I. PETROVSKI

LECCIONES DE TEORIA DE LAS ECUACIONES INTEGRALES

EDITORIAL MIR - MOSCU

EDITORIAL
MIR

И. Г. ПЕТРОВСКИЙ

ЛЕКЦИИ
ПО ТЕОРИИ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

I. G. PETROVSKI

LECCIONES DE TEORIA DE LAS ECUACIONES INTEGRALES

EDITORIAL MIR • MOSCU
1971

CDU 517.94(075.8)=60

Traducido de la 3ª ed. rusa
por JUAN JOSE TOLOSA

Traducción revisada por
EMILIANO APARICIO BERNARDO,
candidato a Doctor en Ciencias físico-matemáticas,
Catedrático de Matemáticas Superiores

Traducido en la URSS
Derechos reservados

PROLOGO DEL REDACTOR DE LA TRADUCCION

Este libro es la traducción al castellano de la 3ª edición rusa. La segunda edición del mismo está traducida al alemán e inglés. Véase I. G. Petrovski, "Vorlesungen uber die Theorie der Integralgleichungen" (Physica-Verlag, Würzburg, 1953; trad. alemana de la 2ª ed. rusa, 1951) y "Lectures on the theory of integral equations" (Graylock Press, Rochester, 1957, trad. inglesa de la misma edición rusa).

A pesar de que la primera edición rusa de este libro salió en el año 1948, creemos que el tema tratado, así como su exposición, siguen siendo actuales. Esperamos que la traducción castellana será bien acogida por los matemáticos de habla castellana, no sólo por la importancia del material expuesto, sino también por la misma personalidad del autor, Rector de la Universidad de Moscú desde el año 1951.

E. Aparicio

Dedico este libro
a la memoria preclara de
mi padre
GEORGUI IVANOVICH
PETROVSKI

CAPITULO 1

INTRODUCCION. TEOREMAS DE FREDHOLM

§ 1. *Definiciones. Ejemplos*

Se acostumbra llamar ecuaciones integrales a aquéllas que contienen la función incógnita bajo el signo integral. En particular, la siguiente ecuación, respecto a la función $\varphi(\xi)$, es una integral:

$$a(x)\varphi(x)+f(x)=\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \qquad (1,1)$$

donde $a(x)$, $f(x)$, $K(x, \xi)$ son funciones dadas, y $\varphi(\xi)$ es una función incógnita; las variables x y ξ toman todos los valores del intervalo (a, b).

En este libro solamente estudiaremos ecuaciones en las que la función incógnita figura en forma lineal, es decir, solamente ecuaciones del tipo (1,1). Dichas ecuaciones se llaman ecuaciones integrales *lineales*. Si $a(x)$ no se anula, dividiendo ambas partes de la ecuación (1,1) entre $a(x)$, obtenemos una ecuación del tipo

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi+f(x). \qquad (2,1)$$

Estas ecuaciones se llaman ecuaciones integrales lineales *de segunda especie*, o *de Fredholm*, en honor al matemático que las estudió por primera vez. Si $f(x) \equiv 0$, la ecuación (2,1) se llama *homogénea*.

Si fuese $a(x) \equiv 0$, entonces la ecuación (1,1) se reduciría a

$$\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi = f(x),$$

la cual se llama ecuación integral lineal *de primera especie*.

La función $K(x, \xi)$ se llama *núcleo* de la ecuación integral.

En lo sucesivo nos ocuparemos principalmente de las ecuaciones integrales lineales de segunda especie.

Pueden considerarse ecuaciones integrales, en las que las funciones incógnitas dependan no de una variable, sino de varias. De este tipo es, por ejemplo, la ecuación

$$\varphi(x, y) = \int_G K(x, y; \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + f(x, y)$$

respecto a la función incógnita $\varphi(\xi, \eta)$, donde la integración se efectúa sobre cierta región G del plano (ξ, η). El punto (x, y) también pertenece a esta región. Esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\varphi(P) = \int_G K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ + f(P),$$

donde $P \in G$ y $Q \in G$ *).

---

*) La notación $A \in M$ significa que el punto A pertenece al conjunto M.

También pueden examinarse sistemas de ecuaciones integrales con varias funciones incógnitas.

Observación. En lo sucesivo, excepto en el § 20, sin indicarlo expresamente, supondremos que las funciones consideradas de los puntos P o Q están definidas en una región finita G de dimensión d, que son continuas en toda esta región, a excepción, posiblemente, de un número finito de puntos, de curvas y de superficies suficientemente regulares, hasta de dimensión $(d-1)$ inclusive. En estos puntos, curvas y superficies singulares, las funciones pueden no estar definidas. La frontera de la región G se considerará compuesta por un número finito de superficies regulares de dimensión $(d-1)$, o de un número finito de arcos regulares, si $d=2$.

En lo sucesivo, excepto en el § 20, la integración se entenderá en el sentido ordinario, si las funciones son continuas en G; si dichas funciones tienen discontinuidades en ciertos puntos, curvas o superficies, entonces las integrales se considerarán como impropias; se supondrá que todas las funciones estudiadas son absolutamente integrables.

§ 2. *Problemas típicos que se reducen a ecuaciones integrales*

Consideremos un hilo flexible de longitud l, el que fácilmente (en el límite, como supondremos, sin ninguna resistencia) puede cambiar su forma, pero, para aumentar su longitud en Δl se necesita aplicar una fuerza $c\,\Delta l$, donde c es una constante (ley de Hooke). Supongamos que los extremos de este hilo están fijos a dos puntos inmóviles A y B, que se encuentran en la parte no negativa del eje x. Supongamos, además, que el punto A se encuentra en el origen del eje. El eje x lo consideraremos horizontal. Cuando el hilo está en reposo, sólo bajo la acción de la fuerza horizontal de tensión T_0, muy grande, en comparación con las otras fuerzas consideradas, la posición del hilo será horizontal, o sea, coincidirá con el eje Ox.

Supongamos que en el punto C, para el cual $x=\xi$, hay aplicada al hilo una fuerza vertical P. Bajo la acción de ésta, el hilo toma la forma de una línea quebrada ACB (fig. 1). Supongamos que $CC_0=\delta$ es muy pequeño, en com-

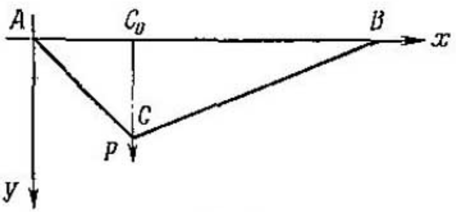

Fig. 1

paración con AC_0 y C_0B (el resultado de que P sea pequeño respecto a T_0). Despreciando el cuadrado de la magnitud δ con respecto a l, se puede considerar que también, bajo la acción de la fuerza P, la tensión del hilo se conserva igual a T_0. Proyectando sobre la vertical las fuerzas de tensión del hilo en el punto C y la fuerza P y despreciando nuevamente los miembros que contienen δ^2, obtenemos:

$$T_0\frac{\delta}{\xi}+T_0\frac{\delta}{l-\xi}=P,$$

de donde

$$\delta=\frac{P(l-\xi)\xi}{T_0 l}.$$

Designando por $y(x)$ la flexión del hilo en el punto de abcisa x, de lo anterior obtenemos

$$y(x)=P\cdot G(x,\xi),$$

donde

$$\left.\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{x(l-\xi)}{T_0 l} \text{ para el intervalo } AC(0 \leq x \leq \xi), \\ G(x, \xi) &= \frac{(l-x)\xi}{T_0 l} \text{ para el intervalo } CB(\xi \leq x \leq l). \end{aligned}\right\} \quad (1,2)$$

Aplicando estas fórmulas, puede comprobarse fácilmente que

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Supongamos que sobre el hilo actúa una fuerza distribuida en forma continua con densidad lineal $p(\xi)$ tal, que en el intervalo de éste, entre los puntos ξ y $\xi + \Delta\xi$, actúa una fuerza, aproximadamente igual a $p(\xi)\,\Delta\xi$. Ya que los desplazamientos causados por las fuerzas elementales $p(\xi)\,\Delta\xi$ se suman ("principio de superposición"), el hilo, bajo la acción de esta fuerza, toma la forma

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) p(\xi)\, d\xi.$$

Consideremos los problemas siguientes.

1. Buscaremos la densidad de distribución de la fuerza $p(\xi)$, bajo cuya acción el hilo toma una forma dada $y = y(x)$. Entonces llegamos a la ecuación integral de primera especie

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) p(\xi)\, d\xi \qquad (2,2)$$

respecto a la función incógnita $p(\xi)$.

2. Supongamos que sobre el hilo actúa una fuerza que varía con el tiempo t, con una densidad en el punto ξ igual a

$$p(\xi) \operatorname{sen} \omega t \qquad (\omega > 0).$$

Bajo su acción, el hilo se pone en movimiento. Supondremos, además, que durante su movimiento, la abscisa de cada punto del mismo no varía, y que el hilo efectúa oscilaciones periódicas, descritas por la ecuación

$$y = y(x) \operatorname{sen} \omega t.$$

Denotando por $\varrho(\xi)$ la densidad lineal de la masa del hilo en el punto ξ, obtenemos que, en el momento t, en el segmento del hilo, entre los puntos ξ y $\xi + \Delta\xi$, además de la fuerza $p(\xi) \operatorname{sen} \omega t\, \Delta\xi$ actúa también la fuerza de inercia

$$-\varrho(\xi)\, \Delta\xi \frac{d^2 y}{dt^2} = \varrho(\xi) y(\xi) \omega^2 \operatorname{sen} \omega t\, \Delta\xi.$$

Por esto, la igualdad (2,2) toma la siguiente forma:

$$y(x) \operatorname{sen} \omega t = \int_0^l G(x, \xi)[p(\xi) \operatorname{sen} \omega t + \omega^2 \varrho(\xi) y(\xi) \operatorname{sen} \omega t]\, d\xi.$$

Simplificando por $\operatorname{sen} \omega t$ y haciendo

$$\int_0^l G(x, \xi) p(\xi)\, d\xi = f(x), \quad G(x, \xi)\varrho(\xi) = K(x, \xi), \quad \omega^2 = \lambda,$$

obtenemos:

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(x, \xi) y(\xi)\, d\xi + f(x). \tag{3,2}$$

Suponiendo dada la función $p(\xi)$ y, por lo tanto, $f(x)$, llegamos de esta manera a una ecuación integral de Fredholm para la determinación de la función $y(x)$. Obsérvese que, en virtud de la definición de la función $f(x)$, se tiene que

$$f(0) = f(l) = 0.$$

Si la densidad $\varrho(\xi)$ es constante y $f(x)$ es una función con segunda derivada continua, no es difícil resolver esta ecuación integral. En efecto, poniendo en $K(x, \xi)$ en lugar de $G(x, \xi)$ su expresión dada por (1,2), resulta

$$y(x)=\omega^2\varrho\int_0^x \frac{(l-x)\xi}{T_0 l}\,y(\xi)\,d\xi+\omega^2\varrho\int_x^l \frac{x(l-\xi)}{T_0 l}\,y(\xi)\,d\xi+f(x)$$

o sea

$$y(x)=\frac{\omega^2 c}{l}(l-x)\int_0^x \xi y(\xi)\,d\xi+\frac{\omega^2 cx}{l}\int_x^l (l-\xi)y(\xi)\,d\xi+f(x),$$

donde

$$c=\frac{\varrho}{T_0}\,.$$

Derivando dos veces respecto a x ambas partes de esta ecuación, obtenemos

$$y''(x)=-\omega^2 cy(x)+f''(x). \tag{4,2}$$

Por otra parte, se puede demostrar que cualquier solución de la ecuación diferencial (4,2), que se anula para $x=0$ y $x=l$, es también solución de la ecuación integral (3,2). Para ello basta multiplicar ambas partes de la igualdad $y''(\xi)=$ $=-\omega^2 cy(\xi)+f''(\xi)$ por $-T_0G(x, \xi)$ e integrar respecto a ξ desde 0 hasta l. Entonces se obtiene la igualdad (3,2), ya que, integrando por partes, se muestra fácilmente que

$$\int_0^l T_0G(x, \xi)\varphi''(\xi)\,d\xi=-\varphi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función cualquiera con segunda derivada continua, igual a cero para $x=0$ y $x=l$.

Como es sabido por el curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, la solución general de la ecuación (4,2) tiene la forma

$$y=C_1 \operatorname{sen} \mu x + C_2 \cos \mu x + \frac{1}{\mu}\int_0^x f''(\xi) \operatorname{sen} \mu(x-\xi)\, d\xi,$$

en donde $\mu=\omega\sqrt{c}$ y C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. De las igualdades (1,2) y (3,2) se deduce que $y(0)=y(l)=0$. Determinando de estas condiciones C_1 y C_2, obtenemos que, si $\operatorname{sen} \mu l \neq 0$,

$$y(x) = -\frac{1}{\mu}\,\frac{\operatorname{sen} \mu x}{\operatorname{sen} \mu l}\int_0^l f''(\xi) \operatorname{sen} \mu(l-\xi)\, d\xi + {}$$

$$+\frac{1}{\mu}\int_0^x f''(\xi) \operatorname{sen} \mu(x-\xi)\, d\xi. \qquad (5,2)$$

En este caso, la ecuación integral (3,2) posee una solución única para cualquier función $f(x)$, siempre que $f(x)$ tenga segunda derivada continua y $f(0)=f(l)=0$.

Se puede demostrar, que para la existencia de solución de la ecuación integral (3,2) es suficiente, si $\operatorname{sen} \mu l \neq 0$, que la función $f(x)$ sea continua; la condición de existencia y, con más razón, de continuidad de la segunda derivada, es superflua. En cambio, la condición $\operatorname{sen} \mu l \neq 0$ es completamente imprescindible para que esta ecuación integral tenga solución para cualquier función continua, e incluso, para toda función $f(x)$ derivable cualquier número de veces.

Si $\operatorname{sen} \mu l = 0$, entonces

$$\mu=\frac{k\pi}{l}, \qquad (6,2)$$

$$\omega = \frac{k\pi}{l\sqrt{c}}\,, \tag{7,2}$$

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2 c} \tag{8,2}$$

en donde k es un número entero cualquiera: positivo, negativo o cero. Los valores de λ, dados por la fórmula (8,2) para $k = 1, 2, 3, \ldots$, se llaman *valores propios* (autovalores) del parámetro λ de la ecuación integral (3,2), y los correspondientes valores de ω, *frecuencias propias* de las oscilaciones de la cuerda. De la deducción de la fórmula (5,2) se desprende que la ecuación integral (3,2), en el caso en que sen $\mu l = 0$ y la función $f(x)$ tenga segunda derivada continua, puede tener solución solamente si

$$\int_0^l f''(\xi)\,\text{sen}\,\mu(l-\xi)\,d\xi = 0. \tag{9,2}$$

Integrando por partes y utilizando el hecho de que sen $\mu(l-\xi) = 0$ y $f(\xi) = 0$ para $\xi = 0$ y $\xi = l$, esta condición puede llevarse a la forma

$$\int_0^l f(\xi)\,\text{sen}\,\mu\xi\,d\xi = 0. \tag{10,2}$$

Recíprocamente, es fácil comprobar que la condición (10,2) es también suficiente para la existencia de una solución de la ecuación (3,2) para un μ dado, para el cual sen $\mu l = 0$.

En particular, la condición (10,2) se satisface si

$$f(x) \equiv 0.$$

Entonces, la ecuación integral (3,2) y la ecuación diferencial (4,2) se hacen homogéneas. Todas las soluciones de la ecuación diferencial homogénea (4,2), se igualan a cero para $x=0$ y $x=l$ y, por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación integral (3,2) vienen dadas por la fórmula

$$y(x)=C \operatorname{sen} \mu_k x, \tag{11,2}$$

donde C es una constante arbitraria y μ_k es igual a uno de los números (6,2). La fórmula (11,2) nos da las amplitudes en el punto x de las *oscilaciones propias* de la cuerda:

$$y=C \operatorname{sen} \mu_k x \operatorname{sen} \omega_k t,$$

que tienen lugar sin la acción de fuerzas exteriores. Como se ve de lo antedicho, estas oscilaciones pueden tener lugar no con cualquier frecuencia, sino solamente con una de las frecuencias dadas por la fórmula (7,2) para $k=1, 2, \ldots$

Como muestra la fórmula (5,2), si la condición (9,2) no se cumple, la amplitud $y(x)$ de las oscilaciones periódicas de la cuerda en el punto x aumenta indefinidamente, cuando ω (frecuencia de las oscilaciones de la fuerza exterior) se aproxima a una de las frecuencias propias de las oscilaciones de la cuerda. En el límite, al coincidir estas frecuencias, comienza la resonancia. Entonces, en general, para amplitudes arbitrarias de la fuerza exterior, no existen oscilaciones periódicas de la cuerda. En correspondencia con esto, en general, no existe solución de la ecuación integral no homogénea (3,2), cuando λ es igual a uno de los valores propios de esta ecuación.

§ 3. *Analogía entre las ecuaciones integrales lineales y las ecuaciones algebraicas lineales. Enunciado de los teoremas de Fredholm*

Consideraremos la ecuación integral lineal de segunda especie

$$y(x)=\int_a^b K(x, \xi)y(\xi)\,d\xi+f(x), \tag{1,3}$$

donde $K(x, \xi)$ y $f(x)$ son funciones conocidas para $a \le x \le b$, $a \le \xi \le b$. Dividamos el intervalo (a, b) en n intervalos iguales, cuyas longitudes serán

$$\frac{b-a}{n}=\Delta x=\Delta\xi.$$

Pongamos

$$\begin{aligned} K(a+p\,\Delta x,\ a+q\,\Delta\xi) &= K_{pq} \quad (p, q=1, 2, \ldots, n), \\ y(a+p\,\Delta x) &= y_p \quad (p=1, 2, \ldots, n), \\ f(a+p\,\Delta x) &= f_p \quad (p=1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Sustituyamos la integral $\int_a^b K(x, \xi)y(\xi)\,d\xi$ para $x=a+p\,\Delta x$ por la suma

$$\sum_{q=1}^{n} K_{pq}y_q\,\Delta\xi, \quad p=1, 2, \ldots, n.$$

Entonces, en lugar de la ecuación integral (1,3) obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$y_p=\sum_{q=1}^{n} K_{pq}y_q\,\Delta\xi+f_p, \quad p=1, 2, \ldots, n. \tag{2,3}$$

Aquí supondremos que K_{pq}, f_p, $\Delta\xi$ son magnitudes conocidas, y que y_p son incógnitas.

La finalidad de los próximos parágrafos es extender los conocidos teoremas de las ecuaciones algebraicas lineales a las ecuaciones integrales de Fredholm de 2ª especie. En los enunciados habituales de los teoremas de las ecuaciones lineales algebraicas intervienen determinantes, los cuales, si bien pueden ser ligados con las ecuaciones integrales, ello resulta muy laborioso. Por eso enunciaremos estos teoremas sin utilizar los determinantes. Estos enunciados están impresos en cursiva.

En la resolución del sistema (2,3), el determinante formado por los coeficientes de este sistema desempeña un papel fundamental:

$$\begin{vmatrix} 1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi \dots & -K_{1n}\Delta\xi \\ -K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi \dots & -K_{2n}\Delta\xi \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ -K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & 1-K_{nn}\Delta\xi \end{vmatrix}. \qquad (3,3)$$

Como es sabido, si este determinante es diferente de 0, el sistema (2,3) tiene solución única, para valores $f_1, f_2, \dots$ $\dots, f_n$ cualesquiera. En este caso, el sistema transpuesto, o sea, el sistema

$$z_p = \sum_{q=1}^{n} K_{qp} z_q \Delta\xi + f_p^*, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

tiene también solución única para f_p^* arbitrarios.

Si, en cambio, el determinante es igual a 0, el sistema (2,3), para f_p arbitrarios, en general, no tiene solución. Pero, entonces, el sistema homogéneo correspondiente, es decir, el sistema que se obtiene de (2,3), igualando todas las f_p

a 0, siempre tendrá una solución no trivial, o sea, una solución no formada por ceros solamente.

De este modo, tiene lugar la siguiente ley alternativa: *o el sistema no homogéneo de ecuaciones algebraicas lineales dado* (2,3) *tiene una solución única para valores arbitrarios* $f_1, \ldots, f_n$, *de los segundos miembros, o el sistema homogéneo correspondiente tiene, al menos, una solución no trivial. Si para el sistema dado tiene lugar el primer caso de esta alternativa, entonces éste también tiene lugar para el sistema transpuesto.*

En el segundo caso, el sistema homogéneo dado

$$y_p - \sum_{q=1}^{n} K_{pq} y_q \Delta\xi = 0, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{4,3}$$

tiene el mismo número de soluciones linealmente independientes que su sistema transpuesto

$$z_p - \sum_{q=1}^{n} K_{qp} z_q \Delta\xi = 0, \quad p = 1, \ldots, n. \tag{5,3}$$

Este número es igual a $n - r$, *donde* r *es el rango de la matriz del determinante* (3,3) *).

Hallemos las condiciones necesarias y suficientes para que en el segundo caso de la alternativa el sistema no homogéneo (2,3) tenga solución. Ante todo, es fácil encontrar las condiciones necesarias. Sea

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

*) Obsérvese, que la afirmación de la existencia de exactamente $(n-r)$ soluciones linealmente independientes de los sistemas homogéneos (4,3) y (5,3) es válida también en el primer caso de la alternativa, cuando $n = r$. La expresión "cero soluciones linealmente independientes" significa que se tiene solamente la solución formada por ceros.

alguna solución del sistema (5,3). Multiplicando la p-ésima ecuación de (2,3) por z_p y sumando todas las ecuaciones miembro a miembro, obtenemos que

$$\sum_p y_p z_p - \sum_{p,q} K_{pq} y_q z_p \Delta\xi = \sum_p f_p z_p .$$

Pero el primer miembro de esta igualdad puede escribirse también así:

$$\sum_p y_p z_p - \sum_{p,q} K_{qp} y_p z_q \Delta\xi = \sum_p y_p (z_p - \sum_q K_{qp} z_q \Delta\xi).$$

En virtud de las ecuaciones (5,3), esta expresión es igual a 0. Por lo tanto, tiene que ser

$$\sum_{p=1}^{n} f_p z_p = 0. \tag{6,3}$$

Demostremos que esta igualdad es también condición suficiente para la existencia de solución del sistema (2,3), si ésta se cumple para todas las soluciones del sistema (5,3). Es evidente, que esta condición se observa, si se cumple para cualesquiera $(n-r)$ soluciones linealmente independientes del sistema (5,3). Para demostrar nuestra afirmación, recordemos del curso de álgebra superior, que la condición suficiente para la existencia de la solución del sistema (2,3), en el caso en que su determinante sea igual a cero, es la siguiente: el rango de la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi \dots & -K_{1n}\Delta\xi f_1 \\ -K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi \dots & -K_{2n}\Delta\xi f_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ -K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & 1-K_{nn}\Delta\xi f_n \end{Vmatrix} \tag{7,3}$$

debe coincidir con el rango de la matriz (3,3).

Para esto es suficiente que todos los determinantes de orden $(r+1)$, formados por elementos de la matriz (7,3), y que contienen elementos de la última columna de esta matriz, sean iguales a cero. Desarrollando dicho determinante D_{r+1} por los elementos f_k, obtenemos de la condición (6,3) que, en efecto, éste es igual a cero, ya que el sistema (5,3) se satisface por la sucesión de números

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

formados de la siguiente manera: si i es tal que f_i figura en el determinante D_{r+1}, entonces, z_i es igual al complemento algebraico de f_i en este determinante; en caso contrario, $z_i = 0$ *).

De este modo, *en el segundo caso de la alternativa, la solución del sistema no homogéneo existe si, y sólo si, para cualquier solución* $(z_1, \ldots, z_n)$ *del sistema homogéneo transpuesto se cumple la condición* (6,3).

Obsérvese que, si en el segundo caso de la alternativa el sistema (2,3) tiene solución, entonces esta solución no es única. En efecto, sumando a esta solución cualquier solución del sistema homogéneo correspondiente, obtenemos nuevamente una solución del sistema (2,3).

---

*) La justeza de esta afirmación puede demostrarse del siguiente modo. Sustituyamos los números $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en la j-ésima ecuación del sistema (5,3). Si j es tal, que en el determinante D_{r+1} figuran elementos de la j-ésima columna de la matriz (7,3), entonces el resultado de dicha sustitución será 0, ya que éste será igual a un determinante, en el que coinciden dos de sus columnas. Si j es tal, que los elementos de la j-ésima columna no figuran en el determinante D_{r+1}, entonces el resultado de esta sustitución será también cero, puesto que será igual a un determinante de orden $(r+1)$, formado por elementos de una matriz de rango r.

Cuando $\Delta\xi$ tiende a 0, es natural esperar que $\sum_q K_{pq} y_q \Delta\xi$ tienda a $\int_a^b K(x, \xi) y(\xi)\, d\xi$, y la solución del sistema de ecuaciones (2,3) pase a la solución de la ecuación integral (1,3). Esto, en efecto, tiene lugar bajo ciertas condiciones respecto al núcleo $K(x, \xi)$. Pero la demostración de esto es complicada, por lo que no la daremos, aunque para la resolución aproximada de la ecuación integral (1,3), se sustituya a veces por el sistema (2,3) *). Demostraremos solamente, que los teoremas enunciados anteriormente para el sistema (2,3) se convierten en los siguientes teoremas:

Teorema 1. *(Alternativa). O la ecuación integral lineal no homogénea de* 2^a *especie dada tiene una solución única para cualquier función* $f(x)$ *(de una clase suficientemente amplia), o la ecuación homogénea correspondiente tiene, por lo menos, una solución no trivial, o sea, no idénticamente nula.*

Teorema 2. *Si para la ecuación dada* (1,3) *tiene lugar el primer caso de la alternativa, entonces tiene lugar el primer caso también para la ecuación transpuesta*

$$z(x) = \int_a^b K(\xi, x) z(\xi)\, d\xi + f^*(x).$$

La ecuación integral homogénea dada y su transpuesta tienen un mismo número finito de soluciones linealmente independientes.

---

*) Véase L. V. Kantorovich y V. I. Krylov, Métodos Aproximados del Análisis Superior, 5^a ed., Fizmatguiz, cap. II, § 1, 1962.

Es evidente que, si las funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ satisfacen a la ecuación homogénea (1,3), entonces cualquier combinación lineal de ellas $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ con coeficientes constantes C_i también satisface a esta ecuación.

Teorema 3. *En el segundo caso de la alternativa, la condición necesaria y suficiente para la existencia de solución de la ecuación no homogénea* (1,3) *es la siguiente:*

$$\int_a^b f(x)z(x)\,dx=0,$$

en donde $z(x)$ *es cualquier solución de la ecuación homogénea transpuesta a* (1,3).

Si se cumple esta condición, la ecuación (1,3) posee un conjunto infinito de soluciones, ya que, como es fácil comprobar, esta ecuación será satisfecha también por cualquier función del tipo

$$y(x)+\varphi(x),$$

en donde $y(x)$ es alguna solución de la ecuación (1,3), y $\varphi(x)$ es cualquier solución de la ecuación homogénea correspondiente. Por otra parte, es evidente que, si las funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ satisfacen a la ecuación (1,3), su diferencia satisface a la ecuación homogénea correspondiente.

Los teoremas 1, 2 y 3 que se acaban de enunciar, se llaman *teoremas de Fredholm*, quien los demostró por primera vez para la ecuación (1,3) bajo condiciones bastante amplias respecto a $K(x, \xi)$ y a $f(x)$. Los parágrafos próximos están dedicados a la demostración de estos teoremas para ciertas clases de ecuaciones. El número de variables independientes aquí no es esencial. Por eso, todas las demostraciones se harán para cualquier número de variables independientes; escribiremos P en lugar de x, y Q en lugar de ξ, así como se hizo al final del § 1. Estas demostraciones, como, en general, la mayoría de las demostraciones de existencia de soluciones de ecuaciones, dan también métodos para la resolución aproximada de las ecuaciones integrales (1,3).

En las aplicaciones desempeña un papel particularmente importante el primer teorema de Fredholm sobre la alternativa. En lugar de demostrar que la ecuación integral dada (1,3) tiene solución, es más cómodo, frecuentemente, demostrar, que la ecuación homogénea correspondiente o su transpuesta tiene solamente soluciones triviales. Y, de aquí, por el primer teorema de Fredholm, se deducirá que la ecuación dada (1,3), en efecto, tiene solución.

§ 4. Ecuaciones integrales con núcleos degenerados

Existe una clase de ecuaciones integrales que se reducen fácilmente a ecuaciones algebraicas lineales. Los teoremas de Fredholm para estas ecuaciones se obtienen inmediatamente de los teoremas enunciados en el parágrafo anterior para las ecuaciones algebraicas lineales. Tales son las ecuaciones integrales con *núcleos degenerados* (o de variables separadas o disociadas):

Ahora demostraremos los teoremas de Fredholm para las ecuaciones integrales con núcleos degenerados, y, en lo sucesivo, utilizaremos este caso particular para la demostración de los teoremas de Fredholm para las ecuaciones integrales con núcleos continuos cualesquiera.

Un núcleo se llama *degenerado* (o disociado), si tiene la forma

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P) b_i(Q). \tag{1,4}$$

Supondremos que $a_i(P)$, $b_i(Q)$, $y(P)$ y $f(P)$ son funciones uniformemente continuas en cierta región finita G, y que todas las $a_i(P)$ y todas las $b_i(Q)$ son linealmente independientes entre sí.

Demostremos que con esta última suposición no se restringe la generalidad. Para esto, supongamos que existen tales constantes $C_1, \ldots, C_m$, que

$$C_1 a_1(P) + \ldots + C_m a_m(P) \equiv 0,$$

y, por lo menos, uno de los números $C_1, \ldots, C_m$ es diferente de 0. Sea $C_m \neq 0$. Entonces esta igualdad puede ser resuelta respecto a $a_m(P)$. Obtenemos que:

$$a_m(P) = C_1^* a_1(P) + \ldots + C_{m-1}^* a_{m-1}(P).$$

Sustituyendo esta expresión en el segundo miembro de (1,4), obtenemos:

$$K(P, Q) \equiv \sum_{i=1}^{m-1} a_i(P) b_i(Q) + \sum_{i=1}^{m-1} C_i^* a_i(P) b_m(Q) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m-1} a_i(P)[b_i(Q) + C_i^* b_m(Q)] \equiv \sum_{i=1}^{m-1} a_i(P) b_i^*(Q).$$

De este modo, resulta que el núcleo $K(P, Q)$ puede ser representado como una suma de un número menor que m de productos de funciones que dependen de P por funciones dependientes de Q. Si las funciones $a_i(P)$ o $b_i^*(Q)$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, m-1$ fuesen de nuevo linealmente dependientes, este número se podría disminuir otra vez y así sucesivamente.

