Capítulo 2

ECUACIONES HIPERBÓLICAS

Sección I

PROBLEMA DE CAUCHY EN LA CLASE DE FUNCIONES NO ANALÍTICAS

§ 8. PLANTEAMIENTO CORRECTO DEL PROBLEMA DE CAUCHY

El teorema de Kovalevskaya afirma la existencia de una solución analítica del problema de Cauchy para ecuaciones analíticas con condiciones iniciales analíticas. Muchos problemas de física se reducen al problema de Cauchy para ecuaciones analíticas con condiciones iniciales que tienen un número determinado de derivadas, pero que no son analíticas. A primera vista parece natural el siguiente método de resolución de este problema. Las funciones iniciales dadas y sus derivadas, las aproximamos por polinomios. Según el teorema de Weierstrass, esos polinomios se pueden escoger de manera tal que en toda la parte considerada del plano $t = t_0$, donde se plantean las condiciones de Cauchy, la diferencia entre estos polinomios y las funciones respectivas sea tan pequeña como se quiera. Según el teorema de Kovalevskaya, el problema de Cauchy para ecuaciones analíticas se puede resolver, si sustituimos las condiciones iniciales anteriores por otras que las aproximan. Parecería natural afirmar que esta solución del problema de Cauchy con las condiciones iniciales dadas por estos polinomios, difiere poco de la solución del mismo problema con las condiciones iniciales anteriores, al menos en una vecindad de la parte del plano $t = t_0$ en que están dadas las condiciones de Cauchy. Pero Hadamard construyó un ejemplo que muestra que a veces ocurre totalmente de otro modo.

Consideremos el siguiente problema de Cauchy. Necesitamos hallar la solución de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1,8}$$

que satisface para $t = 0$ las condiciones

$$u(0, x) = 0, \tag{2,8$_1$}$$

$$u_t(0, x) = \frac{1}{n^k} \operatorname{sen} nx, \tag{2,8$_2$}$$

donde n y k son constantes positivas. Es fácil comprobar que

$$u(t, x) = \frac{1}{n^{k+1}} \operatorname{sh} nt \operatorname{sen} nx. \tag{3,8}$$

es una solución de este problema.

Como

$$| u'_t(0, x) | \leqslant \frac{1}{n^k},$$

para un n suficientemente grande, el valor absoluto de $u'_t(0, x)$ será en todo punto tan pequeño como se quiera. Sin embargo, la solución $u(t, x)$ del problema de Cauchy, como lo muestra la fórmula (3,8), tomará valores tan grandes como se quiera para un t arbitrariamente pequeño, siempre que n sea suficientemente grande. La situación no varía si además de exigir que $|u'_t(0, x)|$ sea pequeño, exigimos que lo sean todas las derivadas de $u'_t(0, x)$ respecto a x hasta el orden $k - 1$; aquí k es un entero positivo cualquiera mayor que 1. No hablamos de los valores iniciales de la propia función u, ya que éstos, según la condición $(2,8)_1$ son iguales a cero.

Supongamos que hemos hallado la solución del problema de Cauchy para la ecuación (1,8) y para ciertas condiciones iniciales

$$u(0, x) = \varphi_0(x),$$
$$u'_t(0, x) = \varphi_1(x).$$

Sea la función $u_0(t, x)$ esta solución. Entonces para las condiciones iniciales

$$u(0, x) = \varphi_0(x); \quad u'_t(0, x) = \varphi_1(x) + \frac{1}{n^k} \operatorname{sen} nx$$

la función

$$u_0(t, x) + \frac{1}{n^{k+1}} \operatorname{sh} nt \operatorname{sen} nx$$

es la solución del problema de Cauchy. Por lo tanto, una variación muy pequeña de las funciones iniciales y de sus derivadas hasta el orden $k - 1$, obtenida agregando las funciones $(2,8)_1$ y $(2,8)_2$ a las condiciones iniciales anteriores, puede implicar variaciones tan grandes como se quiera de la solución del problema de Cauchy en un entorno tan pequeño como se quiera del valor inicial $t = 0$.

Diremos que el problema de Cauchy en una región cerrada $\overline{G}$ del espacio $t, x_1, \ldots, x_n$, adherida a la región G_0 en el hiperplano

$t = t_0$, donde están definidas las condiciones de Cauchy, para el sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_0, k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(t, x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad (4,8)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N, \quad k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant n_j, \quad k_0 < n_j$$

está correctamente planteado si existen unos números positivos L_1 y L_2 tales que

1. en la región $\overline{G}$ existe una solución única del sistema (4,8) que satisface para $t = t_0$ las condiciones

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 0, 1, \ldots, n_i - 1), \quad (5,8)$$

cualesquiera que sean las funciones $\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definidas en la región G_0, donde tanto estas funciones como sus derivadas hasta el orden L_1 son continuas.

2. para cualquier ε positivo, se puede señalar un $\eta > 0$ tal que en toda la región $\overline{G}$ la solución del problema de Cauchy varía en menos de ε, si en la región G_0 las funciones $\varphi_i^{(k)}$ y todas sus derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el orden L_2 varían en menos de η.

Generalmente las condiciones de Cauchy se determinan experimentalmente y por eso no pueden hallarse con exactitud absoluta. En virtud de esto, para la física (entenderemos la palabra "física" en su sentido más amplio) presentan interés las soluciones del problema de Cauchy sólo para aquellas ecuaciones para las cuales el problema está correctamente planteado. Como lo muestra el ejemplo de Hadamard el problema de Cauchy no está correctamente planteado, en general, para una ecuación cualquiera.[20]

Lo que hemos venido diciendo en relación con el problema de Cauchy se puede extender también a los demás problemas de contorno, ya que para las ciencias naturales presentan interés sólo aquellos problemas en los cuales la solución depende continuamente, en cierto sentido, de las condiciones de contorno, de la corrección del planteamiento del problema. [21] Para cada tipo de ecuaciones existen sus problemas de contorno correctamente planteados.

---

[20] Es interesante observar que, si se consideran las soluciones del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en la clase de funciones de valor absoluto acotado por una constante dada de antemano, a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales corresponden pequeñas variaciones de la solución: véase, por ejemplo, M. M. Lavrientiev, Actas de la A C 106 (1956), Nº 3, p. 389 – 390.

[21] En cada caso concreto el concepto de problema correctamente planteado debe ser definido con exactitud.

Al definir el problema de Cauchy correctamente planteado para ecuaciones no lineales, es natural considerar como funciones iniciales posibles $\varphi_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_n)$ sólo las funciones próximas a ciertas funciones determinadas $\widetilde{\varphi}_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_n)$. Puede resultar que cerca de un sistema de funciones $\widetilde{\varphi}_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_n)$ el problema de Cauchy esté correctamente planteado, y que cerca de otro sistema de funciones $\widetilde{\varphi}_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_n)$ esté incorrectamente planteado.

Casi en todos los casos considerados hasta ahora, los enunciados de esos problemas se han basado en consideraciones de tipo físico. En particular, los problemas citados en el § 1 están correctamente planteados.

En el presente capítulo se demuestra que el problema de Cauchy está correctamente planteado para la ecuación de ondas en el espacio, siempre que el plano en que se establecen las condiciones iniciales esté convenientemente inclinado, y para los sistemas hiperbólicos lineales de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden respecto a dos variables independientes. De acuerdo con lo que se afirma en el problema planteado en la observación 3) del § 7, el problema de Cauchy está correctamente planteado para sistemas lineales hiperbólicos en sentido restringido de la forma (11,7) en derivadas parciales respecto a dos variables independientes en una región unicoxena.

§ 9. CONCEPTO DE SOLUCIONES GENERALIZADAS

En el epígrafe anterior hemos tratado el planteamiento del problema de Cauchy en el caso de condiciones iniciales con un número suficiente de derivadas continuas. Sin embargo, los problemas físicos están lejos de reducirse siempre a condiciones iniciales que tengan un número de derivadas continuas suficiente para poder afirmar la existencia de la solución del problema correspondiente. Pero si las condiciones iniciales no son continuas ni tienen un número suficiente de derivadas continuas, puede ocurrir que tampoco exista una solución derivable del problema de contorno correspondiente. En este caso, resulta muy conveniente aplicar las así llamadas "soluciones generalizadas" de las ecuaciones diferenciales.

La teoría de las soluciones generalizadas de ecuaciones en derivadas parciales fue desarrollada por S. L. Soboliev en los años 30. Estas soluciones se definen o bien como el límite de una sucesión de soluciones ordinarias o bien mediante identidades integrales.

Consideremos como ejemplo el problema de Cauchy para la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1,9}$$

con la condición inicial

$$u(0, x) = \varphi(x), \tag{2,9}$$

donde $\varphi(x)$ es una función continuamente derivable en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$. No es difícil comprobar que la solución de este problema en la región $D\{a < x + t < b\}$ viene dada por la función

$$u(t, x) = \varphi(x + t). \tag{3,9}$$

Supongamos ahora que en el segmento $[a, b]$ la función $\varphi(x)$ es continua pero no es derivable. Sabemos que esta función se puede representar como el límite de una sucesión uniformemente convergente en $[a, b]$ de funciones $\varphi^{(k)}(x)$, que tienen derivadas continuas. Además las soluciones correspondientes $\varphi^{(k)}(x + t)$ de la ecuación (1,9) convergen uniformemente en D hacia la función (3,9). Entonces la función (3,9) se puede considerar como solución de la ecuación (1,9) en sentido generalizado.

Definición 1. Un sistema de funciones $(u_1, \ldots, u_N)$ se llama solución generalizada de un sistema de ecuaciones diferenciales en una región G, si existe una sucesión infinita de soluciones $(u_1^{(k)}, \ldots, u_N^{(k)})$ de este sistema que converge uniformemente a $(u_1, \ldots, u_N)$, es decir, si

$$\sup_{P \in G} \sum_{i=1}^{N} |u_i(P) - u_i^{(k)}(P)| \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

Observación. A veces un sistema de funciones $(u_1, \ldots, \ldots, u_N)$ también se llama solución generalizada de un sistema de ecuaciones diferenciales en el caso en que una sucesión de soluciones ordinarias $(u_1^{(k)}, \ldots, u_N^{(k)})$ converge a $(u_1, \ldots, u_N)$ de manera que

$$\int_G \sum_{i=1}^{N} [u_i(P) - u_i^{(k)}(P)]^2 \, dP \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

Las soluciones generalizadas así definidas pueden ser incluso discontinuas. [Véase S. L. Soboliev, Ecuaciones de la física matemática, Gostiejizdat, 1954 (especialmente las páginas 314, 322, 329) y S. L. Soboliev, Algunas aplicaciones del análisis funcional a la física matemática, L. 1950].

La extensión de la clase de las soluciones de uno u otro problema de contorno presenta interés sólo en el caso en que se conserve la unicidad de la solución. Para los problemas de contorno más típicos de ecuaciones en derivadas parciales, S. L. Soboliev demostró la existencia y unicidad de sus soluciones generalizadas. Aquí debemos definir especialmente cómo hay que comprender las condiciones de contorno para las soluciones generalizadas.

Para las ecuaciones lineales homogéneas elípticas y parabólicas cuyos coeficientes tienen un número suficiente de derivadas continuas, al introducir del modo señalado más arriba las soluciones generalizadas, no se amplía la clase de las soluciones ordinarias (véase el teorema 4 del § 30). No obstante, para las ecuaciones hiperbólicas esta extensión es esencial, como lo muestra el ejemplo considerado más arriba.

Es conveniente introducir las soluciones generalizadas ya que para la existencia de soluciones ordinarias de los problemas de contorno más importantes, es necesario imponer a las funciones definidas sobre el contorno de la región considerada, condiciones muy rígidas respecto al número de derivadas continuas, mientras que para la existencia de soluciones generalizadas no es necesario exigir ese número de derivadas continuas de las funciones definidas sobre el contorno. Así, por ejemplo, la solución generalizada del problema de Cauchy (1,9), (2,9) existe, como lo hemos visto, para cualquier función continua $\varphi(x)$.

Una razón más para considerar las soluciones generalizadas de la ecuación (1,9) es que generalmente la propia función $\varphi(x)$ puede conocerse sólo aproximadamente. Por eso la función correspondiente $u(t, x)$, definida por la fórmula (3,9), es también solamente una aproximación de la solución exacta del problema planteado. Nos es indiferente si esta aproximación es una solución ordinaria o sólo generalizada de la ecuación (1,9). Lo importante es que difiere poco de la solución real, si la función $\varphi(x)$ difiere uniformemente poco del valor inicial real $u(0, x)$.

Otro modo de introducir las soluciones generalizadas, que también pertenece a S. L. Soboliev, consiste en utilizar identidades integrales, que para las soluciones ordinarias son consecuencias de las ecuaciones consideradas. Este modo de introducir las soluciones generalizadas, que está muy difundido actualmente, lo consideraremos en un ejemplo de una ecuación lineal de primer orden.

Sea $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función derivable en la región D y que satisface la ecuación

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + b(x_1, \ldots, x_n)\, u = f(x_1, \ldots, x_n), \quad (4,9)$$

donde las a_i tienen derivadas continuas mientras que b y f son continuas en D. Multipliquemos ambos miembros de (4,9) por la función $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$, que tiene derivadas continuas en la región D y se anula en la vecindad de su contorno; integremos la igualdad obtenida por la región D. Integrando por partes llegamos a la relación

$$\iint\limits_D [uM(\sigma) - f\sigma]\, dx_1 \ldots dx_n = 0, \tag{5,9}$$

donde

$$M(\sigma) \equiv -\frac{\partial\sigma}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial(a_i\sigma)}{\partial x_i} + b\sigma.$$

Por lo tanto, toda solución ordinaria de (4,9) satisface la igualdad (5,9). Pero esta igualdad se verifica también para una clase más amplia de funciones $u(x_1, \ldots, x_n)$, ya que el miembro izquierdo de (5,9) no contiene derivadas de u. Por eso es obvia la siguiente definición.

Definición 2. Una función $u(x_1, \ldots, x_n)$ se llama solución generalizada de la ecuación (4,9) en una región D, si se verifica la igualdad (5,9) para toda función $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ con derivadas continuas y que se anula en todos los puntos de la región D, cuyas distancias hasta la frontera de D son menores que un número positivo ρ_σ (ρ_σ es distinto para diferentes σ).

Al considerar las soluciones generalizadas de los problemas de contorno es necesario señalar en qué sentido se entienden las condiciones de contorno. A veces estas condiciones (o una parte de éstas) se pueden tomar en cuenta cambiando la forma de la identidad integral que define la solución generalizada. Por ejemplo, se llama solución generalizada del problema de Cauchy para la ecuación (4,9) en una región D del semiespacio $x_1 \geqslant 0$, cuya frontera Γ contiene la parte Γ_1 del hiperplano $x_1 = 0$, para la condición inicial

$$u(0, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, \ldots, x_n) \text{ sobre } \Gamma_1, \tag{6,9}$$

a toda función continua a trozos $u(x_1, \ldots, x_n)$ que satisface la igualdad

$$\iint_D [uM(\sigma) - f\sigma]\, dx_1 \ldots dx_n -$$
$$- \int_{\Gamma_1} \varphi(x_2, \ldots, x_n)\, \sigma(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n = 0 \tag{7,9}$$

para cualquier función $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ con derivadas continuas que se anula en una vecindad de $\Gamma - \Gamma_1$.

Problema 1. Demuestre que si la función $u(x_1, \ldots, x_n)$ tiene derivadas continuas en una región cerrada $\overline{D}$ y es solución generalizada del problema de Cauchy (4,9), (6,9) en el sentido de la relación (7,9), satisface la ecuación (4,9) y la condición inicial (6,9) en el sentido ordinario.

Problema 2. Construya una solución generalizada (en el sentido de la relación (7,9)) del problema de Cauchy para la ecuación (1,9) con la condición inicial

$$u(0, x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

Problema 3. Demuestre que si la función $u(t, x)$ es una solución generalizada de la ecuación (4,9) en el sentido de la definición 1, es también solución generalizada de (4,9) en el sentido de la definición 2.

§ 10. PROBLEMA DE CAUCHY PARA SISTEMAS HIPERBÓLICOS CON DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

1. Consideremos el sistema

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t, x) u_j + b_i(t, x) \qquad (1,10)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N).^{22}$$

Supondremos que en toda la región considerada el sistema es hiperbólico, es decir, que todas las λ_i son funciones reales de t, x. Supondremos además que todas las $\lambda_i(t, x)$ son diferentes y están numeradas en orden creciente. [23]

---

[22] Todos los razonamientos que siguen en el epígrafe presente se pueden aplicar, modificándolos levemente, a los sistemas de la forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(t, x, u_1, \ldots, u_N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

si suponemos que las funciones $f_i(t, x, u_1, \ldots, u_N)$ tienen derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive (véase la demostración de la existencia de solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

por el método de las aproximaciones sucesivas).

[23] La suposición de que todas las λ_i son distintas no es esencial. Todos los razonamientos que siguen son aplicables también al caso en que algunas λ_i sean iguales entre sí. Sólo que al determinar la región $\overline{G}$ es necesario

Por cada punto de nuestra región pasan N características reales L_i con pendiente $k_i = -\frac{1}{\lambda_i}$ respecto al eje x (véase el ejemplo 5 del § 3).

Si no se supone que los coeficientes del sistema (1,10) son analíticos, no se puede aplicar el teorema de Kovalevskaya para

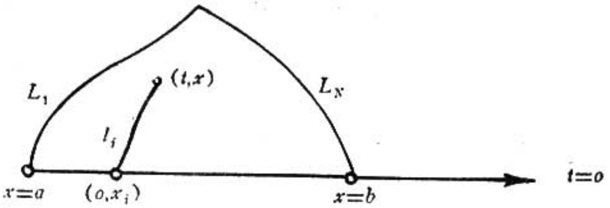

Fig. 2

demostrar la existencia de la solución del problema de Cauchy para este sistema. Supondremos que en una región cerrada $\overline{G}$, limitada por el segmento $[a, b]$ del eje Ox y por las características L_1 y L_N, que salen de los puntos $(0, a)$ y $(0, b)$ respectivamente

---

tomar, en lugar de la característica L_1 que sale del punto $(0, a)$, la solución de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_{\min}(t, x)$$

que pasa por el punto $(0, a)$, donde $\lambda_{\min}(t, x) = \min\{\lambda_1(t, x), ..., \lambda_N(t, x)\}$, y en lugar de L_N, la solución de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_{\max}(t, x),$$

que pasa por el punto $(0, b)$, donde $\lambda_{\max}(t, x) = \max\{\lambda_1(t, x), \ldots, \lambda_N(t, x)\}$. Las funciones $\lambda_{\min}(t, x)$ y $\lambda_{\max}(t, x)$ son continuas y, como es fácil demostrar, satisfacen la condición de Lipshitz respecto a t, si todas las λ_i son continuas y tienen derivadas acotadas respecto a t.

(fig. 2)[24], las funciones a_{ij}, b_i y λ_i son continuas y tienen primeras derivadas continuas. Definiremos sobre el segmento $[a, b]$ N funciones $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$ con derivadas continuas y plantearemos para el sistema (1,10) el problema de Cauchy del siguiente modo:

Hallar una solución $u_1, u_2, \ldots, u_N$ del sistema (1,10) que sea continua en $\overline{G}$, que tenga en G primeras derivadas continuas y tal que para $t = 0$

$$u_i(0, x) = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2,10}$$

Para las suposiciones hechas, el problema planteado tiene solución única.

Demostración. Consideremos la ecuación i-ésima del sistema (1,10). Su miembro izquierdo difiere en un factor de la derivada de la función $u_i(t, x)$ a lo largo de la curva L_i. En efecto, si designamos por α_i el ángulo entre la tangente a la curva L_i en el punto (t, x) y el eje Ox, tendremos

$$\operatorname{tg} \alpha_i = -\frac{1}{\lambda_i}.$$

Por lo tanto,

$$\cos \alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}; \qquad \operatorname{sen} \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}},$$

[24] Las líneas L_1 y L_N no se intersectan necesariamente. Por lo tanto, la región G puede ser infinita. Para lo sucesivo es esencial que la región G sea acotada. Esto siempre se puede lograr limitando G, en caso de necesidad, por la recta $t = T$.

Todos los razonamientos subsiguientes serían asimismo aplicables, si la región G estuviera situada en el semiplano $t < 0$.

y
$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}}.$$

Aquí hemos designado por s_i la longitud del arco de la característica L_i; $\frac{\partial}{\partial s_i}$ denota la derivación en la dirección de la característica L_i.

El sistema (1,10) se puede escribir en la forma

$$\sqrt{1 + \lambda_i^2}\, \frac{\partial u_i}{\partial s_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \quad (3,10)$$

Si designamos por du_i al diferencial de la función u_i sobre la curva L_i, obtendremos de (3,10)

$$\underset{i}{du_i} = (\Sigma\, a_{ij} u_j + b_i) \frac{ds_i}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}}$$

y como que $ds_i = \sqrt{1 + \lambda_i^2}\, dt$, encontramos

$$\underset{i}{du_i} = (\Sigma\, a_{ij} u_j + b_i)\, dt \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \quad (4,10)$$

Fijemos ahora un punto arbitrario (t, x) de la región $\overline{G}$ y designemos mediante l_i la parte de la curva L_i comprendida entre el punto (t, x) y la intersección de la curva en un punto $(0, x_i)$ con el segmento $[a, b]$ del eje $t = 0$ (véase fig. 2). Después de esto integremos la i – ésima relación de la fórmula (4,10) según el arco l_i, desde el punto $(0, x_i)$ hasta el punto (t, x). Obtendremos el sistema de ecuaciones integrales

$$u_i(t, x) - u_i(0, x_i) = \int_{l_i} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j + b_i \right) dt$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

o, en virtud de las condiciones iniciales (2,10),

$$u_i(t, x) = \varphi_i(x_i) + \int_{l_i} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j + b_i \right) dt. \qquad (5,10)$$

Es evidente que toda solución del sistema (1,10) que satisfaga las condiciones iniciales (2,10) es una solución del sistema (5,10). Viceversa, si tenemos una solución del sistema de ecuaciones integrales (5,10) y si las funciones que forman esta solución tienen en G derivadas continuas respecto a t y a x, entonces, realizando las operaciones inversas a aquellas mediante las cuales hemos pasado de (1,10) a (5,10), nos convenceremos que la solución del sistema (5,10) es también la solución del problema planteado de Cauchy. El problema se redujo de ese modo a la demostración de la existencia de una solución con derivadas continuas del sistema (5,10).

Construyamos las aproximaciones sucesivas de la solución del sistema (5,10) del siguiente modo: hagamos

$$u_i^{(0)}(t, x) = \varphi_i(x_i) \quad (i = 1, \ldots, N),$$

$$u_i^{(1)}(t, x) = \varphi_i(x_i) + \int_{l_i} [\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t, x) u_j^{(0)} + b_i(t, x)] dt$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

y en general,

$$u_i^{(n+1)}(t, x) = \varphi_i(x_i) + \int_{l_i} [\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t, x) u_j^{(n)} + b_i(t, x)] dt$$
$$(i = 1, \ldots, N).$$

Hablando con rigor, la última igualdad se debe escribir así:

$$u_i^{(n+1)}(t, x) = \varphi_i[x_i(0, t, x)] +$$
$$+ \int_0^t [\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\tau, x_i(\tau, t, x)) u_j^{(n)}(\tau, x_i(\tau, t, x)) +$$
$$+ b_i(\tau, x_i(\tau, t, x))] d\tau \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Suponemos que $x = x_i\ (t, t^0, x^0)$ es la ecuación de la característica L_i, que pasa por el punto $(t^0,\ x^0)$. Si demostramos la convergencia uniforme de la sucesión $u_i^{(n)}\ (t, x)$ en la región cerrada $\overline{G}$, entonces el sistema de funciones límites $u_i\ (t, x)$ satisfará las ecuaciones (5,10). La convergencia uniforme de la sucesión $u_i^{(n)}\ (t, x)$ es equivalente a la convergencia uniforme de la serie

$$u_i^{(0)}(t, x) + \sum_{n=0}^{\infty} [u_i^{(n+1)}(t, x) - u_i^{(n)}(t, x)]. \qquad (6,10)$$

Para demostrar la convergencia uniforme de esta serie construyamos para ésta una mayorante numérica. Como las funciones $u_i^{(0)}\ (t, x)$ y $u_i^{(1)}\ (t, x)$ son continuas en la región cerrada $\overline{G}$, están acotadas en esta región.

Hagamos

$$M = \max \{ | u_1^{(0)} |, \ldots, | u_N^{(0)} |, | u_1^{(1)} |, \ldots, | u_N^{(1)} | \}$$

en la región $\overline{G}$. Entonces

$$| u_i^{(0)}(t, x) | \leqslant M,$$
$$| u_i^{(1)} - u_i^{(0)} | \leqslant 2\,M,$$
$$(t, x) \in \overline{G}.$$

Designemos max $|a_{ij}|$ en la región $\overline{G}$ para todas las $i, j, = 1, \ldots,$ $\ldots, N$, mediante A. Entonces

$$| u_i^{(2)}(t, x) - u_i^{(1)}(t, x) | \leqslant \int_{l_i} \sum_{j=1}^{N} | a_{ij} | \,.$$

$$.\ | u_j^{(1)} - u_j^{(0)} | \, dt \leqslant 2\,MANt,$$

$$| u_i^{(3)}(t, x) - u_i^{(2)}(t, x) | \leqslant$$

$$\leqslant \int_{l_i} \sum_{j=1}^{N} | a_{ij} | \,.\, | u_j^{(2)} - u_j^{(1)} | \, dt \leqslant 2\,MA^2N^2 \frac{t^2}{2}.$$

Supongamos ahora que

$$| u_i^{(n)}(t, x) - u_i^{(n-1)}(t, x) | \leqslant 2\,M \frac{A^{n-1}N^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Entonces

$$| u_i^{(n+1)}(t, x) - u_i^{(n)}(t, x) | \leqslant$$

$$\leqslant \int_{l_i} \sum_{j=1}^{N} | a_{ij} | \,.\, | u_j^{(n)} - u_j^{(n-1)} | \, dt \leqslant 2\,M \frac{A^nN^nt^n}{n!}$$

Por eso, de acuerdo con el método de inducción matemática, para cualquier n se tiene

$$| u_i^{(n+1)}(t, x) - u_i^{(n)}(t, x) | \leqslant 2 M \frac{(ANt)^n}{n!}.$$

Pero la región G está acotada y tomando un número fijo T mayor que todos los valores de t en esta región, obtendremos que en toda la región G

$$| u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)} | \leqslant 2 M \frac{(ANT)^n}{n!}.$$

Como la serie numérica $\sum \frac{(ANT)^n}{n!}$ converge, la serie (6,10) converge uniformemente en toda la región cerrada $\overline{G}$, lo cual demuestra la existencia y la continuidad de la solución del sistema (5,10).

Demostremos ahora la unicidad de la solución continua en $\overline{G}$ (y por lo tanto acotada) del sistema (5,10). Supongamos que tenemos dos soluciones del sistema (5,10) $u_1, \ldots, u_N$ y $\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_N$. Sustituyendo ambas soluciones en el sistema y restando una de otra las ecuaciones correspondientes obtendremos

$$u_i(t, x) - \widetilde{u}_i(t, x) = \int_{l_i} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(u_j - \widetilde{u}_j) \, dt.$$

Supongamos ahora que

$$\max_{\substack{(t,x) \in \overline{G} \\ i = 1, \ldots, N}} | u_i - \widetilde{u}_i | = M > 0.$$

Entonces, haciendo estimados sucesivos de la diferencia $|u_i(t, x) - \widetilde{u}_i(t, x)|$, como hicimos en la demostración de la existencia, obtendremos que

$$M \leqslant M \frac{(ANT)^n}{n!}$$

para cualquier n, lo que lleva a una contradicción si n es suficientemente grande. Por lo tanto $M = 0$ y

$$u_i(t, x) = \widetilde{u}_i(t, x) \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

es decir, la solución es única.

Para finalizar la demostración debemos comprobar que las funciones halladas $u_i(t, x)$ tienen derivadas continuas de primer orden con respecto a t y x. Es evidente que para esto es suficiente demostrar que las funciones $u_i(t, x)$ tienen primeras derivadas continuas en la dirección l_i y respecto a x en cada punto, ya que de esto y del hecho de que las l_i tienen derivadas continuas se desprende la continuidad de las derivadas respecto a t y x en toda la región G.

La existencia y continuidad de las derivadas de $u_i(t, x)$ a lo largo de l_i se desprende directamente del sistema (5,10) y de la continuidad de la solución obtenida. Para demostrar la existencia y la continuidad de las derivadas $\frac{\partial u_i}{\partial x}$, observemos primeramente que de la supuesta existencia de las derivadas continuas de $\varphi_i(x)$, $\lambda_i(t, x)$, $a_{ij}(t, x)$, $b_i(t, x)$, se deduce que todas las aproximaciones construidas en la demostración de la existencia de solución tienen derivadas continuas respecto a x. Derivemos respecto a x la igualdad que determina la $(n + 1)$-ésima aproximación.

Obtendremos

$$\frac{\partial u_i^{(n+1)}(t, x)}{\partial x} = \varphi_i'[x_i(0, t, x)] \frac{\partial x_i(0, t, x)}{\partial x} +$$

$$+ \int_0 \Big[\sum_j \frac{\partial a_{ij}(\tau, x_i(\tau, t, x))}{\partial x} u_j^{(n)}(\tau, x_i(\tau, t, x)) +$$

$$+ \sum_j a_{ij}(\tau, x_i(\tau, t, x)) \frac{\partial u_j^{(n)}(\tau, x_i(\tau, t, x))}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(\tau, t, x)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial b_i(\tau, x_i(\tau, t, x))}{\partial x} \Big] d\tau$$ [25]

$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

En virtud de las suposiciones hechas respecto al sistema (1,10), se puede demostrar la convergencia uniforme de la sucesión $\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de la misma forma que se demostró la convergencia de $u_i^{(n)}$, cambiando únicamente las constantes en las estimaciones realizadas. Por eso $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial x}$ y la función es continua que es lo que se quería demostrar.

---

[25] La coordenada x_i del punto de intersección de l_i con la recta $t = \tau$ es una función continuamente derivable de t y x, en virtud de la supuesta continuidad de las derivadas de λ_i. Los límites de integración respecto a t en la integral curvilínea no varían al variar x.

Si las funciones $\varphi_i(x)$ fuesen sólo continuas y no tuviesen derivadas, las construcciones descritas al principio del presente epígrafe darían sólo las soluciones generalizadas del sistema (1,10) (véase el siguiente subepígrafe).

2. Hemos demostrado la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy para el sistema (1,10) en la clase de funciones que tienen derivadas continuas de primer orden. Para demostrar que el problema está correctamente planteado vamos a hacer la demostración del siguiente teorema (véase § 8).

Si las funciones iniciales $\varphi_i(x)$ del problema de Cauchy son sustituidas por unas funciones $\psi_i(x)$ que difieren de las respectivas $\varphi_i(x)$ en menos de η, entonces las funciones $v_i(t, x)$ que determinan la solución del problema transformado de Cauchy diferirán de las respectivas $u_i(t, x)$ en menos de ε, donde $\varepsilon \to 0$ si $\eta \to 0$.

Supongamos

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) - \psi_i(x) &= \eta_i(x), \\ u_i(t, x) - v_i(t, x) &= z_i(t, x). \end{aligned} \tag{7,10}$$

Las funciones $z_i(t, x)$ satisfacen las ecuaciones integrales

$$z_i(t, x) = \eta_i(x_i) + \int_{l_i} \Big(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} z_j \Big) \, dt. \tag{8,10}$$

Supongamos

$$\max_{\substack{(t, x) \in \overline{U} \\ i = 1, \ldots, N}} | z_i(t, x) | = \varepsilon.$$

Entonces, repitiendo la estimación hecha en la demostración de la existencia de la solución, obtenemos

$$| z_i(t, x) | \leqslant \eta + A\varepsilon N t. \tag{9,10}$$

Utilizando la desigualdad (9,10) y haciendo de nuevo la estimación $|z_i(t, x)|$, mediante la ecuación (8,10) obtenemos

$$|z_i(t, x)| \leqslant \eta\ (1 + ANt) + \varepsilon\, \frac{A^2N^2t^2}{2!}.$$

Repitiendo esta operación n veces demostramos la desigualdad

$$|z_i(t,x)| \leqslant \eta \left(1 + ANt + \ldots + \frac{(ANt)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + \varepsilon\, \frac{(ANt)^n}{n!}.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$\varepsilon \leqslant \eta e^{ANT}.$$

De aquí es evidente que $\varepsilon \to 0$, si $\eta \to 0$, ya que e^{ANT} es una constante que no depende de η.

Problema 1. Enuncie la definición de solución generalizada del problema de Cauchy para el sistema (1,10) bajo las condiciones (2,10) y mediante una identidad integral, análogamente a como se hizo en el § 9 para la ecuación (4,9).

Problema 2. Demuestre la unicidad de la solución generalizada del problema de Cauchy (1,10), (2,10) en la clase de funciones que son continuas y tienen derivadas continuas fuera de un número finito de lineas suaves.

Problema 3. Supongamos que la solución generalizada del problema de Cauchy (1,10), (2,10) tiene discontinuidad de primer orden en un número finito de líneas suaves y que fuera de estas líneas la solución tiene derivadas continuas. Demuestre que estas líneas son las características del sistema (1,10).

3. Para finalizar el presente epígrafe daremos una descripción breve del método de las diferencias finitas que es útil a la

hora de buscar la solución aproximada del problema de Cauchy planteado en el subepígrafe 1.

Sean $\varphi_i(x)$ las funciones iniciales definidas sobre el segmento $[a, b]$ del eje Ox. Para hallar aproximadamente los valores de las funciones $u_i(t, x)$ que satisfagan el sistema (1,10) y que para $t = 0$ tomen los valores dados $\varphi_i(x)$, procederemos del siguiente modo.

