lecciones sobre ecuaciones en derivadas parciales

I. G. PETROVSKI

I. G. PETROVSKI

Lecciones sobre ecuaciones en DERIVADAS PARCIALES

CIENCIA TECNICA

INSTITUTO DEL LIBRO

La Habana, 1969

Traducción del Dr. Carlos Vega.
Diseño de José González

ÍNDICE

SECCION I

SECCION II

DEL PRÓLOGO A LA PRIMERA EDICIÓN

He dictado estas conferencias varias veces para los estudiantes de matemática de la Facultad de Mecánica y Matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú y las he ampliado algo al preparar la edición.

Durante el trabajo sobre este libro me han ofrecido una gran ayuda K. S. Kuzmin, A. D. Myshkis, Z. Y. Shapiro, B. M. Levitan y M. I. Vishik. K. S. Kuzmin me facilitó los apuntes de mis clases. Especialmente considerable ha sido la ayuda de Z. Y. Shapiro, quien redactó el manuscrito y escribió totalmente los §§ 22-25 así como algunas partes de otros epígrafes. Sin esta ayuda, el libro no se hubiera editado aún. A. D. Myshkis y M. I. Vishik han leído todo el manuscrito y han hecho varias observaciones importantes. Además, A. D. Myshkis escribió los §§ 34, 35 y parte del § 4. B. M. Levitan ha escrito el subepígrafe 3 del § 26. A todos estoy profundamente agradecido.

9 de abril de 1950.

I. PETROVSKI

DEL PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

Durante la preparación de esta edición ha realizado un gran trabajo O. A. Oleynik. En particular, ha escrito de nuevo los §§ 23, 28, 42, 43, algunas partes de otros epígrafes, y también ha añadido nuevos problemas. Estoy muy agradecido a Olga Arsenevna Oleynik por esta labor. Agradezco también al académico V. I. Smirnov y a A. D. Myshkis, O. A. Ladyzhenskaya y L. A. Chudov sus valiosas observaciones.

2 de agosto de 1953.

I. Petrovski

PRÓLOGO A LA TERCERA EDICIÓN

En la presente edición se han hecho varias modificaciones y adiciones; las más importantes se refieren a los §§ 9, 16, 24, 26, 29, 30, 37, 41 y 43, y también se han añadido nuevos problemas. El trabajo preparatorio de esta edición ha sido realizado por O. A. Oleynik y A. S. Kalashnikov, y el § 43 ha sido escrito de nuevo por L. A. Chudov. A todos estoy muy agradecido.

3 de mayo de 1960.

I. PETROVSKI

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN. CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

§ 1. DEFINICIONES. EJEMPLOS

1. Una ecuación en derivadas parciales de las funciones incógnitas $u_1, u_2, \ldots, u_n$, se dice de orden n si contiene al menos una derivada de orden n y no contiene derivadas de orden superior. El orden de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales es el mayor entre los órdenes de las ecuaciones del sistema.

Una ecuación en derivadas parciales se llama *lineal* si es lineal respecto a todas las funciones incógnitas y sus derivadas. Una ecuación en derivadas parciales se llama *casilineal* si es lineal respecto a las derivadas de orden superior de las funciones incógnitas. Así, por ejemplo, la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$$

es una ecuación casilineal de segundo orden respecto a la función incógnita u. La ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\ (x, y)\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2u$$

es una ecuación lineal de segundo orden respecto a la función incógnita u. Pero la ecuación

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u$$

no es lineal ni casilineal respecto a esta función.

Se llama *solución* de una ecuación en derivadas parciales, a todo sistema de funciones que al ser sustituido por las funciones incógnitas transforma la ecuación en una identidad respecto a las variables independientes. De forma análoga se define la solución de un sistema.

En este curso estudiaremos fundamentalmente ecuaciones lineales de segundo orden con una función incógnita. Como, por ejemplo, las siguientes ecuaciones

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$, ecuación de la conducción térmica.

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$, ecuación de ondas.

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$, ecuación de Laplace.

Muchos problemas de física se reducen a ecuaciones en derivadas parciales, y en particular a las señaladas más arriba.

2. *Ejemplo 1. Ecuación de la conducción del calor*

Sea G un cuerpo, cuya temperatura en el punto (x_1, x_2, x_3) en el instante t se determina por la función $u(t, x_1, x_2, x_3)$. Supongamos que la función $u(t, x_1, x_2, x_3)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden respecto a las variables x_1, x_2, x_3; y una derivada continua respecto a t.

La deducción de la ecuación que describe el proceso de propagación del calor se basa en la siguiente ley.

Supongamos que una superficie S pertenece al cuerpo G. Sobre la superficie S está definido el vector continuo de la normal n. La cantidad de calor q, que pasa por la superficie S en el sentido de la normal n en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2, se determina por la siguiente fórmula:

$$q = -\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k\,(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial n} dS \right\} dt. \qquad (1,1)$$

Aquí $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada en el punto (x_1, x_2, x_3) de la superficie S según la dirección de la normal n; la integral interior se toma por la superficie S.

La función positiva $k(x_1, x_2, x_3)$ se llama coeficiente de conducción térmica interna del cuerpo en el punto (x_1, x_2, x_3).

La fórmula (1,1) es equivalente a que una cantidad de calor igual a

$$dq = -k\,(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial n}\, dS\; dt$$

atraviese una superficie infinitamente pequeña dS en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt.

En esta forma se expresa generalmente la ley física de la conducción del calor.

Si la superficie S está situada en la frontera entre el cuerpo y el medio exterior, se cumple la siguiente ley. Sea $u(t, x_1, x_2, x_3)$, como antes, la temperatura del cuerpo G en el punto $(x_1\ x_2,\ x_3)$, y sea $u_1(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$ la temperatura en un punto arbitrario $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ fuera del cuerpo. Entonces la cantidad de calor que penetra en el cuerpo a través de la superficie S —situada en la frontera del cuerpo— en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 es

$$q = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k_1(x_1,\ x_2,\ x_3)\,(u_1 - u)\, dS \right\} dt, \qquad (1',1)$$

donde la integral interna se toma sobre la superficie S y las funciones u_1 y u se determinan sobre S pasando al límite por fuera y por dentro del cuerpo respectivamente. En este caso $k_1(x_1,\ x_2,\ x_3)$ se llama coeficiente de conducción térmica externa en relación al medio dado.

Consideremos un cuerpo isotrópico respecto a la conducción térmica, es decir, supongamos que la función $k(x_1,\ x_2,\ x_3)$ no depende de la dirección de la normal a la superficie S en el punto $(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Además supongamos que esta función tiene primeras derivadas continuas respecto a todas las coordenadas.

Para deducir la ecuación de la conducción térmica, analizaremos dentro del cuerpo G cierto volumen D limitado por la superficie suave S y consideraremos la variación de la cantidad de calor en este volumen en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2.

Según la fórmula (1,1), a través de la superficie S pasa una cantidad de calor igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k(x_1\ x_2,\ x_3)\ \frac{\partial u}{\partial n}\, dS \right\} dt, \qquad (2,1)$$

donde $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada en la dirección de la normal exterior a la superficie S.

Por otro lado, esta misma cantidad de calor se puede determinar mediante la variación de la temperatura en el volumen D, durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2. La variación de la cantidad de calor es igual a

$$\iiint_D c(x_1, x_2, x_3)\,\rho\,(x_1, x_2, x_3)\,[u(t_2, x_1, x_2, x_3) - \\ - u(t_1, x_1, x_2, x_3)]\,dx_1\,dx_2\,dx_3, \qquad (3,1)$$

donde $\rho\,(x_1, x_2, x_3)$ es la densidad, $c(x_1, x_2, x_3)$ es la capacidad calorífica del cuerpo en el punto (x_1, x_2, x_3)[1] y la integral se toma por la región D. Igualando (2,1) y (3,1) obtendremos:

$$\iiint_D c\rho\,[u(t_2, x_1, x_2, x_3) - u(t_1, x_1, x_2, x_3)]\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k(x_1, x_2, x_3)\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS \right\} dt. \qquad (4,1)$$

[1] El valor de una característica física de un cuerpo en un punto P determinado (por ejemplo, la densidad, la capacidad calorífica, etc.) se entiende siempre como cierto límite. A saber, se toma una sucesión de cubos de centro en el punto P y cuyo lado tiende a cero. Se considera la razón entre la cantidad correspondiente a cada cubo y el volumen del cubo y se toma el límite de esta razón cuando el lado del cubo tiende a cero. Por ejemplo, la densidad en un punto es el límite de la razón entre la masa del cubo y su volumen. Análogamente, la densidad superficial en un punto de una placa es el límite del cociente de la masa de un cuadrado de centro en ese punto y el área del cuadrado. La densidad lineal en un punto de una varilla es el límite de la razón entre la masa de un segmento con centro en ese punto y la longitud del segmento. Análogamente se determina la capacidad térmica, la conducción térmica en un punto, etc.

Según la fórmula de Ostrogradski

$$\iint\limits_{S} k\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iiint\limits_{D} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

La integral del miembro izquierdo de la igualdad (4,1) puede ser escrita en la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint\limits_{D} c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \right\} dt,$$

ya que $u(t_2, x_1, x_2, x_3) - u(t_1, x_1, x_2, x_3) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}\,dt.$

De este modo, para cualquier volumen D dentro del cuerpo G, se cumple la igualdad

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint\limits_{D} c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt -$$
$$- \int_{t_1}^{t} \iiint\limits_{D} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt = 0$$

o bien

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint\limits_{D} \left[c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \right] dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt = 0.$$

Como las funciones bajo el signo de la integral son continuas y como el volumen D y el intervalo de tiempo (t_1, t_2) son arbitrarios, para cualquier punto (x_1, x_2, x_3) del cuerpo G y para cualquier instante t, la siguiente igualdad debe ser cierta

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{5,1}$$

Esta ecuación se llama ecuación de la *conducción del calor* de un cuerpo heterogéneo, en general, pero isotrópico. Si el cuerpo es homogéneo

$$k(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \quad c(x_1, x_2, x_3) = \text{const.},$$
$$\rho(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$$

y la ecuación (5,1) se convierte en la ecuación

$$\frac{c\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{6,1}$$

Sustituyendo $\frac{k}{c\rho} t$ por t' y denotando t' de nuevo por t, reduciremos esta ecuación a la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{7,1}$$

Las ecuaciones (5,1) y (7,1) tienen muchas soluciones. Para separar de entre el conjunto de soluciones una determinada, es preciso establecer ciertas condiciones complementarias, que juegan el mismo papel que las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales ordinarias. De entre las condiciones complementarias, las más frecuentes son las llamadas *condiciones de frontera*, es decir, condiciones dadas en la frontera de la región G del espacio (x_1, x_2, x_3), en la cual buscamos la solución de la ecuación en derivadas parciales; y las *condiciones iniciales* referentes a cualquier instante determinado.

Desde el punto de vista físico está claro, en primer lugar, que la temperatura del cuerpo en un cierto instante y el régimen calorífico en la frontera del cuerpo, determinan la temperatura en los instantes posteriores y, en segundo lugar, que este régimen calorífico puede ser cualquiera. Si la región G coincide con todo el espacio, se puede demostrar que la solución acotada de la ecuación de la conducción térmica para $t > t_0$ se determina de un modo único con sólo establecer las condiciones iniciales: los valores de la función $u(t, x_1, x_2, x_3)$ en el instante $t = t_0$. Para una región acotada G se puede, por ejemplo, dar el valor de la temperatura en cada punto del cuerpo en el instante $t = t_0$ y dar el valor de la temperatura en cada punto de la frontera del cuerpo para $t > t_0$. Resulta ser que estas condiciones son suficientes para determinar una solución acotada para $t > t_0$ y $(x_1, x_2\ x_3) \in G$.

Para determinar la solución única de la ecuación de la conducción térmica, en lugar de definir $u(t, x_1, x_2, x_3)$ en la frontera de G para $t > t_0$, se puede dar en esta frontera $\frac{\partial u}{\partial n}$, que es la derivada de la función incógnita u, en la dirección de la normal a la frontera de la región G. Llegaremos a un problema matemático de este tipo cada vez que estudiemos la temperatura dentro de un cuerpo G, siempre que conozcamos la cantidad de calor transmitido, en cualquier intervalo de tiempo (t_1, t_2), del espacio exterior a la superficie del cuerpo G, a través de cualquier área S en la frontera del cuerpo. Cantidad de calor que debe ser igual a la cantidad de calor transmitida del área S al interior del cuerpo; esta última, según la fórmula (1,1), es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \, dt,$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de conducción térmica en el punto fronterizo correspondiente.

Por lo tanto, si conocemos la ley de la transmisión del calor para cada área S de la frontera del cuerpo G, se puede hallar el valor de $\frac{\partial u}{\partial n}$ en la frontera de G. En particular, si no hay intercambio de calor a través de la frontera, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en la misma.

Finalmente, se puede dar como condición de frontera, para $t > t_0$, los valores de la combinación lineal:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + k_1 u,$$

en la frontera de G, donde k_1 es el coeficiente de conducción térmica al pasar del espacio exterior al cuerpo G, y k es el coeficiente de conducción térmica interna del cuerpo. Estos coeficientes se suponen conocidos. Llegaremos a este problema matemático si estudiamos la temperatura dentro de un cuerpo G bajo la condición de que conocemos la temperatura u_1 del medio exterior al cuerpo G. Entonces, si realizamos el balance de la cantidad de calor que pasa por un trozo arbitrario de la frontera de G, de acuerdo con las fórmulas (1,1) y (1',1), obtendremos que:

1. La cantidad de calor que pasa, en un intervalo de tiempo (t_1, t_2), del espacio exterior a la superficie del cuerpo a través del área S, es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_S k_1(u_1 - u) \, dS \, dt.$$

2. La cantidad de calor transmitido en este mismo tiempo del trozo S de su superficie al interior del cuerpo es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \, dt \quad (k > 0).$$

Como (t_1, t_2) y S son arbitrarias

$$k_1 u + k \frac{\partial u}{\partial n} = k_1 u_1.$$

En particular, si $u_1 \equiv 0$, esta condición se convierte en

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + k_1 u = 0.$$

Supongamos que la temperatura en cada punto (x_1, x_2, x_3) dentro del cuerpo G se ha estabilizado, es decir, no varía con el tiempo. Entonces $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ y las ecuaciones (5,1) y (7,1) se convierten respectivamente en las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0. \tag{8,1}$$

Para determinar ahora $u(x_1, x_2, x_3)$, no es necesario dar las condiciones iniciales. Es suficiente dar las condiciones de frontera, que deben ser independientes del tiempo. Es fácil representarse esto físicamente del modo siguiente. Si las condiciones de frontera no dependen del tiempo, para cualquier temperatura inicial la temperatura $u(t, x_1, x_2, x_3)$ en cada punto (x_1, x_2, x_3) del cuerpo tiende a cierto límite $u(x_1, x_2, x_3)$ cuando $t \to \infty$. La función límite $u(x_1, x_2, x_3)$ satisface las ecuaciones estacionarias (8,1) y las condiciones de frontera anteriores que no dependen de t.

El problema de la determinación de la solución de cualquiera de las ecuaciones (8,1) a partir de sus valores en la frontera de la región considerada se llama *problema de Dirichlet*, o *primer problema de frontera.*

Además de la propagación del calor en el espacio, con frecuencia hay que estudiar la variación de temperatura a lo largo de una varilla o en una placa. Si en este caso el grueso de la varilla homogénea es tal que la temperatura en todos los puntos de una sección es la misma y si no se transmite calor al exterior a través de la superficie lateral de la varilla, la temperatura depende solamente del tiempo t y una coordenada espacial x. En este caso la función $u(t, x)$ satisface una ecuación de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9,1}$$

si las unidades se escogen debidamente. La temperatura $u(t, x_1, x_2, x_3)$ dentro de un cuerpo tridimensional satisfaría la misma ecuación (9,1), si dependiera de una sola coordenada espacial, por ejemplo, de $x_1 = x$. Así sucede si la temperatura en todos los puntos de cada plano $x_1 =$ const. es la misma. Análogamente, al estudiar la propagación del calor en una placa homogénea plana y térmicamente aislada, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \tag{10,1}$$

3. *Ejemplo 2. Ecuaciones: de equilibrio y de las vibraciones de una membrana*

Llamamos membrana a una película tensa que ofrece resistencia a la tracción y que no ofrece resistencia a la flexión, es decir, a un cambio de forma que no altera el área de ninguna parte de la membrana; el trabajo de una fuerza externa que produce la variación del área de una parte de la membrana es proporcional a esta variación. El coeficiente positivo de proporcionalidad T, no depende de la forma de este área ni de su situación y se llama *tensión* de la membrana.

Hagamos notar que el trabajo de las fuerzas internas de elasticidad es igual en valor absoluto al trabajo de las fuerzas externas que producen la alteración del área, pero de signo contrario.

Supongamos que en el *estado de reposo* la membrana está en el plano (x_1, x_2) y tiene la forma de cierta región plana G de frontera L.

Supongamos que sobre la membrana se aplica una fuerza cuya densidad en el punto (x_1, x_2) es igual a $f(x_1, x_2)$ (vea la llamada en la pág. 5) y cuya dirección es perpendicular al plano (x_1, x_2).

Bajo el efecto de esta fuerza, la membrana toma la forma de cierta superficie cuya ecuación escribiremos en la forma

$$u = u(x_1, x_2).$$

El eje u es perpendicular al plano (x_1, x_2).

Deduciremos la ecuación que satisface la función $u(x_1, x_2)$ en las condiciones siguientes. En primer lugar, supondremos que la superficie de la membrana no presenta gran curvatura en la posición de equilibrio, es decir, que está cerca de ser un trozo de plano. En otras palabras, supongamos que las derivadas $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ son pequeñas y despreciemos en nuestros razonamientos las potencias más altas de estas derivadas. Además, supongamos que bajo el efecto de la fuerza $f(x_1, x_2)$ los puntos de la membrana se mueven solamente por la perpendicular al plano (x_1, x_2) de manera que sus coordenadas (x_1, x_2) no varían.