Como ya se ha señalado, las ecuaciones integrales con núcleos degenerados se reducen fácilmente a ecuaciones algebraicas lineales, y, para ellas, los teoremas de Fredholm se demuestran sin dificultad. En efecto, supongamos que la ecuación integral

$$y(P) = \int_G K(P, Q)y(Q)\,dQ + f(P), \tag{2,4}$$

en donde $K(P, Q)$ está dado por la fórmula (1,4), tiene solución. Entonces, debe ser

$$y(P) = \int \sum_{i=1}^{m} a_i(P)b_i(Q)y(Q)\,dQ + f(P)$$

o sea,

$$y(P) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P)\int b_i(Q)y(Q)\,dQ + f(P). \tag{3,4}$$

Aquí, como también en lo sucesivo, omitimos la letra G bajo el signo de la integral. El símbolo $\int$ siempre indicará la integral tomada sobre la región G.

Hagamos

$$\int b_i(Q)y(Q)\,dQ = C_i. \tag{4,4}$$

Entonces, de la ecuación (3,4) se obtiene que

$$y(P) = \sum_{i=1}^{m} C_i a_i(P) + f(P). \tag{5,4}$$

Para determinar las constantes C_i, sustituyamos el valor de y, dado por esta fórmula, en la ecuación (4,4). Obtendremos:

$$\int b_i(Q)\left[\sum_{j=1}^{m} C_j a_j(Q) + f(Q)\right] dQ = C_i.$$

Poniendo

$$\int b_i(Q)a_j(Q)\,dQ = K_{ij}, \qquad \int b_i(Q)f(Q)\,dQ = f_i, \tag{6,4}$$

de la última ecuación hallamos:

$$C_i = \sum_{j=1}^{m} K_{ij} C_j + f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7,4}$$

Así pues, a cada solución de la ecuación integral (2,4) le corresponde una solución $(C_1, \ldots, C_m)$ del sistema (7,4) y, debido a que las funciones $a_i(P)$ son linealmente independientes, la solución es solamente una. Recíprocamente, si este sistema de ecuaciones algebraicas lineales tiene alguna solución $(C_1, \ldots, C_m)$, entonces, sustituyéndola en el segundo miembro de (5,4), se obtendrá una solución de la ecuación integral dada (2,4), puesto que cada operación efectuada para llevar (2,4) a (7,4) es reversible. Por lo tanto, el problema se ha reducido al estudio del sistema (7,4).

De la misma manera, la ecuación integral

$$z(P) = \int K(Q, P) z(Q)\, dQ + f^*(P), \tag{8,4}$$

transpuesta respecto a la ecuación (2,4), se reduce al sistema

$$C_i^* = \sum_{j=1}^{m} K_{ji} C_j^* + f_i^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{9,4}$$

transpuesto con respecto al sistema (7,4).

Como se ha supuesto que las funciones $a_i(P)$ y $b_i(Q)$ son linealmente independientes, a cada p soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo (7,4) o (9,4) le corresponden p soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2,4), o de la ecuación (8,4), respectivamente, y viceversa. (¿Por qué?) De este modo, se establece una correspondencia biunívoca entre las soluciones de las ecuaciones integrales (2,4) y (8,4), por un lado, y las soluciones de las ecuaciones algebraicas lineales (7,4) y (9,4), por el otro. A las soluciones de las ecuaciones (2,4) y (8,4), transpuestas una respecto a la otra, les corresponden las soluciones de las ecuaciones transpuestas (7,4) y (9,4).

De esto se deducen directamente los dos primeros teoremas de Fredholm para la ecuación integral (2,4), ya que éstos son válidos para el sistema de ecuaciones algebraicas lineales (7,4). (¡Verifíquese!).

Para demostrar el tercer teorema, obsérvese lo siguiente. Si tiene lugar el segundo caso de la alternativa para el sistema (7,4), entonces, la condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución del sistema (7,4) es

$$\sum_{i=1}^{m} f_i C_i^* = 0,$$

en donde $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ es una solución cualquiera del sistema homogéneo transpuesto. Utilizando las igualdades de (6,4), esta condición puede escribirse así:

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^* \int f(Q) b_i(Q)\, dQ = 0,$$

o así:

$$\int f(Q) \left(\sum_{i=1}^{m} C_i^* b_i(Q) \right) dQ = 0. \qquad (10,4)$$

Si $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ es una solución del sistema homogéneo (9,4), entonces $\sum C_i^* b_i(Q)$ es una solución de la ecuación homogénea (8,4), transpuesta a la (2,4). Por eso, la condición (10,4) es equivalente a la condición

$$\int f(Q) z(Q)\, dQ = 0$$

para cualquier solución $z(Q)$ de la ecuación homogénea (8,4). De esto se deduce directamente el tercer teorema de Fredholm para la ecuación (2,4).

Observaciones. 1. Ocurre, frecuentemente, que el núcleo $K(P, Q)$ y $f(P)$ son funciones complejas de los puntos reales P y Q. Entonces, las soluciones $y(P)$ de la ecuación integral (2,4) serán también, en general, funciones complejas del punto real P. En este caso se conservan todos los teoremas demostrados en este parágrafo. Recordemos que, si

$$\varphi(P) = \varphi_1(P) + i\varphi_2(P),$$

en donde $\varphi_1(P)$ y $\varphi_2(P)$ son funciones reales del punto real P, entonces, por definición,

$$\int \varphi(P)\, dP = \int \varphi_1(P)\, dP + i \int \varphi_2(P)\, dP.$$

2. A menudo ocurre también, que $a_i(P)$ y $b_i(Q)$ son funciones de cierto parámetro complejo λ. Los razonamientos del presente parágrafo muestran, que para la ecuación (2,4) tiene lugar el primero o el segundo caso de la alternativa de Fredholm, dependiendo de que sea igual o diferente de 0 el determinante formado por los coeficientes del sistema (7,4), es decir, el determinante

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - K_{11} & -K_{12} \ldots & -K_{1m} \\ -K_{21} & 1 - K_{22} \ldots & -K_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -K_{m1} & -K_{m2} \ldots & 1 - K_{mm} \end{vmatrix}, \tag{11,4}$$

en donde

$$K_{ij} = \int b_i(Q, \lambda) a_j(Q, \lambda)\, dQ.$$

Sean $a_j(Q, \lambda)$ y $b_i(Q, \lambda)$ para cada Q de G, funciones holomorfas de λ en cierta región finita Λ del plano complejo. Se supondrá que $a_j(Q, \lambda)$ y $b_i(Q, \lambda)$ son funciones uniformemente continuas respecto al conjunto (Q, λ). Entonces K_{ij} y el determinante (11,4) también son funciones holomorfas de λ *). Por eso, aquellos valores de λ, para los cuales el determinante (11,4) es igual a 0, y por esto tiene lugar el segundo caso de la alternativa para (2,4), no pueden tener puntos de acumulación finitos en el interior de Λ, siempre que el determinante (11,4) sea diferente de 0, por lo menos, para un $\lambda \in \Lambda$.

3. Sean K_{ij} y f_i funciones holomorfas de $\lambda \in \Lambda$. Así será, en particular, si $a_j(Q, \lambda)$ y $b_i(Q, \lambda)$ poseen las propiedades señaladas en la observación 2, y $f(Q)$ es una función uniformemente continua de Q, lo cual supondremos para mayor sencillez.

Según las conocidas reglas de la teoría de determinantes, los coeficientes C_i se obtienen de las ecuaciones (7,4) en forma de quebrados, cuyo denominador para todo i es el mismo determinante (11,4), y en el numerador está el determinante D_i, que se obtiene del determinante (11,4), sustituyendo su i-ésima columna por la columna $(f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_m)$. Desarrollando D_i por los elementos de esta última columna, obtenemos:

$$C_i = \frac{\sum_j M_{ij} f_j}{D(\lambda)},$$

en donde M_{ij} son polinomios en K_{ij}. Sustituyendo estos

---

*) Esto no es difícil de demostrar, representando la integral en forma de límite de una suma integral y utilizando el conocido teorema de Weierstrass que afirma que, si una sucesión de funciones holomorfas converge uniformemente en cierta región, entonces, la función límite es también holomorfa en la misma región. (I. I. Privalov, Introducción a la Teoría de Funciones de Variable Compleja, 10ª ed., Fizmatguiz, 1960, cap. 5, § 1).

valores de C_i hallados en el segundo miembro de (5,4) y aplicando las fórmulas de (6,4) para f_i, obtenemos:

$$y(P)=\frac{\int \sum\limits_{ij} M_{ij} b_j(Q,\lambda) a_i(P,\lambda) f(Q)\, dQ}{D(\lambda)}+f(P). \qquad (12,4)$$

El numerador (para cada P fijado) y el denominador del quebrado del segundo miembro de la última igualdad son funciones holomorfas de λ en la región Λ.

Frecuentemente, es útil escribir la igualdad (12,4) en la siguiente forma:

$$y(P)=\int \Gamma(P,Q,\lambda) f(Q)\, dQ+f(P), \qquad (13,4)$$

en donde

$$\Gamma(P,Q,\lambda)=\frac{\sum\limits_{ij} M_{ij} b_j(Q,\lambda) a_i(P,\lambda)}{D(\lambda)}. \qquad (14,4)$$

La función $\Gamma(P,Q,\lambda)$ no depende de $f(P)$ y, como muestra la fórmula (14,4), se expresa en forma de cociente de dos funciones holomorfas de λ en toda la región Λ. $\Gamma(P,Q,\lambda)$ puede no ser una función holomorfa de λ sólo para aquellos valores de λ donde $D(\lambda)=0$, es decir, para los cuales tiene lugar el segundo caso de la alternativa de Fredholm para la ecuación integral (2,4). En el apartado anterior se demostró, que tales valores de λ no tienen puntos de acumulación en el interior de Λ, siempre que $D(\lambda)$ no sea idénticamente nulo, lo cual supondremos. Se puede demostrar fácilmente, que cada valor $\lambda=\lambda_0$, donde $D(\lambda_0)=0$ es, en efecto, singular para $\Gamma(P,Q,\lambda)$ en el sentido siguiente: $\Gamma(P,Q,\lambda)$ no es una función uniformemente continua de (P,Q,λ), cuando λ se encuentra en un entorno arbitrariamente pequeño del punto λ_0, y P y Q varían en G.

En realidad, supongamos lo contrario. Sea la función $y(P,\lambda)$, definida por la fórmula (13,4), uniformemente continua, si $P \in G$ y λ varía en cierto entorno del punto λ_0. Sustituyamos entonces el segundo miembro de (13,4) o, lo que es lo mismo, de (12,4), en ambas partes de la ecuación (2,4). Los resultados de las sustituciones, para cualquier función uniformemente continua $f(Q)$, serán funciones uniformemente continuas en la misma región de variación de P y λ. Sabemos que estos resultados coinciden, cuando $\lambda \neq \neq \lambda_0$ y $|\lambda - \lambda_0|$ es suficientemente pequeño, ya que entonces $D(\lambda) \neq 0$. Por lo tanto, por continuidad, estos resultados coinciden también para $\lambda = \lambda_0$. Por consiguiente, para cualquier función $f(P)$ de la clase considerada, la ecuación integral (2,4) tiene solución para $\lambda = \lambda_0$: ésta viene dada por la fórmula (13,4) para $\lambda = \lambda_0$, donde $\Gamma(P, Q, \lambda)$ está definida para $\lambda = \lambda_0$ por continuidad. Pero, entonces, para este valor de λ para la ecuación (2,4) tiene lugar el primer caso de la alternativa de Fredholm, y no el segundo, por lo que $D(\lambda_0) \neq 0$ *).

Ejemplo.

$$y(x) = -\lambda \int_0^1 (x^2\xi + x\xi^2) y(\xi)\, d\xi + f(x),$$

de donde

$$y(x) = -\lambda \left[x^2 \int_0^1 \xi y(\xi)\, d\xi + x \int_0^1 \xi^2 y(\xi)\, d\xi \right] + f(x).$$

---

*) Los razonamientos anteriores se extienden fácilmente al caso en que $a_i(Q, \lambda)$, $b_i(Q, \lambda)$ y $f(Q)$ tienen discontinuidades con respecto a Q en algunos puntos, y en curvas y superficies suficientemente regulares de dimensión hasta $d-1$, inclusive, independientes de λ, si al acercarse el punto Q a los lugares de discontinuidad $|a_i(Q, \lambda)|$, $|b_i(Q, \lambda)|$ y $|f(Q)|$ no crecen con mucha rapidez. Las soluciones estarán indeterminadas en aquellos puntos P, en los que $a_i(P, \lambda)$ y $f(P)$ no estén definidas.

Haciendo

$$\int_0^1 \xi y(\xi)\, d\xi = C_2 \quad \text{y} \quad \int_0^1 \xi^2 y(\xi)\, d\xi = C_1, \tag{15,4}$$

obtenemos que

$$y(x) = f(x) - C_1\lambda x - C_2\lambda x^2. \tag{16,4}$$

Sustituyendo esta expresión de y en las igualdades (15,4), obtenemos

$$\int_0^1 \xi[f(\xi) - C_1\lambda\xi - C_2\lambda\xi^2]\, d\xi = C_2,$$

$$\int_0^1 \xi^2[f(\xi) - C_1\lambda\xi - C_2\lambda\xi^2]\, d\xi = C_1$$

o sea,

$$b_1 - \frac{C_1\lambda}{3} - \frac{C_2\lambda}{4} = C_2, \quad b_2 - \frac{C_1\lambda}{4} - \frac{C_2\lambda}{5} = C_1, \tag{17,4}$$

en donde

$$b_1 = \int_0^1 \xi f(\xi)\, d\xi \quad \text{y} \quad b_2 = \int_0^1 \xi^2 f(\xi)\, d\xi.$$

Escribamos las ecuaciones (17,4) en la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} C_1\frac{\lambda}{3} + C_2\left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) &= b_1, \\ C_1\left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) + C_2\frac{\lambda}{5} &= b_2. \end{aligned}\right\} \tag{18,4}$$

El determinante de este sistema es igual a

$$1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{240}.$$

Este tiene sólo dos raíces

$$\lambda = 60 \pm 16\sqrt{15}.$$

Para estos dos valores de λ solamente tiene lugar el segundo caso de la alternativa de Fredholm. En estos casos, todas las soluciones de la ecuación integral homogénea

$$y(x) + \lambda \int_0^1 (x^2\xi + x\xi^2) y(\xi)\, d\xi = 0$$

están dadas por las fórmulas

$$y(x) = C\left(x \mp \frac{5}{\sqrt{15}} x^2\right),$$

en donde C es una constante arbitraria. Para otros valores de λ nuestra ecuación integral tiene una solución única, dada por la fórmula (16,4), donde C_1 y C_2 se determinan unívocamente del sistema (18,4). Esta solución puede expresarse en la forma (13,4), donde

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \lambda \frac{\frac{\xi x}{5}\lambda - \left(1 + \frac{\lambda}{4}\right)\xi^2 x - \xi x^2 \left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) + \xi^2 x^2 \frac{\lambda}{3}}{1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{240}}.$$

Ejercicios. Hallar $u(x)$ de las ecuaciones

1. $u(x) = e^x + \lambda \int_0^{10} x t u(t)\, dt.$

2. $u(x) = \lambda \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, u(t)\, dt.$

3. $u(x) = \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos x\, u(t)\, dt.$

4. $u(x) = x + \lambda \int\limits_0^1 (x-t) u(t)\, dt.$

5. $u(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} t u(t)\, dt + f(x).$

§ 5. *Ecuaciones integrales con núcleos continuos de módulo suficientemente pequeño*

Para estas ecuaciones siempre tiene lugar el primer caso de la alternativa, es decir, estas ecuaciones siempre tienen solución única. Esto se demuestra por el método de aproximaciones sucesivas, como en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias se demuestran la existencia y unicidad de la solución de una ecuación integral, que es equivalente a la ecuación diferencial dada con sus condiciones iniciales. En esencia, esto es una aplicación del principio de Caccioppoli – Banach, expuesto, por ejemplo, en mi libro sobre la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Yo podría comprobar aquí solamente la posibilidad de aplicar este principio general, pero prefiero hacer la demostración para este caso concreto dado, puesto que con ello obtendremos algunas fórmulas útiles en lo sucesivo.

Introduzcamos notaciones simbólicas que serán utilizadas a veces en lo sucesivo. Sean $K_1(P, Q)$ y $K_2(P, Q)$ funciones uniformemente continuas de P y Q, cuando $P \in G$ y $Q \in G$. Hagamos

$$K_2 \circ K_1 = \int K_2(P, S) K_1(S, Q)\, dS. \qquad (1,5)$$

Llamaremos al núcleo $K(P, Q) = K_2 \circ K_1$ producto simbólico del núcleo $K_2(P, Q)$ por $K_1(P, Q)$ *).

Es fácil demostrar que $K_2 \circ K_1$ es una función uniformemente continua de P y Q. En efecto,

$$\left| \int K_2(P_1, S) K_1(S, Q_1)\, dS - \int K_2(P_2, S) K_1(S, Q_2)\, dS \right| \leq$$
$$\leq \left| \int K_2(P_1, S)[K_1(S_1, Q_1) - K_1(S, Q_2)]\, dS \right| +$$
$$+ \left| \int K_1(S, Q_2)[K_2(P_1, S) - K_2(P_2, S)]\, dS \right|. \quad (2,5)$$

Supongamos que la cota superior de los valores absolutos de $K_1(P, Q)$ y $K_2(P, Q)$, cuando $P \in G$ y $Q \in G$ no supera a M, y que D es el volumen de la región G. Debido a la continuidad uniforme de $K_1(P, Q)$ y de $K_2(P, Q)$ para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\eta > 0$ tal, que

$$|K_2(P_1, S) - K_2(P_2, S)| < \frac{\varepsilon}{2DM}$$

y

$$|K_1(S, Q_1) - K_1(S, Q_2)| < \frac{\varepsilon}{2DM},$$

---

*) El producto simbólico de núcleos, introducido de esta manera, es análogo al producto de matrices.

Supongamos que la función $\varphi_1(P)$ se transforma por medio del núcleo $K_1(P, Q)$ en la función $\varphi_2(P) = \int K_1(P, Q)\varphi_1(Q)\, dQ$, y la función $\varphi_2(P)$, por medio del núcleo $K_2(P, Q)$ en la función $f_3(P) = \int K_2(P, Q)\, \varphi_2(Q)\, dQ$. Entonces el núcleo $K_2 \circ K_1$ da la transformación de la función $\varphi_1(P)$ en $\varphi_3(P)$, o sea, $\varphi_3 = \int (K_2 \circ K_1)\varphi_1(Q)\, dQ$. De la misma manera, la aplicación sucesiva en un espacio de dimensión n de dos transformaciones lineales nos da una transformación lineal con una matriz igual al producto de las matrices de estas transformaciones.

si la distancia entre los puntos P_1 y P_2 y entre los puntos Q_1 y Q_2 es menor que η. Fácilmente se observa que bajo esta condición, el primer miembro de la desigualdad (2,5) es menor que ε, que es lo que se quería demostrar. Obsérvese que, en general, $K_2 \circ K_1 \neq K_1 \circ K_2$. Si $K_3(P, Q)$ es una función uniformemente continua en P y Q, es fácil comprobar que

$$K_1 \circ (K_2 \circ K_3) = (K_1 \circ K_2) \circ K_3.$$

Pasemos ahora a demostrar, que las ecuaciones integrales con núcleos continuos de módulo suficientemente pequeño siempre tienen una solución única. Esto será utilizado en lo sucesivo para la demostración de los teoremas de Fredholm en el caso de una ecuación integral con un núcleo continuo cualquiera.

Sea dada la ecuación integral

$$y(P) = \lambda \int K(P, Q) y(Q)\, dQ + f(P), \tag{3,5}$$

y sean $K(P, Q)$ y $f(P)$ ciertas funciones uniformemente continuas, cuando $P \in G$ y $Q \in G$, en donde G es una región finita *). Aquí λ es cierto parámetro. Generalmente, éste

---

*) En lugar de subrayar cada vez la continuidad uniforme de las funciones consideradas en la región abierta G, estas funciones se podrían considerar en la región cerrada finita $\overline{G}$ (es decir, en la unión de G y su frontera), y exigir sólo su continuidad. Entonces, de aquí se deduciría directamente la continuidad uniforme de estas funciones. Si está dada alguna función φ uniformemente continua en la región abierta G, ésta puede ser prolongada por continuidad a la frontera de G. Entonces se obtiene una función uniformemente continua en la región cerrada $\overline{G}$. Para las regiones sencillas que consideraremos aquí (compárese con la observación al § 1), el volumen de la dimensión d de la frontera es igual a 0. Entonces, la integral de la función φ sobre la región G coincide con la integral de su prolongación sobre $\overline{G}$.

figura en la ecuación precisamente de la forma indicada en (3,5).

Todos los razonamientos ulteriores de este parágrafo son igualmente aplicables, tanto al caso en que las funciones consideradas tomen valores complejos, como al caso en que las mismas tomen sólo valores reales. El parámetro λ también puede tomar valores complejos. Pero es fundamental que los puntos P y Q sean reales, es decir, que todas las coordenadas de estos puntos sean reales; de otro modo surgiría la necesidad de definir qué es una integral de varias variables complejas.

Siguiendo exactamente la definición de núcleo dada anteriormente, ahora deberíamos llamar núcleo a $\lambda K(P, Q)$. Pero, utilizando la terminología común, llamaremos también a la función $K(P, Q)$ núcleo de la ecuación integral (3,5). Al hablar en el título del presente parágrafo de la pequeñez del núcleo, nos referíamos a la pequeñez de $\lambda K(P, Q)$.

Buscaremos la solución de la ecuación integral (3,5) en forma de una serie de potencias en λ

$$y(P) = y_0(P) + \lambda y_1(P) + \lambda^2 y_2(P) + \ldots \tag{4,5}$$

Sustituyendo formalmente esta serie en (3,5), obtenemos que

$$y_0(P) + \lambda y_1(P) + \lambda^2 y_2(P) + \lambda^3 y_3(P) + \ldots =$$

$$= \lambda \int K(P, Q)[y_0(Q) + \lambda y_1(Q) + \ldots]\, dQ + f(P). \tag{5,5}$$

De aquí y comparando los coeficientes de iguales potencias de λ, obtenemos

$$y_0(P) = f(P),$$

$$y_{k+1}(P) = \int K(P, Q) y_k(Q)\, dQ, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6,5}$$

o sea

$$y_0(P)=f(P),$$

$$y_1(P)=\int K(P, P_1)f(P_1)\,dP_1,$$

$$y_2(P)=\int\int K(P, P_1)K(P_1, P_2)f(P_2)\,dP_1\,dP,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_k(P)=\overbrace{\int\ldots\int}^{k \text{ veces}} K(P, P_1)K(P_1, P_2)\ldots$$

$$\ldots K(P_{k-1}, P_k)f(P_k)\,dP_1\ldots dP_k. \quad (7,5)$$

La última igualdad puede ser escrita de la siguiente forma:

$$y_k(P)=\int K^{(k)}(P, Q)f(Q)\,dQ, \quad k=1, 2, 3, \ldots \quad (8,5)$$

en donde

$$K^{(k)}(P, Q)=\overbrace{\int\ldots\int}^{(k-1) \text{ veces}} K(P, P_1)\ldots$$

$$\ldots K(P_{k-1}, Q)\,dP_1\ldots dP_{k-1},$$

$$\text{para} \qquad k=2, 3, \ldots, \qquad (9,5)$$

$$K^1(P, Q)=K(P, Q).$$

Utilizando nuestras notaciones simbólicas, el núcleo $K^{(k)}(P, Q)$ puede ser representado en la forma

$$K^{(k)}(P, Q)=\underbrace{K\circ K\circ K\circ\ldots\circ K}_{k \text{ veces}}. \qquad (10,5)$$

Por lo demostrado al comienzo de este parágrafo, todos los núcleos $K^{(k)}(P, Q)$ son uniformemente continuos. La función $K^{(k)}(P,Q)$ se llama *reiteración k-ésima* o *iteracción k-ésima del núcleo* $K(P,Q)$. Como puede verse fácilmente, todas las funciones $y_k(P)$ son también uniformemente continuas.

Acotemos los núcleos $K^{(k)}(P,Q)$. En virtud de la continuidad uniforme, el núcleo $K(P,Q)$ es acotado. Sea

$$|K(P,Q)| < M. \tag{11,5}$$

Sustituyendo esta acotación en el segundo miembro de (9,5), obtenemos que

$$|K^{(k)}(P,Q)| \leq M^k \cdot D^{k-1}, \tag{12,5}$$

en donde D es el volumen de la región G. Utilizando la fórmula (8,5), de lo anterior obtenemos que

$$|y_k(P)| \leq M^k D^k F,$$

en donde F es el extremo superior de $|f(P)|$. Por eso, si

$$|\lambda| < \frac{1}{MD}, \tag{13,5}$$

la serie (4,5) converge absoluta y uniformemente respecto a P en la región G.

La suma de esta serie es una función continua de P, ya que cada sumando es continuo. Como la serie (4,5) es uniformemente convergente, la integración en la igualdad formal (5,5) escrita anteriormente, puede ser efectuada miembro a miembro. Por eso, debido a la definición de $y_k(P)$, según las fórmulas (6,5), la igualdad (5,5) tiene lugar realmente, es decir, la función $y(P)$ definida por la serie (4,5) es solución de la ecuación integral (3,5).

Demostremos que esta solución es única en la clase de funciones acotadas, si se cumple la condición (13,5). En efecto, supongamos que existen dos soluciones de la ecuación (3,5) $y_1(P)$ y $y_2(P)$. Sustituyéndolas en la ecuación (3,5) y restando miembro a miembro las identidades obtenidas, hallamos:

$$y_2(P)-y_1(P)=\lambda\int K(P,Q)[y_2(Q)-y_1(Q)]\,dQ. \quad (14,5)$$

Denotemos por Y el extremo superior de $|y_2(P)-y_1(P)|$; entonces, de (14,5), utilizando la desigualdad (11,5), obtenemos que

$$Y\leq|\lambda|\ MDY.$$

De esto, y debido a (13,5), obtenemos

$$Y\leq cY, \quad \text{en donde} \quad c<1.$$

Esto es posible sólo si $Y=0$, que es lo que queríamos demostrar.

Frecuentemente conviene representar la solución de la ecuación integral (3,5) en la forma siguiente

$$y(P)=\lambda\int\Gamma(P,Q,\lambda)f(Q)\,dQ+f(P), \quad (15,5)$$

en donde

$$\Gamma(P,Q,\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}K^{(k)}(P,Q). \quad (16,5)$$

De las acotaciones (12,5) se desprende que la serie (16,5) converge uniformemente respecto a (P,Q,λ), si $P\in G$, $Q\in G$ y $|\lambda|<\frac{1}{MD}-\varepsilon$, donde $\varepsilon>0$. De esto se deduce que la función $\Gamma(P,Q,\lambda)$ es uniformemente continua respecto al conjunto (P,Q) para una λ fija, y es una función holomorfa de λ en el círculo (13,5), si $P\in G$ y $Q\in G$. Por eso, la integral (15,5) existe. El hecho de que ésta dé, en efecto, la solución de la ecuación integral (13,5), expresada por la serie (4,5), se ve fácilmente, si se sustituye la serie (16,5) en lugar de $\Gamma(P, Q, \lambda)$ en el segundo miembro de (15,5), y se integra respecto a Q término a término.

La función $\Gamma(P, Q, \lambda)$ se llama *resolvente* de la ecuación integral (3,5) *). Como se ve de lo anterior, ésta se define por el núcleo de la ecuación integral y no depende de $f(P)$. Como la función $y(P)$, dada por la fórmula (15,5), repre-

---

*) Comparemos (15,5) y (13,4). Mostremos que para las ecuaciones integrales (3,5) con núcleos degenerados, para las cuales $a_i(P)$ y $b_i(P)$ son funciones uniformemente continuas y de módulo suficientemente pequeño; es decir, para aquellas ecuaciones integrales que pertenecen a la vez a los tipos estudiados en los § § 4 y 5, será

$$\bar{\Gamma}(P, Q, \lambda) = \lambda\Gamma(P, Q, \lambda).$$

Como aquí tiene lugar el primer caso de la alternativa, se tiene que $D(\lambda) \neq 0$.

Supongamos que en cierto punto (P_0, Q_0, λ_0)

$$\bar{\Gamma}(P_0, Q_0, \lambda_0) \neq \lambda_0\Gamma(P_0, Q_0, \lambda_0), \qquad D(\lambda_0) \neq 0.$$

Ya que para las ecuaciones con los núcleos considerados $\bar{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)$ y $\Gamma(P_0, Q, \lambda_0)$ son continuas respecto a Q, siempre se puede hallar un entorno G_0 del punto Q_0, en el cual

$$\mathrm{Re}\,\{\bar{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)\} \neq \mathrm{Re}\,\{\lambda_0\Gamma(P_0, Q, \lambda_0)\}$$

o

$$\mathrm{Im}\,\{\bar{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)\} \neq \mathrm{Im}\,\{\lambda_0\Gamma(P_0, Q, \lambda_0)\}.$$

Por otra parte, en virtud de la unicidad de la solución de las ecuaciones integrales del tipo considerado, para cualquier función $f(P)$ uniformemente continua tiene que verificarse la siguiente igualdad:

$$\int \bar{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0) f(Q)\, dQ = \lambda_0 \int \Gamma(P_0, Q, \lambda_0) f(Q)\, dQ.$$

En particular, esta igualdad debe cumplirse para la función $f(Q)$, que es igual a cero en el exterior de un entorno G_0 del punto Q_0, y positiva en el interior de este entorno, lo cual es imposible. (¿Por qué?)

senta la única solución de la ecuación (3,5), de aquí se sigue que las ecuaciones (3,5) y (15,5) son equivalentes. Por eso, si en la ecuación (15,5) consideramos $y(P)$ como función conocida y $f(P)$ como función incógnita, entonces la única solución $f(P)$ de esta ecuación viene dada por la fórmula (3,5). La función $K(P, Q)$ en esta fórmula juega el papel de resolvente para la ecuación (15,5) con núcleo $\Gamma(P, Q, \lambda)$.