Fijemos un número entero n y dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales de longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Seguidamente tracemos las rectas $x = a + ph$ y las rectas $t = qh$ para ciertos valores enteros p y q tales que la región G, en la cual se busca la solución del problema de Cauchy (véase el 1), esté cubierta por una red cuadrada de lado igual a h. Denotemos los vértices del cuadrado con dos subíndices, es decir, designemos por M_{pq} el punto de intersección de las rectas $x = a + ph$ y $t = qh$. Los valores de las funciones incógnitas $u_i(t, x)$ en todos los puntos $M_{p0} : u_i(0, a + ph) = \varphi_i(a + ph) = \varphi_i(M_{p0})$ están dados. Describamos el proceso mediante el cual se pueden hallar aproximadamente los valores de $u_i(t, x)$ en todos los vértices de la red contenidos en G. En cada uno de los puntos M_{p0} están definidos los coeficientes del sistema (1,10) y en particular los N números $\lambda_i(M_{p0}) = \lambda_i^{p0} (i = 1, \ldots, N)$. A partir de cada punto M_{p0} tracemos N segmentos de recta con coeficientes angulares $k_i^{p0} = -\frac{1}{\lambda_i^{p0}}$ hasta la intersección con la recta $t = h$ y hallemos los valores de $u_i(t, x)$ en los extremos de los segmentos correspondientes. Para esto usamos la forma (4,10) del sistema (1,10) y sustituimos el diferencial a lo largo de la característica L_i por el incremento, y la igualdad exacta correspondiente por una aproximada. Obtendremos la relación

$$\underset{i}{\Delta u_i} \approx \left(\sum a_{ij}u_j + b_i\right) h,$$

que permite hallar el incremento de la función $\underset{i}{\Delta} u_i$ al pasar del punto M_{p0} a lo largo de la característica L_i (más exactamente a lo largo de la tangente a esta característica) a la recta $t = h$.

Añadiendo los incrementos hallados a los valores iniciales de la función en los puntos M_{p0}, encontraremos los valores de cada función u_i en los puntos de la recta $t = h$. Los valores de las distintas funciones quedarán determinados, en general, en distintos puntos. Mediante cualquier proceso de interpolación, a partir de los valores hallados para u_i sobre la recta $t = h$, calculamos sus valores en los puntos M_{pi}, es decir, en los vértices de la red situados sobre esta recta. Después de esto, podemos continuar el cálculo de los valores de $u_i(t, x)$ mediante el mismo método y encontrar estos valores en los puntos de la recta $t = 2h$ que pertenecen a la región G. Repitiendo la interpolación y la determinación de los valores de $u_i(t, x)$ tantas veces como sea necesario, hallaremos los valores aproximados de todas las funciones $u_i(t, x)$ en todos los vértices de los cuadrados situados en la región G.

Se puede demostrar que cuando $n \to \infty$ los valores aproximados de las funciones convergen uniformemente a un límite que da la solución exacta del problema de Cauchy y, por lo tanto, para un n suficientemente grande, las aproximaciones halladas por el método descrito van a diferir tan poco como se quiera de la solución real.

Si $N = 2$, el proceso del cálculo aproximado de la solución del problema de Cauchy se simplifica considerablemente. Se tienen solamente dos familias de características. Dividiendo el segmento $[a, b]$ del eje Ox, en el cual están dados los valores iniciales de u_1 y u_2, en pequeños intervalos y trazando en los puntos de división las tangentes a las características de las distintas familias hasta que se intersecten en el punto más cercano al segmento $[a, b]$, hallamos aproximadamente los valores u_1 y u_2, en estos puntos de intersección, según fue descrito más arriba. Trazando en estos nuevos puntos las tangentes a las características, calculamos aproximadamente los valores de u_1 y u_2 en los puntos de intersección de estas nuevas tangentes que se encuentran lo más cerca posible del segmento $[a, b]$, y así sucesivamente. De ese modo obtendremos los valores de u_1 y u_2, para un conjunto suficientemente denso de puntos, si la división inicial del segmento $[a, b]$ es suficientemente pequeña. Este caso no exige ninguna red cuadrada ni interpolación.

§ 11. PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE ONDAS. TEOREMA DE LA UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

Supongamos que la función $u(t, x_1, x_2)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \tag{1,11}$$

dentro de un cono circular K de eje paralelo al eje Ot y con vértice en el punto A y cuyas generatrices forman con el eje Ot un ángulo $\alpha = 45°$. Supongamos además que la propia función $u(t, x_1, x_2)$ y todas sus derivadas hasta el segundo orden inclusive son continuas dentro y en la frontera de K.

Entonces el valor de $u(t, x_1, x_2)$ en un punto A se determina unívocamente por los valores de u y $\frac{\partial u}{\partial t}$ en la base del cono situada en el plano $t = t_0$.

El cono K se llama *característico.* Es fácil ver que la superficie lateral de K es la superficie característica en el sentido expuesto en el 2 del § 3.

El teorema es válido lo mismo cuando el punto A tiene la coordenada $t > t_0$ que cuando $t < t_0$.

Observaciones. 1. En lugar de la ecuación (1,11) en el enunciado del teorema se pudo haber tomado la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right), \tag{2,11}$$

donde $a > 0$ es una constante cualquiera, si sustituimos el cono cuyas generatrices forman un ángulo de 45° con Ot por otro cono cuyas generatrices están inclinadas respecto al eje Ot un ángulo $\alpha = \operatorname{arc\,tg} a$. En efecto, la ecuación (2,11) se reduce a la ecuación (1,11) al sustituir at por t.

2. Siempre podemos considerar que $t_0 = 0$. El caso de cualquier t_0 se reduce a éste si introducimos en lugar de la variable independiente t, una nueva variable independiente $t^* = t - t_0$, con lo cual la forma de la ecuación (1,11) no varía.

3. Supongamos que en el plano $t_0 = 0$ está definida la región G_0. Construyamos conos K con bases situadas en la región G_0, con ejes paralelos al eje Ot y con generatrices que forman con Ot un ángulo de $\pm$ 45°. Entonces de nuestro teorema se deduce que

dados u y $\frac{\partial u}{\partial t}$ en la región G_0, la solución de la ecuación (1,11) queda determinada unívocamente en la región G del espacio $(t, x_1\ x_2)$ comprendida entre los conos K. Por ejemplo, dados u y $\frac{\partial u}{\partial t}$ en el cuadrado $|x_1| < a$, $|x_2| < a$, la solución $u(t, x_1, x_2)$, de la ecuación (1,11), cuyas dos primeras derivadas son continuas, queda unívocamente determinada dentro de cada una de las dos pirámides para las cuales este cuadrado es base común y cuyas aristas laterales forman un ángulo de 45° con la base.

4. Dados u y $\frac{\partial u}{\partial t}$ en un círculo G_0 cualquiera situado en el plano (x_1, x_2), la solución $u(t, x_1, x_2)$ de la ecuación (1,11) no queda determinada en ningún punto B situado fuera de los conos K correspondientes cuya base común es el círculo G_0, cuyos ejes son paralelos al eje Ot y cuyas generatrices forman con el eje Ot un ángulo de 45°. Para demostrar esto, es suficiente comprobar que existe una solución $\bar{u}(t, x_1, x_2)$ tal que $\bar{u}$ y $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ son iguales a cero en el círculo G_0 y $\bar{u}(B) \neq 0$. Para construir esta solución observemos que para cualquier función $f(z)$ con dos derivadas y para $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, la función

$$f(t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \tag{3,11}$$

es una solución de la ecuación (1,11). (¡Compruébese!)

La función (3,11) es constante en cualquier plano

$$t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = C, \tag{4,11}$$

que forme un ángulo de 45° con Ot. Escojamos α_1 y α_2 de tal manera que el plano de la familia (4,11) que pasa por el punto B no intersecte el círculo G_0. Después de esto, se puede escoger una función $f(z)$ con dos derivadas continuas de modo que $f(t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ sea distinta de cero en el punto B e igual a cero en G_0. Entonces $\widetilde{u}(t, x_1\ x_2) = f(t + \alpha_1\ x_1 + \alpha_2\ x_2)$ es la solución que necesitamos.

5. La demostración que se hace más abajo del teorema de la unicidad es aplicable para las soluciones, cuyas dos primeras derivadas son continuas, de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

para cualquier n. En este caso el cono tridimensional K del enunciado del teorema habría que sustituirlo por un cono en el espacio de $n + 1$ dimensiones, de eje paralelo al eje Ot y cuyas generatrices forman un ángulo de 45° con Ot. Este cono también se llama característico. Para $n = 1$, se convierte en un triángulo cuya base es paralela al eje Ox y cuyos lados forman con el mismo un ángulo de 45°.

Demostración del teorema de la unicidad. Supongamos que dentro del cono K y sobre su superficie existen dos soluciones $u_1(t, x_1, x_2)$ y $u_2(t, x_1, x_2)$ de la ecuación (1,11), continuas al igual que sus dos primeras derivadas y que en la base de K, como sus primeras derivadas respecto a t, son iguales entre sí. Entonces la diferencia

$$u(t, x_1, x_2) = u_2(t, x_1, x_2) - u_1(t, x_1, x_2)$$

debe también satisfacer la ecuación homogénea (1,11) dentro de K, pero en la base del cono $u(t, x_1\ x_2)$ y $u_t(t, x_1\ x_2)$ deben anularse. El teorema de la unicidad quedará demostrado si demostramos que $u(t, x_1, x_2) = 0$ en el vértice de K. Para demostrar esto integremos por dentro del cono K la expresión

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right),$$

por donde la misma es igual a cero en todo punto ya que la función u satisface la ecuación (1,11). Como que

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2,$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

entonces

$$0 = \iiint\limits_K \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) dt\; dx_1\; dx_2 =$$

$$= \iiint\limits_K \left\{\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right\} dt\; dx_1\; dx_2.$$

Transformemos esta integral en una integral doble mediante la fórmula de Ostrogradski. Si designamos por K_1 la superficie lateral del cono K y por C su base, como en C, en virtud de las condiciones iniciales, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$, queda solamente la integral

$$0 = \frac{1}{2} \iint_{K_1} \Big\{ \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_2} \Big)^2 \Big] \cos\,(n,\, t) -$$

$$- 2\, \frac{\partial u}{\partial t}\, \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos\,(n,\, x_1) - 2\, \frac{\partial u}{\partial t}\, \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos\,(n,\, x_2) \Big\}\, d\sigma.\ [26] \tag{5,11}$$

Pero en la superficie lateral del cono característico

$$\cos^2(n,\, t) - \cos^2(n,\, x_1) - \cos^2(n,\, x_2) = 0. \tag{6,11}$$

Multiplicando y dividiendo la función subintegral por $\cos\,(n,\, t)$ y utilizando la relación (6,11) obtendremos a partir de (5,11)

$$\frac{1}{2\, \cos(n,\, t)} \iint_{K_1} \Big\{ \Big(\frac{\partial u}{\partial t} \cos(n,\, x_1) - \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos(n,\, t) \Big)^2 +$$

$$+ \Big(\frac{\partial u}{\partial t} \cos(n,\, x_2) - \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos(n,\, t) \Big)^2 \Big\}\, d\sigma = 0. \tag{7,11}$$

---

[26] Fijemos la atención en que durante las transformaciones realizadas con la integral

$$\iiint_K \frac{\partial u}{\partial t} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Big)\, dx_1\, dx_2\, dt$$

hemos asumido la continuidad de las primeras derivadas de u dentro y en la frontera de K y la integrabilidad en K de las segundas derivadas de u. Estas últimas se pueden integrar en K si son, por ejemplo, continuas dentro de K y en su frontera.

Aquí cos (n, t) se coloca fuera del signo de integral porque en K_1 es constante: (cos $(n, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ para $t > t_0$ y cos $(n, t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ para $t < t_0$).

De la igualdad (7,11) se deduce que en la superficie lateral del cono K

$$\frac{u'_t}{\cos(n, t)} = \frac{u'_{x_1}}{\cos(n, x_1)} = \frac{u'_{x_2}}{\cos(n, x_2)} = v. \qquad (8,11)$$

Si designamos por m la dirección de una generatriz cualquiera del cono K, valiéndonos de las igualdades (8,11) obtendremos

$$\frac{\partial u}{\partial m} = u'_t \cos(m, t) + u'_{x_1} \cos(m, x_1) + u'_{x_2} \cos(m, x_2) =$$
$$= v\,[\cos(n, t)\cos(m, t) + \cos(n, x_1)\cos(m, x_1) +$$
$$+ \cos(n, x_2)\cos(m, x_2)] = v\cos(m, n) = 0$$

(cos $(m, n) = 0$ porque la genetratriz del cono siempre forma un ángulo recto con la normal a su superficie).

De ese modo en la superficie del cono K la derivada de u en la dirección de la generatriz es igual a cero. De aquí se desprende que la función u es igual a cero en el vértice del cono ya que la misma es igual a cero en su base. Con esto queda terminada la demostración del teorema de la unicidad.

§ 12. FÓRMULAS QUE DAN LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE ONDAS

1. Supongamos que en una región G_0 del espacio (x_1, x_2, x_3) están dadas las funciones $\varphi_0(x_1, x_2, x_3)$ y $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ siendo φ_0 continua al igual que sus derivadas hasta el tercer orden y φ_1 hasta el segundo orden inclusive. Queremos hallar una solución $u(t, x_1, x_2, x_3)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \tag{1,12}$$

que satisfaga para $t = 0$ las condiciones

$$u(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi_0(x_1, x_2, x_3), \qquad (2{,}12)_1$$

$$u'_t(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi_1(x_1, x_2, x_3). \qquad (2{,}12)_2$$

Esta solución estará definida en todos los puntos (t, x_1, x_2, x_3) que sirven de vértices a los conos característicos cuyas bases pertenecen a G_0.

Hallemos primero la solución $u_\varphi\ (t, x_1, x_2, x_3)$ de la ecuación (1,12) para las condiciones iniciales de tipo particular:

$$u_\varphi(0, x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (3{,}12)_1$$

$$u'_{\varphi t}(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3). \qquad (3{,}12)_2$$

Es fácil comprobar que la función

$$v\ (t, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t}$$

satisface para $t = 0$ las condiciones

$$v(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

$$v'_t(0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2} = 0.$$

Por eso si u_φ tiene derivadas continuas de tercer orden, la solución de la ecuación (1,12) que satisface ambas condiciones (2,12) viene dada por la fórmula

$$u = \frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial t} + u_{\varphi 1}. \tag{4,12}$$

De ese modo el problema general de Cauchy para la ecuación (1,12) se reduce a hallar u_φ. Y podemos afirmar que se cumple la fórmula

$$u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\, d\sigma_t. \tag{5,12}$$

Esta fórmula se llama *fórmula de Kirchhoff*. Aquí $S_t(x_1, x_2, x_3)$ designa una esfera de radio t con centro en el punto (x_1, x_2, x_3) sobre el hiperplano $t = 0$ donde está dada la función φ, y $d\sigma_t$ es un elemento de superficie de esta esfera. Supondremos que la función $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ es continua y acotada al igual que sus derivadas hasta el k-ésimo orden inclusive ($k \geqslant 2$); entonces la función u_φ, como se verá más adelante a partir de la fórmula (6,12), también tendrá derivadas continuas hasta el k-ésimo orden inclusive.

Demostremos primeramente que la función u_φ definida por la fórmula (5,12) satisface las condiciones iniciales (3,12). La primera de estas condiciones se satisface ya que

$$\left| \iint\limits_{S_t} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\, d\sigma_t \right| \leqslant \max |\varphi| \cdot \frac{4\pi t^2}{t},$$

y, por lo tanto,

$$u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) \to 0 \text{ cuando } t \to 0.$$

Para comprobar la segunda condición observemos que haciendo

$$\alpha_k = x_k + \beta_k t,$$

reducimos la integral (5,12) a la forma

$$u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x_1 + t\beta_1, x_2 + t\beta_2, x_3 + t\beta_3)\, d\sigma_1, \tag{6,12}$$

donde la integración se lleva a cabo por una misma esfera S_1 para todos los x_1, x_2, x_3, t:

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \quad d\sigma_1 = \frac{d\sigma_t}{t^2}.$$

Por eso

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x_1 + t\beta_1, x_2 + t\beta_2, x_3 + t\beta_3)\, d\sigma_1 +$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \sum_{k=1}^{3} \beta_k \varphi_k(x_1 + t\beta_1, x_2 + t\beta_2, x_3 + t\beta_3)\, d\sigma_1. \tag{7,12}$$

Aquí φ_k designa la derivada de φ respecto a α_k. Es fácil ver que el primer sumando en el miembro derecho tiende a $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ cuando $t \to 0$ y que el segundo tiende a cero ya que la integral que figura en el mismo permanece acotada.

Ahora es suficiente demostrar que la función u_φ definida por la fórmula de Kirchhoff satisface la ecuación (1,12). De la igualdad (6,12) encontramos

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2}=\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2}\right)d\sigma_1=$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2}\right)d\sigma_t. \tag{8,12}$$

Para calcular $\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}$ volvamos a escribir la igualdad (7,12) así:

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}=\frac{u_\varphi}{t}+\frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}\,d\alpha_2\,d\alpha_3+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}\,d\alpha_1\,d\alpha_3+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_3}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\right)=$$

$$=\frac{u_\varphi}{t}+\frac{1}{4\pi t}\iiint\limits_{V_t}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2}\right)d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3=$$

$$=\frac{u_\varphi}{t}+\frac{I(t)}{4\pi t}, \tag{9,12}$$

donde

$$I(t)=\iiint\limits_{V_t}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2}\right)d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3,$$

y V_t es una esfera de radio t con centro en el punto (x_1, x_2, x_3) sobre el hiperplano $t=0$.

De la fórmula (9,12) obtenemos

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = -\frac{u_\varphi}{t^2} + \frac{1}{t}\left[\frac{u_\varphi}{t} + \frac{I(t)}{4\pi t}\right] - \frac{I(t)}{4\pi t^2} + \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I(t)}{\partial t} =$$
$$= \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I(t)}{\partial t}. \tag{10,12}$$

Pero es fácil ver que

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \iint\limits_{S_t} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha_3^2}\right) d\sigma_t. \text{[27]} \tag{11,12}$$

Comparando las igualdades (8,12), (10,12) y (11,12), es fácil comprobar que la función u definida por la fórmula de Kirchhoff satisface efectivamente la ecuación de ondas (1,12).

Observación. Si la función $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ es continua y $\varphi_0(x_1, x_2, x_3)$ es continua al igual que sus primeras derivadas, la función u definida por las igualdades (4,12) y (5,12) da solamente una solución generalizada del problema de Cauchy. Aquí entendemos como solución generalizada del problema de Cauchy

[27] En efecto, pasando a coordenadas polares $(\varrho, \vartheta, \psi)$ con centro en el punto (x_1, x_2, x_3) tenemos

$$I(t) = \int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \Delta\varphi(r, \psi, \vartheta)\, r^2 \operatorname{sen}\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dr,$$

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \Delta\varphi(t, \varphi, \vartheta)\, t^2 \operatorname{sen}\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = \iint\limits_{S_t} \Delta\varphi\, d\sigma_t.$$

para la ecuación (1,12) con las condiciones iniciales (2,12), el límite de la sucesión uniformemente convergente de las soluciones $u_{(n)}(t, x_1, x_2, x_3)$ de la ecuación (1,12) con las condiciones iniciales

$$u_{(n)}(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi_{0(n)}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{(n)}(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi_{1(n)}(x_1, x_2, x_3),$$

si cuando $n \to \infty$ las sucesiones $\varphi_{0(n)}$, $\dfrac{\partial \varphi_{0(n)}}{\partial x_i}$, $\varphi_{1(n)}$ convergen uniformemente en G_0 a φ_0, $\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}$, φ_1 respectivamente. Es fácil ver que si $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ es continua y φ_0 es derivable continuamente, la solución generalizada del problema de Cauchy con las condiciones iniciales (2,12) existe y es única.

2. Consideremos el caso particular cuando la función φ no depende de x_3. Es fácil comprobar que la función u dada por la fórmula de Kirchhoff tampoco depende de x_3 y por eso satisfará la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \tag{12,12}$$

En este caso es posible sustituir la integral referida a la esfera S_t por una integral doble según la sección K_t de la esfera V_t por el plano $\alpha_3 = x_3$. Proyectando el elemento $d\sigma_t$ de la superficie sobre este plano obtenemos

$$d\sigma_t = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}\, d\alpha_1\, d\alpha_2,$$

y la fórmula de Kirchhoff se puede escribir del siguiente modo:
$u_\varphi(t, x_1, x_2) =$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{t} \, d\sigma_t =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{K_t} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}.$$

Por eso la solución de la ecuación (12,12) que satisface las condiciones

$$u(0, x_1, x_2) = \varphi_0(x_1, x_2),$$
$$u'_t(0, x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2),$$

se da por la fórmula

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{K_t} \frac{\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_t} \frac{\varphi_0(\alpha_1, \alpha_2) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}. \quad (13,12)$$

Esta fórmula se llama *fórmula de Poisson.*

3. Si la función φ no depende ni de x_2 ni de x_3, la función u dada por la fórmula de Kirchhoff tampoco depende ni de x_2 ni de x_3 y por eso satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}. \quad (14,12)$$

En este caso la fórmula de Kirchhoff se puede escribir así:

$$u_\varphi(t, x_1) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{\varphi(\alpha_1)}{t} \, d\sigma_t = \frac{1}{2} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi(\alpha_1) d\alpha_1.$$

Aquí nos hemos basado en que el área de la parte de la esfera S_t contenida entre los planos $\alpha_1 =$ const. y $\alpha_1 + d\alpha_1 =$ const. que intersectan la esfera es igual a $2\pi t\, d\alpha_1$[28] y que la función $\varphi(\alpha_1)$ en toda esta parte de la esfera conserva un valor constante con exactitud del orden de $d\alpha_1$.

Por eso la solución de la ecuación (14,12) que satisface las condiciones

$$u(0, x_1) = \varphi_0(x_1), \quad u'_t(0, x_1) = \varphi_1(x_1),$$

está dada por la fórmula

$$u(t, x_1) = \frac{1}{2} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_1(\alpha_1)\, d\alpha_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_0(\alpha_1)\, d\alpha_1 =$$

$$= \frac{\varphi_0(x_1 + t) + \varphi_0(x_1 - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_1(\alpha_1)\, d\alpha_1. \qquad (15,12)$$

Esta fórmula se llama *fórmula de D'Alembert*.

---

[28] El área de una franja esférica de pequeña altura $d\alpha$ es aproximadamente igual a $2\pi\varrho\, dl$, donde ϱ es el radio de la sección media de la franja y dl es la generatriz del cono truncado inscrito en esta franja. Pero $\frac{t}{\varrho} = \frac{d}{d\alpha}$, de donde $\varrho\, dl = t\, d\alpha$ y $d\sigma_t = 2\pi t\, d\alpha$.

Recordemos que de acuerdo con el teorema de la unicidad, demostrado en el § 11, el problema de Cauchy no tiene otras soluciones que las dadas para las ecuaciones (1,12), (12,12) y (14,12) mediante las fórmulas (4,12), (13,12), (15,12), respectivamente. El método mediante el cual obtuvimos la solución del problema de Cauchy para las ecuaciones (12,12) y (14,12), a partir de la solución del problema de Cauchy para la ecuación (1,12) se llama *método de descenso.*

Hemos encontrado la solución del problema de Cauchy para $t > 0$. El caso $t < 0$ se reduce al anterior sustituyendo t por $-t$, lo cual no altera las ecuaciones (1,12), (12,12), (14,12).

Problema 1. Sea $\bar{u}(t, x_1, x_2, x_3; \tau)$ la solución de la ecuación (1,12) que para $t = \tau$ satisface las condiciones

$$\bar{u}(\tau, x_1, x_2, x_3; \tau) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(\tau, x_1, x_2, x_3; \tau) = f(\tau, x_1, x_2, x_3).$$

Demostrar que la solución $u(t, x_1, x_2, x_3)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(\tau, x_1, x_2, x_3),$$

que satisface para $t = 0$ las condiciones

$$u(0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

está dada por la fórmula

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \int_0^t \bar{u}(t, x_1, x_2, x_3; \tau)\, d\tau. \qquad (16,12)$$

Problema 2. Utilizando la fórmula (5,12) demuestre que la solución (16,12) es de la forma

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t} \frac{f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t - r)}{r} \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 \quad (17{,}12)$$

donde $r = \sqrt{(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + (x_3 - \alpha_3)^2}$. La integral (17,12) se llama *potencial retardado*.

§ 13. ESTUDIO DE LAS FÓRMULAS QUE DAN LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY

1. Dependencia continua de la solución respecto a los datos iniciales. Todas las fórmulas deducidas por nosotros en el epígrafe anterior y que dan la solución del problema de Cauchy para la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (1{,}13)$$

contienen, cuando $n = 2, 3$, integrales de las funciones iniciales multiplicadas por determinadas funciones y derivadas respecto al tiempo de esas integrales. Para $n = 1$ estas fórmulas contienen sólo integrales de las funciones iniciales y las propias funciones iniciales.

Por eso, si hacemos variar las funciones iniciales φ_0 y φ_1 de manera que tanto las citadas funciones como sus primeras derivadas varíen suficientemente poco, la función $u(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que da la solución del problema de Cauchy variará también poco. Si $n = 1$, para que lo anterior se cumpla es suficiente que varíen poco las propias funciones φ_0 y φ_1. Aquí se supone, por supuesto, que se consideran solamente valores acotados de t, si la región en la cual se dan las funciones iniciales es infinita.

De ese modo queda establecido que *el problema de Cauchy para las ecuaciones* (1,12), (12,12), (14,12) *está correctamente planteado.*

Se pueden deducir las fórmulas que dan la solución del problema de Cauchy para la ecuación (1,13) siendo n cualquiera, análogas a las fórmulas (4,12), (13,12), (15,12), y comprobar que también para esta ecuación el problema de Cauchy queda correctamente planteado, si damos las condiciones iniciales para $t = 0$.[20] Los números L_1 y L_2 que figuran en la definición del problema correctamente planteado (véase § 8) son iguales respectivamente a $\left[\frac{n}{2}\right] + 2$ y $\left[\frac{n}{2}\right]$; aquí $[x]$ denota la parte entera de x.

De las fórmulas (4,12) y (13,12) se deduce que para t pequeños, $|u(t, x_1, x_2, x_3)|$ y respectivamente $|u(t, x_1, x_2)|$ puede ser muy grande a pesar de que sean pequeñas φ_0 y φ_1, si las derivadas de la función φ_0 son grandes. Puede formarse "crestas" de la onda.

2. *Difusión de ondas*

Las fórmulas (4,12) y (5,12) muestran que el valor en el punto $(t, x_1, \ldots, x_n)$ de la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas (1,13), siendo $n = 3$, depende de los datos iniciales sólo en el contorno de la base del cono característico con vértice en el punto (t, x_1, x_2, x_3). Si $n = 1$ o $n = 2$, $u(t, x_1 \ldots, x_n)$

[20] Estas fórmulas se pueden, por ejemplo, deducir por el método expuesto en el "Curso de matemática superior" de V. I. Smirnov, tomo 2, § 173, Fizmatguiz, 1958.

depende de los datos iniciales en toda la base del cono, como lo muestran las fórmulas (13,12) y (15,12).

Supongamos que los valores iniciales de u y u'_t para $t = 0$ difieren de cero sólo dentro de una pequeña región G_ε, cerca de cierto punto $(0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Analicemos los valores que toma u en los puntos $(t, x_1, \ldots, x_n)$ para $x_1, \ldots, x_n$ fijos, y para crecientes valores de t a partir de cero. Para $n = 3$, $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ puede diferir de cero sólo en una parte pequeña de la recta, considerada en el espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$ y paralela al eje Ot; precisamente en la parte donde están situados los vértices de los conos característicos de la ecuación (1,12), las fronteras de cuyas bases intersectan la región G_ε. Si $n = 1$ o $n = 2$ y el punto $(0, x_1)$, respectivamente, $(0, x_1, x_2)$, no pertenece a G_ε, entonces $u(t, x_1)$ y respectivamente $u(t, x_1, x_2)$ es igual a cero para t suficientemente pequeños, y será, en general, diferente de cero a partir de los valores de t para los cuales el segmento $|x_1 - \alpha_1| \leqslant t$, respectivamente, el círculo $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2) \leqslant t^2$, intersecta la región G_ε.

Por lo tanto, la perturbación ocurrida en el instante inicial en cierto entorno pequeño del punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, para $n = 3$ y $t > 0$, se hace sentir en los valores de la función sólo en los puntos del espacio $(x_1, \ldots, x_n)$ que están situados *cerca* de la esfera de radio t con centro en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. De ese modo la perturbación ocurrida en el instante inicial en el punto (x_1^0, x_2^0, x_3^0) origina una onda esférica con centro en este punto que tiene un frente delantero y uno trasero. En cambio, si $n = 1$ o $n = 2$, la perturbación ocurrida en el instante inicial en la vecindad del punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ se hace sentir en general, *en todos los puntos situados dentro de la esfera* de radio t con centro en $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Y surge una onda que tiene su frontera delantera nítida y la trasera difusa. En este caso se dice que ocurre la difusión de la onda. Para $n = 3$ no hay difusión. Se puede demostrar que no hay difusión de las ondas para las soluciones de la ecuación (1,13) si $n \geqslant 3$ es impar.

Las perturbaciones ocurridas en una pequeña región G_ε de un cuerpo tridimensional sólido elástico, o de un gas, producen ondas que no dejan detrás de sí ninguna "huella", si se supone que sus vibraciones obdecen la ecuación (1,12); en el caso de un gas, $u(t, x_1, x_2, x_3)$ denota, por ejemplo, la desviación de la presión gaseosa respecto a la presión normal, en el punto (x_1, x_2, x_3) y el instante t. En cambio, las perturbaciones en un continuo bidimensional, por ejemplo, una membrana tensa o la superficie del agua, en una pequeña región G_ε, producen ondas que teóricamente dejan siempre detrás de sí "huellas", si se supone que las vibraciones obedecen la ecuación (12,12). En la práctica estas vibraciones se amortiguan rápidamente debido a la fricción, que no se toma en cuenta al deducir la ecuación (12,12). Del mismo modo, en general, queda huella al pasar una onda por un continuo unidimensional (véase el 3 del presente epígrafe).

3. *Estudio de la fórmula de D'Alembert*

Consideremos dos casos especiales que ilustran claramente el comportamiento de la solución de la ecuación (14,12) en el caso general.

Primero consideremos el caso cuando $\varphi_1(x) \equiv 0$ y el gráfico de $\varphi_0(x)$ tiene la forma señalada en la parte superior de la figura 3 (línea gruesa). En lugar de x_1, para abreviar, escribiremos x. Entonces la fórmula de D'Alembert toma la forma

$$u(t, x) = \frac{\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)}{2}.$$

Para obtener el gráfico de $u(t, x)$, considerada como función de x, para cualquier t positivo fijo es cómodo proceder del siguiente modo: dibujar dos gráficos iguales, cada uno de los cuales se obtiene del gráfico de $\varphi_0(x)$ reduciendo en la mitad sus ordenadas (línea de puntos en la parte superior de la figura 3). Después se se mueve uno de estos gráficos en una cantidad t hacia la derecha, en el sentido positivo del eje x, y el otro en t hacia la izquierda. Seguidamente se construye un nuevo gráfico en el cual la ordenada para cada valor de x es igual a la suma de las ordenadas correspondientes al valor de x en cuestión en los dos gráficos trasladados. De este modo han sido construidos en la figura los gráficos

$$u(0, x),\ u\left(\frac{1}{4}, x\right),$$

$$u\left(\frac{1}{2}, x\right),\ u(1, x)$$

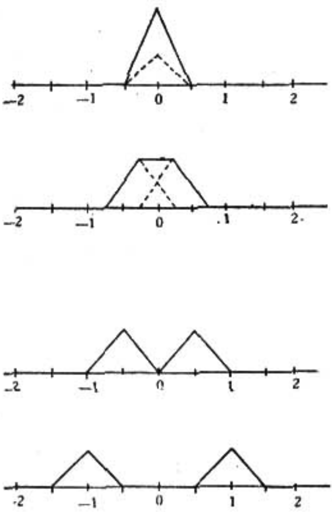

Fig. 3

(las líneas de puntos siempre denotan gráficos auxiliares y la línea gruesa continua los gráficos de $u(t, x)$ para un t fijo).

Consideremos ahora el caso cuando $\varphi_0(x) \equiv 0$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } |x| \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0 \text{ para } |x| > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Entonces la fórmula de D'Alembert toma la forma

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(\alpha)\, d\alpha.$$

Para cada x fijo $u(t, x) = 0$, hasta que el intervalo $(x - t, x + t)$ no abarque el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, donde $\varphi_1(x) \neq 0$; $u(t, x)$ variará mientras el intervalo creciente $(x - t, x + t)$ vaya cubriendo más y más el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Después que el intervalo $(x - t, x + t)$ comprenda dentro de sí el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, el valor de $u(t, x)$ permanecerá igual a

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi_1(\alpha)\, d\alpha.$$

Para obtener el gráfico que representa la forma de la cuerda para distintos t, es preferible proceder del siguiente modo.

Denotemos por $\Phi(z)$ una cierta función primitiva para $\varphi_1(z)$. Entonces

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\Phi(x + t) - \Phi(x - t)].$$

Para obtener el gráfico de $u(t, x)$ tracemos los gráficos de las funciones $\frac{1}{2}\Phi(x)$ y $-\frac{1}{2}\Phi(x)$ y después traslademos cada uno de estos gráficos una distancia t a lo largo del eje Ox; el primero hacia la izquierda y el segundo hacia la derecha. Sumando las ordenadas de los gráficos trasladados obtendremos el gráfico de la función $u(t, x)$.

En la figura 4 se muestra la forma de la cuerda en los instantes $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$.

El fenómeno de la difusión se refleja aquí en que un punto x, cuando sale de su posición de equilibrio, no vuelve más a ésta.