La deducción de la ecuación está basada en uno de los principios fundamentales de la mecánica: en el principio de los desplazamientos virtuales según el cual, en estado de equilibrio la suma de los trabajos elementales de todas las fuerzas que actúan sobre un sistema para cualquier desplazamiento virtual (que admite las condiciones impuestas) es igual a cero.[2]

Para calcular los trabajos elementales, hallemos el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre la membrana cuando ésta se desplaza de la posición inicial plana a la posición definida

---

[2] Véase *G. K. Suslov,* Mecánica teórica, Gostiejizdat, 1946.

por la función $u(x_1, x_2)$. El trabajo de una fuerza cuya densidad es igual a $f(x_1, x_2)$ está dado por la integral:

$$\iint_G f(x_1, x_2)\, u(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

ya que sobre el elemento $dx_1\, dx_2$ actúa la fuerza $f(x_1, x_2) ax_1\, ax_2$. La variación del área de la membrana para este desplazamiento es igual a

$$\iint_G \left(\sqrt{1 + u'^2_{x_1} + u'^2_{x_2}} - 1\right) dx_1\, dx_2;$$

y el trabajo de las fuerzas internas para esta variación del área es igual a

$$-T \iint_G \left(\sqrt{1 + u'^2_{x_1} + u'^2_{x_2}} - 1\right) dx_1\, dx_2.$$

Desarrollemos la función subintegral en serie según las potencias de u'_{x_1} y u'_{x_2} y, basándonos en la suposición de que estas cantidades son pequeñas, omitiremos los términos de exponentes más alto de la descomposición. Entonces, obtendremos la expresión

$$-\frac{T}{2} \iint_G \left[u'^2_{x_1} + u'^2_{x_2}\right] dx_1\, dx_2$$

para el trabajo de las fuerzas internas de elasticidad.

Por eso el trabajo de todas las fuerzas interiores que actúan sobre la membrana y de la fuerza f, para un desplazamiento de la membrana de la posición de reposo hasta cierta posición $u(x_1, x_2)$, es igual a

$$A(u) = \iint_G \left[-\frac{T}{2}\left(u'^2_{x_1} + u'^2_{x_2}\right) + fu\right] dx_1\, dx_2. \qquad (11,1)[3]$$

Realicemos ahora un desplazamiento virtual de la membrana, es decir, agreguemos a $u(x_1, x_2)$ una cierta función $\delta u(x_1, x_2)$. El trabajo de todas las fuerzas que actúan en este desplazamiento es igual a la variación de la integral (11,1) que no es difícil de calcular:

$$\delta A = A(u + \delta u) - A(u) \approx$$
$$\approx \iint_G \left[-T\left(u'_{x_1}\, \delta u'_{x_1} + u'_{x_2}\, \delta u'_{x_2}\right) + f\delta u\right] dx_1\, dx_2, \qquad (12,1)$$

y que de acuerdo con el principio de los desplazamientos virtuales, debe ser igual a cero.

Integrando por partes los primeros dos sumandos, encontramos,

$$\iint_G \left(u'_{x_1}\, \delta u'_{x_1} + u'_{x_2}\, \delta u'_{x_2}\right) dx_1\, dx_2 =$$
$$= \int_L \frac{\partial u}{\partial n}\, \delta u\, ds - \iint_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) \delta u\, dx_1\, dx_2,$$

---

[3] La integral (11,1) difiere sólo en el signo de la energía potencial de la membrana en la posición de equilibrio. Por lo tanto, podemos decir que nuestra deducción se basa en que, en la posición de equilibrio, la energía potencial de cualquier sistema mecánico es mínima.

de donde,

$$\delta A = \int_L - T \frac{\partial u}{\partial n} \delta u \, ds + \iint_G (T \Delta u + f) \delta u \, dx_1 \, dx_2, \tag{13,1}$$

donde Δu representa la suma de las segundas derivadas $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada en la dirección de la normal exterior a la frontera L. Como señalamos más arriba, δu es un desplazamiento virtual, es decir, un desplazamiento que admite las condiciones impuestas a la membrana. Estas condiciones se dan generalmente en la frontera de la membrana, por eso la función $\delta u(x_1, x_2)$ es una función contínua arbitraria en los puntos interiores de la misma. Por consiguiente, haciendo δA igual a cero se puede deducir que para la posición de equilibrio la función $u(x_1, x_2)$, en cualquier punto interior, satisface la ecuación

$$T \Delta u + f = 0. \tag{14,1}$$

Esta ecuación se llama *ecuación de Poisson.*

En cuanto a las condiciones de ligadura, éstas se reflejan en las condiciones de frontera, que pueden ser muy variadas. Consideraremos por separado los casos más frecuentes.

1. Membrana fija

Supongamos que el borde de la membrana se ha fijado a lo largo de cierta curva alabeada que se proyecta en L. Si las ecuaciones paramétricas de L son $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, exigimos que la membrana pase por cierta curva $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$,

$u = \varphi\ (s)$. En este caso, la condición única impuesta a δu, es $\delta u = 0$ en L. Gracias a esta condición, en la fórmula (13,1) desaparece la integral curvilínea

El problema obtenido (hallar la solución de la ecuación de Poisson con la condición de frontera $u = \varphi(s)$ en L) se llama *problema de Dirichlet* para esta ecuación.

Para $f = 0$, la ecuación de Poisson se convierte en la ecuación de Laplace con la cual ya nos hemos encontrado en el ejemplo anterior.

2. *Membrana libre*

Si no imponemos ninguna condición a la posición de la membrana, su borde puede desplazarse arbitrariamente por la superficie lateral vertical de un cilindro de base L. En este caso, δu es arbitrario dentro y en la frontera de G y obtenemos para la ecuación (14,1) la siguiente condición en L:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

3. Con frecuencia se presenta el caso, cuando además de la fuerza f que actúa sobre los puntos interiores de la membrana, existe una fuerza vertical de densidad lineal f_1 y aplicada al borde de manera que la fuerza $f_1 ds$ actúe sobre el elemento ds de la frontera. Si buscamos la posición de equilibrio de la membrana en estas condiciones, a las integrales (11,1) y (12,1) es preciso agregar $\int\limits_L \left(\int\limits_0^u f_1 du\right) ds$ y $\int\limits_L f_1\, \delta u\, ds$ respectivamente.

La integral curvilínea en la fórmula (13,1) tiene, en este caso, la forma

$$\int_L \left(- T \frac{\partial u}{\partial n} + f_1\right) \delta u \, ds,$$

y para la ecuación de Poisson obtenemos la siguiente condición de frontera

$$T \frac{\partial u}{\partial n} - f_1 = 0$$

en L. Este problema se llama *segundo problema de frontera* (o, también, *problema de Neumann*) si f_1 no depende de u.

4. A veces se considera el llamado *ajuste elástico de la membrana,* es decir, el caso en que la fuerza que actúa sobre el borde de la membrana es proporcional al desplazamiento:

$$f_1(s) = ku(s).$$

En este caso, la condición de frontera para la ecuación de Poisson toma la forma $T \dfrac{\partial u}{\partial n} - ku = 0$.

Pasemos ahora a deducir la ecuación del movimiento de la membrana. Consideraremos solamente las vibraciones pequeñas y transversales de la misma. Lo primero significa que u, $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ son pequeños; en la deducción de la fórmula (11,1) impusimos esta condición. Las vibraciones se llaman transversales si se realizan en la dirección de la perpendicular al plano (x_1, x_2).

De ese modo las coordenadas (x_1, x_2) de un punto fijo de la membrana no varían con el tiempo t, sólo varía la función

$$u = u(t, x_1, x_2).$$

La velocidad de un punto de coordenadas (x_1, x_2) es $\frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial t}$ y la aceleración $\frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial t^2}$. Para obtener la ecuación del movimiento de la membrana es necesario tomar en cuenta, según el principio de D'Alembert, la fuerza de inercia de la misma.

La densidad de esta fuerza es igual a $-\rho(x_1, x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, donde $\rho(x_1, x_2)$ es la densidad superficial de la membrana en el punto (x_1, x_2). Obtendremos la ecuación de las vibraciones transversales de la membrana, si en la ecuación (14,1) sustituimos el segundo sumando por $-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$:

$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{15,1}$$

Las condiciones de frontera, en este caso, son las mismas que para la ecuación (14,1) con la diferencia de que las funciones definidas en la frontera pueden depender ahora del tiempo. Los más frecuentes son el problema de la membrana cuyo borde se ha ajustado a lo largo de una línea $L: u(t, x_1, x_2) = 0$ en L; y el problema de la membrana libre: $\frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial n} = 0$ en L.

Al igual que en el caso de la ecuación de la conducción térmica, desde un punto de vista físico es evidente que las condiciones de frontera no pueden por sí solas determinar unívocamente el movimiento de la membrana, ya que éste depende esencialmente de la posición y velocidad iniciales. En efecto, más tarde veremos que la solución de la ecuación (15,1) se determina unívocamente si se dan las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u(t_0, x_1, x_2) &= \varphi_0(x_1, x_2), \\ u'_t(t_0, x_1, x_2) &= \varphi_1(x_1, x_2) \end{aligned}\right\} (x_1, x_2) \in G \tag{16,1}$$

y las condiciones de frontera de alguno de los casos considerados.

Teóricamente se puede considerar la llamada membrana libre no acotada, es decir, las vibraciones de todo el plano (x_1, x_2), que satisfacen la ecuación (15,1). Podemos llegar a este problema, si la membrana considerada es tan grande que se puede despreciar el efecto de la frontera.

En este caso, como se verá a continuación, es suficiente conocer los datos iniciales para determinar la solución única de la ecuación (15,1). En cambio, para una membrana acotada las condiciones (16,1) no determinan unívocamente la solución para todos los valores de t, sino para cada punto (x_1, x_2) y tan sólo en cierto intervalo $(-t_1, t_1)$, que depende del punto. Además, este intervalo es tanto menor cuanto más cerca esté el punto (x_1, x_2) de la frontera de la región G.

Si ρ es constante, por medio de una sustitución de las variables independientes, es posible transformar la ecuación (15,1) en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \tag{17,1}$$

Analizando las vibraciones pequeñas de un gas (*ondas sonoras*), se puede demostrar que la función $u(t, x_1, x_2, x_3)$, que caracteriza el incremento de la presión en el punto (x_1, x_2, x_3) en el instante t, satisface la ecuación

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \tag{18,1}$$

donde $a > 0$ es una constante (*velocidad del sonido*).

La ecuación de la forma (18,1) se llama *ecuación de ondas* en el espacio; muchos otros procesos vibratorios (por ejemplo, los electromagnéticos) también se describen por la ecuación (18,1). La ecuación (17,1) se llama ecuación de ondas en el plano.

En el caso unidimensional (vibraciones de una cuerda o de un gas en un tubo) la función u correspondiente satisface la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{19,1}$$

Esta ecuación se llama *ecuación de la cuerda vibrante*. Aquí $\rho(x)$ es la densidad lineal en el punto x y T es la tensión de la cuerda. Las condiciones iniciales y de frontera para las ecuaciones (18,1) y (19,1) son iguales a las condiciones correspondientes para la ecuación (15,1).

Hagamos notar una vez más que las ecuaciones (15,1), (18,1) y (19,1) se obtienen si se desprecian las derivadas $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^4$ en comparación con $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$. Si no las despreciamos, (es decir, si no se supone que las vibraciones son pequeñas), las ecuaciones del movimiento de los cuerpos elásticos correspondientes son ecuaciones no lineales, mucho más complejas.

Observación 1. Si consideramos t también como una coordenada espacial, la función $u(t, x_1, x_2)$ que describe las vibraciones de la membrana estará definida en un cilindro C con generatrices paralelas al eje Ot y que pasan por la frontera de G sobre la cual se encuentra la membrana. El problema considerado anteriormente consistía en determinar los valores de esta función dentro del cilindro partiendo de ciertas condiciones para la superficie lateral del cilindro C y para los valores de $u(t_0, x_1, x_2)$ y $u'_t(t_0, x_1, x_2)$ cuando el punto $(x_1, x_2) \in G$ se encuentra en la base del cilindro. En este planteamiento, las condiciones iniciales para $t = t_0$ no se pueden oponer a las condiciones de frontera. Tanto unas como otras son ahora condiciones de frontera dadas en la frontera del cilindro C.

Observación 2. Al considerar la ecuación de la conducción del calor o la ecuación de las vibraciones en un medio isotrópico, teníamos que en estas ecuaciones figuraban las expresiones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \text{ o bien } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \qquad (20,1)$$

Así ocurre siempre en las ecuaciones lineales de segundo orden planteadas para un medio isotrópico homogéneo de dos o tres dimensiones, porque las expresiones (20,1), llamadas operadores de Laplace aplicados a la función u, simplemente laplacianos, son las únicas combinaciones lineales (salvo un factor constante) de las segundas derivadas parciales de u que son invariantes para cualquier transformación ortogonal, es decir, para cualquier giro de los ejes de coordenadas en el espacio de 2 ó 3 dimensiones.

§ 2. PROBLEMA DE CAUCHY. TEOREMA DE KOVALEVSKAYA

1. *Planteamiento del problema de Cauchy*

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales de las funciones incógnitas $u_1, u_2, \ldots, u_N$ respecto a las variables independientes $t, x_1 x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right) \tag{1,2}$$

$$(k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant n_j; \quad k_0 < n_j; \quad i, j = 1,2, \ldots, N).$$

Como se ve de las ecuaciones anteriores, para cada una de las funciones incógnitas u_i existe un orden superior n_i de las derivadas de esta función que figuran en el sistema considerado. La variable independiente t juega un papel especial entre las variables ya que, en primer lugar, entre las derivadas de orden superior n_i de cada función u_i que aparecen en el sistema dado, debe estar contenida la derivada $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}}$ y, además, el sistema está resuelto respecto a estas derivadas. Generalmente en los problemas físicos t representa el tiempo y $x_1, x_2, \ldots, x_n$, las coordenadas espaciales. El número de ecuaciones es igual al número de funciones incógnitas.

Para un cierto valor de $t = t_0$ se dan los valores ("valores iniciales") de las funciones incógnitas u_i y de sus derivadas respecto a t hasta el orden $n_i - 1$. Supongamos que para $t = t_0$

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n_i - 1). \tag{2,2}$$

Todas las funciones $\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ están definidas en una misma región G_0 del espacio $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La derivada de orden cero de la función u_i es la propia función u_i.

El problema de Cauchy consiste en hallar la solución del sistema (1,2) que satisfaga para $t = t_0$ las condiciones iniciales (2,2).

La solución se busca en cierta región G del espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$, que toca la región G_0 en el hiperplano $t = t_0$ donde están dadas las condiciones (2,2).

Un caso especial del problema de Cauchy es el problema de determinar las vibraciones de una membrana homogénea y no acotada a partir de las condiciones iniciales, del cual se habló en el epígrafe anterior y que consiste en hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

si para $t = t_0$ están dados

$$u(t_0, x_1, x_2) = \varphi^{(0)}(x_1, x_2) \quad \text{(desplazamiento inicial)},$$
$$u'_t(t_0, x_1, x_2) = \varphi^{(1)}(x_1, x_2) \quad \text{(velocidad inicial)}.$$

Si $N = 1$, $n_1 = 1$, $n = 0$ el problema de Cauchy formulado anteriormente se convierte en el siguiente problema: Hallar la solución $u(t)$ de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{du}{dt} = F(t, u),$$

tal que $u(t_0) = u_0$. Este problema se estudia ampliamente en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. La función $F(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ de m variables complejas se llama *analítica en la vecindad del punto* $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0$, si la misma es desarrollable en la serie de potencias

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_m) =$$
$$= \sum_{k_1 k_2 \ldots k_m} A_{k_1 k_2 \ldots k_m} (z_1 - z_1^0)^{k_1} (z_2 - z_2^0)^{k} \ldots (z_m - z_m^0)^{k_m},$$

que converge para $|z_i - z_i^0|$ suficientemente pequeños. Es fácil demostrar que en este caso $F(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ tiene en el punto $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0$ derivadas de todos los órdenes y que

$$A_{k_1 k_2 \ldots k_m} = \frac{1}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} \left(\frac{\partial^{k_1 + k_2 + \ldots k_m} F}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \ldots \partial z_m^{k_m}} \right)_{z_1 = z_1^0, \ldots, z_m = z_m^0}.$$

Sean $\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ los datos iniciales del problema de Cauchy para el sistema (1,2) [véase la fórmula (2,2)]. Introduzcamos, para abreviar, las siguientes notaciones para las derivadas de estas funciones en cierto punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$:

$$\left(\frac{\partial^{k-k_0} \varphi_i^{(k_0)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right)_{x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0} = \varphi^0_{i, k^0, k^1, k^2, \ldots, k^n}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N; \quad k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant n_i).$$

Aquí se cumple el siguiente teorema fundamental.

Teorema de Kovalevskaya. Si todas las funciones F_i son analíticas en una vecindad del punto $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \ldots$ $\ldots, \varphi^0_{j, k_0, k_1, \ldots, k_n}, \ldots)$ y todas las funciones $\varphi_j^{(k)}$ son analíticas en una vecindad del punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, el problema de

Cauchy admite solución analítica en una vecindad del punto $(t^0; x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, *solución que es única en la clase de las funciones analíticas*

3. Daremos la demostración del teorema de Kovalevskaya para sistemas lineales arbitrarios. Para estos últimos el problema de Cauchy se reduce fácilmente al problema de Cauchy para sistemas lineales de primer orden, mediante un procedimiento que, para simplificar, expondremos para el caso de una ecuación de segundo orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} a_{0i}(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i\, (t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial t} +$$
$$+ c(t, x_1, \ldots, x_n)\, u + f(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{3,2}$$

donde $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, c, f son funciones analíticas de sus argumentos en la vecindad del punto $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

El problema de Cauchy para esta ecuación consiste en hallar la solución que satisfaga las siguientes condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} u\,(t^0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \\ u_t(t^0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{4,2}$$

donde φ_0 y φ_1 son funciones analíticas en la vecindad del punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Sin perder generalidad podemos considerar que

$$t^0 = x_1^0 = \ldots = x_n^0 = 0,$$

ya que el caso de t^0, $x_1^0, \ldots, x_n^0$ arbitrarios se reduce a éste mediante un cambio de las variables independientes que no altere la forma de la ecuación.