Aplicando a la ecuación

$$z(P) = \lambda \int K(Q, P) z(Q)\, dQ + f(P), \tag{17,5}$$

transpuesta a la ecuación (3,5), y los mismos razonamientos que acabamos de hacer para la ecuación (3,5), hallaremos que en el círculo (13,5) ésta tiene una solución única en la clase de funciones acotadas, la cual viene dada por la serie

$$z(P) = z_0(P) + \lambda z_1(P) + \lambda^2 z_2(P) + \lambda^3 z_3(P) + \dots$$

Aquí

$$z_0(P) = f(P),$$

$$z_k(P) = \int K(Q, P) z_{k-1}(Q)\, dQ$$

o, designando por $K^*(P, Q)$ el núcleo $K(Q, P)$, obtenemos:

$$z_1(P) = \int K^*(P, P_1) f(P_1)\, dP_1,$$

$$z_k(P) = \overbrace{\int \dots \int}^{k \text{ veces}} K^*(P, P_1) K^*(P_1, P_2) \dots K^*(P_{k-1}, P_k) \times$$

$$\times f(P_k)\, dP_1 \dots dP_k$$

o bien,

$$z_k(P) = \int K^{*(k)}(P, Q) f(Q)\, dQ, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

en donde

$$K^{*(k)}(P, Q) = \overbrace{\int \ldots \int}^{k-1 \text{ veces}} K^{*}(P, P_1) \ldots K^{*}(P_{k-1}, Q)\, dP_1 \ldots dP_{k-1}.$$

Escribiendo las integrales respectivas es fácil ver que $K^{*(k)}(P, Q) = K^{(k)}(Q, P)$. De esto se desprende que la solución de la ecuación (17,5) puede ser representada en la forma

$$z(P) = \lambda \int \Gamma^{*}(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ + f(P), \tag{18,5}$$

en donde

$$\Gamma^{*}(P, Q, \lambda) = \Gamma(Q, P, \lambda).$$

De este modo, *vemos que en el círculo* (13,5), *para cualquier función uniformemente continua* $f(P)$ *y bajo las condiciones impuestas al núcleo, tanto la ecuación* (3,5), *como su transpuesta* (17,5), *tienen solución única*, es decir, hemos demostrado que aquí siempre tiene lugar el primer caso de la alternativa de Fredholm.

Señalemos las dos fórmulas siguientes:

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda \int K(P, P_1) \Gamma(P_1, Q, \lambda)\, dP_1, \tag{19,5}$$

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda \int \Gamma(P, P_1, \lambda) K(P_1, Q)\, dP_1. \tag{20,5}$$

Para comprobarlas, basta sustituir en lugar de Γ la serie (16,5), y luego comparar los coeficientes de iguales potencias de λ, utilizando la fórmula (10,5).

El método de las aproximaciones sucesivas puede utilizarse para la resolución aproximada de ecuaciones integrales para $|\lambda|$ suficientemente pequeño *).

§ 6. *Ecuaciones integrales con núcleos próximos a los degenerados*

Sea dada la ecuación integral

$$y(P)=\lambda\int K(P,Q)y(Q)\,dQ+f(P), \tag{1,6}$$

en donde $f(P)$ es una función uniformemente continua, y

$$K(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}a_i(P)b_i(Q)+K_1(P,Q)=A(P,Q)+K_1(P,Q).$$

Aquí $a_i(P)$, $b_i(Q)$, $K_1(P,Q)$ son funciones uniformemente continuas y, por lo tanto, acotadas, ya que sus dominios de definición son finitos. Nuevamente, nos es indiferente si estas funciones toman valores complejos o sólo reales.

Para que los cálculos ulteriores, que por cierto, son bastante complicados, no oculten la esencia de la cuestión, nos será más cómodo escribir las ecuaciones integrales en forma simbólica.

La igualdad

$$\psi(P)=\int K(P,Q)y(Q)\,dQ \tag{2,6}$$

convendremos escribirla simbólicamente en la forma

$$\psi=Ky.$$

---

*) Comparar con L. V. Kantorovich y V. I. Krylov, Métodos Aproximados del Análisis Superior, 5ª ed., Fizmatguiz, 1962, cap. II, § 2

De este modo, designaremos por K el operador que transforma la función $y(P)$ en la función $\psi(P)=\int K(P,Q)\cdot$ $\cdot\, y(Q)\,dQ$. Este operador se determina por el núcleo $K(P, Q)$. Designaremos por K^* el operador que se determina por el núcleo transpuesto $K^*(P, Q)=K(Q, P)$. El símbolo E designará el operador que transforma la función $y(P)$ en sí misma, o sea, $Ey=y$ para cualquier función $y(P)$. El operador $K_1 \pm K_2$ se define por la igualdad

$$(K_1 \pm K_2)y = K_1 y \pm K_2 y$$

para cualquier función $y(P)$. El operador $K_1 K_2$ lo definimos mediante la siguiente igualdad:

$$K_1 K_2 y = K_1(K_2 y)$$

para cualquier función $y(P)$.

Fácilmente se ve que, si K_1 y K_2 son operadores del tipo (2,6) con núcleos $K_1(P, Q)$ y $K_2(P, Q)$, entonces el operador $K_1 \pm K_2$ se determina por el núcleo $K_1(P, Q) \pm K_2(P, Q)$, y el operador $K_1 K_2$, por el núcleo $K_1 \circ K_2$.

De esta manera, la ecuación (1,6) puede escribirse en la forma

$$(E-\lambda K)y=f.$$

Antes de pasar a la demostración de los teoremas de Fredholm para la ecuación (1,6), enunciaremos los siguientes lemas:

Lema 1. *Si $A(P, Q)$ es un núcleo degenerado y $K(P, Q)$ es un núcleo continuo cualquiera, entonces $A \circ K$ y $K \circ A$ son también núcleos degenerados.*

Lema 2. *El núcleo transpuesto a $K_1 \circ K_2$ es igual a $K_2^* \circ K_1^*$.*

La validez de estas afirmaciones es fácil comprobarla, considerando las integrales respectivas.

Demostremos ahora, que para la ecuación (1,6), si $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, en donde M_1 es el extremo superior de los valores de $|K_1(P, Q)|$, y D es el volumen de la región G, tienen lugar los tres teoremas de Fredholm.

1. *Primer teorema de Fredholm.* Demostremos que, si la ecuación homogénea (1,6) tiene sólo solución trivial, entonces la ecuación no homogénea (1,6) tiene solución para cualquier función $f(P)$.

Sustituyendo K por $A + K_1$, escribimos la ecuación (1,6) en la forma

$$(E - \lambda A - \lambda K_1)y = f,$$

en donde A y K_1 son los operadores correspondientes a los núcleos $A(P, Q)$ y $K_1(P, Q)$. Entonces

$$(E - \lambda K_1)y = \lambda A y + f. \tag{3,6}$$

Hagamos

$$(E - \lambda K_1)y = \eta.$$

Como $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, de la fórmula (15,5), demostrada en el parágrafo anterior, se deduce que

$$y = \eta + \lambda \Gamma \eta = (E + \lambda \Gamma)\eta, \tag{5,6}$$

en donde Γ es el operador correspondiente a la resolvente $\Gamma(P, Q, \lambda)$ del núcleo $K_1(P, Q)$. Sustituyendo esta expresión de $y(P)$ en la ecuación (3,6), obtenemos:

$$\eta = \lambda A(E + \lambda \Gamma)\eta + f$$

o bien,

$$[E - \lambda A(E + \lambda \Gamma)]\ \eta = f. \tag{6,6}$$

Del lema 1 se deduce que el núcleo $A(P, Q) + A \circ \lambda \Gamma$ de esta ecuación integral es degenerado. De esta manera hemos demostrado, que a cada solución $y(P)$ de la ecuación (1,6) le corresponde, según la fórmula (4,6), una solución $\eta(P)$ de la ecuación (6,6) con núcleo degenerado.

Recíprocamente, es fácil comprobar que a cada solución $\eta(P)$ de la ecuación (6,6) le corresponde una solución $y(P)$ de la ecuación (1,6), determinada por la fórmula (5,6). Luego, si la ecuación homogénea (6,6) tiene solución no trivial, la ecuación homogénea (1,6) también poseerá solución no trivial, la cual se determina por la fórmula (5,6).

Puesto que, por la hipótesis, la ecuación homogénea (1,6) sólo tiene solución trivial, entonces, por consiguiente, la ecuación homogénea (6,6) también tendrá solamente solución trivial.

En el § 4 se demostró el primer teorema de Fredholm para la ecuación (6,6) con núcleo degenerado. Por eso, la ecuación no homogénea (6,6) tiene solución $\eta(P)$ para cualquier función $f(P)$. Por la fórmula (5,6) obtenemos la solución $y(P)$ de la ecuación (1,6) para cualquier función $f(P)$. Es evidente, que esta solución es única.

Con esto el primer teorema de Fredholm queda demostrado, puesto que, si la ecuación homogénea tiene solución no trivial, la ecuación no homogénea, o bien no tiene solución, o bien esta solución no es única.

2. *Segundo teorema de Fredholm.* Demostremos que, si $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, la ecuación $(E - \lambda A - \lambda K_1)y = 0$ y su transpuesta

$$(E - \lambda A^* - \lambda K_1^*)z = 0 \tag{7,6}$$

tienen un mismo número de soluciones linealmente independientes.

Obsérvese que las ecuaciones homogéneas (1,6) y (6,6) tienen un mismo número de soluciones linealmente independientes, puesto que a cada p soluciones linealmente independientes de una ecuación le corresponden, según la fórmula (4,6) o (5,6), p soluciones linealmente independientes de la otra ecuación.

En virtud del lema 2, la ecuación homogénea transpuesta a (6,6) tiene la forma

$$[E-\lambda(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=0. \qquad (8,6)$$

Como la ecuación (6,6) tiene núcleo degenerado, entonces, por el segundo teorema de Fredholm, demostrado en el § 4 para las ecuaciones con núcleos degenerados, las ecuaciones homogéneas (6,6) y (8,6) tienen un mismo número de soluciones linealmente independientes. Demostremos ahora que las ecuaciones (8,6) y (7,6) son equivalentes. Supongamos que cierta función $\zeta(P)$ es solución de la ecuación (8,6). Demostremos que ésta satisface también a la ecuación (7,6). Aplicando a ambos miembros de la igualdad (8,6) el operador $E-\lambda K_1^*$, obtenemos:

$$(E-\lambda K_1^*)[E-\lambda(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=$$
$$=[E-\lambda K_1^*-\lambda(E-\lambda K_1^*)(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=0. \qquad (9,6)$$

Ya que de las fórmulas (17,5) y (18,5) se desprende que

$$(E-\lambda K_1^*)(E+\lambda\Gamma^*)\varphi=\varphi$$

para cualquier función $\varphi(P)$, entonces, de la igualdad (9,6) obtenemos:

$$(E-\lambda K_1^*-\lambda A^*)\zeta=0,$$

que es lo que se quería demostrar.

Análogamente, aplicando el operador $E+\lambda\Gamma^*$ a ambos miembros de la igualdad (7,6) y utilizando la igualdad $(E+\lambda\Gamma^*)(E-\lambda K_1^*)=E$ obtenemos que cualquier solución de la ecuación (7,6) satisface a la ecuación (8,6). De este modo, hemos demostrado que las ecuaciones homogéneas (1,6), (6,6), (8,6) y (7,6) tienen un mismo número de soluciones linealmente independientes. Con esto queda demostrado el segundo teorema de Fredholm.

Aquellos valores de λ, para los cuales se cumple el segundo caso de la alternativa de Fredholm, en la ecuación (1,6), se llaman *valores propios de la ecuación* (1,6) (autovalores) (o del núcleo $K(P, Q)$; compárese con el § 2), y las soluciones no triviales correspondientes de la ecuación homogénea, *funciones propias* (o autofunciones) *correspondientes a dicho valor propio.*

Como en el círculo $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, $\Gamma(Q, P, \lambda)$ es una función holomorfa de λ, el determinante (11,4), correspondiente a la ecuación degenerada (6,6), también es una función holomorfa de λ en este círculo. Para $\lambda = 0$ este determinante es igual a 1. Por consiguiente, no es idénticamente nulo. Por eso sus raíces no pueden tener puntos de acumulación en este círculo. Por lo tanto, *los valores propios λ de la ecuación* (1,6) *no pueden tener puntos de acumulación en el círculo $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$.*

3. *Tercer teorema de Fredholm.* Demostremos que la solución de la ecuación (1,6) existe si, y sólo si,

$$\int f(P) z(P)\, dP = 0$$

en donde $z(P)$ es una solución cualquiera de la ecuación homogénea (7,6) transpuesta a (1,6).

En la demostración del primer teorema de Fredholm para la ecuación (1,6) se estableció, que la ecuación (1,6) tiene solución si, y sólo si, existe solución de la ecuación (6,6) con núcleo degenerado. En el § 4 se demostró que la ecuación (6,6) con núcleo degenerado tiene solución si, y sólo si,

$$\int f(P)\zeta(P)\,dP = 0,$$

en donde $\zeta(P)$ es una solución cualquiera de la ecuación (8,6). Pero, de acuerdo con lo que acabamos de demostrar, el conjunto de estas soluciones $\zeta(P)$ coincide con el conjunto de las soluciones $z(P)$ de la ecuación (7,6). Con esto queda demostrado el teorema.

§ 7. *Ecuaciones integrales con núcleos uniformemente continuos*

Cualquier núcleo uniformemente continuo $K(P, Q)$ puede ser aproximado uniformemente, con una exactitud arbitraria cualquiera por núcleos degenerados. En efecto, sea $K(P, Q)$ una función uniformemente continua respecto a (P, Q), definida en una región finita G. Por el teorema de Weierstrass, demostrado en el curso de análisis *), para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polinomio tal $K_0(P, Q)$, de grado suficientemente grande respecto a las coordenadas de los puntos P y Q, que en toda la región G

$$|K(P, Q) - K_0(P, Q)| < \varepsilon.$$

Es evidente que cada término del polinomio $K_0(P, Q)$ puede ser representado como un producto de dos factores, uno de los cuales depende sólo de las coordenadas del punto P, y

---

*) Véase, por ejemplo, R. Courant y D. Hilbert, Métodos de la Física Matemática, t. I, cap. II, § 4; S. L. Sobolev, Ecuaciones de la Física Matemática, 1ª ed., M. – L., 1947, pág. 229.

el otro, sólo de las coordenadas del punto Q. Por eso, podemos escribir

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{N} a_i(P) b_i(Q) + K_1(P, Q),$$

siendo, además

$$|K_1(P, Q)| < \varepsilon.$$

De aquí, y aplicando el teorema demostrado en el parágrafo anterior, obtenemos que en el círculo

$$|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon D},$$

en donde D es el volumen de la región G, sean válidos todos los teoremas de Fredholm, y que en este círculo no existan puntos de acumulación de los valores propios de λ. Como ε puede tomarse tan pequeño como se quiera, de esto se deduce la validez de estos teoremas en círculos arbitrariamente grandes con centro en el punto $\lambda = 0$; es decir, su validez en todo el plano λ.

Repasemos los razonamientos que nos llevaron a la demostración de los teoremas de Fredholm para las ecuaciones con núcleos uniformemente continuos. Primeramente, (§ 4), hemos demostrado estos teoremas para ecuaciones integrales con núcleos degenerados. En el § 6 estos teoremas fueron demostrados para ecuaciones con núcleos próximos a los degenerados. Y en el presente parágrafo se demostró que cualquier núcleo uniformemente continuo puede ser aproximado uniformemente con una precisión arbitraria por un núcleo degenerado. Con esto obtuvimos la demostración de los teoremas de Fredholm para las ecuaciones integrales con núcleos uniformemente continuos cualesquiera.

El método con el que hemos demostrado aquí los teoremas de Fredholm pertenece a E. Schmidt. En mi exposición he utilizado los apuntes de las clases de S. L. Sobolev. Obsérvese, que se pueden resolver, aproximadamente, ecuaciones integrales con núcleos continuos, sustituyendo estos núcleos por núcleos degenerados, próximos a ellos *).

§ 8. Ecuaciones integrales con núcleos del tipo $\dfrac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}$

1. Aquí P y Q pertenecen a una región finita cerrada $\overline{G}$ (véase la observación en la pág. 39), y $\overline{K}(P, Q)$ es una función continua respecto a los puntos (P, Q) (o sea, del conjunto de puntos P y Q); PQ es la distancia entre los puntos P y Q. La finalidad del apartado 1 del presente parágrafo es demostrar que, *para las ecuaciones integrales con núcleos de este tipo, siendo* $\alpha < d$, *en donde* d *es la dimensión de la región* G, *en todo el plano* λ *se cumplen los tres teoremas de Fredholm, y que, entonces, los valores propios* λ *no pueden tener puntos de acumulación finitos.*

Demostremos previamente el siguiente lema para los núcleos $K_1(P, Q)$ y $K_2(P, Q)$ continuos respecto a (P, Q), si $P \neq Q$, $P \in \overline{G}$ y $Q \in \overline{G}$.

Si

$$|K_1(P, Q)| < \frac{A_1}{PQ^{\alpha_1}}, \quad 0 \leq \alpha_1 < d \tag{1,8}$$

y

$$|K_2(P, Q)| < \frac{A_2}{PQ^{\alpha_2}}, \quad 0 \leq \alpha_2 < d, \tag{2,8}$$

---

*) Comparar con L. V. Kantorovich y V. I. Krylov, Métodos Aproximados del Análisis Superior, 5^a ed, 1962, cap. II, § 4.

entonces existe la integral

$$K_3(P, Q) = \int K_1(P, P_1) K_2(P_1, Q)\, dP_1$$

y ésta es continua respecto a (P, Q), si P es diferente de Q; además

$$|K_3(P, Q)| < \frac{A_3}{PQ^{\alpha_1+\alpha_2-d}} \; si\; \alpha_1+\alpha_2 > d, \tag{3,8}$$

y

$$|K_3(P, Q)| < A_3 |\ln PQ| + A_4, \quad si\; \alpha_1+\alpha_2 = d, \tag{4,8}$$

en donde A_3 y A_4 son unas constantes. Si, en cambio, $\alpha_1+\alpha_2 < d$, entonces esta integral existe y es una función uniformemente continua respecto a (P, Q) *).

Demostración. Sea $P \neq Q$. Entonces

$$|K_3(P, Q)| \leq \int |K_1(P, P_1)| \cdot |K_2(P_1, Q)|\, dP_1 \leq$$

$$\leq \overbrace{\int \cdots \int}^{d}_{r_1 \leq D} \frac{A_1 A_2\, dx_1^{(1)} \ldots dx_d^{(1)}}{\left[\sum_{i=1}^{d} (x_i - x_i^{(1)})^2\right]^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{d} (x_i^{(1)} - y_i)^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}} = I. \tag{5,8}$$

Aquí x_i, $x_i^{(1)}$, y_i, $i = 1, \ldots, d$, son las coordenadas de los puntos P, P_1, Q, respectivamente; D es el diámetro de la región $\overline{G}$, o sea, el extremo superior de las distancias entre dos de sus puntos;

$$r_1 = \sqrt{\sum (x_i^{(1)} - x_i)^2}.$$

*) Comparar con S. L. Sobolev, Ecuaciones de la Física Matemática, 1ª edición, M. – L., 1947, pág. 233.

Para simplificar los cálculos sin restringir la generalidad, hagamos

$$x_1 = \ldots = x_d = 0; \qquad y_1 = \varrho, \ y_2 = \ldots = y_d = 0,$$

en donde $\varrho = PQ$. Pongamos luego

$$x_i^{(1)} = \varrho \xi_i .$$

Entonces la integral I que figura en el segundo miembro de (5,8) puede escribirse así:

$$I = \overbrace{\int \ldots \int}^{d}_{r_1 \approx D} \frac{A_1 A_2 \varrho^d \, d\xi_1 \ldots d\xi_d}{\left(\sum_{i=1}^{d} \xi_i^2\right)^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot \left[(\xi_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^{d} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}} \varrho^{\alpha_1 + \alpha_2}} .$$

Obsérvese que, si $\sqrt{\sum_{i=1}^{d} \xi_i^2} \geq 2$, entonces

$$\sqrt{(\xi_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^{d} \xi_i^2} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \xi_i^2} . \qquad (6,8)$$

En efecto, de la fig. 2 se ve que $PM + OP \geq OM$. Pero $OP = 1$.

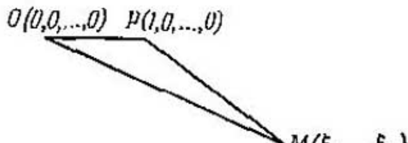

Fig. 2

Por consiguiente, $PM \geq OM - 1 = \frac{1}{2}\left(OM + (OM - 2)\right)$. Pero, por hipótesis, $OM \geq 2$. Por eso, $PM \geq \frac{OM}{2}$.

Descompongamos la integral I en dos partes y utilicemos la acotación (6,8). Entonces se obtiene:

$$I \leq \frac{A_1 A_2}{\varrho^{\alpha_1+\alpha_2-d}} \int\limits_{\sum \xi_i^2 \leq 1} \cdots \int \frac{d\xi \ldots d\xi_d}{\left[\sum\limits_{i=1}^{d} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot \left[(\xi_1-1)^2+\sum\limits_{i=2}^{d} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}} +$$

$$+ \frac{A_1 A_2}{\varrho^{\alpha_1+\alpha_2-d}} \int\limits_{1 \leq \sum \xi_i^2 \leq \frac{D^2}{\varrho^2}} \cdots \int \frac{2^{\alpha_2}\, d\xi_1 \ldots d\xi_d}{\left[\sum\limits_{i=1}^{d} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}} .$$

La integral en el primer sumando es convergente y da cierta constante C_1 que no depende de ϱ. Para el cálculo de la segunda integral, pasemos a coordenadas polares. Se obtiene:

$$I \leq C_1 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + C_2 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} \int\limits_{2}^{\frac{D}{\varrho}} \tau^{d-1-\alpha_1-\alpha_2}\, d\tau, \qquad (7,8)$$

en donde C_2 es una constante positiva.

Si $\alpha_1+\alpha_2 > d$, entonces de la última fórmula se deduce que

$$I \leq C_1 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + C_2 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} \int\limits_{2}^{\infty} \tau^{d-1-\alpha_1-\alpha_2}\, d\tau = C_3 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2},$$

es decir, se obtiene la acotación (3,8).

Si $\alpha_1+\alpha_2 = d$, entonces de la fórmula (7,8) se desprende que

$$I \leq C_1 + C_2 \ln \frac{D}{2\varrho} ,$$

es decir, la acotación (4,8) para $K(P, Q)$ *).

*) En las consideraciones subsiguientes, el caso $\alpha_1+\alpha_2 = d$ siempre puede ser excluido, aumentando un poco α_1 o α_2.

Si, en cambio, $\alpha_1+\alpha_2<d$, entonces es evidente que $K_3(P,Q)$ existe también para $P=Q$. Luego, de la acotación (7,8) se sigue que

$$I\leq C_1\varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2}+\frac{C_2\varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2}}{d-\alpha_1-\alpha_2}\left[\left(\frac{D}{\varrho}\right)^{d-\alpha_1-\alpha_2}-2^{d-\alpha_1-\alpha_2}\right]\leq C_3, \quad (8,8)$$

en donde C_3 es una constante.

Demostremos ahora que $K_3(P,Q)$ es siempre continua y depende de (P,Q), si P no coincide con Q. Para esto observemos que

$$\begin{aligned}|K_3(P,Q)-K_3(P^*,Q^*)|&\leq\\ \leq|K_3(P,Q)-K_3(P,Q^*)|&+|K_3(P,Q^*)-K_3(P^*,Q^*)|\leq\\ \leq\int|K_1(P,P_1)|\cdot|K_2(P_1,Q)&-K_2(P_1,Q^*)|\,dP_1+\\ +\int|K_2(P_1,Q^*)|\cdot|K_1(P,P_1)&-K_1(P^*,P_1)|\,dP_1. \quad (9,8)\end{aligned}$$

Hemos supuesto que las funciones $K_1(P,Q)$ y $K_2(P,Q)$ están dadadas para todos los puntos P y Q (si $P\neq Q$) pertenecientes a $\bar{G}$, y que $K_1(P,Q)$ y $K_2(P,Q)$ son continuas siempre que $P\neq Q$. Por eso, en cualquier conjunto cerrado de puntos (P,Q), que no contenga puntos para los cuales $P=Q$, las funciones $K_1(P,Q)$ y $K_2(P,Q)$ son uniformemente continuas respecto a (P,Q). Por consiguiente, cada una de las diferencias que figuran bajo el signo integral es uniformemente pequeña con respecto a P_1, siempre que los puntos Q y Q^*, P y P^* estén suficientemente próximos entre sí en toda la región $\bar{G}$ de puntos P_1, a excepción de ciertos entornos G_1, G_2, G_3 y G_4 de los puntos $P_1=Q$, $P_1=Q^*$, $P_1=P$ y $P_1=P^*$. En los entornos G_1, G_2, G_3 y G_4 incluimos los puntos de G, que distan respectivamente de Q, Q^*, P, P^*

no más de un cierto r fijo, pequeño, que no varía al aproximarse P a P^* y Q a Q^*. Por eso, en virtud de las condiciones de (1,8) y (2,8), las integrales que figuran en (9,8) y son tomadas sobre las regiones $\bar{G}-(G_1+G_2)$ y $\bar{G}-(G_3+G_4)$ se hacen arbitrariamente pequeñas, cuando los puntos (P, Q) y (P^*, Q^*) están suficientemente próximos. Las partes de las integrales (9,8), tomadas sobre los entornos G_1, G_2, G_3 y G_4, como consecuencia de las condiciones (1,8) y (2,8), también son arbitrariamente pequeñas, cuando $r \to 0$, si $P \neq Q$.

Si, en cambio, $\alpha_1+\alpha_2<d$, entonces, cuando los puntos (P, Q) u (P^*, Q^*) están suficientemente próximos, las integrales (9,8) son arbitrariamente pequeñas, incluso si los puntos P y Q (o P^* y Q^*) coinciden, ya que en este caso las partes de estas integrales tomadas sobre los entornos G_1, G_2, G_3 y G_4 tienden uniformemente a 0 respecto a (P, Q), cuando $r \to 0$.

En efecto, la primera de las integrales (9,8), tomada sobre estos entornos, no es superior a la suma

$$\int |K_1(P, P_1)|\,|K_2(P_1, Q)|\;dP_1+\int |K_1(P, P_1)|\,|K_2(P_1, Q^*)|\,dP_1.$$

Cada una de estas integrales se acota utilizando la desigualdad (8,8). Análogamente se acota la segunda integral de (9,8), tomada sobre G_1, G_2, G_3 y G_4.

De esto se deduce la continuidad de la función $K_3(P, Q)$ en toda la región cerrada en que está definida y, por lo tanto, su continuidad uniforme.

Dediquémonos ahora al estudio de las ecuaciones integrales

$$y(P)=\lambda \int K(P, Q) y(Q)\;dQ+f(P), \tag{10,8}$$

en donde $K(P, Q)$ tiene la forma indicada en el título del presente parágrafo, para $\alpha < d$. La función $f(P)$ la consideraremos continua en la región cerrada, y por lo tanto, acotada; consideraremos también sólo las soluciones continuas de esta ecuación. Obsérvese que, de manera completamente análoga a lo hecho en el párrafo anterior, es fácil demostrar que con las suposiciones hechas sobre $K(P, Q)$, *cualquier solución acotada de la ecuación* (10,8) *es continua, si* $f(P)$ *es continua.*

Demostremos, ante todo, que para $|\lambda|$ suficientemente pequeño, esta ecuación, al igual que su transpuesta, tiene solución única en la clase de funciones acotadas. Como para la ecuación transpuesta todas las demostraciones son iguales a las de la ecuación dada (10,8), nos limitaremos a considerar sólo la ecuación (10,8). La demostración de la existencia y de la unicidad de la solución de la ecuación (10,8) se lleva a cabo de igual forma a como se hizo en el § 5. Buscaremos la solución en forma de serie:

$$y(P) = y_0(P) + \lambda y_1(P) + \lambda^2 y_2(P) + \ldots \qquad (11,8)$$

Como en el § 5, obtenemos que

$$y_0(P) = f(P), \qquad y_{k+1}(P) = \int K(P, Q) y_k(Q)\, dQ,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Aplicando el lema recientemente demostrado, de aquí obtenemos que todas las $y_k(P)$ son funciones continuas de P. Acotemos sus módulos. Supongamos que

$$|f(P)| < N,$$

en donde N es una constante. Sea M el extremo superior de los valores de la integral

$$\int |K(P, Q)| \, dQ$$

(M, evidentemente, existe). Entonces es fácil ver que

$$|y_k(P)| \leqslant NM^k.$$

De aquí que, para

$$|\lambda| < \frac{1}{M} - \varepsilon(\varepsilon > 0),$$

la serie (11,8) converge uniformemente respecto a λ y da una función holomorfa respecto a λ y uniformemente continua respecto al conjunto (P, λ). Completamente igual que en el § 5, se demuestra que esta serie da la solución de la ecuación integral (10,8), y que no existe otra solución de esta ecuación en la clase de funciones acotadas.

Del mismo modo que en el § 5, hallamos que esta solución $y(P)$ puede representarse en la forma

$$y(P) = \lambda \int \Gamma(P, Q, \lambda) f(Q) \, dQ + f(P),$$

en donde

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda K^{(2)}(P, Q) + \lambda^2 K^{(3)}(P, Q) + \ldots \quad (12,8)$$

El primer término de esta serie es igual a

$$K(P, Q) = \frac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}, \quad \alpha < d, \qquad (13,8)$$

en donde $\overline{K}(P, Q)$ es una función uniformemente continua respecto a (P, Q). Como G es una región acotada, de aquí se deduce que la función $\overline{K}(P, Q)$ es también acotada, y por el lema demostrado al principio de este parágrafo,

$$|K^{(2)}(P, Q)| < \frac{A}{PQ^{2\alpha - d}} \; ;$$

en general

$$|K^{(m)}(P,Q)| < \frac{A_m}{PQ^{m\alpha-(m-1)d}} \text{ *)},$$

si $m\alpha-(m-1)\,d>0$. Aquí A y A_m son unas constantes. Como $\alpha<d$, entonces para m suficientemente grande tendremos que

$$m\alpha-(m-1)\,d<0.$$

Entonces, en virtud del lema demostrado, $K^{(m)}(P,Q)$ es una función uniformemente continua respecto a (P,Q). Todas las iteraciones siguientes $K^{(p)}(P,Q)$ serán también uniformemente continuas. Además, para $p\geq m$ tenemos que

$$|K^{(p+1)}(P,Q)| \leq \left|\int K(P,P_1)K^{(p)}(P_1,Q)\,dP_1\right| \leq$$

$$\leq M_p\int|K(P,P_1)|\,dP_1 \leq M_pM,$$

en donde M_p es el extremo superior del módulo de $K^{(p)}(P,Q)$ De aquí se obtiene la demostración de la convergencia uniforme de la serie (12,8) respecto a P, Q y λ $\left(\text{para } \lambda<\frac{1}{M}-\varepsilon\right)$, igual a como fue demostrado para la serie (16,5). Razonamientos análogos se pueden hacer para la ecuación transpuesta.

Todas las fórmulas obtenidas en el § 5 siguen siendo válidas.

