$; luego, $c = a$.

Con $c = a$ tenemos: $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$ de modo que, utilizando el (a), se ve que $\{a, b\} = \{a, d\}$, y, mediante una nueva utilización de (a), concluimos que $b = d$.

7.11 K podría ser el $\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, E\}, \{E, A\}\}$. Entonces, S podría ser $\{\{A, C\}, \{B, D\}, \{C, E\}, \{D, A\}, \{E, B\}\}$ y tres personas podrían no conocerse mutuamente pero no ser totalmente extrañas entre sí.

Esta situación se ilustra mediante el gráfico siguiente en el cual las parejas que pertenecen a K se unen mediante un trazo lleno y las pertenecientes a S mediante líneas de puntos:



Obsérvese que A, B, C, D y E están "sentadas" de modo que las vecinas inmediatas de cada una son conocidas suyas, en cambio las dos personas opuestas a ella les son extrañas.

8.1

(a) $x \in A \cup A$ si y sólo si $x \in A$, o, $x \in A$,	Definición de $\cup$
si y sólo si $x \in A$	Lógica
Luego, $A \cup A = A$,	Axioma de extensión
(b) $x \in A \cap A$ si y sólo si $x \in A$, y, $x \in A$,	Definición de $\cap$
si y sólo si $x \in A$	Lógica
Luego, $A \cap A = A$	Axioma de extensión
(c) $x \in A \cap B$ si y sólo si $x \in A$, y, $x \in B$	Definición de $\cap$
si y sólo si $x \in B$, y, $x \in A$	Lógica
si y sólo si $x \in B \cap A$	Definición de $\cap$
Luego, $A \cap B = B \cap A$	Axioma de extensión

8.3 (a) Se nos pide demostrar que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

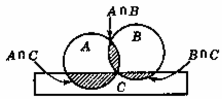
$x \in A \cap (B \cap C)$

si y sólo si $x \in A$, y, $x \in B \cap C$
si y sólo si $x \in A$, y, $x \in B$, y, $x \in C$
si y sólo si $x \in A \cap B$, y, $x \in C$
si y sólo si $x \in (A \cap B) \cap C$

en virtud de la definición de $\cap$.

(b) Ejemplo 1: Sea $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, y, $C = \{c, a\}$. Entonces, $A \cap B = \{b\} \neq \varnothing$, $B \cap C = \{c\} \neq \varnothing$, y, $C \cap A = \{a\} \neq \varnothing$ pero, $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Ejemplo 2:



8.5 (a) (i) Sea $A \sim B = \varnothing$. Si $x \in A$ pero $x \notin B$, entonces $x \in A \sim B$, en virtud de la definición de $A \sim B$. Pero, $A \sim B = \varnothing$ y en consecuencia, $x \in A$ implica $x \in B$; $A \subset B$.

(ii) Sea: $A \subset B$. Entonces, $x \in A$ implica $x \in B$. En consecuencia, $A \sim B = \varnothing$, en virtud de la definición de $A \sim B$.

(b) $x \in A \cap (B \sim C)$ si y sólo si	
$x \in A$, y, $x \in B \sim C$	Definición de $\cap$
si y sólo si $x \in A$, y, ($x \in B$, y, $x \notin C$)	Definición de $\sim$
si y sólo si ($x \in A$, y, $x \in B$), y, $x \notin C$	Lógica
si y sólo si $x \in A \cap B$ y $x \notin C$	Definición de $\cap$
si y sólo si $x \in (A \cap B) \sim C$	Definición de $\sim$
Luego: $A \cap (B \sim C) = (A \cap B) \sim C$	Axioma de extensión

8.7 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ si y sólo si	
$x \in A \cup B$, y, $x \in A \cup C$	Definición de $\cap$
si y sólo si ($x \in A$, o, $x \in B$) y ($x \in A$, o, $x \in C$)	Definición de $\cup$
si y sólo si $x \in A$, o, ($x \in B$ y $x \in C$)	Lógica
si y sólo si $x \in A$, o, $x \in B \cap C$	Definición de $\cap$
si y sólo si $x \in A \cup (B \cap C)$	Definición de $\cup$
Luego: $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.	Axioma de extensión

8.9. (a) $A \cap W \cap P \neq \varnothing$
(b) $A \cap F = \varnothing$
(c) $V \cap W \cap C \subset T$
(d) $F \cap M \subset C \cap T \cap W$
(e) $(A \cap M \cap C \cap T) \sim W \neq \varnothing$
(f) $(F \cap M \cap W) \sim (C \cup T) \neq \varnothing$
(g) $P \cap (C \cup T) = \varnothing$
(h) $F \cap (P \cup M) \neq \varnothing$
(i) $C \subset T \cup W$

8.11 Traduciendo a símbolos (1), (2), (3), (4) y (5), tendremos en su orden: $(1)'\ U \sim c = h$, $(2)'\ e \cap a = \varnothing$, $(3)'\ b \cap d = \varnothing$, $(4)'\ h \subset a$, $(5)'\ c \subset d$.

En virtud de $(1)'$ tenemos que $c \cup h = U$. En virtud de $(3)'$ y $(5)'$ tenemos que $b \cap c = \varnothing$. En consecuencia, $(b \cap c) \cup h = h$, de modo que $(b \cup h) \cap (c \cup h) = (b \cup h) \cap U = h$. En consecuencia, $b \cup h = h$, de manera que $b \subset h$. De acuerdo con $(2)'$ y $(4)'$, tendremos que $e \cap h = \varnothing$. En consecuencia, $e \cap b = \varnothing$. Concluimos, pues, que *estos sorites no son fáciles*.

9.1. (a) $3 < 4$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$; $-1 > -2$;
$0 < 1$; $0 > -1$.

(b) $x - 1 > x - 3$; $x + 2 < x + 6$;
$2x + 2 = 2(x + 1)$.

9.3 (a) No. Por ejemplo, $-3 < -2$, pero $-3 > -4$. Si $0 < b$, entonces sí se deduce el resultado, pues tenemos que $0 + a < b + b$, de acuerdo con el teorema 9.6.

(b) Sí. Puesto que 2 es positivo, el resultado es verdadero en virtud del teorema 9.8.

(c) Sí. Puesto que $a - 3 = a + (-3)$ y $b - 3 = b + (-3)$, entonces el resultado es verdadero en virtud del teorema 9.6.

(d) Sí. Comoquiera que $2 < 3$, entonces el resultado es una consecuencia del teorema 9.6.

9.5
$$\begin{aligned}\{x: -x < 0\} &= \{x: 0 - (-x) \in P\}\\ &= \{x: x \in P\} = P;\\ \{x: 0 < -x\} &= \{x: -x - 0 \in P\}\\ &= \{x: -x \in P\} = Q.\end{aligned}$$

9.7 $\dfrac{47}{49} > \dfrac{41}{43}$.

Demostración.

$$47 \cdot 43 = 2021 > 2009 = 41.49$$
$$47 \cdot 43\left(\frac{1}{49 \cdot 43}\right) > 41 \cdot 49\left(\frac{1}{49 \cdot 43}\right) \text{ Teorema 9.8}$$
$$\frac{47}{49} > \frac{41}{43}$$

9.9 $\{x: 1/x < 1\} = \{x: x < 0 \text{ o } x > 1\}$.

Demostración: Ciertamente, $x \neq 0$. Si $x < 0$, entonces $1/x < 0$ porque si $1/x > 0$, entonces $x\,(1/x)$ es negativo, de acuerdo con el teorema 9.3; pero $x(1/x) = 1$ es positivo, en virtud del teorema 9.2. Puesto que $1/x < 0$, y $0 < 1$, entonces tenemos que $1/x < 1$, de acuerdo con la transitividad.

Supongamos ahora que $x > 1$. En este caso, x es positivo al igual que $1/x$ (de no ser así, $x\,(1/x) = 1$, es negativo, de acuerdo con el teorema 9.3). Luego, podemos multiplicar ambos miembros de $x > 1$ por $1/x$ para obtener $1 > 1/x$. Además, si $0 < x < 1$, entonces $1/x$ es positivo, de modo que podemos multiplicar ambos miembros de $x < 1$ por $1/x$ para $1 < 1/x$. Por último, si $x = 1$, entonces $1/x = 1$.

9.11 Puesto que $a \neq b$, sabemos que $a - b \neq 0$, luego $(a - b)^2 \in p$ de acuerdo con el problema 9.10. Es decir, $a^2 - 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) - (2ab) > 0$ y, en consecuencia, $a^2 + b^2 > 2ab$.

9.13 Si $a < b$, entonces $a + a < b + a$, de modo que $2a < b + a$, y, $a < (b + a)/2$. Igualmente, $a + b < b + b$, de modo que $a + b < 2b$, y, $(b + a)/2 < b$. De suerte que si hacemos $c = (a + b)/2$, tendremos que $a < c < b$.

9.15 (a) Supongamos que $b < a$ y $a < 0$. Entonces, $b < 0$ en virtud de la transitividad y, de acuerdo con el teorema 9.8, será $ab > a^2$ y $b^2 > ab$. En consecuencia, $a^2 < b^2$ en virtud de la transitividad.

(b) Supongamos que $0 < a$, y, $a < b$. Entonces, $0 < b$ de acuerdo con la transitividad, y, en virtud del teorema 9.8, será. $a^2 < ab$, y, $ab < b^2$. Luego, $a^2 < b^2$, de acuerdo con la transitividad.

(c) $a = -2 < 0 < 1 = b$; pero, $b^2 = 1^2 < (-2)^2 = 4 = a^2$.

10.1 $B = C$, y, $A = D$ son las únicas igualdades posibles. Observación: ¡$0 < 1$ es verdadero para cualquier número x! Tanto A como D describen el conjunto de todos los números.

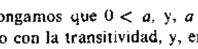
10.3 (a) $\{x: -1 < x\}$; (b) $\{x: x < 1\}$.

10.5 $\{x: -1 < x < 0 \text{ ó } 2 < x < 3\}$.

10.7 No existe un número minimal en el $\{x: 0 < x\}$ porque si $y \in \{x: 0 < x\}$, entonces $y/2 < y$ y $y/2 \in \{x: 0 < x\}$.

10.9 1 es el único número que no pertenece al $\{x: 1 < x\} \cup \{x: x < 1\}$ porque $1 \not< 1$, pero, si $x \neq 1$, entonces $x < 1$ ó $1 < x$.

10.11

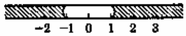
$\{x: 0 < x < 3\}$ 

10.13 $\{y: y > 1\} \cap \{x: 1 > x\}$. Dibujo:

(¡Este está dibujado tan cuidadosamente como la figura 10.4!)

10.15 Puesto que $x^2 > 0$, tenemos que

$$1 < x^2, \ (x-1)(x+1) > 0.$$

$\{x: 0 < \frac{1}{x^2} < 1\}$ 

10.17 (Véase el problema 9.11)

$\{x: x^2+1 > 2x\}$ 

10.19 $t(t+2)(t-1) < 0$. Luego,

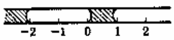
I II

$$\left.\begin{array}{l} t<0 \\ t+2>0 \\ t-1>0 \end{array}\right\} \text{ o } \left\{\begin{array}{l} t<0 \\ t>-2 \\ t>1 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} t>0 \\ t+2<0 \\ t-1>0 \end{array}\right\} \text{ o } \left\{\begin{array}{l} t>0 \\ t<-2 \\ t>1 \end{array}\right.$$

III IV

$$\left.\begin{array}{l} t>0 \\ t+2>0 \\ t-1<0 \end{array}\right\} \text{ o } \left\{\begin{array}{l} t>0 \\ t>-2 \\ t<1 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} t<0 \\ t+2<0 \\ t-1<0 \end{array}\right\} \text{ o } \left\{\begin{array}{l} t<0 \\ t<-2 \\ t<1. \end{array}\right.$$

I y II son imposibles; de III resulta: $0 < t < 1$; de IV resulta: $t < -2$. De esta suerte, $\{t: t(t+2)(t-1) < 0\} = \{t: 0 < t < 1 \text{ o } t < -2\}$.



11.1 (a) Es inductivo. 1 es un número positivo, y, si x es un número positivo, entonces $x+1$ también lo será.

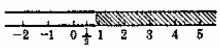
(b) No es inductivo. 1 no es un entero múltiplo de 3.

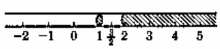
(c) No es inductivo. 4 pertenece al conjunto, pero $4+1=5$, no.

(d) No es inductivo. 1 pertenece al conjunto, pero $1+1=2$, no.

(e) No es inductivo. -2 pertenece al conjunto, pero $-2+1=-1$, no.

11.3.

$\frac{1}{2} \notin$ 

$\frac{3}{2} \notin$ 

11.5 $A = \{x: x = 3n$, o, $x = 3n+1$, o, $x = 3n+2$, donde n es un número natural, o, $n = 0\}$. En primer lugar, $1 \in A$, pues $1 = 3 \cdot 0 + 1$. Ahora bien: debemos demostrar que $x \in A$ implica que $x+1 \in A$. Pero, si $x \in A$, $x+1 = 3n+1$, $x+1 = (3n+1)+1 = 3n+2$, o $x+1 = (3n+2)+1 = 3n+3 = 3(n+1)$. Si $x+1 = 3n+1$, o, $x+1 = 3n+2$, entonces $x+1 \in A$, porque n es un número natural o es 0. Si $x+1 = 3(n+1)$, entonces, haciendo $m = n+1$, tenemos que $x+1 = 3m$; ahora, bien: m es un número natural puesto que n es un número natural o es 0, de suerte que $x+1 \in A$.

11.7 Sea $S = \{n: n$ es un número natural y $\frac{n(n+1)}{2}$ es también un número natural$\}$. En primer lugar, $1 \in S$ porque 1 es un número natural y, además, $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ es también natural. Ahora supongamos que $m \in S$. En este caso, m es un número natural y $\frac{m(m+1)}{2}$ es también natural, y, de esta suerte, $m+1$ y $\frac{m(m+1)}{2} + m + 1$ son también números naturales.

Pero, $\frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{(m+1)(m+1+1)}{2}$.

Luego $m+1 \in S$. Hemos demostrado que $1 \in S$ y que, si $m \in S$, entonces también $m+1 \in S$. En consecuencia, S es un conjunto inductivo.

11.9 (a) Para demostrar que $a^{n+2} = a^n \cdot a^2$ para todo número natural n, tenemos: $a^{n+2} = a^{(n+1)+1}$ y, puesto que $n+1$ es un número natural si lo es n, y puesto que suponemos que $a^{n+1} = a \cdot a^n$ para todo n natural, tendremos: $a^{(n+1)+1} = a \cdot a^{n+1}$. Además, $a \cdot a^{n+1} = a(a \cdot a^n)$ en virtud de nuestra hipótesis. Así pues:

$$a^{n+2} = a \cdot a \cdot a^n = a^2 \cdot a^n.$$

(b) Supongamos ahora que $A = \{m: m$ es un número natural y $a^{2m} > 0\}$. $1 \in A$ puesto que 1 es un número natural y $a^{2\cdot 1} = a^2 > 0$ porque $a \neq 0$. Supongamos ahora que $n \in A$. En este caso, $n+1$ es un número natural y $a^{2(n+1)} = a^{2n+2}$. Observemos que $2n = n+n$ es número natural, de acuerdo con el teorema 11.6, de modo que podemos usar la parte (a) para escribir $a^{2n+2} = a^{2n} \cdot a^2$. Ahora bien: sabemos que $a^{2n} > 0$ puesto que $n \in A$, y $a^2 > 0$ pues $a \neq 0$, de modo que $a^{2n} \cdot a^2 > 0$. Ahora, podemos concluir que $n+1 \in A$ siempre que $n \in A$, de manera que A *es un conjunto inductivo.*

En consecuencia, para todo número natural p, $p \in A$, de suerte que $a^{2p} > 0$.

11.11 Suponiendo que hubiera un número natural x tal que $1 < x < 2$, entonces $x - 1$ podría ser un número natural de acuerdo con el problema 11.10. Pero, $x < 2$, de modo que $x - 1 < 1$, lo cual contradice el teorema 11.5. En consecuencia, no existe número natural entre 1 y 2. Esto demuestra que $1 \in B$, basándose siempre en el hecho de que 1 es un número natural.

Supongamos ahora que $n \in B$. Puesto que n es natural, $n+1$ también lo es (teorema 11.4). Deberemos demostrar que no existe número natural entre $n+1$ y $(n+1)+1$. Para ello, supongamos que exista un número natural x tal que $n+1 < x < n+2$. Entonces, $x - 1$ es un número natural, en virtud del teorema 11.10. Pero, entonces, $n < x - 1 < n+1$, lo cual es imposible porque no existe ningún número natural entre n y $n+1$. Este hecho establece que $n+1 \in B$ si $n \in B$.

De esta suerte, B es un conjunto inductivo y por ello pertenece a él cualquier número natural. En consecuencia, todo número natural n tiene la propiedad de que no existen números naturales entre n y $n + 1$.

11.13 Sea $A = \{ m : m$ es un número natural y si n es natural, también lo es $m \cdot n \}$.

$1 \in A$, puesto que $1 \cdot n = n$ es un número natural si lo es n (también, porque 1 es un número natural).

Supongamos que $m \in A$. Es claro que $m + 1$ es un número natural, si n es un número natural, entonces $(m + 1) \cdot n = m \cdot n + n$. Ahora, bien: $m \cdot n$ es un número natural, porque $m \in A$; además, n es natural; de modo que la suma de ambos es un número natural (teorema 11.6). Luego, $m + 1 \in A$.

Así, pues, A es inductivo, lo cual permite establecer el teorema: $x \cdot y$ es un número natural si x y y lo son.

11.15 Puesto que A es no vacío, deberá existir algún número natural, llamémoslo a, que pertenezca a A. Ahora, bien: $a \notin B$ porque si $a \in B$ entonces $a < n$ para cada elemento n de A; en particular, $a < a$, lo cual es imposible. Luego, existe un número natural que no pertenece a B, de suerte que B no puede ser inductivo de acuerdo con la definición de número natural.

Con base en la definición de inductivo, o $1 \notin B$ o existe un número x tal que $x \in B$, pero $x + 1 \notin B$.

Si $1 \notin B$, entonces, $1 \in A$ porque, si $1 \notin A$, entonces $1 < n$ para cualquier elemento n de A, de modo que $1 \in B$. Pero, si $1 \in A$, entonces 1 es el menor elemento de A porque $1 \leq n$ para cualquier númerp n natural.

Si $1 \in B$, entonces B debe dejar de ser inductivo, pues tendría un elemento x tal que $x \in B$, pero $x + 1 \notin B$. x es un número natural porque B sólo tiene números naturales, de tal suerte que $x + 1$ es, también un número natural. Para cualquier $n \in A$, si $x + 1 > n$, entonces, puesto que $x \in B$, estaría n entre x y $x + 1$, lo cual es imposible de acuerdo con el problema 11.11. Luego, $x + 1 \leqq n$ para cualquier $n \in A$. Pero, si $x + 1 < n$ para todo $n \in A$, entonces $x + 1 \in B$, de acuerdo con la definición de B. De manera que $x + 1 = n$ para algún $n \in A$, es decir, $x + 1 \in A$. De hecho, $x + 1$ es el menor elemento de A porque $x + 1 \leq n$ para todo $n \in A$.

12.1 Supongamos que existe un número natural n, diferente de 1 cuyo recíproco sea otro número natural. De acuerdo con el teorema 11.5, $n > 1$, y, $n^{-1} > 1$. Puesto que $n^{-1} > 0$, podemos multiplicar la desigualdad, $n > 1$, por n^{-1}, de modo que $n \cdot n^{-1} > n^{-1}$; esto es, $1 > n^{-1}$, lo cual contradice el teorema 11.5. Así, pues, nuestra suposición es falsa y, en consecuencia, 1 es el único número natural cuyo recíproco es un número natural.

12.3 Si b no es un número entero y m es entero, entonces $m + b$ es un número no entero.
Demostración: Supongamos que $m + b$ sea entero. Puesto que m es entero, también lo es $-m$ (teorema 12.6). Puesto que $m + b$ y $-m$ son enteros, también lo será $m + b + (-m)$ (teorema 12.5). Luego, b es entero, contra la hipótesis.

12.5 Si x es entero, entonces $x = m - n$ para algunos números naturales m y n. Así que $-x = -(m - n) = n - m$; luego, $-x$ es un número entero.

12.7 Sea x un número entero cuyo recíproco es otro entero. Entonces, $x = 0$, o, x es un número natural, o lo es $-x$.

Si $x = 0$, entonces x no tiene recíproco.

Si x es un número natural, entonces x es positivo y x^{-1} también lo es.

Pero, un entero positivo es un número natural, de modo que x^{-1} es un número natural. Así, pues, x es un número natural cuyo recíproco es otro natural; luego $x = 1$, según el teorema 12.1.

Si $-x$ es un número natural, entonces también lo es $(-x)^{-1}$, como se demostró anteriormente. Luego, $-x = 1$, y $x = -1$.

12.9 Sean $x = \dfrac{a}{b}$, y, $y = \dfrac{c}{d}$ números racionales, en los que a, b, c, d son enteros y $b \neq 0$ y $d \neq 0$. Entonces $xy = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$. Ahora, bien: ac y bd son enteros, con $bd \neq 0$, de modo que $\dfrac{ac}{bd}$ es un número racional.

12.11 Supongamos que exista un número racional x cuyo cuadrado sea 3. Entonces $x = a/b$ para algunos a y b, enteros, y $b \neq 0$. De hecho, suponemos que x, a, b son positivos y a es tan pequeño como sea posible (para la validez de esta hipótesis, véase la demostración del teorema 12.12). Ahora, bien: $x^2 = (a/b)^2 = 3$, de modo que $a^2 = 3b^2$. En virtud del problema 11.5, $a = 3m$, o $3m + 1$, ó $3m + 2$ para algún número natural m. Si a no es múltiplo de 3 tampoco lo será a^2, pues $(3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1$ y, $(3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$. Luego, si a^2 es múltiplo de 3, entonces también lo es a. De esta suerte, $a = 3m$ para todo número natural m. Ahora, bien: $a^2 = (3m)^2 = 9m^2 = 3b^2$, de modo que $3m^2 = b^2$. Puesto que b^2 es un múltiplo de 3, también lo será b, por ejemplo, $b = 3n$. Entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3m}{3n} = \dfrac{m}{n}$ de modo que a no es, como se supuso, el más pequeño posible. Esta contradicción significa que nuestra suposición inicial es falsa; no existe, pues, un número racional cuyo cuadrado sea 3.

12.13 A1-A5 se cumplen; M1-M4 se cumplen. Observación: 0 es la identidad aditiva y 1 la identidad multiplicativa.

M5 no se satisface porque no existe ningún polinomio tal que, al ser multiplicado por x, dé 1. Así, pues, x no tiene inverso multiplicativo.

AM y D se cumplen.

Sea un polinomio que pertenece a P_A si su término principal tiene coeficiente positivo, v.g., $x \in P_A$, $x^2 - 2x \in P_A$, $12 \in P_A$. Es claro que se satisface la tricotomía porque un polinomio o es 0, o su término principal tiene coeficiente positivo, o su opuesto tiene el término principal con coeficiente positivo. Además, la suma y el producto de dos polinomios "positivos" son positivos.

13.1 Escoja n tal que $n > b/a$, utilizando el teorema 13.2. Puesto que $a > 0$, $na > b$.

13.3 Sabemos que el conjunto de los números racionales es cerrado respecto de la multiplicación. Supongamos que $\sqrt{8} = r$, siendo r un número racional. Entonces, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = r$, de modo que $\sqrt{2} = r/2$ siendo $r/2$ un número racional. Así, pues, comoquiera que $\sqrt{2}$ es irracional, también lo es $\sqrt{8}$.

13.5 Si rq fuere racional y $r \neq 0$, entonces, $rq/r = q$ sería también un número racional.

13.7 $\sqrt{2}$ es un número irracional y, según el problema 13.5, $2\sqrt{2}$ también lo es. Sin embargo, su producto $\sqrt{2}\,(2\sqrt{2}) = 4$ es racional.

13.9

	Cotas inferiores	*Cotas superiores*
$\{x\colon 0 < x \leq 1\}$	$-3, -100, 0$	$1, 12, 356$
$\{n\colon n$ es un número natural$\}$	$-7, 0, 1$	no existe
$\{x\colon 1 < x < 2,$ o, $x < 0\}$	no existe	$16, 2, 144$
$\varnothing$	$-17, 201, 3$	$2, 1, -17$
$\{a\colon a$ es entero$\}$	no existe	no existe

13.11 Es claro que cualquier número es o no una cota superior de A, de esta suerte, $R \cup L$ es el conjunto completo de los números reales. R no es vacío pues A posee, al menos, una cota superior. Puesto que A no es vacío debe tener un elemento a. El número $a - 1$ no es cota superior de A ya que es inferior al menos a un elemento a de A. Luego, L no es vacío. Además, si $c \in L$ y $b \in R$, entonces $c < a$ para algún a perteneciente a A, mientras que $b \geq a$; de donde, $c < b$. De esta suerte, todo elemento de L es menor que todo elemento de R.