Si la función $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ satisface la ecuación (3,2) y las condiciones iniciales (4,2), es evidente que las funciones

$$u,\ u_0 = \frac{\partial u}{\partial t},\quad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (k = 1,2, \ldots, n)$$

satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{0i} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + b_0 u_0 + cu + f, \tag{5,2}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5,2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0 \tag{5,2)''$$

y las condiciones iniciales

$$u\,(0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \tag{6,2}$$

$$u_0(0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{6,2)'$$

$$u_k(0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial \varphi_0(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} \tag{6,2)''$$

$$(k = 1, \ldots, n).$$

Demostremos la afirmación recíproca: si las funciones $u, u_0, u_1, \ldots, u_n$ satisfacen las ecuaciones (5,2), (5,2)′, (5,2)″ o, para abreviar, si satisfacen (5,2) en cierta región G del espacio $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ contigua a la región G_0 del espacio $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ y las condiciones iniciales (6,2), (6,2)′, (6,2)″ en la región G_0, entonces en toda la región G la función $u(t, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ satisface la ecuación (3,2) y las condiciones iniciales (4,2).

En efecto, de las relaciones (5,2)″ se deduce que en toda la región G

$$u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Sustituyendo $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ por u_0 en el miembro derecho de (5,2)′ obtendremos:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x_k} \text{ o bien } \frac{\partial}{\partial t}\left[u_k - \frac{\partial u}{\partial x_k}\right] = 0. \qquad (7,2)$$

Por eso

$$u_k - \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

no depende de t en toda la región G.

Según la condición (6,2)″, para $t = 0$, en la región G

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Por eso de (7,2) se deduce que para todos los t en la región G

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}. \tag{8,2}$$

Sustituyendo $u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}$ y $u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ en (5,2), obtenemos que la ecuación (3,2) se satisface en toda la región G.

Es decir, hemos demostrado que el sistema (5,2) es equivalente a la ecuación (3,2), si para $t = 0$

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

---

[4] Hablando estrictamente, de los razonamientos anteriores se desprende que

$$u_k - \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

no depende de t en todo segmento de la recta paralela al eje Ot íntegramente contenido en la región G. Por lo tanto, $u_k - \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$ en la parte de G que se cubre totalmente por segmentos de rectas paralelas al eje Ot, íntegramente contenidos en G y que intersectan G_0. Pero las funciones consideradas son analíticas; por eso de aquí se desprende, según un teorema conocido de la teoría de funciones analíticas, que estas expresiones se anulan en toda la región G.

Es evidente que el problema de Cauchy para la ecuación (3,2) se puede reducir al problema de Cauchy para el sistema (5,2) del modo señalado sin suponer que los coeficientes de la ecuación y las funciones iniciales son analíticas, siempre que la región G sea convexa respecto a t, es decir, siempre que la recta paralela al eje t intersecte la frontera de G a lo sumo en dos puntos.

En cambio, para condiciones iniciales arbitrarias, el sistema (5,2) en cierto sentido es más rico en soluciones que la ecuación (3,2), ya que las condiciones iniciales arbitrarias de la solución $u, u_0, u_1, \ldots, u_n$ no tienen que estar vinculadas obligatoriamente por las relaciones $u_k = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$.

Problema 1. Demuestre que el problema de Cauchy para cualquier sistema (1,2) puede ser reducido al problema de Cauchy para un sistema de primer orden de la forma (1,2).

Problema 2. Demuestre que el problema de Cauchy para un sistema no lineal de primer orden de la forma (1,2) puede ser reducido, mediante la derivación de las ecuaciones del sistema y mediante la introducción de nuevas funciones incógnitas y ecuaciones complementarias, al problema de Cauchy para un sistema casilineal de ecuaciones de primer orden, es decir, para un sistema lineal respecto a todas las derivadas.

4. Por lo tanto el problema de Cauchy para la ecuación de segundo orden (3,2) se redujo al problema de Cauchy para el sistema lineal (5,2) de primer orden. Del mismo modo se puede reducir cualquier sistema de la forma (1,2) a un sistema de ecuaciones de primer orden resuelto para las derivadas respecto a t de todas las funciones incógnitas. Por eso, el teorema de Kovalevskaya para un sistema lineal arbitrario que puede ser planteado en la forma (1,2) queda demostrado, si lo demostramos para un sistema lineal arbitrario de primer orden de la forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_j + c_i \qquad (9,2)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

con coeficientes analíticos para las condiciones iniciales analíticas arbitrarias

$$u_i(0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (10{,}2)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

El caso de cualesquiera funciones analíticas φ_i se reduce fácilmente al caso en el cual todas las

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0.$$

Para esto en lugar de las funciones incógnitas anteriores $u_i\ (t, x_1, \ldots, x_n)$ introduciremos nuevas funciones incógnitas

$$v_i\ (t, x_1, \ldots, x_n) = u_i(t, x_1, \ldots, x_n) - \varphi_i(x_1, \ldots, x_n). \quad (11{,}2)$$

Las funciones v_i satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} v_j +$$

$$+ \left(c_i + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\varphi_j\right), \qquad (12{,}2)$$

análogo al sistema (9,2), y a las condiciones iniciales

$$v_i(0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \qquad (13{,}2)$$

Habiendo demostrado la existencia de la solución del problema de Cauchy para el sistema (12,2) con condiciones iniciales nulas, demostraremos también que el problema inicial tiene solución.

Para abreviar las denotaciones, consideraremos que las funciones $u_i\ (t, x_1, \ldots, x_n)$ satisfacen las condiciones iniciales

$$u_i(0, x_1, \ldots, x_n) \equiv 0. \tag{14,2}$$

5. Demostremos primeramente la unicidad de la solución del problema de Cauchy para el sistema (9,2) con las condiciones iniciales (14,2), en la clase de funciones analíticas, en una vecindad del punto O de coordenadas $t = 0, x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$; es decir, demostremos que en ninguna vecindad de este punto existen dos soluciones analíticas distintas del sistema (9,2) que satisfagan para $t = 0$ las mismas condiciones iniciales (14,2). Las funciones $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, analíticas en una vecindad del origen de coordenadas, se descomponen en series de potencias de $t, x_1, \ldots, x_n$ en una vecindad del origen. El cofeiciente $a^i_{k_0 k_1 \ldots k_n}$ de $t^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ del desarrollo de la función $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ es

$$\frac{1}{k_0!\, k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{\partial^{k_0 + k_1 + \ldots + k_n} u_i}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right)_{t = x_1 = \ldots = x_n = 0}$$

La unicidad de la solución del problema de Cauchy quedará demostrada si comprobamos que las condiciones iniciales (14,2) determinan de un modo único los coeficientes del desarrollo de las funciones u_i, que satisfacen el sistema (9,2), en series de potencias de $t, x_1, \ldots, x_n$, o lo que es lo mismo, si demostramos que estas condiciones determinan de una manera única los valores de todas las derivadas de u_i en el punto O de coordenadas $t = x_1 = \ldots = x_n = 0$. Determinaremos estas derivadas sucesivamente. Las condiciones iniciales determinan de una manera única los valores, en el punto O, de todas las derivadas de la forma

$$\left(\frac{\partial^k u_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right)_{t = x_1 = \ldots = x_n = 0} \tag{15,2}$$

Todas estas derivadas son iguales a cero, ya que las identidades (14,2) se pueden derivar respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supongamos que existe una solución del problema de Cauchy. Sustituyamos en las ecuaciones (9,2) u_j por las funciones que constituyen esta solución. Derivemos todas las identidades obtenidas k_1 veces respecto a x_1, k_2 veces respecto a x_2, $\ldots$, k_n veces respecto a x_n. Entonces en los miembros izquierdos se obtienen derivadas de la forma

$$\frac{\partial^{k+1} u_i}{\partial t\, \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \tag{16,2}$$

y en los derechos, las derivadas respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de las funciones incógnitas y de los coeficientes de la ecuación, es decir, cantidades determinadas unívocamente en el punto O por las ecuaciones y las condiciones iniciales. Las identidades obtenidas determinan en el punto O los valores de las derivadas de la forma (16,2) (una derivación respecto a t).

Derivemos cada una de las identidades (9,2) una vez respecto a t, k_1 veces respecto a x_1, $\ldots$, k_n veces respecto a x_n. Entonces, en los miembros derechos se obtienen expresiones formadas por derivadas de u_i de la forma (16,2) y (15,2) y por las derivadas de los coeficientes $a_{ij}^{(k)}$, b_{ij} y c_i. En los miembros izquierdos, se obtienen derivadas de la forma

$$\frac{\partial^{k+2} u_i}{\partial t^2 \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \tag{17,2}$$

(dos derivaciones respecto a t). Como que ya hemos demostrado que las derivadas de la forma (16,2) y (15,2) quedan determinadas unívocamente en el punto O por las ecuaciones (9,2) y las condiciones iniciales (14,2), de aquí se deduce que todas las derivadas (17,2) quedan determinadas unívocamente en el punto O. Continuando este proceso, comprobaremos de ese modo, que todas las derivadas de u_i quedan determinadas en el punto O de una manera única por las ecuaciones (9,2) y las condiciones iniciales (14,2). Pero los valores de todas las derivadas de la función analítica $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ en el punto fijo O determinan unívocamente los valores de los coeficientes de la serie de potencias de t, $x_1, \ldots, x_n$ que es el desarrollo de esta función en una vecindad de O y, por eso, determinan los valores de esta misma función en la vecindad del punto O. Por lo tanto, las dos soluciones analíticas del sistema (9,2) con las mismas condiciones iniciales (14,2) y en cierta vecindad del origen de coordenadas coinciden necesariamente. Con esto queda demostrada la unicidad de la solución del problema de Cauchy para el sistema (9,2) en la clase de funciones analíticas.

6. En el subepígrafe 5 hemos demostrado que las condiciones iniciales determinan los coeficientes del desarrollo de las funciones u_i en series de potencias de t, $x_1, \ldots, x_n$. Para la demostración de la existencia de la solución del problema de Cauchy es suficiente demostrar que las series de potencias con los coeficientes determinados en el subepígrafe 5 convergen en la vecindad del punto O. En efecto, si estas series convergen, las funciones analíticas $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ representadas por éstas, son iguales a cero en el punto O al igual que todas sus derivadas parciales respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [véase (15,2)]. Por consiguiente, son idénticamente nulas respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para $t = 0$ y, por eso, estas funciones satisfacen las condiciones iniciales (14,2). Además, satisfacen el sistema (9,2). En efecto, por la construc-

ción misma de estas funciones, en el punto O, los miembros izquierdos de las ecuaciones (9,2) y todas sus derivadas respecto a $t, x_1, \ldots, x_n$, si sustituimos en los mismos las u_i determinadas de ese modo, toman el mismo valor que los miembros derechos y sus derivadas correspondientes en el propio punto O; por consiguiente, los miembros izquierdos de las ecuaciones son idénticos a los derechos, en cierta vecindad del origen de coordenadas.

Para demostrar la convergencia de las series potenciales que hemos obtenido para las funciones u_i, utilizaremos el *método de las mayorantes*.

7. Se llama mayorante (o función mayorante) de una función analítica $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ en cierta vecindad del punto $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, a toda función analítica $\psi(t, x_1, \ldots, x_n)$ en esta vecindad para la cual todos los coeficientes de su desarrollo en serie de potencias respecto a $t - t^0, x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0$ son positivos o iguales a cero y no menores que los valores absolutos de los coeficientes correspondientes del desarrollo de la función $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Traslademos el origen de coordenadas al punto $(t_1^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ y construyamos para la función analítica $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ en la vecindad del origen de coordenadas, una mayorante de forma especial que utilizaremos en lo que sigue.

Sea

$$\varphi(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum c_{k_0 k_1 \ldots k_n} t^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}. \qquad (18,2)$$

La serie del miembro derecho converge absolutamente en cierto punto

$$t = a_0, \quad x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n, \text{ donde todos los } |a_i| > 0.$$

Entonces existe un número positivo M tal que para todos los $k_0, k_1, \ldots, k_n$ enteros y no negativos

$$\left| c_{k_0 k_1 \ldots k_n} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n} \right| \leqslant M.$$

Por consiguiente, para todos los $k_0, k_1, \ldots, k_n$, se tiene

$$\left| c_{k_0 k_1 \ldots k_n} \right| \leqslant \frac{M}{|a_0|^{k_0} |a_1|^{k_1} \ldots |a_n|^{k_n}}.$$

Por eso, la función

$$S = \frac{M}{\left(1 - \frac{t}{|a_0|}\right)\left(1 - \frac{x_1}{|a_1|}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{|a_n|}\right)} =$$

$$= M\left[\sum_{k_0=0}^{\infty}\left(\frac{t}{|a_0|}\right)^{k_0} \sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{|a_1|}\right)^{k_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty}\left(\frac{x_n}{|a_n|}\right)^{k_n}\right] =$$

$$= \sum_{k_0, k_1, \ldots, k_n} \frac{M}{|a_0|^{k_0} |a_1|^{k_1} \ldots |a_n|^{k_n}} t^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \qquad (19,2)$$

es mayorante para la función $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Se puede señalar otro modo de construcción de una serie mayorante. Así, por ejemplo, para la función $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$, representada por la serie (18,2), también será mayorante la función

$$\frac{M}{1 - \dfrac{t + x_1 + \ldots + x_n}{a}},$$

donde $a = \min(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|)$, $a_i \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ y $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ es un punto de convergencia de la serie (18,2).

En efecto, para $|t| + |x_1| + \ldots + |x_n| < a$, esta función se desarrolla en la serie

$$M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t + x_1 + \ldots + x_n}{a} \right)^k =$$

$$= M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^k} \sum_{k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k} \frac{k!}{k_0!\, k_1! \ldots k_n!} t^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \tag{20,2}$$

pero

$$\frac{(k_0 + k_1 + \ldots + k_n)!}{k_0!\, k_1! \ldots k_n!} \geqslant 1; \quad \frac{1}{a^k} \geqslant \frac{1}{|a_0|^{k_0} |a_1|^{k_1} \ldots |a_n|^{k_n}},$$

es decir, los coeficientes de nuestra serie son positivos y no menores que los coeficientes correspondientes de la serie (19,2). Por lo tanto, la función (20,2) también es mayorante para la función (18,2).

Exactamente del mismo modo, para la función $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ la mayorante es

$$\frac{M}{1 - \dfrac{\dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n}{a}} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n \right)^k}{a^k}, \tag{21,2}$$

donde a tiene el valor anterior, y $0 < \alpha < 1$.

Si desarrollamos de nuevo $\left(\dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n \right)^k$ en potencias de $t, x_1, \ldots, x_n$, obtendremos una serie cuyos coeficientes son positivos y mayores que los coeficientes correspondientes del desarrollo en potencias de t, $x_1, \ldots, x_n$ de la función (20,2); ya que los coeficientes de la primera de estas series se obtienen de los coeficientes correspondientes de la segunda serie multiplicando por $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k_0}$, donde $0 < \alpha < 1$.

Observación 1. Supongamos que la serie potencial

$$\varphi(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m} A_{k_1 k_2 \ldots k_m} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_m^{k_m},$$

converge para $|z_1| \leqslant d_1 + \varepsilon, \ldots, |z_m| \leqslant d_m + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es un número. Supongamos que M^* es el valor mayor del módulo de la función $\varphi(z_1, \ldots, z_m)$, cuando $z_1, \ldots, z_m$ toman valores reales y complejos que satisfacen las condiciones

$$|z_1| \leqslant d_1, \ \ldots, \ |z_m| \leqslant d_m.$$

Se puede demostrar (véase V. I. Smirnov, Curso de matemática superior, tomo 3, parte 2, n.83, Fizmatguiz, 1958), que la función

$$\frac{M^*}{\left(1 - \frac{z_1}{d_1}\right)\left(1 - \frac{z_2}{d_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{z_m}{d_m}\right)}$$

es mayorante para la función $\varphi(z_1, \ldots, z_m)$. De aquí se deduce que la función

$$\frac{M^*}{1 - \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_m}{d}},$$

donde $d = \min(d_1, \ldots, d_m)$, también es mayorante para $\varphi(z_1, \ldots, z_m)$.

8. Pasemos ahora a la demostración de la existencia de la solución de Cauchy para el sistema (9,2) con las condiciones iniciales (14,2); llamémosla "problema 1" y al sistema (9,2) "sistema 1".

Supongamos que de algún modo hemos mayorado los coeficientes del sistema y los datos iniciales de Cauchy. Obtendremos un nuevo sistema y un nuevo problema de Cauchy (llamémoslos, respectivamente, "sistema 2" y "problema 2"). Demostremos que la solución analítica del "problema 2" es mayorante para la solución analítica del "problema 1". Si la solución del "problema 1" se representa en la vecindad del origen por la serie de potencias

$$u_i = \sum a^{(i)}_{k_0 k_1 \dots k_n} t^{k_0} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \tag{22,2}$$

y la solución del "problema 2" por la serie

$$U_i = \sum A^{(i)}_{k_0 k_1 \dots k_n} t^{k_0} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \tag{23,2}$$

debemos demostrar la siguiente desigualdad entre los coeficientes

$$\left| a^{(i)}_{k_0 k_1 \dots k_n} \right| \leqslant A^{(i)}_{k_0 k_1 \dots k_n}. \tag{24,2}$$

Para el caso $k_0 = 0$, estas desigualdades se desprenden directamente de que los datos iniciales del "problema 2" mayoran los datos iniciales del "problema 1". Para el caso $k_0 > 0$, los coeficientes $a^{(i)}_{k_0, k_1 \dots k_n}$, y respectivamente $A^{(i)}_{k_0, k_1 \dots k_n}$ se obtienen mediante la suma y el producto de los coeficientes $a^{(i)}$, respectivamente $A^{(i)}$, de menor subíndice k_0; y de los valores en el punto O de los coeficientes del sistema 1, respectivamente del sistema 2, y de las derivadas de estos coeficientes. Por eso, es fácil comprobar que si para $k_0 < k$ son ciertas las desigualdades (24,2), también lo serán para $k_0 = k$. Es decir, son ciertas para todos los coeficientes de los desarrollos (22,2) y (23,2).