Después de esto, todos los razonamientos del § 6 son aplicables a las ecuaciones integrales con núcleos del tipo

$$K(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}a_i(P)\,b_i(Q)+K_1(P,Q),$$

*) Véase la nota en la pág. 58.

en donde $a_i(P)$ y $b_i(Q)$ son continuas en $\overline{G}$ y $K_1(P, Q)$ tiene la forma (13,8). De este modo, se obtiene la demostración de los teoremas de Fredholm en el círculo

$$|\lambda| < \frac{1}{M_1},$$

en donde M_1 es el máximo de los extremos superiores de las integrales:

$$\int |K_1(P, Q)| \, dQ, \qquad \int |K_1(P, Q)| \, dP.$$

Además de esto, resulta que en este círculo no puede haber puntos de acumulación de los valores propios de λ.

Pasemos ahora a la demostración de los teoremas de Fredholm para las ecuaciones integrales con núcleo del tipo indicado en el título del presente parágrafo. Hagamos

$$\varphi_C(x) = x, \qquad \text{si } x \leq C,$$
$$\varphi_C(x) = C, \qquad \text{si } x > C.$$

Entonces la función

$$K_C(P, Q) = \overline{K}(P, Q)\varphi_C\left(\frac{1}{PQ^{\alpha}}\right)$$

será uniformemente continua respecto a (P, Q) para todo C. Para un valor C suficientemente grande, las integrales

$$\int |K(P, Q) - K_C(P, Q)| \, dQ, \qquad \int |K(P, Q) - K_C(P, Q)| \, dP$$

serán uniformemente pequeñas respecto a P y Q, respectivamente. Como se dijo en el § 6, una función uniformemente continua $K_C(P, Q)$ puede ser aproximada uniformemente en la región $\overline{G}$ con una precisión arbitraria por sumas del tipo

$$S_m(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P) b_i(Q).$$

Entonces, tenemos que

$$K(P, Q) = S_m(P, Q) + \bar{K}(P, Q),$$

y, además, el extremo superior de los valores de

$$\int |\bar{K}(P, Q)|\, dQ, \qquad \int |\bar{K}(P, Q)|\, dP$$

puede hacerse menor que cualquier $\varepsilon > 0$. De aquí se obtiene la demostración de los tres teoremas de Fredholm en todo el plano λ para las ecuaciones integrales con núcleos del tipo (13,8). Además, se obtiene la demostración de que no existen puntos de acumulación finitos de los valores propios.

La demostración que acabamos de hacer, de los tres teoremas de Fredholm para núcleos del tipo (13,8), en lo fundamental repite la demostración de estos teoremas para núcleos acotados uniformemente continuos. En esencia, la demostración de estos últimos teoremas se basaba sólo en el hecho de que ciertas integrales eran pequeñas; la exigencia de que los integrandos fuesen pequeños era superflua para ello. Esto, precisamente, se tuvo en cuenta en el presente parágrafo.

Observación. Supongamos que el núcleo $K(P, Q)$ es una función continua de P y Q, cuando $P \in G$, $Q \in G$ y $P \neq Q$, y satisface a la condición $|K(P, Q)| < \frac{A}{PQ^{\alpha}}$, $0 \leq \alpha < d$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\alpha + \varepsilon < d$. Entonces

$$K(P, Q) = \frac{K(P, Q)\, PQ^{\alpha+\varepsilon}}{PQ^{\alpha+\varepsilon}} = \frac{\bar{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha+\varepsilon}},$$

en donde $\bar{K}(P, Q)$ es una función continua de P y Q. De este modo, para los núcleos del tipo indicado también son válidos todos los teoremas de Fredholm.

2. Muchos problemas de la física matemática llevan al estudio de ecuaciones integrales, en las cuales la integración

se efectúa no sobre una región del espacio euclídeo d-dimensional, sino sobre una curva, superficie o variedad *) de mayor dimensión, situada en un espacio euclídeo de dimensión suficientemente grande.

Para las ecuaciones integrales de este tipo también son válidos los teoremas de Fredholm. Más adelante demostraremos cómo se pueden demostrar los teoremas de Fredholm, utilizando los razonamientos del apartado 1, en el caso en que la región de integración sea una superficie cerrada regular en el espacio tridimensional. Para otras variedades las demostraciones son análogas.

Así pues, sea dada la ecuación

$$y(P)=\lambda\int_S K(P,Q)y(Q)\,dS_Q+f(P), \tag{14,8}$$

en donde S es una superficie cerrada regular en el espacio tridimensional (suponemos que en cierto entorno suficientemente pequeño de cualquier punto $A\in S$, una cualquiera de las coordenadas de los puntos de S es función con derivadas continuas de las otras dos coordenadas); dS_Q es el elemento del área de la superficie S; $P\in S$, $Q\in S$ y $f(P)$ es una función continua dada en S. Sea, además, $K(P,Q)=\dfrac{\overline{K}(P,Q)}{PQ^{\alpha}}$, donde $\overline{K}(P,Q)$ es una función continua cuando $P\in S$ y $Q\in S$; $0\leqslant\alpha<2$ y PQ es la distancia entre los puntos P y Q en el espacio tridimensional. Para demostrar mediante los razo-

*) Por variedad d-dimensional diferenciable continua M, en el espacio euclídeo n-dimensional E_n $(0<d<n)$ se entiende un conjunto M acotado, conexo y cerrado de puntos, perteneciente a E_n, y tal, que en cierto entorno de cualquier punto $A\in M$, algunas $(n-d)$ coordenadas de los puntos de M son funciones con derivadas continuas de las restantes d coordenadas.

namientos del apartado 1 todos los teoremas de Fredholm para la ecuación (14,8) considerada, es suficiente demostrar que sigue siendo válido el lema del apartado 1 y que todo núcleo continuo $K_1(P, Q)$, dado en S, puede ser uniformemente aproximado por un núcleo degenerado con cualquier grado de exactitud. Los razonamientos restantes de los § § 4, 5, 6, 7 y 8 se extienden automáticamente a las ecuaciones del tipo considerado.

El núcleo continuo $K_1(P, Q)$ puede considerarse como una función continua, definida en cierto conjunto cerrado S^2 en el espacio de 6 dimensiones $(x_p, y_p, z_p, x_Q, y_Q, z_Q)$. Este conjunto se obtiene cuando los puntos $P(x_p, y_p, z_p)$ y $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ recorren el conjunto S, independientemente uno del otro. Denotemos por R el cubo, en el espacio $(x_p, y_p, z_p, x_Q, y_Q, z_Q)$, que contiene a todos los puntos del conjunto S^2. Una función continua, dada en el conjunto cerrado S^2, puede prolongarse hasta que resulte una función continua, dada en R *). Del teorema de Weierstrass se tiene, que una función continua, dada en R, puede aproximarse uniformemente por un polinomio con una precisión arbitraria. Si consideramos ahora este polinomio sólo en S^2, entonces, éste será, precisamente, un núcleo degenerado que aproxima al núcleo $K_1(P, Q)$ con cualquier precisión.

Verifiquemos ahora el lema del apartado 1, § 8. Para demostrar que $K_3(P, Q)$ es continua para $P \neq Q$, en forma análoga a la demostración dada en el p. 1, es suficiente verificar, que para r suficientemente pequeño, la integral del tipo

$$\int\limits_{S(Q,r)} \frac{dS_{P_1}}{QP_1^{\alpha}}, \quad 0 \leq \alpha < 2,$$

*) P. S. Alexandrov, Introducción a la Teoría de Conjuntos y Funciones, Gostejizdat, 1948, cap. 6, § 13, pág. 284.

tomada sobre la parte de la superficie S, ubicada en la esfera de radio r, con centro en el punto Q, cambiará gradualmente respecto a Q, en un pequeño entorno de cierto punto Q_0.

Supongamos que en un entorno del punto Q_0 la superficie S está dada por la función con derivadas continuas $z=f(x,y)$ y Q' y P_1' son las proyecciones de los puntos Q y P_1 sobre el plano $z=0$. Como $dS<C\,dx\,dy$, en donde C es una constante, y, además, $Q'P_1'\leqslant QP_1$, se tiene:

$$\int\limits_{S(Q,r)}\frac{dS_{P_1}}{QP_1^{\alpha}}<\int\limits_{S(Q',r)}\frac{C\,dx\,dy}{Q'P_1'^{\alpha}}.$$

Esta última integral puede hacerse arbitrariamente pequeña, si r es suficientemente pequeño.

Para demostrar la continuidad de $K_3(P,Q)$ para $P=Q$ y $\alpha_1+\alpha_2<d$, basta acotar, de la misma manera, la integral del tipo

$$\int\limits_{S(Q,r)+S(P,r)}\frac{dS_{P_1}}{PP_1^{\alpha_1}QP_1^{\alpha_2}},$$

cuando P y Q varían en un entorno pequeño del punto $P^*=Q^*$ y r tiende a cero, utilizando la desigualdad (8,8).

Para demostrar la validez de las desigualdades (3,8) y (4,8), demostremos que las funciones

$$K_3(P,Q)PQ^{\alpha_1+\alpha_2-d},\qquad \text{si}\qquad \alpha_1+\alpha_2>d,$$

y

$$\frac{K_3(P,Q)}{|\ln PQ|+1},\qquad \text{si}\qquad \alpha_1+\alpha_2=d$$

para $P\in S$, $Q\in S$ y $P\neq Q$, están acotadas.

Para ello, supongamos que nuestra afirmación no es cierta. Entonces existen dos sucesiones de puntos $P_1 \in S$, $P_2 \in S, \ldots, Q_1 \in S$, $Q_2 \in S, \ldots$, donde $P_i \neq Q_i$, que

$$|K_3(P_i, Q_i)| P_i Q_i^{\alpha_1+\alpha_2-d} \to \infty, \quad \text{cuando} \quad i \to \infty. \tag{15,8}$$

Podemos suponer, además, que las sucesiones P_i y Q_i son convergentes, es decir, que

$$P_i \to P_0 \in S, \qquad Q_i \to Q_0 \in S.$$

De la continuidad de la función $K_3(P, Q)$ para $P \neq Q$, demostrada anteriormente, se deduce que $P_0 = Q_0$. Supongamos, para fijar ideas, que en cierto entorno U suficientemente pequeño del punto P_0, la coordenada z de los puntos de S es una función de x e y con derivadas continuas, y que en este entorno se verifica la desigualdad $dS \leq C\, dx\, dy$ (C es una constante). Entonces, para todas las i suficientemente grandes, se tiene que

$$|K_3(P_i, Q_i)| \leq A_1 A_2 \int\limits_U \frac{dS_{P_1}}{P_i P_1^{\alpha_1} P_1 Q_i^{\alpha_2}} + A_1 A_2 \int\limits_{S-U} \frac{dS_{P_1}}{P_i P_1^{\alpha_1} P_1 Q_i^{\alpha_2}} \leq$$

$$\leq A_1 A_2 C \int\limits_{U'} \frac{dx\, dy}{P_i' P_1'^{\alpha_1} P_1' Q_i'^{\alpha_2}} + A_1 A_2 \max_{P_1 \in S-U} \frac{1}{P_i P_1^{\alpha_1} P_1 Q_i^{\alpha_2}} \int\limits_{S-U} dS_{P_1},$$

donde los trazos indican las proyecciones sobre el plano $z=0$. Puesto que el último de los sumandos obtenidos está acotado, de (15,8) se deduce que

$$P_i Q_i^{\alpha_1+\alpha_2-d} \int\limits_{U'} \frac{dx\, dy}{P_i' P_1'^{\alpha_1} P_1' Q_i'^{\alpha_2}} \to \infty, \quad \text{cuando} \quad i \to \infty. \tag{16,8}$$

Sin embargo, para todos los i suficientemente grandes, se tiene que $P_i'Q_i' \leq C_1 P_i Q_i$, en donde $C_1 > 0$ (¿por qué?). Por eso, de (16,8) obtenemos:

$$P_i'Q_i'^{\alpha_1+\alpha_2-d} \int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P_i'P_1'^{\alpha_1} P_1'Q_i'^{\alpha_2}} \to \infty, \quad \text{cuando} \quad i \to \infty.$$

Pero los puntos P_i' y Q_i' están situados ya en la región U' del plano. Por esto, en virtud del lema demostrado en el apartado 1, tenemos que, para todas las i suficientemente grandes,

$$\int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P_i'P_1'^{\alpha_1} P_1'Q_i'^{\alpha_2}} < \frac{A}{P_i'Q_i'^{\alpha_1+\alpha_2-d}}$$

(A es una constante). Esta relación contradice a la anterior. De forma análoga se demuestra que la función $\dfrac{K_3(P,Q)}{|\ln PQ|+1}$ es acotada.

§ 9. *Ejemplos de ecuaciones integrales singulares*

Llamamos *singulares* a aquellas ecuaciones integrales para las cuales no son válidos los teoremas de Fredholm, o bien los valores propios tienen puntos de acumulación finitos. Las ecuaciones integrales singulares citadas en este parágrafo tienen un intervalo de integración infinito. Pero, haciendo, por ejemplo,

$$\xi = \operatorname{tg} \eta, \qquad x = \operatorname{tg} y,$$

estas ecuaciones integrales pueden ser reducidas a ecuaciones cuyo intervalo de integración es finito.

Ejemplo 1. La ecuación integral

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{\infty}\operatorname{sen} x\xi\varphi(\xi)\,d\xi$$

tiene para $\lambda=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ un conjunto infinito de soluciones linealmente independientes, ya que para tales λ, las siguientes funciones satisfacen a esta ecuación

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ax}\pm\frac{x}{a^2+x^2}$$

para cualquier $a>0$.

Ejemplo 2. La ecuación

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-\xi|}\varphi(\xi)\,d\xi$$

tiene la solución $e^{i\alpha x}$ para $\lambda=\frac{1+\alpha^2}{2}$. De este modo, cada $\lambda\geq\frac{1}{2}$ real es un valor propio. Aquí consideramos sólo valores reales de α, ya que, en el caso contrario, $e^{i\alpha x}$ no sería acotada en el intervalo infinito $-\infty<x<+\infty$.

Existen ejemplos de ecuaciones integrales, para las que no tienen lugar los demás teoremas de Fredholm.

En la teoría de las ecuaciones diferenciales con derivadas parciales y en la física matemática, desempeñan un papel muy importante las llamadas *ecuaciones integrales singulares*. Estas ecuaciones tienen la forma (10,8), pero sus núcleos tienen una singularidad fuerte ($\alpha=d$) y no son integrables en el sentido común; la integral correspondiente se entiende en el sentido de valor principal, según Cauchy. Ha sido construida la teoría completa de las ecuaciones singulares. Esta teoría se diferencia sustancialmente de la teoría de las ecuaciones integrales de Fredholm. Una amplia bibliografía ha sido dedicada a las ecuaciones integrales singulares. Véase, por ejemplo, N. I. Musjelishvili, Ecuaciones Integrales Singulares, Fizmatguiz, 1962; N. I. Muskhelishvili, Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics. (Dep. of Supply and Development, Aer. Res. Lab., Melbourne, Australia, 1949; Noordhoff, Groningen, 1953, traducido del ruso). S. G. Mijlin, Integrales Singulares Multidimensionales y Ecuaciones Integrales, Fizmatguiz, 1962.

CAPITULO 2

ECUACIONES DE VOLTERRA

§ 10. *Ecuaciones de Volterra*

Así se llaman las ecuaciones integrales

$$y(P)=\lambda\int K(P,Q)y(Q)\,dQ+f(P),$$

que satisfacen a las siguientes condiciones:

a) cada coordenada de los puntos P y Q toma valores desde 0 hasta cierto $a>0$;

b) $K(P,Q)=0$, si por lo menos una de las coordenadas del punto Q es mayor que la correspondiente (es decir, la que tiene el mismo índice) del punto P.

Estudiaremos sólo el caso unidimensional. Entonces la ecuación de Volterra tiene la forma

$$y(x)=\lambda\int_0^x K(x,\xi)y(\xi)\,d\xi+f(x). \qquad (1,10)$$

Demostremos que para esta ecuación tiene lugar el primer caso de la alternativa de Fredholm para cualquier λ, donde se supone que $K(x,\xi)$ es una función continua para $0\leq x\leq a$, $0\leq\xi\leq x$, y $f(x)$ es continua para $0\leq x\leq a$.

En otras palabras, demostraremos que *la ecuación de Volterra no tiene valores propios.*

Demostración. La ecuación (1,10) pertenece a la clase de ecuaciones integrales, para la que hemos demostrado los teoremas de Fredholm. En efecto,

$$K(x, \xi) = \frac{K(x, \xi)\,|x-\xi|^{\varepsilon}}{|x-\xi|^{\varepsilon}}, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

La función $\overline{K}(x, \xi)$, definida por las igualdades

$$\overline{K}(x, \xi) = K(x, \xi)|x-\xi|^{\varepsilon} \quad \text{para} \quad 0 \leq \xi \leq x_1,$$

$$\overline{K}(x, \xi) = 0 \quad \text{para} \quad \xi \geq x,$$

es uniformemente continua en el cuadrado

$$0 \leq x \leq a, \qquad 0 \leq \xi \leq a.$$

Por eso, para la ecuación integral (1,10), de acuerdo con el § 8, son válidos los tres teoremas de Fredholm. Esto significa que, para demostrar que para esta ecuación tiene lugar el primer caso de la alternativa de Fredholm para cualquier λ, es suficiente demostrar que la ecuación homogénea correspondiente

$$y(x) = \lambda \int_0^x K(x, \xi) y(\xi)\, d\xi \tag{2,10}$$

puede tener para cualquier λ sólo la solución trivial en la clase de funciones continuas de x para $0 \leq x \leq a$. Demostremos esto último: denotemos por B el valor máximo de $|y(x)|$ para $0 \leq x \leq a$, y por M el valor máximo de $|K(x, \xi)|$ para $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq \xi \leq x$. Entonces, de la ecuación (2,10), obtenemos que

$$|y(x)| \leq |\lambda| MBx.$$

Sustituyendo de nuevo esta acotación de $y(x)$ en el segundo miembro de (2,10), obtenemos

$$|y(x)| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{Bx^2}{2}.$$

Continuando este proceso, resulta:

$$|y(x)| \leq \frac{|\lambda|^k M^k x^k B}{k!} \leq \frac{|\lambda|^k M^k a^k B}{k!}, \quad k=1, 2, \ldots$$

Esta última expresión tiende a 0 cuando $k \to \infty$. Por lo tanto, $y(x) \equiv 0$ en el intervalo $(0, a)$, que es lo que se quería demostrar.

La solución de la ecuación (1,10) puede buscarse en forma de serie

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \ldots \qquad (3,10)$$

De acuerdo con el § 8, tiene que ser

$$y_0(x) = f(x), \quad y_{k+1}(x) = \int_0^x K(x, \xi) y_k(\xi)\, d\xi, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

Sea N el máximo valor de $|f(x)|$ en el intervalo $(0, a)$. Entonces se tiene que

$$|y_k(x)| \leq \frac{M^k x^k N}{k!} \leq \frac{M^k a^k N}{k!}.$$

De aquí se ve que la serie (3,10) converge uniformemente respecto a λ y x, cuando λ está situado en un círculo arbitrariamente grande y $0 \leq x \leq a$.

Para tener una idea clara del por qué la ecuación de Volterra no tiene valores propios, consideremos (de manera similar a como se hizo en el § 3) el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales, correspondiente a la ecuación de Volterra en el intervalo $0 \leq x \leq a$:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = y_1 - \lambda K_{11} y_1 \Delta\xi, \\ f_2 = \quad -\lambda K_{21} y_1 \Delta\xi + y_2 - \lambda K_{22} y_2 \Delta\xi, \\ f_3 = \quad -\lambda K_{31} y_1 \Delta\xi \qquad -\lambda K_{32} y_2 \Delta\xi + y_3 - \lambda K_{33} y_3 \Delta\xi, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (4,10)$$

Aquí hemos conservado las notaciones admitidas en el § 3. La ecuación (4,10), para cualquier λ fijo, puede resolverse sucesivamente, siempre que $|\Delta\xi|$ sea suficientemente pequeño, lo que supondremos. En efecto, de la primera ecuación se puede hallar y_1, ya que para $|\Delta\xi|$ suficientemente pequeño, el coeficiente de y_1 es diferente de cero. Sustituyamos el valor de y_1 en todas las ecuaciones subsiguientes. Entonces, de la segunda ecuación se puede obtener y_2. Sustituyamos su valor en todas las ecuaciones subsiguientes. Entonces, de la tercera ecuación se puede despejar y_3, etc. Fácilmente se puede demostrar, que cuando $\Delta x \to 0$, la solución del sistema (4,10), efectivamente, se aproxima a la solución de la ecuación integral (1,10).

El determinante del sistema (4,10) es igual a

$$\Pi = (1 - \lambda K_{11} \Delta\xi)(1 - \lambda K_{22} \Delta\xi) \ldots (1 - \lambda K_{nn} \Delta\xi),$$

en donde $\Delta x = \Delta\xi = \frac{a}{n}$. De aquí se ve que

$$\Pi \geq (1 - |\lambda| M \Delta\xi)^{\frac{a}{\Delta\xi}}. \qquad (5,10)$$

El segundo miembro de esta desigualdad, para cualquier $\Delta\xi$ suficientemente pequeño, es diferente de cero. Al disminuir $\Delta\xi$, dicho miembro crece. Por ejemplo, cuando $\Delta\xi$ disminuye dos veces, entonces $(1 - |\lambda| M \Delta\xi)$ en (5,10) se sustituye por la expresión

$$\left(1-|\lambda| M \frac{\Delta\xi}{2}\right)^2 = 1-|\lambda| M\, \Delta\xi + \frac{\lambda^2 M^2 (\Delta\xi)^2}{4}.$$

Cuando $\Delta\xi \to 0$, el segundo miembro de (5,10) tiende a

$$e^{-|\lambda| a M}.$$

La causa algebraica de la ausencia de valores propios de la ecuación de Volterra estriba, precisamente, en el hecho de que el determinante del sistema (4,10) es siempre diferente de 0 y no tiende a 0 cuando $\Delta\xi \to 0$.

Observación 1. Con razonamientos completamente análogos a los que utilizamos para demostrar la ausencia de valores propios de la ecuación de Volterra, con núcleos uniformemente continuos, se puede demostrar lo mismo para las ecuaciones de Volterra con núcleos del tipo

$$K(x, \xi) = \frac{\overline{K}(x, \xi)}{|x-\xi|^{\alpha}}, \qquad 0 \leq \alpha < 1,$$

en donde $\overline{K}(x, \xi)$ es una función uniformemente continua.

Observación 2. Consideremos la siguiente ecuación integral de Volterra de 1ª especie, respecto a la función incógnita $y(x)$:

$$\int_0^x K(x, \xi) y(\xi)\, d\xi = f(x),$$

$$f(0) = 0. \tag{6,10}$$

Supongamos que $K(x, \xi)$, $K'_x(x, \xi)$; $f(x)$ y $f'(x)$ son funciones continuas cuando $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq \xi \leq x$. Entonces, cualquier solución continua $y(x)$ de la ecuación (6,10) para $0 \leq$

$\leq x \leq a$ satisface a la ecuación integral

$$K(x, x)y(x) + \int_0^x K'_x(x, \xi)y(\xi)\, d\xi = f'(x), \qquad (7{,}10)$$

la cual se obtiene de (6,10), derivando miembro a miembro respecto a x. Recíprocamente, fácilmente se ve que cualquier solución continua de la ecuación (7,10) para $0 \leq x \leq a$ satisface también a la ecuación (6,10). Si el módulo de $K(x, x)$ es mayor que cierta constante positiva, entonces la ecuación (7,10) se reduce a una ecuación integral de Volterra de 2ª especie, estudiada en el presente parágrafo. Si $K(x, x) \equiv \equiv 0$, a veces es útil derivar nuevamente miembro a miembro la ecuación (7,10) respecto a x, etc.

CAPITULO 3

ECUACIONES INTEGRALES CON NUCLEOS SIMETRICOS REALES

§ 11. Análogos geométricos de ciertas relaciones entre funciones (espacio de funciones)

Una noción sobre una función $f(P)$, uniformemente continua en una región finita G dada, por ejemplo, en un intervalo finito (a, b), nos da los valores de esta función en un conjunto de puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ suficientemente denso. En el caso unidimensional se pueden tomar los siguientes puntos:

$$x = a + \Delta x,\ a + 2\Delta x, \ldots, \quad a + (n-1)\,\Delta x,\ a + n\,\Delta x,$$

en donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, para n suficientemente grande. Denotaremos los valores de f en estos puntos por

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$$

respectivamente. Consideraremos estos últimos como componentes de un vector $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$, en el espacio euclídeo de dimensión n, cuyo origen está situado en el origen de coordenadas. De este modo, a la función f le corresponde un vector $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$. La longitud o *norma* de este vector es igual a

$$\sqrt{[f^{(2)}]^2 + [f^{(2)}]^2 + \ldots + [f^{(n)}]^2}.$$

Pasando al límite, cuando $n \to \infty$, es natural llamar "longitud" o *norma de la función* $f(P)$ al número

$$\sqrt{\int_G f^2(P)\, dP}.$$

En la tabla siguiente están enumeradas, por un lado, las principales magnitudes y relaciones, ligadas con vectores en el espacio euclídeo n-dimensional y, por otro lado, las correspondientes magnitudes y relaciones para las funciones (en el "espacio de funciones"). En este parágrafo *todas las funciones consideradas se suponen reales, definidas en una región finita G y de cuadrado integrable* (véase la observación al § 1). El símbolo $\int f(P)\, dP$ designará siempre la integración sobre la región G.

1. El vector $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$.	1. La función $f(P)$.
2. Longitud del vector $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$ $$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [f^{(i)}]^2}.$$	2. Norma de la función $f(P)$: $$\|f\| = \sqrt{\int f^2(P)\, dP}.$$
3. Distancia entre los puntos $(f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(n)})$ y $(f_2^{(1)}, \ldots, f_2^{(n)})$ $$\sqrt{\sum_i [f_2^{(i)} - f_1^{(i)}]^2}.$$	3. Norma de la diferencia de dos funciones $f_2(P) - f_1(P)$ $$\sqrt{\int [f_2(P) - f_1(P)]^2\, dP}.$$

La norma de la diferencia $f_2(P)-f_1(P)$ que acabamos de definir caracteriza *la distancia cuadrática media* de $f_2(P)$ respecto a $f_1(P)$. La diferencia entre las funciones $f_2(P)$ y $f_1(P)$ se puede caracterizar de varias maneras diferentes, y no sólo mediante la norma de la diferencia $f_2(P)-f_1(P)$. Esta distinción se puede caracterizar, por ejemplo, a través del número B, igual al del extremo superior de la expresión

$$|f_2(P)-f_1(P)|.$$

Si B es pequeño, esto significa que la diferencia $f_2(P)-f_1(P)$ es uniformemente pequeña en toda la región G considerada. Como la región G es finita, de la pequeñez de B se deduce la pequeñez de la norma de la diferencia $f_2(P)-f_1(P)$ definida más arriba. La afirmación inversa no es cierta.

Si tenemos una sucesión infinita de funciones

$$f_1(P), f_2(P), \ldots, f_k(P), \ldots,$$

y una función $f(P)$, para las cuales

$$\sup_G |f(P)-f_k(P)| \to 0, \quad \text{para} \quad k \to \infty,$$

entonces, como es sabido, se dice que la sucesión de funciones $f_k(P)$ converge uniformemente hacia $f(P)$.

Si, en cambio,

$$\int [f(P)-f_k(P)]^2\, dP \to 0, \quad \text{para} \quad k \to \infty,$$

entonces se dice que la sucesión de funciones $f_k(P)$ *converge en media* (o en media cuadrática) hacia $f(P)$. De la convergencia uniforme en una región finita se deduce la convergencia en media. La inversa no es cierta, como lo muestra el siguiente ejemplo.

La sucesión de funciones

$$f_k(x)=e^{-kx}$$

en el intervalo abierto [0, 1] converge en media hacia la función $f(x)\equiv 0$ cuando $k\to\infty$. Pero es evidente que esta convergencia no es uniforme.

Daremos un ejemplo más de una sucesión que converge en media, pero que no converge en ninguna parte en el sentido habitual. Tal es la sucesión de funciones $f_i(x)$, $i=1, 2, 3, \ldots$, definidas en el segmento cerrado [0, 1] de la siguiente manera:

$$f_{2^k+p}(x)=1 \quad \text{para} \quad \frac{p}{2^k}\leq x\leq\frac{p+1}{2^k},$$

$$f_{2^k+p}(x)=0 \quad \text{para} \quad x<\frac{p}{2^k} \ \text{ y para } \ x>\frac{p+1}{2^k};$$

$$k=0, 1, 2, \ldots;$$

$$p=0, 1, \ldots, 2^k-1.$$

Para $i=2^k+p\to\infty$ esta sucesión converge en media hacia 0. Pero en ningún punto del segmento [0, 1] converge ésta en el sentido habitual, ya que para cada valor de x de este segmento se pueden indicar valores arbitrariamente grandes de i, para los cuales $f_i(x)=1$, y otros i arbitrariamente grandes, para los cuales $f_i(x)=0$.

Ejercicio. Demostrar que, escogiendo adecuadamente los números a_k y b_k, las funciones

$$|\text{sen}\,(x-b_k)|^{a_k}, \qquad \frac{1}{1+a_k(x-b_k)^2}, \qquad e^{a_k(x-b_k)^2}$$

cuando $k\to\infty$, convergen en media hacia 0 en el segmento [0, 1] y no convergen en ningún punto.

4. El producto escalar de dos vectores

$$f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_1^{(n)},$$

y

$$(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_2^{(n)})$$

viene dado por la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}.$$

Denotaremos este producto escalar por el símbolo (f_1, f_2).

4. Se llama *producto escalar de dos funciones* $f_1(P)$, $f_2(P)$ a

$$\int f_1(P) f_2(P)\, dP.$$

Denotaremos este producto por el símbolo (f_1, f_2). La existencia de esta integral en nuestras suposiciones es consecuencia de que

$$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

5. Desigualdad triangular (la suma de dos lados de un triángulo no es menor que el tercero):

$$\sqrt{\sum (a_i - b_i)^2} + \sqrt{\sum (b_i - c_i)^2} \geq \geq \sqrt{\sum (a_i - c_i)^2}.$$

5. Desigualdad triangular:

$$\sqrt{\int [f_1(P) - f_2(P)]^2\, dP} + + \sqrt{\int [f_2(P) - f_3(P)]^2\, dP} \geq \geq \sqrt{\int [f_1(P) - f_3(P)]^2\, dP}.$$

Ambas desigualdades se demuestran idénticamente. Por eso demostraremos sólo la primera. Es fácil ver que, sin restringir la generalidad, se puede considerar que todas las b_i son iguales a 0. Elevando al cuadrado ambos miembros de esta desigualdad, y reduciendo términos semejantes, vemos que ésta es equivalente a la desigualdad

$$-\sum a_i c_i \leq \sqrt{\sum a_i^2 \sum c_i^2},$$

puesto que todas las raíces cuadradas las consideramos no negativas. La última desigualdad se deduce directamente de la siguiente:

$$\left(\sum a_i c_i\right)^2 \leq \sum a_i^2 \sum c_i^2, \tag{1,11}$$

la cual se llama *desigualdad de Cauchy*. Para su demostración, obsérvese que para cualesquiera números reales a_i, c_i y λ

$$\sum (a_i\lambda + c_i)^2 \geq 0.$$

Por eso, la ecuación cuadrática de λ

$$\lambda^2 \sum a_i^2 + 2\lambda \sum a_i c_i + \sum c_i^2 = 0$$

no tiene raíces reales diferentes. Pero esto es posible sólo cuando se cumple la desigualdad (1,11).