Comoquiera que se satisfacen todas las hipótesis del axioma de continuidad, debe existir un elemento maximal en L o un elemento minimal en R.

Si L tuviera un elemento maximal, l, entonces sería $l < a$ para algún $a \in A$ pues l no es cota superior de A.

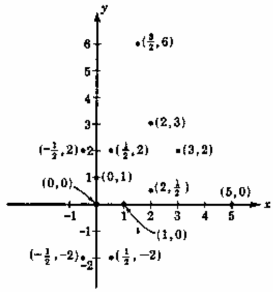
Pero, $l < (l + a)/2 < a$, de modo que $(l + a)/2$ no es cota superior de A; luego, $(l + a)/2 \in L$, y $(l + a)/2$ es mayor que l. En consecuencia, L no puede poseer un elemento maximal; y, por tanto, R debe poseer un elemento minimal.

13.13 (a) Sumando $n - 1 \leq a$
y $1 < b - a$,
obtenemos $(n - 1) + 1 < a + (b - a)$
es decir, $n < b$

(b) Si $a > 0$, y, $b > 0$, entonces c es el menor número natural que es mayor que a (de acuerdo con la parte (a)).
Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces supongamos $c = 0$.
Si $a = 0$ y $b > 0$, supongamos $c = 1$. Puesto que $b - a > 1$ tenemos $b > 1$, de modo que $a = 0 < 1 < b$.
Si $a < 0$ y $b = 0$, hagamos $c = -1$.
Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $-a > 0$, y, $-b > 0$, y $(-a) - (-b) > 1$. Según la parte (a), existe un número natural n tal que $-b < n < -a$. Supongamos $c = -n$. Entonces, $a < c < b$.
En esta forma se agotan los casos posibles pues $b - a > 1 > 0$, de suerte que $a = b = 0$ es imposible al igual que $a > 0 > b$.

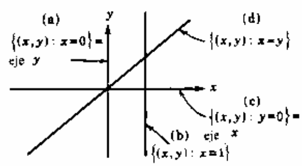
(c) Sea q un entero tal que $pa < q < bp$ (según la parte (b)). Podemos multiplicar por $1/p$ porque $1/p > 0$ y obtenemos $a < q/p < b$. Luego, q/p es el número racional que buscábamos.

14.1

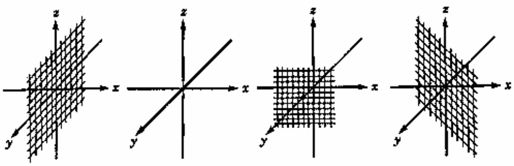


14.3 $(x + y, z, x + z) = (6 \quad z, 5 \quad y, z + y)$ si y sólo si $x + y = 6 - z$, $z = 5 - y$, y $x + z = z + y$. Por tanto $x = y$, $x + y = 6 - z = 6 - (5 - y) = 1 + y$, $x = 1$. Así $x = y = 1$ y $z = 4$.

14.5



14.7 (a) $\{(x, y, z) : x = 0\}$ es el plano y-z.
(b) $\{(x, y, z) \colon x = 0,$ y $z = 0\}$ es el eje y.
(c) $\{(x, y, z) \colon y = 1\}$ es el plano paralelo al plano x-z que corta el eje y en $(0, 1, 0)$.
(d) $\{(x, y, z) \colon x = y\}$ es el plano que contiene al eje z y al punto $(1, 1, 0)$.



(a) (b) (c) (d)

14.9 Si $a \neq c$ entonces

$$\frac{b-d}{a-c} = \left(\frac{-1}{-1}\right)\left(\frac{d-b}{c-a}\right) = \frac{d-b}{c-a}.$$

Si $a = c$, $a - c = c - a = 0$ y como 0 no tiene recíproco, $(b-d)/(a-c)$ y $(d-b)/(c-a)$ no están definidos. Una recta tal es vertical, a menos que hagamos $b = d$, caso en el cual la recta simplemente no está definida.

14.11 Se puede evaluar fácilmente un infinito número de soluciones tales como $\{(x, y): x = \frac{1}{2}\}$. Ejemplos más interesantes son los del tipo $\{(x, y): 4x + 6y = 1\}$. (Para todos los enteros x y y, el miembro de la izquierda es un número par, por lo cual no es igual a 1.)

14.13 Supongamos que el juego corresponde al jugador que lo pierde. Tenemos así una correspondencia unívoca entre juegos y perdedores (en eliminación sencilla un jugador es eliminado en cuanto pierde un juego). El torneo tiene un ganador; entonces $1729 - 1 = 1728$ perdedores, y, con esto 1728 juegos.

14.15 Una manera de contar el número de ternas ordenadas de dígitos consiste en pensar en los retículos de puntos que tienen como coordenadas números dígitos en el espacio tridimensional. Esto conforma un cubo con 10 puntos sobre cada arista. Por tanto, hay $10^3 = 1000$ de ellos.

Otra manera es hacer la correspondencia 1-1 entre las ternas ordenadas de dígitos y los números desde 0 a 999.

$$\begin{array}{c} (0,0,0) \leftrightarrow 0 \\ (0,0,1) \leftrightarrow 1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ (9,9,9) \leftrightarrow 999 \end{array}$$

14.17 Con base en esta definición podríamos tener $(2, 3, 1) = \{\{2, 1\}, \{3, 2\}, \{1, 3\}\}$ y $(3, 1, 2) = \{\{3, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ de manera que $(2, 3, 1) = (3, 1, 2)$. Este es, claramente, un estado de cosas no deseable.

15.1 (a) Cierto
(b) Cierto
(c) Cierto
(d) No es cierto. $(0, 1)$ y $(0, 3)$ pertenecen ambos al conjunto, pero $1 \neq 3$. También $(1, 0)$ y $(1, 2)$ pertenecen al conjunto, pero $0 \neq 2$.

15.3 (a) Cierto
(b) No es cierto. $(1, 1)$ y $(1, -1)$ ambos pertenecen, pero $1 \neq -1$.
(c) No es cierto. $(0, 1)$ y $(0, -1)$ pertenecen ambos, pero $1 \neq -1$.

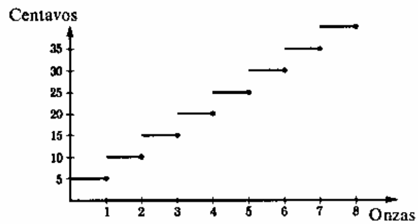
15.5 $f(0) = 0 + 1 = 1$; $f(1) = 1 + 1 = 2$; $f(-1) = -1 + 1 = 0$; $f(2) = 2 + 1 = 3$; $f(3) = 3 + 1 = 4$; $f(4) = 4 + 1 = 5$; $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 1$.

15.7 $f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$; $f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$; $f(-1) = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$; $f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$; $f(-2) = 3 \cdot (-2) + 2 = -4$; $f(-2/3) = 3(-2/3) + 2 = 0$.

15.9 (a) $f(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$
(b) $f\left(\dfrac{y+2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\dfrac{y+2}{3}\right) - 2 = y$
(c) $f(3z - 2) = 3(3z - 2) - 2 = 9z - 8$.

15.11 (a) El dominio de f es $\{a\}$ y el codominio de f es $\{1\}$.
(b) El dominio de g es $\{1, 2, 3\}$ y el codominio de g es $\{2, 3, 4\}$.
(c) El dominio de h es $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y el codominio de h es $\{a, b, c, d, e\}$.

15.13



15.15 $g(f(1)) = g(0) = 1$; $g(f(-1)) = g(2) = 5$; $f(g(0)) = f(1) = 0$; $f(g(1)) = f(2) = \frac{1}{2}$; $f(g(-1)) = f(2) = \frac{1}{2}$; $f(g(2)) = f(5) = \frac{4}{5}$. $f(g(u))$ está definido para todo u porque $g(u)$ nunca es 0.

15.17 Para probar que h es función debemos demostrar que, para todo $x \in C$, $h(x)$ está unívocamente determinada. Si $x \in C$, entonces $g(x)$ está unívocamente determinada, ya que g es una función con dominio D, y $g(x) \in A$ porque $D \subset A$. Entonces $f(g(x))$ está unívocamente determinada porque f es una función con dominio A. Así, $h(x) = f(g(x))$ está unívocamente determinada.

15.19 Sea $f(x) = x$. Si $u < v$, entonces $f(u) = u < v = f(v)$.

15.21 Sea $h(x) = \dfrac{1}{x}$ (para $x > 0$). Si $0 < u < v$, entonces $0 < \dfrac{1}{v} < \dfrac{1}{u}$ ya que $g(u) > g(v) > 0$.

15.23 (a) $G = \{f_n$: para algún número natural n, $f_n = \{(x, y): y = x + n\}\}$.
(b) $H = \{f_n$: para algún número natural n, $f_n = \{(x, y): y = x^{2n}\}\}$.

15.25 Si $u \in A$ y $v \in A$, entonces $f(u) \in B$ y $f(v) \in B$. Como $(u, f(u)) \in f$ y $(v, f(v)) \in f$, tenemos $(f(u), u) \in \{(x, y) : (y, x) \in f\}$ y $(f(v), v) \in \{(x, y) : (y, x) \in f\}$. Esto muestra que $\{(x, y) : (y, x) \in f\}$ es una función y que $f(u) = f(v)$, concluimos que $u = v$.

15.27 A1: Si $f \in F$ y $g \in F$, entonces f y g son funciones, por lo cual para todo $x \in [0 : 1]$, $f(x)$ y $g(x)$ están unívocamente determinadas y por tanto $f(x) + g(x) = (f \oplus g)(x)$ está unívocamente determinada. Entonces $f \oplus g \in F$.

A2: Supóngase que $f \in F$ y $g \in F$. Entonces

$$\begin{aligned} f \oplus g &= \{(x, y)\colon x \in [0\colon 1] \text{ y } y = f(x) + g(x)\} \\ &= \{(x, y)\colon x \in [0\colon 1] \text{ y } y = g(x) + f(x)\} = g \oplus f. \end{aligned}$$

A3: Supóngase $f \in F$, $g \in F$, y $h \in F$. Entonces

$$\begin{aligned} (f \oplus g) \oplus h &= \{(x, y)\colon x \in [0\colon 1] \text{ y } y = [f(x) + g(x)] + h(x)\} \\ &= \{(x, y)\colon x \in [0,\colon 1] \text{ y } y = f(x) + [g(x) + h(x)]\} = f \oplus (g \oplus h). \end{aligned}$$

A4: Sea $Q = \{(x, y) : x \in [0 : 1]$ y $y = 0\}$. Entonces $Q \in F$ y si $f \in F, f \oplus Q = f$.

A5: Dado $f \in F$, sea $\ominus f = \{(x, y) : x \in [0, 1]$ y $y = -f(x)\}$, entonces $f \oplus (\ominus f) = 0$.

Comentario: Obsérvese cómo las propiedades de los números reales dan la razón para establecer aquí las propiedades correspondientes.

15.29 Sean a y b números. Para todo número x, $(M_a \otimes M_b)(x) = M_a(M_b(x)) = M_a(bx) = a(bx) = (ab)x = M_{ab}(x)$. Por tanto, $M_a \otimes M_b = M_{ab}$.

M_1: La ley clausurativa es inmediata
M_2: $M_a \otimes M_b = M_{ab} = M_{ba} = M_b \otimes M_a$
M_3: $(M_a \otimes M_b) \otimes M_c = M_{(ab)c} = M_{a(bc)} = M_a \otimes (M_b \otimes M_c)$
M_4: $M_a \otimes M_1 = M_{a \cdot 1} = M_a$
M_5: $M_a \otimes M_{a^{-1}} = M_{a \cdot a^{-1}} = M_1$

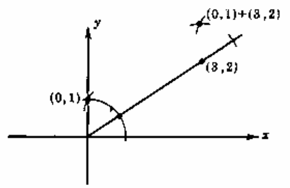
(Recuerde que M_a está definida sólo para $a \neq 0$, de modo que a^{-1} existe.)

16.1 (a) $(1, 1) + (3, 3) = (4, 4)$
(b) $(0, 1) + (1, 0) + (3, 5) = (4, 6)$
(c) $(\sqrt{2}, \sqrt{3}) + (\sqrt{3}, \sqrt{2}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt{3})$
(d) $(-3, 2) + (1, 0) + (1, 0) + (1, 0) - (0, 1) - (0, 1) = (0, 0)$
(e) $(-2, 6) + (3, -5) = (1, 1)$.

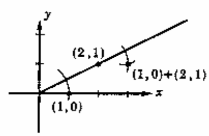
16.3 (a) $(a, 0) + (0, b) = (a, b)$
(b) $(a + 1, b - 1) + (a - 1, b + 1) = (2a, 2b)$
(c) $(x + y, x - y) + (-x, y) = (y, x)$.

16.5. $(-3, 3)$; $(0, -1)$; $(-2, -5)$; $(1, -1)$; $(3, 2)$; $(0, -1, 0)$; $(-1, -1, 1)$; $(-3, 4, 5)$; $(0, 0, 2)$; $(-3, -5, -7)$.

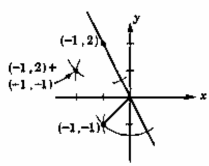
16.7 (a) $(0, 1) + (3, 2)$



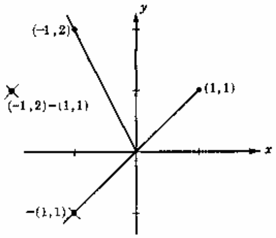
(b) $(1, 0) + (2, 1)$



(c) $(-1, 2) + (-1, -1)$



(d) $(-1, 2) - (1, 1)$



16.9 (a) $(5, 4) = (1, 0) + (1, 0) + (1, 0) + (1, 0) + (1, 0) + (0, 1) + (0, 1) + (0, 1) + (0, 1)$

(b) $(-3, 2) = (0, 1) + (0, 1) - (1, 0) - (1, 0) - (1, 0)$.

16.11 (a) $(3, -2, 1) = (1, 0, 0) + (1, 0, 0) + (1, 0, 0) - (0, 1, 0) - (0, 1, 0) + (0, 0, 1)$

(b) $(5, 2, -1) = (3, 2, 1) + (3, 2, 1) - (1, 2, 3)$.

16.13 La suma de cualquier número de vectores dados o de sus opuestos es evidentemente igual a un vector de la forma $(a, 0, c) \neq (3, 4, 5)$.

16.15 (a) Sea $X = (a, a)$, $Y = (b, b)$ y $Z = (c, d)$ con $c \neq d$.

(i) $X + Y = (a, a) + (b, b) = (a + b, a + b) \in$ diagonal

(ii) $X - Y = (a, a) - (b, b) = (a - b, a - b) \in$ diagonal

(iii) $X + Z = (a, a) + (c, d) = (a + c, a + d) \notin$ diagonal porque $a + c \neq a + d$ si $c \neq d$.

(b) $(1, 2) \notin$ diagonal, y $(2, 1) \notin$ diagonal, pero $(1, 2) + (2, 1) = (3, 3) \in$ diagonal.

16.17 Cámbiese el origen a $(3, 4)$. Según el teorema de Pitágoras, el origen está ahora a $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ unidades de donde estaba anteriormente.

17.1 $|-1| = 1$; $|\pi| = \pi$; $|5 - 7| = 2$;
$$\left|\frac{3 - 6}{2 - 1}\right| = 3.$$

17.3 (a) $|(1, 1, 1)| = \sqrt{3}$; (b) $|(1, 2, 2)| = 3$; (c) $|(1, 0, 0)| = 1$; (d) $|(0, 1, 0)| = 1$; (e) $|(0, 0, 1)| = 1$; (f) $|(1/2, 2/3, 3/5)| = \sqrt{949}/30$.

17.5 Suponiendo $a \geq 0$ y $b > 0$, tenemos $a/b \geq 0$, $1/b > 0$, y $\sqrt{a} =$ el número no negativo cuyo cuadrado es a, $1/\sqrt{b} =$ el número no negativo cuyo cuadrado es $1/b$, $\sqrt{a/b} =$ el número no negativo cuyo cuadrado es a/b. Pero $[\sqrt{a}(1/\sqrt{b})]^2 = (\sqrt{a})^2(1/\sqrt{b})^2 = a(1/b) = a/b$. De aquí, $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$.

17.7 Suponiendo $a \geq 0$ y $b \geq 0$ y $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, tenemos $(\sqrt{a + b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b = a + b$. Así $2\sqrt{ab} = 0$. Entonces $4ab = 0$ y por tanto $a = 0$ o $b = 0$.

17.9 Si $b \geq 0$, entonces $b = |b|$. Así tenemos que $b|x| = |b||x| = |bx|$.

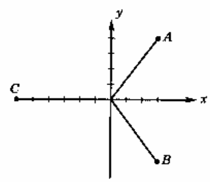
17.11 Unos pocos paréntesis nos pueden ayudar: Es cierto que
$$8 = |-3(|5 - 7|) - 2|$$
y que
$$(|-3|)5 - 7(|-2|) = 1$$
pero
$$|-3(|5 - 7|) - 2| \neq (|-3|)5 - 7(|-2|).$$

17.13 $x \neq 0$ y $|x| = x$ si y sólo si $x > 0$.

17.15 Si $a = 0$, o $b = 0$, tenemos $|a - b| = |a + b|$ inmediatamente. Si $|a - b| = |a + b|$, entonces $(a - b)^2 = (a + b)^2$ así que $a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Por tanto $4ab = 0$ así que $a = 0$ o $b = 0$.

17.17 Sabemos que $2ab \leq 2|ab|$ según los problemas 17.4(c) y 17.9. Por tanto, $a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2\sqrt{a^2b^2} + b^2$ ya que $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{(ab)^2} = |ab|$. Así, pues, $(a + b)^2 \leq (\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2})^2$. De donde se concluye que $|a + b| \leq |a| + |b|$.

17.19 El señor C debe situarse en $-(A + B) = (-6, 0)$.



17.21 Puesto que la caja se mueve hacia el oeste a razón de 1 m.p.h, necesitará 1 hora para atravesar el río de 1 milla de ancho. En 1 hora se mueve hacia el sur 2 millas, de modo que recorre $|(1, 2)|$ millas $= \sqrt{5}$ millas.

18.1 (a) $5(0, 1) + 3(1, 0) = (3, 5)$
(b) $e(0, 1) + \pi(1, 0) = (\pi, e)$
(c) $2(4, 8) + 4(8, 2) = (40, 24)$
(d) $3(2, 1) + 2(1, 3) + 1(3, 2) = (11, 11)$.

18.3 (a) $(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1) = (1, 3, 5)$
(b) $a(a, 0, 0) + b(0, b, 0) + c(0, 0, c) = (a^2, b^2, c^2)$
(c) $\pi(1, 2, 3) - 3(\pi/3, \pi/2, \pi) = (0, \pi/2, 0)$.

18.5 Si $x(1, 2, 0) + y(0, 3, 1) + z(-1, 0, 1) = (2, 1, 0)$, debemos tener $x - z = 2$, $2x + 3y = 1$, y $y + z = 0$. Esto requiere que $y = -z$, $x = 2 - y$, y $4 - 2y + 3y = 1$. Por tanto $y = -3$, $z = 3$, y $x = 5$.

18.7 $|-X| = |(-1)X| = |-1|\,|X| = |X|$

18.9 (a) $r(X - Y) = r[X + (-Y)] = rX + r(-Y) = rX + r[(-1)Y] = rX + [r(-1)]Y = rX + (-r)Y = rX + [-(rY)] = rX - rY$;
(b) $(r + s)(X + Y) = (r + s)X + (r + s)Y = rX + sX + rY + sY$;
(c) $(r - s)(X - Y) = (r - s)X - (r - s)Y$ por parte (a)
$= [r + (-s)]X - [r + (-s)]Y$
$= rX + (-s)X - [rY + (-s)Y]$
$= rX - sX + [(-1)[rY + (-s)Y]]$
$= rX - sX + [[(-1)r]Y + (-1)(-s)Y]$
$= rX - sX + [(-r)Y + sY]$
$= rX - sX + [-(rY) + sY]$
$= rX - sX + [-(rY)] + sY$
$= rX - sX - rY + sY$.

18.11 $T_A(X) + T_B(X) + T_C(X) = X + A + X + B + X + C = 3X$.
$T_A(T_B(T_C(X))) = T_A(T_B(X + C)) = T_A(X + C + B) = X + C + B + A = X + 0 = X$.

19.1 (a) $|(0, 1) - (1, 0)| = |(-1, 1)| = \sqrt{2}$
(b) $|(3, 0) - (0, 4)| = |(3, -4)| = 5$
(c) $|(5, 2) - (2, 6)| = |(3, -4)| = 5$.

19.3 $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| = |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Teorema. La distancia de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) es $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

Demostración

$$|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)|$$
$$= |(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)|$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

19.5 (a) En detalle:

$|rU - rV|$
$= |rU + (-rV)|$ Definición de $rU - rV$
$= |rU + ((r\cdot -1)V)|$ Teorema 18.4
$= |rU + (r(-1\cdot V))|$ Teorema 18.3: $(rs)X = r(sX)$
$= |r(U + (-1\cdot V))|$ Teorema 18.5
$= |r(U - 1\cdot V)|$ Definición de $U - 1\cdot V$
$= |r(U - V)|$ Teorema 18.2
$= |r|\,|U - V|$ Teorema 18.8

(b) $|U - V| = |-1|\,|U - V| = |(-1)(U - V)| = |V - U|$.

19.7 $|U| \leq |U - V| + |V|$ por el teorema 19.2 (haciendo $X = U - V$ y $Y = V$). Así, $|U| - |V| \leq |U - V|$.

19.9 (x, y) pertenece a la circunferencia si y sólo si la distancia de (x, y) a $(-1, 1)$ es 5.

$$|(x, y) - (-1, 1)| = |(x + 1, y - 1)| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} = 5.$$

Por tanto, la ecuación buscada es
$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$
(2,5) pertenece a esta circunferencia sólo si $x = 2$ y $y = 5$ satisface la ecuación dada,
$$(2 + 1)^2 + (5 - 1)^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$$
Por tanto, (2,5) pertenece a la circunferencia.

19.11 (x, y) equidista de $(-1, 2)$ y $(3, 6)$ si y sólo si $|(x, y) - (-1, 2)| = |(x, y) - (3, 6)|$... si y sólo si $|(x + 1, y - 2)| = |(x - 3, y - 6)|$... si y sólo si $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 6)^2$... si y sólo si $x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 6x + 9) = y^2 - 12y + 36 - (y^2 - 4y + 4)$... si y sólo si $y = 5 - x$.

19.13 $\{X: |X - (1, 3)| < 2\}$ es el interior del círculo de centro (1, 3) y radio 2.

19.15 (a) Supóngase $as - br = 0$ de modo que $as = br$. Si $a = b = 0$, entonces $X = 0 \cdot Y$.

Si $a \neq 0$, entonces $s = \dfrac{b}{a}r$, así

$$Y = \left(r, \frac{b}{a}r\right) = \frac{r}{a}(a, b) = \frac{r}{a}X.$$

Si $b \neq 0$, entonces $r = \dfrac{as}{b}$, así

$$Y = \left(\frac{as}{b}, s\right) = \frac{s}{b}(a, b) = \frac{s}{b}X.$$

(b) Supóngase que $|X + Y| = |X| + |Y|$.

Entonces
$(a + r)^2 + (b + s)^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{r^2 + s^2} + r^2 + s^2$ de modo que $ar + bs = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{r^2 + s^2}$. Así, $(ar + bs)^2 = (a^2 + b^2)(r^2 + s^2)$ de manera tal que $a^2r^2 + 2arbs + b^2s^2 = a^2r^2 + a^2s^2 + b^2r^2 + b^2s^2$. Así $a^2s^2 - 2arbs + b^2r^2 = 0$ y, desde luego, $(as - br)^2 = 0$. Entonces $as - br = 0$ y X es un múltiplo escalar de Y, o Y lo es de X.

20.1 (1) $(3, 3) = (0, 0) + t(1, 1) = (t, t)$ da $t = 3$ y $(3, 3) = (0, 0) + 3(1, 1)$; $(3, 3)$ está en la recta.

(2) $(-1, 1) = (t, t)$ da $t = -1$ y $t = 1$; $(-1, 1)$ no está en la recta.