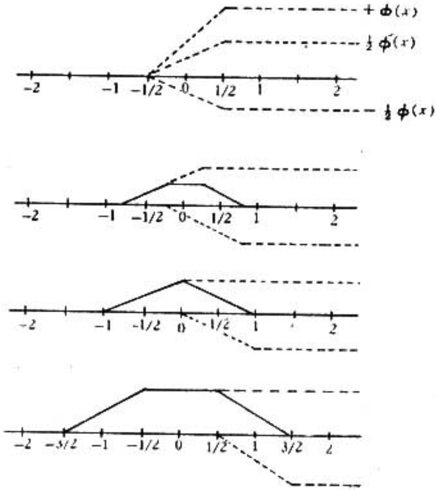

Fig. 4

Las funciones $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ consideradas en los ejemplos anteriores, o bien tienen discontinuidades las propias funciones $(\varphi_1(x))$ o bien las tienen sus derivadas $[\varphi_0(x)]$. Por eso les corresponden soluciones generalizadas de la ecuación (14,12). Para obtener una solución de esta ecuación generalmente dos veces continuamente derivable es suficiente hacer variar un poco los gráficos de las funciones $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ de manera que se obtengan gráficos de funciones con segunda derivada continua. Para la función φ_0 esto se puede hacer de manera que la ordenada de $\varphi_0(x)$ varíe poco en todas partes. Entonces la solución correspondiente de la ecuación (14,12) también variará poco. Al sustituir $\varphi_1(x)$ por una función suave, podemos proceder de manera que $\Phi(x)$ varíe tan poco como se quiera. Entonces $u(t, x)$ también variará poco en todas partes.

§ 14. TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

1. En el § 1 hemos señalado que la expresión $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ es la única, con exactitud hasta un factor constante, combinación lineal de las segundas derivadas que no cambia de forma con la rotación del espacio, es decir, con una transformación ortogonal cualquiera de las coordenadas x_1, x_2, x_3. La ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1,14}$$

también está relacionada muy estrechamente con una cierta clase de transformaciones lineales de las variables (t, x_1, x_2, x_3) con coeficientes reales constantes, que no cambia la forma de esta ecuación. Estudiémosla con más detalle.

Se llama *transformación de Lorentz* de las variables x_0, x_1, x_2, x_3 a toda transformación lineal homogénea de estas variables con coeficientes reales de la forma

$$y_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ij}x_j \ (i = 0, 1, 2, 3), \tag{2,14}$$

que no altera la forma cuadrática

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{3,14}$$

es decir, en las nuevas variables esta forma se escribe así:

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Es fácil comprobar que el conjunto de todas las transformaciones de Lorentz forma un grupo en el que la operación de grupo es la superposición de las transformaciones (sustitución). En particular, es fácil ver que la aplicación sucesiva de dos transformaciones de Lorentz es también una transformación de Lorentz.

Planteemos la fórmula para una clase especial de transformaciones de Lorentz. Consideremos la transformación que no altera dos de las tres últimas coordenadas (espaciales). Esa transformación tiene la forma

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = ax_0 + bx_1, \\ y_1 = cx_0 + dx_1, \\ y_2 = \qquad\qquad\quad x_2, \\ y_3 = \qquad\qquad\qquad\quad x_3. \end{array}\right\} \tag{4,14}$$

Para esta transformación debe cumplirse la identidad

$$y_0^2 - y_1^2 \equiv x_0^2 - x_1^2.$$

Sustituyendo y_0 e y_1 de las fórmulas (4,14), tenemos

$$(ax_0 + bx_1)^2 - (cx_0 + dx_1)^2 \equiv x_0^2 - x_1^2.$$

De aquí

$$\left.\begin{aligned} a^2 - c^2 &= 1, \\ b^2 - d^2 &= -1, \\ ab - cd &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5,14}$$

Estas ecuaciones se satisfacen si ponemos

$$a = d = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b = c = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

donde $|\beta| < 1$.

Entonces obtenemos las fórmulas para una cierta clase de transformaciones de Lorentz

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \frac{x_0 + \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ y_1 &= \frac{\beta x_0 + x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3. \end{aligned}\right\} \tag{6,14}$$

Las fórmulas (6,14) son muy importantes ya que demostraremos ahora que *toda transformación de Lorentz es una combinación de una transformación ortogonal de las variables* x_1, x_2, x_3 *que deja invariante* x_0, *de una transformación de la forma* (6,14) *y de un cambio de signo de cualquiera de las variables (reflexión).*

Supongamos que la transformación de Lorentz está dada por la fórmula.

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3, \\ y_1 &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{7,14}$$

Si al menos uno de los números a_{01}, a_{02}, a_{03} es distinto de cero, realizamos una transformación ortogonal de x_1, x_2, x_3 a x'_1, x'_2, x'_3 de manera que se cumpla la igualdad

$$a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 = ax'_1.$$

Si, además, hacemos x'_0 igual a x_0, tendremos evidentemente que esta transformación de x_0, x_1, x_2, x_3 en x'_0, x'_1 x'_2, x'_3 es una transformación de Lorentz. Sustituyendo en el miembro derecho de (7,14) las variables x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 obtendremos

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= a_{00}x'_0 + ax'_1, \\ y_1 &= a_{10}x'_0 + b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3, \\ y_2 &= a_{20}x'_0 + b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3, \\ y_3 &= a_{30}x'_0 + b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3. \end{aligned}\right\} \tag{8,14}$$

Demostremos que $a^2 < a_{00}^2$. En efecto, como que (8,14) es una transformación de Lorentz,

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = x'^2_0 - x'^2_1 - x'^2_2 - x'^2_3,$$

de donde

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 - x'^2_0 + y_0^2. \tag{9,14}$$

Hagamos $y_0 = 0$. Entonces $x'_0 = -\frac{a}{a_{00}}\, x'_1$ y la identidad (9,14) se reduce a una identidad respecto a tres variables

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \left(1 - \frac{a^2}{a_{00}^2}\right) x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

El miembro derecho es positivo para x'_1, x'_2, x'_3 cualesquiera siempre que $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 > 0$, ya que de $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ se deduce que $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Por eso debe cumplirse

$$1 - \frac{a^2}{a_{00}^2} > 0,$$

es decir, $a^2 < a_{00}^2$.

Hagamos $\frac{a}{a_{00}} = \beta$ y realicemos la transformación de Lorentz del tipo (6,14)

$$\left.\begin{aligned} x''_0 &= \frac{x'_0 + \beta x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ x''_1 &= \frac{\beta x'_0 + x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ x''_2 &= x'_2, \\ x''_3 &= x'_3. \end{aligned}\right\} \tag{10,14}$$

Es evidente que y_0, y_1, y_2, y_3 están relacionadas con x''_0, x''_1, x''_2, x''_3 mediante una transformación de Lorentz de la forma

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= c x''_0, \\ y_1 &= c_{10} x''_0 + c_{11} x''_1 + c_{12} x''_2 + c_{13} x''_3, \\ y_2 &= c_{20} x''_0 + c_{21} x''_1 + c_{22} x''_2 + c_{23} x''_3, \\ y_3 &= c_{30} x''_0 + c_{31} x''_1 + c_{32} x''_2 + c_{33} x''_3, \end{aligned}\right\} \tag{11,14}$$

donde, como es fácil calcular, $c = \pm\sqrt{a_{00}^2 - a^2}$.

Si $a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0$, el sistema (7,14) tiene ya la forma (11,14).

Hallemos los valores de los coeficientes c, c_{10}, c_{20}, c_{30}.

Haciendo $x''_0 = 1$, $x''_1 = x''_2 = x''_3 = 0$, obtendremos

$$y_0 = c, \quad y_1 = c_{10}, \quad y_2 = c_{20}, \quad y_3 = c_{30}.$$

De aquí $1 = c^2 - c^2_{10} - c^2_{20} - c^2_{30}$ y $c^2 \geqslant 1$.

Haciendo $y_0 = 1$, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, hallamos que $x''_0 = \dfrac{1}{c}$ y x''_1, x''_2, x''_3 tienen ciertos valores determinados $\widetilde{x}''_1$, $\widetilde{x}''_2$, $\widetilde{x}''_3$. De aquí

$$1 = \frac{1}{c^2} - \widetilde{x}''^2_1 - \widetilde{x}''^2_2 - \widetilde{x}''^2_3 \text{ y } \frac{1}{c^2} \geqslant 1,$$

es decir, $c^2 \leqslant 1$.

Por lo tanto, $c^2 = 1$ y volviendo a la igualdad

$$1 = c^2 - c^2_{10} - c^2_{20} - c^2_{30},$$

vemos que $c_{10} = c_{20} = c_{30} = 0$. Por lo tanto, la transformación (11,14) tiene en realidad la forma

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \pm x''_0, \\ y_1 &= \qquad c_{11}x''_1 + c_{12}x''_2 + c_{13}x''_3, \\ y_2 &= \qquad c_{21}x''_1 + c_{22}x''_2 + c_{23}x''_3, \\ y_3 &= \qquad c_{31}x''_1 + c_{32}x''_2 + c_{33}x''_3. \end{aligned}\right\} \qquad (12,14)$$

Cambiando, si es necesario, el signo de la coordenada x''_0 obtendremos una transformación de Lorentz que es simplemente una transformación ortogonal de las variables x''_1, x''_2, x''_3 a y_1, y_2, y_3.

Vemos de ese modo que la transformación de Lorentz más general (7,14) que transforma las variables x_i en y_i es el resultado de las siguientes transformaciones sucesivas: una ortogonal que transforma x_i en x'_i; una transformación de Lorentz de tipo especial (6,14) que transforma x'_i en x''_i; eventualmente un cambio de signo de x''_0 y, finalmente una transformación ortogonal de x''_i en y_i, $i = 1, 2, 3$.

Si trasponemos la matriz de cada una de estas transformaciones intermedias, obtendremos de nuevo la matriz de una transformación del mismo tipo. De aquí se desprende que *la traspuesta de una matriz de una transformación de Lorentz es una matriz de una transformación de Lorentz.* De la definición de transformación de Lorentz se deduce también que la transformación inversa a la de Lorentz es también de Lorentz.

2. Demostremos ahora el resultado fundamental que aclara la estrecha relación de las transformaciones de Lorentz con la ecuación de ondas.

Teorema. Toda transformación lineal no degenerada de las variables t, x_1, x_2, x_3 con coeficientes reales, que no altera la forma de la ecuación (1,14), *es la combinación de una transformación de Lorentz, de una traslación del origen de coordenadas en el espacio (t, x_1, x_2, x_3) y de una transformación de semejanza en este espacio.*

Para abreviar, hagamos $t = x_0$.

La frase "una transformación que no altera la forma de una ecuación" la entendemos del siguiente modo: cualquier función $u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ (con segundas derivadas continuas) que satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0;$$

después de la transformación de x_i en y_i se transforma en la función $u(y_0, y_1, y_2, y_3)$ que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} = 0. \qquad (13,14)$$

De aquí se deduce que cualquiera que sea la transformación de este tipo que se aplique a una función arbitraria $u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ se cumple la igualdad

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right), \qquad (14,14)$$

donde $k \neq 0$ es una cierta constante. En efecto, en el caso general tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} = \sum_{i,j=0}^{3} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (15,14)$$

y si suponemos que

$$\sum_{i,j=0}^{3} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \neq k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right),$$

llegaremos a una contradicción con el hecho de que toda solución de la ecuación (1,14) se transforma al cambiar las variables en una solución de esa misma ecuación. En efecto, en este caso se puede escoger un sistema de números $u^0_{ik} = u^0_{ki}$ que verifiquen las dos ecuaciones lineales

$$\sum_{i,j=0}^{3} A_{ij} u^0_{ij} = 1, \tag{16,14)$_1$}$$

$$u^0_{00} - u^0_{11} - u^0_{22} - u^0_{33} = 0. \tag{16,14)$_2$}$$

Para la función $u(x_0, x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i,j=0}^{3} u^0_{ij}\, x_i x_j$ se cumplen las igualdades

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u^0_{ij}.$$

En virtud de (16,14), esta función satisface la ecuación (1,14) y, sin embargo, después de una transformación de las variables no satisface la ecuación (13,14) como se desprende de $(16,14)_1$ y (15,14). Por lo tanto se verifica (14,14).

Realicemos la transformación de semejanza

$$x'_i = x_i \frac{1}{\sqrt{|k|}} \quad (i = 0, 1, 2, 3);$$

entonces

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) =$$

$$= \pm \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3'^2}\right).$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que la transformación

$$y_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ij} x'_j \qquad (i = 0, \ldots, 3), \tag{17,14}$$

que no varía el módulo de la expresión diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_0} - \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_3}, \tag{18,14}$$

es una transformación de Lorentz, es decir, no altera la forma cuadrática

$$x'^2_0 - x'^2_1 - x'^2_2 - x'^2_3. \tag{19,14}$$

Pero esto se desprende del resultado demostrado en el § 5, según el cual para una transformación lineal de las variables independientes de la forma (17,14), la expresión

$$\sum_{i,j=0}^{3} c_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x'_i \partial x'_j}$$

se transforma igual que la forma cuadrática de estas variables

$$\sum_{i,j=0}^{3} c_{ij} x'_i x'_j,$$

al aplicarle la transformación

$$x'_j = \sum_{i=0}^{3} a_{ij} y_i \qquad (j = 0, \ldots, 3). \tag{20,14}$$

Como que la transformación (17,14), con exactitud que incluye el signo, no cambia la forma de la expresión (18,14), la transformación (20,14), con la misma exactitud, no cambia lá forma cuadrática (19,14). Pero en virtud de la ley de inercia tampoco el signo de (19,14) varía para ninguna transformación lineal con coeficientes reales, y es por eso que la transformación (20,14) y su inversa son transformaciones de Lorentz. De acuerdo con lo establecido en el subepígrafe 1, la transformación inicial (17,14) es una transformación de Lorentz, ya que su matriz es traspuesta de la matriz de la transformación de Lorentz (20,14).

Por lo tanto, toda transformación lineal homogénea que no cambie la forma de la ecuación (1,14) es combinación lineal de una transformación de semejanza y una transformación de Lorentz. Por último, es evidente que un traslado del origen de coordenadas tampoco altera la forma de esta ecuación, es decir, el teorema queda demostrado completamente.

3. Mediante una transformación ortogonal de las variables x_1, x_2, x_3 podemos transformar cualquier hiperplano que pase por el origen de coordenadas en el espacio t, x_1, x_2, x_3 y que forme con Ot un ángulo mayor de 45° (y solamente hiperplanos de este tipo) en el hiperplano

$$t = \beta x_1, \text{ donde } |\beta| < 1,\text{[30]}$$

[30] Supongamos que la ecuación de ese hiperplano está dada en la forma $At + Bx_1 + Cx_2 + Dx_3 = 0$, donde $B^2 + C^2 + D^2 = 1$. Entonces el coseno del ángulo α_0 entre la normal al hiperplano y el eje Ot es igual a $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+1}}$ y la tangente de este ángulo es igual a $\dfrac{1}{A}$. Si la normal al hiper-

y una transformación de Lorentz (6,14) permite transformar ese hiperplano en el hiperplano coordenado $t^* = 0$. Por lo tanto, siempre podemos transformar cualquier hiperplano en el espacio (t, x_1, x_2, x_3) que forma con el eje Ot un ángulo mayor de 45° en el hiperplano $t = 0$ mediante una transformación lineal de las variables que no altere la forma de la ecuación (1,14). Esto permite resolver el problema de Cauchy para la ecuación (1,14), cuando las condiciones iniciales vienen dadas no en el hiperplano $t = 0$ sino en cualquier hiperplano Π que forme con el eje Ot un ángulo mayor de 45° o, lo que es lo mismo, en cualquier hiperplano Π que corte cada uno de los conos característicos de la ecuación (1,14) por una de sus hojas o solamente en el vértice. En efecto, al dar en una región cualquiera G_0 situada sobre Π una función u y su derivada en cualquier dirección que parta del plano Π, damos en la región G_0 las primeras derivadas de u en cualquier dirección del espacio (t, x_1, x_2, x_3), ya que conocer la función u en la región G_0 nos permite conocer en esta región sus primeras derivadas en todas las direcciones situadas en G_0. Pero transformando el hiperplano Π en el hiperplano $t^* = 0$, reducimos la solución del problema de Cauchy dadas las condiciones iniciales en Π al problema de Cauchy considerado en el § 12.

---

plano forma con el eje Ot un ángulo menor de 45°, entonces la transformación

$$Bx_1 + Cx_2 + Dx_3 = x'_1$$

para x'_2 y x'_3 escogidos convenientemente (a partir de las condiciones de ortogonalidad de la transformación) convierte el hiperplano dado en uno de la forma

$$At + x'_1 = 0\ ;\quad t = -\frac{1}{A}\,x'_1\,,\ \text{donde}\ \left|\frac{1}{A}\right| < 1.$$

Por otro lado, es fácil demostrar que el problema de Cauchy para la ecuación (1,14) no estará correctamente planteado si se dan las condiciones iniciales en un hiperplano Π que forme con el eje Ot, en el espacio $t, x_1 \ldots, x_n$, un ángulo que no exceda los 45°.

En efecto, si un hiperplano Π forma con Ot un ángulo de 45°, tiene dirección característica y por eso no se pueden dar, arbitrariamente, las condiciones de Cauchy, incluso exigiendo de las mismas un mayor grado de derivabilidad en Π.

Consideremos ahora el caso cuando Π forma con Ot un ángulo menor de 45°. Mediante una transformación ortogonal y una traslación paralela en el espacio (x_1, x_2, x_3), siempre se puede lograr que el hiperplano Π tenga la ecuación

$$\beta t' + x_1' = 0, \text{ donde } |\beta| < 1.$$

Además, con esta transformación no se altera la forma de la ecuación (1,14), como ya se ha señalado. Utilizando ahora la transformación de Lorentz se puede conseguir que al hiperplano Π corresponda la ecuación

$$x_1^* = 0,$$

sin alterar la ecuación (1,14).

Consideremos en el hiperplano $x_1^* = 0$ las siguientes condiciones de Cauchy:

$$\left.\begin{aligned} u(t^*, 0, x_2^*, x_3^*) &= \varphi_0(x_2^*), \\ u'^*_{x_1}(t^*, 0, x_2^*, x_3^*) &= \varphi_1(x_2^*). \end{aligned}\right\} \qquad (21,14)$$

Si hallamos una solución $u(x_1^*, x_2^*)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{*2}} = 0,$$

que satisfaga las condiciones

$$\left.\begin{aligned} u(0, x_2^*) &= \varphi_0(x_2^*), \\ u'^*_{x_1}(0, x_2^*) &= \varphi_1(x_2^*), \end{aligned}\right\} \qquad (22,14)$$

la función $u(x_1^*, x_2^*)$ satisfará la ecuación (1,14) y las condiciones (21,14). Si tomamos en vez de las condiciones iniciales (22,14) las condiciones $(2,8)_1$, $(2,8)_2$, que fueron utilizadas en el ejemplo construido por Hadamard, se demuestra fácilmente que el problema de Cauchy para la ecuación (1,14) con las condiciones iniciales en el hiperplano $x_1 = 0$ no está correctamente planteado.

§ 15. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

El principio especial de la relatividad consiste en que en todos los sistemas inerciales de referencia[31] todas las leyes de la naturaleza tienen una misma forma. Más exactamente, en todos los sistemas de referencia, todas las leyes de la naturaleza pueden ser planteadas mediante las mismas ecuaciones. En particular, en todos los sistemas de referencia la velocidad de la luz es la

---

[31] Se llama sistema de referencia a las coordenadas espaciales que sirven para indicar el lugar y al reloj que sirve para indicar el tiempo.

misma y no depende de la dirección en que se propaga. Para abreviar las denotaciones, supondremos que es igual a 1.

Un sistema de referencia se llama inercial, si en este sistema todo cuerpo se mueve lineal y uniformemente siempre que no actúen sobre él fuerzas exteriores. De esta definición se deduce que un sistema de referencia que se mueva uniforme y linealmente respecto a un sistema de referencia inercial, también es inercial y, viceversa, dos sistemas inerciales cualesquiera se mueven el uno *respecto al otro lineal y uniformemente.*

Nuestro objetivo es encontrar la relación entre las coordenadas espacio-tiempo para dos sistemas inerciales de referencia A' y A'', cuando el sistema A'' se mueve uniforme y linealmente respecto al otro sistema de referencia A' con una velocidad β cuyo valor absoluto es menor que 1.

Puesto que el espacio y el tiempo se suponen homogéneos e isotrópicos, aceptaremos que la relación buscada es lineal y que sus coeficientes dependen sólo de β. Las coordenadas espacio-tiempo de A' las designaremos por (t', x'_1, x'_2, x'_3) y de A'' por $(t'', x''_1, x''_2, x''_3)$. A veces para abreviar escribiremos x'_0 en lugar de t' y x''_0 en lugar de t''.

Sea pues

$$x''_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ij}(\beta)\, x'_j + \alpha_j \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{1,15}$$

La búsqueda de la relación entre las coordenadas (t, x'_1, x'_2, x'_3) y $(t'', x''_1, x''_2, x''_3)$ se basará exclusivamente en que la velocidad de la luz en los sistemas de referencia A' y A'' es constante.

La propagación rectilínea de una onda luminosa plana en el espacio (x'_1, x'_2, x'_3) la describimos mediante una función no constante

$$f(a_0t' + a_1x'_1 + a_2x'_2 + a_3x'_3), \tag{2,15}$$

cuyas superficies de nivel se desplazan perpendicularmente al plano $a_1x'_1 + a_2x'_2 + a_3x'_3 =$ const. con velocidad

$$-\frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

que según la suposición es igual a 1; a_0, a_1, a_2, a_3 son ciertas constantes. De aquí se desprende que

$$a_0^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \tag{3,15}$$

Como la velocidad de la luz en el sistema de referencia A'' de coordenadas t'', x''_1, x''_2, x''_3 también debe ser igual a 1 encontramos, pasando de las coordenadas x'_i a las coordenadas x''_i, que la expresión $a_0t' + a_1x'_1 + a_2x'_2 + a_3x'_3$ se transforma en $a'_0t'' + a'_1x''_1 + a'_2x''_2 + a'_3x''_3 + b$ y

$$a'^2_0 = a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3. \tag{4,15}$$

Demostremos que las coordenadas t'', x''_1, x''_2, x''_3 se obtienen de t', x'_1, x'_2, x'_3 mediante una transformación de Lorentz y un traslado del origen de coordenadas. Mediante un traslado del origen podemos sustituir las coordenadas t'', x''_1, x''_2, x''_3 por las coordenadas t, x_1, x_2, x_3 que están relacionadas con t', x'_1, x'_2, x'_3 mediante las ecuaciones lineales homogéneas

$$x_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ij}(\beta)\, x'_j \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{5,15}$$

Supongamos ahora que la función $f(a_0 x'_0 + a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3)$ se transforma en la función $f(a'_0 x_0 + a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3)$. Si los *números* a_0, a_1, a_2, a_3 satisfacen la relación $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0$, los a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 satisfacen la relación análoga $a'^2_0 - a'^2_1 - a'^2_2 - a'^2_3 = 0$. Aquí (a_0, a_1, a_2, a_3) es un sistema *arbitrario* de números que satisface la ecuación (3,15) y a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 es el sistema correspondiente de números después de la transformación (5,15). Vamos a demostrar que de aquí se desprende que (5,15) da la transformación de Lorentz para los coeficientes a_i, es decir,

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = a'^2_0 - a'^2_1 - a'^2_2 - a'^2_3.$$

En efecto, si las variables a_i se transforman mediante la sustitución (5,15), en general se cumple la fórmula

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \equiv \sum_{i,j=0}^{3} k_{ij}(\beta)\, a'_i\, a'_j. \tag{6,15}$$

Demostremos primero que

$$\sum_{i,j=0}^{3} k_{ij}(\beta) a'_i\, a'_j \equiv k(\beta)(a'^2_0 - a'^2_1 - a'^2_2 - a'^2_3). \tag{7,15}$$

En efecto, de

$$\sum_{i,j=0}^{3} k_{ij}(\beta) a'_i\, a'_j = 0 \tag{8,15}$$

debe desprenderse que

$$a'^2_0 - a'^2_1 - a'^2_2 - a'^2_3 = 0 \tag{9,15}$$

y viceversa, es decir, las superficies en el espacio de 4 dimensiones (a'_0, a'_1, a'_2, a'_3) definidas por las ecuaciones (8,15) y (9,15) deben coincidir entre sí. Es fácil demostrar en este caso que se cumple la fórmula (7,15). Por lo tanto,

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = k(\beta)(a'^2_0 - a'^2_1 - a'^2_2 - a'^2_3).$$

Si consideramos el movimiento del primer sistema respecto al segundo, de velocidad $-\beta$, obtendremos análogamente

$$a'^2_0 - a'^2_1 - a'^2_2 - a'^2_3 = k(-\beta)(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2),$$

de donde

$$k(\beta) \,.\, k(-\beta) = 1.$$

Pero, por otro lado, puesto que los sistemas son equivalentes, $k(\beta) = k(-\beta)$ y, por consiguiente, $k(\beta) = \pm 1$.

Al realizar la transformación (5,15) sobre las variables x'_i, las variables a_i también se someten a una transformación lineal; por eso el número de signos más y menos que tiene la forma cuadrática de a_i no puede variar. De modo que $k(\beta) = 1$ y la forma $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$ no deben variar con la transformación (5,15) Por lo tanto, esta transformación de las variables a_i es una transformación de Lorentz. La transformación lineal de las variables a_i correspondiente a la transformación (5,15) de las x_i se da por una matriz inversa y traspuesta de la matriz (5,15). Entonces la propia transformación (5,15) es una transformación de Lorentz (véase el final del 1 del § 14), que es lo que se quería demostrar.

§ 16. RESEÑA DE LOS RESULTADOS PRINCIPALES DE LA TEORÍA DEL PROBLEMA DE CAUCHY Y ALGUNAS INVESTIGACIONES DE LAS ECUACIONES HIPERBÓLICAS GENERALES

Hasta ahora hemos tratado del problema de Cauchy para la ecuación de ondas (1,12). En este epígrafe, sin realizar las demostraciones correspondientes, daremos una reseña breve de los resultados principales de la teoría del problema de Cauchy para ecuaciones hiperbólicas generales. Concentremos nuestra atención principalmente en ecuaciones lineales de segundo orden.

1. La ecuación lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_{0i} \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + B_0 \frac{\partial u}{\partial t} + Cu + D, \quad (1,16)$$

donde los coeficientes A_{ij}, A_{0i}, B_i, B_0, C y D son funciones de $t, x_1, \ldots, x_n$ se llama *t-hiperbólica* en una región G del espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$ si se cumple la siguiente condición. Cada recta que pase por el origen de coordenadas en el espacio real $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ debe intersectar la superficie

$$1 = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n)\, \alpha_i \alpha_j + \sum_{i=1}^{n} A_{0i}(t, x_1, \ldots, x_n)\, \alpha_i \quad (2,16)$$

en dos puntos reales distintos. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ satisfacen la ecuación (2,16), la dirección del hiperplano, cuya normal es paralela al vector $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, es característica (véase § 3) en el espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Llamemos cono característico de la ecuación (1,16) en el *punto* $(t^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ a una superficie K con un punto singular cónico en $t = t^0$, $x_i = x_i^0$ cuyo hiperplano tangente tiene dirección característica en cada punto de K.

Si

$$F(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

es la ecuación de la superficie del cono característico (en general de cualquier superficie característica (véase § 3)), la función F debe satisfacer la ecuación

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_{0i} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Para cada punto $(t^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de la región G, donde la ecuación (1,16) es t-hiperbólica, se tiene un cono característico único situado en esta región y con vértice en el citado punto, que intersecta cada hiperplano $t =$ const. formando una superficie cerrada S, siempre que $|t - t^0|$ sea suficientemente pequeño. Este cono, conjuntamente con la parte del hiperplano $t =$ const. limitada por la superficie S, limita una cierta región K'.

Si $n = 1$ el cono característico degenera en 2 líneas l_1 y l_2 que parten del punto (t^0, x_1^0) y la base de este cono degenera en segmento de la recta $t =$ const. contenido entre los puntos de intersección de esta recta con las líneas l_1 y l_2.

2. Existe un número L dependiente de n tal que para todas las funciones $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$ y $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$ dadas en una región G_0 del hiperplano $t = t_0$, en el cual estas funciones tienen L derivadas continuas, existe una solución única continua, al igual que todas sus derivadas hasta el segundo orden inclusive, de la ecuación t-hiperbólica (1,16) que satisface las condiciones

$$\left.\begin{aligned} u(t_0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \\ u'_t(t_0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \tag{3,16}$$

Esta solución queda determinada de modo único por las condiciones (3,16) en todo punto $(t, x_1, \ldots, x_n)$, si la base del cono característico con vértice en este punto está completamente contenida en la región G_0. Designemos por G el conjunto de todos los puntos $(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Si las funciones $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$ y $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$ al igual que sus derivadas hasta el orden L varían suficientemente poco, *la solución correspondiente del problema de Cauchy también varía* poco en toda la región G. Por lo tanto, el problema de Cauchy para la ecuación (1,16) está correctamente planteado.

Para ecuaciones hiperbólicas lineales con coeficientes constantes que contienen solamente miembros con segundas derivadas, $L = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$; S. L. Soboliev demostró que para ecuaciones lineales generales de segundo orden $L \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 3$; se acepta que los coeficientes de la ecuación satisfacen ciertas condiciones de derivabilidad que de antemano se cumplen si todos los coeficientes de la ecuación tienen derivadas continuas hasta el orden $\left[\frac{n}{2}\right] + 2$ inclusive.[32]

3. Diremos que para la ecuación (1,16) no hay difusión de ondas en la región considerada G del espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$, si el valor de la solución u del problema de Cauchy en el vértice $(t, x_1, \ldots, x_n)$ del cono característico depende sólo de los valores que toman $\varphi_0 (x_1, \ldots, x_n)$ y $\varphi_1 (x_1, \ldots, x_n)$ y sus derivadas en la frontera de la base de este cono, cualquiera que sea la posición del cono característico dentro de la región G. En el caso contrario diremos que hay difusión de ondas. Hadamard[33] demostró que para n par y para $n = 1$ siempre se tiene difusión de ondas. Matisson[34] en 1939 investigó el caso $n = 3$. Encontró que para $n = 3$ todas las ecuaciones hiperbólicas que no tienen difusión de ondas son iguales a la ecuación (1,13), salvo en ciertas transformaciones no esenciales; todas estas ecuaciones se obtienen de la ecuación (1,13) mediante las siguientes transformaciones sencillas:

a) sustitución de las variables independientes,

b) sustitución lineal de la función u,

c) multiplicación de ambos miembros de la ecuación por una función de $t, x_1, \ldots, x_n$.

---

[32] S. L. Soboliev. Algunas aplicaciones del análisis funcional a la física matemática, L., 1950; colección matem. 1 (43) : 1 (1936), 39 - 72.

[33] Hadamard, Le probléme de Cauchy, París, 1932, 209 - 241.

[34] Matisson, Acta Mathematica 71, N° 3 - 4, (1939), 249.

Recientemente se ha demostrado que para cualquier $n \geqslant 5$ e impar existen ecuaciones hiperbólicas que no tienen difusión de ondas y que no se reducen a la ecuación (1,13) mediante transformaciones del tipo señalado.[35]

4. En este epígrafe hemos considerado hasta ahora sólo el caso cuando las condiciones de Cauchy se dan sobre un hiperplano $t =$ const. El caso cuando las condiciones de Cauchy se dan sobre cualquier superficie se reduce a este caso especial mediante una *sustitución de las variables independientes, siempre que los conos* característicos con vértices suficientemente próximos a esta superficie la intersecten según superficies cerradas de $(n - 1)$ dimensiones.

5. La ecuación no lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(t, x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial t \, \partial x_j}, \ldots \right) \qquad (4,16)$$

se llama, en una región G del espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$, *t-hiperbólica* cerca de cierta función $u_0(t, x_1, \ldots, x_n)$, dada en la región G, si en esta región es t-hiperbólica la ecuación lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \geqslant i}}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_{0j} \frac{\partial^2 u}{\partial t \, \partial x_j}; \qquad (5,16)$$

[35] Stellmacher, Math. Annalen 130 : 3 (1955), 219 - 233.

donde A_{ij} son las derivadas parciales del miembro derecho de la ecuación (4,16) respecto a $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ calculadas para

$$u \equiv u_0(t, x_1, \ldots, x_n)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, n; \; x_0 = t).$$

Para la ecuación no lineal (4,16) el problema de Cauchy está correctamente planteado si para $t = t_0$ las condiciones dadas

$$u(t_0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_0(x_1, \ldots, x_n),$$
$$u'_t(t_0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n),$$

son tales que la ecuación (5,16) será t-hiperbólica cerca de la función $u_0(t, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_0(x_1, \ldots, x_n) + (t - t_0)\, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$. S. L. Soboliev demostró[36] que para una ecuación no lineal hiperbólica $L \leqslant \left[\dfrac{n}{2}\right] + 4$, suponiéndose que la función F que figura en el miembro derecho de la ecuación (4,16) tiene derivadas continuas respecto a todos los argumentos hasta el orden $\left[\dfrac{n}{2}\right] + 3$.

6. El sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant n_j} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)}(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} =$$
$$= f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

---

[36] S. L. Soboliev, Actas de la AC de la URSS, Nº 2 - 3 (1938), 79 - 83; Algunas aplicaciones del análisis funcional a la física matemática, L., 1950.

se llama *t-hiperbólico* en el punto $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ si para cualesquiera valores reales α_i, la suma de cuyos cuadrados es positiva, el determinante

$$\left| \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0k_1\ldots k_n)}(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\, \lambda^{k_0}\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} \right|$$

tiene sólo raíces reales y distintas de λ. Análogamente se define un sistema no lineal t-hiperbólico cerca de una cualquiera de sus soluciones.