Por consiguiente, si el "problema 2" tiene solución [converge la serie (23,2)], el "problema 1" también tiene solución [converge la serie (22,2)]. Pero el "problema 2" puede construirse muy arbitrariamente, ya que podemos escoger de distintas maneras los mayorantes de los coeficientes y los datos iniciales del "problema 1". Construyamos el "problema 2" de modo tan simple, que su solución se pueda encontrar directamente. Para esto escojamos los números $M > 0$, $a > 0$ de manera que la función

$$\frac{M}{1 - \dfrac{\dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n}{a}}$$

para $0 < \alpha < 1$, sea mayorante para todos los coeficientes del sistema excepto los términos independientes. Para estos últimos tomaremos una mayorante común de la forma

$$\frac{M_1}{1 - \dfrac{\dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n}{a}}\text{[5]}$$

Esto se puede hacer, ya que una mayorante de esa forma existe para cada coeficiente y para construir la mayorante común debemos atribuir a los números M y M_1 el valor mayor, y para el número a el menor, de todos los valores correspondientes a los

[5] La posibilidad de escoger M_1 independientemente de M será útil en lo sucesivo (compárase con la observación 2 al final del epígrafe presente).

distintos coeficientes. Habiendo escogido de ese modo los números M, M_1 y a, escribamos el sistema mayorante en la forma

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{M}{1 - \frac{\frac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n}{a}} \left[\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} U_j + m \right], \tag{25,2}$$

donde el número α, $0 < \alpha < 1$, lo escogeremos más tarde, y $m = \dfrac{M_1}{M}$.

Sin fijar aún los datos iniciales buscamos una solución del sistema en la forma

$$\begin{aligned} U_1(t, x_1, \ldots, x_n) &\equiv U_2(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv \ldots \\ \ldots &\equiv U_N(t, x_1, \ldots, x_n) = U(t, x_1, \ldots, x_n) = \\ &= U\left(\frac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n\right) = U(z), \end{aligned}$$

donde $z = \dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \cdots + x_n$. Sustituyendo la supuesta solución en el sistema (25,2), obtendremos que la función $U(z)$ debe satisfacer la ecuación

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dU}{dz} = A(z) \left(Nn \frac{dU}{dz} + NU + m \right), \tag{26,2}$$

donde $A(z) = \dfrac{M}{1 - \frac{z}{a}}$. Separando en esta ecuación las variables tendremos

$$\frac{dU}{\frac{N}{m} U + 1} = \frac{mA(z)dz}{\frac{1}{\alpha} - NnA(z)} = B(z)\, dz.$$

Escojamos ahora el número positivo α tan pequeño que en una vecindad del punto $z = 0$ se cumple que

$$\frac{1}{\alpha} - NnA(z) > 0. \tag{27,2}$$

Entonces $B(z)$ es en esta vecindad una función analítica.

Demostremos que la solución parcial de la ecuación (26,2)

$$U(z) = \frac{e^{\frac{N}{m}\int_0^z B(t)\,dt} - 1}{N}\, m$$

nos da la mayorante deseada para la solución del "problema 1".

Como las funciones $U_i(t, x_1, \ldots, x_n) = U\left(\frac{t}{\alpha} + x_1 + + \ldots + x_n\right)$ satisfacen el sistema (25,2), que mayora el sistema inicial, entonces para demostrar la afirmación anterior es suficiente comprobar que $U(z)$ para $t = 0$ es desarrollable en serie respecto a $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con coeficientes positivos, es decir, es mayorante del cero idéntico (de los datos iniciales del "problema 1").

En efecto, $A(z) = \dfrac{M}{1 - \dfrac{z}{\alpha}}$ es una función que tiene coeficientes no negativos en su desarrollo según z. Por lo tanto

$$B(z) = \frac{m\alpha A(z)}{1 - \alpha A(z)Nn} =$$

$$= m\alpha A(z)\,[1 + \alpha NnA(z) + \alpha^2N^2n^2A^2(z) + \ldots]$$

también tiene coeficientes no negativos en su desarrollo según las potencias de z. Por eso,

$$C(z) = \frac{N}{m}\int_0^z B(z)dz,\ e^{C(z)} - 1 = C(z) + \frac{C^2(z)}{2!} + \ldots,\ U(z)$$

también tienen esta propiedad. Entonces, también los coeficientes del desarrollo de $U(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ en potencias de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son no negativos, es decir, $U(0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es en realidad una mayorante de cero. Por consiguiente, las funciones $U_i(t, x_1, \cdots, x_n) = U\left(\frac{t}{\alpha} + x_1 + \cdots + x_n\right)$ son solución del "problema 2". La analiticidad de esta solución se desprende de que $U(z)$, como se ha mostrado más arriba, es desarrollable en serie de potencias de z y por lo tanto en serie de potencias de $t, x_1, \cdots, x_n$. De aquí, según hemos señalado más arriba, se deduce la convergencia de las series potenciales (22,2) que representan la solución del problema inicial.

Con esto termina la demostración del teorema de Kovalevskaya para sistemas lineales.

Observación 2. De la demostración del teorema se ve que las series que dan la solución al problema de Cauchy para el sistema (9,2) convergen, en todo caso, en la región donde convergen las series que dan la solución del problema mayorante. De aquí se deduce que la solución del problema inicial de Cauchy para el sistema (9,2) y para las funciones iniciales φ_i, no necesariamente iguales a cero, existe, en todo caso, en la región

$$\left|\frac{t}{\alpha}\right| < \rho,\ |x_1| < \rho,\ \ldots,\ |x_n| < \rho,\ \rho > 0,$$

si los coeficientes del sistema (9,2) y las funciones iniciales eran holomorfas en la región

$$|t| \leqslant R, \ |x_i| \leqslant R \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, R > 0).$$

Aquí ρ y α dependen sólo de R y del número M, pero no dependen de ninguna forma de los valores de las funciones iniciales $\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ni de los términos independientes de las ecuaciones, ya que ni α ni la región de variación de z, donde se verifica (27,2), dependen de estos valores.

Observación 3. Para los sistemas que no son de la forma (1,2) el teorema de Kovalevskaya, en general, no es válido como lo ilustra el siguiente ejemplo que pertenece a la propia Kovalevskaya. Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{28,2}$$

con la condición inicial

$$u(0, x) = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1. \tag{29,2}$$

Es fácil ver que la solución analítica $u(t, x)$ del problema (28,2), (29,2), si existe, debe representarse en una vecindad del origen de coordenadas por la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{t^n}{(1 - x)^{2n+1}};$$

sin embargo, esta serie diverge en todo punto para $t \neq 0$.

Problema. Demuéstrese el teorema de Kovalevskaya para un sistema casilineal de ecuaciones de primer orden.

§ 3. GENERALIZACIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY. CONCEPTO DE CARACTERÍSTICA

1 Generalización del problema de Cauchy. Sea un sistema de N ecuaciones con N funciones incógnitas $u_1, u_2, \ldots, u_N$

$$\Phi_i\left(x_0, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial x_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right) = 0$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, N). \qquad (1,3)$$

Para cada función u_i existe el orden mayor n_i de las derivadas parciales de esta función respecto a las variables independientes $x_0, x_1, \cdots, x_n$, que figuran en el sistema (1,3). En la región señalada de los puntos $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ se define una superficie S, n-dimensional, suficientemente suave, y en cada punto de la superficie una línea l no tangente a S y que varía de forma suficientemente suave al moverse a lo largo de S, por ejemplo, la normal a la superficie. Sobre esta superficie se definen todas las funciones u_i y sus derivadas en la dirección de la línea l hasta el orden $n_i - 1$. Estas condiciones impuestas a la superficie S son una generalización de las condiciones de Cauchy (de las condiciones iniciales), consideradas en el epígrafe anterior. Tenemos que hallar la solución $u_1, u_2, \cdots, u_N$ del sistema (1,3) en cierta vecindad de la superficie S que satisface las condiciones impuestas a S.

2. Trataremos de reducir este problema al problema de Cauchy, enunciado en el epígrafe anterior. Para simplificar, nos limitaremos primero a considerar, en lugar del sistema (1,3), el siguiente sistema lineal:

$$\sum_{j, k_0, k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial x_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \ldots$$
$$\ldots + f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (2,3)$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, N).$$

Hemos escrito aquí sólo los miembros que contienen las derivadas más altas de las funciones incógnitas.

En la vecindad de la superficie S introduciremos nuevas coordenadas curvilíneas $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$ de manera que la ecuación de la superficie S tome la forma $\xi_0 = 0$ y que las líneas l coincidan con las líneas coordenadas

$$\xi_1 = c_1,\ \xi_2 = c_2,\ \ldots,\ \xi_n = c_n.$$

Para esto precisemos la suposición sobre el carácter suave de la superficie S y de las líneas l. Supongamos que para la superficie se pueden introducir los parámetros $\xi_1, \cdots, \xi_n$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x_0\ (\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n), \\ x_1 = x_1\ (\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n\ (\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n), \end{array}\right\} \tag{3,3}$$

de manera que el rango de la matriz funcional

$$\left\|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right\| \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ \ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

sea igual a n en cada punto de S, y que los miembros derechos en (3,3) sean funciones suficientemente suaves.

Supongamos que las líneas l se definen por las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = X_0\ (\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = X_n\ (\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n), \end{array}\right\} \tag{4,3}$$

donde ξ_0 es el parámetro de un punto a lo largo de la línea l y $\xi_1, \cdots, \xi_n$ son los parámetros del punto de intersección de l con S.

Además, se supone que los miembros derechos de las ecuaciones (4,3) son funciones suficientemente suaves de todos sus argumentos.

Respecto al parámetro ξ_0 supondremos que al menos una de las derivadas $\frac{\partial X_i}{\partial \xi_0}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ es distinta de cero, y que el punto de intersección de la línea l con la superficie S corresponde al valor $\xi_0 = 0$ (es decir, las ecuaciones (4,3) para $\xi_0 = 0$ son iguales a las ecuaciones (3,3) de la superficie S).

Demostremos ahora que el determinante funcional

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_0}{\partial \xi_0} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_0} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial \xi_0} \\ \frac{\partial X_0}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial \xi_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial X_0}{\partial \xi_n} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \qquad (5,3)$$

es distinto de cero en cierta vecindad de la superficie S. En la superficie S, es decir, para $\xi_0 = 0$,

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_0}{\partial \xi_0} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_0} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial \xi_0} \\ \frac{\partial x_0}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_0}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \qquad (6,3)$$

Las últimas n filas del determinante (6,3) son linealmente independientes, ya que por suposición el rango de la matriz funcional $\left\|\dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right\|$ $(i = 0, 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, n)$ es igual a n. Si el determinante (6,3) fuera igual a cero, su primera fila, que representa un vector no nulo tangente a l, sería una combinación lineal de las últimas n filas. Pero esto es imposible, ya que las últimas n filas representan vectores situados sobre el hiperplano tangente a S y las líneas l por suposición no son tangentes a S.

Por continuidad, el determinante (5,3) es distinto de cero en cierta vecindad de S. Por eso, en esta vecindad, $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ se pueden tomar como nuevas coordenadas del punto $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

Pasemos a las variables independientes $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$ en las ecuaciones (2,3). En las ecuaciones transformadas nos van a interesar principalmente los términos que contienen las derivadas de u_i respecto a ξ_0 de orden superior a n_i. Escribiendo sólo estos miembros obtendremos

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial x_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{k_0} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{k_n} + \cdots$$

Por eso, escribiendo sólo los miembros con las derivadas de mayor orden de las funciones u_i respecto a ξ_0 en las ecuaciones obtenidas de la transformación de las ecuaciones (2,3), tendremos

$$\sum_{\substack{j=1 \\ k_0 + \ldots + k_n = n_j}}^{N} A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{k_0} \cdots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{k_n} \frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial \xi_0^{n_j}} + \ldots = 0 \tag{7,3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

Para que estas ecuaciones se puedan resolver unívocamente respecto a $\dfrac{\partial^{n} u_j}{\partial \xi_0^{n_j}}$ en cierta vecindad de S, siendo arbitrarios los demás términos de la ecuación (que no están escritos explícitamente), es necesario y suficiente que en todos los puntos de la superficie S el determinante

$$\left| \sum_{k_0 + \ldots + k_n = n_j} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{k_0} \cdots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{k_n} \right|$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N).$$

sea distinto de cero. Entonces, en virtud de la continuidad de los coeficientes $A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)}$ y de las derivadas $\dfrac{\partial \xi_0}{\partial x_k}$, este determinante también es distinto de cero en cierta vecindad de la superficie S en el espacio $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

La ecuación

$$\left| \sum_{k_0 + \ldots + k_n = n_j} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)} (x_0, \ldots, x_n) \alpha_0^{k_0} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} \right| = 0 \qquad (8,3)$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N)$$

se llama *ecuación característica* del sistema (2,3); aquí $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son ciertos parámetros para los cuales $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$. La dirección del hiperplano

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x_k - \overset{0}{x}_k) = 0$$

se llama *dirección característica* en el punto $(x_0^0, \cdots, x_n^0)$ del sistema (2,3), si

$$\left| \sum_{k_0+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0\ldots k_n)}(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\, \alpha_0^{k_0}\ldots\alpha_n^{k_n} \right| = 0\,[6].$$

La superficie $\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0$ se llama *superficie característica* del sistema (2,3) o símplemente *característica,* si en cada punto de esta superficie

$$\left| \sum_{k_0+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0 k_1\ldots k_n)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^{k_0} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^{k_n} \right| = 0$$

y si al menos una de las derivadas $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ $(k = 0; 1, \cdots, n)$ es distinta de cero.

De estas definiciones se deduce que la dirección de cada hiperplano tangente a la superficie característica o, como vamos a decir para abreviar, la dirección de la superficie característica es característica en todo punto.

---

[6] Debido a que la ecuación (8,3) es homogénea respecto a las incógnitas $\alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_n$, estas variables se pueden normar suponiendo, por ejemplo, que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 = 1$. Entonces α_k será el coseno del ángulo entre la norma al hiperplano característico y el eje Ox_k.

3. De lo anterior se ve que si la dirección de la superficie S de la cual se trató en el enunciado del problema generalizado de Cauchy, no es dirección característica del sistema (2,3) en ningún punto, entonces, después de sustituir por $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$ las coordenadas $x_0, x_1, \cdots, x_n$, según se describió en el subepígrafe 2, el sistema transformado (7,3) se puede resolver siempre en la vecindad de la superficie S, respecto a las derivadas de orden superior de u_i respecto a ξ_0. Se obtiene el sistema

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}} = \sum_{j,k} B_{ij}^{(k_0 \cdots k_n)}(\xi_0, \ldots, \xi_n) \frac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \cdots \partial \xi_n^{k_n}} + F_i(\xi_0, \ldots, \xi_n) \tag{9,3}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N;\ k = k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant n_j;\ k_0 < n_j).$$

Las condiciones definidas para la superficie S se convierten en las condiciones

$$\left(\frac{\partial^k u_i}{\partial \xi_0^k}\right)_{\xi_0 = 0} = \varphi_i^{(k)}(\xi_1, \ldots, \xi_n);\quad \begin{matrix} k = 0, 1, \ldots, n_i - 1, \\ i = 1, 2, \ldots, N. \end{matrix} \tag{10,3}$$

Por lo tanto, si la superficie S no tiene dirección característica en ningún punto, el problema generalizado de Cauchy se reduce al problema anterior de Cauchy. El paso del primero de estos problemas al segundo es totalmente reversible: a cada solución suficientemente suave[7] de uno corresponde una única solución suave del otro.

---

[7] Es suficiente exigir que las funciones u_i tengan derivadas continuas hasta el orden n_i inclusive, y que las funciones que determinan el cambio de coordenadas tengan derivadas continuas hasta el orden máx (n_i), inclusive.

Pero en el epígrafe anterior se trató de la solución de un sistema con coeficientes analíticos y con condiciones iniciales analíticas. Para que el sistema (9,3) y el problema de Cauchy para él satisfagan estas exigencias es suficiente que se cumplan las siguientes condiciones complementarias:

(a) *Los coeficientes del sistema (2,3) son funciones analíticas* de $x_0, \cdots, x_n$.

(b) Las funciones $x_i = X_i\ (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)\ (i = 0, 1, ..., n)$ son funciones analíticas de sus argumentos.

La posibilidad de escoger las funciones analíticas X depende del carácter de la superficie S y de la familia de líneas l. Llamaremos a la superficie S y a la familia de líneas l, para las cuales esto es posible, superficie analítica y familia analítica de líneas, respectivamente.

Si la superficie está dada por la ecuación $F(x_0, x_1, ..., x_n) = 0$, es analítica siempre que $F(x_0, x_1, ..., x_n)$ sea una función analítica de sus argumentos y la superficie no tenga puntos singulares (puntos donde todas las primeras derivadas de la función F se convierten en cero). La familia de las normales a la superficie analítica es una familia analítica de líneas.

(c) Las condiciones iniciales son funciones analíticas de $\xi_1, \cdots, \xi_n$.

De acuerdo con el teorema de Kovalevskaya, podemos decir que al cumplirse las condiciones (a), (b) y (c) el problema generalizado de Cauchy tiene siempre solución única, en una cierta vecindad de la superficie S, si la superficie no tiene dirección característica en ningún punto.