(3) $(2,0) = (t, t)$ da $t = 2$ y $t = 0$; $(2, 0)$ no está en la recta.

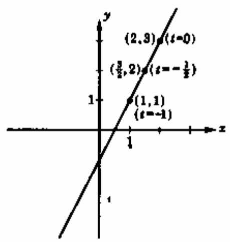
(4) $(-1, -1) = (t, t)$ da $t = -1$ y $(-1, -1) = (0, 0) + (-1)(1, 1)$; $(-1, -1)$ está en la recta.

20.3 (1) $(0, 0, 0) = (1, 1, 1) + t(-1, 2, 1) = (1 - t, 1 + 2t, 1 + t)$ da $t = 1$ y $t = -1$; $(0, 0, 0)$ no está en la recta.

(2) $(0, 3, 2) = (1 - t, 1 + 2t, 1 + t)$ da $t = 1$ y $(0, 3, 2) = (1, 1, 1) + 1(-1, 2, 1)$; $(0, 3, 2)$ está en la recta.

(3) $(2, -1, 0) = (1 - t, 1 + 2t, 1 + t)$ da $t = -1$ y $(2, -1, 0) = (1, 1, 1) + (-1)(-1, 2, 1)$; $(2, -1, 0)$ está en la recta.

20.5



20.7 La recta $\{(1, 1, 1) + t(1, 2, 3)$: t es escalar$\}$ tiene por ecuación $X(t) = (1, 1, 1) + t(1, 2, 3)$.

20.9 $\{(0, 1) + t(2, \pi - 1)$: t es escalar$\}$ es la recta que pasa por $(0, 1)$ y $(2, \pi)$ puesto que $(2, \pi) - (0, 1) = (2, \pi - 1)$ es un vector-dirección de la recta. $X(t) = (0, 1) + t(2, \pi - 1)$ es una ecuación de esta recta.

20.11 (a) Según el método de los problemas anteriores, primero observamos que $X(t) = (0, 0) + t(1, 2)$ es una ecuación de una recta que pasa por $(0, 0)$ y $(1, 2)$. Tomando $t = e$, vemos que $(e, 2e)$ pertenece también a la recta.

(b) Similarmente, tenemos que $X(t) = (2, 3) + t(-1, 1)$ es una ecuación de una recta que pasa por $(2, 3)$ y $(3, 2)$. Tomando $t = 868$, vemos que $(-866, 871)$ pertenece también a esta recta.

20.13 (a) $(x, y) \in \{(x, y)$: $y = 2x\}$
si y sólo si $y = 2x$
si y sólo si $(x, y) = (x, 2x)$;
si y sólo si $(x, y) = (0, 0) + t(1, 2)$ para cualquier escalar t.
si y sólo si $(x, y) \in \{(0, 0) + t(1, 2)$: t es escalar$\}$.

(b) $(x, y) \in \{(x, y)$: $y = 3 - 2x\}$
si y sólo si $y = 3 - 2x$
si y sólo si $(x, y) = (x, 3 - 2x)$
si y sólo si $(x, y) = (1, 1) + (x - 1, 2 - 2x)$
si y sólo si $(x, y) = (1, 1) + (1 - x)(-1, 2)$
si y sólo si $(x, y) = (1, 1) + t(-1, 2)$ para cualquier escalar t
si y sólo si $(x, y) \in \{(1, 1) + t(-1, 2)$: t es escalar$\}$.

20.15 $(x, y) \in \{(0, 0) + t(1, 1)$: t escalar$\}$ si y sólo si $(x, y) = (0, 0) + t(1, 1) = (t, t)$ para algún t.

$(x, y) \in \{(0, 2) + s(-1, 1)$: s escalar$\}$ si y sólo si $(x, y) = (0, 2) + s(-1, 1) = (-s, 2 + s)$ para algún s.

Por tanto, si (x, y) pertenece a la intersección de las dos rectas, entonces $(t, t) = (-s, 2 + s)$. Partiendo de esto, tenemos las ecuaciones simultáneas $t = -s$ y $t = 2 + s$. Así, $t = 1$. Por tanto, $x = 1$ y $y = 1$. De esta suerte, si (x, y) pertenece a la intersección, entonces $(x, y) = (1, 1)$; un rápido chequeo nos asegura que $(1, 1)$ pertenece verdaderamente a ambas rectas.

20.17 Combine el resultado del problema 20.16 con el del problema 2.12.

20.19 Sea $L = \{A + r(B - A)$: r es un escalar$\}$. Si $r = 0$, tenemos que $A \in L$; si $r = 1$, tenemos que $A + B - A = B \in L$. El "estar entre" (interestancia) es sólo una noción intuitiva en este paso, por lo cual es suficiente observar que $A + r(B - A)$ está en la recta entre A y B precisamente cuando $0 \leq r \leq 1$.

21.1 (a) $(1/2)[(0, 0) + (0, 2)] = (0, 1)$
(b) $(1/2)[(1, 1) + (3, 5)] = (2, 3)$
(c) $(1/2)[(2, 1) + (2, -1)] = (2, 0)$
(d) $(1/2)[(-1, 2) + (1, -2)] = (0, 0)$.

21.3 Usando los resultados del ejemplo 21.2, tenemos:
(a) $(0, 0) + (2/3)(3, 0) = (2, 0)$ y $(0, 0) + 2(3, 0) = (6, 0)$
(b) $(1, 1) + (2/3)[(1, 7) - (1, 1)] = (1, 5)$ y $(1, 1) + 2[(1, 7) - (1, 1)] = (1, 13)$
(c) $(1,3) + (2/3)[(-3, -2) - (1, 3)] = (-5/3, -1/3)$ y $(1, 3) + 2[(-3, -2) - (1, 3)] = (-7, -7)$
(d) $(-1, 2) + (2/3)[(5, -4) - (-1, 2)] = (3, -2)$ y $(-1, 2) + 2[(5, -4) - (-1, 2)] = (11, -10)$.

21.5 Usamos el resultado del problema del texto, tomando "5" en vez de "2" y observamos que U es un vector unitario.

(a) $(0, 1) + 5(1, 0) = (5, 1)$;
(b) $(0, 1) + 5(-1, 0) = (-5, 1)$;
(c) $(3, 4) + 5\left(-1/2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1/2, 4 + 5\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
(d) $(3, 4) + 5\left(-1/2, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1/2, 4 - 5\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

21.7 (a) $(0, \pi) = \pi(0, 1)$;
(b) $(-\pi, 0) = -\pi(1, 0)$;
(c) $(3, 3) = 3\sqrt{2}\,(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$;
(d) $(3, -3\sqrt{3}) = 6(1/2, -\sqrt{3}/2)$.

(Las partes (a) y (b) son obvias. En las partes (c) y (d) usamos, por ejemplo,

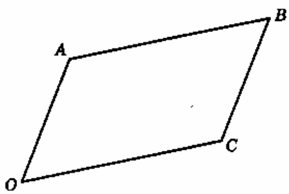
$$\frac{(3,3)}{|(3,3)|}=\frac{(3,3)}{\sqrt{3^2+3^2}}=\frac{(3,3)}{3\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\Big)$$

21.9 Si r es un número y $|r|=|1-r|$, entonces $r=1-r$, o, $-r=1-r$. $-r=1-r$ nos conduce a $0=1$ lo cual es imposible. $r=1-r$ nos conduce a $2r=1$ lo que es posible sólo si $r=\frac{1}{2}$.

21.11 La unicidad de una paralela a L por el punto P se obtiene directamente del problema 20.18 y de la definición de "paralela".

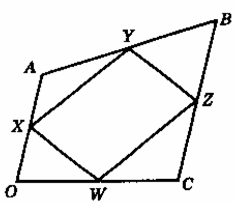
21.13 Si existe un punto $P\in L\cap R$, entonces L y R son rectas que pasan por P y que son paralelas a R; por tanto $L=R$, según el problema 21.11.

21.15 Situamos un vértice del paralelogramo en O y llamamos los otros vértices A, B y C, respectivamente. La recta que pasa por A y B tiene el sentido y dirección del vector $A-B$, la que pasa por O y C tiene el sentido y dirección del vector C, la que pasa por OA lleva la dirección y sentido del vector A y la recta que pasa por BC tiene el sentido y dirección del vector $B-C$. Según la definición de paralelogramo tenemos



$A-B=rC$ y $B-C=sA$, para algunos números r y s. Por tanto, $B=sA+C=A+rC$ y $(s-1)A=-(1+r)C$. Puesto que OA y OC no son paralelos (a menos que coincidan, dándonos así un paralelogramo degenerado), no podemos tener a A como múltiplo de C, de modo que $s=1$ y $r=-1$. Entonces, $B=A+C$, $\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}(A+C)$ como queríamos demostrar.

21.17 Colocamos un vértice del cuadrilátero en O y llamamos los otros vértices A, B y C respectivamente. El punto medio del segmento de recta que pasa por O y A es X, etc., como se muestra en la figura:



Entonces $X=\frac{1}{2}A$, $Y=\frac{1}{2}(A+B)$, $Z=\frac{1}{2}(B+C)$, y $W=\frac{1}{2}C$. Por tanto $X-Y=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}(A+B)=-\frac{1}{2}B$

y

$$W-Z=\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}(B+C)=-\tfrac{1}{2}B$$

de modo que $XY\,||\,WZ$. En forma similar,

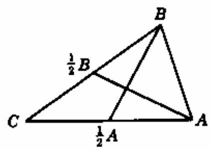
$$Y-Z=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(B+C)=\tfrac{1}{2}(A-C)$$

y

$$X-W=\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{2}(A-C)$$

de modo que $YZ\,||\,XW$.

21.19 Sean A, B y C los vértices del triángulo. Por conveniencia tomamos C como el origen y admitimos que $|A-\frac{1}{2}B|=|B-\frac{1}{2}A|$.



Sean ahora $A=(a,c)$ y $B=(b,d)$. Tenemos que

$$\left|\left(a-\frac{b}{2},c-\frac{d}{2}\right)\right|=\left|\left(b-\frac{a}{2},d-\frac{c}{2}\right)\right|.$$

Así, pues

$$a^2-ab+\frac{b^2}{4}+c^2-cd+\frac{d^2}{4}=b^2-ab+\frac{a^2}{4}$$
$$+d^2-cd+\frac{c^2}{4},\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}c^2=\frac{3}{4}b^2+\frac{3}{4}d^2.$$

Por tanto

$$a^2+c^2=b^2+d^2$$

y

$$|A|=|B|$$

de modo que el triángulo es isósceles.

22.1 $X_1-X_3=2-0=2$.
$|-2X|=|-2|\,|X|=2\sqrt{2^2+1^2+0^2+(-2)^2}=2\cdot3=6$

$$\sqrt{|X|}=\sqrt{\sqrt{2^2+1^2+0^2+(-2)^2}}=\sqrt{3}$$

$$\frac{(2,1,0,-2)}{|(2,1,0,-2)|}=\frac{(2,1,0,-2)}{3}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,\frac{-2}{3}\right).$$

22.3
(a) $X(t)=(1,0,-1,2,3)+t[(1,2,1,-2,-1)-(1,0,-1,2,3)]=(1,0,-1,2,3)+t(0,2,2,-4,-4)$.
(b) Si $(1,-2,-1,2,7)=(1,0,-1,2,3)+t(0,2,2,-4,-4)$, entonces $t=-1=0$, de modo que el punto dado no está en la recta.

(c) $\frac{1}{2}(X + Y) = \frac{1}{2}[(1, 0, -1, 2, 3) + (1, 2, 1, -2, -1)] = (1, 1, 0, 0, 1)$.

(d) Haciendo $t = \frac{1}{2}$, tenemos $X(t) = (1, 0, -1, 2, 3) + \frac{1}{2}(0, 2, 2, -4, -4) = (1, 1, 0, 0, 1)$, así $U = (1, 1, 0, 0, 1)$ es un punto tal que $U_1 = U_2$.

22.5

$(\textcircled{n} + X)_i = \textcircled{n}_i + X_i$ Definición de adición vectorial
$= 0 + X_i$ Definición de $\textcircled{n}$
$= X_i$

Por tanto, las i-ésimas coordenadas de $\textcircled{n} + X$ y X son iguales para $1 \leq i \leq n$, de modo que $\textcircled{n} + X = X$.

22.7 $(1X)_i = 1(X_i)$ 1) Definición de multiplicación
$= X_i$. escalar

Por tanto $1X = X$.

$(0X)_i = 0(X_i) = 0$.

Por tanto $0X = \textcircled{n}$.

22.9 $(r(X + Y))_i$

$= r(X + Y)_i$ 2) Definición de multiplicación escalar
$= r(X_i + Y_i)$ 3) Definición de adición vectorial
$= rX_i + rY_i$ 4) Distributividad de los números reales
$= (rX)_i + (rY)_i$ 5) Definición de multiplicación escalar
$= (rX + rY)_i$. 6) Definición de adición vectorial

Por tanto $r(X + Y) = rX + rY$.

22.11 $|rX|$

$= \sqrt{(rX_1)^2 + (rX_2)^2 + \cdots + (rX_n)^2}$ 1) Definición de longitud
$= \sqrt{r^2(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)}$
$= \sqrt{r^2}\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}$
$= |r|\,|X|$ 2) Definición de longitud

22.13 Definición de adición: Como $f \in F$ y $g \in F$, sea $f + g$ la función h tal que $h(x) = f(x) + g(x)$, para cada número x. En vez de introducir la nueva letra h podríamos haber escrito simplemente $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Definición de multiplicación escalar: Para cualquier escalar r y para cualquier $f \in F$, rf es la función h tal que $h(x) = rf(x)$ para cada número x. De nuevo, esto se puede escribir $(rf)(x) = rf(x)$.

23.1 $\sum_{k=-2}^{3} (k + k^3) = (-2) + (-2)^3 + (-1) + (-1)^3 + (0) + (0)^3 + 1 + 1^3 + 2 + 2^3 + 3 + 3^3 = 30$

$\sum_{k=-2}^{3} k = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 = 3$

$\sum_{k=-2}^{3} k^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 27$.

Por tanto $\sum_{k=-2}^{3} (k + k^3) = \sum_{k=-2}^{3} k + \sum_{k=-2}^{3} k^3$.

23.3. $\sum_{k=-2}^{4} (2|k| - 1) = (2|-2| - 1) + (2|-1| - 1) + (2|0| - 1) + (2|1| - 1) + (2|2| - 1) + (2|3| - 1) + (2|4| - 1) = 19$

$\sum_{k=-2}^{4} |k| = |-2| + |-1| + |0| + |1| + |2| + |3| + |4| = 13$.

Puesto que $19 = 2 \cdot 13 - 7$, la igualdad dada queda verificada.

23.5 $\sum_{k=1}^{m} (a + (k - 1)d)$

$= \sum_{k=1}^{m} a + \sum_{k=1}^{m} (k - 1)d$ 1) por la sección 23.2
$= \sum_{k=1}^{m} a + \sum_{k=1}^{m} kd + \sum_{k=1}^{m} (-d)$ 2) por la sección 23.2
$= a\sum_{k=1}^{m} 1 + d\sum_{k=1}^{m} k - d\sum_{k=1}^{m} 1$ 1) por la sección 23.1
$= am + d\sum_{k=1}^{m} k - dm$ 2) por la sección 23.3
$= am + d\frac{m(m + 1)}{2} - dm$
$= \frac{m}{2}(2a + (m - 1)d)$.

23.7 Sea $A = \{n\colon \sum_{k=1}^{n} (a + (k - 1)\, d) = (n/2)(2a + (n - 1)\, d)\}$. $1 \in A$ puesto que

$$\sum_{k=1}^{1} (a + (k - 1)\, d) = a = \tfrac{1}{2}(2a + (1 - 1)\, d).$$

Supuesto que $m \in A$. Entonces

$\sum_{k=1}^{m+1} (a + (k - 1)\, d)$
$= \sum_{k=1}^{m} (a + (k - 1)\, d) + a + (m + 1 - 1)d$
$= \frac{m}{2}(2a + (m - 1)\, d) + a + md$
$= \frac{m + 1}{2}(2a + (m + 1 - 1)\, d)$.

de modo que $m + 1 \in A$. Por tanto A es inductivo (y tenemos otra comprobación del problema 23.5).

23.9 $\sum_{k=1}^{n} (k + 1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1)$.

Por tanto

$$\sum_{k=2}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Así

$$\begin{aligned} 3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=2}^{n+1} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 - 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= (n+1)^3 - 1^3 - 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= (n+1)^3 - 1 - 3\tfrac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= \tfrac{1}{2}\, n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

24.1 (a) $x^2 - 8x + 16 = 0$; $(x-4)^2 = 0$; $x - 4 = 0$; $x = 4$; $a = 1, b = -8, c = 16$;

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{64 - 4\cdot 1\cdot 16}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = 4.$$

(b) $x^2 + x - 12 = 0$; $x^2 + x + (\frac12)^2 = 12 + (\frac12)^2$; $(x + \frac12)^2 = 12 + \frac14 = \frac{49}{4}$; $x + \frac12 = \pm\sqrt{\frac{49}{4}} = \pm\frac72$; $x = -\frac12 \pm \frac72$; $x = -\frac12 + \frac72 = 3$ o $x = -\frac12 - \frac72 = -4$. $a = 1, b = 1, c = -12$;

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1(-12)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2};$$

$$x = \frac{-1+7}{2} = 3 \quad \text{o} \quad x = \frac{-1-7}{2} = -4.$$

(c) $x^2 + 6x + 6 = 0$; $x^2 + 6x + 3^2 = -6 + 3^2$; $(x+3)^2 = 3$; $x + 3 = \pm\sqrt{3}$; $x = -3 \pm \sqrt{3}$. $a = 1, b = 6, c = 6$;

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{4\cdot 3}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{4}\,\sqrt{3}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2(-3 \pm \sqrt{3})}{2} = -3 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(d) $x^2 + 10x + 20 = 0$; $x^2 + 10x + 5^2 = -20 + 5^2$; $(x+5)^2 = 5$; $x + 5 = \pm\sqrt{5}$; $x = -5 \pm \sqrt{5}$. $a = 1$, $b = 10$, $c = 20$;

$$\begin{aligned} x &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot 1\cdot 20}}{2} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{4\cdot 5}}{2} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{4}\,\sqrt{5}}{2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{2(-5 \pm \sqrt{5})}{2} = -5 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

(e) $2x^2 + 5x + 1 = 0$; $x^2 + \frac52 x + \frac12 = 0$; $x^2 + \frac52 x + (\frac54)^2 = -\frac12 + (\frac54)^2 = -\frac12 + \frac{25}{16}$; $(x + \frac54)^2 = \frac{17}{16}$; $x + \frac54 = \pm\sqrt{\frac{17}{16}} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$;

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}, \quad a = 2, \quad b = 5, \quad c = 1;$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

(f) $3x^2 - 5x - 2 = 0$; $x^2 - \frac53 x - \frac23 = 0$; $x^2 - \frac53 x + (\frac56)^2 = \frac23 + (\frac56)^2 = \frac23 + \frac{25}{36}$; $(x - \frac56)^2 = \frac{49}{36}$; $x - \frac56 = \pm\sqrt{\frac{49}{36}} = \pm\frac76$; $x = \frac56 \pm \frac76$; $x = \frac56 + \frac76 = \frac{12}{6} = 2$ o $x = \frac56 - \frac76 = -\frac26 = -\frac13$. $a = 3$, $b = -5, c = -2$;

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4\cdot 3(-2)}}{2\cdot 3} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}; \end{aligned}$$

$$x = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{o} \quad x = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

24.3 $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, y tenemos $(x-2)(x-3) = 0$ si y sólo si $x - 2 = 0$ o $x - 3 = 0$. Por tanto, $x^2 - 5x + 6 = 0$ si y sólo si $x = 2$ o $x = 3$.

24.5 Puesto que $x^2 > 0$ si x es cualquier número distinto de 0, se deduce que $x^2 + 1$ es mínimo cuando $x = 0$.

Similarmente, $-z^2 < 0$ si $z \neq 0$; de modo que $1 - z^2$ es máximo cuando $z = 0$.

24.7 Sea h = precio de un huevo. $504/(h+1) = 504/h - 12$; $42/(h+1) = 42/h - 1$; $42h = 42(h+1) - h^2 - h$; $h^2 + h - 42 = 0$;

$$h = \frac{-1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2};\ h = 6.$$

24.9 Primero, si $a = 0$, tenemos $b \neq 0$ y se pueden resolver $bx + c = 1 > 0$ y $bx + c = -1 < 0$ para obtener el valor requerido de x.

Enseguida, si $a \neq 0$, hacemos $m = -b/2a$ y tenemos

$$am^2 + bm + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

(donde $(b^2 - 4ac)/4a$ tiene el signo de a, puesto que $b^2 - 4ac > 0$) y según el problema anterior se elige n de modo que $n^2 + (b/a)n + c/a > 0$. Ahora, si $a > 0$ tenemos $am^2 + bm + c < 0$ y $a(n^2 + (b/a)n + c/a) = an^2 + bn + c > 0$. Y si $a < 0$ tenemos $am^2 + bm + c = -(b^2 - 4ac)/4a > 0$ y $a(n^2 + (b/a)n + c/a) = an^2 + bn + c < 0$. Por tanto $x = m$ y $x = n$ dan los resultados requeridos.

25.1 (a) $X = -I - i$;
(b) $X = 2I$;
(c) $X = -I + i$;
(d) $X = I - i$.

25.3 (a) $Z = 5I$;
(b) $Z = 2\sqrt{6}I + i$;
(c) $Z = -(13/4)I - \frac{9}{4}i$;
(d) $Z = I$.

25.5 (a) $(-1/10)I + (3/10)i$;
(b) $-i$;
(c) $bI + ai$.

25.7 $z^4 - 1 = (z+1)(z-1)(z+i)(z-i)$. De este modo, las posibles soluciones de la ecuación $z^4 - 1 = 0$ son: -1, 1, $-i$ e i; y: -1, 1, $-i$ e i satisfacen la ecuación.

25.9 Sean $A = a + bi$ y $B = c + di$, donde a, b, c y d son números reales. Entonces

(a) $(\overline{A})^- = (a - bi)^- = [a + (-b)i]^-$
$= a - (-b)i = a + bi = A$;

(b) $(\overline{AB}) = \overline{(a+bi)(c+di)}$
$= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$
$= (ac - bd) - (ad + bc)i$
$= (a - bi)(c - di) = \overline{A}\overline{B}$;

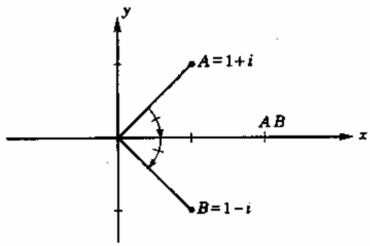
(c) $\overline{(A + B)} = \overline{(a + bi) + (c + di)}$
$= \overline{(a + c) + (b + d)i}$
$= (a + c) - (b + d)i = (a - bi)$
$+ (c - di) = \overline{A} + \overline{B}$.

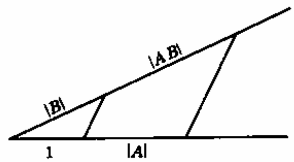
25.11 Puesto que $i \neq 0$, tenemos, según (1) que $i \in P$ o $-i \in P$. Pero si $i \in P$ aplicamos (2) y tenemos, primero, que $i^2 = -1 \in P$ y entonces $(-1)^2 = 1 \in P$, lo cual es una contradicción. Pero, puesto que también tenemos que $(-i)^2 = -1$, se llega a una contradicción si $-i \in P$. Por tanto, no hay un conjunto P para el cual se cumplan (1) y (2).

25.13 $(1 + 2i)(1 - 2i) = 5$.

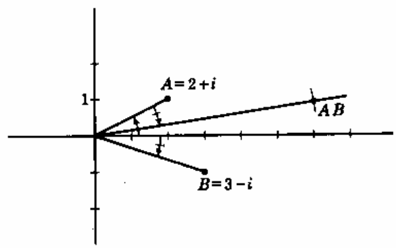
26.1 AB está en el ángulo $\pi/12 + \pi/3 = 5/12\,\pi$ y la distancia de AB a O es $5 \cdot 2 = 10$.

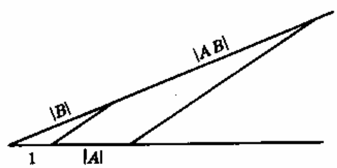
26.3 (a) $(1 - i)(1 + i)$



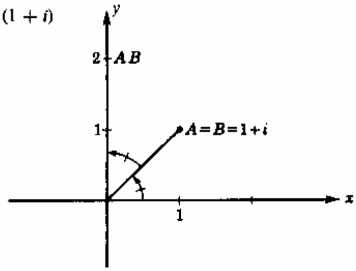


(b) $(2 + i)(3 - i)$



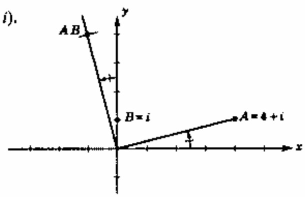


(c) $(1+i)(1+i)$



Para $|AB|$ véase la segunda construcción de la parte (a).