Se ha demostrado que para los sistemas hiperbólicos el problema de Cauchy está correctamente planteado.[37]

Para las ecuaciones con coeficientes constantes la definición de hiperbolicidad fue generalizada por Gårding del siguiente modo. Una ecuación

$$\sum_{0\leqslant k_0+k_1+\ldots+k_n\leqslant m} a_{k_0k_1\ldots k_n} \frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} = 0$$

se llama hiperbólica respecto a la dirección $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, en la cual las ξ_i son reales y $\sum_{i=0}^{n} \xi_i^2 > 0$, si

$$\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=m} a_{k_0k_1\ldots k_n}\, \xi_0^{k_0}\xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n} \neq 0$$

---

[37] I. G. Petrovski, Colección mat. 2 (44) (1937), 815 – 870. Véase también Leray, Hyperbolic differential equations, Princeton, 1953; L. Gårding, Matemática (traducciones), Literatura extranjera, 2 : 1 (1958), 81 – 95.

y si existe un número real λ^* tal que

$$\sum_{0 \leqslant k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant m} a_{k_0 k_1 \ldots k_n} (\lambda\xi_0 + i\alpha_0)^{k_0} (\lambda\xi_1 + i\alpha_1)^{k_1} \ldots \ldots (\lambda\xi_n + i\alpha_n)^{k_n} \neq 0$$

para $\lambda > \lambda^*$ y α_i reales cualesquiera. Se ha demostrado que de todas las ecuaciones lineales con coeficientes constantes sólo para las ecuaciones hiperbólicas en el sentido señalado más arriba el problema de Cauchy está correctamente planteado, siempre que las funciones iniciales arbitrarias sean suficientemente suaves y estén dadas en el hiperplano

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n = 0.$$ [38]

En el estudio de las ecuaciones con coeficientes constantes desempeñan un papel importante las transformaciones de Fourier. Mediante las transformaciones de Fourier se ha estudiado el planteamiento correcto del problema de Cauchy para sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes (o dependientes de t) y se han encontrado algunos propiedades cualitativas de las soluciones de estos sistemas.[39]

---

[38] Gårding, Acta Mathematica, 85, No. 1 – 2 (1951), 1 — 62. Véase también I. M. Gelfand y G. E. Shilov, Funciones generalizadas, fascículo 3, Fizmatguiz, 1958 (capítulo 3).

[39] I. G. Petrovski, Boletín de la Universidad de Moscú, sección A, 1, fascículo 7, (1938); I. M. Gelfand y G. E. Shilov, Funciones generalizadas, fascículo 3, Fizmatguiz, 1958 (capítulo 3).

7. Para una ecuación t-hiperbólica con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k_0+k_1+\cdots+k_n=m} a_{k_0,k_1,\ldots,k_n} \frac{\partial^m u}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} = 0 \qquad (6{,}16)$$

han sido obtenidas fórmulas que dan la solución del problema de Cauchy dadas las condiciones iniciales en el hiperplano $t = 0$.[40]

Para las ecuaciones de la forma (6,16) ha sido estudiado el problema de la difusión de ondas que ya hemos considerado para la ecuación de ondas. La superficie lateral del cono característico de la ecuación (6,16) con vértice en el punto $(t^*, x_1^*, \ldots, x_n^*)$ divide, en general, la base del cono, situada en el hiperplano $t = 0$, en varias regiones. Llamaremos *lacuna* a una de esas regiones, si para variaciones cualesquiera de las condiciones iniciales (con tal que permanezcan suficientemente suaves) sólo dentro de esta región la solución del problema de Cauchy para la ecuación (6,16) no varía en el punto $(t^*, x_1^*, \ldots, x_n^*)$. Si la lacuna contiene la proyección del vértice del cono característico sobre el hiperplano $t = 0$, para la ecuación (6,16) no hay difusión de ondas. La existencia de lacunas para la ecuación (6,16) depende de las propiedades geométricas (topológicas) de la superficie

$$\sum_{k_0+k_1+\cdots+k_n=m} a_{k_0,k_1,\ldots,k_n} \lambda^{k_0} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} = 0$$

[40] Herglotz, Berichte der Sächsischen Akademie 78 (1926), 93 – 126, 287 – 318; 80 (1928), 69 – 114. I. G. Petrovski, Colección mat. 17 (59) : 3 (1945), 289 – 370. I. M. Gelfand y Z. Y. Shapiro, Logros de las ciencias matemáticas 10 : 3 (1955), 3 – 70.

para $\lambda = 1$ en el espacio complejo $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Se han encontrado las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de lacunas.

El problema de la difusión de ondas y de las lacunas ha sido considerado también para sistemas t-hiperbólicos generales.[41]

8. Expongamos el siguiente método aproximado de solución del problema de Cauchy (método de las diferencias finitas) para la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7,16}$$

con las condiciones iniciales

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad u'_t(0, x, y) = \psi(x, y).$$

Supongamos que las funciones iniciales $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ tienen derivadas continuas hasta el cuarto orden inclusive y que están definidas en un cuadrado G:

$$a < x < b; \quad c < y < d.$$

Tracemos tres familias de planos paralelos en el espacio (t, x, y):

$$t = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad x = m\delta, \quad y = n\delta.$$

Aquí Δ y δ son ciertos números positivos. Los números m y n recorren ciertos valores enteros sucesivos tales que siempre

$$a < m\delta < b \text{ y } c < n\delta < d.$$

[41] I. G. Petrovski, Noticias de la AC de la URSS, serie de mat. 8 (1944), 101 - 106; Colección mat. 17 (59) : 3 (1945), 289 - 370.

Para simplificar la exposición supongamos que

$$a = m_1\delta, \ \ b = m_2\delta, \ \ c = n_1\delta, \ \ d = n_2\delta.$$

Sustituyamos en la ecuación (7,16) u''_{tt} $(k\Delta, m\delta, n\delta)$ por

$$\frac{u[(k-1)\Delta, m\delta, n\delta] + u[(k+1)\Delta, m\delta, n\delta] - 2u(k\Delta, m\delta, n\delta)}{\Delta^2},$$

u''_{xx} $(k\Delta, m\delta, n\delta)$ por

$$\frac{u[k\Delta, (m+1)\delta, n\delta] + u[k\Delta, (m-1)\delta, n\delta] - 2u(k\Delta, m\delta, n\delta)}{\delta^2},$$

y u''_{yy} $(k\Delta, m\delta, n\delta)$ por

$$\frac{u[k\Delta, m\delta, (n+1)\delta] + u[k\Delta, m\delta, (n-1)\delta] - 2u(k\Delta, m\delta, n\delta)}{\delta^2}.$$

Es fácil comprobar que si u (t, x, y) tiene derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive, para Δ y δ suficientemente pequeños los errores que implica esa sustitución son pequeños. Después de la sustitución la ecuación diferencial (7,16) se convierte en una ecuación en diferencias que denotaremos por (k, m, n). Dándole a (k, m, n) distintos valores admisibles, obtendremos un sistema de ecuaciones en diferencias. La solución de este sistema la designaremos por $\bar{u}$.

De acuerdo con las condiciones iniciales planteamos

$$\bar{u}(0, m\delta, n\delta) = \varphi(m\delta, n\delta),$$

$$\frac{\bar{u}(\Delta, m\delta, n\delta) - \bar{u}(0, m\delta, n\delta)}{\Delta} = \psi(m\delta, n\delta).$$

Entonces las condiciones iniciales determinarán $\bar{u}(0, m\delta, n\delta)$ y $\bar{u}(\Delta, m\delta, n\delta)$ en todos los puntos nodos para los cuales los correspondientes puntos $(0, m\delta, n\delta)$ pertenecen a la región G.

Seguidamente, planteando las ecuaciones en diferencias $(1, m, n,)$, *hallaremos los valores de* $\bar{u}(2\Delta, m\delta, n\delta)$ *en todos los* puntos $(2\Delta, m\delta, n\delta)$ que sirven de vértices A' de las pirámides de la forma señalada en la figura 5.

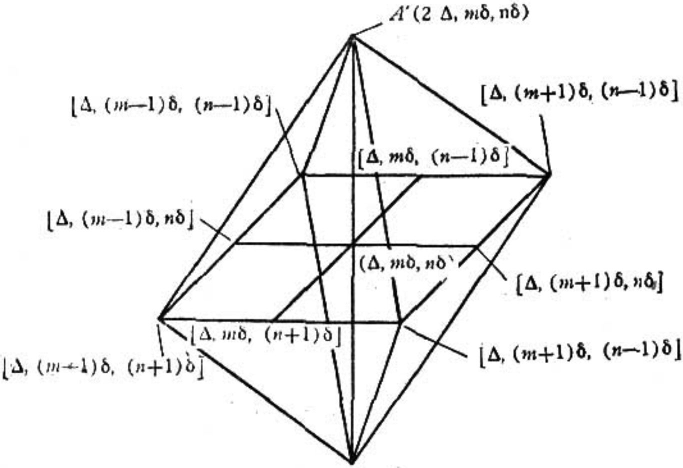

Fig. 5

Se supone que todos los puntos $[0, (m \pm 1)\,\delta, (n \pm 1)\,\delta]$ están dentro del cuadrado G, es decir, que

$$m_1 + 1 < m < m_2 - 1, \quad n_1 + 1 < n < n_2 - 1.$$

Considerando ahora las ecuaciones $(2, m, n)$, encontraremos los valores de $\bar{u}$ en los puntos $(3\Delta, m\delta, n\delta)$, donde

$$m_1 + 2 < m < m_2 - 2, \quad n_1 + 2 < n < n_2 - 2,$$

utilizando los valores hallados de $\bar{u}$ en los planos

$$t = \Delta, \quad t = 2\Delta.$$

Continuando estos cálculos, obtendremos los valores de $\bar{u}$ en todos los puntos $(k\Delta, m\delta, n\delta)$ situados dentro de la pirámide con base G en el plano $t = 0$, y cuyas caras laterales forman con este plano un ángulo arc tg $\frac{\Delta}{\delta}$.

Si $\Delta < \delta$ y δ es suficientemente pequeño, se puede demostrar que los valores encontrados para $\bar{u}(k\Delta, m\delta, n\delta)$ difieren tan poco como se quiera de los valores que tiene en estos puntos la función $u(t, x, y)$, que es la solución exacta del problema de Cauchy planteado.

De modo análogo se determinan los valores aproximados de $u(t, x, y)$ para $t < 0$.

Estos mismos razonamientos nos permiten resolver aproximadamente el problema de Cauchy para ecuaciones lineales hiperbólicas con cualquier número de variables independientes.[42]

Numerosos trabajos se han dedicado a la solución aproximada de ecuaciones hiperbólicas y de sistemas hiperbólicos por el método de las diferencias finitas.

---

[42] Véase, por ejemplo, Courant, Friedrich, Levy, Logros de las ciencias mat. fascículo VIII (1941), 147 - 160.

9. La ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k(y)\ h\ (x, y)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, y)\ \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\ \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + c(x, y)\ u + f(x, y), \quad (8,16)$$

donde $k(0) = 0$, $k(y)$ es una función monótona creciente de y, y $h(x, y) > 0$ para $y \geqslant 0$, es hiperbólica para $y > 0$ y parabólica para $y = 0$. Se ha demostrado que el problema de Cauchy para la ecuación (8,16) con las condiciones iniciales definidas sobre la línea parabólica $y = 0$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \psi(x) \qquad (9,16)$$

está correctamente planteado, si los coeficientes de la ecuación son funciones suficientemente suaves y se cumple la condición

$$\lim_{y \to 0} \frac{ya(x, y)}{\sqrt{k(y)}} = 0.$$

Se pueden poner ejemplos donde al no cumplirse esta condición el problema de Cauchy (8,16), (9,16) no quede correctamente planteado.[43] Resultados análogos han sido obtenidos para ecuaciones con muchas variables independientes.

10. Los sistemas hiperbólicos de ecuaciones no lineales tienen una amplia aplicación en la mecánica, especialmente al estudiar los movimientos de un gas. Muchos problemas de mecánica obligan a considerar condiciones iniciales discontinuas y soluciones

[43] I. S. Berezin, Colección mat. 24 (66) : 2 (1949), 301 - 320. Protter, Canadian Journal of Math. 6 : 4 (1954), 542 - 553.

discontinuas. El problema de Cauchy para sistemas hiperbólicos no lineales con condiciones iniciales discontinuas posee una serie de peculiaridades que no tienen los sistemas lineales de ecuaciones. Consideremos algunos ejemplos. Como condición inicial para el problema de Cauchy escojamos funciones discontinuas de la forma

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \leqslant 0, \\ -1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

o bien

$$\psi(x) = \begin{cases} -1, \text{ si } x \leqslant 0, \\ 1, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Para la ecuación lineal

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

la solución del problema de Cauchy con la condición inicial

$$u(0, x) = \varphi(x) \tag{10,16}$$

y la solución con la condición inicial

$$u(0, x) = \psi(x) \tag{11,16}$$

están determinadas unívocamente en todos los puntos del semiplano $t > 0$. En los puntos de la recta $x - t = 0$ estas soluciones tienen discontinuidades.[44]

[44] Las soluciones discontinuas de sistemas hiperbólicos lineales se han investigado en el trabajo: Courant, Lax, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 42 : 11 (1956), 872 - 876.

Para la ecuación no lineal

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{12,16}$$

las soluciones del problema de Cauchy con las condiciones iniciales (10,16) y (11,16) no están determinadas unívocamente incluso en una vecindad tan pequeña como se quiera de la recta $t = 0$ sobre la cual están dadas las condiciones iniciales.

En efecto, tracemos en el espacio (t, x, u) las características de la ecuación (12,16) que pasan por los puntos $(0, x, u(0, x))$. Estas características son rectas paralelas al plano (t, x).[45] Si $u(0, x) = \varphi(x)$, las proyecciones de estas características sobre el plano (t, x) cubren todos los puntos del semiplano $t > 0$. Los puntos de la región Q situados entre las rectas $x - t = 0$ y $x + t = 0$ se cubren dos veces por las proyecciones de estas características y además con distintos valores de u (Fig. 6). De aquí es fácil inferir que la solución $u(t, x)$ en los puntos situados entre las rectas $x - t = 0$ y $x + t = 0$ no puede determinarse unívocamente por la condición inicial.

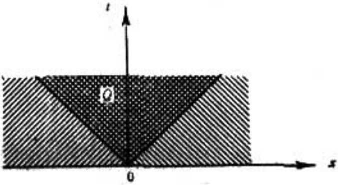

Fig. 6

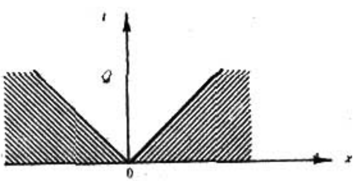

Fig. 7

[45] La característica de la ecuación (12,16) que pasa por el punto $(0, x_0, u(0, x_0))$, está definida por las ecuaciones $u = u(0, x_0)$, $x = u(0, x_0)\,t + x_0$. Véase I. G. Petrovski, Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, Gostiejizdat, 1952, § 55.

Si $u(0, x) = \psi(x)$, las proyecciones de las características de la ecuación (12,16)), que pasan por los puntos $(0, x, \psi(x))$ en el espacio (t, x, u), cubren solamente los puntos que no pertenecen a la región Q (Fig. 7), es decir, la solución no puede determinarse por la condición inicial en los puntos situados entre las rectas $x - t = 0$ y $x + t = 0$.

De este modo, para determinar unívocamente la solución del problema de Cauchy en el semiplano $t > 0$ para la ecuación no lineal (12,16) con las condiciones iniciales (10,16) u (11,16), es necesario plantear el problema de Cauchy de otra manera.

Así, para el sistema hiperbólico de ecuaciones que describe el movimiento unidimensional de un gas se introducen relaciones complementarias entre las funciones incógnitas en las líneas de discontinuidad. Este sistema hiperbólico fue investigado por Riemann.[46] Sin embargo, no todas las condiciones adicionales en las líneas de discontinuidad señaladas por Riemann se cumplen para los procesos físicos reales. Las relaciones en las líneas de discontinuidad para el sistema hiperbólico fueron señaladas correctamente por Hugonio.[47] Estas relaciones se pueden obtener resolviendo el sistema de ecuaciones que describe el movimiento de un gas cuando se toma en cuenta la viscosidad y la conducción del calor y se hacen tender a cero los coeficientes de viscosidad y de conducción del calor. Tomar en cuenta la viscosidad y la conducción del calor corresponde a introducir en el sistema de ecuaciones de primer orden derivadas de segundo orden que contienen como coeficiente un parámetro pequeño.

---

[46] B. Riemann, Sobre la propagación de ondas acústicas de amplitud finita. Obras, Gostiejizdat, 1948.

[47] L. D. Landau y E. M. Lifshits, Mecánica de medios continuos, Gostiejizdat, 1954.

Se puede determinar una solución del problema de Cauchy para la ecuación (12,16) establecida la condición inicial para $t = 0$, como el límite de las soluciones de la ecuación

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\varepsilon > 0)$$

con la misma condición inicial para $t = 0$. La solución del problema de Cauchy puede ser una función discontinua. Sobre la línea de discontinuidad de la solución de la ecuación (12,16) se cumplirán las condiciones

$$u(t, x + 0) < u(t, x - 0) \quad (t > 0)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u(t, x + 0) + u(t, x - 0)}{2},$$

donde $\frac{dx}{dt}$ es la tangente del ángulo entre la tangente a la línea de discontinuidad y el eje t; $u(x + 0)$, $u(x - 0)$ denotan, respectivamente, el límite a la derecha y el límite a la izquierda, en el punto x, de la función $u(x)$.

La función $u(t, x)$ igual a 1 si $x < 0$, e igual a -1 si $x > 0$, es la solución del problema de Cauchy así planteado para la ecuación (12,16) con la condición inicial (10,16).

La solución del problema de Cauchy con el nuevo planteamiento y la condición inicial (11,16) es la función $u(t, x)$, que es igual a 1 si $x - t > 0$, e igual a -1 si $x + t < 0$. En cada punto del semiplano $t > 0$ situado en la región Q, es decir, entre las rectas $x - t = 0$ y $x + t = 0$, la función $u(t, x)$ es igual a la tangente del ángulo que forma con el eje t la recta que une el punto dado con el origen de coordenadas. La posición de las proyecciones de las características, situadas sobre esta solución, está señalada en la Fig. 8. La función construida $u(t, x)$ es continua para $t > 0$. Es interesante observar que en el planteamiento señalado el problema de Cauchy puede tener solución continua, siendo discontinua la condición inicial.

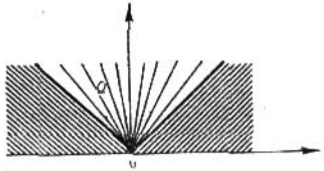
Fig. 8

Si consideramos condiciones iniciales suaves, la solución suave de las ecuaciones lineales hiperbólicas se determinará por las condiciones iniciales, en todos los puntos del semiplano $t > 0$ y para todas las condiciones iniciales, siempre que los coeficientes cumplan determinadas restricciones. Para ecuaciones hiperbólicas no lineales la solución suave existe, como regla general, sólo en una vecindad pequeña de la línea donde están dadas las condiciones iniciales. Debido a esto, también en las ecuaciones hiperbólicas no lineales surge la necesidad de considerar soluciones discontinuas.

El problema fundamental al estudiar las soluciones discontinuas de sistemas hiperbólicos no lineales consiste en determinar la clase de funciones en la cual existe una solución generalizada única del problema de Cauchy que dependa continuamente, en un sentido determinado, de las condiciones iniciales. Esta cuestión ha sido bien estudiada para la ecuación general casilineal de primer orden.[48] Resulta que las propiedades cualitativas de las soluciones generalizadas de esta ecuación son análogas a las propiedades de

[48] O. A. Oleynyk, Logros de las ciencias mat. 12 : 3 (1957), 3 – 73; véase también: Logros de las ciencias mat. 14 : 2 (1959), 159 – 170.

las soluciones de un sistema de ecuaciones de la dinámica de los gases. Por eso, la ecuación casilineal de primer orden más sencilla

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0$$

se llama con frecuencia *ecuación modelo* de la dinámica de los gases.

El problema de las soluciones discontinuas de sistemas hiperbólicos no lineales está aún poco estudiado.[49] Este problema es de gran interés teórico y además tiene gran importancia en las aplicaciones.

---

[49] En "Logros de las ciencias matemáticas", 14 : 2 (1959), 76 - 188, aparece una discusión de los resultados correspondientes y el planteamiento detallado de una serie de problemas en el artículo de I. M. Gelfand.

Sección II

VIBRACIONES DE CUERPOS FINITOS

§ 17. INTRODUCCIÓN

1. La sección anterior del capítulo 2 fue dedicada al problema de Cauchy. Nuestra atención principal fue puesta en la ecuación de ondas (1,13) que describe las vibraciones de cuerpos elásticos isotrópicos y homogéneos. El estudio de la función $u(t, x_1, ..., x_n)$ que caracteriza estas vibraciones en los puntos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ para t suficientemente próximo al instante inicial se reduce al planteamiento del problema de Cauchy. El valor de la solución $u(t, x_1, ..., x_n)$ de la ecuación (1,13) en el vértice $P(t, x_1, ..., x_n)$ del cono característico, queda completamente determinado por los valores de las funciones iniciales φ_0 y φ_1 en la base C_P de este cono; por eso al estudiar $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ podemos no tomar en consideración la frontera siempre que C_P no salga de la región donde están dadas las funciones φ_0 y φ_1, es decir, mientras C_P no intersecte la frontera del cuerpo. En este sentido se puede decir que en la sección anterior hemos estudiado vibraciones de cuerpos infinitos o sin frontera.

En la presente sección vamos a estudiar las vibraciones de los cuerpos tomando en cuenta el influjo de sus contornos. Limitándonos de nuevo al estudio de vibraciones de cuerpos isotrópicos homogéneos, llegamos al problema de hallar las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \tag{1,17}$$

que satisfagan para $t = 0$ las *condiciones iniciales*

$$\left.\begin{aligned} u(0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \\ u'_t(0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{2,17}$$

cuando el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ pertenece a la región dada G, y verifiquen las *condiciones de contorno* dadas para todo t en la frontera de G. Consideraremos solamente condiciones de contorno homogéneas de la forma

$$u = 0, \tag{3,17$_1$}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \tag{3,17$_2$}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0, \tag{3,17$_3$}$$

donde σ es una función continua no negativa que no depende de t y está definida en el contorno de G, y $\dfrac{\partial}{\partial n}$ es la derivada en la dirección de la normal exterior al contorno de G (véase § 1).

Algunos problemas físicos, por ejemplo, el problema de las vibraciones de cuerpos elásticos no homogéneos, consisten en buscar para iguales condiciones iniciales (2,17) y las condiciones de contorno (3,17), las soluciones de ecuaciones de la forma

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - qu + f. \tag{4,17}$$

Aquí ρ, p_i, q y f son funciones suficientemente suaves de x_k y, generalmente, se tiene que

$$\rho > \rho_0 > 0; \quad p_i > p_{i0} > 0; \quad q \geqslant 0.$$

Como la ecuación de ondas (1,17) y la ecuación (4,17) no varían si sustituimos t por $-t$, los razonamientos que hagamos para las soluciones de estas ecuaciones con $t > 0$ serán válidos también para $t < 0$.

El problema de encontrar la solución de la ecuación (4,17) con las condiciones iniciales (2,17) y una de las condiciones de contorno (3,17) se llama *problema mixto*. Toda la presente sección del capítulo 2 está dedicada a este problema.

2. El problema mixto no es el único problema que se puede plantear para la ecuación (1,17) o (4,17) en una región acotada. En la práctica frecuentemente aparecen otros tipos de problemas para estas ecuaciones. Veamos una serie de esos problemas para la ecuación sencilla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5,17}$$

1) *Problema de Gursat. Hallar la solución de la ecuación (5,17) a partir de sus valores en dos trozos de las características.*

En el segmento OA (fig. 9) de la característica $t + x = 0$

$$u(t, x) = \varphi(x).$$

En el segmento OB de la característica $t - x = 0$

$$u(t, x) = \psi(x).$$

Para que la solución sea continua debe cumplirse la condición

$$\varphi(0) = \psi(0)$$

(S. L. Soboliev, Ecuaciones de la física matemática, Gostiejizdat, 1954, pp. 63 - 67).

2) *Hallar la solución de la ecuación* (5,17) *si se conocen sus valores en el segmento OB de la característica $t = x$ y en la línea L que sale del punto O, se encuentra dentro del ángulo formado por las características $t = \pm x$ y se corta con cada característica $t = x + C$ en un solo punto (fig. 10).*

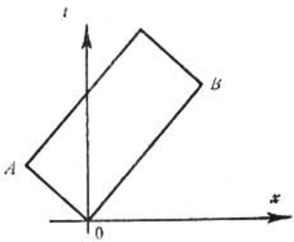

Fig. 9

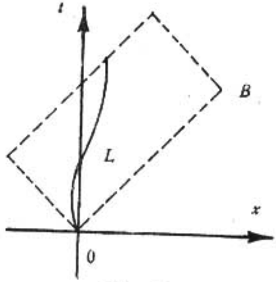

Fig. 10

El lector puede resolver fácilmente estos problemas utilizando la representación de la solución (5,17) en la forma

$$u(t, x) = f_1(t + x) + f_2(t - x)$$

(véase el ejemplo 1 del § 6).

La solución en ambos casos se determina en el rectángulo formado por las características que pasan por los extremos de las líneas en las cuales están dados los valores de la función u.

3) Dados los valores de la función $u(t, x)$ en las dos líneas L y L_1 (que supondremos rectas, para simplificar) que salen del origen de coordenadas, se presentan dos casos esencialmente distintos; a) cuando L y L_1 están dentro de un mismo ángulo formado por las características que salen del punto O y b) cuando L y L_1 están separadas por una característica.

En el primer caso, para determinar la única solución de la ecuación (5,17), es suficiente dar los valores de la propia función $u(t, x)$ en las líneas L y L_1; mientras que en el segundo caso, para una de las líneas es necesario dar "las condiciones de Cauchy", es decir, los valores de la propia solución y de su primera derivada en la dirección de la normal a esta línea (véase Gursat, Curso de análisis matemático, tomo III, primera parte, GTTI, 1933, pp. 100-112).

3. Nuestras consideraciones ulteriores serán aplicables, en la mayor parte de los casos, para un n cualquiera. Para mayor comodidad, en las deducciones y en las figuras, realizaremos muchos razonamientos sólo para $n = 2$ y $n = 1$, indicando especialmente los enunciados para otras n sólo en los casos que difieran esencialmente.

Suponiendo, como acabamos de decir, que $n = 2$, consideraremos soluciones $u(t, x_1, x_2)$ de las ecuaciones de la forma (1,17) o (4,17) para $0 \leqslant t \leqslant T$, cuando el punto (x_1, x_2) se encuentra dentro de la región G acotada por la línea l formada por un número finito de arcos l_i con tangente que varía continuamente.

O en otras palabras: suponiendo que $n = 2$, consideraremos las soluciones $u(t, x_1, x_2)$ de las ecuaciones (1,17) o (4,17) determinadas dentro del cilindro C_T cuyas generatrices son paralelas al eje Ot y pasan por la frontera de la región G situada en el plano $t = 0$, y cuyas bases se encuentran en los planos $t = 0$ y $t = T$. En toda esta sección supondremos, sin decirlo explícitamente en cada caso, que las soluciones consideradas $u(t, x_1, x_2)$ satisfacen la ecuación (1,17) o (4,17) dentro de C_T y son continuas al igual que sus primeras y segundas derivadas en $\overline{C}_T$, es decir, en el cilindro C_T y en su frontera.

§ 18. UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA MIXTO

Sean $u_1(t, x_1, x_2)$ y $u_2(t, x_1, x_2)$ dos soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{1,18}$$

determinadas en el cilindro C_T, que tienen todas las propiedades indicadas en el epígrafe anterior y son soluciones de un mismo problema mixto, es decir, supondremos que para $t = 0$ satisfacen las mismas condiciones iniciales (2,17) y en la superficie lateral del cilindro C_T verifican las mismas condiciones de contorno, uno de los tipos (3,17). Nuestro objetivo es demostrar que las funciones $u_1(t, x_1, x_2)$ y $u_2(t, x_1, x_2)$ coinciden en todo punto dentro del cilindro C_T. La demostración de esta afirmación es equivalente a la demostración del siguiente teorema.

Teorema. La función

$$u(t, x_1, x_2) = u_2(t, x_1, x_2) - u_1(t, x_1, x_2),$$

que satisface la ecuación (1,18) *dentro de C_T, es continua al igual que sus primeras y segundas derivadas en $\overline{C}_T$, satisface en la superficie lateral de C_T una de las condiciones* (3,17), *en $t = 0$ se hace nula al igual que u'_t y es idénticamente nula en C_T.*

Demostración. Consideremos la integral

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) dt\, dx_1\, dx_2, \tag{2,18}$$

tomada por el cilindro C_{t^*}, donde $0 < t^* \leqslant T$. Como la función u satisface la ecuación (1,18), la integral es igual a cero. Transformémosla en una integral por la superficie del cilindro C_{t^*}, del mismo modo que hicimos en el § 11 al demostrar la unicidad de la solución del problema de Cauchy. Obtendremos

$$\frac{1}{2}\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=t^*} dx_1\, dx_2\, -$$

$$-\frac{1}{2}\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=0} dx_1\, dx_2\, -$$

$$-\int_0^{t^*} dt \int_l \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(n, x_1)+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(n, x_2)\right] ds = 0.$$

Aquí l, como siempre, denota el contorno de la región G, ds es un elemento del arco del contorno. La primera integral se toma por la base superior del cilindro C_{t^*}, la segunda por la inferior y la tercera por su superficie lateral. La última integral se puede escribir en la forma

$$\int_0^{t^*} dt \int_l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

Obtenemos entonces

$$\frac{1}{2}\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=t^*} dx_1\, dx_2 -$$

$$-\frac{1}{2}\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=0} dx_1\, dx_2 -$$

$$-\int_0^{t^*} dt \int_l \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0. \quad (3,18)$$

La segunda de estas integrales es igual a cero en virtud de las condiciones iniciales. Si en el contorno de G siempre $u = 0$, también $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, y por eso la tercera integral es también igual a cero. Siendo esta última también igual a cero en el caso en que en el contorno $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Si en el contorno $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma\, u = 0$, esa integral se convierte en la integral

$$-\int_0^{t^*} dt \int_l \sigma u\, \frac{\partial u}{\partial t}\, ds = -\frac{1}{2}\int_l \sigma\, ds \int_0^{t^*} \frac{\partial (u^2)}{\partial t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_l \sigma u^2\,(t^*)\, ds + \frac{1}{2}\int_l \sigma u^2\,(0)\; ds. \quad (4,18)$$

La última integral es igual a cero en virtud de las condiciones iniciales. De modo que para cada t^* entre 0 y t, si en el contorno de G siempre $u = 0$ o $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, se cumple

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right]_{t = t^*} dx_1\, dx_2 = 0, \quad (5{,}18)$$

y si en el contorno de G $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$, se cumple

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right]_{t = t^*} dx_1\, dx_2 + \frac{1}{2} \int_l \sigma u^2 (t^*)\, ds = 0. \quad (6{,}18)$$

Como que $\sigma \geqslant 0$, de las relaciones (5,18) y (6,18) se deduce que cualquiera que sea la condición de contorno (3,17)

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right]_{t = t^*} dx_1\, dx_2 = 0. \quad (7{,}18)$$

Como suponemos que la función u tiene todas las primeras derivadas continuas en $\overline{C}_T$ y que t^* es un número arbitrario entre 0 y T, de la relación (7,18) se deduce que en todo punto de $\overline{C}_T$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Es decir, u es constante en todo C_T. Y como $u(0, x_1, x_2) \equiv 0$, en todo el cilindro C_T

$$u(t, x_1, x_2) \equiv 0,$$

que es lo que se quería demostrar.

Observemos que la integral en el miembro izquierdo de (7,18) es igual, salvo un factor constante, a la suma de la energía potencial y cinética de una membrana vibrante en el instante $t = t^*$ y que la igualdad (3,18), para las condiciones de contorno $(3,17)_1$ y $(3,17)_2$ expresa la ley de conservación de la energía (véase el § 1, subepígrafe 3).

Problema. Demuestre la unicidad en C_T de la solución del problema con las condiciones iniciales (2,17) y las condiciones de contorno $(3,17)_1$ para la ecuación (4,17).

§ 19. DEPENDENCIA CONTINUA ENTRE LA SOLUCIÓN Y LAS CONDICIONES INICIALES

Teorema. Sean $u_1(t, x)$ y $u_2(t, x)$ dos soluciones de la ecuación (1,17) para $n = 1$ en el cilindro C_T.[50]

Supongamos que ambas soluciones satisfacen en la superficie lateral las mismas condiciones de contorno, uno de los tipos (3,17) y que para $t = 0$

$$u_1(0, x) = \varphi_0^{(1)}(x); \quad u'_{1t}(0, x) = \varphi_1^{(1)}(x);$$
$$u_2(0, x) = \varphi_0^{(2)}(x); \quad u'_{2t}(0, x) = \varphi_1^{(2)}(x).$$

[50] Es evidente que para $n = 1$ el cilindro C_T es un réctángulo con lados paralelos a los ejes Ot y Ox.

Si las diferencias

$$\varphi_i^{(2)}(x) - \varphi_i^{(1)}(x) = \varphi_i(x) \qquad (i = 0,1)$$

y la primera derivada de la función $\varphi_0(x)$ *tienen un valor absoluto suficientemente pequeño en todo punto de* G, *entonces la diferencia*

$$u_2(t, x) - u_1(t, x) = u(t, x)$$

es tan pequeña como se quiera en valor absoluto en todo C_T.

Un teorema análogo se puede demostrar para las soluciones de la ecuación (1,17) en C_T, cualquiera que sea n. Pero, en este caso, para asegurar que la diferencia

$$u_2(t, x_1, \ldots, x_n) - u_1(t, x_1, \ldots, x_n) = u(t, x_1, \ldots, x_n)$$

sea pequeña en todo el cilindro C_T, es necesario que difieran poco de cero en G tanto las funciones

$$u(0, x_1, \ldots, x_n) \text{ y } u_t'(0, x_1, \ldots, x_n),$$

como sus derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el orden $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ inclusive; además, es necesario que en el contorno de la región G, que es la base del cilindro C_T, las derivadas de estas diferencias hasta el orden $\left[\frac{n}{2}\right]$ satisfagan ciertas relaciones complementarias, que satisfacen automáticamente para $n = 1$. La demostración de este teorema para $n > 1$ es mucho más complicada, por eso no la hacemos.

Demostración del teorema para $n = 1$. Consideremos de nuevo una integral del tipo (2,18) por el cilindro C_T, que ahora degenera en un rectángulo $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ a \leqslant x \leqslant b\}$. Esta integral sigue siendo igual a cero para todo t^* entre 0 y T. Transformándola de modo análogo al anterior, obtendremos

$$\iint\limits_{\sigma_{t^*}} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dt\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t=t^*} dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t=0} dx -$$

$$- \int_0^{t^*} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=b} dt + \int_0^{t^*} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} dt = 0.$$

De aquí, como $a < b$ y

$$u(0, x) = \varphi_0;\ \ u_t'(0, x) = \varphi_1; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=b} = \frac{\partial u}{\partial n}; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = -\frac{\partial u}{\partial n},$$ [51]

tenemos

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t=t^*} dx = \frac{1}{2}\int_a^b [\varphi_1^2(x) + \varphi_0'^2(x)]\, dx +$$

$$+ \int_0^{t^*} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=a} dt + \int_0^{t^*} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=b} dt. \quad (1{,}19)$$

Si $u\,(t, a) = 0$ o $\dfrac{\partial u\,(t, a)}{\partial n} = 0$, entonces

$$\int_0^{t^*} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=a} dt = 0.$$

---

[51] Recordemos que $\dfrac{\partial}{\partial n}$ significa siempre la derivada en la dirección de la normal exterior.