Si la superficie S tiene en el punto A una dirección característica, es decir, si en el punto A de la superficie

$$\xi_0(x_0, \ldots, x_n) = 0$$

se cumple la igualdad

$$\left| \sum_{k_0 + \ldots + k_n = n_j} A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} \right)^{k_0} \cdots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n} \right)^{k_n} \right| = 0, \tag{11,3}$$

entonces en la superficie S, en general, no se pueden dar valores arbitrarios a las funciones u_i ni a sus derivadas, si se quiere que el problema generalizado de Cauchy tenga solución. En efecto, dejemos todos los términos que contengan derivadas de orden n_i respecto a ξ_0 de las funciones u_i en los miembros izquierdos de las ecuaciones (7,3) y pasemos el resto de los términos a la derecha. Entonces, en virtud de la condición (11,3), en el punto A, existe dependencia lineal entre los miembros izquierdos de las ecuaciones obtenidas. Esa misma dependencia lineal debe existir también entre los miembros derechos de estas ecuaciones, los cuales se determinan totalmente por los valores dados a las funciones u_i y a sus derivadas, en la superficie S. Esto impone una relación determinada a las condiciones iniciales, siempre que la dependencia lineal exigida entre los miembros derechos de las ecuaciones no se cumpla idénticamente para todos los valores en S de las funciones u_i y de sus derivadas. En este último caso, y también en el caso en que las condiciones de Cauchy para la superficie característica S estén dadas de tal manera que el sistema tenga solución respecto a las derivadas de orden superior respecto a ξ_0, consideradas como funciones de las variables independientes

$$\xi_0, \ldots, \xi_n, u_1, \ldots, u_N, \frac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}$$

$$\left(k = \sum k_s \leqslant n_j, \; k_0 < n_j, \; j = 1, \ldots, N\right),$$

esa solución puede no ser única en la vecindad del *punto A*.

Determinemos, para algunos ejemplos concretos, las direcciones características de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones. Supondremos siempre que

$$\sum \alpha_i^2 = 1, \tag{12,3}$$

es decir, α_i denota el coseno del ángulo entre el eje Ox_i y la *normal al hiperplano de dirección característica*.

Ejemplo 1. Para la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

la relación (8,3) toma la forma

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 0.$$

Teniendo en cuenta (12,3), probemos que la ecuación de Laplace no tiene direcciones características reales.

Ejemplo 2. Para la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

la relación (8,3) toma la forma

$$\alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 0.$$

De acuerdo con (12,3), debe cumplirse que

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1,$$

y por eso $2\alpha_0^2 = 1$; $\alpha_0 = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Es decir, los planos tangentes a todas las superficies características forman con el eje Ox_0 un ángulo de 45°. Valiéndonos de esta propiedad de las superficies características es fácil imaginar qué forma tienen las superficies características que pasan por ciertas curvas en el plano $x_0 =$ const. Por ejemplo, la superficie característica que pasa por una recta cualquiera l de este plano, es un plano que pasa por l y que forma con el plano $x_0 =$ const. un ángulo de 45°. La superficie característica que pasa por una circunferencia K contenida en el plano $x_0 =$ const., es la superficie lateral del cono circular cuyo eje es paralelo al eje Ox_0 y cuyas generatrices forman un ángulo de 45° con el plano $x_0 =$ const. o, lo que es lo mismo, con el eje Ox_0.

Es fácil ver, que para la llamada ecuación de ondas, en el espacio n dimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

son válidos resultados análogos.

Ejemplo 3. Para la ecuación de la conducción térmica

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

la relación (8,3) toma la forma

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 0.$$

De acuerdo con (12,3) de aquí se deduce que $\alpha_0^2 = 1$. Por eso los hiperplanos $x_0 =$ const. son las superficies características.

Ejemplo 4. Para la ecuación

$$a_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

la relación (8,3) toma la forma

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\, \alpha_1 + a_2(x_1, \ldots, x_n)\, \alpha_2 + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\, \alpha_n = 0.$$

Por eso, todos los hiperplanos que pasen por el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ y por el vector que sale de este punto y cuyos componentes son $(a_1, \ldots, a_n)$, tienen en este punto una dirección característica.

Ejemplo 5. Para los sistemas de ecuaciones con dos variables independientes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \sum_{j=1}^{n} b_{ji}(x_1, x_2) \frac{\partial u_j}{\partial x_2} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_1, x_2) u_j = 0$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

la relación (8,3) toma la forma

$$| \alpha_1 a_{ij}(x_1, x_2) + \alpha_2 b_{ij}(x_1, x_2) | = 0.$$

Las líneas características serán las líneas a lo largo de las cuales $\frac{dx_2}{dx_1}$, es decir, $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} : \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, es igual a una raiz k cualquiera de la ecuación

$$| - k a_{ij}(x_1, x_2) + b_{ij}(x_1, x_2) | = 0.$$

Consideramos aquí que $\varphi\,(x_1, x_2) = \text{const.}$ es la ecuación de la línea característica.

Problema. Demuestre que para una transformación suave no degenerada de las coordenadas, la superficie característica del sistema (2,3) se convierte en la superficie característica del sistema transformado, es decir, las características son invariantes respecto a una transformación no degenerada de las coordenadas.

4. Para sistemas no lineales de la forma

$$\Phi_i\left(x_0, \ldots, x_n;\; u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial_0^{k_0}\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right) = 0 \tag{13,3}$$

$$(i, j = 1, \ldots, N;\quad k = k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant n_j)$$

la *ecuación característica* se define de la siguiente manera

$$\left| \sum_{k_0 + k_1 + \ldots + k_n = n_j} \frac{\partial\Phi_i}{\partial\left\{\frac{\partial^{n} u_j}{\partial x_0^{k_0}\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}\right\}} \alpha_0^{k_0} \cdots \alpha_n^{k_n} \right| = 0 \tag{14,3}$$

La superficie

$$\varphi(x_0, \ldots, x_n) = 0 \tag{15,3}$$

se llama *característica* para el sistema (13,3) y para la *solución dada* $u_1, u_2, \ldots, u_N$ de este sistema, si en todo punto de esta superficie y para las funciones consideradas $u_1, u_2, \ldots, u_N$ se cumple la siguiente identidad:

$$\left| \sum_{k_0 + k_1 + \ldots + k_n = n_j} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \left\{ \dfrac{\partial^n u_j}{\partial x_0^{k_0} \cdots \partial x_n^{k_n}} \right\}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right)^{k_0} \cdots \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)^{k_n} \right| = 0.$$

Análogamente se definen las *direcciones características* del sistema (13,3) en un punto dado del espacio $(x_0, \ldots, x_n)$ para la solución dada $u_1, u_2, \ldots, u_N$. En el caso de sistemas no lineales, sólo tiene sentido hablar de la dirección característica del hiperplano

$$\sum \alpha_k (x_k - x_k^0) = 0$$

en el punto dado, si nos referimos a una solución determinada $u_1, u_2, \ldots, u_N$ del sistema (13,3) ya que los coeficientes de la ecuación (14,3) dependen, en este caso, en general, de las funciones u_i y de sus derivadas hasta el orden n_i.

Con un procedimiento análogo al utilizado en el subepígrafe anterior se puede demostrar lo siguiente: Supongamos que en una superficie analítica están dadas las condiciones de Cauchy y supongamos que todas las funciones definidas en esa superficie son analíticas. Puesto que después de pasar a las coordenadas ξ_0; $\xi_1, \ldots, \xi_n$ el sistema deja de ser lineal, obtendremos para $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ un sistema no lineal de ecuaciones; designémoslo por Σ.

Este sistema tiene, en general, varias soluciones respecto a $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, consideradas como funciones de las variables independientes $\xi_0, \ldots, \xi_n, \ldots, u_j, \ldots, \dfrac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \cdots \partial \xi_n^{k_n}}$, $k = \sum k_s \leqslant n_j$, $k_0 < n_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Supongamos que en un entorno de la hipersuperficie $\xi_0 = 0$ y para los valores de u_j y de sus derivadas definidas sobre aquélla hemos escogido para $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ un sistema cualquiera de funciones analíticas de $\xi_0 \ \ldots, \xi_n, \ldots, u_j, \ldots, \dfrac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \cdots \partial \xi_n^{k_n}}$, $k = \sum k_s \leqslant n_j$, $k_0 < n_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, que satisface las ecuaciones de $\sum$. De ese modo determinaremos los valores de $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ en la superficie S a partir de las condiciones iniciales del problema generalizado de Cauchy definidas en la misma. Volviendo a las coordenadas $x_0, \ldots, x_n$ obtendremos en la superficie S los valores de todas las funciones u_i y de todas sus derivadas respecto a $x_0, \ldots, x_n$ hasta el orden n_i. Sustituyéndolas por u_i y sus derivadas en la ecuación (14,3), obtendremos una ecuación totalmente determinada para $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Por consiguiente, podremos de ese modo determinar las direcciones características en cada punto $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de la superficie S. Supongamos que la superficie S no tiene dirección característica en ningún punto. Entonces se puede demostrar que el problema generalizado de Cauchy, planteado de ese modo para el sistema (13,3), tiene una solución analítica única para los valores de $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ seleccionados de esta manera en S.

§ 4. SOBRE LA UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY EN LA CLASE DE FUNCIONES NO ANALÍTICAS

1. Del teorema de Kovalevskaya se deducen la existencia y la unicidad de la solución del problema de Cauchy en la clase de funciones analíticas, si las condiciones analíticas de Cauchy se dan en una superficie analítica S, que no tiene dirección característica en ningún punto. De los razonamientos realizados en los §§ 2 y 3 se deduce que si todas las funciones que figuran en las ecuaciones dadas y en las condiciones iniciales toman valores reales para valores reales de los argumentos, las soluciones del problema de Cauchy también serán reales. Surge la cuestión: ¿No habrá en este caso otras soluciones del problema de Cauchy que la solución analítica de Kovalevskaya? Para que un sistema de funciones $(u_1, \ldots, u_N)$ sea solución del problema de Cauchy no es necesario exigir, en el caso real, que todas las funciones u_i sean analíticas y, además, es suficiente que tengan derivadas de los órdenes que figuran en las ecuaciones consideradas. A pesar de los esfuerzos de muchos matemáticos destacados, esta cuestión hasta ahora no ha sido resuelta.

En 1901 Holmgren demostró la unicidad de la solución del problema de Cauchy para las condiciones iniciales (10,3) y los sistemas de ecuaciones lineales de la forma (9,3) con coeficientes analíticos, en la clase de funciones con derivadas continuas de todos los órdenes que figuran en el sistema considerado.

Hagamos la demostración de este teorema.

Para simplificar la exposición, supondremos que el número de variables independientes es igual a dos, aunque la misma demostración, en esencia, es aplicable a cualquier número de variables independientes. Supongamos también que el sistema considerado es de primer orden. De acuerdo con lo dicho en el § 2 el caso general se reduce a éste. Sean $\widetilde{x}$ e y las variables independientes y supongamos, primeramente, que el problema de Cauchy se plantea para el tramo de la recta $\widetilde{x} = 0$ que contiene el origen de coordenadas.

Es decir, consideramos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial z_i}{\partial \widetilde{x}} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\widetilde{x}, y) \frac{\partial z_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\widetilde{x}, y) z_j + C_i(\widetilde{x}, y) \qquad (1,4)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

y las condiciones iniciales

$$z_i(0, y) = \varphi_i(y). \qquad (2,4)$$

A_{ij}, B_{ij}, C_i son funciones analíticas de sus argumentos en cierta vecindad del origen de coordenadas. Supongamos que en un entorno del origen de coordenadas hay dos soluciones del sistema (1,4) que satisfacen las mismas condiciones iniciales (2,4) y que constan de las funciones $z_1, \ldots, z_n$ (primera solución) y $\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n$ (segunda solución), cuyas primeras derivadas parciales son continuas. Es necesario demostrar que estas soluciones son iguales en cierta vecindad del origen de coordenadas.

Supongamos que

$$z_i - \widetilde{z}_i = \widetilde{u}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Entonces, todas las $\tilde{u}_i$ son, en un entorno de O, funciones derivables que satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\tilde{x}, y) \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\tilde{x}, y)\tilde{u}_j \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

y las condiciones iniciales

$$\tilde{u}_i(0, y) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Demostremos que todas las $\tilde{u}_i \equiv 0$ en un entorno del punto O (0,0). Introduzcamos en lugar de $\tilde{x}$ la nueva variable independiente

$$x = \tilde{x} + y^2$$

y consideremos

$$u_i(x, y) = \tilde{u}_i(\tilde{x}, y) = \tilde{u}_i(x - y^2, y) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Entonces las funciones u_i verificarán el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = 2y \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x - y^2, y) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x - y^2, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(x - y^2, y)u_j \quad (3,4)$$

o bien, despejando en este sistema las derivadas respecto a x e introduciendo nuevas notaciones, obtendremos

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x, y)u_j \quad (4,4)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

(La posibilidad de despejar en el sistema (3,4) las derivadas indicadas se deduce del hecho de que el determinante del sistema no puede ser cero en un entorno del origen de coordenadas O del plano (x, y). ¡Compruébese!) Los coeficientes a_{ij} y b_{ij} son analíticos en un entorno del punto O. Las funciones u_i son derivables en un entorno de O y se anulan en la parábola $y^2 = x$. Demostraremos que todas las $u_i \equiv 0$ en un entorno de O para $x > y^2$. Con esto quedará probado que todas las $\tilde{u}_i \equiv 0$ en un entorno de O para $\tilde{x} > 0$. El caso $\tilde{x} < 0$ se reduce al caso $\tilde{x} > 0$ sustituyendo $\tilde{x}$ por $-\tilde{x}$.

Tracemos la recta $x = a$ ($a > 0$; fig. 1) y denotemos con H_a la región comprendida entre el segmento l_a de esta recta y la parte K_a de la parábola $y^2 = x$. Si a es suficientemente pequeño, todas las funciones u_i son continuas al igual que sus derivadas parciales de primer orden, incluso hasta la frontera H_a. (decimos que una función definida en la región H es continua incluso hasta la frontera H^* de esta región, si se puede extender la función a H^* de manera que la función obtenida sea continua en $H + H^*$).

Denotemos, para abreviar,

$$F_i(u) \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial y} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$G_i(v) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial v_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y} (a_{ji} v_j) + \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

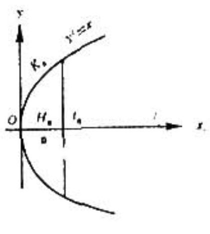

Fig. 1

Supongamos que en H_a se tienen dos funciones u_i y v_i continuas incluso hasta la frontera H_a, al igual que sus primeras derivadas parciales. Entonces, la integración por partes da

$$\iint_{H_a}\Big\{\sum_{i=1}^{n}[v_iF_i(u) + u_iG_i(v)]\Big\}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{H_a}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{\partial(u_iv_i)}{\partial x} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(a_{ij}u_jv_i)}{\partial y}\Big]\Big\}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{l_a}\sum_{i=1}^{n}u_iv_idy + \int_{K_a}\sum_{i=1}^{n}u_iv_idy + \int_{K_a}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_jv_idx, \quad (5,4)$$

donde el contorno que limita a H_a (es decir, $K_a + l_a$), se recorre en la dirección positiva. Si, en particular, u_i es el sistema de soluciones de las ecuaciones (4,4) determinado anteriormente y si el sistema de funciones $v_1, \ldots, v_n$ satisface las ecuaciones

$$G_i(v) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6,4}$$

entonces de (5,4) se obtiene

$$\int_{l_a}\sum_{i=1}^{n}u_iv_idy = 0. \tag{7,4}$$

Recurramos ahora a algunos resultados obtenidos al realizar la demostración del teorema de Kovalevskaya para un sistema de ecuaciones lineales. Utilicemos las observaciones 1 y 2 del § 2 y resolvamos el sistema de ecuaciones (6,4) en un entorno del punto

$(a, 0)$, tomando como condiciones iniciales para l_a todos los sistemas posibles de polinomios. La constante M puede ser tomada igual a la constante M^*, definida en la observación 1 del § 2 y común para todos los puntos $(a, 0)$. Entonces, en virtud de la observación 2 del § 2, podemos afirmar que, si a es suficientemente pequeño, todas las funciones que constituyen la solución del sistema (6,4) y verifican las condiciones iniciales establecidas, son, desde luego, definidas y analíticas en H_a y, por consiguiente, son continuas incluso hasta la frontera H_a al igual que sus derivadas parciales.

De modo que la igualdad (7,4) se verifica si $0 < a < a_0$ (a_0 es un número positivo fijo) y todas las v_i son polinomios cualesquiera. Fijemos un a que cumpla esta condición y sea s_a la longitud del segmento l_a. Según el conocido teorema de Weierstrass, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un sistema de polinomios v_i $(i = 1, \ldots, n)$, tales que en todos los puntos de l_a se tiene

$$|u_i - v_i| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{8,4}$$

De acuerdo con las fórmulas (7,4) y (8,4),

$$\int_{a} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \, dy =$$

$$= \int_{l_a} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \, dy + \int_{l_a} \sum_{i=1}^{n} u_i (u_i - v_i) \, dy \leqslant \varepsilon s_a \sum_{i=1}^{n} \max_{l_a} |u_i|,$$

de donde, en virtud de la arbitrariedad de ε, obtendremos

$$\int_{l_a} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \, dy = 0,$$

es decir, todas las $u_i \equiv 0$ en l_a, siempre que $0 < a < a_0$. Con esto queda demostrado el teorema de Holmgren.

Aplicando este teorema y mediante un cambio de variables independientes, es fácil demostrar la unicidad de la solución del problema generalizado de Cauchy, con las suposiciones anteriores respecto al sistema (1,4) y para el caso en que las condiciones iniciales se den sobre una línea analítica que no tiene dirección característica en ningún punto. Un teorema análogo es válido para sistemas lineales con un número mayor de variables independientes, cuando las condiciones iniciales se dan para una superficie analítica S; sólo es necesario que la superficie S no tenga dirección característica en ningún punto. De las funciones que constituyen la solución se puede exigir que estén definidas solamente de un lado de S y que sean continuas, al igual que sus derivadas parciales de primer orden, incluso hasta S. Si para estas condiciones, dos soluciones son iguales en S, también lo son *en una vecindad de* S.