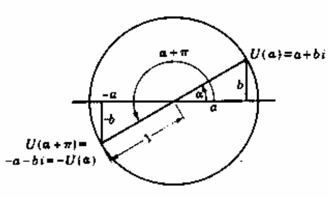
(d) $i(4+i)$.



No se requiere ninguna construcción para obtener la longitud de AB;

$|AB| = |A|$, ya que B es un vector unitario.

26.5



26.7 (a) $U(\alpha)U(\beta)=1$ si y sólo si $U(\alpha)=U(\beta)^{-1}$,

si y sólo si $U(\alpha)=\dfrac{\overline{U(\beta)}}{|U(\beta)|^2}$, si y sólo si $U(\alpha)=\overline{U(\beta)}$

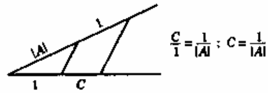
(puesto que $|U(\beta)|=1$).

(b) $U(\alpha)U(\beta)=-1$ si y sólo si $U(\alpha)[-U(\beta)]=1$, si y sólo si $U(\alpha)=-\overline{U(\beta)}$ (según parte (*a*)), si y sólo si $U(\alpha)=-\overline{U(\beta)}$.

26.9 Sea $Z=a+bi$, donde a y b son números reales. Entonces $|Z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(-b)^2}=|a+(-b)i|=|a-bi|=|\bar{Z}|$.

26.11 Si Z está sobre el eje real, entonces $Z=a$ donde a es un número real, y por tanto $\bar{Z}=a=Z$. Recíprocamente, si $Z=a+bi$, donde a y b son números reales y $Z=\bar{Z}$, tenemos $a+bi=a-bi$ de modo que $b=0$ y $Z=a$ está en el eje real.

26.13



26.15 Sean $X=(a,b)$, $Y=(c,d)$ y $Z=(e,f)$ números gaussianos enteros, (es decir, a, b, c, d, e y f son enteros) y supóngase que tenemos $|X|=|Y|=|Z|\neq 0$ pero $X+Y+Z=0$. Observamos entonces que $|\bar{X}|=|X|\neq 0$, $|\bar{X}X|=|\bar{X}||X|=|\bar{X}Y|=|\bar{X}Z|\neq 0$, y $\bar{X}(X+Y+Z)=\bar{X}X+\bar{X}Y+\bar{X}Z=0$. También $\bar{X}X=(a^2+b^2,0)$ de modo que hemos demostrado que sí podemos hallar enteros gaussianos X, Y y Z tales que $|X|=|Y|=|Z|\neq 0$, pero $X+Y+Z=0$, podemos hallar entonces gaussianos enteros $X'=\bar{X}X$, $Y'=\bar{X}Y$ y $Z'=\bar{X}Z$ tales que $|X'|=|Y'|=|Z'|\neq 0$, $X'+Y'+Z'=0$, y tales que la segunda coordenada de X' es 0. (Usaremos aquí, desde luego, el hecho de que si X es un entero gaussiano, entonces también lo es $\bar{X}$ y el hecho (problema 25.12) de que el producto de dos enteros gaussianos es un entero gaussiano.)

De esta manera, podemos suponer para empezar que $b=0$ y de $|X|=|Y|=|Z|$ obtener

(1) $$a^2=c^2+d^2=e^2+f^2.$$

Ahora si $X+Y+Z=(a+c+e)+(d+f)i=0$, podemos tener $a+c+e=0=d+f$. De esta manera $f^2=d^2$ y según (1), tenemos $c^2=e^2$. Por tanto, $c=e$, o, $c=-e$. Si $c=-e$, $a+c+e=0$ da $a=0$, de modo que $|X|=0$, es una contradicción. Si $c=e$, $a+c+e=0$ da $a=-2e$. Si $e=0$ tenemos otra contradicción. Por tanto podemos suponer $e\neq 0$. Entonces, según (1) tenemos $d^2=a^2-c^2=(2e)^2-e^2=3e^2$ y por tanto $3=(d/e)^2$. Pero, $\sqrt{3}$ es un número irracional (según el problema 12.11) y así nuevamente, obtenemos una contradicción a nuestra suposición de que $X+Y+Z=0$.

27.1

$$(1+i)^{23}=\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]^{23}=\left[\sqrt{2}\,U\!\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{23}$$
$$=\sqrt{2}^{23}\,U\!\left(23\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}^{23}\,U\!\left(24\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2048\sqrt{2}\,U\!\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2048\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2048(1-i).$$

27.3 $(\tfrac{1}{2}+(\sqrt{3}/2)i)^7=[U(\pi/3)]^7=U(7\cdot\pi/3)=U(7\pi/3)=U(\pi/3)=\tfrac{1}{2}+(\sqrt{3}/2)i$. Entonces si $Z=\tfrac{1}{2}+(\sqrt{3}/2)i$ vemos que $Z^{50}=(Z^7)^7Z=Z^7Z=ZZ=U(2\pi/3)=-\tfrac{1}{2}+(\sqrt{3}/2)i$.

Explicación: Puesto que $Z^3 = -1$, también podríamos haber observado que $Z^7 = (Z^3)^2 Z = Z$.

27.5 $Z = \frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i = 1 \cdot U(\pi/3)$. Si $X = rU(\beta)$ y $X^2 = Z$ entonces $r^2U(2\beta) = 1 \cdot U(\pi/3)$. Así $r = 1$. También $2\beta = \pi/3$ o $2\beta = \pi/3 + 2\pi$. Así $\beta = \pi/6$ o $\beta = \pi/6 + \pi = 7\pi/6$. Entonces $X = U(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + \frac{1}{2}i$ o $X = U(7\pi/6) = -\sqrt{3}/2 - \frac{1}{2}i$.

27.7 Aplicamos los teoremas 27.4 y 27.5 a cada problema.

(a) $a = 5$, $b = 12$. Si $(x + yi)^2 = 5 + 12i$, entonces

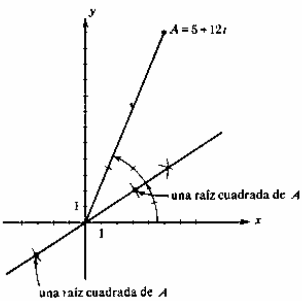
$$x^2 = \frac{\sqrt{5^2 + 12^2} + 5}{2} = \frac{\sqrt{169} + 5}{2} = \frac{13 + 5}{2} = 9$$

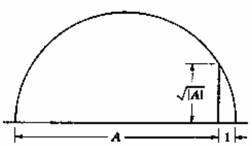
y

$$y^2 = \frac{13 - 5}{2} = 4.$$

Por tanto $x = 3$ o -3 y $y = 2$ o -2. Puesto que $b > 0$ tenemos $x = 3$, $y = 2$ o $x = -3$, $y = -2$ y nuestras dos raíces cuadradas son $3 + 2i$ y $-3 - 2i$.

La construcción con regla y compás se da enseguida.





(b) $a = 12, b = -5$. Si $(x + yi)^2 = 12 - 5i$, entonces

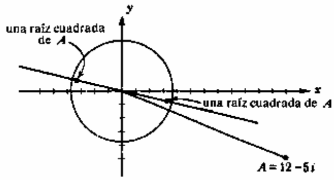
$$x^2 = \frac{\sqrt{12^2 + (-5)^2} + 12}{2} = \frac{13 + 12}{2} = \frac{25}{2}$$

y

$$y^2 = \frac{13 - 12}{2} = \frac{1}{2}.$$

Así $x = 5/\sqrt{2}$ o $-5/\sqrt{2}$ y $y = 1/\sqrt{2}$ o $-1/\sqrt{2}$. Puesto que $b < 0$ tenemos $x = 5/\sqrt{2}$, $y = -1/\sqrt{2}$, o $x = -5/\sqrt{2}$, $y = 1/\sqrt{2}$, y nuestras dos raíces cuadradas son $5/\sqrt{2} - (1/\sqrt{2})i$, y, $-5/\sqrt{2} + (1/\sqrt{2})i$.

La construcción con regla y compás se da enseguida.



La construcción para $\sqrt{|A|}$ es la misma que en la parte (a).

(c) $a = -1$, $b = -2$. Si $(x + yi)^2 = -1 - 2i$, entonces

$$x^2 = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} + (-1)}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

y

$$y^2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Por tanto

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \quad \text{o} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

y

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} \quad \text{o} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}.$$

Puesto que $b < 0$ tenemos

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}$$

o

$$x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}$$

y nuestras dos raíces cuadradas son

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}\, i$$

y

$$-\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}\, i.$$

(d) $a = -2$, $b = 3$. Si $(x + yi)^2 = -2 + 3i$, entonces

$$x^2 = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 3^2} + (-2)}{2} = \frac{\sqrt{13} - 2}{2}$$

y

$$y^2 = \frac{\sqrt{13} + 2}{2}.$$

Así

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{13} - 2}{2}} \quad \text{o} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{13} - 2}{2}}$$

y

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{13} + 2}{2}} \quad \text{o} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{13} + 2}{2}}$$

Puesto que $b > 0$ tenemos

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{13} - 2}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{\sqrt{13} + 2}{2}}$$

o

$$x = -\sqrt{\frac{\sqrt{13} - 2}{2}}, \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{13} + 2}{2}}$$

y nuestras dos raíces cuadradas son

$$\sqrt{\frac{\sqrt{13} - 2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{13} + 2}{2}}\,i$$

y

$$-\sqrt{\frac{\sqrt{13} - 2}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{13} + 2}{2}}\,i.$$

27.9 Escriba $Z = x + yi$ donde x y y son números reales. Si $f(Z) = 0$ tenemos $a(x + yi)^2 + b(x + yi) + c = [a(x^2 - y^2) + bx + c] + (2\,axy + by)i = 0$. Por tanto

(1) $a(x^2 - y^2) + bx + c = 0$,

(2) $2axyi + byi = 0$,

(3) $-2\,axyi - byi = 0$.

Pero puesto que $f(\bar{Z}) = a(x - yi)^2 + b(x - yi) + c = [a(x^2 - y^2) + bx + c] + [-(2\,axy + by)i]$ vemos de (1) y (3) que $f(\bar{Z}) = 0$.

27.11 Tome $A = 1$, $B = i$, $C = 2$. Entonces $i^2 + i \cdot i + 2 = 0$, pero $(-i)^2 + i(-i) + 2 \neq 0$. Comentario: El objetivo de este problema es mostrar la necesidad de la hipótesis de los coeficientes *reales* en los problemas 27.9 y 27.10.

27.13 *Primera Solución.* Por el problema 27.12 (b) tenemos $Z^3 - 1 = (Z - 1)(Z^2 + Z + 1)$ de tal manera que $Z = 1$ o $Z^2 + Z + 1 = 0$. La última es una ecuación cuadrática con raíces

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Por tanto las soluciones son 1, $\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ y $\dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$.

Comentario: Naturalmente, esto no es muy lícito puesto que ecuaciones cuadráticas con raíces complejas no serán discutidas hasta la siguiente sección.

Segunda Solución: Suponga $[rU(\alpha)]^3 = 1 = U(0)$ donde r es un número real no negativo y α un ángulo. Entonces $r^3(U(3\alpha)) = U(n \cdot 2\pi)$ donde n es un entero. Así $r = 1$ y $3\alpha = n \cdot 2\pi$, $\alpha = n \cdot 2\pi/3$. Por tanto $\alpha = 0$, $2\pi/3$, ó $4\pi/3$ y nuestras tres soluciones son $U(0) = 1$, $U(2\pi/3) = (-1/2) + (\sqrt{3}/2)i$, y $U(4\pi/3) = (-1/2) - (\sqrt{3}/2)i$.

27.15 Es consecuencia de los problemas 26.8 y 27.12 (d).

28.1 (1) $3^2 + (-2 - 2i) \cdot 3 - 3 + 6i = 9 - 6 - 6i - 3 + 6i = 0$; (2) $(-1 + 2i)^2 + (-2 - 2i)(-1 + 2i) - 3 + 6i = (1 - 4i - 4) + (2 - 4i + 2i + 4) - 3 + 6i = 0$.

Comentario: Otro ejemplo para mostrar que las raíces complejas no aparecen en "pares conjugados" si los coeficientes de nuestra ecuación no son reales.

28.3 Pudimos primero observar que estos dos problemas podrían ser tratados por el teorema de De Moivre escribiendo para (a), $[rU(\alpha)]^3 = -1 = U(\pi)$, y para (b) $[rU(\alpha)]^4 = -1 = U(\pi)$, etc. (problemas 27.13 y 27.14). En el contexto de este capítulo, sin embargo, las siguientes soluciones se indican claramente.

(a) $Z^3 + 1 = (Z + 1)(Z^2 - Z + 1)$. Entonces $Z = -1$ o $Z^2 - Z + 1 = 0$. En el último caso usamos los resultados del problema 28.2 (c) para obtener $Z = (\frac{1}{2}) + (\sqrt{3}/2)i$ o $Z = (\frac{1}{2}) - (\sqrt{3}/2)i$.

(b) $Z^4 + 1 = (Z^2 + i)(Z^2 - i)$ de tal manera que $Z^2 = -i$ o $Z^2 = i$.

Ahora aplicamos el teorema 27.4.

(1) Si $Z^2 = (x + iy)^2 = -i$ tenemos $a = 0$, $b = -1$, y

$$x^2 = \frac{\sqrt{0^2 + (-1)^2} + 0}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad y^2 = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Puesto que $b < 0$ tenemos $x = 1/\sqrt{2}$, $y = -1/\sqrt{2}$, o $x = -1/\sqrt{2}$, $y = 1/\sqrt{2}$.

Por tanto dos de nuestras soluciones son $1/\sqrt{2} - (1/\sqrt{2})i$ y $(-1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})i$.

(2) Si $Z^2 = (x + iy)^2 = i$, tenemos $a = 0$, $b = 1$, y $x^2 = \frac{1}{2}$, $y^2 = \frac{1}{2}$. Pero, puesto que aquí $b > 0$, nuestras otras dos soluciones son $1/\sqrt{2} + (1/\sqrt{2})i$ y $-1/\sqrt{2} - (1/\sqrt{2})i$.

28.5 (a) $f(x) = x + r$
(b) $g(x) = x^2 + xr + r^2$
(c) $h(x) = x^3 + x^2r + xr^2 + r^3$
(d) $q(x) = x^4 + x^3r + x^2r^2 + xr^3 + r^4$.

28.7 Usamos los resultados de los problemas 28.5 (a), (b), y (c). Escribimos

$$\begin{aligned} f(x) - f(r) &= x^4 - r^4 + bx^3 - br^3 + cx^2 - cr^2 + dx - dr + e - e \\ &= x^4 - r^4 + b(x^3 - r^3) + c(x^2 - r^2) + d(x - r) \\ &= (x - r)(x^3 + x^2r + xr^2 + r^3) + (x - r)b(x^2 + xr + r^2) + (x - r)c(x + r) + (x - r)d \\ &= (x - r)[x^3 + (r + b)x^2 + (r^2 + br + c)x + (r^3 + br^2 + cr + d)]. \end{aligned}$$

Así, dejando $g(x) = x^3 + (r + b)x^2 + (r^2 + br + c)x + (r^3 + br^2 + cr + d)$, tenemos $f(x) = (x - r)\,g(x) + f(r)$.

28.9 Por el teorema fundamental del álgebra hay una solución, sea Z_1, de $f(x) = 0$. Por el problema 28.8 tenemos

(1) $f(x) = (x - Z_1)\,g(x) + f(Z_1)$ donde g es una función bicuadrada. Pero Z_1 es una solución de $f(x) = 0$ de tal manera $f(Z_1) = 0$. Así, por (1), $f(x) = (x - Z_1)\,g(x)$. Entonces del problema 28.7 y por el hecho de que, por el teorema fundamental, $g(x) = 0$ tiene una solución, sea Z_2, tenemos

(2) $g(x) = (x - Z_2)\,h(x) + g(Z_2)$ donde h es una función cúbica y $g(Z_2) = 0$. Así (2) da $g(x) = (x - Z_2)\,h(x)$.

Continuemos usando el teorema fundamental, y regresemos a los resultados del problema 28.6 y el teorema 28.3 para llegar al resultado deseado.

29.1

(a)
$$\begin{aligned} Q + P &= [2 + 3i + (4 - 5i)j] + [3 - i + (7 + i)j] \\ &= 5 + 2i + (11 - 4i)j. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} Q - P &= [2 + 3i + (4 - 5i)j] - [3 - i + (7 + i)j] \\ &= -1 + 4i + (-3 - 6i)j. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2P - Q &= 2[3 - i + (7 + i)j] - [2 + 3i + (4 - 5i)j] \\ &= [6 - 2i + (14 + 2i)j] - [2 + 3i + (4 - 5i)j] \\ &= 4 - 5i + (10 + 7i)j. \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} QP &= [(2 + 3i) + (4 - 5i)j][(3 - i) + (7 + i)j] \\ &= (2 + 3i)(3 - i) + (2 + 3i)(7 + i)j + (4 - 5i)j(3 - i) + (4 - 5i)j(7 + i)j \\ &= (9 + 7i) + (11 + 23i)j + (4 - 5i)(3 + i)j + (4 - 5i)(7 - i)j^2 \\ &= (9 + 7i) + (11 + 23i)j + (17 - 11i)j - (23 - 39i) \\ &= (-14 + 46i) + (28 + 12i)j. \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} PQ &= [(3 - i) + (7 + i)j][(2 + 3i) + (4 - 5i)j] \\ &= (3 - i)(2 + 3i) + (3 - i)(4 - 5i)j + (7 + i)j(2 + 3i) + (7 + i)j(4 - 5i)j \\ &= (9 + 7i) + (7 - 19i)j + (7 + i)(2 - 3i)j + (7 + i)(4 + 5i)j^2 \\ &= (9 + 7i) + (7 - 19i)j + (17 - 19i)j - (23 + 39i) \\ &= (-14 - 32i) + (24 - 38i)j. \end{aligned}$$

29.3 Sea $P = A + Bj$ y $Q = C + Dj$ donde $A, B, C,$ y D son números complejos. Entonces $\overline{P + Q} = \overline{(A + Bj) + (C + Dj)} = \overline{(A + C) + (B + D)j} = \overline{A + C} - (B + D)j = \bar{A} + \bar{C} - (B + D)j = (\bar{A} - Bj) + (\bar{C} - Dj) = \overline{A + Bj} + C + Dj = \bar{P} + \bar{Q}$. (Empleamos aquí el hecho de que, por el problema 25.9 (c), $\overline{A + C} = \bar{A} + \bar{C}$, para números complejos A y C.)

29.5 Sea $Q = A + Bj$ y $P = C + Dj$ donde A, B, C y D son números complejos. Entonces $\overline{QP} = \overline{(A + Bj)(C + Dj)} = \overline{AC + ADj + BjC + BjDj} = \overline{AC} + \overline{ADj} + \overline{BCj} + \overline{BDj^2} = (\overline{AC} - \overline{BD}) + (\overline{AD + B\bar{C}})j = \overline{AC} - \overline{BD} - (AD + B\bar{C})j = (\overline{AC} - \overline{B\bar{D}}) - (AD + B\bar{C})j = (\bar{A}\bar{C} - \bar{B}\bar{\bar{D}}) - (AD + B\bar{C})j = (\bar{A}\bar{C} - \bar{B}D) - (AD + B\bar{C})j$.

En la otra forma, $\bar{P}\bar{Q} = (\overline{C + Dj})(\overline{A + Bj}) = (\bar{C} - Dj)(\bar{A} - Bj) = \bar{C}\bar{A} - (\bar{C}B)j - Dj\bar{A} + DjBj = \bar{A}\bar{C} - (B\bar{C})j - D\bar{A}j + D\bar{B}j^2 = (\bar{A}\bar{C} - \bar{B}D) - (AD + B\bar{C})j$. (Usamos rigurosamente, por supuesto, las propiedades de la conjugación para números complejos como se da en el problema 25.9, y también usamos el hecho de que la multiplicación de números complejos es conmutativa.)

30.1 (a) $(0, 1)\cdot(3, 1) = 0 + 1 = 1$;
(b) $(\sqrt{2}, \sqrt{8})\cdot(\sqrt{8}, \sqrt{2}) = 4 + 4 = 8$;
(c) $(-1, 2)\cdot(3, 1) = -3 + 2 = -1$;
(d) $(7, 0)\cdot(0, 8) = 0 + 0 = 0$;
(e) $(3, -1)\cdot(1, 3) = 3 - 3 = 0$;
(f) $(-1, -1)\cdot(1, -2) = -1 + 2 = 1$.

30.3 (a) $A\cdot A = 2^2 + 3^2 = 13$; $|A|^2 = (\sqrt{2^2 + 3^2})^2 = (\sqrt{13})^2 = 13$; (b) $A\cdot B = 2\cdot1 + 3\cdot4 = 14$; $B\cdot A = 1\cdot2 + 4\cdot3 = 14$;
(c) $7(A\cdot B) = 7(2\cdot1 + 3\cdot4) = 7\cdot14 = 98$; $(7A)\cdot B = (14, 21)\cdot(1, 4) = 14 + 84 = 98$;
(d) $A\cdot(B + C) = (2, 3)\cdot(-2, 3) = -4 + 9 = 5$; $A\cdot B + A\cdot C = (2 + 12) + [-6 + (-3)] = 14 - 9 = 5$.

30.5 (a) $(0, 1)\cdot(x, y) = y = 0$; sea $X = (1, 0)$.
(b) $(\sqrt{2}, 2)\cdot(x, y) = \sqrt{2}x + 2y = 0$;

sea $X = (-2, \sqrt{2})$. (c) $(-1, 3)\cdot(x, y) = -x + 3y = 0$; sea $X = (3, 1)$. (d) $(0, 0)\cdot(x, y) = 0$; sea $X = (1, 1)$.

30.7 (a) 2-caso dimensional. Sea $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$.

(i) $A\cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 = b_1a_1 + b_2a_2 = B\cdot A$
(ii) $a(A\cdot B) = a(a_1b_1 + a_2b_2) = (aa_1)b_1 + (aa_2)b_2 = (aA)\cdot B$
(iii) $A\cdot(B + C) = A\cdot(b_1 + c_1, b_2 + c_2) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) = (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2) = A\cdot B + A\cdot C.$

Se sigue por (*i*) que $(B + C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$.

(b) 3-caso tridimensional. Sea $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, y $C = (c_1, c_2, c_3)$.

(i) $A\cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = B\cdot A$
(ii) $a(A\cdot B) = a(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = (aa_1)b_1 + (aa_2)b_2 + (aa_3)b_3 = (aA)\cdot B$
(iii) $A\cdot(B + C) = A\cdot(b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) = A\cdot B + A\cdot C.$

Se sigue por (*i*) que $(B + C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$.

30.9 Por definición de perpendicularidad tenemos que probar que $A\cdot B = 0$ si y sólo si $|A + B| = |A - B|$. Pero $(-1)(A\cdot B) = (-1)(B\cdot A) = (-1)B\cdot A = A\cdot(-1)B = A\cdot(-B)$ por el teorema 30.2. Así $A\perp B$ si y sólo si $A\cdot(-B) = 0 = A\cdot B$. Ahora aplicamos el teorema 30.5 a las dos últimas igualdades para ver que $A\perp B$ si y sólo si

(1) $|A|^2 + |-B|^2 - |A - (-B)|^2 = 0 = |A|^2 + |B|^2 - |A - B|^2$. Pero el miembro izquierdo de (1) es igual a $|A|^2 + |B|^2 - |A + B|^2$, y por lo tanto (1) se cumple si y sólo si

(2) $|A - B|^2 = |A + B|^2$.

Así de (2) tenemos $A\perp B$ si y sólo si $|A - B| = |A + B|$, puesto que $|A - B| \geq 0$ y $|A + B| \geq 0$.

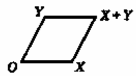
Comentario: Una demostración con coordenadas y considerando los casos bi y tridimensionales por separado es claramente factible y también muy larga.

30.11 Como en el problema 30.9 tenemos $-(A\cdot B) = A\cdot(-B)$. Por tanto $-[A\cdot(-B)] = A\cdot B$. Por el teorema 30.5 entonces tenemos

(1) $2(A\cdot B) = |A|^2 + |B|^2 - |A - B|^2$ y
(2) $-2[A\cdot(-B)] = 2(A\cdot B) = -|A|^2 - |-B|^2 + |A - (-B)|^2$. Puesto que $|-B| = |B|$ y $|A - (-B)| = |A + B|$, debemos sumar (1) y (2) para tener $4(A\cdot B) = 4A\cdot B = |A + B|^2 - |A - B|^2$.