Si para $x = a$ se cumple la condición de contorno $\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma_a n = 0$, entonces

$$\int_0^{t^*} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=a} dt = -\sigma_a \int_0^{t^*} u \frac{\partial u}{\partial t}\, dt =$$

$$= -\frac{\sigma_a u^2(t^*, a)}{2} + \frac{\sigma_a u^2(0, a)}{2}.$$

Igualdades análogas se pueden escribir para $x = b$, si en $x = b$ se impone una de las siguientes condiciones: $u(t, b) = 0$, $\dfrac{\partial u(t, b)}{\partial n} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma_b u = 0$.

Por lo tanto, omitiendo si es necesario los sumandos negativos del miembro derecho de la fórmula (1,19) tenemos, para cualquier condición de contorno (3,17),

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]_{t=t^*} dx \leqslant \int_a^b [\varphi_1^2(x) + \varphi_0'(x)]\, dx +$$

$$+ \sigma_a \varphi_0^2(a) + \sigma_b \varphi_0^2(b).\text{[52]} \qquad (2,19)$$

Como el miembro derecho, por suposición, es pequeño, se deduce que también el miembro izquierdo es pequeño. Designando por ε^2 el valor del miembro derecho de la desigualdad

---

[52] Para las condiciones de contorno $u = 0$ ó $\sigma \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ esta desigualdad se reduce a una igualdad que expresa la ley de la conservación de la energía.

(2,19), hallamos que para todo t^* entre 0 y T y para todo x, si $a \leqslant x \leqslant b$,

$$\int_a^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2_{t=t^*} dx \leqslant \varepsilon^2, \tag{3,19$_1$}$$

$$\int_a^x \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2_{t=t^*} dx \leqslant \varepsilon^2. \tag{3,19$_2$}$$

De la desigualdad $(3,19)_1$ obtenemos, aplicando la desigualdad de Buniakovski,

$$u(t^*, x) - u(t^*, a) \mid \leqslant \int_a^x \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx =$$

$$= \int_a^x 1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx \leqslant \left[\int_a^x dx \int_a^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{b-a}\,\varepsilon. \tag{4,19}$$

Del mismo modo, de la desigualdad $(3,19)_2$ obtenemos

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u\, dx\right| = \left|\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} dx\right| \leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| dx \leqslant \sqrt{b-a}\,\varepsilon. \tag{5,19}$$

Pero

$$\left|\int_a^b u(t^*, x)\, dx - \int_a^b u(0, x)\, dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^{t^*}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u(t, x)\, dx\right] dt\right| \leqslant t^*\, \varepsilon \sqrt{b-a}.$$

De aquí

$$\left| \int_a^b u(t^*, x)\, dx \right| \leqslant t^* \varepsilon \sqrt{b-a} + \left| \int_a^b \varphi_0(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant t^* \varepsilon \sqrt{b-a} + \max |\varphi_0| \, (b-a). \quad (6{,}19)$$

Integrando la desigualdad (4,19) respecto a x entre $x = a$ y $x = b$, encontramos

$$\left| \int_a^b u(t^*, x)\, dx - (b-a)\, u(t^*, a) \right| \leqslant \varepsilon\, (b-a)^{\frac{3}{2}} \quad (7{,}19)$$

y estimando la integral en el miembro izquierdo de la fórmula (7,19) mediante (6,19), comprobaremos que los valores $|u(t^*, a)|$ son tan pequeños como se quiera para cualquier t^* del intervalo $(0, T)$ *y para* ε *y* $\max |\varphi_0|$ *suficientemente pequeños.* De aquí, empleando de nuevo la desigualdad (4,19), obtendremos que $|u(t^*, x)|$ es pequeño en todo el rectángulo C_T, que es lo que se quería demostrar.

Observación 1. Si en uno de los extremos del segmento $[a, b]$, por ejemplo, para $x = a$, está dada la condición $u = 0$ para todo $t \geqslant 0$, de la relación (4,19) se desprende directamente que $|u(t, x)|$ es pequeño en C_T.

Si en uno de los extremos del segmento $[a, b]$, por ejemplo, para $x = a$, estuviese dada la condición $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_a u = 0$ para $\sigma_a > 0$, de la relación (1,19) se deduciría que

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]_{t = t^*} dx + \sigma_a u^2 \,(t^*, a) \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b [\varphi_1^2(x) + \varphi_0'^2(x)]\, dx + \sigma_a \varphi_0^2(a) + \sigma_b \varphi_0^2(b) \leqslant \varepsilon^2.$$

De aquí

$$\sigma_a u^2\,(t^*,\, a) \leqslant \varepsilon^2,$$

y de nuevo, en virtud de que $|\, u(t^*,\, x)\, |$ es pequeño, obtendríamos directamente de (4,19) que también lo es $|\, u(t^*,\, a)\, |$ en C_T.

Observación 2. Si n fuese mayor que 1, del mismo modo que en el caso $n = 1$, encontraríamos que al ser $|\, u_t'\,(0,\, x_1,\, ...,\, x_n)\, |$ $|\, u(0\,,\, x_1\,,\, ...\,,\, x_n)\, |$ y las derivadas $\left| \dfrac{\partial u(0\,,\, x_1\,, \ldots\,, x_n)}{\partial x_i} \right|$ uniformemente pequeños, también

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right]_{t\, =\, t^*} dx_1 \ldots dx_n. \tag{8,19}$$

sería pequeña. Pero del hecho de que esta integral sea pequeña para todo t^* entre 0 y T y de que $|\, u(0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n\, |$ también lo sea, es imposible deducir que $|\, u\, |$ es pequeño en C_T. Se puede poner un ejemplo de una función u para la cual esta integral es pequeña para todos los t^* considerados y que aún así en algunos puntos C_T toma valores muy grandes a pesar de que $|\, u(0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n)\, |$ es pequeño. Para garantizar que $|u|$ sea pequeño en C_T es suficiente que, además de la integral (8,19), sean pequeñas en $t = t^*$ las integrales de la forma (8,19) donde en lugar de u figuren todas las posibles derivadas de la forma

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} \text{ para } k \leqslant \left[\frac{n}{2} \right],$$

y que los valores de $|u(0, x_1, \ldots, x_n)|$[53] sean uniformemente pequeños. Es así precisamente como se demuestra que $|u|$ es pequeño en C_r siempre que φ_0, φ_1 y sus derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el orden $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ sean suficientemente pequeñas en valor absoluto y se cumplan ciertas condiciones complementarias para los valores de φ_0 y φ_1 en el contorno de G.[54]

Observación 3. De la demostración del teorema se infiere que el mismo sigue siendo válido si en lugar de exigir que $|u(0,x)|$, $|u'_x(0,x)|$ y $|u'_t(0,x)|$ *sean uniformemente* pequeños, pedimos que sean pequeñas las integrales

$$\int_a^b u'^2_x(0, x)\, dx \quad \text{y} \quad \int_a^b u'^2_t(0, x)\, dx$$

y uno de los dos valores siguientes: $|u(0, a)|$ o $|u(0, b)|$.

En efecto, en las desigualdades (2,19) y (6,19) hemos supuesto solamente la pequeñez de estas integrales y de $|u(0, x)|$.

Pero si, por ejemplo, $|u(0, a)|$ es pequeño, entonces

$$|u(0, x)| = \left|u(0, a) + \int_a^x u'_x(0, x)\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant |u(0, a)| + \sqrt{b-a}\left(\int_a^b u'^2_x\,(0, x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}};$$

de donde se deduce que $|u(0, x)|$ es uniformemente pequeño.

---

[53] Esto se deduce de los llamados teoremas de imersión de S. L. Soboliev (véase S. L. Soboliev, Algunas aplicaciones del análisis funcional a la física matemática, L., 1950).

[54] Véase M. Krzyzanski, J. Schauder, Studia Mathematica, t. VI, 1936, 162 - 189.

Problema 1. Demuestre el teorema de la dependencia continua de la solución respecto a las condiciones iniciales para la ecuación (4,17), si $n = 1$ y la condición de contorno es $(3,17)_1$.

Problema 2. Demuestre que la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p\,(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - qu + f(t,\,x)$$

($p(x) > 0$, $q > 0$ y $f(t,\,x)$ son funciones suficientemente suaves) que satisface las condiciones iniciales (2,17) y la condición de contorno $(3,17)_1$ varía en C_T en valor absoluto tan poco como se quiera, si la función $f(t,\,x)$ varía en C_T suficientemente poco.

§ 20. MÉTODO DE FOURIER PARA LA ECUACIÓN DE LA CUERDA

1. Para resolver el problema mixto se puede aplicar en muchos casos el llamado método de Fourier. En el presente epígrafe consideraremos la aplicación de este método en un ejemplo concreto. En el siguiente, expondremos el esquema general de aplicación de este método a la resolución del problema mixto para una ecuación lineal de segundo orden con dos variables independientes.

Supongamos que se busca la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1,20}$$

que satisfaga las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{c} u(0,\, x) = \varphi_0(x), \\ u'_t(0,\, x) = \varphi_1(x), \\ 0 \leqslant x \leqslant l, \end{array}\right\} \qquad (2{,}20)$$

y las condiciones de contorno para $t > 0$

$$u(t,\, 0) = u(t,\, l) = 0. \qquad (3{,}20)$$

Primero trataremos de hallar las soluciones no triviales, es decir, las que no son idénticamente nulas, de la ecuación (1,20) del tipo

$$u(t,\, x) = T\,(t)\, X(x), \qquad (4{,}20)$$

que satisfagan solamente las condiciones de contorno (3,20). Consideramos que $T(t)$ depende sólo de t y $X(x)$ sólo de x. Sustituyendo el miembro derecho de (4,20) por u en la ecuación (1,20), obtendremos

$$XT'' = X''T \ \text{ o } \ \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}. \qquad (5{,}20)$$

El miembro izquierdo de la última igualdad no depende de x y el derecho no depende de t. Por lo tanto cada una de las expresiones $\frac{T''}{T}$ y $\frac{X''}{X}$ no depende ni de x ni de t, es decir, es constante. Designemos esta constante por $-\,\lambda$. Entonces de la igualdad (5,20) se desprende que

$$T'' + \lambda T = 0. \qquad (6{,}20)$$

$$X'' + \lambda X = 0. \qquad (7{,}20)$$

De ese modo la ecuación (5,20) se descompone en dos ecuaciones, una de las cuales contiene sólo funciones de t y la otra sólo funciones de x. En estos casos se dice que las *variables se han separado.*

Para obtener una solución no trivial $u(t, x)$ de la forma (4,20), que satisfaga las condiciones de contorno (3,20), es necesario hallar una solución no trivial, es decir, que no sea idénticamente nula, de la ecuación (7,20) que satisfaga las condiciones de contorno

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{8,20}$$

Las fórmulas que dan la solución general de la ecuación (7,20) tienen una forma esencialmente distinta según

$$\lambda < 0, \ \lambda = 0 \ \text{o} \ \lambda > 0.$$

Consideremos por separado cada uno de estos tres casos

Caso 1

($\lambda < 0$). En este caso la solución general de la ecuación (7,20) se escribe en la forma

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}.$$

Para que se verifiquen las condiciones de contorno (8,20) debe cumplirse

$$C_1 + C_2 = 0 \ \text{y} \ C_1 e^{\sqrt{-\lambda} l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} l} = 0.$$

Por consiguiente, debe cumplirse

$$C_1 e^{\sqrt{-\lambda} l} = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda} l}.$$

Pero esta última igualdad se cumple sólo si $C_1 = 0$, es decir, también $C_2 = 0$. Obteniéndose sólo la solución trivial de la ecuación (7,20).

Caso 2

($\lambda = 0$). En este caso la solución general de la ecuación (7,20) tiene la forma

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Para que $X(0) = 0$ es necesario que $C_1 = 0$. Entonces la condición $X(l) = 0$ toma la forma $C_2 l = 0$; es decir, es necesario que $C_2 = 0$. Por lo tanto, como en el caso anterior, llegamos a la conclusión de que solamente la solución trivial de la ecuación (7,20) puede satisfacer ambas condiciones de contorno (8,20).

Caso 3

($\lambda > 0$). En este caso la solución general de la ecuación (7,20) tiene la forma

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, x.$$

Para que se verifique la condición de contorno $X(0) = 0$ debe cumplirse

$$C_1 = 0.$$

Y entonces la condición $X(l) = 0$ toma la forma

$$C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, l = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, l = 0,$$

ya que si $C_2 = 0$, obtendríamos la solución trivial. La ecuación

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, l = 0$$

se satisface si y sólo si

$$\sqrt{\lambda}\, l = k\pi, \text{ es decir, } \lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2},$$

donde k es un número entero cualquiera o cero. Como suponemos que $\lambda > 0$, k no puede ser igual al cero. Para valores negativos de k, λ toma los mismos valores que para los k positivos con el mismo valor absoluto. Por eso todos los valores de λ para los cuales la ecuación (7,20) tiene soluciones no triviales que satisfacen las condiciones de contorno (8,20) están dados por la fórmula

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \text{ donde } k = 1, 2, \ldots \tag{9,20}$$

El problema de encontrar las soluciones no triviales de la ecuación (7,20) que satisfagan las condiciones de contorno (8,20) es un caso particular del problema conocido como "Problema de los valores propios" o a veces "Problema de Sturm-Liouville" que son los apellidos de los dos matemáticos que lo investigaron. Los valores de λ, para los cuales nuestro problema tiene soluciones no triviales, se llaman *valores propios* y las soluciones no triviales de este problema se llaman *funciones propias* correspondientes al valor propio dado. En nuestro caso, al valor propio $\frac{k^2\pi^2}{l^2}$ corresponde la función propia

$$X_k(x) = C_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x.$$

En virtud de la homogeneidad de la ecuación (7,20), las *funciones propias se determinan con exactitud que excluye solamente un factor constante* C_k. Escogiendo de cierto modo este factor, se puede obligar a la función propia $X_k(x)$ a obedecer una condición complementaria o, como se dice, se puede "*normalizar*" la función propia.

Es cómodo realizar esta normalización de manera que

$$\int_0^l X_k^2(x)\, dx = 1.$$

Para ello debe cumplirse

$$C_k = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

En este epígrafe aceptaremos, en lo que sigue, que

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x.$$

Volvamos ahora a la solución del problema mixto planteado al principio de este epígrafe. Sustituyendo en la ecuación (6,20) en lugar de λ su valor λ_k dado por la fórmula (9,20), obtendremos

$$T'' + \frac{k^2\pi^2}{l^2} T = 0.$$

De aquí

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi}{l} t + B_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t,$$

donde A_k y B_k son constantes arbitrarias.

Todas las funciones

$$u_k(t, x) = X_k(x)\, T_k(t) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x \left(A_k \cos \frac{k\pi}{l} t + B_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right)$$

satisfacen la ecuación (1,20) y las condiciones de contorno (3,30) para A_k y B_k cualesquiera. Trataremos de determinar estas constantes de modo que la serie infinita

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left[A_k \cos \frac{k\pi}{l} t + B_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right] \quad (10,20)$$

verifique tanto la ecuación (1,20) como las condiciones de contorno (3,20) y las condiciones iniciales (2,20). Empezaremos por las condiciones iniciales. En primer lugar, debe cumplirse que

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi_0(x). \quad (11,20)$$

Además, si la serie es derivable término a término, debe cumplirse

$$u'_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} B_k X_k(x) = \varphi_1(x). \quad (12,20)$$

Supongamos que las funciones $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ son desarrollables en series de $\operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x$ según el segmento $[0, l]$ y que las series formadas por los módulos de los términos de estas series convergen uniformemente.

De la teoría de las series trigonométricas sabemos que esto siempre es posible, si las funciones $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ son continuas al igual que sus primeras derivadas y si los valores de estas funciones en los extremos del segmento $[0, l]$ son iguales a cero. Supongamos que estas condiciones se cumplen. Entonces la serie (10,20) converge absoluta y uniformemente para $0 \leqslant x \leqslant l$

y para todo t, ya que sen $\frac{k\pi}{l} t$ y cos $\frac{k\pi}{l}$ t no son mayores que 1 en valor absoluto. De aquí se deduce que la función $u(t, x)$, definida por la serie (10,20), es continua y satisface la primera condición inicial (2,20) y las condiciones de contorno (3,20). Pero de aquí no se puede aún concluir que esta función satisfaga la segunda condición inicial de (2,20) y la ecuación (1,20). Esto se podría afirmar, si la serie (10,20) se pudiese derivar término a término dos veces respecto a x y dos veces respecto a t. Y como *se sabe, se puede derivar término a término sólo si las series que* se obtienen de la derivación convergen uniformemente en C_T. Esta última condición se cumplirá de antemano para todo T, incluso para $T = \infty$, si la función φ_0 tiene derivadas continuas hasta el cuarto orden inclusive en todo el segmento $[0, l]$, y se anula en los extremos de este segmento al igual que sus derivadas de primer y segundo orden, y si la función φ_1 tiene derivadas continuas hasta el tercer orden inclusive en $[0, l]$, y se anula en los extremos de este segmento al igual que su derivada de primer orden.[55] En este caso

$$A_k = O\left(\frac{1}{k^4}\right) \text{ y } B_k = O\left(\frac{1}{k^4}\right).^{56}$$

---

[55] Estas limitaciones para φ_0 y φ_1 pueden hacerse menos rígidas (véase § 23).

[56] Mediante $O[\varphi(n)]$ designamos una función $\psi(n)$ tal que la razón $\frac{\psi(n)}{\varphi(n)}$ permanece acotada cuando $n \to \infty$. Estas estimaciones son fáciles de obtener transformando los coeficientes A_k y B_k mediante una integración por partes.

2. En la práctica, al aplicar el método de Fourier, nadie se ocupa generalmente de que la serie (10,20) se puede derivar término a término dos veces respecto a x y a t. Lo más que se exige es que las funciones φ_0 y φ_1 sean continuas, al igual que sus primeras derivadas, y que se anulen en los extremos del segmento $[0, l]$. Esto, como ya hemos visto, garantiza la convergencia absoluta y uniforme de la serie (10,20) en todo el rectángulo C_T. Si para φ_0 y φ_1 dadas en el rectángulo C_T, existe una solución $u(t, x)$ del problema considerado, que es continua al igual que sus derivadas de primer y segundo orden, la sucesión de sumas parciales $S_k(t, x)$ de la serie (10,20) converge uniformemente a la solución en C_T. En efecto, de la teoría de las series trigonométricas se sabe que la serie de Fourier, para toda función de *cuadrado integrable, converge a la función en la media.* Por eso, de la propia construcción de la serie (10,20) se deduce que

$$\int_0^l [S'_{k_x}(0, x) - \varphi'_0(x)]^2\, dx \to 0 \text{ y } \int_0^l [S'_{k_t}(0, x) - \varphi_1(x)]^2\, dx \to 0$$

para $k \to \infty$. Partiendo de la observación 3 al § 19, de aquí se desprende que

$$S_k(t, x) \to u(t, x)$$

uniformemente en $\overline{C}_T$.

3. Cada una de las funciones

$$u_k(t, x) = X_k(x)\ T_k(t) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l} x \left(A_k \cos\frac{k\pi}{l} t + B_k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l} t\right) =$$

$$= D_k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l} x \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}(t + t_k) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

describe las llamadas *oscilaciones propias* de una cuerda con extremos fijos. Para oscilaciones propias correspondientes a $k = 1$, la cuerda emite el tono fundamental, el más bajo. Para oscilaciones correspondientes a k mayores, emite tonos más altos, los "sobre tonos". Si la cuerda oscila según la ley

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{n} D_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} (t + t_k),$$

emite simultáneamente tonos de distintas alturas, correspondientes a los distintos términos de esta suma.

§ 21. MÉTODO GENERAL DE FOURIER (CONSIDERACIONES PREVIAS)

1. El método de Fourier (llamado también método de separación de variables) para la solución del problema de contorno mixto, es aplicable sólo a una clase especial de ecuaciones lineales de segundo orden, aunque el problema tiene solución para una clase mucho más amplia de ecuaciones.

En el presente epígrafe expondremos el método sin fundamentar rigurosamente los resultados que se obtienen. La fundamentación del método de Fourier será dada en los epígrafes siguientes. La fundamentación rigurosa del método de Fourier fue dada por primera vez por V. A. Stieklov.[57]

Consideremos la ecuación hiperbólica de la forma

$$A(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D(t) \frac{\partial u}{\partial t} + E(x) \frac{\partial u}{\partial x} + [F_1(t) + F_2(x)]\, u = 0, \quad (1,21)$$

[57] Los resultados de V. A. Stieklov aparecen en su libro "Problemas fundamentales de la física matemática", Petrograd, 1922.

donde los coeficientes A, C, D, E, F_1, F_2 son funciones suficientemente suaves y $A(t) > a_0 > 0$, $C(x) < c_0 < 0$; aquí a_0 y c_0 son constantes. La suposición de que unos de estos coeficientes dependen sólo de t, otros sólo de x y que el coeficiente de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}$ es igual a cero, define la clase de ecuaciones hiperbólicas para las cuales el problema mixto de contorno puede ser resuelto por el método de Fourier.

Supongamos que se busca una solución de la ecuación (1,21) dos veces continuamente derivable que satisfaga las condiciones iniciales

$$u(0,\ x) = \varphi_0(x), \quad u'_t(0,\ x) = \varphi_1(x) \tag{2,21}$$

y las condiciones de contorno

$$\left.\begin{aligned} A_0 u(t,\ 0) + B_0 u'_x(t,\ 0) &= 0, \\ A_1 u(t,\ l) + B_1 u'_x(t,\ l) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3,21}$$

donde las constantes A_0, B_0, A_1, B_1 son tales que $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$ y $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$.

Al igual que en el ejemplo del § 20, buscaremos primero las soluciones no triviales de la ecuación (1,21) que tienen la forma

$$u(t,\ x) = T(t)\, X(x), \tag{4,21}$$

y exigiremos de estas soluciones que verifiquen las condiciones de contorno (3,21), sin ocuparnos, por el momento, de las condiciones iniciales.

Si tal solución existe, sustituyéndola en (1,21), obtenemos una ecuación que necesariamente deben satisfacer las funciones $X(x)$ y $T(t)$

$$A(t)\,T''X + C(x)\,TX'' + D(t)\,T'X + E(x)\,TX' + \\ + [F_1(t) + F_2(x)]\,TX = 0.$$

Puesto que la función $X(x)$ no es idénticamente nula, existe un punto x_0 tal que $X(x_0) \neq 0$; para todos los t debe verificarse la igualdad

$$A(t)\,T'' + D(t)\,T' + F_1(t)\,T = \\ = -\frac{C(x_0)\,X''(x_0) + E(x_0)\,X'(x_0) + F_2(x_0)\,X(x_0)}{X(x_0)}\,T = \lambda_1 T,$$

donde λ_1 es una constante. Del mismo modo obtendremos que la función $X(x)$ para todas las x debe satisfacer la ecuación

$$C(x)\,X'' + E(x)\,X' + F_2(x)\,X = \lambda_2 X,$$

donde λ_2 es una constante. Pero en todos los puntos x y t donde $X(x) \neq 0$ y $T(t) \neq 0$ se tiene

$$A(t)\,\frac{T''}{T} + D(t)\,\frac{T'}{T} + F_1(t) = \\ = -\,C(x)\,\frac{X''}{X} - E(x)\,\frac{X'}{X} - F_2(x), \quad (5,21)$$

y por eso $\lambda_1 = -\lambda_2 = -\lambda$; y obtenemos para las funciones $X(x)$ y $T(t)$ las siguientes ecuaciones:

$$A(t)\,T'' + D(t)\,T' + F_1(t)\,T + \lambda T = 0, \qquad (6,21)$$

$$C(x)\,X'' + E(x)\,X' + F_2(x)\,X - \lambda X = 0. \qquad (7,21)$$

Como $T(t) \neq 0$, para que la función (4,21) satisfaga las condiciones de contorno (3,21) es necesario que se verifiquen las condiciones

$$\left.\begin{aligned} A_0X(0) + B_0X'(0) &= 0, \\ A_1X(l) + B_1X'(l) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8,21}$$

El problema que consiste en encontrar las soluciones no triviales de la ecuación *(7,21)* que satisfagan las condiciones *(8,21)* se llama problema de los ***valores propios***. Este problema no tiene solución distinta del cero idéntico (no trivial) para todo λ. Los valores de λ para los cuales existe una solución no trivial, se llaman ***valores propios*** de este problema y la solución no trivial se llama ***función propia*** correspondiente al valor propio dado. El conjunto de todos los valores propios se llama ***espectro*** del problema dado.

En el epígrafe siguiente se demostrará que los valores propios de *nuestro problema forman una sucesión infinita*

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k,\ \ldots$$

A cada valor propio λ_k corresponde una función propia $X_k(x)$ que, en virtud de la homogeneidad de la ecuación *(7,21)* y de las condiciones (8,21), se determina unívocamente, salvo un factor numérico arbitrario. Escojamos este factor de manera que

$$\int_0^l \rho(x)\, X_k^2(x)\, dx = 1, \tag{9,21}$$

donde $\rho(x) > 0$ es una función fija para la ecuación dada, que será determinada en el siguiente epígrafe.

Seguidamente demostraremos que las funciones propias que corresponden a distintos valores propios *son ortogonales con peso* ρ, es decir, satisfacen las igualdades

$$\int_0^l \rho(x)\, X_k(x)\, X_l(x)\, dx = 0 \text{ para } k \neq l. \tag{10,21}$$

Para cada valor propio λ_k resolvemos la ecuación (6,21). La solución general de la ecuación (6,21) para $\lambda = \lambda_k$ (designémosla por $T_k(t)$) es una combinación lineal arbitraria de cualesquiera dos soluciones parciales linealmente independientes $T_k^*(t)$ y $T_k^{**}(t)$:

$$T_k(t) = C_1 T_k^*(t) + C_2 T_k^{**}(t).$$

Escojamos T_k^* y T_k^{**} de manera que verifiquen las siguientes condiciones iniciales para $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} T_k^*(0) &= 1; \quad T_k^{*\prime}(0) = 0; \\ T_k^{**}(0) &= 0; \quad T_k^{**\prime}(0) = 1, \end{aligned}\right\} \tag{11,21}$$

y pongamos

$$u_k(t, x) = T_k(t) \cdot X_k(x).$$

Las funciones $u_k(t, x)$ satisfacen para cualquier k la ecuación (1,21) y las condiciones de contorno (3,21).

Para satisfacer las condiciones iniciales (2,21) formamos la serie

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) [A_k T_k^*(t) + B_k T_k^{**}(t)]. \tag{12,21}$$

Si esta serie converge uniformemente al igual que las series obtenidas de su doble derivación, término a término, respecto a t y x, entonces su suma, evidentemente, satisfará la ecuación (1,21) y las condiciones de contorno (3,21). Para que se cumplan las condiciones iniciales (2,21) es necesario que

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi_0(x), \tag{13,21}$$

$$u'_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k(x) = \varphi_1(x). \tag{14,21}$$

Suponiendo que las series (13,21) y (14,21) convergen uniformemente, podemos determinar los coeficientes A_m, B_m multiplicando ambos miembros de las igualdades (13,21) y (14,21) por $\rho X_m(x)$ e integrando respecto a x en el intervalo de 0 a l. En virtud de (9,21) y (10,21), obtendremos

$$A_m = \int_0^l \rho(x)\, \varphi_0(x)\, X_m(x)\, dx,$$

$$B_m = \int_0^l \rho(x)\, \varphi_1(x)\, X_m(x)\, dx.$$

Sustituyendo estos valores de los coeficientes en la serie (12,21) obtendremos, evidentemente, la solución de nuestro problema siempre que la serie (12,21) y las series, obtenidas de su derivación término a término respecto a x y a t, hasta dos veces inclusive, converjan uniformemente.

Observación. Hemos indicado el esquema general de la aplicación del método de Fourier para resolver el problema mixto para la ecuación (1,21); este esquema es aplicable también en el caso de muchas variables espaciales, para ecuaciones hiperbólicas de tipo especial (véase § 25).

§ 22. PROPIEDADES GENERALES DE LAS FUNCIONES PROPIAS Y DE LOS VALORES PROPIOS

1. Para estudiar las propiedades de las funciones propias y de los valores propios demostraremos primeramente que la ecuación (7,21)

$$C(x)\,X''(x) + E(x)\,X'(x) + F_2(x)\,X(x) - \lambda X(x) = 0$$

del epígrafe anterior se puede reducir a la forma

$$[p(x)\,X'(x)]' - q(x)\,X(x) + \lambda\rho(x)\,X(x) = 0, \quad (1,22)$$

multiplicándola por una función de x escogida adecuadamente.

En todo lo que sigue supondremos que $C(x) < c_0 < 0$, donde c_0 es una constante. Multiplicando (7,21) por $\rho(x)$, obtendremos

$$\rho C X'' + \rho E X' + \rho F_2 X - \lambda\rho X = 0.$$

Para poder escribir los primeros dos términos en la forma

$$[p(x)X']',$$

debe cumplirse que

$$(\rho C)' = \rho E.$$

Hallando $\rho(x)$ en esta ecuación diferencial, obtendremos

$$\rho(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{E - C'}{C} dx} > 0$$

(hemos tomado una solución parcial de la ecuación diferencial para $\rho(x)$). Introduciendo ahora las denotaciones

$$\rho C = -p \text{ y } \rho F_2 = q,$$

podemos plantear nuestra ecuación en la forma (1,22). A partir de las suposiciones hechas se deduce que $p(x) > p_0$, $\rho(x) > \rho_0$, donde p_0 y ρ_0 son constantes positivas.

Supondremos que $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $\rho(x)$ son continuas para $0 \leqslant x \leqslant l$.

2. De modo que vamos a considerar el problema de los valores propios, es decir, buscaremos una solución no trivial de la ecuación (1,22) que satisfaga las condiciones

$$\left.\begin{aligned} A_0 X(0) + B_0 X'(0) &= 0, \\ A_1 X(l) + B_1 X'(l) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2,22)$$

donde $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$ y $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$.

Teorema 1. *Si $X_1(x)$ y $X_2(x)$ son funciones propias correspondientes a un mismo valor λ, $X_1(x) = cX_2(x)$, donde c es una constante.*

En efecto, como $X_1(x)$ y $X_2(x)$, por suposición, satisfacen las condiciones

$$A_0 X_1(0) + B_0 X_1'(0) = 0,$$

$$A_0 X_2(0) + B_0 X_2'(0) = 0$$

y $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$, el determinante de Wronski

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1' & X_2' \end{vmatrix}$$

de las soluciones X_1 y X_2 de la ecuación (1,22) se anula en el punto $x = 0$ y, por lo tanto, las funciones $X_1(x)$ y $X_2(x)$ son linealmente dependientes.

En lo sucesivo supondremos que las funciones propias están normalizadas con peso ρ, es decir, han sido escogidas de manera que

$$\int_0^l \rho(x)\,[X(x)]^2\,dx = 1. \qquad (3,22)$$

Una función $X(x)$ con esta propiedad se puede obtener multiplicando una función arbitraria propia $\widetilde{X}(x)$ por el número

$$\frac{1}{\sqrt{\int_0^l \rho(x)\,[\widetilde{X}(x)]^2\,dx}}$$

Es evidente que para un valor propio dado la función propia normalizada se determina unívocamente, salvo el signo.

Teorema 2. *Las funciones propias correspondientes a distintos valores propios son ortogonales con peso $\rho(x)$, es decir, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $X_i(x)$ es la función propia correspondiente al valor propio λ_i $(i = 1, 2)$, entonces*

$$\int_0^l \rho(x)\,X_1(x)\,X_2(x)\,dx = 0. \qquad (4,22)$$

Demostración. Escribamos las identidades

$$(pX_1')' - qX_1 + \lambda_1\rho X_1 = 0,$$
$$(pX_2')' - qX_2 + \lambda_2\rho X_2 = 0.$$

Multipliquemos la primera por X_2, la segunda por X_1 y restemos una de otra. Obtendremos la identidad

$$[pX_1']' X_2 - [pX_2']' X_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\,\rho X_1X_2 = 0.$$

Integrando esta identidad entre 0 y l, obtendremos (mediante la integración por partes)

$$\int_0^l (\lambda_2 - \lambda_1)\,\rho X_1X_2\,dx =$$

$$= pX_1'X_2\Big|_0^l - pX_2'X_1\Big|_0^l - \int_0^l pX_1'X_2'\,dx + \int_0^l pX_2'X_1'\,dx.$$

El miembro derecho de esta igualdad es igual a cero, ya que los dos últimos sumandos se cancelan, mientras que

$$p(l)\,[X_1'(l)\,X_2(l) - X_2'(l)\,X_1(l)] = 0$$

y

$$p(0)\,[X_1'(0)\,X_2(0) - X_2'(0)\,X_1(0)] = 0$$

en virtud de las condiciones (2,22). Por eso

$$\int_0^l \rho X_1X_2\,dx = 0,$$

ya que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

3. Para hacer más sencilla la exposición ulterior nos limitaremos a considerar las condiciones de contorno

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{5,22}$$

El problema de los valores propios será reducido en este epígrafe al problema de encontrar un extremo condicionado (mínimo) de una funcional. La funcional se escoge de manera que la ecuación (1,22) sea para la misma la ecuación de Lagrange-Euler.[58]

Consideremos dos funcionales cuadráticas de la función $X(x)$

$$D(X) = \int_0^l (pX'^2 + qX^2)\, dx,$$

$$H(X) = \int_0^l \rho X^2\, dx.$$

Las funcionales

$$D(X_1, X_2) = \int_0^l (pX_1'X_2' + qX_1X_2)\, dx,$$

$$H(X_1, X_2) = \int_0^l \rho X_1X_2\, dx$$

se llaman *funcionales bilineales* correspondientes a las funcionales cuadráticas dadas. Y aquí se cumple el siguiente teorema.