De la misma manera se demuestra la desigualdad

$$\left[\int f(P)\varphi(P)\,dP\right]^2 \leq \int f^2(P)\,dP \cdot \int \varphi^2(P)\,dP. \tag{2,11}$$

Esta se llama desigualdad de Bunyakovski *).

---

*) La desigualdad (1,11) se encuentra por primera vez en el curso de Análisis de Cauchy (1821): Oeuvres, II^s, t. III (1897), 373. El propio Cauchy la dedujo de la identidad

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2,$$

despreciando su segundo miembro no negativo. La desigualdad (2,11) la demostró por primera vez y la utilizó Bunyakovski (Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires... Memoires de l'Acad. de St. Petersbourg (VII) I (1859), N 9). Pero en la literatura especializada esta desigualdad frecuentemente se llama desigualdad de Schwarz, a pesar de que en sus obras ésta aparece por primera vez sólo en 1885 (Werke, I (1890), 251).

6. El coseno del ángulo entre los vectores

$$(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_1^{(n)})$$

y

$$(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_2^{(n)})$$

es igual a

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} [f_1^{(i)}]^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [f_2^{(i)}]^2}}.$$

De acuerdo con (1,11), el módulo de esta expresión no supera a 1.

Llamaremos *vector unidad* (o vector unitario), a aquel cuya longitud es igual a 1.

El coseno del ángulo entre dos vectores unidad $f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_1^{(n)}$ y $f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_2^{(n)}$ es igual a

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}.$$

6. Llamaremos coseno del ángulo entre dos funciones $f_1(P)$ y $f_2(P)$ a

$$\frac{\int f_1(P) \cdot f_2(P)\, dP}{\sqrt{\int f_1^2(P)\, dP} \cdot \sqrt{\int f_2^2(P)\, dP}}.$$

De acuerdo con (2,11), el módulo de esta expresión no supera a 1.

Se dice que la función $f(P)$ está *normalizada*, si su norma es igual a 1.

El coseno del ángulo entre dos funciones normalizadas $f_1(P)$ y $f_2(P)$ es igual a

$$\int f_1(P) f_2(P)\, dP.$$

7. Condición de ortogonalidad de dos vectores

$(f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(n)})$ y $(f_2^{(1)}, \ldots, f_2^{(n)})$

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)} = 0.$$

7. Condición de "*ortogonalidad*" de dos funciones $f_1(P)$ y $f_2(P)$

$$\int f_1(P) f_2(P)\, dP = 0.$$

8. La condición de dependencia lineal (coplanaridad) de los vectores $f_k = (f_k^{(1)}, \ldots, f_k^{(n)})$ $k = 1, 2, \ldots, m$ consiste en que existen unas constantes $C_1 C_2, \ldots, C_m$, no todas iguales a 0 tales, que

$$\sum_{k=1}^{m} C_k f_k^{(i)} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

8. La condición de dependencia lineal de las funciones $f_1(P), \ldots, f_m(P)$ consiste en la existencia de unas constantes $C_1, \ldots, C_m$, no todas iguales a 0 tales, que

$$\sum_{k=1}^{m} C_k f_k(P) = 0$$

para todos los puntos P.

9. Sean dados m vectores unitarios, ortogonales entre sí:

$$\varphi_k = (\varphi_k^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(n)}),$$
$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

Sea $\varphi_k(f)$ la proyección del vector $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ sobre la dirección del vector $\varphi_k^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(n)}, \ldots$ Entonces

$$\varphi_k(f) = \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} \varphi_k^{(i)}.$$

9. Sean dadas m funciones normalizadas, ortogonales entre sí:

$$\varphi_1(P), \ldots, \varphi_m(P).$$

Se llama *coeficiente de Fourier* de la función $f(P)$ respecto a la función $\varphi_k(P)$ a

$$f_k = \int f(P) \varphi_k(P)\, dP.$$

Teorema. Sea dada una función $f(P)$, integrable junto con su cuadrado. Buscaremos las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_m$ para que la distancia cuadrática media I_m entre la combinación lineal $C_1\varphi_1(P) + \ldots + C_m\varphi_m(P)$ y la función $f(P)$ sea mínima.

*Se afirma que los valores buscados son iguales a los coeficientes de Fourier f_k *).*

En efecto,

$$I_m = \int [f(P) - C_1\varphi_1(P) - \ldots - C_m\varphi_m(P)]^2\, dP =$$

$$= \int f^2(P)\, dP - 2\sum_{k=2}^{m} C_k \int f(P)\varphi_k(P)\, dP +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} C_i C_j \int \varphi_i(P)\varphi_j(P)\, dP =$$

$$= \int f^2(P)\, dP - 2\sum_{k=1}^{m} C_k f_k + \sum_{k=1}^{m} C_k^2 =$$

$$= \int f^2(P)\, dP + \sum_{i=1}^{m}(f_k - C_k)^2 - \sum_{k=1}^{m} f_k^2.$$

De aquí se ve que I_m alcanza su mínimo

$$\int f^2(P)\, dP - \sum_{k=1}^{m} f_k^2, \quad \text{si} \quad f_k = C_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

10. Para cualquier vector $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ se verifica la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{m} [\varphi_k(f)]^2 \leq \sum_{k=1}^{m} [f^{(k)}]^2.$$

En el caso de igualdad, esta relación corresponde al teorema de Pitágoras.

10. Para cualquier función $f(P)$ se cumple la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{m} f_k^{(2)} \leq \int f^{(2)}(P)\, dP.$$

(Desigualdad de Bessel).

---

*) Interprétese este teorema geométricamente.

Demostración de la desigualdad de Bessel. Es evidente que $I_m \geq 0$ para cualesquiera C_i. Si $C_i = f_i$ para $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, entonces $I_m = \int f^2(P)\,dP - \sum_{k=1}^{m} f_k^2$, o sea $\int f^2(P)\,dP \geq$ $\geq \sum_{i=1}^{m} f_k^2$, que es lo que queríamos demostrar.

La sucesión de funciones normalizadas, ortogonales dos a dos, (brevemente, *sistema ortonormal*)

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_k(P), \ldots \tag{3,11}$$

se llama *completa*, si para cualquier función continua (y, por lo tanto, acotada) $f(P)$, definida en una región cerrada, se verifica la siguiente igualdad *(igualdad de Parseval)*:

$$\int f^2(P)\,dP = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2.$$

Nota. De la afirmación demostrada en el apartado 9 se deduce la posibilidad de sustituir la definición dada de un sistema de funciones completo por la siguiente, equivalente a ella: *el sistema ortonormal de funciones* (3,11) *se llama completo, si para cualquier función continua, en una región cerrada $f(P)$, existe una combinación lineal de estas funciones*

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_k(P),$$

tal, que el error cuadrático medio cometido al sustituir $f(P)$ por esta combinación, es decir,

$$\int \left[f(P) - \sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_k(P) \right]^2 dP,$$

es arbitrariamente pequeño. De aquí que, si llamásemos sistema completo a un sistema ortogonal, para el cual se cumpla la igualdad de Parseval para cualquier función de cuadrado integrable $f(P)$, continua en toda la región, a excepción, posiblemente, de un número finito de puntos, curvas y superficies regulares, de dimensión hasta $(d-1)$, entonces esta definición sería también equivalente a la anterior (aquí d es la dimensión de la región G, en donde están definidas las funciones consideradas). Esto sucede debido a que cualquier función $f(P)$ de esta clase puede aproximarse por una función $f^*(P)$ continua en $\overline{G}$ tal, que la norma de la diferencia $f(P)-f^*(P)$ sea arbitrariamente pequeña. La demostración de esta afirmación mediante la desigualdad triangular (véase el apartado 5) la dejamos a cuenta del lector.

El sistema ortonormal (3,11) se llama *cerrado* *), si no existe ninguna función de la clase considerada **), cuya integral de su cuadrado exista, sea positiva y ortogonal a todas las funciones de (3,11).

Teorema. Todo sistema completo es cerrado.

Demostración. Supongamos que el sistema (3,11) es completo, pero no cerrado, es decir, que existe una función $f(P)$ para la cual la integral de su cuadrado existe, es positiva y ortogonal a todas las funciones de (3,11). Los coefi-

---

*) Muchos autores emplean una terminología diametralmente opuesta. A los sistemas que el autor del libro llama completos, tales autores los llaman cerrados (o densos), y a los sistemas que el autor llama cerrados, tales autores los llaman completos.

En el espacio L^2 estos conceptos son idénticos, debido al teorema de Riesz – Fischer, que afirma que todo sistema completo es cerrado y viceversa. Véase J. Rey Pastor, Pi Calleja, C. A. Trejo, Análisis Matemático, Vol. III, Ed. Kapelusz, 1961, Cap. XXV, o también S. Kaczmarz, H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen. Warszawa – Lwów, 1935, Cap-II (Nota del Redactor de la traducción).

**) Ver la observación al § 1.

cientes de Fourier de tal función, respecto a las funciones (3,11), son iguales a 0. Por consiguiente, para la función $f(P)$ no se cumple la igualdad de Parseval.

La afirmación inversa no es cierta en la clase de funciones considerada, que tienen discontinuidades sólo en un número finito de puntos, curvas, . . ., superficies $(d-1)$ dimensionales. Esta es cierta en la clase de funciones de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue (véase § 20, ap. 1).

11. La ecuación normal de un plano en el espacio de n dimensiones $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(n)})$ es

$$\sum_{i=1}^{n} a^{(i)}\varphi^{(i)} = p,$$

en donde

$$\sum_{i=1}^{n} [a^{(i)}]^2 = 1.$$

11. Su análogo en el espacio de funciones es

$$\int a(P)\varphi(P)\,dP = p,$$

en donde

$$\int a^2(P)\,dP = 1.$$

12. La ecuación de una superficie de 2° orden con centro en el origen de coordenadas es

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} = 1 \quad (4,11)$$

en donde

$$K_{ij} = K_{ji}.$$

12. Su análogo en el espacio de funciones es

$$\iint K(P,Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ = 1, \quad (5,11)$$

en donde

$$K(P,Q) \equiv K(Q,P)$$

$$P \in G, \qquad Q \in G.$$

13. La proposición fundamental en la teoría de las formas cuadráticas

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)},$$

$$K_{ij}=K_{ji} \qquad (6,11)$$

consiste en la posibilidad de reducir una forma de éstas mediante una transformación lineal no singular

$$\psi^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}\varphi_i^{(j)}\varphi^{(j)}, \quad (7,11)$$

$$i=1,2,\ldots,n$$

a su forma canónica

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i},$$

donde

$$m\leq n. \qquad (8,11)$$

En lo sucesivo nos interesarán sólo formas cuadráticas con coeficientes K_{ij} reales; en este caso, todas las $\varphi_i^{(j)}$ pueden ser escogidas también reales. Entonces también serán reales todas las

13. Bajo amplias suposiciones respecto al núcleo real simétrico $K(P,Q)$, no idénticamente nulo, es decir, para el cual $K(P,Q)\equiv\equiv K(Q,P)$, demostraremos que la forma integral

$$\int\int K(P,Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ \qquad (10,11)$$

puede ser expresada como una suma finita o infinita del tipo

$$\sum_{i=1}\frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}\,{}^{*)},$$

en donde

$$\psi^{(i)}=\int\varphi(P)\varphi_i(P)\,dP,$$

y las funciones $\varphi_i(P)$, $i=1,2,\ldots$, forman un conjunto no vacío, finito o numerable, de funciones normalizadas y ortogonales entre sí, es decir,

$$\int\varphi_i(P)\varphi_k(P)\,dP=\delta_{ik}.$$

---

*) No escribimos el límite superior de los valores de i, el cual puede ser finito o infinito.

λ_i. Existen muchas transformaciones lineales (7,11) con coeficientes reales que reducen la forma cuadrática (6,11) a su forma canónica (8,11). Entre éstas desempeñan un papel especial las transformaciones ortogonales, es decir, las transformaciones (7,11), para las cuales

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_i^{(j)} \varphi_k^{(j)} = \delta_{ik},$$

en donde $\delta_{ik} = 0$, para $i = k$ y $\delta_{ik} = 1$ para $i = k$. En el curso de Algebra se demuestra que los coeficientes de dicha transformación satisfacen a las ecuaciones

$$\varphi_i^{(k)} = \lambda_i \sum_{j=1}^{n} K_{kj} \varphi_i^{(j)}, \quad (9,11)$$

$i = 1, 2, \ldots, m$ (véase el § 19 *)).

Geométricamente, a la transformación de la forma cuadrática (6,11) a su forma canónica corresponde la rotación de los ejes de coordenadas hacia los ejes principales de la superficie (5,11). Estas funciones $\varphi_i(P)$ corresponden a los vectores unitarios, dirigidos por los ejes principales finitos de la superficie (5,11). Cada función $\varphi_i(P)$ satisface a la ecuación integral homogénea

$$\varphi_i(P) = \lambda_i \int K(P, Q)\, \varphi_i(Q)\, dQ. \quad (11,11)$$

en donde todos los valores λ_i son reales. De este modo, las ecuaciones integrales con núcleo simétrico, de un tipo bastante general, siempre poseen valores propios (en contraposición con las ecuaciones de Volterra) que son, además, reales.

*) El § 19 está destinado al lector que desee repasar la teoría de las ecuaciones cuadráticas. Esta teoría está expuesta allí en una forma cómoda para nuestras aplicaciones ulteriores. Recomendamos leer este parágrafo ahora.

cuadrática (6,11) a la forma canónica (8,11), mediante la transformación ortogonal (7,11), le corresponde el paso a un sistema de coordenadas tal, que los ejes de coordenadas coinciden con los ejes principales de la superficie (4,11). Los vectores ($\varphi_i^{(1)}$, $\varphi_i^{(2)}$, . . ., $\varphi_i^{(n)}$, $i=1$, . . ., m, son unitarios y van dirigidos por los semiejes principales finitos de la superficie (4,11). Si $m<n$, entonces, la superficie (4,11) degenera en una superficie cilíndrica. En este caso, además de los m ejes finitos, la superficie tendrá $n-m$ ejes infinitos. Aquellos semiejes, a los cuales les corresponden valores λ_i positivos, se llaman reales, y aquellos, a los cuales les corresponden valores λ_i negativos, se llaman imaginarios.

El problema de hallar el vector unidad ($\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_1^{(2)}$, ..., $\varphi_1^{(n)}$), que lleva la dirección de un semieje principal de la superficie (4,11), correspondiente a λ_1 (suponemos que λ_1 es el menor en

La idea fundamental de la demostración de la existencia de, por lo menos, un valor propio de la ecuación integral (11,11), consiste en lo siguiente (compárese con el § 12). Demostraremos la valor absoluto de todos los valores λ_i), es equivalente al siguiente problema (véase el § 19).

Hallar el máximo, si $\lambda_1 > 0$, o el mínimo, si $\lambda_1 < 0$, de la forma $\sum K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}$ con la condición de que

$$\sum_{i=1}^{n}[\varphi^{(i)}]^2 = 1.$$

El problema de hallar el vector unidad dirigido según el semieje correspondiente a λ_2 de la superficie (4,11), o, lo que es lo mismo, el problema de hallar la solución del sistema

$$\varphi^{(i)} = \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(j)},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

ortogonal a la solución $\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)}$), fácilmente se reduce al problema de hallar el máximo o el mínimo de la forma

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(K_{ij} - \frac{\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}}{\lambda_1}\right)\varphi_i\varphi_j$$

existencia en la clase de funciones $\varphi(P)$, para las cuales

$$\int \varphi^2(P)\,dP = 1, \qquad (12,11)$$

es una función que da un máximo o un mínimo λ_1, diferente de 0, de la forma integral (10,11). Esta función $\varphi_1(P)$ satisface a la ecuación integral (11,11), para $i = 1$. El problema de hallar la función normalizada, correspondiente a λ_2, dirigida por el semieje principal de la superficie (5,11), y el de hallar la función propia respectiva de la ecuación integral (11,11), fácilmente se reduce al problema de hallar el máximo o el mínimo de la forma integral

$$\int\int\left[K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right]\times$$
$$\times\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ$$

en la clase de funciones normalizadas por la condición (12,11). En forma análoga se hallan las funciones normalizadas, dirigidas según los demás semiejes principales de la superficie (5,11) en la clase de vectores unitarios $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$. De manera análoga se hallan los vectores unidad, dirigidos por los demás semiejes (véase el § 19).

14. Sustituyendo en la identidad

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}$$

en lugar de $\psi^{(i)}$ su expresión mediante $\varphi^{(j)}$, dada por la fórmula (7,11), obtenemos

$$\sum_{s,t}^{n} K_{st}\varphi^{(s)}\varphi^{(t)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i,j} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{s,t} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi^{(s)}\varphi_i^{(t)}\varphi^{(t)}}{\lambda_i} \equiv$$

$$\equiv \sum_{s,t} \left(\sum_{i} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi_i^{(t)}}{\lambda_i} \right) \varphi^{(s)}\varphi^{(t)}.$$

Comparando los coeficientes de iguales productos en los miembros extremos de esta cadena de identidades, obtenemos que

$$K_{st} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi_i^{(t)}}{\lambda_i}.$$

o, lo que es lo mismo, las demás soluciones normalizadas de la ecuación integral (11,11), ortogonales a las soluciones anteriores (véase el apartado 4 del § 13).

14. Bajo ciertas condiciones impuestas a $K(P, Q)$ será demostrado (§ 15) que

$$K(P, Q) = \sum_{i} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}.$$

15. La condición necesaria y suficiente para que se pueda desarrollar un vector dado $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$, según las direcciones de los semiejes principales finitos de la superficie (4,11), es que el vector $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ sea ortogonal a todos los semiejes infinitos de la superficie (4,11). Pero de la igualdad (9,11), como es fácil de ver, se deduce que las componentes $(\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(n)})$ de los vectores dirigidos según los semiejes infinitos de la superficie (4,11) deben satisfacer a las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\, \chi^{(j)} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{13,11}$$

La condición para que el vector $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ sea ortogonal a todos los $\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(n)}$, que satisfacen a las ecuaciones (13,11), es que el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ji} h^{(j)} = f^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

respecto a las incógnitas $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$, o lo que es

15. En el § 14 se demostrará, que toda función $f(P)$ *intrínsecamente representable* por medio del núcleo $K(P, Q)$ y de una función $h(Q)$ con cuadrado integrable, es decir, toda función representable en la forma

$$f(P) = \int K(P, Q) h(Q)\, dQ,$$

puede ser desarrollada en una serie absoluta y uniformemente convergente, según las funciones propias $\varphi_i(P)$ del núcleo $K(P, Q)$ (teorema de Hilbert – Schmidt).

lo mismo, debido a la condición $K_{ij}=K_{ji}$, que el sistema

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}h^{(j)}=f^{(i)}, \quad i=1, \ldots, n,$$

tenga solución (véase el § 3).

En los § § 12 – 18 *supondremos que todas las funciones consideradas pertenecen a la clase de funciones descritas en la observación al § 1, y además, que todas ellas son reales y de cuadrado integrable en toda la región finita de su definición.*

§ 12. Demostración de la existencia de funciones propias de las ecuaciones integrales con núcleos simétricos

1. *Observaciones preliminares.* Si existen las integrales de los cuadrados de las funciones $\varphi(P)$, $\psi(P)$ y $K(P, Q)$ en sus dominios de definición, que es lo que se ha postulado, entonces la integral

$$\int\int K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)\, dP\, dQ$$

también existe. En efecto,

$$|K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)| \leq \frac{1}{2} K^2(P, Q) + \frac{1}{2}\varphi^2(P)\psi^2(Q).$$

Por eso

$$\int\int |K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)|\, dP\, dQ \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int\int K^2(P, Q)\, dP\, dQ + \frac{1}{2}\int \varphi^2(P)\, dP \cdot \int \psi^2(Q)\, dQ.$$

En lo sucesivo, el símbolo $\int\int$ indicará la integración sobre todo el dominio de definición de $K(P, Q)$, es decir, sobre toda la región donde $P \in G$ y $Q \in G$ (véase el § 4, donde de manera semejante se define el símbolo $\int$).

En los § § 12 – 18 estudiaremos los núcleos $K(P, Q)$, considerados en el ap. 2 del presente parágrafo. Para tales $K(P, Q)$, todas las integrales dobles, o sea, las integrales respecto del conjunto (P, Q), del tipo

$$\int K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)\, dP\, dQ$$

pueden considerarse como integrales reiteradas, tomadas primeramente respecto a Q, y luego respecto a P *).

Hagamos

$$B\varphi(P) = \int K(P, Q)\varphi(Q)\, dQ + c\varphi(P)$$

y

$$(\chi, \psi) = \int \chi(P)\psi(P)\, dP.$$

La función $B\varphi(P)$ es de cuadrado integrable en G, ya que por la desigualdad de Bunyakovski

$$\left(\int K(P, Q)\varphi(Q)\, dQ\right)^2 \leq \int [K(P, Q)]^2\, dQ \cdot \int \varphi^2(Q)\, dQ$$

y por eso

$$\int\left(\int K(P, Q)\varphi(Q)\, dQ\right)^2 dP \leq \int\int [K(P, Q)]^2\, dP\, dQ \cdot \int \varphi^2(Q)\, dQ.$$

---

*) G. M. Fijtengolts, Curso de Cálculo Diferencial e Integral, M., 1960, t. III, cap. XVI, § 5, págs. 214-273.

Generalización de la desigualdad de Bunyakovski. Supongamos que la suma de las integrales

$$\int\int K(P,Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ + c\int\varphi^2(P)\,dP \equiv (B\varphi,\varphi), \qquad (1,12)$$

en donde c es una constante, es *definida no negativa.* Esto significa que para cualquier función real $\varphi(P)$, esta suma no es negativa. A partir de este momento, supondremos que $K(P,Q)=K(Q,P)$. Entonces, para funciones $\varphi(P)$ y $\psi(P)$ cualesquiera,

$$(B\varphi,\psi)^2 \leq (B\varphi,\varphi)\cdot(B\psi,\psi). \qquad (2,12)$$

Demostración de la desigualdad (2,12). Como por hipótesis la suma (1,12) es definida no negativa, para cualquier μ real, tenemos que

$$\int\int K(P,Q)[\varphi(P)+\mu\psi(P)][\varphi(Q)+\mu\psi(Q)]\,dP\,dQ +$$
$$+ c\int[\varphi(P)+\mu\psi(P)]^2\,dP \geq 0.$$

Abriendo paréntesis, obtenemos:

$$\int\int K(P,Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ +$$
$$+\mu\int\int K(P,Q)\varphi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ +$$
$$+\mu\int\int K(P,Q)\varphi(Q)\psi(P)\,dP\,dQ +$$
$$+\mu^2\int\int K(P,Q)\psi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ +$$
$$+c\int\varphi^2(P)\,dP + 2\mu c\int\varphi(P)\psi(P)\,dP + c\mu^2\int\psi^2(P)\,dP \geq 0.$$

La segunda y tercera integrales son iguales, en virtud de la simetría de $K(P, Q)$; entonces, ésta desigualdad puede escribirse así:

$$(B\varphi, \varphi) + 2\mu(B\varphi, \psi) + \mu^2(B\psi, \psi) \geq 0.$$

Esta última desigualdad puede verificarse para cualquier μ real sólo en el caso en que

$$(B\varphi, \psi)^2 \leq (B\varphi, \varphi) \cdot (B\psi, \psi),$$

que es lo que queríamos demostrar.

Si $K(P, Q) \equiv 0$, y $c = 1$, la desigualdad (2,12) se transforma en la desigualdad de Bunyakovski

$$\left(\int \varphi(P)\psi(P)\, dP\right)^2 \leq \int \varphi^2(P)\, dP \cdot \int \psi^2(P)\, dP.$$

2. *En lo sucesivo, hasta el § 18 inclusive, consideraremos ecuaciones integrales con núcleo simétrico real del tipo*

$$K(P, Q) = \frac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha < \frac{d}{2}, \tag{3,12}$$

en donde $\overline{K}(P, Q)$ *es una función uniformemente continua respecto a* (P, Q), cuando $P \in G$ y $Q \in G$. *Supondremos que la región G es finita.* Por eso, la función $\overline{K}(P, Q)$ será acotada.

Teorema. Sea dada la familia de funciones $h(P)$, *para las cuales*

$$\int h^2(P)\, dP \leq M^2, \tag{4,12}$$

en donde M es una constante, igual para todas las funciones $h(P)$. *Entonces, la familia de funciones* $\psi(P)$, *definidas por la igualdad*

$$\psi(P) = \int K(P, Q) h(Q)\, dQ,$$

es uniformemente acotada y equicontinua en G.

La equicontinuidad de una familia significa que para dos puntos P_1 y P_2 cualesquiera, pertenecientes a G, $|\psi(P_2) - - \psi(P_1)|$ se hace menor que cualquier número $\varepsilon > 0$, si la distancia P_1P_2 es menor que un $\eta > 0$, que depende sólo de ε, pero no depende ni de la función $\psi(P)$ de la familia considerada, ni de la posición de los puntos P_1 y P_2 en la región G.

Demostración.

$$|\psi(P^2) - \psi(P_1)|^2 = \left| \int [K(P_2, Q) - K(P_1, Q)] h(Q)\, dQ \right|^2 \leq$$

$$\leq \int [K(P_2, Q) - K(P_1, Q)]^2\, dQ \cdot \int h^2(Q)\, dQ \leq$$

$$\leq M \int [K(P_2, Q) - K(P_1, Q)]^2\, dQ. \quad (5,12)$$

Al hacer el penúltimo paso, hemos utilizado la desigualdad de Bunyakovski y, al hacer el último, la desigualdad (4,12). Acotemos la integral que figura en el último miembro de la desigualdad (5,12). Para ello, dividamos la región G en dos partes, G_1 y G_2. Consideraremos que a G_1 pertenecen todos los puntos de G, que distan de uno de los puntos P_1 o P_2 no más que ϱ. En virtud de la igualdad (3,12) y debido a que $\overline{K}(P, Q)$ es acotada, tenemos que

$$\int_{G_1} [K(P_2, Q) - K(P_1, Q)]^2\, dQ$$

será menor que cualquier ε positivo, si ϱ es menor que cierto número $\varrho(\varepsilon)$, que depende sólo de ε y tiende a 0, cuando $\varepsilon \to 0$. Este número $\varrho(\varepsilon)$ no depende de los puntos P_1 y P_2. Por otra parte, debido a la continuidad uniforme de $\overline{K}(P, Q)$

en la región G para un ϱ fijo, la integral

$$\int_{G_1} [K(P_2, Q) - K(P_1, Q)]^2 \, dQ \tag{6,12}$$

puede hacerse arbitrariamente pequeña, siempre que los puntos P_1 y P_2 estén suficientemente próximos uno del otro. La pequeñez de la integral (6,12) depende sólo de la distancia entre los puntos P_1 y P_2, y no de su posición.

La acotación uniforme de la familia de funciones $\psi(P)$ se obtiene fácilmente utilizando la desigualdad de Bunyakovski. En efecto,

$$\left| \int K(P, Q) h(Q) \, dQ \right| \leq \sqrt{\int K(P, Q)^2 \, dQ} \sqrt{\int h^2(Q) \, dQ}.$$

La primera integral del segundo miembro de esta desigualdad es acotada, según (3,12). La segunda es menor que M, debido a la condición (4,12).

3. *Teorema. La ecuación integral*

$$\varphi(P) = \lambda \int K(P, Q) \varphi(Q) \, dQ \tag{7,12}$$

posee, al menos, un valor propio finito, si el núcleo satisface a las propiedades descritas al principio del apartado anterior, y no es idénticamente nulo. En lo sucesivo sólo consideraremos núcleos, ya descritos al principio del apartado anterior, sin indicarlo expresamente.

La idea de la demostración de este teorema, dada a continuación, está expuesta en la columna derecha del ap. 13 del § 11. Por primera vez, casi al mismo tiempo, independientemente uno del otro, demostraron este teorema, por este método, Hilbert y Holmgren. La mayor dificultad que se encuentra aquí consiste en la demostración de la existencia en la clase considerada de funciones $\varphi(P)$, que cumplen la condición (12,11), de una función tal, que dé el máximo o el mínimo de la forma integral (10,11) *). La demostración expuesta aquí de la existencia de tal función pertenece a I. M. Guelfand.

Demostración. Consideremos el conjunto S de funciones $\varphi(P)$, para las cuales

$$\int \varphi^2(P)\,dP = 1. \tag{8,12}$$

Sea

$$I(\varphi) = \int\int K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ.$$

Los valores de $I(\varphi)$ en el conjunto S son acotados. En efecto, por la desigualdad de Bunyakovski

$$|I(\varphi)|^2 \leq \int\int K^2(P, Q)\,dP\,dQ \cdot \int\int \varphi^2(P)\varphi^2(Q)\,dP\,dQ =$$

$$= \int\int K^2(P, Q)\,dP\,dQ \cdot \int \varphi^2(P)\,dP \cdot \int \varphi^2(Q)\,dQ.$$

La primera de las últimas tres integrales es finita, según la condición (3,12), y las dos últimas son iguales a 1, de acuerdo con (8,12).