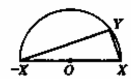
30.13 U es perpendicular a $rX + sY$ si y sólo si $U\cdot(rX + sY) = 0$ por la definición de perpendicular. $U\cdot(rX + sY) = U\cdot(rX) + U\cdot(sY) = r(U\cdot X) + s(U\cdot Y)$ por el teorema 30.2. Pero $U\cdot X = U\cdot Y = 0$ puesto que $U\perp X$ y $U\perp Y$. Por tanto $U\cdot(rX + sY) = r\cdot 0 + s\cdot 0 = 0$ para todo escalar r y s.

30.15 Sean O, X y Y los tres vértices del rombo, como muestra la figura. Entonces el cuarto vértice es $X + Y$ (puesto que la recta que pasa por Y y $X + Y$ tiene vector-dirección $(X + Y) - Y = X$, etc.).



También $|X| = |Y|$ puesto que los lados de un rombo son de igual longitud. Ahora $Y - X$ es un vector-dirección de la recta que pasa por X y Y; y $X + Y$ es un vector-dirección de la recta que pasa por O y $X + Y$. Calculando su producto interior tenemos $(Y - X)\cdot(X + Y) = (Y - X)\cdot X + (Y - X)\cdot Y = Y\cdot X - X\cdot X + Y\cdot Y - X\cdot Y = -X\cdot X + Y\cdot Y = -|X|^2 + |Y|^2 = 0$. Por lo tanto las diagonales son perpendiculares.

30.17 Sean X, Y, y $-X$ los vértices de un triángulo inscrito en un semicírculo de radio $|X|$. El centro está obviamente en O. Puesto que Y está sobre el semicírculo, $|Y| = |X|$.



Escogiendo $Y - X$ y $Y - (-X)$ cómo vectores-dirección de las rectas en cuestión, calculemos su producto interior:

$$(Y - X)\cdot(Y - (-X))$$

$$=(Y - X)\cdot(Y + X) = (Y - X)\cdot Y + (Y - X)\cdot X$$
$$=Y\cdot Y - X\cdot Y + Y\cdot X - X\cdot X = Y\cdot Y - X\cdot X$$
$$=|Y|^2 - |X|^2 = 0.$$

Por lo tanto las dos rectas son perpendiculares.

31.1 Observe que $(0, 1)$, es un vector unitario. $[(6, 7)\cdot(0, 1)](0, 1) = 7(0, 1) = (0, 7)$, y $(6, 7) - (0, 7) = (6, 0)$. Entonces $(6, 7) = (0, 7) + (6, 0)$.

31.3 Observe que $(1, 0, 0)$ es un vector unitario. $[(3, 2, -1)\cdot(1, 0, 0)](1, 0, 0) = 3(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$, y $(3, 2, -1) - (3, 0, 0) = (0, 2, -1)$. Entonces $(3, 2, -1) = (3, 0, 0) + (0, 2, -1)$.

31.5 $$[(\pi, e)\cdot(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})](1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \left(\frac{\pi + e}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\pi + e}{2}, \frac{\pi + e}{2}\right)$$

y

$$(\pi, e) - \left(\frac{\pi + e}{2}, \frac{\pi + e}{2}\right) = \left(\frac{\pi - e}{2}, \frac{e - \pi}{2}\right).$$

Entonces

$$(\pi, e) = \left(\frac{\pi + e}{2}, \frac{\pi + e}{2}\right) + \left(\frac{\pi - e}{2}, \frac{e - \pi}{2}\right).$$

31.7 Deseamos que $r(-5, 3)$ sea la componente de (π, e) paralela a $(-5, 3)$ y V sea la componente de (π, e) perpendicular a $(-5, 3)$;

$$\frac{(\pi, e)\cdot(-5, 3)}{(-5, 3)\cdot(-5, 3)}(-5, 3)$$

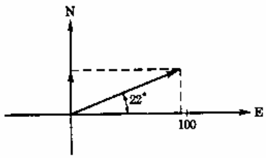
es la componente de (π, e) paralela a $(-5, 3)$, de tal manera

$$r = \frac{(\pi, e)\cdot(-5, 3)}{(-5, 3)\cdot(-5, 3)} = \frac{-5\pi + 3e}{25 + 9} = \frac{-5\pi + 3e}{34}.$$

entonces

$$V = (\pi, e) - \frac{-5\pi + 3e}{34}(-5, 3) = \left(\frac{3(3\pi + 5e)}{34}, \frac{5(3\pi + 5e)}{34}\right).$$

31.9



La componente en la dirección este es $100 \cos 22° \cong 100 \cdot 0.93 = 93$ libras; la componente en la dirección norte es $100 \operatorname{sen} 22° \cong 100 \cdot 0.37 = 37$ libras.

31.11 Si $U = 0$, entonces U es paralelo a $rA + sB$. Si $U \neq 0$, entonces $A = aU$ y $B = bU$ para algunos escalares a y b. Por lo tanto $rA + sB = raU + sbU = (ra + sb)U$, de modo que $rA + sB$ es paralelo a U.

31.13 $Q = \{A + tU: t \text{ es un escalar}\}$ para algún vector A. Puesto que U es un vector-dirección, no es cero; de tal manera que podemos descomponer a A en las componentes paralela y perpendicular a U.

$A = A_u + A_p$ donde $A_u = \dfrac{A \cdot U}{U \cdot U} U$ y $A_p \perp U$. Ahora

$A_p \in Q$ puesto que $A_p = A + \left(-\dfrac{A \cdot U}{U \cdot U}\right) U$. También, A_p y V son paralelos puesto que $A_p \perp U$ y $V \perp U$. Como $V \neq 0$, $A_p = rV$ para algún escalar r. Por lo tanto $rV \in Q$.

31.15 Sean L y R rectas en el espacio bidimensional y supongamos $L \| R$. Sea U un vector-dirección de L y V un vector-dirección de R. Entonces $U \neq 0 \neq V$ puesto que U y V son vectores-dirección. Además, U no es un vector-dirección para R ni V para L puesto que hemos supuesto que $L \| R$. Así, por el problema 31.14, podemos encontrar escalares a y b tales que $bU \in R$ y $aV \in L$. Por lo tanto $L = \{aV + tU: t \text{ es un escalar}\}$ y $R = \{bU + sV: s \text{ es un escalar}\}$. Tomando $t = b$ y $s = a$, tenemos $bU + aV \in R$ y $bU + aV \in L$. Así $bU + aV \in R \cap L$ de tal manera que $R \cap L \neq \varnothing$, contrario a nuestra hipótesis de que $R \cap L = \varnothing$. Por lo tanto nuestra hipótesis de que $L \| R$ debe ser falsa; $L \| R$.

31.17 Codominio de $g = \{X: X \text{ es perpendicular a } U\}$

Demostración. Observe que $f(X) = (U \cdot X)U$ es la componente de X paralela a U y que $f(X) + g(X) = X$. Por tanto $g(X)$ es la componente de X perpendicular a U. Así todo elemento del codominio de g es un vector perpendicular a U. (Podríamos también haber mostrado esto haciendo observar que $g(X) \cdot U = 0$.) Falta mostrar que si Y es cualquier vector perpendicular a U, entonces $Y = g(X)$ para algún X. Aceptamos que $Y \cdot U = 0$ y sea $X = Y$. Entonces $g(X) = g(Y) = Y - (U \cdot Y)U = Y$. ∎

$g(X) = 0$ si y sólo si X y U son paralelos.

Demostración. Si $g(X) = 0$ entonces $X = f(X)$ así como $(U \cdot X)U = X$. Por lo tanto X y U son paralelos. De otra parte, si X y U son paralelos, entonces $X = rU$ para algún r. Por lo tanto $g(X) = X - (U \cdot X)U = rU - (U \cdot rU)U = rU - r(U \cdot U)U = rU - rU = 0$.

$g(rX + sY) = (rX + sY) - f(rX + sY) = (rX + sY) - [rf(X) + sf(Y)] = r(X - f(X)) + s(Y - f(Y)) = rg(X) + sg(Y)$.

32.1 $U \cdot V = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0; |U| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = |V|$. Ahora tomamos las componentes de $(3, -7)$ en el sentido y dirección de estos dos vectores unitarios:

$$\begin{aligned} aU &= [(3, -7)\cdot(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})]\,(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ &= (-4/\sqrt{2})(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (-2, -2); \\ bV &= [(3, -7)\cdot(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})](-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ &= (-10/\sqrt{2})(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (5, -5). \end{aligned}$$

Por tanto

$$(3, -7) = (-2, -2) + (5, -5).$$

32.3 (a) Es.
(b) No es. $(1, 1) \perp (1, -1)$ pero $|(1, 1)| = 2$.
(c) Es.
(d) No es. $|(0, 1)| = |(-1, 0)| = |(1, 0)| = 1$, $(0, 1) \perp (-1, 0)$, y $(0, 1) \perp (1, 0)$, pero $(-1, 0) \not\perp (1, 0)$.

32.5 $U \cdot U = \dfrac{4 + 9 + 36}{49} = 1$. Sea $V = \left(\dfrac{6}{7}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{-3}{7}\right)$

y $W = \left(\dfrac{-3}{7}, \dfrac{6}{7}, \dfrac{-2}{7}\right)$.

32.7 Tenemos $\{U, V\}$ ortonormal, $A = aU + cV$, y $B = bU + dV$. Entonces $A \cdot B = (aU + cV) \cdot (bU + dV) = aU \cdot bU + aU \cdot dV + cV \cdot bU + cV \cdot dV = ab(U \cdot U) + ad(U \cdot V) + cb(V \cdot U) + cd(V \cdot V) = ab(1) + ad(0) + cb(0) + cd(1) = ab + cd$.

32.9 Sea $M = A - (A \cdot U)U - (A \cdot V)V - (A \cdot W)W$. Entonces A es M más la suma de las componentes de A paralelas a U, y a V, y a W. Para demostrar que M es perpendicular a cada uno de los vectores U, V, y W:

$$\begin{aligned}
&M \cdot U \\
&= [A - (A \cdot U)U - (A \cdot V)V - (A \cdot W)W] \cdot U \\
&= A \cdot U - (A \cdot U)U \cdot U - (A \cdot V)V \cdot U - (A \cdot W)W \cdot U \\
&= A \cdot U - A \cdot U = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&M \cdot V \\
&= [A - (A \cdot U)U - (A \cdot V)V - (A \cdot W)W] \cdot V \\
&= A \cdot V - (A \cdot U)U \cdot V - (A \cdot V)V \cdot V - (A \cdot W)W \cdot V \\
&= A \cdot V - A \cdot V = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&M \cdot W \\
&= [A - (A \cdot U)U - (A \cdot V)V - (A \cdot W)W] \cdot W \\
&= A \cdot W - (A \cdot U)U \cdot W - (A \cdot V)V \cdot W - (A \cdot W)W \cdot W \\
&= A \cdot W - A \cdot W = 0.
\end{aligned}$$

32.11 (a) El codominio de T es todo el plano, puesto que para cualquier vector Y hay un vector X tal que $T(X) = Y$.

Demostración. Sea $Y = (a, b)$. Sea $X = aU + bV$. Entonces

$$\begin{aligned}
&T(X) \\
&= T(aU + bV) = (U \cdot [aU + bV],\ V \cdot [aU + bV]) \\
&= (aU \cdot U + bU \cdot V,\ aV \cdot U + bV \cdot V) = (a, b) = Y. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

También $T(X) = 0$ si y sólo si $(U \cdot X, V \cdot X) = 0$, si y solamente si $U \cdot X = 0$ y $V \cdot X = 0$, si y sólo si X es perpendicular tanto a U como a V, si y sólo si $X = 0$.

(b)
$$\begin{aligned}
&T(rX + sY) \\
&= (U \cdot [rX + sY],\ V \cdot [rX + sY]) \\
&= (rU \cdot X + sU \cdot Y,\ rV \cdot X + sV \cdot Y) \\
&= (rU \cdot X,\ rV \cdot X) + (sU \cdot Y,\ sV \cdot Y) \\
&= r(U \cdot X,\ V \cdot X) + s(U \cdot Y,\ V \cdot Y) \\
&= rT(X) + sT(Y)
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
&S(T(X)) \\
&= S(U \cdot X,\ V \cdot X) = (U \cdot X)U + (V \cdot X)V = X \\
&T(S(r, s)) \\
&= T(rU + sV) = (U \cdot [rU + sV],\ V \cdot [rU + sV]) \\
&= (rU \cdot U + sU \cdot V,\ rV \cdot U + sV \cdot V) = (r, s).
\end{aligned}$$

34.1 (a) $X(t) = (-1, 2) + t(1, 1)$ es una ecuación paramétrica de la recta que pasa por $(-1, 2)$ y es paralela a $(1, 1)$, que es la recta que pasa por $(-1, 2)$ perpendicular a $(-1, 1)$. Por lo tanto una ecuación no paramétrica de esta recta es, por el teorema 34.2,

$$-(x + 1) + (y - 2) = 0$$

o

$$y - x - 3 = 0.$$

(b) $X(t) = (1, -1) + t(2, -3)$ es una ecuación paramétrica de la recta que pasa por $(1, -1)$ paralela a $(2, -3)$, que es la recta que pasa por $(1, -1)$ y es perpendicular a $(3, 2)$. Por lo tanto una ecuación no paramétrica de esta recta es, por el teorema 34.2,

$$3(x - 1) + 2(y + 1) = 0$$

o

$$3x + 2y - 1 = 0.$$

34.3 (a) $\{X: (X - (1, 2)) \cdot (2, -3) = 0\} = \{(1, 2) + t(3, 2): t \text{ es un escalar}\}$ por el teorema 34.1, puesto que $(2, -3) \perp (3, 2)$. Por tanto una ecuación paramétrica para la recta es

$$X(t) = (1, 2) + t(3, 2).$$

(b) $x + 4y + 4 = 0$ si y sólo si $y = -\frac{1}{4}x - 1$, así, por el teorema 34.7, la recta tiene pendiente $m = -\frac{1}{4}$ e intercepto respecto a y, -1. Por tanto, por las definiciones de pendiente e intercepto respecto a y, $(1, -\frac{1}{4})$ es un vector-dirección y $(0, -1)$ pertenece a la recta. (Observe que la recta no es igual al eje y puesto que tiene pendiente.) Una ecuación paramétrica de esta recta es

$$X(t) = (0, -1) + t(1, -\tfrac{1}{4})$$

34.5 (a) $\{X: (X + (1, 3)) \cdot (7, 1) = 0\} = \{X: (X - (-1, -3)) \cdot (7, 1) = 0\}$ es perpendicular a $(7, 1)$ por el teorema 34.1, por tanto paralelo a $(-1, 7)$, de modo que $(-1, 7)$ es un vector-dirección de la recta dada

(b) $2x + 3y - 12 = 0$ si y sólo si $y = -\frac{2}{3}x + 4$. La recta con esta ecuación tiene pendiente $-\frac{2}{3}$, así $(1, -\frac{2}{3})$ es un vector-dirección de la recta.

(c) $y = x - 2$ es una ecuación de una recta con pendiente 1. Por tanto $(1, 1)$ es un vector-dirección de esta recta.

(d) $\{X: X \cdot (2, -3) = 4\} = \{X: X \cdot (2, -3) - 4 = 0\}$ es una recta perpendicular a $(2, -3)$ por el teorema 34.4. Por lo tanto esta recta tiene vector-dirección $(3, 2)$

34.7 Aplicando el teorema 34.7, obtenemos la ecuación no paramétrica $y = -3x + 8$.

34.9 Por el teorema 34.4, $\{X: X \cdot (1, 4) + 6 = 0\}$ es perpendicular a $(1, 4)$, así el vector-dirección de la perpendicular es $(1, 4)$. Puesto que 2 es el intercepto respecto a y de la recta deseada, $(0, 2)$ está sobre la recta y una ecuación es

$$X(t) = (0, 2) + t(1, 4)$$

34.11 (x, y) está sobre $\{X: X \cdot (2, 1) = 5\}$ si y sólo si $(x, y) \cdot (2, 1) = 5$, es decir, si y solamente si $2x + y = 5$. También (x, y) está sobre $\{(0, 1) + t(1, 1): t \text{ es un escalar}\}$, si y sólo si $(x, y) = (0, 1) + t(1, 1) = (t, 1 + t)$ para algún t, es decir, si y solamente si $y = 1 + x$. Resolviendo $2x + y = 5$ y $y = 1 + x$, encontramos $x = \dfrac{4}{3}$ y $y = \dfrac{7}{3}$. Verificando por substitución encontramos que $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$ realmente está sobre ambas rectas

34.13 La recta tiene vector-dirección $(1, m)$, puesto que su pendiente es m. Por lo tanto la recta es $\{(x_0, y_0) + t(1, m): t \text{ es un escalar}\}$. Ahora (x, y) está sobre esta recta si y sólo si $(x, y) = (x_0, y_0) + t(1, m) = (x_0 + t, y_0 + tm)$, es decir, si y sólo si $x = x_0 + t$ y $y = y_0 + tm$, o $tm = (x - x_0)m$ y $tm = y - y_0$. Así (x, y) está sobre la recta si y sólo si $y - y_0 = m(x - x_0)$.

34.15 Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 tienen vectores-dirección $(1, m_1)$ y $(1, m_2)$. Las dos rectas son paralelas si y sólo si $(1, m_1) = t(1, m_2)$ para algún t, si y sólo si $m_1 = m_2$. Las dos rectas son perpendiculares si y sólo si $(1, m_1) = t(-m_2, 1)$ para algún t, si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

34.17 Si agrega n galones de alcohol el número de galones de alcohol será $0{,}12 \cdot 100 + n = 12 + n$, y el número de galones de jerez, $100 + n$. Para obtener una mezcla al 20 % de alcohol necesita $0{,}20(100 + n) = 12 + n$ o $5(12 + n) = 100 + n$. Así $n = 10$ galones.

34.19 (1) Si $m \neq n$, entonces

$$L \cap Q = \left\{\left(\frac{d-b}{m-n}, \frac{md-bn}{m-n}\right)\right\}.$$

(Las rectas no son paralelas o coincidentes. $mx + b = nx + d$, $x = (d - b)/(m - n)$, $y = m(d - b)/(m - n) + b = (md - bn)/(m - n)$.)

(2) Si $m = n$ y $b \neq d$, entonces $L \cap Q = \varnothing$. (Las rectas son paralelas. $mx + b = nx + d$ es imposible si $m = n$ a no ser que $b \neq d$.)

(3) Si $m = n$ y $b = d$, entonces $L \cap Q = L = Q$ (Las rectas son coincidentes.)

35.1 (a) $(0, 0, 0) = 0(1, 1, 0) + 0(0, 1, 1)$ es combinación lineal.

(b) No es. Si $(1, 0, 1) = r(1, 1, 0) + s(0, 1, 1) = (r, r + s, s)$, entonces $r = 1, s = 1$, y $r + s = 0$, lo cual es imposible.

(c) No es. Si $(0, 1, 0) = r(1, 1, 0) + s(0, 1, 1)$, entonces $r = 0$, $s = 0$ y $r + s = 1$, lo cual es imposible.

(d) $(2, 5, 3) = 2(1, 1, 0) + 3(0, 1, 1)$ es combinación lineal.

35.3 (a) Independientes. Suponga $a(1, 2, 3) + b(3, 2, 1) = 0$. Entonces $a + 3b = 0$, $2a + 2b = 0$, y $3a + b = 0$. Resolviendo, encontramos $a = b = 0$. Por tanto, por el teorema 35.3, los vectores son independientes.

(b) Dependientes. $(8, 4, 8) + (-4)(2, 1, 2) = 0$.

(c) Independientes. Suponga $a(2, 3, 5) + b(4, 9, 25) = 0$. Entonces $2a + 4b = 0$, $3a + 9b = 0$, y $5a + 25b = 0$. Por lo tanto $a = b = 0$.

35.5 Los vectores son linealmente dependientes. Si A y B son paralelos, entonces uno de los vectores A o B es un múltiplo escalar del otro, y los vectores son dependientes por definición.

35.7 El conjunto S es linealmente dependiente. Puesto que Q es linealmente dependiente, hay un vector A en Q que es combinación lineal de los vectores en Q. Pero todo vector en Q está también en S. Por tanto A es un vector en S que es una combinación lineal de vectores en S. Por eso S es linealmente dependiente.

35.9 El vector cero pertenece a un conjunto no linealmente independiente. Si el conjunto consta del vector 0 solamente, el conjunto es dependiente por definición. Si hay otro vector $B \neq 0$ en el conjunto entonces $0 = 0 \cdot B$, de aquí el conjunto no es linealmente independiente.

35.11 La recta $\{rA: r \text{ es un escalar}\}$ es una recta que pasa por O y A. Puesto que B está sobre esta recta existe un escalar b tal que $B = bA$. En forma semejante, $C = cA$, de aquí el conjunto es linealmente dependiente.

35.13 Sean U, V y W tres vectores bidimensionales. Si U y V son linealmente dependientes, entonces así lo son U, V, y W por el problema 35.7. Si U y V son linealmente independientes, entonces W es una combinación lineal de U y V por el teorema 35.5 y de nuevo U, V y W son linealmente dependientes.

35.15 1. Considere las combinaciones lineales de A, B y C.

2. Cada combinación lineal de A, B, y C es una combinación lineal de W, A, B, y C.

3. Los vectores W, A, B y C son linealmente dependientes, porque W es una combinación lineal de A, B, y C.

4. A es combinación lineal de W, B, y C, o B es una combinación lineal de W, A y C, o C es una combinación lineal de W, A, y B.

Demostración. $wW + aA + bB + cC = 0$ para algunos escalares w, a, b, y c tales que no todos son 0. Es imposible para $a = b = c = 0$. Por tanto podemos resolver para A, B o C en términos de los otros vectores.

Damos por sentado que A es una combinación lineal de W, B y C.

5. Cada combinación lineal de A, B, y C es una combinación lineal de $W. B$, y C.

6. Cada combinación lineal de A, B, y C es una combinación lineal de V, W, B, y C.

7. Los vectores V, W, B, y C son linealmente dependientes puesto que V es una combinación lineal de los otros.

8. OB es una combinación lineal de V, W, y C o C es una combinación lineal de V, W, y B porque:

Existen escalares v, w, b y c, no todos 0, tales que $vV + wW + bB + cC = 0$. Si b y c son ambos 0, entonces $vV + wW = 0$ y ni v, ni w son 0. Pero V y W son independientes, entonces o $b \neq 0$ o $c \neq 0$, y podemos resolver para B o C.

Damos por sentado que B es una combinación lineal de V, W y C.

9. Cada combinación lineal de A, B y C es una combinación lineal de V, W y C, por 6 y 8.

10. Cada combinación lineal de A, B y C es una combinación lineal de U, V, W y C.

11. Los vectores U, V, W, y C son linealmente dependientes puesto que U es una combinación lineal de los otros.

12. C es una combinación lineal de U, V, y W, porque hay escalares u, v, w, y c, no todos 0, tales que $uU + vV + wW + cC = 0$. Si $c = 0$ entonces $uU + vV + wW = 0$ y u, v, y w no son todos 0. Pero U, V, y W son linealmente independientes, de aquí $c \neq 0$. Por tanto podemos resolver para C en términos de U, V, y W.

13. Cada combinación lineal de A, B, y C es una combinación lineal de U, V, y W, por 10 y 12.

36.1 Puesto que $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$ son linealmente independientes, el plano paralelo a estos dos vectores y que pasa por $(1, 2, -1)$ es $\{(1, 2, -1) + u(1, 0, 1) + v(0, 1, 1)$: u y v escalares$\}$ por el corolario 36.6.

36.3 Los tres puntos dados no son colineales, de aquí que el plano que pasa por ellos sea $\{(1, 0, 0) + u[(1, 1, 0) -(1, 0, 0)] + v[(1, 1, 1) - (1, 0, 0)]$: u y v escalares$\}$ $=$ $\{(1, 0, 0) + u(0, 1, 0) + v(0, 1, 1)$: u y v escalares$\}$. Una ecuación vectorial paramétrica es $X(u, v) = (1, 0, 0) + u(0, 1, 0) + v(0, 1, 1)$.

36.5 $(1, 1, 1) - (0, 0, 0) = ½\ [(2, 2, 2) - (0, 0, 0)]$, así, los tres puntos son colineales. $M = \{(0, 0, 0) + u(1, 1, 1) + v(1, 0, 0)$: u y v escalares$\}$ y $N = \{(0, 0, 0) + u(1, 1, 1) + v(0, 1, 0)$: u y v escalares$\}$ son planos que pasan por los tres puntos dados y $M \neq N$.