Observación. Se puede describir de una manera más exacta la región del plano $(\tilde{x}, y)$ donde la solución del problema de Cauchy para el sistema (1,4) se determina unívocamente por las condiciones iniciales (región de unicidad). Supongamos que estas condiciones iniciales se plantean para el segmento AB del eje $\tilde{x} = 0$ y las soluciones se consideran a la derecha de este eje. Tracemos, por los puntos A y B y hacia la derecha, las características más próximas al segmento AB. Entonces se puede demostrar que la región comprendida entre el segmento AB y estas dos características es la región de unicidad de la solución del problema de Cauchy. Análogamente se determina la región de unicidad para el caso en que el número de variables independientes es mayor (véanse los §§ 10 y 12, donde el problema de Cauchy se resuelve para ecuaciones hiperbólicas).

2. Después de la demostración del teorema de Holmgren, Hadamard comprobó que el problema de la unicidad, en una vecindad de S, *de la solución del problema de Cauchy para ecuaciones no* lineales se reduce fácilmente al problema de la unicidad de la solución del problema de Cauchy para ecuaciones lineales con coeficientes suficientemente suaves pero no necesariamente analíticos. Por eso todos los esfuerzos posteriores fueron concentrados en la resolución de este último problema. En 1938, Carleman lo solucionó para un sistema de ecuaciones en derivadas parciales con dos variables independientes. El teorema de Carleman consiste en lo siguiente.

Sea

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(x, y) z_j = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9,4}$$

un sistema de ecuaciones. Las funciones A_{ij}, B_{ij} están dadas en una región cerrada $\overline{G}$ del semiplano $x \geqslant 0$, adyacente al segmento $|y| \leqslant a$ del eje de las ordenadas; las A_{ij} tienen en $\overline{G}$ *derivadas acotadas hasta el segundo orden inclusive; las* B_{ij} *están acotadas* en $\overline{G}$.

Entonces, la solución (en $\overline{G}$) del sistema (9,4) que satisface las condiciones

$$z_i(0, y) = 0 \text{ para } |y| \leqslant a \quad (i = 1, \ldots, n)$$

y que tiene primeras derivadas continuas respecto a x e y, es idénticamente nula en una región $\overline{G'}$ (que forma parte de $\overline{G}$) adyacente al segmento $|y| \leqslant a$. Se supone que en cada punto de $\overline{G}$ todas las raíces del determinante

$$| A_{ij} - \lambda \delta_{ij} |$$ [8]

son distintas entre sí, es decir, que en ningún punto de la región $\overline{G}$ hay direcciones características coincidentes.

Un resultado análogo para sistemas con muchas variables independientes ha sido obtenido últimamente por Calderón.[9]

Si las direcciones características coinciden, el problema de Cauchy puede no tener solución única; esto lo demostró por primera vez A. D. Myshkis (1947). Myshkis consideró el ejemplo del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + b_1(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + b_2(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \tag{10,4}$$

que tiene una solución u_0, v_0 tal que las funciones u_0 y v_0 tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes, son iguales a cero en la recta $x = 0$, pero son distintas de cero en cualquier entorno del origen de coordenadas. Los coeficientes del sistema están definidos y son derivables en todo el plano; sus derivadas

---

8 $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

9 Calderón, American Journal of Mathematics 80, Nº 1 (1958), 16 - 36.

son discontinuas en $x = 0$ y para estos valores de x la ecuación característica tiene raíces iguales.[10]

En 1954 Plis construyó un nuevo ejemplo de sistema del tipo (10,4) que ofrece una solución no trivial del problema de Cauchy siendo las condiciones iniciales nulas para $x = 0$; además, los coeficientes del sistema tienen derivadas parciales continuas de cualquier orden en todo el plano.[11]

La unicidad de la solución del problema de Cauchy en la clase de funciones suficientemente suaves está demostrada para ecuaciones hiperbólicas y para sistemas hiperbólicos con un número arbitrario de variables independientes (sobre esos sistemas hablaremos después), así como para una clase amplia de ecuaciones y sistemas elípticos (véase § 5); existe una amplia bibliografía referente a la última cuestión.

La cuestión que nos interesa sobre la unicidad de la solución del problema de Cauchy en la clase de funciones no analíticas, pero suficientemente suaves, está relacionada con la posibilidad de extender de un modo único la solución suficientemente suave $(u_1, \ldots, u_N)$ del sistema (13,3), definida en una región real del espacio $(x_0, \ldots, x_n)$ que se encuentra a un lado de la superficie S, suficientemente suave por no tener dirección característica en ningún punto. En efecto, al definir las funciones u_i de un lado de la superficie S y en esta misma superficie, quedan definidos los valores en esta superficie de las propias funciones u_i y de sus derivadas, que figuran en las condiciones de Cauchy. Por lo tanto,

---

10 Véase A. D. Myshkis, Logros de las ciencias mat. 3 : 2(1948). p. 3 - 46.

11 Plis, Bull. Acad. Polon. Sci. 2(1954), 55 - 57.

el problema sobre la extensión de las funciones u_i al otro lado de la superficie S se reduce a determinar la solución del problema generalizado de Cauchy en la región situada al otro lado de la superficie S. Como hemos señalado, el problema sobre la unicidad de esta solución *no ha sido esclarecido totalmente hasta ahora.*

Del mismo modo, hasta ahora queda sin resolver el problema de la posibilidad de extender de diversas maneras una solución real $(u_1, \ldots, u_N)$ suficientemente suave del sistema (13,3), definida en una región real del espacio $(x_0, \ldots, x_n)$, situada a un lado de una superficie suficientemente suave S y sobre esta misma superficie, y también en el caso en que esta superficie S sea característica del sistema dado y de la solución dada. Para todas las ecuaciones que vamos a considerar es siempre posible realizar esta extensión de muchas maneras.

La cuestión de la no unicidad de la extensión de la solución del sistema (13,3) más allá de la característica es equivalente a la cuestión de la existencia de más de una solución del problema generalizado de Cauchy, si las condiciones de Cauchy, planteadas para la característica, son tales que, en general, permiten al menos una solución de este tipo. Hemos visto que para esto las funciones u_i definidas sobre la característica y sus derivadas deben verificar, en general, ciertas relaciones. Estas condiciones se cumplen de antemano si existen funciones $u_1, \ldots, u_N$, que satisfagan las ecuaciones dadas por un lado cualquiera de la característica.

Si nos interesamos solamente por las soluciones analíticas, la cuestión de la unicidad de la extensión más allá de la característica, así como, en general, más allá de cualquier superficie, dada en una región de solución $(n + 1)$–dimensional, tiene solución siempre en el sentido de que esa extensión es única, ya que una función analítica de $n + 1$ variables independientes queda totalmente determinada por sus valores en una región $(n + 1)$–dimensional tan pequeña como se quiera.

3. En el 3 del § 3 hemos visto que si la superficie S, en la cual se definen las condiciones de Cauchy, no tiene dirección característica en ningún punto, estas condiciones de Cauchy conjuntamente con las ecuaciones del sistema (7,3) determinan unívocamente en S los valores de todas las funciones u_i y de todas sus derivadas hasta el orden n_i. En cambio, si la superficie S es característica en un entorno del punto A, las condiciones de Cauchy definidas en la misma admiten distintos sistemas de valores $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ que pueden satisfacer el sistema (7,3) si admiten al menos un sistema de valores del tipo $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ (aquí hemos aceptado que la ecuación $\xi_0 = 0$ es la ecuación de la superficie S). Por eso, pueden existir funciones tales que satisfagan las ecuaciones (7,3) en todos los puntos de una región dentro de la cual hay un trozo de la superficie característica, teniendo las derivadas $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ en esta superficie discontinuidades del primer tipo. Al acercarse a S por distintos lados, estas derivadas se aproximan a los distintos valores que satisfacen simultáneamente las ecuaciones (7,3) en la superficie S. Si la superficie S no fuera característica, las derivadas $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ no podrían tener en la misma discontinuidades del

primer tipo, siendo continuos los coeficientes de las ecuaciones (7,3) y todas las derivadas de las funciones u_i de la forma

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial \xi_0^{k_0} \partial \xi_1^{k_1} \cdots \partial \xi_n^{k_n}};$$

$$k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant n_i, \quad k_0 < n_i.$$

Para los sistemas no lineales son válidas afirmaciones similares.

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = 0; \tag{11,4}$$

para la cual las líneas

$$x = \text{const.}, \quad y = \text{const.}$$

son características.

Es evidente que toda función de la forma

$$u = f(y),$$

satisface la ecuación (11,4), donde $f(y)$ es una función cualquiera que tiene derivada en todos los puntos. En particular, se puede suponer que la función $u = f(y)$ es tal que su segunda derivada es continua en todos los puntos a excepción de un punto donde tiene discontinuidad de primer tipo. Entonces, obtendremos una solución de la ecuación (11,4) cuyas segundas derivadas parciales tienen discontinuidad de primer tipo en la característica.

A continuación nos dedicaremos fundamentalmente al estudio de: ecuaciones de *segundo* orden con una función incógnita o bien de sistemas de cualquier orden con un número cualquiera de funciones incógnitas, pero con derivadas parciales sólo respecto a *dos* variables independientes. Las ecuaciones mencionadas se pueden reducir a una forma "canónica" simple. A esta reducción dedicamos los siguientes epígrafes.

§ 5. REDUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA EN UN PUNTO Y CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN CON UNA FUNCIÓN INCÓGNITA

1. Consideremos la ecuación lineal de segundo orden

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + C(x_1, \ldots, x_n)\, u + F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (1,5)$$

con una función incógnita u. Consideremos además que $A_{ij} = A_{ji}$. Todas las funciones A_{ij}, B_i, C, F son reales y están determinadas en una región G del espacio $(x_1, \ldots, x_n)$.

Hagamos un cambio de variables independientes planteando

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2,5)$$

donde a_{ki} son ciertas constantes. Suponemos que la transformación (2,5) es no degenerada, es decir, que el determinante $|a_{ki}|$ no es igual a cero. Entonces la transformación de x_k a ξ_k es univoca en ambos sentidos. La ecuación (1,5) respecto a las variables independientes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ se escribe así:

$$\sum_{k,l=1}^{n} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} a_{ki} a_{lj} \Big) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \ldots = 0\,^{12}. \qquad (3,5)$$

---

[12] Para estar seguros que se puede pasar, aplicando las reglas corrientes, de las derivadas respecto a las variebles independientes x_i $(i = 1, \ldots, n)$ a las derivadas respecto a las variables independientes ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$, es suficiente suponer que la función u tiene derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive.

Hemos escrito sólo los miembros de la función incógnita u que tienen derivadas de segundo orden. De la igualdad (3,5) se desprende que al realizar el cambio de variables independientes según las fórmulas (2,5), los coeficientes de las derivadas de segundo orden de u varían de la misma manera que los coeficientes de la forma cuadrática

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_i x_j \tag{4,5}$$

cuando se sustituye x_k por ξ_k según las fórmulas

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\xi_i \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{5,5}$$

Los coeficientes A_{ij} de la fórmula (4,5) se consideran constantes e iguales a los valores de los coeficientes A_{ij} $(x_1, \ldots, x_n)$ de la ecuación (1,5) en un punto cualquiera $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de la región G.

En el álgebra se demuestra la existencia de una transformación real no degenerada (5,5) que reduce toda forma (4,5) con coeficientes reales A_{ij} a la forma

$$\sum_{i=1}^{m} \pm \xi_i^2, \text{ donde } m \leqslant n. \tag{6,5}$$

Existen muchas transformaciones reales no degeneradas (5,5) que llevan la forma (4,5) a la forma (6,5), pero el número de términos con signos positivos y el número de términos con signos negativos de la forma (6,5) está determinado únicamente por la forma (4,5) y no depende de la selección de la transformación no degenerada (5,5). (Ley de inercia de las formas cuadráticas).[13]

El determinante $|A_{ik} - \lambda\delta_{ik}|$ tendrá sólo raíces reales. El número de términos con signos positivos y el número de términos con signos negativos en la forma (6,5) es igual al número de raíces λ positivas y negativas, respectivamente, de este determinante.

Si encontramos una transformación (5,5) que lleve la forma (4,5) a la forma (6,5), la transformación (2,5), cuya matriz es la traspuesta de la inversa a la matriz (a_{ik}), reducirá la ecuación (1,5) a la forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} A^*_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \ldots = 0, \tag{7,5}$$

donde

$$\overset{*}{A}_{ij}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \pm 1, \text{ si } i = j \leqslant m,$$
$$\overset{*}{A}_{ij}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0, \text{ si } i \neq j \text{ o si } i = j > m.$$

Hemos señalado aquí sólo los términos con derivadas de orden superior de la función u. La forma (7,5) de la ecuación (1,5) se llama *forma canónica en el punto* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Por lo tanto, para cada punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de la región G se puede indicar una transformación no degenerada (2,5) de las

---

[13] Véase A. G. Kurosh, Curso de álgebra superior, Fizmatguiz, 1959, § 27; I. M. Gelfand, Lecciones sobre álgebra lineal, Gostiejizdat, 1951, p. 143.

variables independientes que reduce la ecuación (1,5) a la forma canónica en este punto.

En general, para cada punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ existe una transformación (2,5) que reduce la ecuación (1,5) a la forma canónica en este punto; en otros puntos esta transformación puede no reducir la ecuación a la forma canónica. Diferentes ejemplos permiten afirmar que en el caso en que el número de variables independientes es mayor que dos, no existe, hablando en general, una transformación lineal con coeficientes constantes de las variables independientes, ni ninguna otra transformación no degenerada de las variables, que reduzca la ecuación lineal dada de segundo orden a la forma canónica, *incluso en una región tan pequeña como se quiera.* En el caso de dos variables independientes existe una transformación de este tipo para suposiciones muy generales respecto a los coeficientes de la ecuación (1,5), como se demostrará en el siguiente epígrafe.

La clasificación de las ecuaciones de segundo orden está basada en la posibilidad de reducir la ecuación (1,5) a la forma canónica en un punto.

2. La ecuación (1,5) se llama *elíptica* en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ si en la ecuación (7,5) todos los $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ son distintos de cero y tienen un mismo signo.

La ecuación (1,5) se llama *hiperbólica* en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ si en la ecuación (7,5) todos los $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ tienen un mismo signo a excepción de un A_{ii}^* que tiene el signo contrario, siendo además $m = n$.

La ecuación (1,5) se llama *ultrahiperbólica* en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si en la ecuación (7,5) se tiene más de un $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ positivo y más de un $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ negativo, siendo $m = n$.

La ecuación (1,5) se llama *parabólica en sentido amplio* en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si entre los $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots x_n^0)$ hay algunos iguales a cero, es decir, si $m < n$.

La ecuación (1,5) se llama *parabólica en sentido restringido* o simplemente *parabólica* en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ si sólo uno de los coeficientes $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (sea éste A_{11}^*), es igual a cero mientras que todos los demás $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ tienen signos iguales y el coeficiente de $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$ es distinto de cero.

La ecuación (1,5) se llama *elíptica, hiperbólica, ultrahiperbólica,* etc., *en toda la región* G si es elíptica, hiperbólica, ultrahiperbólica, etc., respectivamente, en cada punto de la región G.

En las aplicaciones aparecen a veces ecuaciones que en una parte G_1 de la región considerada G son elípticas, y en otra parte G_2 de la región G son hiperbólicas. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones de tipo mixto. Un caso particular de estas ecuaciones es la ecuación de Tricomi

$$y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

siempre que se considere en una región G que contenga los puntos del eje x. [14]

[14] Las ecuaciones de tipo mixto han sido estudiadas por primera vez en los trabajos de Tricomi (véase su libro "Sobre ecuaciones lineales de tipo mixto"). Estas ecuaciones despertaron interés especial cuando se encontró la relación que tienen con la dinámica de los gases (véase *F. I. Frankl,* Noticias de la A C de la U R S S, serie matemática 9 (1945), 121 – 143). En los últimos años aparecieron muchos trabajos dedicados a ecuaciones de tipo mixto (Véase *A. V. Bizadze,* Ecuaciones de tipo mixto, Edición de la A C de la U R S S, 1959, donde viene una extensa bibliografía).

3. Una ecuación no lineal de segundo orden

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots\right) = 0$$

con una función incógnita u se llama, *para una solución dada* $u^*(x_1, \ldots, x_n)$, elíptica, hiperbólica o parabólica en sentido amplio en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ correspondientemente en la región G, si la ecuación

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

donde

$$A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial \Phi}{\partial \left\{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\}} \tag{8,5}$$

es elíptica, hiperbólica o parabólica en sentido amplio en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, correspondientemente en la región G. En el miembro derecho de (8,5) en lugar de las funciones u y sus derivadas, figura la función $u^*(x_1, \ldots, x_n)$ y sus derivadas respectivas.

A continuación vamos a estudiar solamente ecuaciones lineales de segundo orden con una función incógnita, que pueden ser elípticas, hiperbólicas, o bien parabólicas en toda la región. No estudiaremos las ecuaciones ultrahiperbólicas, ya que estas ecuaciones no se encuentran ni en la física ni en la técnica. Tampoco vamos a estudiar las ecuaciones que son parabólicas en el sentido amplio pero no lo son en el sentido restringido. Por eso, al hablar en el capítulo 4 de ecuaciones parabólicas nos referiremos solamente a ecuaciones parabólicas en sentido restringido.