Sea μ_m, respectivamente μ_M, la cota inferior, respectivamente superior, de los valores de $I(\varphi)$ en la familia S. Suponiendo que $K(P, Q)$ no es idénticamente nulo, demostremos

*) La validez de la afirmación análoga de la existencia de un mínimo o de un máximo de la forma cuadrática (6,11) en el conjunto de vectores unitarios $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(n)})$, es consecuencia directa del teorema de Weierstrass sobre la existencia del máximo o mínimo de cualquier función continua en cualquier conjunto acotado, cerrado, de puntos, en particular, de la función (6,11) en la esfera $\sum[\varphi^{(i)}]^2 = 1$.

que por lo menos uno de los números μ_M o μ_m es diferente de cero. En efecto, en caso contrario, la integral $I(\varphi)$ sería igual a 0 para todas las funciones $\varphi(P)$ de la familia S. En particular, esto sucedería para cualquier función $\varphi_{P_0}(P)$, igual a 0 en toda la región, excepto un entorno arbitrariamente pequeño de algún punto P_0, en donde $\varphi_{P_0}(P)>0$. Pero, por otra parte, como $K(P, Q)$ no es idénticamente nulo, indefectiblemente existirá un punto (P_0, Q_0), en donde $K(P_0, Q_0)\neq 0$. Podemos suponer, que Q_0 no coincide con P_0, ya que, si $K(P, Q)$ fuera igual a 0 para todos los puntos (P, Q), en donde P es distinto de Q, entonces sería idénticamente nulo, debido a la supuesta continuidad uniforme de la función $\overline{K}(P, Q)$ respecto a (P, Q), escrita en la relación (3,12). Pero

$$I(\varphi_{P_0}+\varphi_{Q_0})=I(\varphi_{P_0})+I(\varphi_{Q_0})+\int\int K(P,Q)\varphi_{P_0}(P)\varphi_{Q_0}(Q)\,dP\,dQ+$$

$$+\int\int K(P,Q)\varphi_{P_0}(Q)\varphi_{Q_0}(P)\,dP\,dQ.$$

Las dos últimas integrales escritas aquí se toman sobre pequeños entornos de los puntos (P_0, Q_0) y (Q_0, P_0); en virtud de la simetría supuesta de $K(P, Q)$, las integrales sobre estos dos entornos coinciden, y debido a que $K(P_0, Q_0)\neq 0$ y que en cierto entorno del punto (P_0, Q_0) conserva su signo, éstas son diferentes de 0. En cambio, suponíamos que las integrales $I(\varphi_{P_0})$ y $I(\varphi_{Q_0})$ eran iguales a 0. Por eso,

$$I(\varphi_{P_0}+\varphi_{Q_0})\neq 0,$$

lo cual es imposible. De este modo, bajo nuestras suposiciones, μ_m y μ_M no pueden ser ambas iguales a 0. Supongamos, por ejemplo, que $\mu_M\neq 0$.

Consideremos una sucesión infinita de funciones normalizadas

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_k(P), \ldots$$

para las cuales

$$I(\varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu_M. \tag{9,12}$$

Fácilmente se comprueba que la diferencia

$$-I(\varphi) + \mu_M \int \varphi^2(P)\, dP$$

es definida no negativa en el sentido descrito en el apartado 1 del presente parágrafo. Por eso, en la desigualdad (2,12) se puede considerar

$$B\varphi(P) = \int (-K(P,Q))\varphi(Q)\, dQ + \mu_M\varphi(P).$$

Hagamos en esta desigualdad

$$\varphi(P) = \varphi_k(P),$$
$$\psi(P) = B\varphi_k(P).$$

Obtenemos que

$$(B\varphi_k, B\varphi_k)^2 \leq (B\varphi_k, \varphi_k)\cdot(BB\varphi_k, B\varphi_k). \tag{10,12}$$

En virtud de (9,12)

$$(B\varphi_k, \varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{11,12}$$

Por otra parte,

$$|B\varphi_k(P)| \leq \frac{1}{2}\int K^2(P,Q)\, dQ + \frac{1}{2}\int \varphi_k^2(Q)\, dQ + |\mu_M|\cdot|\varphi_k(P)|.$$

De acuerdo con (3,12), la primera de estas integrales es acotada, y la segunda, por la condición de (8,12), es igual a 1. Por eso

$$|B\varphi_k(P)| \leq M + |\mu_M|\cdot|\varphi_k(P)|,$$

donde M es una constante que no depende de φ_k. De manera análoga se puede obtener una acotación similar para $BB\varphi_k$. Aplicando la desigualdad de Bunyakovski se puede demostrar fácilmente que la expresión $(BB\varphi_k, B\varphi_k)$ es también acotada. Por eso, de las relaciones (10,12) y (11,12) se deduce que

$$(B\varphi_k, B\varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{12,12}$$

De acuerdo con el apartado 2, la familia de funciones

$$K\varphi_k(P) = \int K(P, Q)\varphi_k(Q)\, dQ$$

es equicontinua y uniformemente acotada. Por eso, según el teorema de Arzelá (véase, por ej., mis "Lecciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", § 11), de la sucesión de funciones $K\varphi_k(P)$ puede extraerse una subsucesión *uniformemente convergente*. Supongamos que ésta sea

$$K\varphi_{k_1}(P), K\varphi_{k_2}(P), \ldots, K\varphi_{k_m}(P), \ldots$$

Sea

$$K\varphi_{k_m}(P) \xrightarrow[m\to\infty]{} \varphi^*(P).$$

Se afirma entonces, que la función $\varphi^*(P)$ es solución de la ecuación integral (7,12) para $\lambda = \frac{1}{\mu_M}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
|BK\varphi_k(P)| &= |-KK\varphi_k(P) + \mu_M K\varphi_k(P)| = \\
&= |K[-K\varphi_k(P) + \mu_M\varphi_k(P)]| = |KB\varphi_k(P)| = \\
&= \left|\int K(P, Q)\cdot B\varphi_k(Q)\, dQ\right| \leq \\
&\leq \left\{\int [K(P, Q)]^2\, dQ\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int [B\varphi_k(Q)]^2\, dQ\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por eso, utilizando (12,12), se obtiene que

$$BK\varphi_{k_m}(P) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

De aquí que, en virtud de la convergencia uniforme de $K\varphi_{k_m}(P)$

$$B\varphi^*(P)=0,$$

que es lo que se quería demostrar. La función $\varphi^*(P)$ no es idénticamente nula, ya que en caso contrario, debido a la relación (12,12), la sucesión $\mu_M\varphi_{k_m}(P)$ para $m\to\infty$ también tendería en media hacia 0, lo cual es imposible, ya que

$$\int [\mu_M\varphi_{k_m}(P)]^2\, dP=\mu_M^2>0.$$

Observaciones. 1. El caso $\mu_m\neq 0$ se reduce al caso estudiado $\mu_M\neq 0$, cambiando de signo a $K(P,Q)$.

2. Hemos demostrado que el extremo inferior, respectivamente superior, de los valores de la integral $I(\varphi)$ en el conjunto de las funciones normalizadas $\varphi(P)$ es igual a la magnitud inversa de cierto valor propio λ de la ecuación integral (7,12), siempre que este extremo no sea igual a 0. Por otra parte, la magnitud inversa de cada valor propio λ_i de la ecuación (7,12) es uno de los valores de la integral $I(\varphi)$ para cierta función de la clase (8,12). En efecto, el valor de la integral $I(\varphi)$ para $\varphi(P)=\varphi_i(P)$, en donde $\varphi_i(P)$ es una función propia normalizada correspondiente al valor propio λ_i, es igual a

$$\int\varphi_i(P)\, dP\int K(P,Q)\varphi_i(Q)\, dQ=\frac{1}{\lambda_i}\int\varphi_i^2(P)\, dP=\frac{1}{\lambda_i}\,.$$

Se puede decir también, que el extremo superior, respectivamente inferior, de los valores de la integral $I(\varphi)$, en el conjunto de funciones $\varphi(P)$, que satisfacen a la condición

$$\int\varphi^2(P)\, dP\leq 1, \tag{13,12}$$

es igual a la magnitud inversa del menor valor propio positivo, respectivamente del mayor negativo, de la ecuación (7,12), siempre que este extremo sea diferente de 0. De esto se desprende, que para todas las funciones $\varphi(P)$ que cumplen la condición (13,12), los valores de la integral $I(\varphi)$ en valor absoluto no superan a la magnitud inversa del menor valor propio λ en valor absoluto de la ecuación (7,12). Además, de los razonamientos anteriores se ve, que el extremo superior, respectivamente inferior, de $I(\varphi)$ en (13,12) se *alcanza* para φ, igual a cualquier función propia normalizada, correspondiente al menor valor propio λ positivo, respectivamente, al mayor negativo, en valor absoluto, si este extremo es distinto de 0.

Ejercicio. Demostrar que el conjunto de los valores de $I(\varphi)$ en (8,12) puede ser cualquier punto, o un segmento cerrado, o un segmento semicerrado, al cual no pertenece el punto $I=0$, que es uno de los extremos de este segmento. El conjunto de los valores de $I(\varphi)$ en (13,12) siempre contiene el valor $I=0$, y representa un punto o un segmento. ¿Qué casos son posibles si el núcleo es degenerado?

§ 13. *Algunas propiedades de las funciones propias y de los valores propios de las ecuaciones integrales con núcleos simétricos*

1. *Teorema. Las funciones propias de la ecuación* (7,12), *correspondientes a diferentes valores propios de* λ *son ortogonales entre sí.*

Demostración. Sean

$$\varphi_1(P)=\lambda_1\int K(P,Q)\varphi_1(Q)\,dQ, \tag{1,13}$$

$$\varphi_2(P)=\lambda_2\int K(P,Q)\varphi_2(Q)\,dQ \tag{2,13}$$

en donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Multipliquemos (1,13) por $\lambda_2\varphi_2(P)$ y (2,13) por $\lambda_1\varphi_1(P)$. Restando miembro a miembro las igualdades obtenidas, e integrando la diferencia respecto a P, obtenemos:

$$(\lambda_2-\lambda_1)\int \varphi_1(P)\varphi_2(P)\,dP =$$
$$=\lambda_1\lambda_2\int\int K(P,Q)\varphi_1(P)\varphi_2(Q)\,dQ\,dP -$$
$$-\lambda_1\lambda_2\int\int K(P,Q)\varphi_2(P)\varphi_1(Q)\,dQ\,dP. \qquad (3,13)$$

Cambiando las notaciones de las variables de integración en el segundo término del segundo miembro, obtenemos:

$$\int\int K(P,Q)\varphi_2(P)\varphi_1(Q)\,dP\,dQ = \int\int K(Q,P)\varphi_2(Q)\varphi_1(P)\,dQ\,dP.$$

Como $K(P,Q)=K(Q,P)$, de esto se deduce que el segundo miembro de (3,13) es igual a 0. Y ya que, por hipótesis, $\lambda_2 \neq \lambda_1$, resulta

$$\int \varphi_1(P)\varphi_2(P)\,dP = 0,$$

que es lo que queríamos demostrar.

2. *Teorema. Todos los valores propios de las ecuaciones integrales con núcleos simétricos son reales.*

Demostremos primeramente el siguiente *lema. Todas las funciones propias de las ecuaciones del tipo considerado son continuas.*

En efecto, de acuerdo con lo dicho al final del § 11, consideramos que tales funciones son de cuadrado integrable. Nuestro lema se deduce inmediatamente del apartado 2 del § 12.

Demostración del teorema. Supongamos que la ecuación integral (7,12) tiene un valor propio complejo $\lambda = a + bi$, en donde $b \neq 0$. Sea $\varphi(P)$ la función propia correspondiente. Entonces

$$\varphi(P) = (a + bi) \int K(P, Q) \varphi(Q)\, dQ. \tag{4,13}$$

Denotando por $\overline{\varphi(P)}$ la función compleja conjugada respecto a $\varphi(P)$, de la identidad (4,13) obtenemos

$$\overline{\varphi(P)} = (a - bi) \int K(P, Q) \overline{\varphi(Q)}\, dQ.$$

Según el teorema 1, debe ser:

$$\int \varphi(P) \overline{\varphi(P)}\, dP = 0.$$

De esto y del lema que acabamos de demostrar, se deduce que

$$\varphi(P) \equiv 0,$$

por lo cual, para $b \neq 0$, $(a + bi)$ no puede ser valor propio λ.

Observación. Del teorema demostrado se deduce, que tanto la parte real como la imaginaria de una función propia compleja son también funciones propias, que corresponden al mismo valor propio.

3. *Ortogonalización de las funciones propias*. Del mismo modo que las superficies de segundo orden pueden tener varios semiejes principales de igual longitud, exactamente igual, a un mismo valor propio λ de una ecuación integral con núcleo simétrico le pueden corresponder varias funciones propias linealmente independientes. Por el segundo teorema de Fredholm, el conjunto de funciones propias linealmente independientes, que corresponden a un mismo valor

propio, es siempre finito. Supongamos que dichas funciones son

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_m(P). \tag{5,13}$$

Del hecho de que el valor propio λ, correspondiente a estas funciones es real, es fácil deducir que todas estas funciones pueden escogerse reales. Según el teorema 1, todas estas funciones son ortogonales a las funciones propias de la misma ecuación integral, pero correspondientes a otros valores λ. Cualquier combinación lineal con coeficientes constantes de las funciones (5,13) es también una función propia de la ecuación (7,12). Demostremos que, formando tales combinaciones lineales con coeficientes reales de las funciones (5,13), se pueden obtener m funciones propias normalizadas y ortogonales entre sí, que, por lo tanto, serán funciones propias linealmente independientes

$$\psi_1(P), \psi_2(P), \ldots, \psi_m(P)$$

de la ecuación (7,12). Hagamos

$$\psi_1(P) = a\varphi_1(P).$$

Elijamos la constante $a \neq 0$, de modo que

$$\int \psi_1^2(P)\, dP = 1.$$

Hagamos

$$\psi_2(P) = b[\varphi_2(P) + b_1\psi_1(P)],$$

en donde $b \neq 0$ y b_1 son ciertas constantes. Elijamos la constante b_1 de modo que sea

$$\int \psi_1\psi_2\, dP = b\left[\int \psi_1\varphi_2\, dP + b_1 \int \psi_1^2\, dP\right] = 0.$$

Como $\int \psi_1^2\, dP = 1$, entonces, esta desigualdad determina a b_1 unívocamente. Elijamos la constante b de modo que la norma de ψ_2 sea igual a 1. Esto se puede hacer, puesto que, en virtud de la supuesta independencia lineal de las funciones (5,13), $\varphi_2(P) + b_1\psi_1(P)$ no es idénticamente nula. Y, debido a que todas las funciones propias de la ecuación (7,12) son continuas, la integral del cuadrado de $\varphi_2 + b_1\psi$ no puede ser igual a 0.

Hagamos luego

$$\psi_3(P) = c[\varphi_3(P) + c_2\psi_2(P) + c_1\psi_1(P)], \qquad c \neq 0.$$

Elijamos la constante c_1 de tal manera, que

$$\int \psi_1\psi_3\, dP = c\left[\int \varphi_3\psi_1\, dP + c_2 \int \psi_2\psi_1\, dP + c_1 \int \psi_1^2\, dP\right] = 0.$$

Ya que

$$\int \psi_1\psi_2\, dP = 0 \quad \text{y} \quad \int \psi_1^2\, dP = 1,$$

esta condición define unívocamente a c_1:

$$c_1 = -\int \varphi_3\psi_1\, dP.$$

De la misma manera se pueden elegir las constantes c_2 y $c \neq 0$, de tal forma que

$$\int \psi_2\psi_3\, dP = 0 \quad \text{y} \quad \int \psi_3^2\, dP = 1.$$

Continuando este proceso, obtenemos $\psi_4(P), \ldots, \psi_m(P)$.

Por lo tanto, podemos limitarnos a considerar solamente aquellas funciones propias linealmente independientes de la ecuación integral considerada que forman un sistema ortonormal. Tomemos un sistema ortonormal de funciones propias de esta ecuación, *maximal* en el sentido de que cualquier función propia de esta ecuación integral se expresa linealmente mediante las funciones de este sistema. En lo sucesivo nos será cómodo numerarlas, de forma que sus índices crezcan a medida que crecen los valores absolutos de los correspondientes valores propios λ (el conjunto de los cuales, según el § 8, no tiene puntos de acumulación finitos). Si a un mismo λ le corresponden varias funciones propias linealmente independientes, todas estas funciones las pondremos juntas. De este modo, obtenemos las sucesiones

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_i(P), \ldots \tag{6,13}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots \tag{7,13}$$

Aquí, debajo de cada función propia está escrito su valor propio λ correspondiente. Las sucesiones (6,13) y (7,13) pueden ser tanto finitas como infinitas. En la sucesión (7,13) algunos λ_i situados consecutivamente pueden ser iguales. Esto sucederá cuando el valor correspondiente λ_i de la ecuación (7,12) tenga varias funciones propias linealmente independientes. Pero, por el segundo teorema de Fredholm, para cada λ_i existe solamente un número finito de funciones propias ortogonales entre sí y, por consiguiente, linealmente independientes. De este mismo teorema se deduce que, si las sucesiones (6,13) y (7,13) son infinitas, entonces

$$|\lambda_i| \to \infty \quad \text{para} \quad i \to \infty.$$

El sistema (6,13) será maximal en el sentido indicado más arriba, si en la sucesión (7,13) figuran todos los valores propios de la ecuación integral considerada, y si a cada valor propio de éstos en la sucesión (6,13) le corresponde un número maximal de funciones propias linealmente independientes, correspondientes a dicho valor propio.

4. *Teorema. Sea* $\varphi_1(P)$ *una función propia de la ecuación integral* (7,12), *correspondiente al valor propio* λ_1. *Entonces, para el núcleo*

$$K_1(P, Q) = K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\cdot\varphi_1(Q)}{\lambda_1}$$

las sucesiones de funciones propias y valores propios, análogas a la (6,13) y (7,13) *para* $K(P, Q)$, *pueden ser obtenidas de las sucesiones* (6,13) y (7,13), *correspondientes al núcleo* $K(P, Q)$, *eliminando* $\varphi_1(P)$ y λ_1.

Demostración. Verifiquemos, primeramente, que cualquier función propia $\varphi(P)$ del núcleo $K_1(P, Q)$, correspondiente a un valor propio λ, es una función propia del núcleo $K(P, Q)$, correspondiente al mismo valor propio. En efecto, sea

$$\varphi(P) = \lambda \int K_1(P, Q)\varphi(Q)\, dQ. \tag{8,13}$$

Entonces

$$\int \varphi(P)\varphi_1(P)\, dP = 0, \tag{9,13}$$

puesto que

$$\begin{aligned}\int \varphi(P)\varphi_1(P)\, dP &= \lambda \int\int K_1(P, Q)\varphi(Q)\varphi_1(P)\, dP\, dQ = \\ &= \lambda \int\int \left[K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right]\varphi_1(P)\varphi(Q)\, dP\, dQ = \\ &= \lambda \int\int K(P, Q)\varphi_1(P)\varphi(Q)\, dP\, dQ - \\ &- \frac{\lambda}{\lambda_1}\int \varphi_1(Q)\varphi(Q)\, dQ \int \varphi_1^2(P)\, dP = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_1}\int \varphi_1(Q)\varphi(Q)\, dQ - \frac{\lambda}{\lambda_1}\int \varphi_1(Q)\varphi(Q)\, dQ = 0.\end{aligned}$$

En virtud de la relación (9,13), la igualdad (8,13) puede escribirse en la forma siguiente:

$$\varphi(P)=\lambda\int\left[K(P,Q)-\frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right]\varphi(Q)\,dQ=$$

$$=\lambda\int K(P,Q)\varphi(Q)\,dQ.$$

De esta manera, hemos demostrado que $\varphi(P)$ es una función propia de la ecuación integral (7,12), correspondiente al mismo λ.

Demostremos ahora lo recíproco, que cada función propia $\varphi_i(P)$ de la sucesión (6,13), correspondiente a un valor propio λ_i de la sucesión (7,13), para $i>1$, es una función propia, correspondiente al mismo valor propio λ_i para el núcleo $K_1(P,Q)$. En efecto, sea

$$\varphi_i(P)=\lambda_i\int K(P,Q)\varphi_i(Q)\,dQ,\quad i>1. \tag{10,13}$$

Entonces

$$\int\varphi_1(P)\varphi_i(P)\,dP=0.$$

Por eso, de la igualdad (10,13) se sigue que

$$\varphi_i(P)=\lambda_i\int\left[K_1(P,Q)+\frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right]\varphi_i(Q)\,dQ=$$

$$=\lambda_i\int K_1(P,Q)\varphi_i(Q)\,dQ.$$

La misma función $\varphi_1(Q)$ no es función propia de la ecuación (8,13), puesto que, en caso contrario, de la condición (9,13) se tendría que $\int\varphi_1^2(P)\,dP=0$, lo cual es imposible.

De las proposiciones demostradas, fácilmente se deduce nuestro teorema.

5. Aplicando sucesivamente el teorema 4 a los núcleos

$$K_1(P, Q) = K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1},$$

$$K_2(P, Q) = K_1(P, Q) - \frac{\varphi_2(P)\varphi_2(Q)}{\lambda_2}, \ldots,$$

obtendremos que todas las funciones propias $\varphi_i(P)$ de la sucesión (6,13), correspondientes a los valores propios λ_i de la sucesión (7,13), para el núcleo $K(P, Q)$, son funciones propias correspondientes a los mismos valores propios para el núcleo

$$K_m(P, Q) = K(P, Q) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(P)\varphi_k(Q)}{\lambda_k},$$

si $i > m$. Estas funciones propias $\varphi_i(P)$, $i > m$, forman un sistema maximal de funciones propias para la ecuación integral con núcleo $K_m(P, Q)$, en el sentido de que cualquier otra función propia de este núcleo se expresa linealmente por medio de éstas.

De este modo, *las sucesiones* (6,13) *y* (7,13) *para el núcleo simétrico* $K(P, Q)$ *pueden ser obtenidas aplicando sucesivamente el método variacional a los núcleos* $K(P, Q)$, $K_1(P, Q)$, $K_2(P, Q)$, . . .

6. Supongamos que el núcleo $K(P, Q)$ tiene sólo un número finito de funciones propias linealmente independientes (esto ocurre con cualquier núcleo degenerado). Entonces, para un m suficientemente grande, el núcleo $K_m(P, Q)$ no tendrá ningún valor propio. Por otra parte, puesto que las funciones $\varphi_k(P)$ son continuas, de acuerdo al lema del apartado 2, el núcleo $K_m(P, Q)$, al igual que $K(P, Q)$, tendrá que satisfacer a todas las propiedades descritas en el apar-

tado 2 del § 12. Por esto, de acuerdo con el apartado 3 del § 12, tiene que ser $K_m(P, Q) \equiv 0$, es decir, debe ser

$$K(P, Q) \equiv \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(P)\varphi_k(Q)}{\lambda_k}. \qquad (11,13)$$

De esta fórmula se deduce, que cualquier núcleo del tipo considerado con un número finito de valores propios (o, lo que es lo mismo, con un número finito de funciones propias linealmente independientes), es degenerado.

Observación. Sea $K(P, Q) = \frac{\tilde{K}(P, Q)}{PQ^\alpha}$, en donde $0 \leq \alpha < d$, $\tilde{K}(P, Q)$ es una función uniformemente continua en P y Q, y $\tilde{K}(P, Q) = \tilde{K}(Q, P)$. Fácilmente se observa, que para las funciones propias continuas de una ecuación integral con núcleo $K(P, Q)$ del tipo señalado, son válidos los teoremas 1 y 2 del presente parágrafo. Utilizando esto, demostraremos que la ecuación integral con núcleo del tipo indicado tiene, al menos, un valor propio.

Del lema del § 8 se deduce que existe un m tal, que el núcleo $K^{(m)}(P, Q) = \underbrace{K \circ K \circ \ldots \circ K}_{m \text{ veces}}$ es continuo. Como $K^{(m)}(P, Q)$ es un núcleo continuo simétrico, según lo demostrado en el § 12, existe un número μ_1 y una función $\varphi_1(P)$ continua tales, que

$$\varphi_1 = \mu_1 K^{(m)} \varphi_1$$

($K^{(m)}$ denota el operador correspondiente al núcleo $K^{(m)}(P, Q)$ véase la pág. 35). Supongamos que m es impar y hagamos $\mu_1 = \lambda_1^m$, en donde λ_1 es un número real. Sea e una raíz primitiva de la unidad de orden m. En este caso, se verifica la igualdad

$$(E - \lambda_1 K)(E - \lambda_1 e K)(E - \lambda_1 e^2 K) \ldots (E - \lambda_1 e^{m-1} K) =$$
$$= (E - \lambda_1^m K^{(m)}).$$

La justeza de esta igualdad se deduce de la identidad algebraica

$$(a^m - b^m) \equiv (a - b)(a - eb)(a - e^2 b) \dots (a - e^{m-1} b).$$

Por lo tanto,

$$(E - \lambda_1^m K^{(m)})\varphi_1 = (E - \lambda_1 K)(E - \lambda_1 eK) \dots (E - \lambda_1 e^{m-1} K)\varphi_1.$$

Hagamos

$$(E - \lambda_1 eK)(E - \lambda_1 e^2 K) \dots (E - \lambda_1 e^{m-1} K)\varphi_1 = \psi_1.$$

Entonces

$$(E - \lambda_1 K)\psi_1 = 0 \quad \text{ y } \quad \psi_1 \not\equiv 0,$$

es decir, ψ_1 es una función propia de la ecuación integral con núcleo $K(P, Q)$. En efecto, como m es impar, los números $\lambda_1 e^p$, para $1 \leq p \leq m-1$, son complejos. Luego, $(E - \lambda_1 e^p K) \times \times \varphi \not\equiv 0$, para cualquier función $\varphi(P) \not\equiv 0$ y $1 \leq p \leq m-1$, puesto que, según el teorema 2 del presente parágrafo, una ecuación con núcleo simétrico no tiene valores propios complejos. Por eso, $\psi_1 \not\equiv 0$, ya que, en caso contrario, obtendríamos que, para cierto $1 \leq p \leq m-1$ y una función $\varphi(P)$, no idénticamente nula, $(E - \lambda_1 e^p K)\varphi = 0$.

Con esto queda demostrada nuestra afirmación.

Ejercicio 1. Demostrar que para el núcleo simétrico $K(P, Q)$ estudiado en el apartado 2 del § 12, se puede hallar la segunda función propia de la sucesión (6,13), aplicando el método variacional descrito en el apartado 3 del § 12, con la única diferencia de que ahora las funciones consideradas no sólo satisfacen a la condición (8,12), sino también a la condición (9,13). Aplicar este método para hallar las demás funciones propias.

Ejercicio 2. Supongamos que $K(P, Q) = -K(P, Q)$ y que $K(P, Q)$ satisface a la condición (3,12). Demostrar que, entonces, todos los valores propios son imaginarios, puros, y las funciones propias no pueden ser reales. Cualquier función propia es ortogonal a sí misma y a todas las demás, con la posible excepción de aquellas que correspondan a un valor propio imaginario conjugado.

§ 14. *Teorema de Hilbert–Schmidt*

Toda función $f(P)$, intrínsecamente representable por medio de la función de cuadrado integrable $h(P)$, o sea, toda función del tipo

$$f(P)=\int K(P,Q)h(Q)\,dQ,$$

puede ser desarrollada en serie por las funciones propias de (6,13) *del núcleo simétrico $K(P,Q)$, la cual converge absoluta y uniformemente.*

Observación. Naturalmente, tiene sentido hablar de la convergencia de esta serie sólo en el caso en que la ecuación integral (7,12) tenga un conjunto infinito de funciones propias linealmente independientes. En caso contrario, esta serie se reduce a una suma finita. Para no complicar la escritura, aquí, así como en otros casos análogos, escribiremos siempre series (infinitas), recordando que, en el caso de un número finito de funciones propias, estas series se transforman en sumas finitas, cuya convergencia no hay necesidad de demostrar.

La demostración del teorema la haremos construyendo primeramente una serie por las funciones propias de (6,13), y demostraremos que dicha serie converge uniformemente; después demostraremos que esta serie converge precisamente hacia la función $f(P)$.

Supongamos que la función $f(P)$ es desarrollable en serie por las funciones propias de (6,13), las cuales consideraremos ortonormales. Supongamos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(P) = f(P), \tag{1,14}$$

y que la serie que figura en el primer miembro es uniformemente convergente. Para determinar el coeficiente C_m, multipliquemos ambos miembros de la igualdad (1,14) por $\varphi_m(P)$ e integremos miembro a miembro sobre toda la región G de definición de las funciones $f(P)$ y $\varphi_i(P)$. Obtenemos:

$$C_m = \int f(P)\varphi_m(P)\,dP = \int\int K(P,Q)h(Q)\varphi_m(P)\,dP\,dQ =$$

$$= \int h(Q)\left(\int K(Q,P)\varphi_m(P)\,dP\right)dQ =$$

$$= \int \frac{\varphi_m(Q)h(Q)\,dQ}{\lambda_m} = \frac{h_m}{\lambda_m}, \tag{2,14}$$

donde hacemos

$$h_m = \int h(Q)\varphi_m(Q)\,dQ.$$

Demostremos ahora, que la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i \varphi_i(P)}{\lambda_i} \tag{3,14}$$

converge absoluta y uniformemente. Para esto, apliquemos el criterio de Cauchy. Formemos el segmento de la serie

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{h_i \varphi_i(P)}{\lambda_i}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy, obtenemos

$$\left[\sum_{i=m}^{m+p} |h_i| \left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|\right]^2 \leq \sum_{i=m}^{m+p} h_i^2 \sum_{i=m}^{m+p} \left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|^2. \qquad (4,14)$$

Los coeficientes h_i son los coeficientes de Fourier de la función $h(P)$ con respecto a las funciones $\varphi_i(P)$. Por eso, aplicando la desigualdad de Bessel, hallamos que la serie numérica

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$$

es convergente. Por lo tanto, según el criterio de Cauchy, la magnitud

$$\sum_{i=m}^{m+p} h_i^2$$

será menor que cualquier ε_1 positiva, si m es suficientemente grande.

Por otra parte, las magnitudes $\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}$ pueden considerarse como coeficientes de Fourier del desarrollo del núcleo $K(P, Q)$, considerado como función sólo de Q, en serie, según las funciones $\varphi_i(Q)$. Aplicando nuevamente a estos coeficientes la desigualdad de Bessel, hallamos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right)^2 \leq \int K^2(P, Q)\, dQ.$$

Esta última integral existe en virtud de la condición (3,12) y está acotada por una constante que no depende de P. Por eso, para cualesquiera m y p, la suma

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|^2$$

es acotada.

De este modo, de la desigualdad (4,14) hallamos que para cualquier $\varepsilon > 0$ constante existe un m_0 tal, que depende sólo de ε, que para cualesquiera $m > m_0$ y $p > 0$, se tiene:

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(P) \right| < \varepsilon.$$

De aquí y por el criterio de Cauchy se deduce que la serie (3,14) es absoluta y uniformemente convergente.

Pasemos ahora a la demostración de que la serie (3,14) converge precisamente hacia la función $f(P)$.