Demostración.

(0, 0, 0) está situado sobre ambos planos (tome $u = v = 0$).
(1, 1, 1) está situado sobre ambos planos (tome $u = 1, v = 0$).
(2, 2, 2) está situado sobre ambos planos (tome $u = 2, v = 0$).

$M \neq N$ puesto que $(1, 0, 0) \in M$, pero $(1, 0, 0) \notin N$, porque si $(1, 0, 0) \in N$, entonces $(1, 0, 0) = u(1, 1, 1) + v(0, 1, 0)$ para algún u y v; pero entonces $u = 1$ y $u = 0$. ∎

36.7 $(1, 0, 0)$ y $(1, 0, 0) + (1, 2, 1) = (2, 2, 1)$ está situado sobre L. El plano que pasa por estos dos puntos y por D es $M = \{(0, 0, 0) + u(1, 0, 0) + v(2, 2, 1)$: u y v escalares$\}$. Si U es un punto sobre L, entonces $U = (1, 0, 0) + t(1, 2, 1)$ para algún t. Para ver que U también está sobre M sea $u = 1 - t$ y $v = t$. Por tanto M contiene a D y a todo punto de L. (El artificio que nos lleva a $u = 1 - t$ y $v = t$ es éste: preguntémonos qué valores de u y v dan $(1, 0, 0) + t(1, 2, 1) = (0, 0, 0) + u(1, 0, 0) + v(2, 2, 1)$, es decir, qué valores de u y v dan $(1 + t, 2t, t) = (u + 2v, 2v, v)$.)

36.9 Puesto que $(1, 2, 1) + r(0, 1, 0) + s(1, 1, 4) = (1 + s, 2 + r + s, 1 + 4s)$, $M = \{(x, y, z): (x, y, z) = (1 + s, 2 + r + s, 1 + 4s)$ para algunos escalares r y $s\}$ $=$ $\{(x, y, z): x = 1 + s, y = 2 + r + s$ y $z = 1 + 4s$ para algunos escalares r y $s\}$.

36.11 $M = \{(x, y, z): x = 2 - r + s,\ y = 1 + 2r - s$ y $z = r + 2s$ para algunos r y $s\}$ $=$ $\{(x, y, z) : (x, y, z) = (2, 1, 0) + (-r, 2r, r) + (s, -s, 2s)$ para algunos escalares r y $s\}$ $=$ $\{(x, y, z) : (x, y, z) = (2, 1, 0) + r(-1, 2, 1) + s(1, -1, 2)$ para algunos escalares r y $s\}$ $=$ $\{(2, 1, 0) + r(-1, 2, 1) + s(1, -1, 2)$: r y s escalares$\}$.

36.13 El plano que contiene a D, E, y F es

$\{D + u(E - D) + v(F - D)$: u y v son escalares$\}$
$= \{(1 - u - v)D + uE + vF$: u y v son escalares$\}$
$= \{(1 - e - f)D + eE + fF$: e y f son escalares$\}$
$= \{dD + eE + fF$: e, y f son escalares y $d = 1 - e - f\}$
$= \{dD + eE + fF$: d, e, y f tales que $d + e + f = 1\}$.

37.1

(a) $(1, 0, 0) \times (0, 0, 1)$
$$= \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}\right) = (0, -1, 0).$$

(b) $(1, 1, 0) \times (0, 1, 1)$
$$= \left(\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = (1, -1, 1).$$

(c) $(1, 0, 1) \times (0, 1, 0)$
$$= \left(\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = (-1, 0, 1).$$

37.3

$$(0, 0, 1) \times (1, 0, 0) = \left(\begin{vmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}\right) = (0, 1, 0),$$

Puesto que $(1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$ por el problema 37.1(a). Por lo tanto la multiplicación vectorial no es conmutativa.
Luego,

$$(1, 0, 0) \times [(1, 0, 0) \times (0, 1, 0)]$$
$$= (1, 0, 0) \times \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\right)$$
$$= (1, 0, 0) \times (0, 0, 1)$$
$$= \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}\right) = (0, -1, 0),$$

puesto que

$$[(1, 0, 0) \times (1, 0, 0)] \times (0, 1, 0)$$
$$= \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}\right) \times (0, 1, 0)$$
$$= (0, 0, 0) \times (0, 1, 0)$$
$$= \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\right) = (0, 0, 0).$$

Por lo tanto la multiplicación vectorial no es asociativa.

37.5 Sea $A = (a, b, c)$ y $B = (d, e, f)$. Entonces $-A = (-a, -b, -c)$ y $-B = (-d, -e, -f)$ de aquí que

$$(-A) \times (-B)$$
$$= \left(\begin{vmatrix}-b & -c\\-e & -f\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-a & -c\\-d & -f\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-a & -b\\-d & -e\end{vmatrix}\right)$$

$$= (bf - ce, -(af - cd), ae - bd)$$
$$= \left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}\right) = A \times B.$$

37.7 (a) $E(U, U) = -E(U, U)$ puesto que $E(A, B) = -E(B, A)$ para todo A, B. Por consiguiente $E(U, U) = 0$ puesto que $x = -x$ solamente si $x = 0$.

(b) $E(U + V, W) = -E(W, U + V) = -E(W, U) - E(W, V) = E(U, W) + E(V, W)$.
(c) $E(U, vV) = -E(vV, U) = -vE(V, U) = vE(U, V)$.
(d) $E(uU, vV) = uE(U, vV)$ (por hipótesis) $= uvE(U, V)$ (por (c)).
(e) $E(aI + bi, cI + di) = E(aI + bi, cI) + E(aI + bi, di)$ (por hipótesis)
$= E(aI, cI) + E(bi, cI) + E(aI, di) + E(bi, di)$ (por (b))
$= acE(I, I) + bcE(i, I) + adE(I, i) + bdE(i, i)$ (por (d))
$= bcE(i, I) + adE(I, i)$;
(por (a) tenemos $E(I, I) = E(i, i) = 0$)
$= adE(I, i) - bcE(I, i)$ (por hipótesis)
$= (ad - bc)E(I, i)$.
(f) Sean $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$ dos vectores bidimensionales. Entonces $A = a(1, 0) + b(0, 1) = aI + bi$ y $B = c(1, 0) + d(0, 1) = cI + di$. $E(A, B) = E(aI + bi, cI + di) = (ad - bc)E(I, i)$ por (e) y' $(ad - bc)E(I, i) = ad - bc$ puesto que $E(I, i) = 1$ por hipótesis. Pero $ad - bc = D(A, B)$ de aquí $E(A, B) = D(A, B)$.

37.9 $A_1 = A - \dfrac{(A \cdot B)}{(B \cdot B)} B$ y $A = A_1 + \dfrac{(A \cdot B)}{(B \cdot B)} B$.

Por tanto

$$A \times B = -(B \times A) = -B \times \left(A_1 + \frac{(A \cdot B)}{(B \cdot B)} B\right)$$
$$= -B \times A_1 - B \times \frac{(A \cdot B)}{(B \cdot B)} B = A_1 \times B + \frac{(A \cdot B)}{(B \cdot B)}$$
$$(B \times B) = A_1 \times B.$$

Ahora $|A \times B| = |A_1 \times B| = |A_1|\,|B|$ por el problema **37.8.** Puesto que $A_1 = A$ sen θ tenemos $|A_1| = |A$ sen $\theta| = |A|$ sen θ, de modo que $|A \times B| = |A|\,|B|$ sen θ.

38.1 Si. $(0, 1, 1) \times (1, 1, 0) =$
$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-1, 1, -1) \text{ y } (1, -1, 1) = -1 \cdot (-1, 1, -1).$$

38.3 $[X - (4, 9, 81)] \cdot (1, 3, 9) = 0$.

38.5 El plano dado pasa por $(1, 2, 3)$ y es normal a $(2, 0, 4) \times (-2, 1, 1) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-4, -10, 2)$.

Por tanto una ecuación vectorial no paramétrica es $[X - (1, 2, 3)] \cdot (-4, -10, 2) = 0$.

38.7 Puesto que $(7, -1, 3)$ y $(-42, 6, -18)$ son linealmente dependientes (lo cual encontraríamos si tomamos el producto vectorial), el conjunto dado es $L = \{(9, 13, -2) + u(7, -1, 3)$: u un escalar$\}$ que es una recta que pasa por $(9, 13, -2)$ con vector-dirección $(7, -1, 3)$. $X \in L$ si y sólo si $X - (9, 13, -2) = u(7, -1, 3)$ para algún escalar u.

El vector $(7, -1, 3)$ es normal al plano $M = \{X: X \cdot (7, -1, 3) = 0\}$, y para cualquier vector V, V es perpendicular a M si y sólo si $V = u(7, -1, 3)$ para algún escalar u (por el teorema 38.4). Por tanto $X \in L$ si y sólo si $X - (9, 13, -2)$ es perpendicular a M.

Ahora necesitamos una ecuación paramétrica para M. Por inspección vemos que $(1, 7, 0)$ y $(0, 3, 1)$ están sobre M puesto que $(1, 7, 0) \cdot (7, -1, 3) = 0$ y $(0, 3, 1) \cdot (7, -1, 3) = 0$. Los vectores $(1, 7, 0)$ y $(0, 3, 1)$ son linealmente independientes (hábilmente los hemos escogido en forma canónica), de aquí que $M = \{r(1, 7, 0) + s(0, 3, 1)$: r y s son escalares$\}$. Ahora V es perpendicular a M si y sólo si $V \cdot (1, 7, 0) = 0$ y $V \cdot (0, 3, 1) = 0$. Por tanto $X \in L$ si y sólo si $[X - (9, 13, -2)] \cdot (1, 7, 0) = 0$ y $[X - (9, 13, -2)] \cdot (0, 3, 1) = 0$ así hemos encontrado las ecuaciones no paramétricas de L que deseábamos.

38.9 (a) Damos por sentado que A, B, y C son dependientes. Entonces $aA + bB + cC = 0$ para algunos escalares a, b y c no todos cero. Si $a \neq 0$, entonces podemos escribir A como una combinación lineal de B y C. Por tanto A es perpendicular a $B \times C$ por el teorema 38.2 de modo que $A \cdot B \times C = 0$.

Si $a = 0$ entonces $bB + cC = 0$. Ahora si $b \neq 0$, $B = -\dfrac{c}{b} C$; así, $B \times C = -\dfrac{c}{b}\, C \times C = 0$. Por tanto $A \cdot B \times C = A \cdot 0 = 0$. En forma semejante, si $c \neq 0$, $C = -\dfrac{b}{c} B$; así, $B \times C = B \times \left(-\dfrac{b}{c} B\right) = -\dfrac{b}{c} B \times B = 0$, y, de nuevo, $A \cdot B \times C = 0$.

(b) Ahora suponemos $A \cdot B \times C = 0$. Si B y C son linealmente dependientes, entonces uno es un múltiplo escalar del otro; entonces $B \times C = 0$; así, $A \cdot B \times C = 0$. Si B y C son linealmente independientes, entonces A (que es perpendicular a $B \times C$) es una combinación lineal de B y C, por el teorema 38.2 (i).

38.11 Por el problema 38.10, E o es $\{0\}$, o es una recta que pasa por 0, o es una plano que pasa por 0, o es todo el espacio tridimensional.

(a) $E = \{0\}$. Entonces $E^\perp = \{V$: V es un vector perpendicular a $0\} = \{V$: V es un vector$\}$ y $(E^\perp)^\perp = \{U$: U es un vector perpendicular a cada uno de los elementos de $E^\perp\} = \{U: U = 0\} = \{0\}$.

(b) E es una recta que pasa por 0. Entonces $E = \{rA$: r un escalar$\}$ para algún vector A diferente de cero. $E^\perp =$

$\{V: V$ es un vector perpendicular a cada elemento de $E\} = \{V: V$ es un vector perpendicular a rA para cada escalar $r\} = \{V: V$ es un vector perpendicular a $A\} = \{V: V \cdot A = 0\} = \{V: (V - 0) \cdot A = 0\}$. Por tanto $E^\perp$ es un plano que pasa por 0 con normal A. Así $E^\perp = \{rB + sC: r$ y s son escalares$\}$ para algunos vectores linealmente independientes B y C, y A es un múltiplo escalar no nulo de $B \times C$, por el teorema 38.4. Ahora $(E^\perp)^\perp = \{U: U$ es un vector perpendicular a cada elemento de $E^\perp\} = \{U: U$ es perpendicular al plano $E^\perp\} = \{U: U = 0$ o U es un múltiplo escalar distinto de cero de $B \times C\}$ (por el teorema 38.4) $= \{U: U = 0$ o U es un múltiplo escalar no nulo de $A\} = \{U: U$ es un múltiplo escalar de $A\} = \{rA: r$ es un escalar$\}$.

(c) E es un plano que pasa por 0. Entonces $E = \{X: X \cdot A = 0\}$ para algún vector no nulo A. $E^\perp = \{V: V$ es un vector perpendicular a cada elemento de $E\} = \{rA: r$ un escalar$\}$ (la misma demostración como para $(E^\perp)^\perp$ en la parte (b)). $(E^\perp)^\perp = \{V: V$ es un vector perpendicular a cada elemento de $E^\perp\} = \{V: V \cdot A = 0\}$ (la misma demostración que para $E^\perp$ en la parte (b)).

(d) E es todo el espacio tridimensional. $E^\perp = \{0\}$ y $(E^\perp)^\perp = E$.

39.1 Si tomamos $x = z = 0$ tenemos $y = -4$ de tal manera que $(0, -4, 0) \in M = \{(x, y, z): 3x - 2y + 7z = 8\}$. Por el teorema 39.1 $(3, -2, 7)$ es normal a M y por tanto podemos tomar $P = (0, -4, 0)$ y $V = (3, -2, 7)$.

39.3 $$(2, 3, 5) \times (5, 3, 2) = \left(\begin{vmatrix}3 & 5\\3 & 2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}2 & 5\\5 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 3\\5 & 3\end{vmatrix}\right) =$$

$(-9, 21, -9)$ es normal al plano dado. El plano pasa por $(1, 1, 1)$. Por tanto el plano es $\{X: [X - (1, 1, 1)] \cdot (-9, 21, -9) = 0\} = \{X: X \cdot (-9, 21, -9) = 3\}$ de aquí podemos tomar $V = (-9, 21, -9)$ y $r = 3$. (Podríamos haber tomado $\frac{1}{3} V = (-3, 7, -3)$ como una normal, en tal caso $r = 1$.)

39.5 El plano dado tiene normal $(1, -1, -1)$ por el teorema 39.1. Por tanto el plano deseado es $\{X: [X - (1, 2, 3)] \cdot (1, -1, -1) = 0\}$ y una ecuación vectorial para este plano es $[X - (1, 2, 3)] \cdot (1, -1, -1) = 0$.

39.7 El vector $(-2, 2, 1)$ es normal a M y por tanto es un vector-dirección para cualquier recta normal a M. $L = \{(3, 4, 7) + r(-2, 2, 1): r$ es un escalar$\}$ es la recta normal a M que pasa por $(3, 4, 7)$. Para encontrar el elemento de L que también esté sobre M, resolvemos $[(3, 4, 7) + r(-2, 2, 1)] \cdot (-2, 2, 1) = 0$ y obtenemos $r = -1$. Por lo tanto el punto que deseamos es $(3, 4, 7) - (-2, 2, 1) = (5, 2, 6)$.

39.9 El plano cuya ecuación escalar es $ax + by + cz - d = 0$ es $\{(x, y, z): ax + by + cz = d\} = \{(x, y, z): (x, y, z) \cdot (a, b, c) = d\}$. El vector (a, b, c) es normal a este plano. Por tanto, una recta normal al plano y que pasa por P es $\{(x_0, y_0, z_0) + r(a, b, c): r$ un escalar$\}$. Para encontrar la intersección de la recta y el plano resolvemos $[(x_0, y_0, z_0) + r(a, b, c)] \cdot (a, b, c) = d$ para r: $[(x_0, y_0, z_0) + r(a, b, c)] \cdot (a, b, c) = (x_0, y_0, z_0) \cdot (a, b, c) + r[(a, b, c) \cdot (a, b, c)] = ax_0 + by_0 + cz_0 + r[a^2 + b^2 + c^2]$.

Por lo tanto

$$r = \frac{d - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Por consiguiente el punto de intersección es

$$(x_0, y_0, z_0) + \frac{d - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c).$$

El vector diferencia de P y la intersección es

$$(x_0, y_0, z_0) - \left[(x_0, y_0, z_0) + \frac{d - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c)\right] = \frac{(ax_0 + by_0 + cz_0) - d}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c)$$

y la longitud de este vector es

$$\left|\frac{(ax_0 + by_0 + cz_0) - d}{a^2 + b^2 + c^2}\right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \left|\frac{(ax_0 + by_0 + cz_0) - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

39.11 M y N son paralelos solamente si hay un vector V que es normal a ambos. Puesto que $M \cap N$ no es vacía hay un punto P que pertenece a M y a N. Por lo tanto, por el teorema 38.5, $M = \{X: (X - P) \cdot V = 0\} = N$.

40.1 (1) Si $a \neq 0$ y $x(b, a, 0) + y(c, 0, a) = (xb + yc, xa, ya) = (0, 0, 0)$, entonces $xa = ya = 0$ de tal manera que $x = y = 0$. Por lo tanto $(b, a, 0)$ y $(c, 0, a)$ son linealmente independientes.

(2) Si $b \neq 0$ y $x(b, a, 0) + y(0, c, b) = (xb, xa + yc, yb) = (0, 0, 0)$, entonces $xb = yb = 0$ de tal manera que $x = y = 0$. Por lo tanto $(b, a, 0)$ y $(0, c, b)$ son linealmente independientes.

(3) Si $c \neq 0$ y $x(0, c, b) + y(c, 0, a) = (yc, xc, xb + ya) = (0, 0, 0)$, entonces $xc = yc = 0$; así, $x = y = 0$. Por tanto $(0, c, b)$ y $(c, 0, a)$ son linealmente independientes.

40.3 Por el teorema 40.2, $M \cap N$ tiene vector-dirección

$$(2, 1, 1) \times (1, 1, 2) = \left(\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\right) = (1, -3, 1).$$

Si $(x, y, z) \in M \cap N$, entonces $(x, y, z) \cdot (2, 1, 1) = 2x + y + z = 2$ y $(x, y, z) \cdot (1, 1, 2) = x + y + 2z = 0$. Por lo tanto $y = -x - 2z$ y $2x - x - 2z + z = x - z = 2$. Tomamos $x = 1, z = -1$ y tenemos $y = 1$ de tal manera que $(1, 1, -1) \in M \cap N$ y por tanto $M \cap N = \{(1, 1, -1) + r(1, -3, 1)$: r es un escalar $\}$.

40.5 Por el teorema 40.4, el plano es

$\{X : [X - (2, 3, 1)] \cdot (-1, 1, 0) \times (1, 1, 3) = 0\}$

$$= \{X: [X - (2, 3, 1)] \cdot \left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right) = 0\}$$

$= \{X: [X - (2, 3, 1)] \cdot (3, 3, -2) = 0\}$

y una ecuación vectorial es $X \cdot (3, 3, -2) = (2, 3, 1) \cdot (3, 3, -2)$.

40.7 Tenemos $M = \{(x, y, z)$: $3x + 2y + 4z = 8\}$ y $N = \{(x, y, z)$: $2x + 3y + 4z = 10\}$. Consideremos para cada escalar k, el plano cuya ecuación es $(3x + 2y + 4z - 8) + k(2x + 3y + 4z - 10) = 0$ y concluimos, como en el ejemplo 42.7, que él contiene $M \cap N$. Entonces puesto que $(5, 7, 12) \in$ al plano deseado Q, tenemos $(15 + 14 + 48 - 8) + k(10 + 21 + 48 - 10) = 0$ y encontramos que $k = -1$. Por tanto, puesto que $(3x + 2y + 4z - 8) - (2x + 3y + 4z - 10) = x - y + 2 = 0$, tenemos $Q = \{(x, y, z)$: $x - y = -2\}$.

40.9 Un punto $(x, y, z) \in L = \{(1, 2, 3) + t(3, 2, 1)$: t es un escalar $\}$ si y sólo si $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3, 2, 1) = (1 + 3t, 2 + 2t, 3 + t)$ para algún escalar t. Así $(x, y, z) \in L$ si y sólo si $x - 1 = 3t$, $y - 2 = 2t$, y $z - 3 = t$. Por lo tanto $2(x - 1) - 3(y - 2) = 0$ ó $2x - 3y + 4 = 0$ es una ecuación del plano que pasa por L paralelo al eje z; $(x - 1) - 3(z - 3) = 0$ o $x - 3z + 8 = 0$ es una ecuación del plano que pasa por L paralelo al eje y; $(y - 2) - 2(z - 3) = 0$ o $y - 2z + 4 = 0$ es una ecuación del plano que pasa por L y es paralelo al eje x; y dos planos cualesquiera de éstos se cortan en L.

41.1

(a)

①	1	3	−2
②	2	2	6
③	3	2	5
④ = ② − 2①	0	−4	10
⑤ = ③ − 3①	0	−11	−11
⑥ = 4⑤ − 11④	0	0	−66

Por la regla 41.2, ①, ④, y ⑥ son linealmente independientes. Por lo tanto, por el teorema 41.5, ①, ②, y ③ son linealmente independientes.

(b)

①	1	2	2
②	1	1	1
③	2	3	3
④ = ② − ①	0	−1	−1
⑤ = ③ − 2①	0	−1	−1
⑥ = ⑤ − ④	0	0	0

Puesto que ①, ④, y ⑥ son linealmente dependientes, lo son ①, ②, y ③. ⑥ = 0, con lo que ⑥ − ④ = (③ − 2①) − (② − ①) = −① − ② + ③ = 0.
Por tanto $-(1, 2, 2) - (1, 1, 1) + (2, 3, 3) = 0$.

(c)

①	−2	4	6
②	5	7	3
③	4	2	1
④ = 2② + 5①	0	34	24
⑤ = ③ + 2①	0	10	11
⑥ = 34⑤ − 10④	0	0	134

①, ④ y ⑥ son linealmente independientes, por tanto lo son ①, ② y ③.

(d)

①	1	−2
②	3	4
③	−1	5
④ = ② − 3①	0	2
⑤ = ③ + ①	0	3
⑥ = 2⑤ − 3④	0	0

①, ④ y ⑥ son linealmente dependientes, luego ①, ② y ③ son linealmente dependientes. (Desde luego, tres vectores bidimensionales son siempre linealmente dependientes.) Puesto que 0 = ⑥ = 2 (③ + ①) − 3(② − 3①) = 11① − 3② + 2③, tenemos $11(1, -2) - 3(3, -4) + 2(-1, 5) = 0$.

(e)

①	2	−3
②	4	−6
③	6	−9
④ = ② − 2①	0	0
⑤ = ③ − 3①	0	0

De este modo ①, ② y ③ son linealmente dependientes y $-2(2, -3) + (4, -6) + 0(6, -9) = 0$. (En efecto, dos cualesquiera de tres vectores dados son linealmente dependientes.)

41.3

(a)

①	1	−1	3
②	2	−3	5
③	−1	4	−2
④	4	1	−2
⑤ = ② − 2①	0	−1	−1
⑥ = ③ + ①	0	3	1
⑦ = ④ − 4①	0	5	−14
⑧ = ⑥ + 3⑤	0	0	−2
⑨ = ⑦ + 5⑤	0	0	−19
⑩ = 2⑨ − 19⑧	0	0	0

Así ①, ②, ③ y ④ son linealmente dependientes. Luego

0 = ⑩ = 2⑨ − 19⑧ = 2(⑦ + 5⑤) − 19(⑥ + 3⑤)
= 2([④ − 4①] + 5[② − 2①])
− 19([③ + ①] + 3[② − 2①])
= 67① − 47② − 19③ + 2④,

tenemos $67(1, -1, 3) - 47(2, -3, 5) - 19(-1, 4, -2) + 2(4, 1, -2) = 0$.

(b)

①	2	0	4
②	1	1	−2
③	3	−3	0
④	2	−1	3
⑤ = 2② − ①	0	2	−8
⑥ = 2③ − 3①	0	−6	−12
⑦ = ④ − ①	0	−1	−1
⑧ = ⑥ + 3⑤	0	0	−36
⑨ = 2⑦ + ⑤	0	0	−10
⑩ = 36⑨ − 10⑧	0	0	0

De este modo ①, ②, ③ y ④ son linealmente dependientes. Entonces 0 = ⑩ = 36⑨ − 10⑧, tenemos

0 = 18⑨ − 5⑧ = 18[2⑦ + ⑤] − 5[⑥ + 3⑤]
= 18[2(④ − ①) + (2② − ①)] − 5[(2③ − 3①) + 3(2② − ①)]
= −24① + 6② − 10③ + 36④.