[58] Véase M. A. Lavrentiev y L. A. Lusternik, Curso de cálculo de variaciones, segunda edición, Gostiejizdat, 1950.

Teorema 3. *Si λ es un valor propio del problema considerado de valores propios, y X_λ es la función propia normalizada correspondiente, para cualquier función $f(x)$ que tiene derivada continua y verifica las condiciones* (5,22) *se tiene*

$$D(X_\lambda, f) = \lambda \int_0^l \rho X_\lambda f\, dx = \lambda H(X_\lambda, f).$$

Demostración. Al integrar por partes, empleando las condiciones (5,22) para la función f y la ecuación (1,22), obtendremos

$$D(X_\lambda, f) = \int_0^l (pX'_\lambda f' + qX_\lambda f)\, dx =$$

$$= pX'_\lambda f\Big|_0^l - \int_0^l [(pX'_\lambda)' - qX_\lambda] f\, dx = \lambda \int_0^l \rho X_\lambda f\, dx =$$

$$= \lambda H(X_\lambda, f).$$

Corolario. Sea $X_i(x)$ la función propia que corresponde al valor propio λ_i. Entonces

$$D(X_i) = \lambda_i, \quad D(X_i, X_j) = 0, \text{ para } i \neq j.$$

Teorema 4. *La razón* $\dfrac{D(X)}{H(X)}$ (*para* $X \not\equiv 0$) *está acotada inferiormente y, por lo tanto, tiene cota inferior máxima.*

En efecto,

$$D(X) = \int_0^l (pX'^2 + qX^2)\, dx \geqslant \int_0^l qX^2\, dx =$$

$$= \int_0^l \frac{q}{\rho} \rho X^2\, dx \geqslant \min_{0 \leqslant x \leqslant l} \frac{q(x)}{\rho(x)} H(X).$$

Si consideramos las funciones que satisfacen la condición $H(X) = 1$, para éstas estarán acotados inferiormente los valores de la propia funcional $D(X)$. Y como todo valor propio $\lambda = D(X_\lambda)$, si $H(X_\lambda) = 1$, obtenemos de aquí un corolario importante. *Los valores propios de nuestro problema están acotados inferiormente.*

Consideremos el problema de encontrar el mínimo de la funcional $D(X)$ con la condición $H(X) = 1$. La clase de funciones admisibles será el conjunto de funciones $X(x)$ con dos derivadas continuas definidas en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$ que verifican las condiciones (5,22). *Supongamos que este mínimo se alcanza en la clase de funciones admisibles.*[59] Entonces la función que lo

---

[59] La demostración de existencia de la solución de este problema, así como de todos los otros problemas variacionales sobre los cuales trataremos en este capítulo, véase en el apéndice de I. M. Gelfand y G. A. Sujomlínov al libro de M. A. Lavrentiev y L. A. Lusternik "Fundamentos del cálculo de variaciones", t. 1, parte 2, (1935).

En el cálculo de variaciones se demuestra que si exigiésemos de las funciones admisibles la existencia de derivadas continuas de primer orden solamente, el problema variacional tendría solución de todos modos. Su solución tendría obligatoriamente derivadas continuas de segundo orden y por eso sería igual a la solución de ese mismo problema en la clase de funciones con dos derivadas continuas.

suministra debe, como se sabe del curso del cálculo de variaciones, *satisfacer para cierto λ la ecuación de Lagrange-Euler para la* funcional

$$D(X) - \lambda H(X) = \int_0^l [pX'^2 + qX^2 - \lambda \rho X^2]\, dx =$$

$$= \int_0^l F(x, X, X')\, dx,$$

es decir, la ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial X'} = 0,$$

que en nuestro caso es igual a la ecuación (1,22). Las condiciones de contorno del problema de los valores propios y del problema variacional considerado también son iguales. Por eso la función $X_1(x)$ que suministra el extremo de $D(X)$ bajo la condición $H(X) = 1$, es una función propia del problema inicial de los valores propios. Pero como siempre $D(X_\lambda) = \lambda$, en virtud del teorema 3, es evidente que el valor propio al cual corresponde $X_1(x)$ debe ser el menor. Designémoslo por λ_1.

Demostremos que la función $X(x)$ que suministra el mínimo de la funcional $D(X)$ en la clase de funciones admisibles que satisfacen las condiciones anteriores y además la condición complementaria

$$\int_0^l \rho X_1 X\, dx = 0,$$

es una función propia correspondiente al segundo —en valor— valor propio.

En efecto, la función que suministra el mínimo indicado debe satisfacer la ecuación de Lagrange-Euler para la funcional

$$D(X) - \lambda H(X) - \mu \int_0^l \rho X_1 \, X \, dx,$$

que en el caso dado puede escribirse en la forma

$$(pX')' - qX + \lambda\rho X + \frac{1}{2} \mu\rho X_1 = 0; \tag{6,22}$$

λ y μ son ciertas constantes.

Demostremos que $\mu = 0$. Para ello escribamos la ecuación (1,22) sustituyendo λ por λ_1 y X por X_1:

$$(pX'_1)' - qX_1 + \lambda_1\rho X_1 = 0. \tag{7,22}$$

Multipliquemos (6,22) por X_1, (7,22) por X, restemos uno del otro e integremos entre 0 y l. Repitiendo la integración por partes, realizada al demostrar la ortogonalidad, y basándonos en que

$\int_0^l \rho X_1 X \, dx = 0$. obtendremos

$$\mu \int_0^l \rho X_1^2 \, dx = 0,$$

de donde se deduce que

$$\mu = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación (6,22) tiene la forma

$$(pX')' - qX + \lambda\rho X = 0,$$

y X es una función propia. Designémosla por $X_2(x)$. Demostremos que el valor propio λ_2 que corresponde a esta función es el valor propio más cercano a λ_1. Evidentemente $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$, ya que al aumentar el número de condiciones que se exigen de las funciones admisibles, el mínimo de $D(X)$ puede solamente crecer. El valor λ_2 no puede ser igual a λ_1, ya que si lo fuera $X_2(x)$, en virtud del teorema 1, sería igual a $\pm X_1(x)$ lo que contradice la condición $\int_0^l X_1 X\, dx = 0$. Por lo tanto, $\lambda_2 > \lambda_1$.

Demostremos que entre λ_2 y λ_1 no hay otros valores propios. En efecto, si existiese una terna de valores propios $\lambda_2 > \widetilde{\lambda} > \lambda_1$, correspondientes a las funciones propias X_2, $\widetilde{X}$, X_1, es fácil ver que no sería la función X_2 sino la función $\widetilde{X}$ la que suministraría el mínimo del problema variacional que acabamos de considerar, de acuerdo con el corolario del teorema 3.

De modo totalmente análogo se demuestra que la función $X_n(x)$ que suministra el mínimo de $D(X)$ en la clase de funciones con dos derivadas continuas que satisfacen las condiciones (5,22) y las condiciones

$$H(X) = 1, \quad \int_0^l \rho X_j X\, dx = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

donde $X_j(x)$ que es la función propia j-ésima, es la función propia que corresponde al valor propio n-ésimo en valor.

Por lo tanto, queda dado un método para hallar sucesivamente los valores propios y las funciones propias. Como se demostrará en lo sucesivo $\lambda_n \to \infty$ para $n \to \infty$ y, por consiguiente, de ese modo pueden hallarse todos los números propios y las funciones propias.

4. Se puede señalar un método que permite buscar directamente el valor propio n-ésimo y la función propia n-ésima sin tener que calcular previamente las funciones propias anteriores. Expondremos el método mediante el siguiente teorema.

Teorema de Courant:

Sea $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{n-1}(x)$ un sistema arbitrario de funciones continuas en el segmento $[0, l]$. Designemos por $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ el mínimo de la funcional $D(X)$ en la clase de funciones con dos derivadas continuas que se anulan en los extremos del segmento y que satisfacen las siguientes condiciones complementarias

$$H(X) = 1, \tag{8,22}$$

$$\int_0^l \rho\varphi_i X\,dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{9,22}$$

Entonces el n-ésimo valor propio λ_n del problema de los valores propios considerado más arriba es igual a la cota superior de los valores de $\lambda(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ para cualesquiera funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Demostración. De acuerdo con lo anterior

$$\lambda(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \lambda_n,$$

y por eso es suficiente demostrar que para cualquier selección de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$

$$\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \leqslant \lambda_n.$$

Demostremos que para un sistema arbitrario $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ se puede indicar una función admisible $\widetilde{X}(x)$ que satisface las condiciones (5,22), (8,22) y (9,22) y tal que

$$D(\widetilde{X}) \leqslant \lambda_n.$$

De aquí se desprende que

$$\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \leqslant \lambda_n$$

y el teorema queda demostrado.

La función $\widetilde{X}(x)$ la podemos buscar en la forma

$$\widetilde{X}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(x).$$

Es evidente que esta función cualesquiera que sean c_k se anula en $x = 0$ y $x = l$ y tiene derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive. Escojamos los coeficientes c_k de manera que se cumplan las condiciones (8,22) y (9,22). Sustituyendo $\widetilde{X}$ en (8,22) y basándonos en que $H(X_i, X_k) = 0$ para $i \neq k$ (propiedad de ortogonalidad de las funciones propias), obtenemos

$$H(\widetilde{X}) = \int_0^l \rho\widetilde{X}^2\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = 1. \qquad (10,22)$$

Las condiciones (9,22) dan el sistema de ecuaciones

$$\int_0^l \rho\varphi_i\widetilde{X}\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^l \rho\varphi_i X_k\, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

que es un sistema de $n - 1$ ecuaciones lineales con n incógnitas c_k que tendrá siempre soluciones no triviales. Normalizando una de estas soluciones mediante (10,22), escogemos la función $\widetilde{X}(x)$. Hallemos $D(\widetilde{X})$:

$$D(\widetilde{X}) = \int_0^l \left[p\left(\sum_{k=1}^n c_k X_k'\right)^2 + q\left(\sum_{k=1}^n c_k X_k\right)^2 \right] dx =$$

$$= \int_0^l \left(p \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_k c_l X_k' X_l' + q \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_k c_l X_k X_l \right) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^n c_k^2 D(X_k) + \sum_{k \neq 1} c_k c_l D(X_k, X_l) =$$

$$= \sum_{k=1}^n c_k^2 D(X_k) = \sum_{k=1}^n c_k^2 \lambda_k \leqslant \lambda_n \sum_{k=1}^n c_k^2 \text{ [60]} = \lambda_n,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Observación. En lugar de buscar el mínimo de la funcional $D(X)$ con las condiciones (8,22) y (9,22) se puede buscar el mínimo de la relación $\dfrac{D(X)}{H(X)}$ con las condiciones (9,22). El valor mínimo será el mismo; pero en el segundo caso la función extremante será determinada con exactitiud que excluye un factor constante.

[60] Ya que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda n$.

5. Para la investigación ulterior de los valores propios y de las funciones propias, nos será útil conocer cómo varían los valores propios al variar los coeficientes de la ecuación (1,22) y al variar el segmento sobre el cual se consideran las soluciones.

a) *Al variar los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ en un sentido determinado, los valores propios varían en el mismo sentido.* Más exactamente, si tenemos dos ecuaciones

$$(pX')' - qX + \lambda\rho X = 0,$$

$$(p^*X')' - q^*X + \lambda\rho X = 0,$$

siendo

$$p(x) \leqslant p^*(x), \quad q(x) \leqslant q^*(x),$$

entonces $\lambda_n \leqslant \lambda_n^*$ donde λ_n y λ_n^* son, respectivamente, los n-ésimos valores propios de la primera y la segunda ecuación.

La demostración se deduce de que

$$D(X) = \int_0^l (pX'^2 + qX^2)dx \leqslant \int_0^l (p^*X'^2 + q^*X^2)dx = D^*(X).$$

Por eso $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \leqslant \lambda^*(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, ya que la clase de funciones admisibles $X(x)$ no varió y por lo tanto $\lambda_n \leqslant \lambda_n^*$.

b) *Al variar el coeficiente $\rho(x)$ en un sentido determinado, los valores propios varían en el sentido opuesto.*

Supongamos que $\rho(x) \leqslant \rho^*(x)$ y que el resto de los coeficientes de la ecuación no han variado. Entonces para toda función $X(x)$

$$D(X) = D^*(X), \text{ y } H(X) \leqslant H^*(X).$$

Por eso

$$\frac{D(X)}{H(X)} \geqslant \frac{D^*(X)}{H^*(X)}. \tag{11,22}$$

Toda función $X(x)$ que satisfaga las condiciones (9,22) para ciertas $\varphi_i(x)$, satisfará las condiciones análogas

$$\int_0^l \rho^*(x)\varphi_i^*(x)\, X(x)\, dx = 0,$$

si se toma

$$\varphi_i^*(x) = \frac{\rho(x)}{\rho^*(x)}\, \varphi_i(x).$$

De aquí y de la desigualdad (11,22) concluimos que

$$\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \geqslant \lambda^*(\varphi_1^*, \ldots, \varphi_{n-1}^*).$$

Y como que $\rho^*(x) \geqslant \rho(x) > \rho_0 > 0$, el conjunto de todas las $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ coincide con el conjunto de todas las $(\varphi_1^*(x), \ldots, \varphi_n^*(x))$ y por eso $\lambda_n \geqslant \lambda_n^*$.

c) *Al disminuir el segmento* $[0, l]$ *los valores propios no decrecen.* Más exactamente, si en el problema considerado de los valores sustituimos el segmento $[0, l]$ por el segmento $[0, l^*]$ donde $l^* < l$ y designamos los valores propios del nuevo problema mediante λ^*, entonces $\lambda_n^* \geqslant \lambda_n$.

En efecto, $\lambda^*(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, que juega el papel de $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ en el nuevo problema, coincidirá con el mínimo de la funcional $D(X)$ definida para el segmento $[0, l]$, si además de las condiciones (8,22) y (9,22) imponemos a la clase de funciones admisibles que $X(x) \equiv 0$ para $l^* \leqslant x \leqslant l$. Pero al imponer nuevas condiciones la clase de funciones admisibles decrece, y el mínimo de la funcional puede sólo aumentar.[61]

Por lo tanto, $\lambda^*(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \geqslant \lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. Y por eso $\lambda_n^* \geqslant \lambda_n$.

Refiriéndonos al ejemplo concreto considerado en el § 20, podemos deducir de aquí la relación conocida entre la longitud de una cuerda y la altura de su tono principal: mientras más corta es la cuerda mayor es la frecuencia de sus vibraciones propias (que es igual a $\frac{k\pi}{l}$) y más alto será el sonido producido.

6. Exactamente con el mismo método que hemos empleado para estudiar los valores propios de la ecuación (1,22) con las condiciones de contorno

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{5,22}$$

se pueden estudiar los valores propios de la ecuación (1,22) con las condiciones de contorno

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0, \tag{12,22}$$

o con las condiciones de contorno

$$X'(0) - \sigma_0 X(0) = 0, \quad X'(l) + \sigma_1 X(l) = 0, \tag{13,22}$$

[61] Si exigimos de las funciones $X(x)$, continuas en $[0, l]$ al igual que sus primeras dos derivadas, que se anulen para $l^* \leqslant x \leqslant l$, con ello estamos exigiendo que en $x = l^*$ se anule no sólo la propia función $X(x)$, sino también sus primeras dos derivadas. Sin embargo, se puede demostrar que esta exigencia complementaria no varía el mínimo de $D(X)$ en el segmento $[0, l^*]$.

donde $\sigma_0 \geqslant 0$ y $\sigma_l \geqslant 0$; o bien imponiendo en un extremo del intervalo $(0, l)$ una de las anteriores condiciones de contorno y en el otro extremo la otra.

A continuación exponemos el teorema fundamental que permite la investigación de los valores propios con las condiciones de contorno (13,22) y que es análogo al teorema del subepígrafe **4**:

Sea $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ *un sistema arbitrario de funciones continuas en el segmento* $[0, l]$. *Designemos por* $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ *el mínimo de la funcional*

$$\int_0^l (pX'^2 + qX^2)\, dx + \sigma_0 p(0)\, X^2(0) + \sigma_l p(l)\, X^2(l) \qquad (14{,}22)$$

en la clase de funciones con dos derivadas continuas que satisface las siguientes condiciones

$$H(X) = 1, \quad \int_0^l \rho\varphi_i X\, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (15{,}22)$$

Entonces el n*-ésimo valor propio* λ_n *del problema considerado de los valores propios es igual a la cota superior de los valores de* $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ *para cualesquiera funciones* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ *siempre que éstas sean continuas.*

Valiéndonos de este teorema podemos, como en el caso de extremos fijos, estudiar cómo dependen los valores propios de $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$, σ_0, σ_l, l.

Si tomamos como funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ las primeras $n-1$ funciones propias $X_1, \ldots, X_{n-1}$ del problema considerado, entonces la función que suministra el mínimo de la funcional (14,22) con las condiciones (15,22) es la n-ésima función propia de este problema, y el mínimo de la funcional es su n-ésimo valor propio.

Si $\sigma_0 = 0$ y $\sigma_l = 0$, tenemos el problema de los valores propios para la ecuación (1,22) con las condiciones de contorno (12,22). En este caso la n-ésima función propia suministrará el mínimo de $D(X)$ en la clase de funciones con dos derivadas continuas *que satisfacen las mismas condiciones*

$$H(X) = 1, \quad \int_0^l \rho X_j X \, dx = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

donde $X_1, \ldots, X_{n-1}$ son las primeras funciones propias de este problema, al igual que en el caso de los extremos fijos. Pero ahora no se exige de las funciones admisibles que verifiquen cierta condición en los extremos del intervalo $(0, l)$. La función que soluciona este problema variacional satisface automáticamente las condiciones (12,22). Este es el "problema libre". Corresponde a vibraciones de una cuerda libre, es decir, cuyos extremos no se han fijado. Recordemos, sin embargo, que cuando decimos que una cuerda *no* está fija en los extremos, queremos decir, solamente, que sus extremos pueden moverse arbitrariamente sobre la *recta perpendicular a la posición de equilibrio* de la cuerda, pero de ningún modo que los extremos puedan acercarse a lo largo de *la posición de equilibrio*.

Si de las funciones admisibles no se exige la continuidad en ningún punto interior c del intervalo $(0, l)$, la clase de funciones admisibles aumenta; $\lambda(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ y, por lo tanto, también λ_n, sólo pueden disminuir. El tono correspondiente, emitido por la cuerda, bajará. Esto corresponde a una rotura de la cuerda en un punto interior c. Entonces los extremos de ambas partes de la cuerda, permaneciendo sobre la misma recta perpendicular a la posición de equilibrio de la cuerda, pueden moverse libremente por esa recta. La función propia correspondiente X_n tendrá en el punto c una discontinuidad de primer tipo; además tendremos

$$X'_n(c+0) = 0 \text{ y } X'_n(c-0) = 0.$$

De lo anterior se deduce que los tonos de la cuerda en este caso bajarán en comparación con los tonos respectivos de la cuerda entera.

7. Nos limitaremos de nuevo a considerar las condiciones de contorno de la forma (5,22), ya que en los otros casos se pueden aplicar razonamientos completamente análogos.

Hagamos un estimado de λ_n respecto a n. Designemos los máximos de las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $\rho(x)$ en el segmento $[0, l]$ mediante p_{max}, q_{max}, y ρ_{max}, respectivamente, y los mínimos, mediante p_{min}, q_{min} y ρ_{min} y consideremos además de la ecuación (1,22) *dos ecuaciones con coeficientes constantes*

$$p_{max}X'' - q_{max}X + \lambda\rho_{min}X = 0, \tag{16,22}$$

$$p_{min}X'' - q_{min}X + \lambda\rho_{max}X = 0. \tag{17,22}$$

De los resultados del subepígrafe 5 se deduce que

$$\underline{\lambda}_n \leqslant \lambda_n \leqslant \overline{\lambda}_n, \tag{18,22}$$

donde $\overline{\lambda}_n$ y $\underline{\lambda}_n$ son, respectivamente, los n-ésimos valores propios de las ecuaciones (16,22) y (17,22). Pero las ecuaciones (16,22) y (17,22) se integran en forma finita y los valores $\overline{\lambda}_n$ y $\underline{\lambda}_n$ pueden ser calculados exactamente. Resolviendo, por ejemplo, (16,22) y encontrando una solución parcial de esta ecuación a partir de las condiciones $X(0) = X(l) = 0$, obtendremos

$$\frac{\overline{\lambda}_n\rho_{min} - q_{max}}{p_{max}} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

De aquí $\bar{\lambda}_n = C_1 n^2 + C_2$, donde C_1 y C_2 no dependen de n. Análogamente

$$\underline{\lambda}_n = c_1 n^2 + c_2.$$

Sustituyendo estos valores en (18,22), obtendremos

$$c_1 n^2 + c_2 \leqslant \lambda_n \leqslant C_1 n^2 + C_2. \tag{19,22}$$

De aquí se deduce, en particular, que los valores propios crecen ilimitadamente cuando $n \to \infty$.

8. Estudiemos ahora el comportamiento de las funciones propias cuando n crece. Para ello simplifiquemos la ecuación (1,22) mediante la sustitución

$$s = \int_0^x \varphi(x)\, dx, \quad u = \frac{1}{\psi(x)} X. \tag{20,22}$$

Busquemos las funciones $\varphi(x) > 0$ y $\psi(x) > 0$ de manera que la ecuación (1,22) después de la sustitución (20,22) se convierta en la ecuación

$$u''(s) + \lambda u = R(s) u. \tag{21,22}$$

Realizando la sustitución (20,22) para las funciones arbitrarias $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, pasaremos de la ecuación (1,22) a la ecuación

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{(\varphi\psi p)' + \varphi\psi' p}{\varphi^2\psi p}\frac{du}{ds} + \lambda\rho\frac{1}{\varphi^2 p} u = \frac{\psi q - (\psi' p)'}{\varphi^2\psi p} u.$$

Escojamos ahora las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ de manera que esta ecuación tenga la forma (21,22). Para ello es necesario determinar las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ a partir del sistema de ecuaciones

$$\frac{\rho}{\varphi^2 p} = 1, \quad (\varphi\psi p)' + \varphi\psi' p = 0.$$

Resolviendo este sistema, obtendremos

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho}{p}}, \quad \psi = \frac{c}{\sqrt[4]{\rho p}},$$

donde c es una constante arbitraria.

Por eso mediante, por ejemplo, la sustitución

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{\rho}{p}}\, dx, \quad u = \sqrt[4]{\rho p}\, X \tag{22,22}$$

podemos obtener la ecuación (21,22); $R(s)$ es aquí una función continua, si $\rho''(x)$ y $p''(x)$ son continuas, ya que $\varphi^2\psi p \neq 0$.

La solución de la ecuación (21,22) la debemos buscar en el intervalo $0 \leqslant s < l_1$, donde $l_1 = \int_0^l \sqrt{\frac{\rho}{p}}\, dx$. Las condiciones de contorno para $u(s)$, como es fácil ver, serán las mismas que para $X(x)$:

$$u(0) = 0, \quad u(l_1) = 0.$$

Si $X_n(x)$ es una función propia de la ecuación (1,22) que corresponde al valor propio λ_n, a este mismo valor propio le corresponde la función propia u_n de la ecuación (21,22).

Si

$$\int_0^l \rho X_n^2 dx = 1,$$

se comprueba fácilmente que

$$\int_0^{l_1} u_n^2(s) ds = 1. \tag{23,22}$$

Demos las fórmulas asintóticas para $u_n(s)$, cuando $n \to \infty$. Como nos interesa el comportamiento de $u_n(s)$ para n grandes, podemos considerar, basándonos en (19,22), solamente valores positivos de λ_n. Consideremos la ecuación no homogénea respecto a la función $z(s)$

$$z'' + \lambda z = R(s)u, \quad \lambda > 0, \tag{24,22}$$

donde $u(s)$ es la solución de la ecuación (21,22) para el mismo λ. La ecuación (24,22) tiene la solución general

$$z(s) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\, s + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, s + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^s R(\tau)\, u(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, (s - \tau)\, d\tau.$$ [62]

Si ponemos $C_1 = u(0)$ y $C_2 = \dfrac{u'(0)}{\sqrt{\lambda}}$; $z(s)$ satisfará para $s = 0$ las mismas condiciones iniciales que $u(s)$. Por eso, en virtud del teorema de la unicidad de la solución del problema de Cauchy para la ecuación (24,22), $z(s)$ será idéntica a $u(s)$ y obtendremos para $u(s)$ la ecuación integral

$$u(s) = u(0) \cos \sqrt{\lambda}\, s + \frac{u'(0)}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, s + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^s R(\tau)\, u(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, (s - \tau)\, d\tau. \tag{25,22}$$

[62] Véanse, por ejemplo, mis "Lecciones sobre la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias", Gostiejizdat, 1952, pág. 156.

Supongamos ahora que λ coincide con el n-ésimo valor propio, y que $v_n(s)$ es la solución de la ecuación (21,22) para $\lambda = \lambda_n$ que satisface las condiciones iniciales

$$v_n(0) = 0; \quad v'_n(0) = \sqrt{\lambda_n}.$$

Esta función $v_n(s)$ satisfará la ecuación integral

$$v_n(s) =$$

$$= \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, s + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^s R(\tau)\, v_n(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\,(s - \tau)\, d\tau \tag{26,22}$$

y diferirá, a lo sumo en el signo, de la función propia normalizada $u_n(s)$:

$$u_n(s) = \frac{v_n(s)}{\sqrt{\int_0^{l_1} v_n^2(s)\, ds}} = N_n v_n.$$

En lo que sigue demostraremos que

$$N_n \to \sqrt{\frac{2}{l_1}}.$$

Demostremos, primeramente, que todas las funciones $v_n(s)$ están acotadas por una constante que no depende de n. Para esto designemos max $|v_n(s)|$ para $0 \leqslant s \leqslant l$ mediante M_n. Entonces de la ecuación (26,22) tenemos

$$|v_n(s)| \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} M_n \int_0^{l_1} |R(\tau)|\, d\tau$$

y, por lo tanto,

$$M_n \leqslant 1 + \frac{M_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{l_1} |R(\tau)|\, d\tau,$$

$$M_n \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \displaystyle\int_0^{l_1} |R(\tau)|\, d\tau} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right). \tag{27,22}$$

Como $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$ (véase subepígrafe 7), esta desigualdad demuestra que las funciones $v_n(s)$ están acotadas.

Para lo que sigue debemos estimar de forma análoga las derivadas de primer y segundo orden de las funciones propias. Para ello, derivemos la ecuación integral

$$v_n'(s) = \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}\, s + \int_0^s R(\tau)\, v_n(\tau) \cos \sqrt{\lambda_n}\, (s - \tau)\, d\tau,$$

$$\begin{aligned} v_n''(s) = {} & - \lambda_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, s - \\ & - \sqrt{\lambda_n} \int_0^s R(\tau)\, v_n(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, (s - \tau)\, d\tau + \\ & + R(s)\, v_n(s), \end{aligned}$$

de donde

$$|v_n'(s)| \leqslant \sqrt{\lambda_n} + O(1), \quad |v_n''(s)| \leqslant \lambda_n + O(\sqrt{\lambda_n}). \tag{28,22}$$

Calculemos ahora $\int_0^{l_1} v_n^2(s)\, ds$, es decir, hallemos el factor en el cual las funciones $v_n(s)$ (y, por lo tanto, sus derivadas) difieren de las funciones propias normalizadas $u_n(s)$ (y de sus derivadas respectivas). De (26,22) tenemos

$$v_n^2(s) = \operatorname{sen}^2 \sqrt{\lambda_n}\, s + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right).$$

De aquí

$$\int_0^{l_1} v_n^2(s)\, ds = \frac{l_1}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\sqrt{\lambda_n}\, l_1}{4\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = $$
$$= \frac{l_1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

y de aquí obtenemos directamente para $u_n(s)$ los estimados análogos a (27,22) y (28,22)

$$\left.\begin{aligned} |u_n(s)| &\leqslant \sqrt{\frac{2}{l_1}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right), \\ |u_n'(s)| &\leqslant \sqrt{\lambda_n}\sqrt{\frac{2}{l_1}} + O(1), \\ |u_n''(s)| &\leqslant \lambda_n \sqrt{\frac{2}{l_1}} + O(\sqrt{\lambda_n}). \end{aligned}\right\} \qquad (29{,}22)$$

Mediante un cambio de variables según las fórmulas (22,22), se obtienen directamente los resultados correspondientes para $X_n(x)$: la acotación de las funciones propias y el mismo orden de crecimiento de las derivadas, cuando $n \to \infty$, que tiene $u_n(s)$.

9. Consideremos el problema del desarrollo de una función continua arbitraria $f(x)$, definida en $0 \leqslant x \leqslant l$, en la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) \tag{30,22}$$

respecto a las funciones propias $X_1(x), \ldots, X_n(x), \ldots$ de la ecuación (1,22). Del mismo modo que se hace para las series trigonométricas corrientes, es fácil demostrar que si la serie (30,22) *converge uniformemente* a la función $f(x)$, los coeficientes c_n son iguales a los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$ respecto al sistema de funciones $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, es decir,

$$c_n = \int_0^l \rho(x) f(x) X_n(x)\, dx \tag{31,22}$$

(véase el final del § 21).

Hagamos corresponder ahora a cada función integrable $f(x)$ su "serie de Fourier" de la forma (30,22), donde los coeficientes c_n están determinados por la fórmula (31,22) y estudiemos la convergencia de esta serie.

Demostremos primero *que para toda función $f(x)$ seccionalmente continua*[63] *y de cuadrado integrable en el segmento* $[0, l]$, *la serie* (30,22) *converge a esta función "en la media"*, es decir, que

$$\int_0^l \rho(x) [f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x)]^2\, dx \to 0$$
$$(N \to \infty).$$

[63] Es decir, que tiene un número finito de puntos de discontinuidad.

Un sistema de funciones ortogonales con cierto peso $\rho(x)$ que tenga la propiedad señalada se llama *completo.*

Para demostrar la afirmación enunciada supongamos primero que $f(x)$ *es una función continuamente derivable que satisface las condiciones* $f(0) = f(l) = 0$. Introduzcamos las denotaciones:

$$f_N(x) = f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x), \quad \delta^2_N = \int_0^l \rho\,(x)\, f^2_N(x)\, dx,$$

$$\varphi_N(x) = \frac{f_N(x)}{\delta_N}.$$

Tenemos que demostrar que $\delta^2_N \to 0$ cuando $N \to \infty$. Como que

$$\int_0^l \rho\, \varphi^2_N(x)\, dx = 1$$

y como además

$$\int_0^l \rho\, \varphi_N(x)\, X_n\,(x)\, dx = 0 \quad (n = 1, \ldots, N),$$

$\varphi_N(x)$ es una de las funciones admisibles del problema variacional considerado en el subepígrafe 3 de este epígrafe.[64] El valor del mínimo de $D(X)$ para este problema es λ_{N+1}, por lo tanto,

$$D(\varphi_N) \geqslant \lambda_{N+1}.$$

---

[64] Véase la observación de las pp. 172 - 173.

Calculemos ahora $D(\varphi_N)$. Empleando las denotaciones del 3, hallaremos

$$D(\varphi_N) = \int_0^l (p\varphi_N'^2 + q\varphi_N^2)\, dx = \frac{1}{\delta_N^2} \int_0^l (pf_N'^2 + qf_N^2)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\delta_N^2} \int_0^l [p(f' - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n')^2 + q(f - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n)^2]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\delta_N^2} [D(f) - 2 \sum_{n=1}^{N} c_n D(f, X_n) + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} c_n c_m D(X_n, X_m)] \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_{N+1}. \qquad (32,22)$$

Sobre la base del teorema 3 del subepígrafe 3, tenemos

$$D(f, X_n) = \lambda_n c_n, \quad D(X_n, X_n) = D(X_n) = \lambda_n,$$
$$D(X_m, X_n) = 0 \text{ para } n \neq m.$$

Sustituyendo los valores de las funcionales hallados en (32,22), obtendremos

$$\frac{1}{\delta_N^2} [D(f) - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n^2] \geqslant \lambda_{N+1},$$

de donde

$$\delta_N^2 \leqslant \frac{D(f) - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n^2}{\lambda_{N+1}}. \qquad (33,22)$$

De acuerdo con (19,22) existe sólo un número finito de λ_n negativos. Por eso el numerador del miembro derecho de (33,22) está acotado para todos los N. Como $\lambda_{N+1} \to \infty$ cuando $N \to \infty$, se deduce que $\delta_N^2 \to 0$ si $N \to \infty$, es decir, que la serie (30,22) converge en la media para toda función derivable que se anula en los puntos $x = 0$ y $x = l$.

Para liberarnos de las limitaciones impuestas a $f(x)$ observemos que para toda función seccionalmente continua $f(x)$ de cuadrado integrable existe una función $f^*(x)$ con derivadas continuas que se anula en los extremos del segmento $[0, l]$ y tal que

$$\int_0^l \rho \, [f(x) - f^*(x)]^2 \, dx < \varepsilon_1,$$

donde ε_1 es un número positivo cualquiera.

Supongamos ahora que N es tan grande que

$$\int_0^l \rho\,(x) \, [f^*(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n^* X_n\,(x)]^2 \, dx < \varepsilon_2;$$

donde c_n^* son los coeficientes de Fourier para $f^*(x)$. Entonces

$$\int_0^l \rho\,(x) \, [f(x) - \sum_{n=1}^{N} C_n X_n\,(x)]^2 \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^l \rho(x) \, [|f(x) - f^*(x)| + |f^*(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n^* X_n(x)|]^2 \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2 \int_0^l \rho\,(x) \, |\, f\,(x) - f^*\,(x) \,|\,|\, f^*\,(x) -$$

$$- \sum_{n=1}^{N} c_n^* X_n\,(x) \,|\, dx \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1 . \varepsilon_2}.$$

Al estimar la última integral hemos utilizado la desigualdad de Buniakovski.

De ese modo queda demostrado que cualquiera que sea la función $f(x)$ de cuadrado integrable existen N y c_n tales que

$$\int_0^l \rho(x)\,[f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x)]^2\,dx \tag{34,22}$$

es tan pequeño como se quiera. Pero se sabe (véanse, por ejemplo, mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones integrales", Gostiejizdat, 1951, pp. 66 - 67), que una integral de la forma (34,22) toma su menor valor cuando los c_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$. Por eso, si en (34,22) tomamos por c_n estos coeficientes, el valor de la integral (34,22) no aumentará.