Anotemos, primeramente, que del teorema demostrado en el apartado 2 del § 12, se deduce que la función $f(P)$ y todas las funciones propias $\varphi_i(P)$ son uniformemente continuas. Además, acabamos de demostrar que la serie (3,14) es uniformemente convergente. Por eso, para demostrar que dicha serie converge hacia $f(P)$, es suficiente demostrar que esta serie converge en media hacia $f(P)$, es decir, que

$$\int \left[f(P) - \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(P) \right]^2 dP \underset{m \to \infty}{\to} 0. \tag{5,14}$$

Para demostrar esta última afirmación observemos que

$$f(P) - \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(P) = \int \left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right] h(Q)\, dQ,$$

de donde, haciendo, para abreviar, la escritura

$$K_m(P, Q) = K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i},$$

$$g_m(P) = f(P) - \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(P),$$

obtenemos:

$$\int\left[f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right]^2 dP=\int\int\left[K(P,Q)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]h(Q)\left[f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right]dP\,dQ=$$

$$=\frac{1}{2}\int\int K_m(P,Q)[h(Q)+g_m(Q)][h(P)+g_m(P)]\,dP\,dQ-$$

$$-\frac{1}{2}\int\int K_m(P,Q)h(Q)h(P)\,dP\,dQ-$$

$$-\frac{1}{2}\int\int K_m(P,Q)g_m(Q)g_m(P)\,dP\,dQ. \quad (6,14)$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que, debido a la simetría del núcleo $K(P,Q)$,

$$\int\int K_m(P,Q)h(P)g_m(Q)\,dP\,dQ=$$

$$=\int\int K_m(P,Q)h(Q)g_m(P)\,dP\,dQ.$$

Como

$$\int g_m^2(P)\,dP=\int f^2(P)\,dP-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{h_i}{\lambda_i}\right)^2\leq\int f^2(P)\,dP,$$

existe un número M independiente de m, que para todo m

$$\int g_m^2(P)\,dP<M,\quad \int h^2(P)\,dP<M,\quad \int[h(P)+g_m(P)]^2\,dP<M.$$

Según la nota 2 al apartado 3 del § 12, y al apartado 5 del § 13, tenemos que

$$\left|\int K_m(P,Q)\psi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ\right|\leq\frac{M}{|\lambda_{m+1}|},$$

si

$$\int\psi^2(P)\,dP\leq M.$$

Esto significa que las tres integrales del segundo miembro de (6,14) tienden a 0 cuando $m \to \infty$, y por eso la relación (5,14) es válida.

Corolario. Fórmula de Schmidt para la resolución de ecuaciones integrales con núcleo simétrico.

Consideremos la ecuación integral

$$\varphi(P) = \lambda \int K(P, Q)\varphi(Q)\, dQ + f(P), \qquad (7,14)$$

en donde $K(P, Q)$ es un núcleo simétrico del tipo descrito al principio del apartado 2 del § 12; $f(P)$ es una función conocida uniformemente continua; $\varphi(P)$ es la función incógnita y λ es un parámetro. Por el primer teorema de Fredholm (§ 8), si λ no es un valor propio, la ecuación integral (7,14) tiene una solución $\varphi(P)$ uniformemente continua. Entonces, por el teorema de Hilbert–Schmidt, la función $\varphi(P) - f(P)$ se puede desarrollar en serie por las funciones propias del núcleo $K(P, Q)$, la cual es absoluta y uniformemente convergente. Sea

$$\varphi(P) - f(P) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(P),$$

de donde

$$\varphi(P) = \sum_{i=1}^{m} C_i \varphi_i(P) + f(P). \qquad (8,14)$$

Poniendo en la ecuación (7,14) el segundo miembro de la igualdad (8,14), en lugar de $\varphi(P)$, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(P) + f(P) = \lambda \sum_{i=1}^{m} C_i \int K(P, Q)\varphi_i(Q)\, dQ +$$

$$+ \lambda \int K(P, Q) f(Q)\, dQ + f(P) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i \varphi_i(P)}{\lambda_i} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i} + f(P). \qquad (9,14)$$

Aplicando nuevamente el teorema de Hilbert – Schmidt, hemos sustituido aquí la integral

$$\int K(P, Q) f(Q)\, dQ$$

por la serie absoluta y uniformemente convergente

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i}, \qquad \text{donde} \qquad f_i = \int f(P) \varphi_i(P)\, dP.$$

Es fácil ver también, que la primera de las series que figuran en el segundo miembro de (9,14) es uniformemente convergente. Comparando los coeficientes de iguales funciones $\varphi_i(P)$ en ambos miembros de la igualdad (9,14), obtenemos:

$$C_i = \frac{\lambda C_i}{\lambda_i} + \frac{\lambda f_i}{\lambda_i}.$$

De aquí que

$$C_i = \frac{\lambda f_i}{\lambda_i - \lambda}$$

y, por lo tanto,

$$\varphi(P) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P), \tag{10,14}$$

en donde la serie en el segundo miembro es absoluta y uniformemente convergente. Esta es la llamada fórmula de E. Schmidt.

Cuando λ coincide con uno de los valores propios λ_i, la solución de la ecuación (7,14) se puede obtener de una manera análoga. En este caso, por el tercer teorema de Fredholm, $f_i = 0$ para todos los i, a los que corresponden valores propios, iguales a λ. La solución $\varphi(P)$ se representa en forma de la serie (8,14), en la cual $C_i = \frac{\lambda f_i}{\lambda_i - \lambda}$, si $\lambda_i \neq \lambda$ y $C_i = \alpha_i$, en donde α_i es una constante arbitraria, si $\lambda_i = \lambda$.

Ejercicio. Demostrar directamente el teorema de Hilbert – Schmidt para núcleos degenerados, utilizando la fórmula (11,13).

§ 15. Teorema del desarrollo de los núcleos

Teorema. El núcleo $K(P, Q)$ del tipo considerado en este capítulo es desarrollable en la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}, \tag{1,15}$$

la cual converge en media hacia $K(P, Q)$ respecto a P, es decir, para cualquier Q fijo se tiene

$$\int \left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right]^2 dP \xrightarrow[m\to\infty]{} 0. \tag{2,15}$$

Demostración. Consideremos la función

$$K_2(P, Q) = \int K(P, S)K(S, Q)\, dS$$

como función solamente de P, considerando a Q fijo. Entonces, esta función, por el teorema de Hilbert – Schmidt, puede desarrollarse en serie por las funciones propias de $\varphi_i(P)$, la cual es uniforme y absolutamente convergente respecto a P. Sea

$$K_2(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(P).$$

De acuerdo con la fórmula (2,14)

$$c_i = \frac{\int K(P, Q)\varphi_i(P)\, dP}{\lambda_i} = \frac{\varphi_i(Q)}{\lambda_1^2}.$$

Por lo tanto,

$$K_2(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i^2} . \tag{3,15}$$

Según el teorema de Hilbert – Schmidt, esta serie es absoluta y uniformemente convergente respecto a P para todo Q fijo. Por consideraciones de simetría, de esto se deduce también la convergencia absoluta y uniforme de esta serie respecto a Q para todo P fijo. Pero esto no da ningún fundamento para deducir la convergencia uniforme de esta serie respecto al conjunto P y Q. Tal convergencia será demostrada en el § 17.

De (3,15) se deduce que

$$K_2(Q, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2} , \tag{4,15}$$

además, esta última serie es convergente, pero no podemos aún afirmar que es uniformemente convergente respecto a Q.

Por otra parte,

$$\int \left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right]^2 dP =$$

$$= \int K(Q, P)K(P, Q)\, dP - 2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \int K(Q, P)\varphi_i(P)\, dP +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2} = K_2(Q, Q) - 2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2} =$$

$$= K_2(Q, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2} . \tag{5,15}$$

De acuerdo con (4,15), esta última diferencia tiende a 0, cuando $m \to \infty$. De esto se deduce (2,15), que es lo que se quería demostrar.

§ 16. Clasificación de los núcleos

Consideremos la forma integral

$$\int\int K(P, Q)\chi(P)\chi(Q)\, dP\, dQ, \qquad (1,16)$$

en donde $\chi(P)$ es una función de cuadrado integrable. Aplicando la desigualdad de Bunyakovski es fácil demostrar que la integral (1,16) existe, puesto que existe la integral del cuadrado de $K(P, Q)$ (véase (3,12)). Según el teorema de Hilbert – Schmidt, la función de P

$$\int K(P, Q)\chi(Q)\, dQ$$

puede desarrollarse en serie por las funciones propias $\varphi_i(P)$ del núcleo $K(P, Q)$, la cual converge uniformemente respecto a P. Aplicando la fórmula (2,14), obtenemos de este modo:

$$\int K(P, Q)\chi(Q)\, dQ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i}{\lambda_i} \varphi(P), \qquad (2,16)$$

en donde

$$\chi_i = \int \chi(P)\varphi_i(P)\, dP.$$

Multiplicando ambos miembros de (2,16) por $\chi(P)$ e integrando respecto a P, obtenemos:

$$\int\int K(P, Q)\chi(P)\chi(Q)\, dP\, dQ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i^2}{\lambda_i}. \qquad (3,16)$$

La forma integral y el núcleo $K(P, Q)$ se llaman definidos no negativos, respectivamente no positivos, si para cualquier función $\chi(P)$ de cuadrado integrable, la forma integral (1,16) *es no negativa, respectivamente no positiva* (véase el apartado 1 del § 12).

De la fórmula (3,16) se ve, *que la condición necesaria y suficiente para que la forma* (1,16) *sea definida no negativa, respectivamente no positiva, consiste en que todos los* λ_i *sean positivos, respectivamente negativos.*

Llamaremos a la forma (1,16) y al núcleo $K(P, Q)$ *cuasi-definidos no negativos*, respectivamente *no positivos*, si todos los λ_i correspondientes, a excepción, posiblemente, de un número finito de ellos, que son positivos, respectivamente negativos.

§ 17. *Teorema de Dini y sus aplicaciones*

Teorema de Dini. Si una sucesión monótona de funciones continuas

$$f_1(P), f_2(P), \ldots, f_k(P), \ldots \tag{1,17}$$

converge en todo el conjunto acotado y cerrado F *hacia una función continua* $f(P)$, *entonces esta sucesión converge uniformemente.*

Demostración. Sin restringir la generalidad, podemos considerar que $f(P)\equiv 0$; el caso general se reduce a éste, restando $f(P)$ de cada función $f_k(P)$. Luego podemos considerar, que la sucesión (1,17) es monótona decreciente en cada punto P *), puesto que el caso opuesto se reduce a éste, cambiando el signo a todas las $f_k(P)$.

De este modo, supongamos que se tiene una sucesión monótona de funciones continuas $f_k(P)$, decreciente en cada punto, y convergente hacia 0 en cada punto del conjunto acotado y cerrado F. Demostremos que esta convergencia

*) O sea

$$f_k(P) \geq f_{k+1}(P), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

es uniforme. Para esto, observemos lo siguiente. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada punto P del conjunto F existe un m tal, que

$$0 \leq f_m(P) < \varepsilon.$$

Por la continuidad de $f_m(P)$, la misma desigualdad tendrá lugar también en cierto entorno O_p del punto P. Como la sucesión considerada de funciones es monótona decreciente en el entorno O_p, se tiene que

$$0 \leq f_k(P) < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad k \geq m. \tag{2,17}$$

De este modo, para un ε elegido para cada punto P del conjunto F existe un entorno Op tal de él que, a partir de cierto k, en dicho entorno es válida la desigualdad (2,17). Según el lema de Heine – Borel, de todo el conjunto de entornos O_p se puede extraer un subconjunto finito que cubra a todo el conjunto F. Sea M el máximo de todos los números m, correspondientes a estos entornos. Entonces, evidentemente, para todo $k \geq M$, en todo el conjunto F, tendremos

$$f_k(P) < \varepsilon,$$

que es lo que se quería demostrar.

Aplicaciones del teorema de Dini.

1. En el § 15 hemos demostrado que

$$K_2(Q, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}. \tag{4,15}$$

Sin embargo, todavía no sabemos si la serie que figura en el segundo miembro es uniformemente convergente respecto a Q o no. Ahora, después de haber demostrado el teorema de Dini, podemos resolver fácilmente este problema. En efecto, según el lema demostrado en el § 8, la función $K_2(Q, Q)$ es uniformemente continua respecto a Q. Por consiguiente, podemos considerarla continua en $\bar{G}$ (véase la observación en la pág. 39). Por lo tanto, la sucesión

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}$$

es una sucesión monótona de funciones continuas en cada punto Q, que converge y tiende a una función también continua cuando $m \to \infty$. Por lo tanto, según el teorema de Dini, esta convergencia es *uniforme* en $\bar{G}$.

2. De la convergencia uniforme respecto a Q de la serie que figura en el segundo miembro de (4,15) se deduce, que la sucesión (2,15) tiende a 0 uniformemente respecto a Q (véase (5,15)). Por eso,

$$\int\int\left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP\, dQ \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

3. De la convergencia uniforme de la serie (4,15) respecto a Q se deduce la *convergencia uniforme respecto a* (P, Q) *y la convergencia absoluta de la serie* (3,15), puesto que

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left|\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i^2}\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}.$$

4. Integrando ambos miembros de (4,15) respecto a Q, hallamos que

$$\int K_2(Q, Q)\, dQ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2},$$

debido a que las funciones $\varphi_i(Q)$ están normalizadas. Esto significa *que la serie formada por los cuadrados de las magnitudes inversas a* λ_i *es convergente.*

5. *Teorema de Mercer. Si el núcleo* $K(P, Q)$ *es cuasidefinido y uniformemente continuo respecto a* (P, Q), *la serie*

(1,15) *converge hacia él no sólo en media, sino también absoluta y uniformemente respecto a* (P, Q).

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que el núcleo $K(P, Q)$ es cuasidefinido no negativo.

Obsérvese que, si el núcleo $K_m(P, Q)$ es definido, no negativo y continuo, entonces siempre será $K_m(P, P) \geq 0$. En efecto, si en cierto punto P_0 fuese $K_m(P_0, P_0) < 0$, entonces, debido a la continuidad, éste sería negativo también en cierto entorno del punto (P_0, P_0) en el espacio (P, Q). Construyamos una función continua $\varphi_{P_0}(P)$, que sea igual a 0 en toda la región G, excepto en un entorno pequeño G_0 del punto P_0, en donde esta función será positiva. Entonces, si la región G_0 es suficientemente pequeña, tendremos que

$$\int\int K_m(P, Q)\varphi_{P_0}(P)\varphi_{P_0}(Q)\, dP\, dQ < 0,$$

lo que contradice a la suposición de que el núcleo $K_m(P, Q)$ es definido no negativo.

Como el núcleo $K(P, Q)$ es cuasidefinido no negativo, para m suficientemente grande, el núcleo

$$K_m(P, Q) = K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}$$

es definido no negativo (ver el § 16). Por eso, según la proposición recientemente demostrada sobre los núcleos continuos definidos no negativos, para todo m suficientemente grande, se deberá tener

$$K(P, P) \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} .$$

Por lo tanto, la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} \tag{3,17}$$

es convergente para todo P. Por eso, la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i} \tag{4,17}$$

también es convergente para todo Q. Como $K(P, P)$ es acotado, todas las sumas parciales de las series (3,17) y (4,17) para todo P y Q están acotadas en valor absoluto por cierta constante

$$M_0 > 0.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy y suponiendo que m es tan grande que para $i > m$ todas las $\lambda_i > 0$, obtenemos

$$\left[\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right|\right]^2 \leq \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} \cdot \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i} . \tag{5,17}$$

Aplicando el criterio de convergencia de Cauchy a la serie (4,17), obtenemos que para cada $\varepsilon > 0$ constante, para cualquier Q fijo, existe un m_0 tal, suficientemente grande, que depende sólo de ε y de Q, que

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{|\lambda_i|} = \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i} < \frac{\varepsilon^2}{2M_0}, \quad \text{si} \quad m > m_0(\varepsilon, Q).$$

Por eso, de la desigualdad (5,17) obtenemos que, para cualquier $p > 0$ y para $m > m_0(\varepsilon, Q)$, tendremos

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right| < \varepsilon.$$

De aquí, y aplicando el criterio de convergencia de Cauchy, obtenemos que la serie (1,15) converja absoluta y uniformemente respecto a P para cualquier Q fijo.

Debido a la relación (2,15), demostrada más arriba, obtenemos de esto que la serie (1,15) converja precisamente hacia $K(P, Q)$. En particular,

$$K(P, P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} . \qquad (6,17)$$

Como $K(P, P)$ es, por hipótesis, continua en la región cerrada $\bar{G}$, y como todas las funciones $\varphi_i(P)$ también son continuas en esta misma región (véase el lema del apartado 2 § 12) y todas las λ_i, a partir de una dada, son positivas, por el teorema de Dini la serie del segundo miembro de (6,17) es uniformemente convergente respecto a P. Por eso, para cualquier $\varepsilon > 0$ constante existe un m_0 tal, que sólo depende de ε, que para cualquier $p > 0$ será

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} < \varepsilon, \qquad \text{si} \qquad m > m_0(\varepsilon).$$

De la desigualdad (5,17) se deduce que para cualesquiera P y Q, $p > 0$, y las mismas m y ε, tendremos que

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right| < \varepsilon,$$

por lo que la serie (1,15) es absoluta y uniformemente convergente respecto a (P, Q), que es lo que se quería demostrar.

§ 18. Ejemplo

Consideremos la ecuación integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^l G(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \qquad 0 \leq x \leq l, \qquad (1,18)$$

en donde $G(x, \xi)$ es la función de Green, construida en el § 2. Como fue indicado allí, esta función es simétrica respecto a sus argumentos. Por esto, a la ecuación integral (1,18) se le puede aplicar la teoría desarrollada en el presente capítulo. Como se vio en el § 2, esta ecuación posee un conjunto infinito de funciones y valores propios, que fueron hallados en el § 2. Normalizado las funciones propias y escribiendo bajo las mismas los valores propios λ correspondientes, obtenemos las sucesiones

$$\left.\begin{array}{lllll} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} x, & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} 2x, & \ldots, & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} kx, & \ldots \\ 1, & 4 & \ldots, & k^2 & ,\ldots \end{array}\right\} \qquad (2,18)$$

Para simplificar la escritura, pongamos en las ecuaciones (1,2) $l=\pi$ y $c=\frac{\varrho}{T_0}=1$. Aquí, a cada valor propio λ le corresponde sólo una función propia. Fácilmente se comprueba que las funciones propias, correspondientes a diferentes valores propios, son ortogonales entre sí, lo cual corresponde a la teoría general (véase el apartado 1 del § 13).

Aplicando el teorema de Hilbert – Schmidt, obtenemos que cualquier función $f(x)$ del tipo

$$f(x)=\int_0^\pi G(x,\xi)h(\xi)\,d\xi, \qquad 0\leq x\leq l, \qquad (3,18)$$

en donde $h(\xi)$ es una función de cuadrado integrable y desarrollable en serie por las funciones propias (2,18) del núcleo $G(x,\xi)$. Supondremos, como hasta ahora lo hemos hecho (véase la observación al § 1), que la función $h(\xi)$ tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad. Derivemos dos veces respecto a x ambos miembros de la igualdad (3,18), así como lo hicimos en el § 2, utilizando para esto las fórmulas (1,2). Obtenemos que, con la posible excepción de un número finito de puntos,

$$f''(x) = -\frac{h(x)}{T_0}.$$

Recíprocamente, utilizando las fórmulas (1,2), fácilmente se comprueba que cualquier función $f(x)$, que es continua junto con su derivada primera en el intervalo cerrado $[0, \pi]$, que es igual a 0 en los extremos de este intervalo, y que, en todos los puntos, a excepción de un número finito de ellos, posee derivada segunda, continua, de cuadrado integrable, es representable en la forma (3,18), en donde $h(x)$ es también una función de cuadrado integrable; por $h(x)$ se debe tomar, precisamente, $\frac{-f''(x)}{T_0}$. Por lo tanto, según el teorema de Hilbert – Schmidt, resulta que cualquier función $f(x)$ continua, que posea derivada primera, continua, en el intervalo cerrado $[0, \pi]$, que tenga en todos los puntos derivada segunda, continua, a excepción de un número finito de puntos de cuadrado integrable, y que satisfaga a $f(0) = f(\pi) = 0$, puede desarrollarse en una serie absoluta y uniformemente convergente de sen kx. Por la teoría de las series trigonométricas es conocida la posibilidad de tal desarrollo, bajo suposiciones más débiles respecto a $f(x)$. Para esto es suficiente, por ejemplo, que $f(x)$ sea continua junto con su derivada primera en el intervalo cerrado $[0, \pi]$ y que satisfaga a $f(0) = f(\pi) = 0$ *). En esta última clase de funciones es fácil elegir una función que no satisfaga a las condiciones del teorema de Hilbert – Schmidt; por ejemplo, es suficiente tomar una función sin derivada segunda en ningún punto. Esto

*) G. M. Fijtengolts, Curso de Cálculo Diferencial e Integral, t. III M. – L., 1960, cap. XIX, § 2, pág. 435.

demuestra que, en general, las condiciones del teorema de Hilbert – Schmidt no son necesarias para la posibilidad del desarrollo de $f(x)$ en una serie absoluta y uniformemente convergente por las funciones propias.

Demostremos que el sistema (2,18) es completo, es decir, que para cualquier función $f(x)$, que sea continua en el intervalo cerrado $[0, \pi]$, existe tal combinación lineal de sen kx, que el error cuadrático medio cometido al sustituir $f(x)$ por esta combinación lineal es arbitrariamente pequeño. Obsérvese para esto, que para cualquier función $f(x)$ continua, en el intervalo cerrado $[0, \pi]$, se puede hallar en dicho intervalo una función $f_1(x)$ tal, que sea continua junto con sus dos primeras derivadas y que se hace 0 en los extremos de este intervalo, que la norma de la diferencia $f(x) - f_1(x)$ es arbitrariamente pequeña. Como acabamos de ver, la función $f_1(x)$ puede, a su vez, desarrollarse en una serie uniformemente convergente de sen kx. Por eso, la función $f_1(x)$ puede aproximarse por tal combinación lineal de sen kx (por las sumas parciales de la serie de sen kx, las cuales convergen uniformemente hacia esta función), que su error cuadrático medio sea arbitrariamente pequeño. De aquí, y aplicando la desigualdad triangular (véase el ap. 5 § 11), es fácil verificar que el sistema (2,18) es completo.

De aquí que, según lo demostrado en el apartado 10 del § 11, el sistema (2,18) es cerrado.

Todos los valores propios del núcleo $G(x, \xi)$ son positivos. Por eso, a éste se le puede aplicar el teorema de Mercer. Resulta:

$$\frac{\pi}{2} G(x, \xi) = \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} \xi}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2\xi}{4} + \ldots,$$

en donde la serie en el segundo miembro es absoluta y uniformemente convergente respecto a (x, ξ).

COMPLEMENTO

§ 19. *Reducción de una forma cuadrática a la forma canónica por medio de una transformación ortogonal*

Expondremos aquí la demostración de la posibilidad de tal reducción, correspondiente a la teoría de las formas integrales $I(\varphi)$ desarrollada en los §§ 12 y 13.

1. Señalemos, primeramente, algunas propiedades de los vectores unitarios ortogonales entre sí. Sean

$$\varphi_k = (\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}, \ldots, \varphi_k^{(n)}), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

n vectores unitarios ortogonales entre sí, es decir,

$$\sum_{l=1}^{n} \varphi_k^{(l)} \varphi_p^{(l)} = \delta_{kp}; \qquad k, p = 1, \ldots, n,$$

en donde $\delta_{kp} = 0$, si $k \neq p$ y $\delta_{pp} = 1$.

a) $D = |\varphi_p^{(l)}| = \pm 1$. En efecto, calculando D^2 por las reglas conocidas, como el producto de dos determinantes iguales, obtenemos un determinante, en el cual la diagonal principal está formada por unidades y los restantes elementos son iguales a 0.

b) Denotemos por $\Phi_k^{(i)}$ el complemento algebraico del elemento $\varphi_k^{(i)}$ del determinante D. Entonces

$$\Phi_k^{(i)} = D \varphi_k^{(i)}. \qquad (1,19)$$

En efecto, para cualquier k se verifican las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=1}^{n}(\Phi_k^{(i)} - D\varphi_k^{(i)}\varphi_p^{(i)}) = 0, \quad p = 1, \ldots, n.$$

Considerándolas como n ecuaciones lineales, homogéneas, con coeficientes $\varphi_p^{(i)}$, obtenemos las relaciones (1,19), ya que $D \neq 0$.

c)
$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{(i)}\varphi_k^{(j)} = \delta_{ij}. \tag{2,19}$$

Esto se puede comprobar multiplicando la igualdad (1,19) por $\varphi_k^{(j)}$ y sumando respecto a k.

2. Consideremos los valores de la forma cuadrática

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}, \quad K_{ij} = K_{ji}, \tag{3,19}$$

en donde todas las K_{ij} y las $\varphi^{(i)}$ son reales, en la esfera

$$\sum_{i=1}^{n}[\varphi^{(i)}]^2 = 1. \tag{4,19}$$

Por el teorema de Weierstrass, en el conjunto cerrado, acotado, de puntos de la esfera (4,19) existe por lo menos un punto, en donde la función continua (3,19) alcanza su valor máximo. Supongamos que dicho valor máximo es igual a μ_1, y que éste se alcanza en el punto $A_1(\varphi_1^{(1)}, \ldots \ldots, \varphi_1^{(n)})$ *).

---

*) Véase la nota 2 al apartado 3 del § 12, en donde se demostró la existencia de una función $\varphi(P)$ en la "esfera"

$$\int \varphi^2(P)\, dP = 1,$$

que da el máximo valor de la forma integral

$$\int\int K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)\, dP\, dQ,$$

siempre que este valor sea diferente de 0.

Consideremos los valores de la forma (3,19) en los puntos de intersección S_{n-2} de la esfera (4,19) con el hiperplano perpendicular al vector $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)})$ y que pasa por el centro de la esfera. Por el mismo teorema de Weierstrass, entre los puntos del conjunto S_{n-2} existe por lo menos uno, en donde la forma (3,19) alcanza su valor máximo respecto a los demás puntos de S_{n-2}. Supongamos que este valor máximo es igual a μ_2 y que se alcanza en el punto $A_2(\varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_2^{(n)})$.

Consideremos luego los valores de la forma (3,19) en los puntos del conjunto S_{n-3}, que es la intersección de S_{n-2} con el hiperplano que pasa por el origen de coordenadas, perpendicular al vector $(\varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_2^{(n)})$. Sea μ_3 el extremo superior de los valores de la forma (3,19) en S_{n-3}; por el teorema de Weierstrass, éste se alcanza por lo menos en un punto de S_{n-3}; supongamos que tal punto es $A_3(\varphi_3^{(1)}, \ldots$ $\ldots, \varphi_3^{(n)})$.

Siguiendo estos razonamientos, hallamos n vectores unitarios, perpendiculares entre sí, $\varphi_k = (\varphi_k^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(n)})$, $k = 1, \ldots$ $\ldots, n$. Tomémoslos como direcciones de los nuevos ejes coordenados $O\psi_1, \ldots, O\psi_n$. Entonces

$$\psi^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi^{(i)}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Cada conjunto S_{n-k} es la intersección del plano de dimensión $(n-k+1)$

$$\psi^{(1)} = \psi^{(2)} = \ldots = \psi^{(k-1)} = 0$$

con la esfera

$$\sum_{i=1}^{n} [\psi^{(i)}]^2 = 1. \qquad (5,19)$$

El hecho de que la esfera (4,19) se transforma en la (5,19), y por lo tanto, para todos los puntos del conjunto S_{n-k} se cumple la desigualdad (5,19), se deduce de que

$$\sum_{k=1}^{n}[\psi^{(k)}]^2=\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i,j=1}^{n}\varphi_k^{(i)}\varphi^{(i)}\varphi_k^{(j)}\varphi^{(j)}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{(i)}\varphi_k^{(j)}\right)\varphi^{(i)}\varphi^{(j)},$$

y según (2,19),

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{(i)}\varphi_k^{(j)}=\delta_{ij}.$$

Se afirma que en las nuevas coordenadas $\psi^{(i)}$ la forma (3,19) toma la forma

$$F\equiv\sum_{i,j=1}^{n}K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}\equiv\sum_{i,j=1}^{n}K_{ij}^{*}\psi^{(i)}\psi^{(j)}\equiv\sum_{i=1}^{n}\mu_i[\psi^{(i)}]^2. \quad (6,19)$$

El hecho de que

$$K_{ii}^{*}=\mu_i,$$

se deduce de que nuestra forma toma el valor μ_i en el punto A_i, cuyas coordenadas ψ son todas iguales a 0, excepto $\psi^{(i)}$, la cual es igual a 1. La igualdad $K_{1j}^{*}=K_{j1}^{*}=0$, para $j>1$, puede demostrarse de la manera siguiente.

Supongamos que para cierto $j>1$ se tiene $K_{1j}\neq 0$. Hagamos todas las $\psi^{(i)}$, excepto $\psi^{(1)}$ y $\psi^{(j)}$, iguales a 0. Entonces

$$F=\mu_1[\psi^{(1)}]^2+2K_{1j}^{*}\psi^{(1)}\psi^{(j)}+\mu_j[\psi^{(j)}]^2.$$

Sea $|\psi^{(j)}|$ muy pequeña en comparación con $|\psi^{(1)}|$, y

$$[\psi^{(1)}]^2+[\psi^{(j)}]^2=1.$$

Entonces, despreciando las magnitudes de orden $[\psi^{(j)}]^2$, obtenemos:

$$F\approx\mu_1+2K_{1j}^{*}\psi^{(j)}. \quad (7,19)$$

El signo de $\psi^{(j)}$ lo escogemos de tal modo que $2K_{1j}^{*}\psi^{(j)}>0$. Entonces, de la relación (7,19) se desprende que en la esfera (5,19), o, lo que es lo mismo, en la esfera (4,19), existen puntos donde $F>\mu_1$, lo cual contradice a la definición de μ_1. Con esto se termina la demostración de que todos los $K_{1j}^{*}=0$ para $j>1$. De la misma manera se demuestra que todos los demás K_{ij}^{*} son iguales a 0, si $i\neq j$.

De nuestra propia construcción se tiene que

$$\mu_1\geq\mu_2\geq\ldots\geq\mu_n.$$

Algunos de los números μ_i pueden ser iguales a 0, y otros, negativos. Numeremos los μ_i y los ψ_i respectivos de tal forma que

$$\mu_1\geq\ldots\geq\mu_i\geq\ldots\geq\mu_m;\ \mu_{m+1}=\ldots=\mu_n=0\ (\mu_i\neq 0 \text{ para } i\leq m).$$

Hagamos

$$\lambda_i=\frac{1}{\mu_i},\qquad i=1,\ldots,m.$$

Entonces la igualdad (6,19) toma la forma

$$\sum_{i,j=1}^{n}K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}.$$

Si $\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu$ son positivos, y $\lambda_{\nu+1},\ldots,\lambda_m$ negativos, entonces $\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_\nu}$ se llaman semiejes *reales* de la superficie

$$\sum_{i,j=1}^{n}K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}=1.\tag{8,19}$$

Fácilmente se observa que esta superficie intercepta segmentos $\pm\sqrt{\lambda_i}$ en los ejes $O\psi^{(i)}$ para $i=1,2,\ldots,\nu$; $\sqrt{\lambda_1}$ es el menor de los semiejes reales. Las magnitudes $\sqrt{-\lambda_{\nu+1}},\ldots$

..., $\sqrt{-\lambda_m}$ se llaman semiejes *imaginarios* de la superficie (8,19). Esta superficie no se corta con los ejes reales $O\psi^{(\nu+1)}, \ldots$ ..., $O\psi^{(m)}$.