Por tanto

$-24(2, 0, 4) + 6(1, 1, -2) - 10(3, -3, 0) + 36(2, -1, 3) = 0$.

(c)

①	1	−1
②	2	3
③	−1	−2
④	0	1
⑤ = ② − 2①	0	5
⑥ = ③ + ①	0	−3
⑦ = ⑤ − 5④	0	0
⑧ = ⑥ + 3④	0	0

Entonces ①, ②, ③ y ④ son linealmente dependientes, y, después de algunos cálculos tenemos $-2(1, -1) + (2, 3) + 0(-1, -2) - 5(0, 1) = 0$.

(d)

①	−1	2
②	−3	−1
③	−1	−1
④	1	4
⑤ = ② − 3①	0	−7
⑥ = ③ − ①	0	−3
⑦ = ④ + ①	0	6
⑧ = 7⑥ − 3⑤	0	0
⑨ = 7⑦ + 6⑤	0	0

Por tanto ①, ②, ③ y ④ son linealmente dependientes y tenemos

$$2(-1, 2) - 3(-3, -1) + 7(-1, -1) + 0(1, 4) = 0$$

y

$$-11(-1, 2) + 6(-3, -1) + 0(-1, -1) + 7(1, 4) = 0.$$

41.5 Si A, B y C son linealmente dependientes, existen escalares a, b y c, no todos nulos, tales que $aA + bB + cC = 0$. Ahora bien, en este caso, podríamos, con $d = 0$, establecer $aA + bB + cC + dD = 0$ donde no todos los escalares a, b, c, d son nulos, y tener, en consecuencia, que A, B, C y D serían linealmente dependientes contra lo supuesto en la hipótesis.

41.7 $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, y $D = (1, 1, 1)$ es un sencillo ejemplo posible.

41.9 Supongamos que tenemos cuatro vectores tridimensionales. Un conjunto de estos vectores equivale a una lista de cuátro vectores en forma canónica, según el teorema 41.7. El primer vector de esta última forma ha de ser de la forma (a, b, c) o $(0, a, b)$ o $(0, 0, a)$ o $(0, 0, 0)$, donde $a \neq 0$. Si el primer vector es (a, b, c), el segundo será (0,

$d, e)$, el tercero $(0, 0, f)$ y el cuarto $(0, 0, 0)$; estos vectores evidentemente son linealmente dependientes (problema 41.4). Los otros casos son semejantes. De aquí se sigue que los vectores que aparecen en la forma canónica son linealmente dependientes y, por el teorema 41.5, también lo son los vectores del conjunto original. Si hay más de cuatro vectores tridimensionales, serán linealmente dependientes puesto que, conforme a lo demostrado anteriormente, cuatro cualesquiera de ellos son linealmente dependientes.

En general, $n + 1$ vectores pertenecientes a un espacio n-dimensional son linealmente dependientes.

41.11 Al igual que en el problema precedente, las condiciones equivalen a:
¿Existen números w, x, y y z, no todos cero, tales que

$$(0, 0, 0) = (w - 3x - y + z, 2w - x + y + z, w + 2x + y - z)$$
$$= w(1, 2, 1) + x(-3, -1, 2) + y(-1, 1, 1) + z(1, 1, -1)?$$

Como cuatro vectores tridimensionales son siempre linealmente dependientes (problema 41.9), es posible encontrar dichos números x, y, z, w. (La aplicación de los métodos operativos indicados en esta sección nos llevan a $w = -2$, $x = -4$, $y = 5$, y $z = -5$.)

En general, dadas n ecuaciones con las variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = 0$, existen números $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, no todos cero, que satisfacen simultáneamente, las n ecuaciones. (Las ecuaciones de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ reciben el nombre de "ecuaciones lineales homogéneas"; el polinomio $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ es "un polinomio lineal homogéneo". Homogéneo significa que todos los términos son de un mismo grado; "lineal" significa que el grado de dichos términos es, precisamente, 1.)

42.1 (a) $M \cap N$ no es vacía, puesto que $0 \in M$ y $0 \in N$.

(b) $M \cap N$ es un conjunto de vectores n-dimensionales, puesto que M y N son conjuntos de vectores n-dimensionales.

(c) Si $X \in M \cap N$ y $Y \in M \cap N$ entonces $aX + bY \in M \cap N$ para los escalares a y b. **Demostración.** Supongamos que $X \in M \cap N$, $Y \in M \cap N$. Entonces, $X \in M$, $X \in N$, $Y \in M$ y $Y \in N$. Como M y N son espacios vectoriales, $aX + bY \in M$ y $aX + bY \in N$ para todos los escalares a y b. De aquí, $aX + bY \in M \cap N$.

Por tanto, $M \cap N$ es un espacio vectorial.

42.3 Sea $Q = \{X : X = Y + Z$ para algún elemento Y de M y algún Z de $N\}$. $0 \in Q$ puesto que $0 = 0 + 0$, y Q es un conjunto de vectores n-dimensionales ya que la suma de vectores n-dimensionales es, a su vez, un vector n-dimensional. Supongamos que $X_1 \in Q$ y $X_2 \in Q$, y que a y b son escalares. Debemos probar que $aX_1 + bX_2 \in Q$. $X_1 = Y_1 + Z_1$ para algún $Y_1 \in M$ y algún $Z_1 \in N$; $X_2 = Y_2 + Z_2$ para algún $Y_2 \in M$ y algún $Z_2 \in N$. Como M es un espacio vectorial, $aY_1 + bY_2 \in M$; como N es también un espacio vectorial, $aZ_1 + bY_2 \in N$. Entonces, $(aY_1 + bY_2) + (aZ_1 + bZ_2) \in Q$. Ahora bien, $(aY_1 + bY_2) + (aZ_1 + bZ_2) = a(Y_1 + Z_1) + b(Y_2 + Z_2) = aX_1 + bX_2$. Por tanto $aX_1 + bX_2 \in Q$.

42.5.

①	1	2	1
②	3	1	0
③	1	3	2
④ = ② − 3①	0	5	3
⑤ = ③ + ①	0	5	3
⑥ = ④ + ⑤	0	0	0

El espacio generado por $\{(1, 2, 1), (3, 1, 0), (-1, 3, 2)\}$ es también generado por $\{(1, 2, 1), (0, 5, 3), (0, 0, 0)\}$, conforme al teorema 42.8. El espacio generado por $\{(1, 2, 1), (0, 5, 3), (0, 0, 0)\}$ es también generado por $\{(1, 2, 1), (0, 5, 3)\}$ puesto que cualquier combinación lineal de aquellos es, a su vez, combinación lineal de éstos. Por otra parte, $(1, 2, 1)$ y $(0, 5, 3)$ son linealmente independientes; por tanto, $\{(1, 2, 1), (0, 5, 3)\}$ es una base.

42.7.

①	1	1	2	1
②	0	1	2	1
③	1	3	1	2
④ = ③ − ①	0	2	−1	1
⑤ = ④ − 2②	0	0	−5	−1

Así, $\{(1, 1, 2, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 3, 1, 2)\}$ es una base del espacio vectorial generado por $\{(1, 1, 2, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 3, 1, 2)\}$. (Acabamos de demostrar que los vectores dados son linealmente independientes.)

42.9 $0 \in M = \{(x, y, z) : x - y = 0$ y $2y + z = 0\}$, de modo que M es un conjunto, no vacío de vectores tridimensionales. Supongamos que $(x_1, y_1, z_1) \in M$ y $(x_2, y_2, z_2) \in M$. Entonces $x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$. De aquí, $a(x_1 - y_1) + b(x_2 - y_2) = (ax_1 + bx_2) - (ay_1 + by_2) = 0$. También $2y_1 + z_1 = 0 = 2y_2 + z_2$ por tanto $a(2y_1 + z_1) + b(2y_2 + z_2) = 2(ay_1 + by_2) + (az_1 + bz_2) = 0$. De donde $(ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, az_1 + bz_2) = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2) \in M$.

$M = \{(x, y, z) : (x, y, z) \cdot (1, -1, 0) = 0$, y $(x, y, z) \cdot (0, 2, 1) = 0\} = \{r(1, -1, 0) \times (0, 2, 1) : r$ escalar$\} = \{r(-1, -1, 2) : r$ escalar$\}$. Puesto que M está formado por múltiplos escalares (combinaciones lineales) de $(-1, -1, 2)$, y como todo vector no nulo es linealmente independiente, $\{(-1, -1, 2)\}$ es una base de M.

42.11 Supongamos que S no es base de M. S no genera a M y, en consecuencia, los elementos de S no pueden ser linealmente independientes. Por tanto, hay algún elemento A de S que es combinación lineal de otros elementos de S. Esto significa que toda combinación lineal de elementos de S es una combinación lineal de elementos $S \backsim \{A\}$. Entonces, M es generado por $S \backsim \{A\}$, que es un subconjunto propio de S. Tal resultado contradice la suposición hecha que S es un conjunto minimal que genera a M.

42.13 Supongamos que M y N son espacios vectoriales n-dimensionales. Como B es una base de M y $M \subseteq N$, entonces B es un conjunto linealmente independiente de vectores de N; ahora bien, o B genera a N o no lo genera. Si B genera a N, entonces B es también una base de N, y $C = \varnothing$ (es decir, $B \cup \varnothing = B$ es una base de N). Si B no genera a N, entonces existe algún elemento A_1 de N que no es combinación lineal de elementos de B. $B \cup \{A_1\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de N; este conjunto o genera a N o no lo genera. Si $B \cup \{A_1\}$ genera a N, entonces es base de N, y será $C = \{A_1\}$; si $B \cup \{A_1\}$ no genera a N, entonces continuamos añadiendo elementos al conjunto. En cada paso obtendremos un conjunto $B \cup \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ de elementos linealmente independientes de N. Este proceso ha de concluir al cabo de n pasos o menos, ya que no puede haber más que n vectores linealmente independientes en un espacio n-dimensional.

43.1 $$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

43.3 (a)
$$T(1, 0, 0) = (1, 0)$$
$$T(0, 1, 0) = (0, 0)$$
$$T(0, 0, 1) = (0, 0)$$

Entonces, la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)
$$T(1, 0, 0) = (0, 0)$$
$$T(0, 1, 0) = (2, 0)$$
$$T(0, 0, 1) = (0, 0)$$

Entonces, la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)
$$T(1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$
$$T(0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$
$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$$

Entonces, la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d)
$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$
$$T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$
$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

Entonces, la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e)
$$T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$
$$T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$
$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

Entonces, la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(f)
$$T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$
$$T(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$$
$$T(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$$

Entonces, la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

43.5 $S(x, y, z) = (x - y + z, 3x + y - 2z)$, por tanto, el codominio de S es un conjunto de vectores bidimensionales.

$S(r(x, y, z) + s(u, v, w)) = S(rx + su, ry + sv, rz + sw)$
$= ((rx + su) - (ry + sv) + (rz + sw), 3(rx + su) + (ry + sv) - 2(rz + sw))$
$= r(x - y + z, 3x + y - 2z) + s(u - v + w, 3u + v - 2w)$
$= rS(x, y, z) + sS(u, v, w)$.

Por tanto, S es una transformación lineal.

$$S(1, 0, 0) = (1, 3)$$
$$S(0, 1, 0) = (-1, 1)$$
$$S(0, 0, 1) = (1, -2).$$

Entonces, la matriz de S es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

43.7 En todos los casos T es una función de un espacio tridimensional hacia un espacio tridimensional, de modo que basta probar que T conserva las combinaciones lineales.

(a) T no es lineal puesto que

$$T((0, 0, 1) + (0, 1, 0)) = T(0, 1, 1) = (0, 1, 0)$$

pero

$$T(0, 0, 1) + T(0, 1, 0) = (0, 0, 0) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

(b)
$$\begin{aligned} & T(r(x, y, z) + s(u, v, w)) \\ &= T(rx + su, ry + sv, rz + sw) \\ &= ((rx + su) + (ry + sv), (ry + sv) + (rz + sw), (rz + sw) + (rx + su)) \\ &= r(x + y, y + z, z + x) + s(u + v, v + w, w + u) \\ &= rT(x, y, z) + sT(u, v, w). \end{aligned}$$

Por tanto, T es una transformación lineal cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) T no es lineal puesto que

$$2T(0, 1, 0) = 2(0, 2, 0) = (0, 4, 0)$$

pero

$$T(2(0, 1, 0)) = T(0, 2, 0) = (0, 3, 0)$$

(d)
$$\begin{aligned} & T(r(x, y, z) + s(u, v, w)) \\ &= T(rx + su, ry + sv, rz + sw) \\ &= ((rx + su) + 2(ry + sv), 3(ry + sv), 2(ry + sv) + (rz + sw)) \\ &= r(x + 2y, 3y, 2y + z) + s(u + 2v, 3v, 2v + w) \\ &= rT(x, y, z) + sT(u, v, w). \end{aligned}$$

Por tanto, T es lineal, y la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

43.9 (a) Para encontrar la matriz de T es necesario encontrar previamente $T(1, 0)$ y $T(0, 1)$.

①	3	1	4	1	2	1
②	−1	2	3	0	−2	1
③ = ① + 3②	0	7	13	1	−4	4
④ = $\frac{1}{7}$③	0	1	$\frac{13}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$
⑤ = ① − ④	3	0	$\frac{15}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{3}{7}$
⑥ = $\frac{1}{3}$⑤	1	0	$\frac{15}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{18}{21}$	$\frac{3}{21}$

De ④ y ⑥ obtenemos $T(1, 0) = (\frac{15}{21}, \frac{6}{21}, \frac{18}{21}, \frac{3}{21})$ y $T(0, 1) = (\frac{13}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{7})$.
Entonces, la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{21} & \frac{6}{21} & \frac{18}{21} & \frac{3}{21} \\ \frac{13}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

(b)

①	2	1	1	3	−2
②	3	1	3	2	1
③	1	0	1	−1	1
④ = ② − 3③	0	1	0	5	−2
⑤ = ① − ③	1	1	0	4	−3
⑥ = ⑤ − ④	1	0	0	−1	−1
⑦ = ③ − ⑥	0	0	1	0	2

De ⑥, ④, y ⑦ obtenemos la matriz de T:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Supongamos que T es una transformación lineal. Como $(-1, 0, -2) = (2, 1, 1) - (3, 1, 3)$, tenemos que $T(-1, 0, -2) = T((2, 1, 1) - (3, 1, 3)) = T(2, 1, 1) - T(3, 1, 3) = (3, -2) - (2, 1) = (1, -3)$ pero también sabemos que $T(-1, 0, -2) = (-1, 1)$. Por tanto, T no es una función y, en consecuencia, no puede ser una transformación lineal.

43.11 Sea A

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$T(x, y) = ((x, y) \cdot (A_{1,1}, A_{2,1}), (x, y) \cdot (A_{1,2}, A_{2,2})).$$

Por tanto,

$$T(x, y)_2 = (x, y) \cdot (A_{1,2}, A_{2,2}).$$

$$\begin{aligned} S(r(x, y) + s(u, v)) &= S(rx + su, ry + sv) \\ &= T(rx + su, ry + sv)_2 \\ &= (rx + su, ry + sv) \cdot (A_{1,2}, A_{2,2}) \\ &= (rx + su)A_{1,2} + (ry + sv)A_{2,2} \\ &= r((x, y) \cdot (A_{1,2}, A_{2,2})) + s((u, v) \cdot (A_{1,2}, A_{2,2})) \\ &= rT(x, y)_2 + sT(u, v)_2 \\ &= rS(x, y) + sS(u, v). \end{aligned}$$

Con lo que S es una transformación de un espacio bidimensional en un espacio de una dimensión.

$$S(1, 0) = T(1, 0)_2 = (1, 0) \cdot (A_{1,2}, A_{2,2}) = A_{1,2}$$

y

$$S(0, 1) = T(0, 1)_2 = (0, 1) \cdot (A_{1,2}, A_{2,2}) = A_{2,2}.$$

Entonces, la matriz de S es

$$\begin{pmatrix} A_{1,2} \\ A_{2,2} \end{pmatrix}$$

43.13 (a) T es una función cuyo dominio es el conjunto de todos los vectores tridimensionales y cuyo codominio es un conjunto de vectores tridimensionales. Para comprobar que T conserva las combinaciones lineales, haremos: $T(r(x, y, z) + s(u, v, w)) = T(rx + su, ry + sv, rz + sw) = (2[rx + su], 2[ry + sv], 2[rz + sw]) = r(2x, 2y, 2z) + 5(2u, 2v, 2w) = rT(x, y, z) + sT(u, v, w)$.

Ahora,

$$T(1, 0, 0) = (2, 0, 0),\ T(0, 1, 0) = (0, 2, 0) \text{ y}$$
$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 2),$$

con lo que la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Cualquier vector (x, y), al rotar un ángulo $\pi/2$ se transforma en el vector $(-y, x)$. Por tanto, $T(x, y) = (-y, x)$.

T conserva las combinaciones lineales puesto que $T(r(x, y) + s(u, v)) = T(rx + su, ry + sv) = (-(ry + sv), rx + su) = r(-y, x) + s(-v, u) = rT(x, y) + sT(u, v)$.

Ahora, $T(1, 0) = (0, 1)$ y $T(0, 1) = (-1, 0)$, con lo que la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(También podríamos, trabajando con números complejos, multiplicar por $i = (0, 1)$. Entonces $T(x, y) = (x, y)(0, 1) = (-y, x)$.)

(c) Sea $U(\theta)$ el número complejo de longitud 1, y cuyo ángulo es θ. Entonces $U(\theta) = \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Supongamos que T está definido por $T(x, y) = (x, y)U(\theta) = (x, y)(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$. Para todo vector (x, y) la longitud de $T(x, y)$ es la longitud de (x, y) multiplicada por la longitud de $U(\theta)$; por tanto, la longitud de $T(x, y)$ es la misma de (x, y). Además el ángulo de $T(x, y)$ es el ángulo de (x, y) más el ángulo de $U(\theta)$. Por tanto, $T(x, y)$ es el mismo (x, y) que ha rotado un ángulo θ.

Probemos que T es lineal: $T(r(x, y) + s(u, v)) = [r(x, y) + s(u, v)]U(\theta) = r(x, y)U(\theta) + s(u, v)U(\theta)$ (tal como se probó para los números complejos) $= rT(x, y) + sT(u, v)$.

Ahora, $T(1, 0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $T(0, 1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$; por tanto, la matriz de T es

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

44.1.

(a)

①	1	0	1	1
②	0	1	2	1
③ = ② − 2①	−2	1	0	−1

Entonces, una base del espacio nulo es $\varnothing$ y una base del codominio es $\{(1, 1), (0, -1)\}$.

(b)

①	1	0	0	1	2	−1
②	0	1	0	3	1	1
③	0	0	1	−1	3	−3
④ = ③ + ①	1	0	1	0	5	−4
⑤ = ② − 3①	−3	1	0	0	−5	4
⑥ = ④ + ⑤	−2	1	1	0	0	0

Por tanto, una base del espacio nulo es $\{(-2, 1, 1)\}$, y una base del codominio es $\{(1, 2, 1), (0, -5, 4)\}$.

(c)

①	1	0	1	3	1
②	0	1	−1	3	−1
③ = ① + ②	1	1	0	6	0

Entonces, una base del espacio nulo es $\varnothing$ y una base del codominio es $\{(1, 3, 1), (0, 6, 0)\}$.

(d)

①	1	0	0	2	1
②	0	1	0	3	2
③	0	0	1	1	−2
④ = 3① − 2②	3	−2	0	0	−1
⑤ = 2③ − ①	−1	0	2	0	−5
⑥ = 5④ − ⑤	16	−10	−2	0	0

Entonces, una base del espacio nulo es $\{(16, -10, -2)\}$ y una base del codominio es $\{(2, 1), (0, -5)\}$.

44.3 Puesto que el dominio de T es el espacio tridimensional, la dimensión del dominio de T es 3. Como el codominio de T es un espacio bidimensional, el rango de T es 2. Entonces, conforme al teorema 44.4, la nulidad de T es 1, es decir, una recta.

44.5 Puesto que una recta es de dimensión 1, la nulidad de T y el rango de T son iguales a 1. Por tanto, conforme al teorema 44.4, la dimensión del dominio de T es 2.

44.7 Sea $T(x, y, z) = (y, z, 0)$. Entonces, $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$, y $T(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$. Por tanto, el codominio es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$, es decir, el plano xy; el espacio nulo es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $(1, 0, 0)$, esto es, el eje x.

44.9 El conjunto $E + F = \{X + Y : X \in E, Y \in F\}$ es un subconjunto del m-espacio puesto que la suma de dos vectores m-dimensionales es un vector m-dimensional. Supongamos que $Z_1 \in E + F$ y $Z_2 \in E + F$. Entonces $Z_1 = X_1 + Y_1$ y $Z_2 = X_2 + Y_2$ para algunos $X_1, X_2 \in E$ y algunos $Y_1, Y_2 \in F$. Ahora bien $rZ_1 + sZ_2 = r(X_1 + Y_1) + s(X_2 + Y_2) = (rX_1 + sX_2) + (rY_1 + sY_2)$. Como E y F son espacios vectoriales, se tiene que $(rX_1 + sX_2) \in E$ y $(rY_1 + sY_2) \in F$. Por tanto, $rZ_1 + sZ_2$ es una suma de un elemento de E con un elemento de F; con lo que $(rZ_1 + sZ_2) \in E + F$. En consecuencia, $E + F$ es un espacio vectorial. (Véase el problema 42.3).

44.11 Sea E el espacio nuld de T, supongamos que $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ es una base de E. Entonces, existe un conjunto de vectores $\{W_1, W_2, \ldots, W_j\}$ tal que $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\} \cup \{W_1, W_2, \ldots, W_j\}$ es base del espacio m-dimensional. Obsérvese que $k + j = m$. Sea F el espacio generado por $\{W_1, \ldots, W_j\}$. Evidentemente $E \cap F = \{0\}$, $E + F =$ espacio m-dimensional, y la dimensión de $F = j = m - k = m$-nulidad de $T =$ rango de T.

Falta aún probar que si X y Y son elementos distintos pertenecientes a F, entonces $T(X) \neq T(Y)$. Supongamos que $T(X) = T(Y)$, entonces, $T(X) - T(Y) = 0$, con lo que $T(X - Y) = 0$. Ahora bien, $X - Y \neq 0$, y $X - Y \in F$; por tanto, $E \cap F \neq \{0\}$.

45.1. (a) $$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

(e) $$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}$$

(f) $$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

45.3. (a) $$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11 & 4\\30 & 11\end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix}5 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11 & 20\\6 & 11\end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 13\\13 & 34\end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 17\\17 & 29\end{pmatrix}$$

(e) $$\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & 0\\0 & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ac & 0\\0 & bd\end{pmatrix}$$

45.5. (a) $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\0 & 7 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\0 & 14 & 0\\0 & 0 & 15\end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & j\end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & j\end{pmatrix}$$

45.7. (a) $$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\1 & 4 & 0 & 1\\-2 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\8\\-8\end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\-1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\8\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27\\-27\end{pmatrix} = X.$$

(b) $$(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\\1 & 2\\0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = (13 \quad 21)$$

$$(13 \quad 21)\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = (8 \quad -8) = X.$$

45.9.

$$(T \circ S)(2, \quad 0, \quad -1, \quad 1) =$$

$$(2 \quad 0 \quad -1 \quad 1)\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\\0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= (3 \quad 2)\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{pmatrix} = (7 \quad -1) = (7, \quad -1)$$

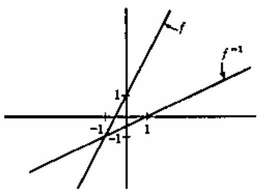
45.11 $(R \circ S) \circ T = \{(x, w)$: para algún y, $(x, y) \in T$, $(y, w) \in R \circ S\} = \{(x, w)$: para algún y, $(x, y) \in T$ y algún z, $(y, z) \in S$ y $(z, w) \in R\} = \{(x, w)$: para algún z y para algún y, $(x, y) \in T$, $(y, z) \in S$, $(z, w) \in R\} = \{(x, w)$: para algún z, $(x, z) \in S \circ T$, $(z, w) \in R\} = R \circ (S \circ T)$.

45.13 Supóngase que R es transitiva y que $(x, z) \in R \circ R$. Entonces, para algún y, $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ por definición de composición. Por tanto $(x, z) \in R$ puesto que R es transitiva, con lo que $R \circ R \subset R$.