§ 6. REDUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA, EN LA VECINDAD DE UN PUNTO, DE UNA ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN RESPECTO A DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

1. Consideremos la ecuación

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1,6}$$ [15]

donde los coeficientes A, B, C son funciones de x e y con derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive. Supondremos que A, B, C, no se anulan simultáneamente y que la función $u(x, y)$ tiene derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive. Pasemos de las variables independientes x e y a las variables independientes ξ y η. Sean

$$\xi=\xi(x, y),\quad \eta=\eta(x, y) \tag{2,6}$$

funciones dos veces derivables y tales que el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

no se anula en ningún punto de la región considerada. Entonces, el sistema (2,6) se puede resolver unívocamente respecto a x e y en una región del plano (ξ, η). Las funciones obtenidas $x(\xi, \eta)$

[15] En este epígrafe consideramos ecuaciones de tipo más general que las lineales, ya que todos los razonamientos que se emplean para reducir a la forma canónica la ecuación lineal son aplicables también a estas ecuaciones.

e $y(\xi, \eta)$ son también funciones dos veces derivables. Con las nuevas variables independientes, la ecuación (1,6) se escribe así:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right] +$$

$$+ 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\left[A\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} + B\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + C\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] +$$

$$+ F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0. \quad (3,6)$$

Comprobemos que en cierta vecindad G del punto fijo (x_0, y_0) las funciones $\xi\,(x, y)$, $\eta\,(x, y)$ se pueden escoger de modo que la ecuación (3,6) tenga la forma canónica en cada punto de esta vecindad. Tendremos que investigar por separado los casos siguientes: cuando en el punto considerado $B^2 > AC$, $B^2 < AC$ o cuando en cierta vecindad de este punto $B^2 \equiv AC$. No consideraremos los casos en que la expresión $B^2 - AC$ cambia de signo o se hace idénticamente nula en cualquier vecindad del punto escogido.

2. Consideremos primero el caso en que $B^2 > AC$ en toda la región considerada, es decir, cuando la ecuación (1,6) es hiperbólica (véase la definición en el epígrafe anterior). Podemos considerar que en el punto (x_0, y_0), en cuya vecindad queremos reducir la ecuación (1,6) a la forma canónica, o bien $A \neq 0$, o bien $C \neq 0$. En caso contrario, podríamos obligar a que así sea introduciendo las nuevas variables:

$$x = x' + y',$$
$$y = x' - y'.$$

Consideremos la ecuación

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{4,6}$$

Sea $A \neq 0$. Puesto que $B^2 - AC > 0$, la ecuación (4,6) puede ser escrita en la forma

$$\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x} - (-B - \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\times$$
$$\times\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x} - (-B + \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = 0,$$

y, por eso, las soluciones de cada una de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} A\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} &= (-B - \sqrt{B^2 - AC})\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \\ A\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} &= (-B + \sqrt{B^2 - AC})\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{5,6}$$

satisfacen la ecuación (4,6).

Definamos las funciones $\varphi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ como las soluciones de las ecuaciones (5,6) que toman valores dados en las líneas l_i $(i = 1, 2)$ que pasan por el punto (x_0, y_0) y que no son tangentes en ningún punto a las características de la ecuación correspondiente.[16] Si las líneas l_i y los valores que en las mismas toman

[16] Véase el § 53 de mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias", edición 1952. Llamo la atención sobre el hecho de que en el caso de dos variables independientes la definición de característica que hemos dado en el § 3 del presente libro coincide con la definición

las funciones φ_i se escogen suficientemente suaves, obtendremos unas soluciones $\varphi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ que tienen derivadas continuas respecto a x e y hasta el segundo orden inclusive. Si suponemos además que los valores iniciales de $\varphi_i(x, y)$ en l_i se escogen de manera que la derivada de φ_i en la dirección de l_i no se anule en el punto (x_0, y_0), las derivadas parciales de la función $\varphi_i(x, y)$ respecto a x e y no pueden anularse simultáneamente en ese punto (en caso contrario, la derivada en este punto sería igual a cero en cualquier dirección).

Como que $A \neq 0$, de las ecuaciones (5,6) se desprende que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \neq 0$ y $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \neq 0$ en la vecindad del punto (x_0, y_0) y que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A};$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} : \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

En virtud de la condición $B^2 - AC \neq 0$, tenemos:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \neq \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} : \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}.$$

De aquí se infiere que el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{6,6}$$

de característica que viene en el § 53 de mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias". Pero, en el caso de un número mayor de variables independientes, estas dos definiciones son totalmente distintas.

es distinto de cero en cierta vecindad G del punto (x_0, y_0). Por eso, en esta vecindad, podemos tomar en las igualdades (2,6)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) = \varphi_1(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y) = \varphi_2(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{7,6}$$

En el miembro izquierdo de (3,6) desaparecen entonces los términos que contienen $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$. El coeficiente de $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ es *distinto de cero* en toda la región considerada G; en el caso contrario, al pasar de las coordenadas (x, y) a las coordenadas (ξ, η), el orden de la ecuación se reduce; por consiguiente, al pasar de las coordenadas (ξ, η) a las coordenadas (x, y) el orden de la ecuación en un punto de la región aumenta, lo cual, como es evidente no puede suceder.

Dividiendo la ecuación (3,6) por el coeficiente de $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, encontraremos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{8,6}$$

en la vecindad G del punto (x_0, y_0). Esta forma de la ecuación también se llama canónica.

Haciendo $\xi = \alpha + \beta$ y $\eta = \alpha - \beta$, reduciremos la ecuación (8,6) a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right). \tag{9,6}$$

Después de reducir una ecuación hiperbólica a la forma canónica (8,6), se puede a veces integrar en forma cerrada, es decir, hallar una fórmula que dé todas las soluciones de esta ecuación.

Ejemplo 1. La ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{10,6}$$

mediante el cambio de variables

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad y = \frac{\xi - \eta}{2}$$

se reduce a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0. \tag{11,6}$$

Denotando $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ mediante v, obtendremos $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, es decir, $v = f(\eta)$, donde f es una función arbitraria de η. Considerando en la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta)$$

ξ como un parámetro e integrando esta ecuación, obtendremos:

$$u = \int f(\eta)\, d\eta + C(\xi)$$

o bien

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x + y) + \psi(x - y), \tag{12,6}$$

donde φ y ψ son funciones arbitrarias dos veces derivables.

Ejemplo 2. Si en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = \frac{1}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (\xi \neq 0) \tag{13,6}$$

tomamos

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = v$$

tendremos

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{2\xi}\, v.$$

Esta ecuación se integra fácilmente separando las variables. Puesto que η figura en v como parámetro, la constante de integración será una función de este parámetro. Obtendremos:

$$\ln |v| = \frac{1}{2} \ln |\xi| + \ln |C(\eta)|$$

o bien

$$v = \frac{\partial u}{\partial \eta} = C(\eta)\, \sqrt{|\xi|}$$

donde

$$u = C_1(\eta)\, \sqrt{|\xi|} + C_2(\xi).$$

Aquí

$$C_1(\eta) = \int C(\eta)\, d\eta$$

es una función de η arbitraria [ya que es arbitraria $C(\eta)$] y derivable, mientras que $C_2(\xi)$ es una función arbitraria de ξ.

3. Si

$$B^2 = AC$$

en toda la región considerada, la ecuación (1,6) es parabólica en esa región (véase la definición en el epígrafe anterior). Suponemos que en la región considerada los coeficientes A, B, C de la ecuación (1,6) no se anulan simultáneamente. En virtud de la condición $B^2 = AC$, de la suposición anterior se deduce que en cada punto de esta región uno de los coeficientes, A o C, es distinto de cero. Sea, por ejemplo, $A \neq 0$ en el punto considerado (x_0, y_0). Entonces, ambas ecuaciones (5,6) son iguales y se convierten en la ecuación

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{14,6}$$

Puesto que $B^2 = AC$ toda solución de la ecuación (14,6) satisface también la ecuación

$$B\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{15,6}$$

Podemos, como en el subepígrafe anterior, determinar una solución $\varphi(x, y)$ de la ecuación (14,6) de modo que la función $\varphi(x, y)$ tenga derivadas continuas de segundo orden y que sus primeras derivadas no se anulen simultáneamente en una vecindad G del punto (x_0, y_0). Podemos además considerar que $A \neq 0$ en toda la región G.

Sea

$$\psi(x, y) = \text{const.}$$

una familia de curvas en la región G tal que la función $\psi(x, y)$ tiene derivadas continuas de segundo orden y que el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{16,6}$$

no se anula en ningún punto de la región G. (Como que en G $A \neq 0$ y, por consiguiente, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$, se puede tomar, por ejemplo, $\psi(x, y) \equiv x$). Pongamos en las fórmulas (2,6).

$$\xi = \varphi(x, y) \text{ y } \eta = \psi(x, y).$$

Entonces el coeficiente de $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ en la ecuación (3,6) se anula.

El coeficiente de $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ se hace igual a

$$\left(A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(B\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

De acuerdo con (14,6) y (15,6), este último también es idénticamente nulo en la región G.

El coeficiente de $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ en la ecuación (3,6) se convierte en

$$A\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{A}\left(A\frac{\partial \psi}{\partial x} + B\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2.$$

Esta expresión es distinta de cero, ya que, en el caso contrario, en virtud de (14,6), el jacobiano (16,6) se anularía en la región G. Por eso, la ecuación (3,6) se puede dividir por este coeficiente. Haciendo la división obtendremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (17,6)$$

La ecuación (17,6) tiene forma canónica en la región G de acuerdo con la definición dada en el § 5.

Si la ecuación (1,6) es lineal, la ecuación (17,6) también lo será. Supongamos que es de la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = A_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + C_1 u + D_1. \tag{18,6}$$

Se puede simplificar esta ecuación introduciendo en lugar de u una nueva función z. Pongamos

$$u = zv,$$

donde $v(\xi, \eta)$ es una función de ξ y η, que definiremos más tarde. *Entonces la ecuación (18,6) se convierte en la ecuación*

$$v \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} = A_1 v \frac{\partial z}{\partial \xi} + B_1 v \frac{\partial z}{\partial \eta} + C_2 z + D_1. \tag{19,6}$$

Hemos escrito explícitamente sólo los términos que contienen derivadas de z, los términos que contienen la propia función z los hemos incluidos en $C_2 z$. Escojamos la función $v(\xi, \eta)$ de manera que en la ecuación (19,6) desaparezca la derivada $\dfrac{\partial z}{\partial \eta}$. Igualando a cero el coeficiente de $\dfrac{\partial z}{\partial \eta}$, obtendremos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = A_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + C_3 z + D_2; \tag{20,6}$$

donde $C_3 = \dfrac{C_2}{v}$, $D_2 = \dfrac{D_1}{v}$, $v(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{2} \int B_1 (\xi, \eta) d\eta}$.

4. Consideremos, finalmente, el caso en que

$$AC > B^2$$

en todos los puntos de la región considerada, es decir, el caso en que la ecuación (1,6) es elíptica en esta región (véase la definición en el § 5). Supongamos ahora que todos los coeficientes A, B y C son funciones analíticas de x e y. Entonces los coeficientes de las ecuaciones (5,6) también son funciones analíticas de x e y.

Sea

$$\varphi(x, y) = \varphi^*(x, y) + i\varphi^{**}(x, y)$$

una solución analítica de la primera de las ecuaciones (5,6) en la vecindad del punto (x_0, y_0)[17] y sea $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| \neq 0$ en esta vecindad.

Pongamos en las igualdades (2,6)

$$\xi = \varphi^*(x, y) \text{ y } \eta = \varphi^{**}(x, y). \qquad (21,6)$$

Las ecuaciones (21,6) se pueden resolver respecto a x e y, ya que el jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad (22,6)$$

[17] En cierta vecindad de cualquier punto (x_0, y_0) de la región considerada, se puede encontrar una solución analítica $\varphi(x,y)$ de la ecuación (5,6) tal que en esa vecindad $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ no se anulen simultáneamente. Esto se puede hacer, de acuerdo con el teorema de Kovglevskaya, definiendo para $x = x_0$ los valores de $\varphi(x,y)$ de manera que $\varphi'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Supongamos que $\varphi(x,y)$ es precisamente la solución de este tipo.

no se anula en ningún punto. En efecto, separando en las ecuaciones (5,6) las partes real e imaginaria, obtendremos

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial\xi}{\partial x} &= -B\frac{\partial\xi}{\partial y} + \sqrt{AC-B^2}\,\frac{\partial\eta}{\partial y},\\ A\frac{\partial\eta}{\partial x} &= -B\frac{\partial\eta}{\partial y} - \sqrt{AC-B^2}\,\frac{\partial\xi}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{23,6}$$

Sustituyendo en el jacobiano (22,6) las expresiones de $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ y $\frac{\partial\eta}{\partial x}$ obtenidas de aquí, se tiene

$$J = \frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right].$$

De aquí se ve que este determinante puede ser igual a cero sólo en los puntos donde

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0,$$

es decir, en virtud de las ecuaciones (23,6), en los puntos donde

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0 \text{ y } \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0.$$

Pero en la región considerada no existen tales puntos, ya que en los mismos tendríamos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Separando en la identidad

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

las partes real e imaginaria, obtendremos

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 =$$

$$= A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right), \quad (24{,}6)$$

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0. \quad (25{,}6)$$

En virtud de que la forma

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 \quad (B^2 - AC < 0),$$

es definida, los miembros derecho e izquierdo de la igualdad (24,6) se pueden anular sólo si

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0. \quad (26{,}6)$$

Pero hemos escogido la función $\varphi(x, y)$ de un modo tal que las igualdades (26,6) no se verifican simultáneamente. Por lo tanto, en la ecuación (3,6) los coeficientes de $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ son iguales entre sí y distintos de cero; por eso, la ecuación (3,6) se reduce a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \quad (27{,}6)$$

Esta forma de una ecuación elíptica se llama forma canónica.

Hemos reducido la ecuación a su forma canónica en la vecindad de cierto punto (x_0, y_0) en la cual existe solución analítica de las ecuaciones (5,6) con derivadas distintas de cero. Con razonamientos más complejos se puede demostrar que esa reducción es posible sin suponer que $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ son analíticos, sino sólo suponiendo que tienen derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive.

§ 7. REDUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN RESPECTO A DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Consideraremos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + f_i(x, y, u_1, \ldots, u_n) \qquad (1,7)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Es indiferente que las f_i sean lineales o no lineales respecto a $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Supondremos que los coeficientes $a_{ij}(x, y)$ son reales y que en una región G del plano (x, y) tienen derivadas parciales continuas respecto a x e y hasta el orden k inclusive $(k \geqslant 1)$. Entonces, estableciendo suposiciones complementarias (que aparecen a continuación con letra cursiva) se puede reducir el sistema (1,7) a la forma canónica, en cierta vecindad de un punto arbitrario A del interior de G, mediante una transformación lineal no degenerada de las funciones incógnitas $u_1, \ldots, u_n$ con coeficientes que tienen tantas derivadas continuas como los coeficientes $a_{ij}(x, y)$. Esta *forma canónica* es la siguiente:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \lambda_1(x, y) \frac{\partial v_1}{\partial y} + f_1^*(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \alpha_1(x, y) \frac{\partial v_1}{\partial y} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial v_2}{\partial y} + f_2^*(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial v_{n_1}}{\partial x} = \alpha_{n_1-1}(x, y) \frac{\partial v_{n_1-1}}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial v_{n_1}}{\partial y} + f_{n_1}^*(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

$$\frac{\partial v_{n_1+1}}{\partial x} = \lambda_2(x, y) \frac{\partial v_{n_1+1}}{\partial y} + f^*_{n_1+1}(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

$$\frac{\partial v_{n_1+2}}{\partial x} = \beta_1(x, y) \frac{\partial v_{n_1+1}}{\partial y} + \lambda_2(x, y) \frac{\partial v_{n_1+2}}{\partial y} + $$
$$+ f^*_{n_1+2}(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

. . . .

$$\frac{\partial v_{n_1+n_2}}{\partial x} = \beta_{n_2-1}(x, y) \frac{\partial v_{n_1+n_2-1}}{\partial y} + \lambda_2(x, y) \frac{\partial v_{n_1+n_2}}{\partial y} + $$
$$+ f^*_{n_1+n_2}(x, y, v_1, \ldots v_n),$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\partial v_{n-n_k+1}}{\partial x} = \lambda_k(x, y) \frac{\partial v_{n-n_k+1}}{\partial y} + f^*_{n-n_k+1}(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

$$\frac{\partial v_{n-n_k+2}}{\partial x} = \omega_1(x, y) \frac{\partial v_{n-n_k+1}}{\partial y} + \lambda_k(x, y) \frac{\partial v_{n-n_k+2}}{\partial y} + $$
$$+ f^*_{n-n_k+2}(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

. . . .

$$\frac{\partial v_n}{\partial x} = \omega_{n_k-1}(x, y) \frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} + \lambda_k(x, y) \frac{\partial v_n}{\partial y} + $$
$$+ f^*_n(x, y, v_1, \ldots, v_n). \qquad (2,7)$$

Aquí $\lambda_1(x, y), \ldots, \lambda_k(x, y)$ son las raíces del determinante de la matriz

$$\| a_{ij}(x, y) \| - \lambda E, \tag{3,7}$$

$a_i(x, y), \beta_i(x, y), \ldots, \omega_i(x, y)$ son funciones suficientemente arbitrarias que tienen derivadas continuas hasta el orden k inclusive y que no se anulan en ningún punto de la vecindad considerada del punto A. Las funciones $v_i, \lambda_i, \alpha_i, \beta_i, \ldots, \omega_i, f^*, \ldots, f^*$ pueden ser, en general, funciones complejas de sus argumentos. Si las $f_1, \ldots, f_n$ tienen derivadas continuas de orden q, entonces las $f_1^*, \ldots, f_n^*$ tendrán derivadas continuas hasta el orden $\min\{q, k-1\}$ inclusive.