Valiéndonos de la ortogonalidad de las funciones $X_n(x)$ podemos calcular fácilmente que $\delta_N^2 = \int_0^l \rho[f(x)]^2\,dx - \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \geqslant 0$ (desigualdad de Bessel), donde c_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$. Por lo tanto, la condición de completo del sistema de funciones puede ser escrita en forma de la siguiente igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_0^l \rho\,[f(x)]^2\,dx \tag{35,22}$$

(igualdad de Parseval).

10. Demostremos ahora el siguiente teorema fundamental: *la "serie de Fourier" de una función continuamente derivable en el segmento* $[0, l]$ *y que se anula en los extremos del segmento* $[0, l]$, *converge a esta función absoluta y uniformemente.*

Es suficiente demostrar que esta serie, en general, converge absoluta y uniformemente. En efecto, como esta serie converge "en la media" a $f(x)$, al converger uniformemente no puede tener como límite ninguna otra función.

Supongamos que n_0 es tan grande que $\lambda_n > 0$ para $n \geqslant n_0$. Utilizando la desigualdad de Cauchy podemos escribir para $n \geqslant n_0$

$$\sum_{k=n}^{n+s} |c_k X_k| = \sum_{k=n}^{n+s} |c_k \sqrt{\lambda_k}| \cdot \left| \frac{X_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} c_k^2 \lambda_k} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} \frac{X_k^2}{\lambda_k}} \leqslant \sqrt{\sum_{k=n_0}^{n+s} c_k^2 \lambda_k} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} \frac{X_k^2}{\lambda_k}}.$$

Apliquemos ahora, para estimar el primer factor, la desigualdad (33,22) y en el segundo factor saquemos del radical la cantidad

$$\max_{k,\, x} | X_k(x) | = M.$$

De la desigualdad (33,22) se deduce que

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} c_k^2 \lambda_k \leqslant D(f) + \sum_{k=1}^{n_0} c_k^2 | \lambda_k | \leqslant M_1^2$$

de manera que

$$\sum_{k=n}^{n+s} | c_k X_k | \leqslant M_1 M \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} \frac{1}{\lambda_k}}.$$

De acuerdo con (19,22)

$$\lambda_k \geqslant c_1 k^2 + c_2,$$

es decir, $\dfrac{1}{\lambda_k} \leqslant \dfrac{1}{c_1 k^2 + c_2}$ y la serie $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ converge. Por lo tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$ con n suficientemente grande y cualquier s positivo tendremos

$$\sum_{k=n}^{n+s} \frac{1}{\lambda_k} < \frac{\varepsilon^2}{M^2 M_1^2}$$

y por eso $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+s} |c_k X_k| < \varepsilon$, es decir, $\sum c_k X_k(x)$ converge absoluta y uniformemente.

§ 23. FUNDAMENTACIÓN DEL MÉTODO DE FOURIER

1. Consideremos la ecuación (1,21). Supongamos que los coeficientes de esta ecuación son funciones con tres derivadas continuas en $\overline{C}_T$ y que $A(t) > a_0 > 0$ y $C(x) > c_0 > 0$, es decir, que la ecuación (1,21) es hiperbólica.[65]

[65] Es fácil probar que todos los teoremas del § 22 y el teorema principal del § 23 son válidos, si $C(x)$ y $A(t)$ son funciones dos veces derivables, mientras que $D(t)$, $E(x)$ y $F_2(x)$ tienen derivadas continuas de primer orden y $F_1(t)$ es continua.

Buscaremos una solución de la ecuación (1,21) que tenga dos derivadas continuas en $\overline{C}_T$ y que verifique las condiciones iniciales

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u'_t(0, x) = \varphi_1(x) \tag{1,23}$$

y las condiciones de contorno

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \tag{2,23}$$

El método de Fourier conlleva la consideración de la serie (12,21) (véase el § 21). Las funciones $X_k(x)$ son funciones propias de la ecuación (1,22). Sea

$$L(f) \equiv (pf')' - qf.$$

Entonces la ecuación (1,22) se puede escribir así

$$L(X_k) = -\lambda_k \rho X_k.$$

Teorema. Si $\varphi_0(x)$ *tiene en el segmento* $[0, l]$ *tres derivadas continuas y verifica las condiciones*

$$\varphi_0 = L(\varphi_0) = 0 \text{ cuando } x = 0 \text{ y } x = l, \tag{3,23}$$

y si $\varphi_1(x)$ *tiene en este segmento dos derivadas continuas y verifica las condiciones*

$$\varphi_1 = 0 \text{ cuando } x = 0 \text{ y } x = l, \tag{4,23}$$

la función $u(t, x)$, *definida por la serie* (12,21), *tiene dos derivadas continuas y verifica en* $\overline{C}_T$ *la ecuación* (1,21), *las condiciones iniciales* (1,23) *y las condiciones de contorno* (2.23). *Además, la serie* (12,21) *se puede derivar término a término respecto a* *t y a x hasta dos veces inclusive; las series que se obtienen después de la derivación convergen absoluta y uniformemente en* $\overline{C}_T$[66]

Demostración.[67] Consideremos la serie (12,21) obtenida en el § 21:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left[A_k T_k^*(t) + B_k T_k^{**}(t) \right]. \qquad (5,23)$$

$$\text{Aquí } L(X_k) = -\lambda_k \rho X_k, \int_0^l \rho X_k^2(x)\, dx = 1,$$

$$A_k = \int_0^l \rho \varphi_0 X_k\, dx \ \text{ y } \ B_k = \int_0^l \rho \varphi_1 X_k\, dx.$$

---

[66] Las condiciones (3,23) y (4,23) son necesarias para la existencia en $\overline{C}_T$ de una solución dos veces derivable del problema planteado. En efecto, de la condición (2,23) se sigue que $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ son iguales a cero en $x = 0$ y $x = l$. Por eso de la ecuación (1,21) obtenemos que cuando $x = 0$ y $x = l$

$$C(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E(x) \frac{\partial u}{\partial x} + F_2(x)\, u = 0,$$

es decir, $L(\varphi_0) = 0$ cuando $x = 0$ y $x = l$.

[67] Esta demostración pertenece a O. A. Oleynik y A. I. Barabanov.

Las funciones T_k^* y T_k^{**} son soluciones de la ecuación (6,21) para $\lambda = \lambda_k$ y verifican las condiciones iniciales

$$T_k^*(0) = 1, \ \frac{dT_k^*(0)}{dt} = 0,$$
$$T_k^{**}(0) = 0, \ \frac{dT_k^{**}(0)}{dt} = 1.$$

Mediante una sustitución de variables, análoga a (20,22), podemos reducir la ecuación (6,21) a la forma

$$w'' + \lambda_k w = R(s)\,w. \tag{6,23}$$

Entonces $T(t) = \psi(t)w$, donde $\psi(t)$ es una función que no depende de k, y por eso las funciones w_k^* y w_k^{**} correspondientes a las funciones T_k^* y T_k^{**} verifican las condiciones iniciales

$$w_k^*(0) = a^*, \quad w_k^{*\prime}(0) = b^* \ \text{ y } \ w_k^{**}(0) = 0, \quad w_k^{**\prime}(0) = b^{**},$$

donde a^*, b^*, b^{**} son ciertos números que no dependen de k. Para las soluciones de la ecuación (6,23) podemos escribir una ecuación integral del tipo (25,22). Empleando esta ecuación integral podemos, de la misma forma que en el § 22, obtener las estimaciones para w_k^*, w_k^{**} y sus derivadas. Esto nos permitirá encontrar para las funciones $T_k^*(t)$ y $T_k^{**}(t)$ las siguientes estimaciones para valores de k suficientemente grandes

$$\left.\begin{aligned} &|T_k^*| < M, \left|\frac{dT_k^*}{dt}\right| < M\sqrt{\lambda_k}, \left|\frac{d^2T_k^*}{dt^2}\right| < M\lambda_k, \\ &|T_k^{**}| < \frac{M}{\sqrt{\lambda_k}}, \left|\frac{dT_k^{**}}{dt}\right| < M, \left|\frac{d^2T_k^{**}}{dt^2}\right| < M\sqrt{\lambda_k}, \end{aligned}\right\} \tag{7,23}$$

donde $M > 0$ es una constante.

Estimemos ahora los coeficientes de Fourier de la función $\varphi_0(x)$:

$$A_k = \int_0^l \rho\varphi_0 X_k\, dx = -\int_0^l \varphi_0 \frac{L(X_k)}{\lambda_k}\, dx =$$

$$= -\int_0^l \frac{1}{\lambda_k} L\ (\varphi_0)\ X_k\ dx. \qquad (8,23)$$

La última igualdad la hemos obtenido integrando dos veces por partes y tomando en cuenta las condiciones de contorno $\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = X_k(0) = X_k(l) = 0$. De la igualdad (8,23) obtenemos

$$\lambda_k A_k = -\int_0^l \rho \frac{L(\varphi_0)}{\rho} X_k\, dx,$$

es decir, $\lambda_k A_k$ son los coeficientes de Fourier de la función $H(x) = -\dfrac{L(\varphi_0)}{\rho}$ que es continuamente derivable y verifica las condiciones $H(0) = H(l) = 0$.

Del teorema del subepígrafe 10 del § 22 se desprende que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k A_k|\ |X_k|$ converge uniformemente. De la desigualdad (33,22) obtenemos fácilmente la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2$.

Estimemos ahora $B_k = \int_0^l \rho\varphi_1 X_k dx$. Empleando una vez más la ecuación (1,22), integrando dos veces por partes y tomando en cuenta las condiciones de contorno $\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = X_k(0) = X_k(l) = 0$, obtenemos

$$B_k = \int_0^l \rho\varphi_1 X_k\, dx = -\int_0^l \frac{1}{\lambda_k}\,\rho\,\frac{L(\varphi_1)}{\rho}\,X_k\, dx = \frac{\beta_k}{\lambda_k},$$

donde β_k son los coeficientes de Fourier de la función continua $H_1(x) = -\dfrac{L(\varphi_1)}{\rho}$. Según la igualdad (35,22) tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_2^2 = \int_0^l \rho\left(\frac{L(\varphi_1)}{\rho}\right)^2 dx.$$

Empleando las estimaciones (7,23), (29,22) y tomando en cuenta (20,22), se demuestra fácilmente que la convergencia absoluta y uniforme tanto de la serie (12,21) como de las series que se obtienen derivándola término a término respecto a x y a t hasta dos veces inclusive, se infiere de la convergencia de la serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k||A_k| + |B_k|\sqrt{|\lambda_k|}), \tag{9,23}$$

ya que para k suficientemente grande los términos de estas series no son mayores en valor absoluto que los términos de la serie

$$M_1 \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k||A_k| + |B_k|\sqrt{|\lambda_k|}),$$

donde M_1 es una constante positiva. Para demostrar la convergencia de la serie (9,23), observemos que para n suficientemente grande

$$\sum_{k=n}^{n+m} (|\lambda_k||A_k| + |B_k|\sqrt{\lambda_k}) =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m} \left(|A_k||\lambda_k|^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{|\beta_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} A_k^2\lambda_k^3} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k}} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \beta_k^2} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k}}. \tag{10,23}$$

Aquí hemos empleado la desigualdad de Cauchy. De la convergencia de las series $\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2\lambda_k^3$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ y de la desigualdad (10,23) se infiere que la serie (9,23) converge. Con esto queda demostrado el teorema.

2. Demostremos ahora que el problema mixto para ecuaciones hiperbólicas del tipo (1,21) tiene solución única. En el § 18 hemos demostrado ya la unicidad de la solución del problema mixto para la ecuación de ondas.

Realizando la integración por partes, se comprueba sin dificultad que para cualesquiera dos funciones $u(t, x)$ y $v(t, x)$ con segundas derivadas continuas en $\overline{C}_T$ se cumple la siguiente fórmula, cualquiera que sea $0 < T_1 \leqslant T$

$$\iint\limits_{C_{T_1}} \Big\{ v\Big[A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D(t)\frac{\partial u}{\partial t} + E(x)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ (F_1(t) + F_2(x))u \Big] - u\Big[\frac{\partial^2 (A(t)v)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (C(x)v)}{\partial x^2} -$$

$$- \frac{\partial (D(t)v)}{\partial t} - \frac{\partial (E(x)v)}{\partial x} + (F_1(t) + F_2(x))v \Big]\Big\}\, dx\, dt =$$

$$= \int_0^l \Big[vA(t)\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial (Av)}{\partial t} + Duv \Big]_{t = T_1} dx -$$

$$- \int_0^l \Big[vA(t)\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial (Av)}{\partial t} + Duv \Big]_{t = 0} dx +$$

$$+ \int_0^{T_1} \Big[vC(x)\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial (Cv)}{\partial x} + Euv \Big]_{x = l} dt -$$

$$- \int_0^{T_1} \Big[vC(x)\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial (Cv)}{\partial x} + Euv \Big]_{x = 0} dt. \qquad (11{,}23)$$

Supongamos que $u(t, x)$ verifica en $\overline{C}_T$ la ecuación (1,21) y las condiciones

$$u(0, x) = 0,\ u'_t(0, x) = 0,\ u(t, 0) = 0,\ u(t, l) = 0. \qquad (12{,}23)$$

Demostremos que entonces $u(t, x) \equiv 0$.

Supongamos lo contrario. Sea (T_1, x_1) un punto donde $u(t, x)$ es diferente de cero. Apliquemos la fórmula (11,23) a la función $u(t, x)$ y a la función $v(t, x)$, que escogeremos de modo que verifique en $\overline{C}_{T_1}$ la ecuación

$$\frac{\partial^2 (A(t)v)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (C(x)v)}{\partial x^2} - \frac{\partial (D(t)v)}{\partial t} - \frac{\partial (E(x)v)}{\partial x} + (F_1(t) + F_2(x))\, v = 0 \qquad (13{,}23)$$

y las condiciones

$$v(t, 0) = 0,\ v(t, l) = 0,\ v(T_1, x) = 0,\ v'_t(T_1, x) = \alpha(x), \qquad (14{,}23)$$

donde $\alpha(x)$ es una función suave no negativa que es diferente de cero sólo en una pequeña vecindad del punto (T_1, x_1) donde $u(t, x)$ conserva su signo. La función $v(t, x)$ existe de acuerdo con el teorema anterior, ya que la ecuación (13,23) tiene la forma (1,21).

Es fácil ver que debido a las relaciones (1,21), (12,23), (13,23) y (14,23), el miembro izquierdo de la igualdad (11,23) es igual a cero mientras que el miembro derecho es igual a

$$\int_0^l - u(T_1, x)\, A(T_1)\, \alpha(x)\, dx \neq 0.$$

Esta contradicción comprueba que $u \equiv 0$.

Problema. Demuestre la dependencia continua de la solución del problema mixto para la ecuación (1,21) respecto a las condiciones iniciales: *la solución $u(t, x)$ de la ecuación* (1,21) *que verifique las condiciones* (1,23) *y* (2,23) *será tan pequeña como se quiera en valor absoluto en $\overline{C}_T$, siempre que $|\varphi_0(x)|$, $\left|\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right|$ y $|\varphi_1(x)|$ sean suficientemente pequeñas para toda x en el segmento $[0, l]$.*

Para demostrar esta afirmación hay que emplear las estimaciones (7,23) y (29,22), la igualdad (35,22) para la función $\varphi_1(x)$, la desigualdad (33,22) para la función $\varphi_0(x)$ y la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$.

Observación. Es fácil demostrar que si $u(t, x)$ verifica en $\overline{C}_T$ la ecuación (1,21), las condiciones iniciales (1,23) y las condiciones de contorno (2,23), la integral

$$\iint_{C_T} \rho u^2(t, x)\, dx\, dt$$

será tan pequeña como se quiera siempre que $\int_0^l \rho\varphi_0^2(x)\, dx$ y $\int_0^l \rho\varphi_1^2(x)\, dx$ sean suficientemente pequeñas.

En efecto, representando la función $u(t, x)$ por la serie (12,21), obtenemos

$$\iint_{C_T} \rho u^2 (t, x)\, dx\, dt =$$

$$= \iint_{C_T} \rho \left| \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, A_k T_k^*(t) + \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, B_k T_k^{**}(t) \right|^2 dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \iint_{C_T} \rho \left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, A_k T_k^*(t) \right)^2 dx\, dt +$$

$$+ 2 \iint_{C_T} \rho \left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, B_k T_k^{**}(t) \right)^2 dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 + K_2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 = K_1 \int_0^l \rho \varphi_0^2(x) dx + K_2 \int_0^l \rho \varphi_1^2(x) dx,$$

donde K_1 y K_2 son ciertas constantes positivas que no dependen de φ_0 y φ_1. Al obtener este resultado hemos empleado la desigualdad elemental $(a + b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$, la ortogonalidad con peso $\rho(x)$ de las funciones propias que se suponen normalizadas, la acotación de las funciones T_k^* y T_k^{**} y la igualdad de Parseval (35,22).

3. Si las funciones iniciales $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ no verifican las condiciones del teorema que hemos demostrado, puede no existir una solución dos veces continuamente derivable en $\overline{C}_T$ del problema mixto para la ecuación (1,21). Pero si $\varphi_0(x)$ es una

función continuamente derivable que se anula en $x = 0$ y $x = l$ y si $\varphi_1(x)$ es una función continua en el segmento $[0, l]$, la serie (12,21) converge uniformemente y determina en $\overline{C}_T$ una función continua $u(t, x)$. Esta función $u(t, x)$ será la solución generalizada del problema mixto para la ecuación (1,21) correspondiente a las condiciones iniciales (1,23) y a las condiciones de contorno (2,23).

La función $u(t, x)$ se llama solución generalizada de la ecuación (1,21) con las condiciones iniciales (1,23) y las condiciones de contorno (2,23), si $u(t, x)$ es en $\overline{C}_T$ el límite, cuando $n \to \infty$, de una sucesión $u_n(t, x)$ uniformemente convergente de soluciones de la ecuación (1,21) con las condiciones de contorno (2,23) y las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u_n(0, x) &= \varphi_0^n(x), \\ \frac{\partial u_n(0, x)}{\partial t} &= \varphi_1^n(x), \end{aligned}\right\} \tag{15,23}$$

y cuando $n \to \infty$ se tiene

$$\int_0^l \rho\,[\varphi_0(x) - \varphi_0^n(x)]^2\,dx \to 0$$

y

$$\int_0^l \rho\,[\varphi_1(x) - \varphi_1^n(x)]^2\,dx \to 0. \tag{16,23}$$

Demostremos que si $\varphi_0(x)$ es una función continuamente derivable y que se anula en $x = 0$ y $x = l$ y si $\varphi_1(x)$ es una función continua en $[0, l]$, a la ecuación (1,21) con las condiciones (1,23) y (2,23) corresponde una solución generalizada única. La existencia de la solución generalizada se desprende de que las sumas parciales de la serie (12,21) forman una sucesión $u_n(t, x)$ que verifica las condiciones impuestas, de modo que la serie (12,21) es, por consiguiente, la solución generalizada. Comprobemos ahora que la solución generalizada es única.

Si las sucesiones $u_n(t, x)$ y $\widetilde{u_n}(t, x)$ correspondientes a dos diferentes sucesiones de las funciones $\varphi_0^n(x)$, $\varphi_1^n(x)$ y $\widetilde{\varphi_0^n}(x)$, $\widetilde{\varphi_1^n}(x)$ tuviesen las dos funciones límites diferentes $u(t, x)$ y $\widetilde{u}(t, x)$, tendríamos:

$$\iint\limits_{C_T} \rho\,(u - \widetilde{u})^2\, dx\, dt =$$

$$= \iint\limits_{C_T} \rho\,[(u - u_n) + (u_n - \widetilde{u_n}) + (\widetilde{u_n} - \widetilde{u})]^2\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 3 \iint\limits_{C_T} \rho\,(u - u_n)^2\, dx\, dt + 3 \iint\limits_{C_T} \rho\,(u_n - \widetilde{u_n})^2\, dx\, dt +$$

$$+ 3 \iint\limits_{C_T} \rho\,(\widetilde{u_n} - \widetilde{u})^2\, dx\, dt. \qquad (17,23)$$

Según la observación del 2 del epígrafe presente, la integral

$$\iint\limits_{C_T} \rho(u_n - \widetilde{u_n})^2\, dx\, dt$$

tiende a cero cuando $n \to \infty$, ya que

$$\int_0^l \rho\,(\varphi_0^n - \widetilde{\varphi}_0^n)^2\,dx \quad \text{y} \quad \int_0^l \rho\,(\varphi_1^n - \widetilde{\varphi}_1^n)^2\,dx$$

tienden a cero cuando $n \to \infty$. Puesto que las otras dos integrales en el miembro derecho de la desigualdad (17,23) también tienden a cero, tendremos

$$\iint_{C_T} \rho\,(u - \widetilde{u})^2\,dx\,dt = 0.$$

Debido a que $u - \widetilde{u}$ y $\rho > 0$ son funciones continuas, obtenemos $u(t, x) \equiv \widetilde{u}(t, x)$.

De la definición de la solución generalizada del problema mixto para la ecuación (1,21) se desprende que, si para las funciones dadas $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ existe en $\overline{C}_T$ una solución del problema mixto con segundas derivadas continuas, la solución generalizada del problema mixto coincide con esta solución.

A veces la solución generalizada del problema mixto para la ecuación (1,21) con las condiciones (1,23), (2,23) se define como una función $u(t, x)$ para la cual

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{C_T} \rho\,(u_n - u)^2\,dx\,dt = 0, \qquad (18,23)$$

donde $u_n(t, x)$ son soluciones de la ecuación (1,21) con las condiciones de contorno (2,23) y las condiciones iniciales (15,23) y se supone que se cumplen las relaciones (16,23).

Señalemos otras posibles formas de definición de la solución generalizada del problema mixto en las cuales se emplean identidades integrales (véase § 9). Para facilitar la exposición consideraremos la ecuación

$$P(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)\,u = 0. \qquad (19{,}23)$$

La solución generalizada del problema mixto para la ecuación (19,23) con las condiciones iniciales y de contorno (1,23), (2,23) es una función $u(t, x)$ que tiene primeras derivadas continuas en $\overline{C}_T$, verifica las condiciones

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u(t, 0) = u(t, l) = 0 \qquad (20{,}23)$$

y la identidad integral

$$\iint\limits_{C_T}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial t} - p\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x} - qu\sigma\right) dx\,dt +$$

$$+ \int_0^l \varphi_1(x)\,\sigma(0, x)\,dx = 0 \qquad (21{,}23)$$

cualquiera que sea la función $\sigma(t, x)$, cuyas primeras derivadas son continuas, y que se anula para $t = T$, para $x = 0$ y para $x = l$.

A veces es cómodo utilizar la siguiente definición.

La solución generalizada del problema mixto para la ecuación (19,23) con las condiciones (1,23), (2,23) es una función $u(t, x)$ continua en $\overline{C}_T$ que verifica la identidad integral

$$\iint\limits_{C_T} uP(\sigma)\,dx\,dt + \int_0^l \varphi_0(x)\,\frac{\partial \sigma}{\partial t}(0, x)\,dx -$$

$$- \int_0^l \varphi_1(x)\,\sigma(0, x)\,dx = 0, \qquad (22{,}23)$$

donde $\sigma(t, x)$ es una función arbitraria con segundas derivadas continuas y para la cual

$$\sigma(t, 0) = \sigma(t, l) = \sigma(T, x) = \frac{\partial\sigma}{\partial t}(T, x) = 0. \quad (23{,}23)$$

Es evidente que la solución generalizada definida por la identidad (21,23) para las condiciones (20,23) es, a la vez, solución generalizada en el sentido (22,23); el recíproco, en general, no se cumple.

Introduciendo las soluciones generalizadas, podemos ampliar, en una u otra medida, la clase de funciones iniciales para las cuales existe la solución del problema mixto. Es muy importante que en la nueva clase de soluciones conserve su validez el teorema de la unicidad.

Problema 1. Demuestre que la solución generalizada de la ecuación (19,23) con las condiciones (1,23), (2,23), definida mediante la relación (18,23) (donde $\rho = 1$), existe y es única, si las funciones $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ son continuas por partes y de cuadrado integrable en el segmento $[0, l]$.

Problema 2. Demuestre que la solución generalizada de la ecuación (19,23) con las condiciones (1,23), (2,23), definida mediante las relaciones (20,23), (21,23), existe y es única, si la función $\varphi_0(x)$ tiene dos derivadas continuas en el segmento $[0, l]$, $\varphi_1(x)$ tiene una derivada continua en este segmento y, además, se cumple

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0 \text{ y } q(x) \geqslant 0.$$

Sugerencia. Para demostrar la unicidad emplee la función

$$\sigma(t, x) = \int_T [u_1(\tau, x) - u_2(\tau, x)]\, d\tau,$$

donde u_1 y u_2 son dos soluciones generalizadas de un mismo problema mixto.

Problema 3. Demuestre que la solución generalizada de la ecuación (19,23) con las condiciones (1,23) y (2,23), definida mediante la relación (22,23), existe y es única, si la función $\varphi_0(x)$ es continua en el segmento $[0, l]$, se anula en $x = 0$, $x = l$, tiene una derivada seccionalmente continua y es de cuadrado integrable en este segmento, mientras que $\varphi_1(x)$ es seccionalmente continua y de cuadrado integrable en el segmento $[0, l]$.

Sugerencia. Emplee, para demostrar la unicidad, los resultados del 4 del presente subepígrafe.

4. Método de Fourier para una ecuación hiperbólica no homogénea

Consideremos en $\overline{C}_T$ el problema mixto para la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)\,u + f(t, x) \equiv L(u) + f(t, x), \tag{24,23}$$

es decir, queremos encontrar en $\overline{C}_T$ una solución de esta ecuación que tenga segundas derivadas continuas, verifique las condiciones iniciales

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u'_t(0, x) = \varphi_1(x) \tag{25,23}$$

y las condiciones de contorno

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \tag{26,23}$$

Será suficiente construir la solución que verifique las condiciones (25,23) con $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) \equiv 0$, que la solución que buscamos se obtendrá añadiendo a ésta la serie (12,21).

Busquemos la solución $u(t, x)$ del problema planteado en la forma de la serie de Fourier $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) X_k(x)$, según las funciones propias de la ecuación $L(X) = -\lambda X$ con las condiciones de frontera $X(0) = X(l) = 0$. Desarrollando $f(t, x)$ en serie de Fourier según estas funciones propias y comparando los coeficientes de Fourier de los miembros derecho e izquierdo de la ecuación (24,23) obtendremos, para determinar los coeficientes de Fourier $a_k(t)$, ecuaciones diferenciales del tipo

$$a_k''(t) = -\lambda_k a_k(t) + f_k(t), \tag{27,23}$$

donde $f_k(t) = \int_0^l f(t, x)\, X_k(x)\, dx$ y $L(X_k) = -\lambda_k X_k$. Se comprueba fácilmente que la solución de la ecuación (27,23) que verifica las condiciones $a_k(0) = a_k'(0) = 0$, es la función

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau.$$

Por lo tanto, la solución $u(t, x)$ de la ecuación (24,23) que verifique las condiciones (26,23) y las condiciones

$$u(0, x) = u_t'(0, x) = 0, \tag{28,23}$$

debe representarse mediante la serie

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_k}(t - \tau)\, d\tau \right) X_k(x). \tag{29,23}$$

Si la serie (29,23) y las series obtenidas derivándola término a término respecto a x y a t hasta dos veces inclusive, convergen uniformemente en $\overline{C}_T$, la suma de esta serie es una función que tiene en $\overline{C}_T$ segundas derivadas continuas y que verifica la ecuación (24,23) y las condiciones (26,23) y (28,23). Este carácter convergente se puede garantizar si exigimos que la función continua $f(t, x)$ tenga una derivada continua de segundo orden respecto a x y que para cualquier t se cumplan las condiciones $f(t, 0) = f(t, l) = 0$. Debe suponerse además que los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ tienen dos derivadas continuas. La demostración de este resultado es análoga a la demostración del teorema fundamental del presente epígrafe. Los coeficientes de Fourier $f_k(t)$ de la función $f(t, x)$ se estiman de la misma forma que los coeficientes B_k de la serie (12,21).

§ 24. APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN DE GREEN AL PROBLEMA DE LOS VALORES PROPIOS Y A LA FUNDAMENTACIÓN DEL MÉTODO DE FOURIER

Para demostrar la existencia de un sistema completo de funciones propias en el problema de los valores propios y para estudiar las propiedades principales de este sistema, se puede emplear otro método, sin tener que recurrir a la solución de problemas variacionales. Para ello reducimos el problema de contorno a una ecuación integral de Fredholm de segunda especie, mediante la llamada *función de Green* que ahora construiremos.

1. Consideremos el problema de hallar en el intervalo $(0, l)$ la solución de la ecuación

$$(pX')' - qX = f(x), \tag{1,24}$$

que verifique las condiciones

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{2,24}$$

Además de la ecuación (1,24), consideremos la ecuación

$$(pY')' - qY = g_\varepsilon(x, x_0) \tag{3,24}$$

que tiene el mismo miembro izquierdo que la ecuación (1,24) pero cuyo término independiente es

$$g_\varepsilon(x, x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} \text{ cuando } x_0 - \dfrac{\varepsilon}{2} < x < x_0 + \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ 0 \text{ para todas las restantes } x. \end{cases}$$

Aquí ε y x_0 son ciertos parámetros; $\varepsilon > 0$; $0 < x_0 < l$, $0 < \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \min\{x_0, l - x_0\}$. *Supongamos que* $Y_\varepsilon(x, x_0)$ es la solución de esta ecuación que verifica las condiciones de contorno (2,24) y depende de los parámetros ε y x_0.[68]

[68] El miembro derecho de la ecuación (3,24) tiene dos puntos de discontinuidad de primera especie: $x = x_0 \pm \dfrac{\varepsilon}{2}$. Se puede probar que si $q \geqslant 0$, existe una solución única de la ecuación (3,24) que verifica las condiciones de contorno (2,24) y es continua al igual que su primera derivada en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$. La segunda derivada tiene discontinuidades de primera especie en $x = x_0 \pm \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Multipliquemos la ecuación (1,24) por Y_ε y la ecuación (3,24) por X sustituyendo previamente Y_ε por Y; restemos la segunda de la primera e integremos la diferencia según el intervalo $(0, l)$. Obtendremos

$$\int_0^l [(pX')' \, Y_\varepsilon - (pY'_\varepsilon)' \, X] \, dx =$$

$$= \int_0^l [Y_\varepsilon(x, x_0) \, f(x) - X(x) g_\varepsilon(x, x_0)] \, dx.$$

Debido a que las funciones $X(x)$ e $Y_\varepsilon \, (x, x_0)$ se anulan en los extremos del intervalo de integración, el miembro izquierdo de la igualdad es igual a cero y esto se comprueba fácilmente realizando una doble integración por partes:

$$\int_0^l (pX')' \, Y_\varepsilon dx = pX'Y_\varepsilon \Big|_0^l - \int_0^l pX'Y'_\varepsilon \, dx =$$

$$= - pY'_\varepsilon X \Big|_0^l + \int_0^l (pY'_\varepsilon)' X \, dx = \int_0^l (pY'_\varepsilon)' X \, dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^l Y_\varepsilon(x, x_0) \, f(x) \, dx = \int_0^l g_\varepsilon(x, x_0) \, X(x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{2}} X(x) \, dx \approx X(x_0). \qquad (4,24)$$

Si suponemos que cuando $\varepsilon \to 0$ la función $Y_\varepsilon\,(x, x_0)$ converge uniformemente respecto a x a una función límite [denotémosla $G(x, x_0)$], entonces, pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$ en ambos miembros de la igualdad (4,24), obtenemos

$$X\,(x_0) = \int_0^l G\,(x,\ x_0)\,f\,(x)\,dx. \tag{5,24}$$

La función límite $G(x, x_0)$ es precisamente la *función de Green* para la ecuación (1,24).

Estos razonamientos poco rigurosos no permiten por ahora dar la demostración completa de ningún resultado. Por eso, definiremos la función de Green independientemente de los razonamientos anteriores —que más bien tienen carácter ilustrativo— y demostraremos, en primer lugar, que dicha función existe y, en segundo lugar, que la fórmula (5,24) es válida.

Antes de dar la definición exacta de la función de Green, veamos qué propiedades debe tener el límite —si es que existe— de $Y_\varepsilon\,(x, x_0)$. Sustituyamos $Y_\varepsilon\,(x, x_0)$ por Y en (3,24) e integremos la identidad obtenida respecto a x entre $x_0 - \delta$ y $x_0 + \delta$, donde $\delta > \frac{\varepsilon}{2}$. Obtendremos

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \{[pY'_\varepsilon(x, x_0)]' - qY_\varepsilon(x, x_0)\}\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g_\varepsilon(x, x_0)\,dx = 1.$$

El primer sumando se puede integrar en forma explícita y la igualdad anterior toma la forma

$$pY'_\varepsilon(x,\ x_0)\Big|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} - \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} qY_\varepsilon(x,\ x_0)\,dx = 1.$$

Supongamos que aquí se puede pasar formalmente al límite cuando $\varepsilon \to 0$ y δ es fijo; tendremos la igualdad

$$p(x_0 + \delta)\, G'_x(x_0 + \delta, x_0) - p(x_0 - \delta)\, G'_x(x_0 - \delta, x_0) - \\ - \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} q(x)\, G(x, x_0)\, dx = 1,$$

que se cumple para cualquier $\delta > 0$. Pasando ahora al límite cuando $\delta \to 0$ y suponiendo que $p(x)$, $q(x)$ y $G(x, x_0)$ son funciones continuas, encontraremos la igualdad

$$p(x_0)\,[G'_x(x_0 + 0, x_0) - G'_x(x_0 - 0, x_0)] = 1,$$

de donde se infiere que para las suposiciones hechas la derivada $G'_x(x, x_0)$ de la función de Green respecto a x tiene en $x = x_0$ un salto que es igual a $\dfrac{1}{p(x_0)}$.