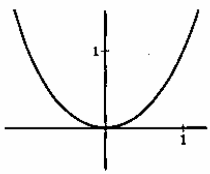
Supóngase que $R \circ R \subset R$, que $(x, y) \in R$ y que $(y, z) \in R$. Como existe un y tal que $(x, y) \in R$ y que $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R \circ R$ por definición de composición. Entonces, $(x, z) \in R$ puesto que $R \circ R \subset R$. Por tanto, R es transitiva.

46.1 (a) f es inyectiva (uno a uno), porque si $y = 2x + 1$, y $y = 2z + 1$, entonces $2x + 1 = 2z + 1$, con lo que $x = z$.

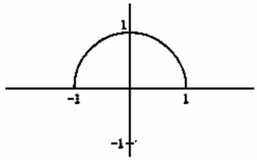
f es sobreyectiva porque, para todo número y, $f\left(\dfrac{y-1}{2}\right) = y$.



(b) f no es inyectiva, porque $f(2) = 4 = f(-2)$. f no es sobreyectiva, porque no existe un número x tal que $f(x) = -1$.

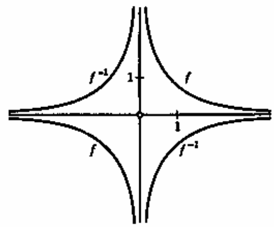


(c) f no es inyectiva, porque tanto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ como $(\ \ 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ pertenecen a f.
f no es sobreyectiva, porque no existe un número x tal que $(x, -\frac{1}{2}) \in f$.

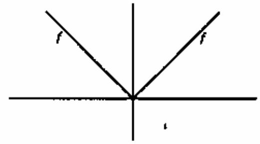


(d) f es inyectiva, porque $xy = 1$ y $zy = 1$, entonces $x = 1/y = z$.

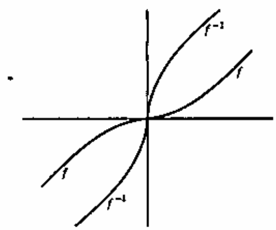
f es sobreyectiva, porque, si $y \neq 0$, entonces $(1/y)y = 1$, con lo que $(1/y, y) \in f$.



(e) f no es inyectiva, porque $|3| = |-3|$, con lo que $(3, 3) \in f$ y $(-3, 3) \in f$.
f no es sobreyectiva, porque no existe un número x tal que $|x| = -5$.



(f) f es inyectiva, porque, si $y = x^3$ y $y = z^3$, entonces $x = z$.
f es sobreyectiva, porque $(y^{1/3}, y) \in f$ para todo número real y.



46.3
$$
\begin{aligned}
f_1 &= \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\} \\
f_2 &= \{(0, 0), (1, 2), (2, 1)\} \\
f_3 &= \{(0, 1), (1, 0), (2, 2)\} \\
f_4 &= \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\} \\
f_5 &= \{(0, 2), (1, 0), (2, 1)\} \\
f_6 &= \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}
\end{aligned}
$$

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_6	f_5	f_1	f_2
f_5	f_5	f_6	f_2	f_1	f_4	f_3
f_6	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1

Obsérvese que

$$f_1 = I_X.$$
$$f_1^{-1} = f_1,\ f_2^{-1} = f_2,\ f_3^{-1} = f_3,\ f_4^{-1} = f_5,\ f_5^{-1} = f_4 \text{ y } f_6^{-1} = f_6.$$

46.5 Sea f una función definida por $f(x) = x + 1$ si $x < 0$, y $f(x) = x - 1$ si $x \geq 0$. f está definida para todo número real, y para cada número real y existe un número real x tal que $f(x) = y$ (si $y < 0$, entonces $x = y - 1$; si $y \geq 0$, $x = y + 1$). Por tanto, f es sobreyectiva pero no es inyectiva porque $(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, = f(\frac{3}{2})$.

Sea g una función definida por $g(x) = x - 1$ si $x < 0$, y $g(x) = x + 1$ si $x \geq 0$. Si $x < 0$, entonces $x - 1 < 0$, con lo que $f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$; si $x \geq 0$, entonces $x + 1 \geq 0$, de modo que $f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$. Por tanto, g es una inversa a la derecha de f.

Supóngase que existe una función h tal que $h(f(x)) = x$ para todo x. Entonces $h(f(\frac{1}{2})) = h(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Ahora bien, $h(f(-\frac{3}{2})) = h(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \neq -\frac{3}{2}$. Por tanto, f no tiene inversa a la izquierda.

46.7 Supóngase que g es una inversa a la derecha de f. Entonces, para todo $x \in X$, $f(g(x)) = x$. Así, x pertenece al codominio de f para todo $x \in X$, con lo que f es sobreyectiva en X.

Supóngase ahora que f es sobreyectiva en X. Para todo $y \in X$ existe algún x tal que $f(x) = y$. Puesto que es posible que para algún y exista más de un x, escójase únicamente un x para cada y; exprésese dicha x por $y^\star$. Sea $g = \{(y, y^\star) : y \in X\}$. Ahora bien, g es una función sobre X porque, para cada $y \in X$, existe uno y solamente un $y^\star$. Para todo x, $f(g(x)) = f(x^\star) = x$. Por tanto, g es una inversa a la derecha de f.

46.9 Sea R una relación transitiva. Supóngase que $(x, y) \in R^{-1}$ y $(y, z) \in R^{-1}$ entonces, $(y, x) \in R$ y $(z, y) \in R$. Por tanto, $(z, x) \in R$ puesto que R es transitiva. Entonces, $(x, z) \in R^{-1}$, con lo que R^{-1} es transitiva.

46.11 La matriz de $S \circ T$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz de $T \circ S$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para todo vector tridimensional (x, y, z):

$$(S \circ T)(x, y, z) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x\ y\ z).$$

Por tanto, $S \circ T = T \circ S = I$, con lo que $S = T^{-1}$.

47.1 Sea T el operador lineal tal que $M(T) = A$. Entonces $M(I)M(T) = M(T \circ I) = M(I \circ T) = M(T)M(I) = M(T)$. Por tanto $M(I)A = AM(I) = A$. Ahora bien, $M(I)_{ij}$ es la j-ésima coordenada de U_i, el i-ésimo vector, con lo que $M(I)_{ij}$.

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$ De donde, $M(I)_{ij} = \delta_{ij}$, y, en consecuencia

$M(I) = \delta$. Por tanto, $\delta A = A\delta = A$.

47.3 Sea T el operador lineal tal que $M(T) = B$, como B no es singular, las filas de B son linealmente independientes. De ahí, el rango de T es igual a la dimensión del espacio y la nulidad de T es cero. En consecuencia, T no es singular, y, entonces, $M(T^{-1}) = B^{-1}$. Es decir, B tiene un inverso B^{-1}, y podemos multiplicar $AB = \delta$ a la derecha, por B^{-1} para obtener $ABB^{-1} = \delta B^{-1}$. Ahora, $\delta B^{-1} = B^{-1}$ según el problema 47.1, con lo que $ABB^{-1} = A = B^{-1}$. Del mismo modo, $A^{-1}AB = A^{-1}\delta$ de donde $B = A^{-1}$.

47.5 Existen operadores lineales no singulares T y S tales que $M(T) = B$ y $M(S) = A$. Por el teorema 46.7, $T \circ S$ es un operador lineal no singular y $M(T \circ S) = M(S)M(T) = AB$. Más aún, $T \circ S$ tiene un inverso $\circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$ y $M((T \circ S)^{-1}) = M(S^{-1} \circ T^{-1}) = M(T^{-1})M(S^{-1}) = B^{-1}A^{-1}$, conforme al problema 47.2. Ahora, $M(T \circ S)\ M((T \circ S)^{-1}) = M((T \circ S)^{-1} \circ (T \circ S)) = M(I) = \delta$; de donde, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \delta$, con lo que $B^{-1}A^{-1}$ es el inverso de AB. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

47.7. (a)

(1)	1	0	0	1	3	2
(2)	0	1	0	4	7	2
(3)	0	0	1	3	0	4
(4) $=4(1)-(2)$	4	-1	0	0	5	6
(5) $=3(1)-(3)$	3	0	-1	0	9	2
(6) $=9(4)-5(5)$	21	-9	5	0	0	44
(7) $=\frac{1}{44}(6)$	$\frac{21}{44}$	$-\frac{9}{44}$	$\frac{5}{44}$	0	0	1
(8) $=(5)-2(7)$	$\frac{45}{22}$	$\frac{9}{22}$	$-\frac{27}{22}$	0	9	0
(9) $=\frac{1}{9}(8)$	$\frac{5}{22}$	$\frac{1}{22}$	$-\frac{3}{22}$	0	1	0
(10) $=(1)-3(9)$	$\frac{7}{22}$	$-\frac{3}{22}$	$\frac{9}{22}$	1	0	2
(11) $=(10)-2(7)$	$-\frac{14}{22}$	$\frac{6}{22}$	$\frac{4}{22}$	1	0	0

De los renglones (11), (9) y (7) obtenemos

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{14}{22} & \frac{6}{22} & \frac{4}{22} \\ \frac{5}{22} & \frac{1}{22} & -\frac{3}{22} \\ \frac{21}{44} & -\frac{9}{44} & \frac{5}{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} -28 & 12 & 8 \\ 10 & 2 & -6 \\ 21 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

(1)	1	0	0	2	0	2
(2)	0	1	0	1	3	5
(3)	0	0	1	5	3	1
(4) $=5(2)-(3)$	0	5	-1	0	12	24
(5) $=2(2)-(1)$	-1	2	0	0	6	8
(6) $=(4)-2(5)$	2	1	-1	0	0	8
(7) $=(5)-(6)$	-3	1	1	0	6	0
(8) $=(1)-\frac{1}{4}(6)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	2	0	0
(9) $=\frac{1}{2}(8)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	0	0
(10) $=\frac{1}{6}(7)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0
(11) $=\frac{1}{8}(6)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	1

De donde

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

(c)

$$
\begin{array}{lrrrrrr}
① & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
② & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & 0 \\
③ & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\
④ = ③ - 3① & -3 & 0 & 1 & 0 & 2 & -5 \\
⑤ = 7④ - 2② & -21 & -2 & 7 & 0 & 0 & -35 \\
⑥ = -\frac{1}{35}⑤ & \frac{21}{35} & \frac{2}{35} & -\frac{7}{35} & 0 & 0 & 1 \\
⑦ = ① - 2⑥ & -\frac{7}{35} & -\frac{4}{35} & \frac{14}{35} & 1 & 0 & 0 \\
⑧ = \frac{1}{7}② & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$
X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{35} & -\frac{4}{35} & \frac{14}{35} \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{21}{35} & \frac{2}{35} & -\frac{7}{35} \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 14 \\ 0 & 5 & 0 \\ 21 & 2 & -7 \end{pmatrix}
$$

47.9.

$$
\begin{array}{lrrrrrr}
① & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
② & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\
③ & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
④ = ① - ③ & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
⑤ = ② - 3④ & -3 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\
⑥ = ③ - ⑤ & 3 & -1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\
⑦ = \frac{1}{3}⑥ & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\
⑧ = ⑤ + ⑦ & -2 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

De los renglones ④, ⑦ y ⑧ obtenemos la inversa de la matriz dada. De donde,

$$
(x \;\; y \;\; z) = (a \;\; b \;\; c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}
$$

$$
= (a + b - 2c \qquad -\tfrac{1}{3}b + \tfrac{2}{3}c \qquad -a - \tfrac{2}{3}b + \tfrac{7}{3}c).
$$

Así, $x = a + b - 2c, \qquad y = -\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c,$
y $\qquad z = -a - \frac{2}{3}b + \frac{7}{3}c.$

47.11 Sean T y S operadores lineales tales que $M(T) = B$ y $M(S) = A$. Puesto que $AB = M(S)M(T) = M(T \circ S)$, $T \circ S$ no es singular, con lo que el espacio nulo de $T \circ S = \{0\}$.

Probemos que T y S no son singulares: Si S es singular, entonces existe un vector $C \neq 0$ en el espacio nulo de S. Por tanto, $S(C) = 0$, de donde $(T \circ S)(C) = T(S(C)) = T(0) = 0$ y C está en el espacio nulo de $T \circ S$. Ahora bien, el espacio nulo de $T \circ S = \{0\}$, con lo que S no es singular. Entonces, S es inyectiva. Supóngase ahora que T es singular. Entonces existe un vector $X \neq 0$ en el espacio nulo de T. $S(Y) = X$ para algún $Y \neq 0$ puesto que S es inyectiva. Entonces, $0 = T(X) = T(S(Y)) = (T \circ S)(Y)$, con lo que Y está en el espacio nulo de $T \circ S$. Tal resultado es contradictorio; por tanto T no es singular.

Como S y T no son singulares, tampoco lo son $M(S) = A$ y $M(T) = B$.

48.1 Aplicando el corolario 48.4 encontramos la matriz de la función coordenada $((1, 4), (0, -1))$ como la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$
\begin{array}{rrrr}
1 & 0 & 1 & 4 \\
0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 4 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Por tanto, las coordenadas de $(2, -3)$ respecto a $((1, 4), (0, -1))$ son las coordenadas de

$$
(2, \; -3)\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, \; 11),
$$

es decir, $c(2, -3)_1 = 2$ y $c(2, -3)_2 = 11$. Para comprobar, vemos que $(2, -3) = 2(1, 4) + 11(0, -1)$.

48.3

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

De donde, $c(1, 3, -1) = (1, 3, -1)\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= (4, -10, -5)$.

48.5 Tomando $\{(1, 2, -1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ como base del espacio tridimensional calculamos la inversa de

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

y encontramos que $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de la función coordenada c respecto a $((1, 2, -1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$. De donde, $c^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $c^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con lo que la variedad lineal dada tiene las ecuaciones no paramétricas

$$(X - (1, 0, 1))\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (X - (1, 0, 1))\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Para $X = (x, y, z)$ estas ecuaciones pueden reescribirse $y - 2x + 2 = 0 \quad x + z - 2 = 0$.

48.7

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz para la función coordenada respecto a $((1, 2, 1), (0, 1, 3), (0, 0, 1))$. Aplicando el teorema 48.7 con $k = 2$, encontramos que

$$(X - (0, 0, 1)) \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

es una ecuación no paramétrica de la variedad lineal dada.

48.9 Puesto que la matriz de la función coordenada respecto a $((1, 2, 1, 1), (1, 3, 5, 0), (0, 1, 3, 1), (0, 0, 0, 1))$ es

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -7 & 11 \\ 3 & -3 & 4 & -7 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces, una ecuación no paramétrica de la variedad lineal dada es

$$X \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

48.11 Supóngase que $M = \{X\colon X = A + \sum_{i=1}^{k} r_i V^i$ para algunos escalares $r_1, r_2, \ldots, r_k\}$, donde $V^1, V^2, \ldots, V^k$ son vectores m-dimensionales linealmente independientes. Sea N el subespacio generado por $\{V^1, V^2, \ldots, V^k\}$. Entonces, $M = \{X : X = A + V$ para algún elemento V de $N\}$ tal como se probó en el problema 48.10.

Para demostrar que $N = \{X\colon X = Y - Z$ para algunos elementos Y y Z de $M\}$: supóngase que $X \in N$. Entonces, $A + X \in M$. Puesto que A es también un elemento de M, $X = (A + X - A) \in \{X : X = Y - Z$ para algunos elementos Y y Z de $M\}$. Supóngase ahora $X \in \{X : X = Y - Z$ para algunos elementos Y y Z de $M\}$. Entonces, $X = Y - Z$ para algunos $Y, Z \in M$. $Y = A + V$ y $Z = A + U$ para algunos $V, U \in N$. Entonces, $X = (A + V) - (A + U) = V - U$ con lo que $X \in N$. Por tanto, $\{X : X = Y - Z$ para algunos elementos Y y Z de $M\} = N$ y es, en consecuencia, un espacio vectorial.

48.13 Como M no es vacío existe un vector A en M. Sea $N = \{V : V = Y - A$ para algún $Y \in M\}$. Si N es un espacio vectorial, entonces $M = \{Y : Y = A + V$ para algún $V \in N$ es una variedad lineal, según el problema 48.10.

Para demostrar que N es un espacio vectorial supóngase que V_1 y V_2 están en N. Entonces $V_1 = Y_1 - A$ y $V_2 = Y_2 - A$ para algunos Y_1 y Y_2 de M. Como Y_1, Y_2 y A están en M,

$$\left(\frac{s}{r+s}\right)Y_2 + \left(1 - \frac{s}{r+s}\right)Y_1 \text{ y } (r+s)\left(\frac{s}{r+s}Y_2 + \left(1 - \frac{s}{r+s}\right)Y_1\right) + (1 - (r+s))A$$

pertenecen a M para cualesquiera escalares r y s (supuesto $r + s \neq 0$). Por tanto, mediante unas cuantas operaciones algebraicas vemos que $r(Y_1 - A) + s(Y_2 - A) + A$ está en M con lo que $r(Y_1 - A) + s(Y_2 - A) = rV_1 + sV_2$ está en N. Hemos demostrado que, con la suposición de que $r + s \neq 0$, si V_1 y V_2 están en N, también lo está $rV_1 + sV_2$. Supóngase ahora que $r + s = 0$. Si $r = s = 0$, entonces

$rV_1 + sV_2 = 0$ y $0 \in N$ puesto que $0 = A - A$ y $A \in M$. Si $r \neq 0$ y $r + s = 0$ entonces $s = -r$ y tenemos que demostrar que $rV_1 - rV_2 \in N$.

Puesto que $r \neq 0$, $r + 0 \neq 0$, $0 + (-r) \neq 0$, tenemos que $rV_1 + 0V_2 \in N$ y $0V_1 + (-r)V_2 \in N$. Ahora bien, $1 \cdot (rV_1) + 1 \cdot (-rV_2) \in N$ porque $1 + 1 \neq 0$. Por tanto, $rV_1 - rV_2 \in N$.

En consecuencia, N es un espacio vectorial y, entonces, M es una variedad lineal.

49.1 (a) El sistema dado de 2 ecuaciones homogéneas con 3 incógnitas es equivalente a las ecuaciones vectoriales.

$$(5, -3, -2) \cdot (X, Y, Z) = 0$$
$$(1, 0, -7) \cdot (X, Y, Z) = 0$$

y el conjunto de soluciones es $M = \{X : (5, -3, -2) \cdot (X, Y, Z) = 0 \text{ y } (1, 0, -7) \cdot (X, Y, Z) = 0\}$. Se nos pide encontrar una ecuación paramétrica de M. Como los vectores $(5, -3, -2)$ y $(1, 0, -7)$ son linealmente independientes podemos aplicar el teorema 49.3. Tomando $\{(5, -3, -2), (1, 0, -7), (0, 0, 1)\}$ como base del espacio tridimensional encontramos la base dual:

①	1	0	0	5	−3	−2
②	0	1	0	1	0	−7
③	0	0	1	0	0	1
④ = ② + 7③	0	1	7	1	0	0
⑤ = ① − 5④	1	−5	−35	0	−3	−2
⑥ = ⑤ + 2③	1	−5	−33	0	−3	0
⑦ = $-\frac{1}{3}$⑥	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	11	0	1	0

La lectura de las columnas de la parte izquierda (obsérvese previamente que las filas se han de tomar en el orden ④⑦③), nos dice que $\{(0, -\frac{1}{3}, 0), (1, \frac{5}{3}, 0), (7, 11, 1)\}$ es la base dual. Puesto que $k = 2$, $\{(7, 11, 1)\}$ es una base dual de M y $X = r(7, 11, 1)$ es una ecuación paramétrica de M. Esto es, los números x, y y z satisfacen las ecuaciones dadas si y sólo si $x = 7r$, $y = 11r$, y $z = r$ para algún escalar r. Más sencillamente aún: x, y y z satisfacen las ecuaciones si y sólo si $x = 7z$ y $y = 11z$. (Aunque existen métodos para calcular esta respuesta más rápidamente, se nos había pedido utilizar los métodos de la sección 49.)

(b) Primero utilizamos el procedimiento de la forma canónica para averiguar si $(2, 3, -1)$, $(6, -5, 2)$, y $(38, 1, 1)$, son linealmente independientes:

①	2	3	−1
②	6	−5	2
③	38	1	1
④ = ② − 3①	0	−14	5
⑤ = 19① − ③	0	56	−20
⑥ = 4④ + ⑤	0	0	0

Por tanto, los vectores dados son dependientes y el espacio generado por ellos tiene por base $\{(2, 3, -1), (0, -14, 5)\}$. Por el teorema 49.4 el problema se reduce a encontrar una ecuación paramétrica de $M = \{X : X \cdot (2, 3, -1) = 0 \text{ y } X \cdot (0, -14, 5) = 0\}$. Tomando $\{(2, 3, -1), (0, -14, 5), (0, 0, 1)\}$ como una base del espacio tridimensional calculamos la base dual:

①	1	0	0	2	3	−1
②	0	1	0	0	−14	5
③	0	0	1	0	0	1
④ = ① + ③	1	0	1	2	3	0
⑤ = 14④ + 3②	14	3	14	28	0	15
⑥ = ⑤ − 15③	14	3	−1	28	0	0
⑦ = 14④ − ⑥	0	−3	15	0	42	0
⑧ = $\frac{1}{28}$⑥	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{28}$	$-\frac{1}{28}$	1	0	0
⑨ = $\frac{1}{42}$⑦	0	$-\frac{1}{14}$	$\frac{5}{14}$	0	1	0

Entonces, una ecuación paramétrica de M es $X = r(-\frac{1}{28}, \frac{5}{14}, 1)$. Esta ecuación puede expresarse también como $X = s(-1, 10, 28)$. En términos de las coordenadas (x, y, z) de X la solución es $x = -s$, $y = 10s$ y $z = 28s$ para algún escalar s (o $y = -10x$ y $z = -28x$). La solución debe verificarse, por supuesto, mediante la sustitución en las ecuaciones dadas.

49.3 Se nos ha pedido encontrar una ecuación paramétrica del conjunto $M = \{X : X \cdot (-1, 1, 3) = 1 \text{ y } X \cdot (1, -1, 2) = 2\}$. Utilizamos primero el lema 49.7:

①	−1	1	3	1
②	1	−1	2	2
③ = ① + ②	0	0	5	3

Por tanto, $M = \{X : X \cdot (-1, 1, 3) = 1 \text{ y } X \cdot (0, 0, 5) = 3\}$. Ahora bien, $A \in M$ si $A \cdot (-1, 1, 3) = 1$ y $A \cdot (0, 0, 5) = 3$, esto es, si $-A_1 + A_2 + 3A_3 = 1$ y $5A_3 = 3$. De modo que tenemos $A_3 = \frac{3}{5}$, y podemos tomar $A_2 = 0$, con lo que A_1 será $\frac{4}{5}$.

Tomando $\{(-1, 1, 3), (0, 0, 5), (0, 1, 0)\}$ como una base del espacio tridimensional calculamos la base dual:

①	1	0	0	−1	1	3
②	0	1	0	0	0	5
③	0	0	1	0	1	0
④ = ②/5	0	$\frac{1}{5}$	0	0	0	1
⑤ = −① + ③ + 3④	−1	$\frac{3}{5}$	1	1	0	0

Entonces, la base dual es $\{(-1, 0, 0), (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}), (1, 1, 0)\}$. Por el teorema 49.6 una ecuación paramétrica de M es $X = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}) + r(1, 1, 0)$. En forma escalar nuestra solución es $X_1 = \frac{1}{3} + r$, $X_2 = r$, y $X_3 = \frac{2}{3}$ para algún escalar r.

49.5 (a) $0 \in M^\perp$ puesto que $0 \cdot X = 0$ para todo $X \in M$, con lo que $M^\perp$ no es vacío. Si $V \in M^\perp$ y $W \in M^\perp$, entonces $V \cdot X = W \cdot X = 0$ para todo $X \in M$, de modo que $(aV + bW) \cdot X = aV \cdot X + bW \cdot X = 0$ para todo $X \in M$; por tanto, $aV + bW \in M^\perp$. En consecuencia, $M^\perp$ es un espacio vectorial.

(b) $C \in M^\perp \cap N^\perp$ si y sólo si $C \cdot X = 0$ para todo $X \in M$ y $C \cdot X = 0$ para todo $X \in N$ . . . si y sólo si $C \cdot X = 0$ para todo X en M o N . . . si y sólo si $C \cdot X = 0$ para todo $X \in M \cup N$ . . . si y sólo si $C \in (M \cup N)^\perp$.

49.7 Sea M el espacio generado por $C^1, C^2, \ldots, C^k$. Entonces, $M^\perp$ es un subespacio $(m - k)$ dimensional según el problema precedente, y como $k < m$, $m - k > 0$, con lo que existe en $M^\perp$ un vector X no nulo. Puesto que $X \in M^\perp$, $X \cdot C^i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Lista de Símbolos

con el número de la página donde primero aparecen

Indice