Los sistemas (1,7) y (2,7) difieren del sistema de ecuaciones lineales diferenciales ordinarias

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4,7}$$

con coeficientes constantes a_{ij} y del sistema canónico (13,3) correspondiente, descrito en el § 43 de mi curso de ecuaciones diferenciales ordinarias (Gostiejizdat, 1952), sólo en que en lugar de $\frac{\partial}{\partial x}$ en los miembros izquierdos de las ecuaciones ordinarias correspondientes se pone $\frac{d}{dx}$ y en lugar de $\frac{\partial}{\partial y}$, en las ecuaciones ordinarias correspondientes, se pone el factor 1. Los coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (13,3) son constantes y las funciones f y f^* dependen sólo de una variable independiente; mientras que en las ecuaciones en derivadas parciales que estamos considerando, los coeficientes de las derivadas dependen de dos variables independientes y las funciones f y f^* dependen además de todas las funciones incógnitas.

La reducción del sistema (1,7) a la forma canónica (2,7) se *realiza con el mismo cambio de funciones incógnitas que se utiliza* en el § 44 de mi curso de ecuaciones diferenciales ordinarias para un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Sólo nos resta comprobar que en la vecindad del punto A los coeficientes de la transformación lineal descrita en el § 44 son funciones que respecto a (x, y) tienen el mismo número de derivadas continuas que los coeficientes $a_{ij}(x, y)$ del sistema (1,7). Para ello tendremos que repetir en cierto modo el § 44.

Utilizaremos el método de inducción completa. Para $n = 1$ la afirmación que queremos probar (la posibilidad de reducir el sistema (1,7) a la forma (2,7) por medio de una transformación lineal con coeficientes suaves) es evidente. Supongamos que es cierta para $n - 1$ ecuaciones. Demostremos que es cierta también para n ecuaciones.

Multipliquemos la i-ésima ecuación del sistema (1,7) por k_i, donde k_i son ciertas funciones derivables en la vecindad del punto A que definiremos más tarde. Sumemos las ecuaciones obtenidas y escribamos el resultado en la forma

$$\frac{\partial (\sum_i k_i u_i)}{dx} =$$

$$= \sum_{i,j} \frac{\partial (a_{ij} k_i u_j)}{\partial y} + \sum_i k_i f_i + \sum_i u_i \frac{\partial k_i}{\partial x} - \sum_{i,j} u_j \frac{\partial (a_{ij} k_i)}{\partial y}.$$

Determinemos ahora las k_i de manera que respecto a u_j se cumpla la identidad

$$\sum_{i,j} a_{ij} k_i u_j \equiv \lambda \sum_i k_i u_i, \tag{5,7}$$

donde λ es una función derivable de (x, y), real o compleja. Para ello es necesario y suficiente que los coeficientes correspondientes a iguales u_j en ambos miembros de esta identidad sean iguales, es decir, que se cumpla

$$\lambda k_j = \sum a_{ij} k_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6,7}$$

Por lo tanto, para determinar $k_1, k_2, \ldots, k_n$ obtendremos un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas. Para que este sistema tenga solución no trivial —que es la única que tiene interés para nosotros— es necesario y suficiente que el determinante formado con sus coeficientes sea igual a cero. Esta condición se puede escribir así:

$$|\,\lambda E - \|a_{ij}\|\,| = 0. \tag{7,7}$$

La matriz $\lambda E - \|a_{ij}\|$ se llama *matriz característica del sistema* (1,7).

Sea λ_1 una de las raíces de la ecuación (7,7). *Supongamos que en la vecindad considerada del punto A cada raíz de la ecuación (7,7) tiene la misma multiplicidad para todos los puntos de esta vecindad.* Supongamos que λ_1 tiene en esta vecindad una multiplicidad α_1. Entonces, en esta vecindad, λ_1 satisface la ecuación algebraica

$$f^{(\alpha_1 - 1)}(\lambda, x, y) = 0,$$

donde $f^{(k)}(\lambda, x, y)$ es la derivada de orden k respecto a λ del miembro izquierdo de la ecuación (7,7). Además en todo punto de esta vecindad

$$f^{(\alpha_1)}(\lambda_1(x, y), x, y) \neq 0.$$

Por eso, de acuerdo con el teorema de la función implícita, $\lambda_1(x, y)$, *en la vecindad del punto A, tendrá el mismo número de* derivadas continuas que los coeficientes a_{ij}.

Supongamos además que en la vecindad considerada del punto A la matriz

$$||a_{ij}|| - \lambda_k E, \tag{8,7}$$

donde λ_k es raíz de la ecuación (7,7), tiene el mismo rango r_k.[18] Entonces, en esta vecindad del punto A, el sistema (6,7) tiene para $\lambda = \lambda_1$ una solución que consta de funciones que no se anulan simultáneamente en ningún punto de la vecindad del punto A y tienen tantas derivadas continuas como los a_{ij}. Designémoslas por k_{1i}. Para hallar esas k_{1i}, observemos lo siguiente. Como que la matriz (8,7) es de rango r_1 en todos los puntos de la vecindad de A, el punto A tiene una vecindad en la cual n-r_1 ecuaciones del sistema (6,7) son consecuencia del resto de las r_1 ecuaciones. Por eso, todo sistema de funciones k_{1i} que satisface en una vecindad pequeña del punto A estas r_1 ecuaciones *satisfará todo el sistema (6,7). Para hallar la solución de estas r_1* ecuaciones (las llamaremos, para abreviar, C_1), observemos lo siguiente. Puesto que el rango de la matriz (8,7) para $\lambda = \lambda_1$ es igual a r_1, con las columnas de la matriz formada por los coeficientes del sistema C_1 se puede formar una matriz cuadrada con determinante distinto de cero en una vecindad del punto A. Vamos a considerar las funciones k_{1i}, que son los factores de estas co-

[18] Es fácil de comprobar que $r_k \geqslant n - \alpha_k$. En efecto, la derivada de orden α_k respecto a λ del determinante (7,7) es, para $\lambda = \lambda_k$ una combinación lineal de menores de orden $(n - \alpha_k)$ del determinante (8,7). Pero esta derivada es distinta de cero y por eso uno de los menores de orden $(n - \alpha_k)$ de la matriz (8,7) es diferente de cero.

lumnas, constantes arbitrarias que no puedan hacerse iguales a cero simultáneamente. Para concretar, considerémoslas iguales a 1. Entonces, el sistema C_1 determina unívocamente el resto de las k_{1j} como funciones que tienen el mismo número de derivadas que los a_{ij}.

De este modo hemos encontrado en una vecindad del punto A unas funciones k_{1i} ($i = 1, 2, \ldots, n$) que no se anulan simultáneamente en ningún punto de esta vecindad y que tienen el mismo número de derivadas continuas que los a_{ij}. Para concretar, supongamos que $k_{11} \neq 0$ en el punto A. Es evidente que este supuesto no restringe la generalidad de la exposición, ya que siempre podemos hacer $k_{11} \neq 0$ mediante un cambio de la numeración de las u_i, lo que viene a ser una transformación lineal no degenerada de las u_i. Supongamos a continuación

$$z_1 = \sum_{j=1}^{n} k_{1j} u_j .$$

Es evidente que la función z_1 (x, y) satisface la ecuación

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + f_1^*(x, y, z_1, u_2, \ldots, u_n),$$

donde

$$f_1^*(x, y, z_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv$$

$$\equiv \sum k_{1i} f_i + \sum_i u_i \frac{\partial k_{1i}}{\partial x} - \sum_{i,j} u_j \frac{\partial (a_{ij} k_{1i})}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}$$

(véase la fórmula (5,7) y la igualdad anterior a esta fórmula).

Todos los razonamientos del § 44 de mi libro de ecuaciones ordinarias se aplican en lo que sigue sin variaciones esenciales.[10] Estos razonamientos se simplifican considerablemente en el caso en que todas las raíces λ de la ecuación (7,7) son distintas; hagamos la explicación completa de este caso. A cada raíz λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ de esta ecuación corresponde un sistema de funciones $k_{ij}(x, y)$, $j = 1, \ldots, n$ que se determina para λ_i del mismo modo que antes se determinaron las funciones $k_{1j}(x, y)$, $j = 1, \ldots, n$ a partir de λ_1. Las funciones $k_{ij}(x, y)$ tienen el mismo número de derivadas continuas que los $a_{ls}(x, y)$. Además

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} = \lambda_i \frac{\partial z_i}{\partial y} + f_i^*(x, y, u_1, \ldots, u_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

donde

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nos resta comprobar que $|k_{ij}| \neq 0$. Supongamos lo contrario, es decir, que $|k_{ij}(x^0, y^0)| = 0$ en cierto punto (x^0, y^0) de la región donde están definidas todas las $k_{ij}(x, y)$.

---

[10] Observemos que para el sistema de $n - 1$ ecuaciones, que deberemos plantear en forma canónica igual que en el § 44 de mi libro de ecuaciones diferenciales ordinarias, son válidas las suposiciones expuestas con letra cursiva y por eso, según la hipótesis de inducción, este sistema de $n - 1$ ecuaciones se puede plantear en forma canónica. Esto se demuestra fácilmente expresando la matriz $||a_{ij}|| - \lambda E$ mediante la matriz correspondiente del sistema transformado, análogamente a (134*) del § 44 de mi libro "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias".

Entonces, existen unas constantes C_s no todas iguales a cero, tales que

$$\sum_s C_s k_{si}(x^0, y^0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9,7}$$

Multiplicando la igualdad i – ésima por a_{ij} y sumando respecto a i, obtendremos

$$0 = \sum_{i,s} C_s k_{si}(x^0, y^0) a_{ij}(x^0, y^0) =$$

$$= \sum_s C_s \sum_i k_{si}(x^0, y^0) a_{ij}(x^0, y^0) =$$

$$= \sum_s C_s \lambda_s(x^0, y^0) k_{sj}(x^0, y^0)$$

Hicimos el último paso utilizando la relación

$$\lambda_s k_{sj} = \sum k_{si} a_{ij},$$

que es análoga a (6,7).

De ese modo hemos obtenido igualdades análogas a (9,7) donde en lugar de C_s figura $C_s \lambda_s (x^0, y^0)$. Análogamente obtendremos

$$\sum_s C_s \lambda_s^m (x^0, y^0) k_{si}(x^0, y^0) = 0 \text{ para } m = 2, 3, \ldots, n-1.$$

El determinante formado con los coeficientes correspondientes a $C_s k_{si} (x^0, y^0)$ en estas igualdades (que es igual al determinante de Vandermonde) es distinto de cero para distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; por eso, obtenemos de aquí, que para todas las s e i

$$C_s k_{si}(x^0, y^0) = 0,$$

pero esto es imposible.

Observaciones. 1. Es fácil ver que todos los razonamientos anteriores se pueden repetir para el caso en que los coeficientes a_{ij} y f_i sean funciones complejas. En lo que sigue, sin embargo, supondremos que las a_{ij}, f_i son funciones reales.

2. Si la ecuación (7,7) tiene solamente raíces reales y distintas en toda la región considerada G, de los razonamientos anteriores se desprende que en la vecindad del punto A a cada raíz λ_i corresponde una solución única, salvo el signo, $k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{in}$ del sistema (6,7) tal que en esta vecindad $\sum_{j=1}^{n} k_{ij}^2 = 1$ y las funciones k_{ij} tienen el mismo número de derivadas continuas que los a_{is} (véase la llamada en la pág. 97). Basándonos en esto, podemos probar que para las condiciones señaladas existe en toda la región G (si esta región es simplemente conexa) una transformación lineal no degenerada de las funciones incógnitas que reduce el sistema (1,7) a la forma canónica (2,7). Los coeficientes de esta transformación tienen el mismo número de derivadas continuas que los a_{ij} y el sistema (2,7) toma la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + f_i^*(x, y, v_1, \ldots, v_n) \qquad (10,7)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

3. Si en toda la región considerada G en el plano (x, y) la ecuación (7,7) no tiene raíces reales λ, entonces el sistema (1,7) se llama *elíptico* en esa región.

Si en toda la región G existe una transformación lineal no degenerada de las funciones incógnitas u_i con coeficientes reales que tienen el mismo número de derivadas continuas que los $a_{ij}(x, y)$ y que reduce el sistema (1,7) a la forma (10,7), el sistema (1,7) se llama *hiperbólico* en la región G.

Si en toda la región G todas las raíces λ de la ecuación (7,7) son reales y distintas, el sistema (1,7) se llama *hiperbólico en sentido restringido.* De la observación anterior se desprende que un sistema hiperbólico en sentido restringido en una región simplemente conexa G, es hiperbólico en esta región.

Del mismo modo el sistema lineal general de ecuaciones en derivadas parciales respecto a dos variables independientes

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{n_j - 1} A_{ij}^k(t, x) \frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial t^k \, \partial x^{n_j - k}} + \ldots \qquad (11,7)$$

$$(i = 1, \ldots, N)$$

se llama *elíptico* en la región G si en toda esta región el determinante de la matriz

$$\left\| \begin{matrix} \lambda^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{n_N} \end{matrix} \right\| - \left\| \sum_{k=0}^{n_j - 1} A_{ij}^k \lambda^k \right\|$$

no tiene raíces reales λ.

Si todas las raíces de este determinante son reales y distintas, el sistema (11,7) se llama *hiperbólico en sentido restringido.*

Problema. Demuestre que si el sistema (11,7) es hiperbólico en sentido restringido en una región simplemente conexa, en esta región es hiperbólico el sistema de ecuaciones de primer orden construido a partir de las ecuaciones (11,7) del mismo modo que el sistema (5,2) fue construido a partir de la ecuación (3,2).

4. Si todas las raíces de la ecuación (7,7) son reales, el sistema transformado (2,7) se puede hacer también real; para esto hay que escoger la transformación lineal que permite pasar de las funciones u_i a las funciones v_i con coeficientes reales; en el caso considerado esto siempre es posible.

Si la ecuación (7,7) tiene raíces complejas, estas raíces se descomponen en pares de raíces complejas conjugadas. Entonces, el sistema (2,7) se puede construir de manera que a cada ecuación de este sistema del tipo

$$\frac{\partial v_k}{\partial x} = \lambda_k \frac{\partial v_k}{\partial y} + f_k(x, y, v_1, \ldots, v_n)$$

corresponde una ecuación compleja conjugada, es decir, la ecuación

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + f_i(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

donde

$$v_i = \bar{v}_k;\ \lambda_i = \bar{\lambda}_k;\ f_i(x, y, v_1, \ldots, v_n) = \overline{f_k(x, y, v_1, \ldots, v_n)}.$$

Separando en estas ecuaciones las partes real e imaginaria y poniendo

$$v_k = w_k^* + iw_k^{**},$$
$$\lambda_k = a_k + ib_k,$$
$$f_k = f_k^* + if_k^{**}$$

obtendremos

$$\frac{\partial w_k^*}{\partial x} = a_k \frac{\partial w_k^*}{\partial y} - b_k \frac{\partial w_k^{**}}{\partial y} + f_k^*,$$
$$\frac{\partial w_k^*}{\partial x} = b_k \frac{\partial w_k^*}{\partial y} + a_k \frac{\partial w_k^{**}}{\partial y} + f_k^{**}.$$

El sistema de este tipo más sencillo es el conocido sistema de ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{\partial w_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial y}.$$

Las ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial v_k}{\partial x} = \alpha \frac{\partial v_{k-1}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial y} + f_k(x, y, v_1, \ldots, v_n)$$

se descomponen análogamente en parte real e imaginaria. De ese modo se demuestra que el sistema (1,7) puede ser reducido por una transformación lineal no degenerada (¿por qué?) con coeficientes reales suaves, a una forma canónica nueva, donde todas las ecuaciones son necesariamente reales, a diferencia de las ecuaciones (2,7). (Véase la observación al § 47 de mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias", Gostiejizdat, 1952).

5. Consideremos un sistema casilineal hiperbólico (en el sentido restringido) de la forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y, u_1, \ldots, u_n) \frac{\partial u_j}{\partial y} + \\ + f_i(x, y, u_1, \ldots, u_n) \qquad (12,7)$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

Para ese sistema las cantidades λ y k_i que figuran en las ecuaciones (6,7) y (7,7) dependen no sólo de x, y sino también de $u_1, \ldots, u_n$; supongamos que en cierta región de definición de las variables x, y, $u_1, \ldots, u_n$ todas las raíces de la ecuación (7,7) son reales y distintas.

Supongamos que $k_{j1}, \ldots, k_{jn}$ es una solución no trivial del sistema (6,7) para $\lambda = \lambda_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Multiplicando la i-ésima ecuación de (12,7) por k_{ji} y sumando por todas las i, obtendremos

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ji} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \lambda_j \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) = \widetilde{f}_j(x, y, u_1, \ldots, u_n) \ (j = 1, \ldots, n). \qquad (13,7)$$

En cada una de las ecuaciones del sistema (13,7) figuran las derivadas de todas las funciones incógnitas en una misma dirección.

Cuando $n = 2$ el sistema (13,7) puede ser reducido a una forma análoga a la (10,7). Designemos por $\mu_j\ (x,\ y,\ u_1,\ u_2)$ la solución parcial de la ecuación

$$\frac{\partial(k_{j1}\mu_j)}{\partial u_2} = \frac{\partial(k_{j2}\mu_j)}{\partial u_1} \quad (j = 1,\ 2) \tag{14,7}$$

e introduzcamos en lugar de las funciones u_j unas funciones incógnitas nuevas $v_j\ (x,\ y,\ u_1,\ u_2)$ tales que

$$\frac{\partial v_j}{\partial u_i} = \mu_j k_{ji} \quad (i,\ j = 1,\ 2). \tag{15,7}$$

Las relaciones (15,7) no son contradictorias ya que las μ_j satisfacen las ecuaciones (14,7). Multiplicando la ecuación j - ésima del sistema (13,7) por $\mu_j\ (j = 1,\ 2)$, llegamos al siguiente sistema canónico de ecuaciones para $v_1,\ v_2$:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial y} + f_j^*(x,\ y,\ v_1,\ v_2) \quad (j = 1,\ 2). \tag{16,7}$$

Las funciones v_j se llaman con frecuencia invariantes generalizados de Riemann.

Para $n > 2$ la reducción del sistema (12,7) a la forma (16,7), en general, no es posible.