2. Demos ahora la definición formal de la función de Green para la ecuación (1,24) y demostremos que existe.

Llamamos función de Green para la ecuación (1,24) *con las condiciones de contorno* (2,24) *a una función* $G(x, s)$ *definida en el cuadrado* $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant s \leqslant l$, *que verifica las siguientes* condiciones:

1º *Para* $x \neq s$, $G(x, s)$ *como función de* x *es continua al igual que sus derivadas hasta el segundo orden inclusive y verifica la ecuación homogénea*

$$[pG'_x(x, s)]'_x - qG(x, s) = 0. \tag{6,24}$$

2º. $$G(0, s) = G(l, s) = 0.$$

3º *$G(x, s)$ es continua en el cuadrado* $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant s \leqslant l$ mientras que $G'_x(x, s)$ *tiene, como función de x, una discontinuidad de primera especie en $x = s$ con un salto de $\frac{1}{p(s)}$, es decir,*

$$G'_x(s + 0, s) - G'_x(s - 0, s) = \frac{1}{p(s)} \quad (0 < s < l).$$

Al demostrar la existencia de esta función supondremos que $q \geqslant 0$ de manera que $\lambda = 0$ no es valor propio de la ecuación

$$(pX')' - qX + \lambda\rho X = 0$$

con las condiciones de contorno (2,24). (Véase el § 39 de mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias", 1952).

Haciendo esta suposición, la existencia de la función de Green se demuestra construyéndola directamentte. En efecto, sea $X_1(x)$ cierta solución no trivial de la ecuación $(pX')' - qX = 0$ que verifica la condición

$$X_1(0) = 0,$$

y sea $X_2(x)$ una solución no trivial de la misma ecuación que verifica la condición

$$X_2(l) = 0.$$

Debido a la suposición hecha, las soluciones $X_1(x)$ y $X_2(x)$ son linealmente independientes. De lo contrario serían simplementte proporcionales y cada una se anularía en $x = 0$ y $x = l$ sin ser idénticamente nulas; y esto es imposible, ya que $\lambda = 0$ no es un valor propio. Supongamos

$$G(x, s) = \begin{cases} A(s)\, X_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ B(s)\, X_2(x), & s < x \leqslant l. \end{cases} \qquad (7,24)$$

Entonces las condiciones 1 y 2 se verifican cualesquiera que sean $A(s)$ y $B(s)$.

Escojamos ahora $A(s)$ y $B(s)$ de manera que se cumpla la tercera condición. De la continuidad de $G(x, s)$ en $x = s$, obtenemos

$$A(s)X_1(s) = B(s)X_2(s),$$

de donde

$$A(s) = c(s)X_2(s),$$

$$B(s) = c(s)X_1(s).$$

Exijamos que el salto de la derivada en el punto $x = s$ tenga el valor dado $\dfrac{1}{p(s)}$:

$$G'_x(s - 0, s) = c(s)\, X_2\,(s)X'_1(s),$$

$$G'_x(s + 0, s) = c(s)\, X_1\,(s)X'_2(s),$$

de donde obtenemos

$$c(s) = \frac{1}{p(s)\,[X_1(s)X'_2(s) - X'_1(s)X_2(s)]}.$$

El denominador $p(s)\ [X_1(s)\,X'_2(s) - X_2(s)\,X'_1(s)]$ no depende de s. En efecto, dentro de los corchetes figura el determinante de Wronsky $\Delta\,(X_1, X_2)$ de las soluciones linealmente independientes $X_1(s)$ y $X_2(s)$. Según la fórmula conocida

$$\Delta(X_1, X_2) = \Delta_0 e^{-\int_0^x \frac{p'(x)\,dx}{p(x)}} = \frac{\Delta_0 p\,(0)}{p\,(x)},$$

de donde se sigue que $c(s)$ es constante.

De modo que la función de Green tiene la forma:

$$\left.\begin{aligned} G(x, s) &= \frac{1}{\Delta_0\, p(0)} X_2(s) X_1(x) \text{ cuando } 0 \leqslant x \leqslant s, \\ G(x, s) &= \frac{1}{\Delta_0\, p(0)} X_1(s) X_2(x) \text{ cuando } s \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \quad (8,24)$$

Por consiguiente, queda demostrada la existencia de la función de Green.

De la fórmula (8,24) se infiere directamente que *la función de Green es simétrica respecto a sus argumentos*:

$$G(x, s) = G(s, x).$$

Demostremos ahora la fórmula (5,24) para la solución $X(x)$ de la ecuación (1,24), que verifica las condiciones de contorno (2,24). Probemos primeramente que la función

$$X(x) = \int_0^l G(x, s)\, f(s)\, dx \qquad (9,24)$$

satisface la ecuación (1,24). Debido a la simetría de la función de Green, la función definida por la fórmula (9,24) coincide con (5,24). Para calcular $X'(x)$ representemos (9,24) en la forma

$$X(x) = \int_0^x G(x, s)\, f(s)\, ds + \int_x^l G(x, s)\, f(s)\, ds. \quad (10,24)$$

Derivando esta relación respecto a x, obtenemos

$$X'(x) = \int_0^x G'_x(x, s)\, f(s)\, ds + \int_x^l G'_x(x, s)\, f(s)\, ds +$$
$$+ G(x, x-0)\, f(x) - G(x, x+0)\, f(x).$$

Puesto que la función de Green es continua, encontramos

$$X'(x) = \int_0^x G'_x(x, s)\, f(s)\, ds + \int_x^l G'_x(x, s)\, f(s)\, ds. \qquad (11,24)$$

Derivando (11,24) respecto a x, obtendremos la expresión de $X''(x)$ en la forma

$$X''(x) = \int_0^x G''_{xx}(x, s)\, f(s)\, ds + \int_x^l G''_{xx}(x, s)\, f(s)\, ds +$$

$$+ G'_x(x, x-0)\, f(x) - G''_x(x, x+0)\, f(x).$$

Puesto que $G'_x(x+0, x) - G'_x(x-0, x) = \frac{1}{p(x)}$, tendremos que $G'_x(x,\ x-0) - G'_x(x,\ x+0) = \frac{1}{p(x)}$. Por eso

$$X''(x) = \int_0^l G''_{xx}(x,\ s)\, f(s)\, ds + \frac{f(x)}{p(x)}. \qquad (12,24)$$

Sustituyendo en la ecuación (1,24) las expresiones para X, X', X'', obtendremos

$$(pX')' - qX = \int_0^l [(p(x)\, G'_x)'_x - qG]\, f(s)\, ds + f(x) = f(x).$$

Observando la forma del miembro derecho de la igualdad (5,24) podemos ver que la función $X(x)$ definida por la igualdad (5,24) se anula en $x = 0$ y $x = l$.

Por lo tanto, la fórmula (5,24) ofrece la solución de la ecuación (1,24), que verifica las condiciones (2,24). Debido a la suposición $q \geqslant 0$, esta solución de la ecuación (1,24) es única.

3. Veamos cómo mediante la función de Green para la ecuación (1,24) el problema de los valores propios, examinado en los epígrafes anteriores, se reduce a una ecuación integral. Para ello escribamos la ecuación principal (1,22) en la forma

$$(pX')' - qX = - \lambda \rho X \tag{13,24}$$

y, tomando $f(x) = - \lambda \rho X$, apliquemos a la misma la fórmula (5,24). Obtendremos la igualdad.

$$X(s) + \lambda \int_0^l G(x, s)\, \rho(x)\, X(x)\, dx = 0, \tag{14,24}$$

que representa una ecuación homogénea de Fredholm de segunda especie con núcleo simetrizable y parámetro λ.

El núcleo de la ecuación (14,24) se puede simetrizar multiplicando la igualdad (14,24) por $\sqrt{\rho(s)}$. Entonces la ecuación se convierte en una ecuación con la función incógnita $\sqrt{\rho(s)}\, X(s)$ y con el núcleo simétrico $G(x, s) \sqrt{\rho(x)\, \rho(s)}$. De acuerdo con la fórmula (5,24), la ecuación (13,24) junto con la condición de contorno $X(0) = X(l) = 0$ y la ecuación (14,24) son equivalentes, en el sentido de que toda solución de (13,24) que se anula en $x = 0$ y $x = l$ es una solución, correspondiente al mismo valor de λ, de la ecuación (14,24) y viceversa.

Por otro lado, para ecuaciones del tipo (14,24) son válidos los teoremas demostrados en el § 22 sobre la existencia de valores y funciones propias y sobre la ortogonalidad de las funciones propias, así como el teorema referente a la descomposición (véanse, por ejemplo, mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones integrales", Gostiejizdat, 1951 §§ 11 - 14). De aquí se desprenden directamente los teoremas sobre la existencia y ortogonalidad de las funciones propias y el teorema sobre la descomposición, demostrados en el § 22. Es verdad que para demostrar el teorema de la descomposición para la función $f(x)$ es necesario exigir que su segunda derivada sea continua para poder representarla en la forma (5,24) y aplicar el teorema de Gilbert-Schmidt.

La función de Green, que reduce una ecuación diferencial a una integral, se puede definir también para otros tipos de condiciones de contorno y en el caso de ecuaciones con muchas variables independientes. Sin embargo, su expresión explícita se logra obtener solamente para casos muy especiales de ecuaciones y condiciones de contorno.

4. La función de Green permite fundamentar el método de Fourier aplicado a la solución del problema mixto de la ecuación (1,21) con las condiciones (1,23), (2,23), sin emplear los resultados del § 22.

Para simplificar la exposición, consideremos una ecuación del tipo (19,23), donde $p > 0$, $q \geqslant 0$, y demostremos para esta ecuación el teorema enunciado en el subepígrafe 1 del § 23. La serie (12,21) tiene la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_k}t\right). \qquad (15,24)$$

Aquí λ_k son los valores propios y $X_k(x)$ las funciones propias de la ecuación

$$L(X) \equiv (pX')' - qX = -\lambda X \qquad (16,24)$$

con las condiciones de contorno (2,24). La existencia de valores propios y de funciones propias se demuestra basándose en la equivalencia de la ecuación (16,24) con las condiciones (2,24) y la ecuación integral con núcleo simétrico

$$X(x) + \lambda \int_0^l G(x, s)\, X(s)\, ds = 0, \qquad (17,24)$$

donde $G(x, s)$ es la función de Green para el problema (16,24), (2,24).

Puesto que las funciones iniciales $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ verifican las condiciones del teorema del 1 del § 23, los coeficientes A_k y B_k de (15,24) cumplen las relaciones (véase § 23):

$$A_k = \int_0^l \varphi_0 X_k\, dx = -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^l L(\varphi_0)\, X_k\, dx; \qquad (18,24)$$

$$B_k = \int_0^l \varphi_1 X_k\, dx = -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^l L(\varphi_1)\, X_k\, dx. \qquad (19,24)$$

Para demostrar que la serie (15,24) y las series que se obtienen derivándola término a término respecto a x y a t hasta dos veces inclusive, convergen uniformemente, es suficiente probar que en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$ convergen uniformemente las siguientes series

$$\sum_{k=1}^{\infty} | X_k(x) | (\lambda_k | A_k | + \sqrt{\lambda_k} | B_k |), \tag{20,24}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} | X'_k(x) | \left(| A_k | + \frac{| B_k |}{\sqrt{\lambda_k}} \right) \tag{21,24}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} | X''_k(x) | \left(| A_k | + \frac{| B_k |}{\sqrt{\lambda_k}} \right) \tag{22,24}$$

La ecuación (16,24) nos da

$$X''_k = \frac{-p'}{p} X'_k + \frac{q - \lambda_k}{p} X_k ;$$

por consiguiente, la serie (22,24) converge uniformemente si convergen uniformemente las series (20,24) y (21,24).

Supongamos, igual que antes,

$$D(f, g) = \int_0^l (pf'g' + qfg)\, dx,$$

$$D(f) = \int_0^l (pf'^2 + qf^2)\, dx ;$$

es evidente que $D(f) \geqslant 0$ para toda función f. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (16,24) por X_k e integrando entre 0 y l, obtenemos mediante la integración por partes

$$\lambda_k \int_0^l X_k^2 \, dx = D(X_k) ;$$

de aquí se desprende que $\lambda_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ya que $X'_k(x) \not\equiv 0$.

Lema. Supongamos que la función $f(x)$ es continua en el segmento $[0, l]$, se anula en $x = 0$ y $x = l$, tiene en este segmento una derivada continua por partes y es de cuadrado integrable.

Entonces se cumple la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \leqslant D(f), \tag{23,24}$$

donde $c_k = \int_0^l f \, X_k dx \qquad (k = 1, 2, \ldots)$

Demostración. Integrando por partes, obtenemos

$$D(f, X_k) = -\int_0^l f[(pX'_k)' - qX_k] \, dx = \lambda_k c_k ;$$

$$D(X_i, X_k) = \lambda_k \int_0^l X_i \, X_k \, dx = \lambda_k \delta_{ik}.$$

Esto nos permite encontrar que

$$0 \leqslant D\left(f - \sum_{k=1}^{N} c_k X_k\right) = D(f) + D\left(\sum_{k=1}^{N} c_k X_k\right) -$$

$$- 2D\left(f, \sum_{k=1}^{N} c_k X_k\right) = D(f) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k^2,$$

de donde se desprende (23,24).

Según la suposición, la función $L(\varphi_0)$ verifica las condiciones del lema que acabamos de demostrar; por eso la desigualdad (23,24) se cumple para $L(\varphi_0)$. Recordando (18,24), encontramos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2 \leqslant D(L(\varphi_0)). \tag{24,24}$$

La función $L(\varphi_1)$ es continua en el segmento $[0, l]$. Tomando en cuenta la relación (19,24) obtenemos, empleando la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 B_k^2 \leqslant \int_0^l [L(\varphi_1)]^2 \, dx. \tag{25,24}$$

De la ecuación (17,24) tenemos

$$\frac{X_k(x)}{\lambda_k} = -\int_0^l G(x, s) X_k(s) \, ds; \tag{26,24}$$

por consiguiente, $\dfrac{X_k(x)}{\lambda_k}$ para x fijo es el k-ésimo coeficiente de

Fourier de la función $-G(x, s)$ que verifica en el segmento $0 \leqslant s \leqslant l$ las condiciones del lema. Por eso

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k} \leqslant D(G) \leqslant M_1 \text{ cuando } 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (27,24)$$

Derivando (26,24), obtenemos

$$\frac{X_k(x)}{\lambda_k} = -\int_0^l G_x X_k(s)\, ds;$$

en virtud de la desigualdad de Bessel, de aquí se desprende que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k'^2(x)}{\lambda_k^2} \leqslant \int_0^l G_x'^2\, ds \leqslant M_2 \text{ cuando } 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (28,24)$$

Comprobemos ahora que la serie (20,24) converge uniformemente en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$. Aplicando la desigualdad de Cauchy y empleando la estimación (27,24) encontramos

$$\sum_{k=n}^{n+m} |X_k(x)| (\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k|) =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m} \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} (\lambda_k^{\frac{3}{2}} |A_k| + \lambda_k |B_k|) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k}} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^3 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^2 B_k^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{M_1} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^3 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^2 B_k^2} \right);$$

de aquí se infiere la convergencia uniforme de la serie (20,24) ya que las series numéricas $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 B_k^2$ convergen debido a (24,24) y (25,24).

Demostremos la convergencia uniforme de la serie (21,24). Usando la desigualdad (28,24), obtenemos

$$\sum_{k=n}^{n+m} |X_k'(x)| \left(|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m} \frac{|X_k'(x)|}{\lambda_k} (\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k|) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{M_2} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^2 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k B_k^2} \right). \qquad (29,24)$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 A_k^2$ converge debido a que para la función $L(\varphi_0)$ se cumple la desigualdad de Bessel; la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k^2$ converge en virtud de la aplicación del lema a la función φ_1. Por eso de (29,24) se desprende la convergencia uniforme de la serie (21,24).

Observación 1. Haciendo los mismos razonamientos se puede fundamentar el método de Fourier para el problema mixto con la ecuación general (1,21), con sólo utilizar las estimaciones del tipo (7,23) para las funciones $T_k^*(t)$ y $T_k^{**}(t)$ y sus derivadas.

Observación 2. Los resultados del presente epígrafe permiten obtener de otra forma el teorema fundamental expuesto en el 10 del § 22. En efecto, para una función que verifica las condiciones del lema anterior, debido a las desigualdades (23,24) y (27,24), obtenemos:

$$\sum_{k=n}^{n+m} |c_k| \, |X_k(x)| = \sum_{k=n}^{n+m} \sqrt{\lambda_k}\, |c_k| \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{D(G)} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k c_k^2} < \varepsilon$$

para una $n > N(\varepsilon)$, es decir, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x)$ converge uniforme y absolutamente en el segmento $[0, l]$.

§ 25. ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES DE UNA MEMBRANA

1. En el § 1 hemos considerado el ejemplo de la ecuación de las vibraciones de una membrana

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1,25}$$

Supongamos que en la posición de equilibrio la membrana coincide con una región acotada G del plano (x, y) que tiene frontera Γ suave por trazos. Entonces la función $u(t, x, y)$ que determina estas vibraciones debe verificar la ecuación (1,25) y las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u\,(0,\ x,\ y) &= \varphi_0(x,\ y) \ \text{(desplazamiento inicial)}, \\ u'_t(0,\ x,\ y) &= \varphi_1(x,\ y) \ \text{(velocidad inicial)}, \end{aligned}\right\} \quad (2{,}25)$$

cuando el punto $(x, y) \in G$. En la frontera Γ de la región G la función $u(t, x, y)$ debe verificar alguna de las condiciones de contorno del tipo considerado en el § 1.

Analizaremos el caso elemental: una membrana con borde fijo, es decir, la condición de contorno

$$u(t,\ x,\ y) = 0, \text{ cuando } (x,\ y) \in \Gamma. \qquad (3{,}25)$$

Resolviendo el problema nuevamente por el método de separación de variables, pongamos

$$u(t,\ x,\ y) = T(t)\, v\,(x,\ y).$$

Análogamente al caso unidimensional, obtendremos las siguientes ecuaciones para las funciones $T(t)$ y $v(x, y)$:

$$T'' + \lambda T = 0, \qquad (4{,}25)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda v = 0. \qquad (5{,}25)$$

Para la ecuación (5,25) con la condición de contorno (3,25) existe una sucesión infinita de valores propios. Las funciones propias correspondientes a los diferentes valores propios son ortogonales. En comparación con el caso de una variable independiente, puede suceder que a ciertos valores propios corresponda no una, sino varias funciones propias linealmente independientes. Estos valores propios se dicen múltiples. Entre las funciones propias que corresponden a un valor propio dado, siempre se puede escoger un sistema finito de funciones propias linealmente independientes y ortogonales entre sí, de manera que cada función propia —correspondiente a este valor propio— sea una combinación lineal de las mismas.

Las funciones propias así escogidas para todos los valores propios forman un sistema completo de funciones ortogonales

$$v_1(x, y), \quad v_2(x, y), \; \ldots, \; v_n(x, y), \; \ldots$$

Desarrollemos las funciones $\varphi_0(x, y)$ y $\varphi_1(x, y)$ en series según las funciones $v_n(x, y)$

$$\varphi_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x, y), \quad \varphi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n v_n(x, y). \tag{6,25}$$

Tomemos dos soluciones $T^*(t)$ y $T^{**}(t)$ linealmente independientes de la ecuación (4,25) de modo que se verifiquen las condiciones

$$T^*(0) = 1; \quad T^{*\prime}(0) = 0; \quad T^{**}(0) = 0; \quad T^{**\prime}(0) = 1.$$

La serie

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y) [A_n T_n^*(t) + B_n T_n^{**}(t)] \tag{7,25}$$

representa la solución de nuestro problema siempre que tanto esta serie como las que se obtienen derivándola término a término respecto a t, x e y, hasta dos veces inclusive, converjan uniformemente.

Consideraremos ahora dos casos particulares en que las funciones propias de la ecuación (5,25) se pueden encontrar, a su vez, separando las variables. Análogamente se puede proceder en el caso en que el número de variables es mayor. Estos casos se pueden estudiar exhaustivamente, reduciéndolos a un problema de valores propios unidimensional mediante el siguiente lema.

Lema .*Sea* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ *un sistema completo de funciones ortogonales y normalizadas con peso* $\rho_1(x)$ *en el segmento* $[a, b]$. *Supongamos, además, que para todo* n $(n = 1, 2, \ldots)$ *existe un sistema completo de funciones*

$$\psi_{n1}(y),\ \psi_{n2}(y),\ \ldots,\ \psi_{nm}(y),\ \ldots \tag{8,25}$$

ortogonales y normalizadas con peso $\rho_2(y)$ *en el segmento* $[c, d]$. *Las funciones* $\rho_1(x)$ *y* $\rho_2(y)$ *se suponen continuas y no negativas. En este caso las funciones*

$$X_{nm}(x, y) = \varphi_n(x)\psi_{nm}(y)$$

forman un sistema completo de funciones ortogonales y normalizadas con peso $\rho(x, y) = \rho_1(x)\ \rho_2(y)$ *en el rectángulo* $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, *es decir, se cumplen las igualdades*

$$\int_c^d\int_a^b \rho\,(x, y)\,X_{nm}(x, y)\,X_{n'm'}(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ si } n = n', \quad m = m', \\ 0 \text{ si } n \neq n' \text{ ó } m \neq m', \end{cases} \tag{9,25}$$

y si

$$c_{nm} = \int_a^d\int_c^b \rho\,(x, y)\,f\,(x, y)\,X_{nm}\,(x, y)\,dx\,dy,$$

para cualquier función $f(x, y)$, continua en el rectángulo señalado, se cumple la igualdad de Parseval

$$\int_c^d \int_a^b \rho(x, y) [f(x, y)]^2 \, dx \, dy = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm}^2. \qquad \textbf{(10,25)}$$

Demostración. Es evidente que las fórmulas (9,25) son válidas. Para demostrar (10,25) tomemos

$$\int_a^b \rho_1(x) f(x, y) \varphi_n(x) \, dx = g_n(y).$$

Entonces es obvio que

$$\int_c^d \rho_2(y) g_n(y) \psi_{nm}(y) \, dy = c_{nm},$$

$$\int_a^b \rho_1 [f(x, y)]^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(y)$$

y que

$$\int_c^d \rho_2(y) g_n^2(y) \, dy = \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}^2$$

ya que los sistemas $\psi_{mm}(y)$ son completos para cualquier n y la función $g_n(y)$ es de cuadrado integrable.

Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(y)$ está formada por términos positivos y converge en todo punto del segmento $[c, d]$ a una función continua, podemos afirmar, de acuerdo con el teorema de Dini, que esta serie converge uniformemente en este segmento y que, por lo tanto,

$$\int_c^d \int_a^b \rho\,(x,\ y)\ [f(x,\ y)]^2\, dx\ dy = \int_c^d \rho_2(y) \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(y)\ dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^d \rho_2\,(y)\ g_n^2(y)\ dy = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm}^2\,,$$

que es lo que queríamos demostrar.

2. Consideremos el primer caso particular: *vibraciones de una membrana rectangular.*

Supongamos que la región G es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Separando las variables en la ecuación (5,25), pongamos

$$v(x,\ y) = X(x)\ Y\ (y)\,.$$

Después de la sustitución de esta función, la ecuación (5,25) toma la forma

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0\,.$$

Dividamos por XY y pasemos $\frac{X''}{X}$ al miembro derecho de la igualdad. La igualdad obtenida

$$\frac{Y''}{Y} + \lambda = -\frac{X''}{X}$$

es equivalente a dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' + \alpha X = 0, \quad Y'' + \beta Y = 0,$$

donde α es una constante y $\beta = \lambda - \alpha$. De acuerdo con la condición de contorno (3,25), la primera ecuación debe resolverse con las condiciones

$$X(0) = X(a) = 0,$$

y la segunda con las condiciones análogas

$$Y(0) = Y(b) = 0.$$

Para verificar estas condiciones debemos aceptar que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ (véase el § 20). Repitiendo los razonamientos del § 20, obtenemos *las sucesiones de valores propios y de funciones propias normalizadas* de la primera y segunda ecuaciones

$$\alpha_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x;$$

$$\beta_m = \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_m(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} y;$$

$$(n, m = 1, 2, \ldots).$$

De acuerdo con el lema, el sistema de funciones

$$v_{nm}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} y \qquad (11,25)$$

es un sistema completo de soluciones ortogonales y normalizadas de la ecuación (5,25) en el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ con la condición de contorno (3,25), (aquí $Y_{nm}(y) = Y_m(y)$ para cualquier n). A cada función propia $v_{nm}(x, y)$ corresponde el valor propio

$$\lambda_{nm} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right).$$

Es evidente que si los números a y b son conmesurables, podremos obtener un mismo valor de λ para n y m escogidos de diferente modo, es decir, para diferentes funciones propias. Tenemos, por consiguiente, un ejemplo de valores propios múltiples.

El problema del desarrollo de las condiciones iniciales en una serie según las funciones (11,25) es simplemente el estudio correcto de la descomposición de una función en una serie doble de Fourier según los senos. Si las condiciones iniciales —después de extenderlas de modo impar según x e y al rectángulo $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ y periódicamente a todo el plano— son funciones de cuatro derivadas continuas, entonces los coeficientes de las series (6,25) tienden a cero suficientemente rápido, en el sentido de que la serie (7,25) puede ser derivada dos veces. Por lo tanto, en este caso, es correcto aplicar el método de Fourier para resolver el problema planteado. Podemos ver que una vibración arbitraria de la membrana, al igual que la vibración de la cuerda, se puede representar como la superposición de una serie de vibraciones simples, las llamadas vibraciones *propias*, correspondientes a los valores propios λ_{nm}.

Presentan interés las *líneas nodos* de estas vibraciones, es decir, las líneas a lo largo de las cuales se anula la función propia correspondiente al valor propio dado. Consideremos estas líneas en el caso de la membrana rectangular. Si el valor propio dado no es múltiple, es decir, si le corresponde solamente una función propia

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} y,$$

las líneas nodos son simplemente segmentos de rectas paralelas a los lados del rectángulo. En cambio, si el valor propio es múltiple, a diferentes combinaciones de las funciones propias corresponden distintas líneas nodos, la forma de las cuales puede ser muy variada. En la figura 11 que damos más abajo hemos representado las líneas nodos de una membrana cuadrada de lado 1 para los valores $\lambda = 5\pi^2, 10\pi^2, 13\pi^2, 17\pi^2$. Debajo de las figuras de las líneas nodos hemos indicado las correspondientes funciones propias.

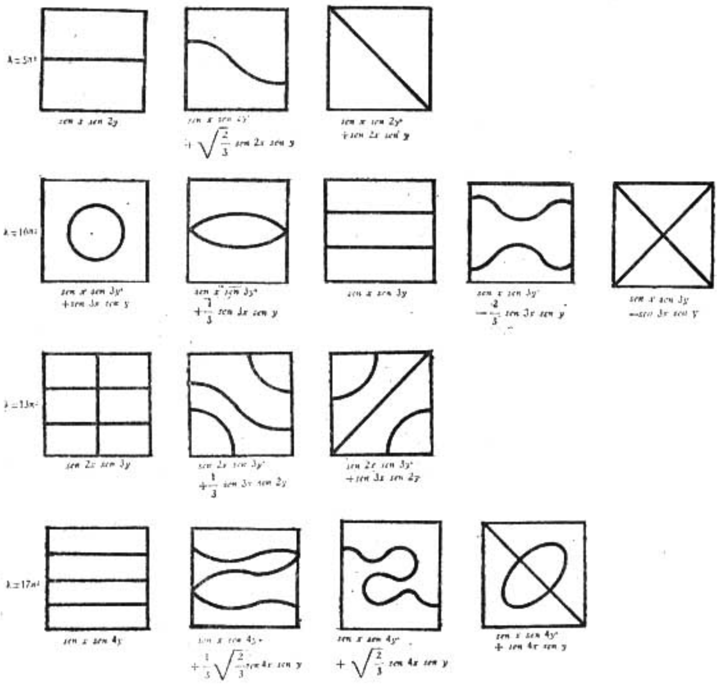

Fig. 11

3. Como segundo ejemplo consideremos una membrana circular. Para su estudio, es natural escribir la ecuación (5,25) en coordenadas polares.

Siendo $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho$ sen φ, encontramos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0. \qquad (12,25)$$

Si tomamos el centro D del círculo, con el cual coincide la menbrana en la posición de equilibrio, en el origen de coordenadas y para simplificar aceptamos que el radio del círculo es igual a 1, la condición de contorno (3,25) se puede escribir en la forma

$$v(1, \varphi) = 0.$$

Aplicando el método de separación de variables, pongamos

$$v(\rho, \varphi) = R(\rho)\, \Phi(\varphi),$$

de donde, realizando la sustitución y separando las variables, obtenemos ecuaciones diferenciales ordinarias para $R(\rho)$ y $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi''(\varphi) + \alpha \Phi(\varphi) = 0, \qquad (13,25)$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\lambda \rho^2 - \alpha)\, R = 0. \qquad (14,25)$$

Para las soluciones de la ecuación (13,25) tenemos, debido al sentido físico del problema, la condición de periodicidad; nos interesan solamente las soluciones que tienen período 2π. Tales soluciones existen solamente si

$$\alpha = 0,\ 1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ n^2 \ \ldots$$

Para estos valores de α

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi.$$

Podemos escoger un sistema completo de funciones $\Phi_n(\varphi)$ ortogonales y normalizadas en la circunsferencia, por ejemplo,

$$\Phi_0^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \Phi_n^*(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos n\varphi;\ \Phi_n^{**}(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\operatorname{sen} n\varphi.$$

Volvamos a la ecuación (14,25). Después de colocar los valores $\alpha = n^2$ y sustituir la variable independiente

$$\rho_1 = \rho\sqrt{\lambda}$$

obtenemos una ecuación de Bessel de n-ésimo orden

$$\rho_1^2 R''(\rho_1) + \rho_1 R'(\rho_1) + (\rho_1^2 - n^2)\, R(\rho_1) = 0;$$

su única solución (salvo un factor constante), acotada cuando $\rho_1 \to 0$ (es decir, cuando $\rho \to 0$), es la función de Bessel $J_n(\rho_1)$ de primera especie y n-ésimo orden.[69]

Es sabido que para cualquier n la función $J_n(x)$ tiene un número infinito de raíces positivas $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}, \ldots$, de manera que $J_n(\mu_m^{(n)}) = 0$.

Además, que para cualquier n fijo, las funciones $J_n(\mu_m^{(n)} x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ son ortogonales con peso x en el intervalo $(0, 1)$ y forman un sistema completo de funciones ortogonales en este intervalo:

$$\int_0^1 xJ_n(\mu_m^{(n)}x)\, J_n(\mu_{m_1}^{(n)}x)\, dx = 0 \quad \text{si} \quad m \neq m_1.$$

[69] Véase, por ejemplo, V. V. Stepanov, Curso de ecuaciones diferenciales, cap. VI, § 2, epígrafe 2, p. 250, Fizmatguiz, 1959.

Las funciones

$$\varphi_{nm}(x) = \frac{J_n(\mu_m^{(n)}x)}{\sqrt{\int_0^1 x\,[J_n(\mu_m^{(n)}x)]^2\,dx}}$$

para un n cualquiera forman un sistema completo de funciones ortogonales y normalizadas. Sin demostrar estos resultados,[70] observemos que son una generalización de las propiedades de las funciones propias, demostradas en el § 22, aplicadas al caso de *ecuaciones con coeficientes de forma más general que los considerados allí.* En efecto, la ecuación (14,25) se puede escribir en la forma

$$(\rho R')' - \frac{\alpha}{\rho} R + \lambda\rho R = 0,$$

y vemos que el primero y el último coeficientes se anulan en uno de los extremos del segmento $[0, 1]$ y que $\frac{\alpha}{\rho}$ se hace un infinito en ese extremo. De acuerdo con esto, se puede demostrar que bastará tomar como condición de contorno para $\rho = 0$, en el problema de valores propios de la ecuación (14,25), la condición de que la solución sea acotada, para que la misma quede determinada unívocamente, salvo un factor constante, siempre que en $\rho = 1$ se cumpla una de las condiciones del tipo (2,22).

Exijamos que para $\rho = 1$ sea

$$J_n(\sqrt{\lambda}\rho) = 0,$$

[70] Véase, por ejemplo, R. O. Kuzmin, Funciones de Bessel, ONTI, 1935; A. N. Tijonov y A. A. Samarski, Ecuaciones de física matemática. Gostiejizdat, 1953, pp. 566 - 619.

es decir, que

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Vemos que si $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}, \ldots$ es la sucesión de ceros de la función $J_n(x)$, los valores propios λ de nuestro problema serán

$$\lambda_{nm} = [\mu_m^{(n)}]^2,$$

y las funciones propias normalizadas de la ecuación (14,25) serán las funciones

$$\psi_{nm}(\rho) = J_n(\mu_m^{(n)}\rho) \frac{1}{\sqrt{\int\limits_0^1 \rho\,[J_n(\mu_m^{(n)}\rho)]^2\,d\rho}}$$

Aplicando el lema del subepígrafe 1, podremos obtener un sistema completo de funciones propias

$$\psi_{nm}(\rho)\,\Phi_n^*(\varphi),\ \psi_{nm}(\rho)\,\Phi_n^{**}(\varphi)$$

de la ecuación (12,25) y encontrar la solución de nuestro problema desarrollando las funciones $\varphi_0(\rho, \varphi)$ y $\varphi_1(\rho, \varphi)$ en series del tipo

$$\varphi_0(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} [c_{nm}^*\,\Phi_n^*(\varphi) + c_{nm}^{**}\,\Phi_n^{**}(\varphi)]\,\psi_{nm}(\rho),$$

$$\varphi_1(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} [d_{nm}^*\,\Phi_n^*(\varphi) + d_{nm}^{**}\,\Phi_n^{**}(\varphi)]\,\psi_{nm}(\rho).$$

Multiplicando los términos de la primera serie por las $T^*(t)$ correspondientes y los términos de la segunda por las $T^{**}(t)$

correspondientes, y sumando las series obtenidas, encontraremos la serie (7,25) que representa la solución del problema planteado. La convergencia uniforme y la posibilidad de derivar término a término la serie obtenida, se cumplirán, como siempre, cuando las funciones $\varphi_0(\rho, \varphi)$ y $\varphi_1(\rho, \varphi)$ sean suficientemente suaves, verifiquen las mismas condiciones de contorno que debe verificar la solución que se busca de la ecuación (1,25) y cumplan, además, ciertas condiciones adicionales en la frontera del círculo.