Si $m < n$, en el espacio $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$ y en el $(\psi^{(1)}, \ldots$ ..., $\psi^{(n)})$, la ecuación (8,19) representa una superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al plano

$$\psi^{(1)} = \ldots = \psi^{(m)} = 0.$$

En este caso, es natural decir que los semiejes correspondientes a los ejes $O\psi^{(m+1)}, \ldots, O\psi^{(n)}$ son infinitos.

En los apartados siguientes volveremos a la anterior numeración de los ejes.

3. Demostremos que

$$\mu_1\varphi_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_1^{(j)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9,19}$$

En efecto, en virtud de nuestra construcción, para todas las $\varphi^{(i)}$ reales tiene que ser

$$F \equiv \mu_1 \sum_{i=1}^{n} [\varphi^{(i)}]^2 - \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \geqslant 0.$$

Si $\varphi^{(i)} = \varphi_1^{(i)}$ para todo i, entonces $F = 0$, es decir, se alcanza el valor mínimo. Por eso las derivadas parciales respecto a todas las variables, tomadas para estos valores de $\varphi^{(i)}$, son iguales a cero, lo que nos da las igualdades (9,19).

4. Al hallar el eje $O\psi^{(2)}$, en lugar de considerar el valor de la forma (3,19) en el conjunto S_{n-2}, que es la intersección de la esfera (4,19) con el hiperplano $\psi^{(1)} = 0$, si $\mu_2 > 0$, se pueden considerar los valores de la forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} [K_{ij} - \mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}]\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \tag{10,19}$$

en toda la esfera (4,19). Es fácil demostrar, que la forma (10,19) alcanza su valor máximo μ^* en cierto punto $A^*(\varphi^{(1)*}, \ldots, \varphi^{(n)*})$, perteneciente a S_{n-2} y $\mu^* = \mu_2$. En efecto,

$$\sum_{i,j=1}^{n} [K_{ij} - \mu_1 \varphi_1^{(i)} \varphi_1^{(j)}] \varphi^{(i)} \varphi^{(j)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} \varphi^{(i)} \varphi^{(j)} - \mu_1 [\psi^{(1)}]^2 = \sum_{i=2}^{n} \mu_i [\psi^{(i)}]^2. \quad (11,19)$$

Por eso, para que la forma (10,19) tome su valor máximo en el punto A^* de la esfera (4,19) o, lo que es lo mismo, de la esfera (5,19), es necesario, si $\mu_2 > 0$, que para este punto todas las ψ_i sean iguales a 0, excepto aquellas a las que les corresponden valores μ_i iguales a μ_2; a su vez, la suma de los cuadrados de estas últimas debe ser igual a 1. Aquí conservamos la numeración inicial de μ_i, según la cual

$$\mu_2 \geq \mu_3 \geq \ldots \geq \mu_n .$$

Por lo tanto, μ^* debe ser igual a μ_2; el punto A^* está en S_{n-2} y éste puede tomarse por A_2. Este método de hallar el segundo semieje no sería aplicable si $\mu_2 \leq 0$, ya que entonces la forma (11,19) alcanzaría su valor máximo 0, por ejemplo, para

$$\psi_1 = 1, \psi_2 = \psi_3 = \ldots = \psi_n = 0.$$

De la misma manera, si $\mu_3 > 0$, la búsqueda del eje $O\psi_3$ se puede reducir a hallar el máximo de la forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} [K_{ij} - \mu_1 \varphi_1^{(i)} \varphi_1^{(j)} - \mu_2 \varphi_2^{(i)} \varphi_2^{(j)}] \varphi^{(i)} \varphi^{(j)} \quad (12,19)$$

en la esfera (4,19), etc.

Aplicando a la forma (10,19) los mismos razonamientos que en el apartado 3, se puede demostrar, si $\mu_2 > 0$, que

$\varphi_2^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, n$, deben satisfacer a las ecuaciones

$$\mu_2\varphi_2^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}[K_{ij}-\mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}]\varphi_2^{(j)}$$

o

$$\mu_2\varphi_2^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}K_{ij}\varphi_2^{(j)}, \quad i=1, \ldots, n, \tag{13,19}$$

puesto que

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_1^{(j)}\varphi_2^{(j)}=0.$$

Utilizando la forma (12,19) y otras formas construidas análogamente, se puede demostrar que $\varphi_3^{(i)}, \varphi_4^{(i)}, \ldots$, correspondientes a $\mu_3>0$, $\mu_4>0, \ldots$, también satisfacen a las ecuaciones del tipo (9,19).

Si, en cambio, $\mu_2=0$, esto significa que la forma cuadrática

$$\sum_{i=1,\, j=1}^{n}[K_{ij}-\mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}]\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}\leqslant 0,$$

para cualesquiera $\varphi^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, n$, y es igual a cero, si $\varphi^{(i)}=\varphi_2^{(i)}$ para todo i. Igualando a cero las derivadas parciales de esta forma, respecto a todas las variables, tomadas para los valores $\varphi^{(i)}=\varphi_2^{(i)}$, obtenemos que $\varphi_2^{(i)}$ satisfagan a un sistema de ecuaciones del tipo (9,19). Estos mismos razonamientos son aplicables a los otros vectores $\varphi_k^{(i)}$, que corresponden a $\mu_k=0$.

Si $\mu_2<0$, entonces los números $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$, que son, en este caso, todos negativos, y sus correspondientes vectores $(\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \ldots, \varphi_n^{(i)})$, $i=1, 2, \ldots, n$, pueden hallarse considerando el mínimo de la forma (11,19) (en lugar de su máximo). En este caso, los números $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$ y sus vectores correspondientes se obtienen en orden inverso. Análogamente se puede proceder si $\mu_3 < 0$, etc. En todos estos casos se conserva la ecuación (13,19) y las ecuaciones análogas a ella para los demás vectores $(\varphi_1^{(l)}, \varphi_2^{(l)}, \ldots, \varphi_n^{(l)})$.

Ejercicio. Basándose en las ecuaciones (9,19), (13,19), ..., elaborar un método no variacional de reducción de las formas cuadráticas a la forma canónica, utilizando la solución de la ecuación característica

$$|K_{ij} - \mu\delta_{ij}| = 0.$$

§ 20. Teoría de las ecuaciones integrales con núcleos simétricos en la clase de funciones de cuadrado integrable según Lebesgue

La teoría de las ecuaciones integrales con núcleo simétrico, construida anteriormente, se generaliza fácilmente a ecuaciones integrales con núcleos simétricos e integrables, según Lebesgue, junto con sus cuadrados, lo que le da más armonía.

La construcción de esta nueva teoría tiene mucho de parecido con las construcciones de los § § 11 – 16 y se lleva a cabo exactamente por el mismo plan. Por eso nos limitaremos sólo a exponer aquellos lugares de esta teoría que se diferencian esencialmente de los correspondientes a la teoría desarrollada anteriormente.

1. Supondremos conocida la teoría de la integral de Lebesgue *). Señalemos solamente algunas propiedades de las funciones integrables según Lebesgue (sumables).

a) *Teorema de Fubini*. Supongamos que la función $f(P, Q)$ es integrable sobre el producto topológico de los conjuntos

---

*) Véase, por ejemplo, I. P. Natanson, Teoría de Funciones de Variable Real, 2ª ed., Fizmatguiz, M., 1957, Véase también G. E. Shilov, Análisis Matemático (curso especial), 2ª ed., Fizmatguiz, 1961.

medibles G_1 y G_2, donde $P \in G_1$ y $Q \in G_2$. Escribamos esta integral en la forma

$$I = \int_{G_1} \int_{G_2} f(P, Q)\, dP\, dQ.$$

Entonces, para casi todos los puntos Q, pertenecientes a G_2, existe la integral

$$I(Q) = \int_{G_1} f(P, Q)\, dP;$$

la función $I(Q)$ es sumable y

$$I = \int_{G_2} I(Q)\, dQ. \tag{1,20}$$

Recíprocamente, si para casi todos los puntos $Q \in G_2$, existe la integral

$$I^*(Q) = \int_{G_1} |f(P, Q)|\, dP,$$

en donde la función $I^*(Q)$ es sumable sobre G_2, y si $f(P, Q)$ es medible en G_1G_2, entonces existe también la integral I y es válida la igualdad (1,20).

Recordemos que se llama producto topológico G_1G_2 de los conjuntos G_1 y G_2 al conjunto de "puntos" (P, Q) tales, que $P \in G_1$ y $Q \in G_2$. Se supone que los conjuntos G_1, G_2 y G_1G_2 están respectivamente en los espacios euclídeos $(x_1, \ldots, x_{d_1})$, $(y_1, \ldots, y_{d_2})$ y $(x_1, \ldots, x_{d_1})(y_1, \ldots, y_{d_2})$. Si los puntos P y Q se determinaban, respectivamente, por las coordenadas $(x_1, \ldots, x_{d_1})$ e $(y_1, \ldots, y_{d_2})$, entonces, el punto (P, Q) se determina por las coordenadas $(x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1, \ldots, y_{d_2})$. Las medidas de los conjuntos G_1, G_2 y G_1G_2 se definen como las medidas de Lebesgue en los espacios euclídeos de dimensiones d_1, d_2 y d_1+d_2, respectivamente.

b) Supongamos que la función $f(S)$ está definida en la región d-dimensional G, y que la integral de $f(S)$ sobre cualquier cubo d-dimensional, situado dentro de G, con los aristas paralelas a los ejes coordenados, es igual a 0. Entonces $f(S)=0$ en casi todo G.

c) *Teorema de Fisher – Riesz.* Sea dada una sucesión infinita de funciones de cuadrado sumable en cierto conjunto medible G:

$$f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P), \ldots$$

Supongamos que para cada $\varepsilon>0$ existe un número N tal, que

$$\int\limits_G (f_n-f_m)^2\, dP<\varepsilon, \qquad (2{,}20)$$

si $n>N$ y $m>N$. Entonces, en la región G existe una función $f(P)$ de cuadrado sumable tal, que

$$\int\limits_G (f_n-f)^2\, dP \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad (3{,}20)$$

La afirmación recíproca, que de (3,20) se deduce (2,20), es evidente.

En lo sucesivo la convergencia de una sucesión de funciones se entiende sólo en media. El teorema de Fisher – Fiesz es el análogo de la bien conocida condición necesaria y suficiente (criterio) de convergencia de Gauchy. El espacio de funciones, en el cual el criterio de Cauchy asegura la convergencia de una sucesión de funciones, se llama *completo*. Esto significa, *que el espacio de funciones de cuadrado sumable, en donde la convergencia se entiende en media, es completo.*

d) En la clase de funciones de cuadrado sumable se pueden realizar todas las construcciones y demostrar todas las proposiciones hechas en los apartados 1 – 10 del § 11, para funciones que tienen discontinuidades sólo en un número finito de puntos, de líneas o de superficies k-dimensionales ($k = 2, 3, \ldots, d-1$), cuando la integración se entendía según Cauchy. Además, se puede demostrar, que en esta clase los conceptos de sistema completo y cerrado de funciones ortogonales normalizadas coinciden totalmente. La demostración dada en el apartado 10 del § 11, de que un sistema completo es cerrado se extiende completamente a la clase considerada de funciones de cuadrado sumable. La afirmación de que *en esta clase un sistema de funciones ortogonales normalizadas que es cerrado es también completo*, se demuestra de la manera siguiente.

Supongamos que un sistema de funciones ortogonales normalizadas

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_k(P), \ldots \tag{4,20}$$

no es completo. Entonces existirá una función $f(P)$ de cuadrado sumable tal, que

$$\int f^2(P)\,dP - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 > 0, \tag{5,20}$$

en donde

$$a_k = \int f(P)\varphi_k(P)\,dP.$$

Consideremos la sucesión de sumas parciales de la serie

$$\sum_k a_k\varphi_k(P). \tag{6,20}$$

Esta satisface al criterio de convergencia de Cauchy, puesto que

$$\int \left[\sum_{k=m+1}^{m+n} a_k\varphi_k(P)\right]^2 dP = \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k^2,$$

y la serie numérica infinita $\sum a_k^2$ es convergente, por lo cual para esta última se cumple el criterio de Cauchy. Por esto, según el teorema de Fisher – Riesz, existe una función $\varphi(P)$ de cuadrado integrable, hacia la cual la serie (6,20) converge en media. Entonces, la función

$$f(P)-\varphi(P)$$

será ortogonal a todas las funciones $\varphi(P)$, y la integral de su cuadrado, que es igual al primer miembro de (5,20), será positiva. Por lo tanto, el sistema (4,20) no es cerrado.

e) Señalemos una propiedad importante más de las funciones de cuadrado sumable, que utilizaremos en lo sucesivo.

Para cualquier función $F(P)$ de cuadrado sumable en un conjunto medible G, y para cualquier $\varepsilon>0$ existe una función continua $f(P)$ tal, que

$$\int [F(P)-f(P)]^2\,dP<\varepsilon\ ^{*)}.$$

2. Al integrar una función según Lebesgue, los valores del subintegrando en un conjunto de medida 0 no influyen en el valor de esta integral. Puede considerarse inclusive que esta función no está definida en un conjunto de medida 0. Por eso, a todas las funciones que coinciden en un conjunto de medida completa, es decir, que difieren sólo en un conjunto de medida 0, en donde algunas de estas funciones pueden incluso no estar definidas, es natural considerarlas equivalentes y no diferenciarlas una de otra. Por eso, llama-

*) V. I. Smirnov, Curso de Matemáticas Superiores, t. V., Fizmatguiz, M., 1959, cap. II, § 3, p. 60; I. P. Natanson. Teoría de Funciones de Variable Real, 2ª ed., Fizmatguiz, M., 1957, cap. VII y XII.

remos solución de la ecuación integral

$$\varphi(P)=\lambda\int\limits_G K(P,Q)\varphi(Q)\,dQ \tag{7,20}$$

a cualquier función de cuadrado sumable que satisfaga a esta ecuación para casi todos los P.

La demostración de que para cierto λ real, en la clase de las funciones de cuadrado sumable, existe una solución no trivial de la ecuación integral (7,20) con núcleo real simétrico, se lleva a cabo por el mismo plan que fue admitido en el § 12. Por esto expondremos sólo aquellas partes de la demostración que se diferencien esencialmente de los correspondientes lugares del § 12. Supondremos que existe la integral

$$\int\int K^2(P,Q)\,dP\,dQ \tag{8,20}$$

extendida sobre el producto topológico de dos conjuntos medibles, iguales, G, a los cuales pertenecen los puntos P y Q. Por el teorema de Fubini, de esto se deduce que para casi todos los P existe la integral

$$\int K^2(P,Q)\,dQ$$

y, por lo tanto, para casi todo P existe la integral

$$\int K(P,Q)\varphi(Q)\,dQ$$

para cualquier función $\varphi(Q)$ de cuadrado sumable, ya que

$$|K(P,Q)\varphi(Q)|\leq\frac{K^2(P,Q)+\varphi^2(Q)}{2}.$$

Aquí, como en lo sucesivo, el símbolo $\int\int$ denota la integración sobre el producto topológico de dos conjuntos medibles, iguales, G, a los cuales pertenecen los puntos P y Q; el símbolo $\int$ denota la integración sobre el conjunto G.

Para cualquier función $\varphi(P)$ de cuadrado sumable existe la integral

$$\int\int K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)\, dP\, dQ$$

puesto que

$$|K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)| \leq \frac{1}{2}[K^2(P, Q) + \varphi^2(P)\varphi^2(Q)],$$

$$\int\int \varphi^2(P)\varphi^2(Q)\, dP\, dQ = \int \varphi^2(P)\, dP \cdot \int \varphi^2(Q)\, dQ.$$

En lo sucesivo consideraremos sólo nucleos $K(P, Q)$ simétricos, para los que existe la integral (8,20). En general, *en todo lo que sigue se considerarán sólo funciones de cuadrado integrable, según Lebesgue, en todo el conjunto G en que están definidas*. No volveremos a repetir esto cada vez.

3. El apartado 1 del § 12 se repite totalmente.

En lugar del teorema demostrado en el apartado 2 del § 12 demostraremos el siguiente:

Sea dada una familia H de funciones $h(P)$, para cada una de las cuales

$$\int h^2(P)\, dP \leq M^2, \tag{9,20}$$

$$M > 0,$$

en donde M es una constante, la misma para todas las funciones $h(P)$. Entonces, la familia $\sum$ de las funciones $\psi(P)$, definidas por la igualdad

$$\psi(P) = \int K(P, Q)h(Q)\, dQ,$$

es compacta. Esto significa que de cada conjunto infinito de tales funciones se puede extraer una sucesión convergente en media.

Demostración. Si $K(P, Q)$ es una función uniformemente continua cuando $P \in G$ y $Q \in G$, entonces, por el teorema demostrado en el apartado 2 del § 12, la familia de funciones $\varphi(P)$ es equicontinua y uniformemente acotada.

Según el teorema de Arzelá, la familia de funciones $\varphi(P)$ es compacta, o sea, de cualquier sucesión infinita de funciones $\varphi(P)$ puede extraerse una sucesión parcial uniformemente convergente y, por lo tanto, convergente en media. Empleando esta proposición, demostraremos la compacidad de la familia $\sum$ para un núcleo arbitrario $K(P, Q)$ de cuadrado sumable.

De acuerdo con la nota *c)* del apartado 1 del presente parágrafo, podemos construir una sucesión de funciones continuas

$$K_1(P, Q), K_2(P, Q), \ldots, K_n(P, Q), \ldots$$

tal que

$$\int\int [K(P, Q) - K_n(P, Q)]^2 \, dP \, dQ < \frac{1}{2^{2n}}, \qquad (10{,}20)$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Sea dada ahora una sucesión infinita de funciones

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P), \ldots \qquad (11{,}20)$$

de la familia $\sum$, obtenida por medio de la sucesión de funciones

$$h_1(P), h_2(P), \ldots, h_n(P), \ldots \qquad (12{,}20)$$

de la familia H, de tal modo que $\varphi_i = Kh_i$ (ver (2,6)).

Como $K_1(P, Q)$ es una función continua, de la sucesión (12,20) se puede extraer una subsucesión infinita

$$h_1^{(1)}(P), h_2^{(1)}(P), \ldots, h_n^{(1)}(P), \ldots \qquad (13,20)$$

tal, que la sucesión de funciones

$$K_1 h_1^{(1)}, K_1 h_2^{(1)}, \ldots, K_1 h_n^{(1)}, \ldots \qquad (14,20)$$

converge uniformemente y, por lo tanto, converge en media. Luego, de la sucesión (13,20) nuevamente extraemos una subsucesión infinita

$$h_1^{(2)}(P), h_2^{(2)}(P), \ldots, h_n^{(2)}(P), \ldots \qquad (15,20)$$

tal, que la sucesión

$$K_2 h_1^{(2)}, K_2 h_2^{(2)}, K_2 h_3^{(2)}, \ldots, K_2 h_n^{(2)}, \ldots$$

converge en media, etc.

Es fácil ver que la sucesión

$$h_1^{(1)}(P), h_2^{(2)}(P), \ldots, h_n^{(n)}(P) \qquad (16,20)$$

es tal, que para cualquier $K_m(P, Q)$, la sucesión

$$K_m h_1^{(1)}, K_m h_2^{(2)}, \ldots, K_m h_n^{(n)}, \ldots \qquad (17,20)$$

converge en media.

Demostremos ahora que la sucesión de funciones $\psi(P)$ de la familia $\sum$

$$K h_1^{(1)}, K h_2^{(2)}, \ldots, K h_n^{(n)}, \ldots,$$

que es una subsucesión de (11,20), también converge en media.

En efecto, por la desigualdad triangular (véase la pág. 83)

$$\begin{aligned} \| K h_m^{(m)} - K h_n^{(n)} \| \leq \| K h_m^{(m)} - K_p h_m^{(m)} \| + \\ + \| K_p h_m^{(m)} - K_p h_n^{(n)} \| + \| K_p h_n^{(n)} - K h_n^{(n)} \| . \end{aligned} \qquad (18,20)$$

De la condición (10,20) se deduce que p puede elegirse tan grande que $||Kh - K_p h||$ sea menor que cualquier $\varepsilon > 0$ para todas las funciones de la familia H. Es fácil convencerse de esto aplicando la desigualdad de Bunyakovski, ya que

$$\left(\int [K(P, Q) - K_p(P, Q)]h(Q)\, dQ\right)^2 \leq$$

$$\leq \int [K(P, Q) - K_p(P, Q)]^2\, dQ \int h^2(Q)\, dQ$$

y

$$||Kh - K_p h|| \leq$$

$$\leq M\left[\int\int (K(P,Q) - K_p(P,Q))^2\, dP\, dQ\right]^{\frac{1}{2}} \leq M \cdot \frac{1}{2p}.$$

Tomando p de este modo, podemos indicar un número N tal que, si h y m son mayores que N, se tiene

$$||K_p h_m^{(m)} - K_p h_n^{(n)}|| < \varepsilon,$$

puesto que la sucesión (17,20) converge en media. En este caso, el primer miembro de la desigualdad (18,20) es menor que 3ε. De este modo queda demostrado que la familia $\sum$ es compacta.

4. *La demostración de la existencia de valores propios finitos* para las ecuaciones integrales con núcleo simétrico $K(P, Q)$ de cuadrado sumable respecto al conjunto (P, Q), si G es acotado, se realiza de la misma manera que en el apartado 3 del § 12. La diferencia consiste sólo en lo siguiente.

a) La función $\varphi_{P_0}(P)$ se debe definir de tal forma que sea igual a 0 en todos los puntos, a excepción de la intersección del conjunto G con cierto cubo K_{P_0}, cuyo centro está situado en el punto P_0 y los lados son paralelos a los ejes coordenados. En esta intersección, la función $\varphi_{P_0}(P)$ debe ser igual a 1. Entonces, la hipótesis de que $\mu_M = \mu_m = 0$, nos lleva a la conclusión de que la integral

$$\int\int K(P, Q)\, dP\, dQ,$$

tomada sobre la intersección de $G \cdot G$ con cualquier cubo $2n$-dimensional en el espacio (P, Q), debe ser igual a 0, si las aristas de este cubo son paralelas a los ejes coordenados. Utilizando el apartado 1 *b)* del presente parágrafo, es fácil obtener de esto que $K(P, Q) = 0$ en casi todo el producto topológico del conjunto G por sí mismo (incluso si G no es una región).

b) La convergencia debe entenderse en todas partes como convergencia en media y, en correspondencia con esto, en lugar del teorema demostrado en el apartado 2 del § 12, debe aplicarse el teorema demostrado en el punto anterior del presente parágrafo.

c) Para cada valor propio existe sólo un número finito de funciones propias linealmente independientes, y los valores propios no pueden tener puntos de acumulación finitos. Esto puede demostrarse de la manera siguiente. Construyamos para el núcleo dado $K(P, Q)$ las sucesiones (6,13) y (7,13) de la misma manera que se hizo en el § 13. A priori, no excluiremos la posibilidad de que todos los miembros de la sucesión (7,13), a partir de uno de ellos, coincidan. Entonces, para cualquier m,

$$\int\int\left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP\, dQ =$$

$$= \int\int K^2(P, Q)\, dP\, dQ - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2} \geq 0.$$

De esto se deduce que la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}$$

es convergente, por lo cual $\lambda_i \to 0$ para $i \to \infty$.

Observación. De este modo, una ecuación integral con núcleo de cuadrado integrable posee no más de un conjunto numerable *) de valores propios y de funciones propias linealmente independientes. Este hecho es un caso particular de que cualquier sistema ortonormal de funciones S, definidas en una región finita, tiene potencia numerable o finita. En efecto, del teorema de Weierstrass se deduce fácilmente, que para cualquier función $f \in S$ existe un polinomio φ_f en las coordenadas con coeficientes racionales tal, que la norma de la diferencia $f - \varphi_f$ es menor que cualquier $\varepsilon > 0$ previamente asignado y, en particular, es menor que $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pero el conjunto de tales polinomios es numerable y, si S no fuese numerable, entonces existirían $f' \neq f''$ tales, que $\varphi_{f'} = \varphi_{f''}$. De esto, por la desigualdad triangular (véase el apartado 5 del § 11), la norma de la diferencia $f' - f''$ será menor que $\sqrt{2}$. Pero esto es imposible, ya que, como fácilmente se verifica, la norma de la diferencia entre dos funciones normalizadas ortogonales cualesquiera es igual a $\sqrt{2}$.

5. Los razonamientos de los § § 13 – 16 conservan totalmente su valor, si el conjunto G es acotado. Es necesario sólamente considerar en todas partes la convergencia media en lugar de la convergencia uniforme. Por ejemplo, *el teo-*

---

*) Esto significa que este conjunto es finito o numerable (N. del R. de la trad.).

rema de Hilbert – Schmidt afirma ahora la convergencia en media de la serie (3,14) hacia la función $f(P)$ intrínsecamente representable.

6. Es fácil demostrar todos los *teoremas de Fredholm* para las ecuaciones integrales (7,14) con núcleos simétricos $K(P, Q)$ del tipo considerado, si el conjunto G, por el cual se toma la integral, es acotado.

Para cualquier función $f(P)$ de cuadrado sumable del segundo miembro de la ecuación (7,14), se pueden formar los coeficientes de Fourier, utilizando el sistema de funciones propias ortonormales (6,13) del núcleo $K(P, Q)$. En virtud de la desigualdad de Bessel, la suma de los cuadrados de estos coeficientes es convergente. Aplicando el teorema de Fisher – Riesz, es fácil comprobar que, si λ no es igual a algún valor propio λ_i, la serie del segundo miembro de (10,14), para cualquier función $f(P)$ de cuadrado sumable, converge en media hacia cierta función $\varphi_0(P)$, también de cuadrado sumable. Entonces esta función $\varphi_0(P)$ satisface a la ecuación (7,14) en casi todos los puntos. Para verificar esto, obsérvese, ante todo, que, si los resultados de sustituir $\varphi_0(P)$ en ambos miembros de la ecuación (7,14) ($F_1(P)$ y $F_2(P)$, respectivamente) no coincidiesen en casi todos los puntos, entonces la integral del cuadrado de su diferencia no sería igual a 0. Demostremos que esto no puede ser. Para esto, en ambos miembros de la ecuación (7,14) sustituyamos $\varphi(P)$ por

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P).$$

Supongamos que los resultados de esta sustitución sean las funciones $F_1^{(n)}(P)$ y $F_2^{(n)}(P)$. Es evidente, que para n suficientemente grande, las normas (distancias cuadráticas medías) de las diferencias $F_1 - F_1^{(n)}$ y $F_2 - F_2^{(n)}$, que denotaremos por

$$|| F_1 - F_1^{(n)} || \quad \text{y} \quad || F_2 - F_2^{(n)} || \text{, respectivamente,}$$

serán arbitrariamente pequeñas. Aplicando la desigualdad triangular, de aquí obtenemos que no puede tener lugar la relación

$$|| F_1^{(n)} - F_2^{(n)} || \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

si

$$||F_1 - F_2|| \neq 0.$$

Pero, por otra parte,

$$F_2^{(n)}(P) =$$
$$= \lambda^2 \int K(P, Q) \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(Q)}{\lambda_i - \lambda} \, dQ + \lambda \int K(P, Q) f(Q) \, dQ + f(P).$$

Aplicando el teorema de Hilbert–Schmidt en su nuevo enunciado, y también el hecho de que φ_i son funciones propias del núcleo $K(P, Q)$, obtenemos de esto que, en casi todos los puntos,

$$F_2^{(n)}(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda_i} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda_i} f_i \varphi_i(P) + f(P) =$$
$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_i} f_i \varphi_i(P).$$

Por lo tanto, en casi todos los puntos

$$F_2^{(n)}(P) - F_1^{(n)}(P) = \lambda \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i} \,,$$

por lo cual,

$$||F_2^{(n)}(P) - F_1^{(n)}(P)|| = \lambda^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{f_i^2}{\lambda_i^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De este modo, la hipótesis de que $\varphi_0(P)$ no satisface en casi todos los puntos a la ecuación (7,14) nos ha llevado a una contradicción.

Por lo tanto, si λ no es igual a ninguno de los valores propios de la ecuación (7,14), entonces esta ecuación tiene solución para cualquier función $f(P)$. Esta solución es única. En efecto, si $\varphi_1(P)$ y $\varphi_2(P)$ fueran soluciones de la ecuación (7,14), entonces $\varphi_1(P)-\varphi_2(P)$ sería solución de la ecuación homogénea correspondiente y, contra lo supuesto, λ sería un valor propio. De este modo, el primer teorema de Fredholm queda demostrado.

Por la simetría del núcleo $K(P, Q)$, el segundo teorema de Fredholm es una consecuencia evidente de la nota *c)* del apartado 4.

Cuando λ coincide con uno de los valores λ_i, para la existencia de una solución de la ecuación (7,14), es necesario que $f(P)$ sea ortogonal a todas las funciones propias $\varphi_1^{(i)}(P), \ldots, \varphi_m^{(i)}(P)$, correspondientes a este λ_i, ya que entonces se debe tener que:

$$\int \varphi(P)\varphi_k^{(i)}(P)\, dP =$$

$$= \lambda_i \int\int K(P, Q)\varphi(Q)\varphi_k^{(i)}(P)\, dP\, dQ + \int f(P)\varphi_k^{(i)}(P)\, dP =$$

$$= \int \varphi(Q)\varphi_k^{(i)}(Q)\, dQ + \int f(P)\varphi_k^{(i)}(P)\, dP,$$

$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

Verifiquemos que esta condición es suficiente. Para esto, formemos la serie (10,14), haciendo que en los términos en que $\lambda = \lambda_i$ (y por eso $f_i = 0$) la relación $\frac{\lambda_i}{\lambda - \lambda_i}$ sea igual a cualquier número fijo α_i. Entonces, análogamente a lo anterior se verifica que la serie obtenida converge en media, y que su suma satisface a la ecuación (7,14) en casi todos los puntos. Al variar α_i tendremos todas las soluciones de la ecuación (7,14) (que se obtienen de una solución cualquiera, agregando todas las soluciones de la ecuación homogénea correspondiente). Con esto, queda demostrado el tercer teorema de Fredholm.