Capítulo III

# Problema del continuo y forcing

## 1. Problema; resultado; ideas

**1.1.** A Cantor le pertenecen dos ideas fundamentales en la teoría de conjuntos infinitos; el descubrimiento (¿o invención?) de la escala de sus potencias y la demostración del carácter ilimitado de la misma.

Recordemos que dos conjuntos $M$, $N$ se llaman *equipotentes* (inscripción: card $M$ = card $N$), si entre ellos existe una correspondencia biunívoca. Escribimos card $M \leqslant$ card $N$, si $M$ es equipotente a la parte de $N$. Decimos que $M$ y $N$ *son comparables*, si o bien card $M \leqslant$ card $N$, o bien card $N \leqslant$ card $M$. Escribimos card $M >$ card $N$, si card $M \geqslant$ card $N$, pero $M$ y $N$ no son equipotentes.

**1.2. Teorema (Cantor, Schröder, Bernstein, Zermelo).**

a) *Dos conjuntos cualesquiera son comparables. Si* card $M \leqslant$ card $N$ y card $N \leqslant$ card $M$ *simultáneamente, entonces* card $M$ = card $N$. *Hablando brevemente: las potencias están linealmente ordenadas.*

b) *Sea* $\mathcal{P}(M)$ *un conjunto de todas las partes (subconjuntos) de* $M$. *Entonces* card $\mathcal{P}(M) >$ card $M$. *En particular, no existe la potencia más grande.*

c) *En cualquier clase de potencias existe la mínima. Hablando brevemente: las potencias están bien ordenadas.*

DEMOSTRACIÓN. a) Sea $M$ equipotente a la parte $M' \subseteq N$ y $N$, equipotente a la parte $N_1 \subseteq \subseteq M \sim M'$. Identifiquemos $M$ con $M'$. Obtendremos tres conjuntos $N_1 \subseteq M \subseteq N$ y la aplicación biunívoca $f: N \to N_1$. Pero se ha de construir la aplicación biunívoca $g: N \to M$. He aquí su descripción explícita:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in f^n(N) \setminus f^n(M) \text{ para cierto } n \geqslant 0, \\ x & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

Aquí $f^n(y) = f(f \ldots f(y) \ldots)$ ($n$ veces); $f^n(N) = \{f^n(y) \setminus y \in N\}$.

Se deja al lector efectuar la verificación de las propiedades de $f$.

Para demostrar la comparabilidad de dos conjuntos cualesquiera basta establecer que cualquier conjunto puede estar bien ordenado, la comparabilidad de los conjuntos bien ordenados se infiere del lema 5 del apéndice para el cap. II.

Sea $M$ cierto conjunto. Elijamos para cada subconjunto $N \subseteq M$ no vacío su cierto elemento con $(N) \in N$. Llamemos *tolerable* (con respecto a $c$) la buena ordenación $<$ del subconjunto $M' \subseteq M$, si $c(M \setminus \hat{X}) = X$ para todos los $X \in M'$, donde $\hat{X} = \{Y \mid Y \in M', Y < X\}$.

Si $M' \neq M''$ son los subconjuntos $M$, para los cuales existen buenas ordenaciones tolerables, entonces uno de los mismos es el segmento inicial del segundo y las ordenaciones están concordadas.

En efecto, como se demuestra en el p. 7a del apéndice, el isomorfismo canónico de $f$, digamos, $M'$ con el segmento inicial $M''$ es el encaje idéntico: si $f(X) \neq X$ y $X$ es el mínimo con tal propiedad, entonces $f(\hat{X}) = \hat{X}$, $X = c(M \setminus \hat{X}) \Rightarrow X = c(M \setminus f(\hat{X})) = f(X)$ lo que es una contradicción.

Ahora se establece fácilmente que la misma unión $M'$ de todos los subconjuntos $M$ que tengan una ordenación tolerable con respecto a $c$ está tolerablemente ordenada y coincide con $M$, puesto que en el caso contrario se la podría encajar en $M' \cup \{c(M \setminus M')\}$.

De aquí, en particular, se sigue que cualquier conjunto es equipotente a cierto ordinal y, por consiguiente, al único cardinal. Eso justifica la notación card para la potencia y el uso de los cardinales como escala estándar de potencias (véase el apéndice, p. 11).

b) Como $\mathcal{P}(M)$ contiene todos los subconjuntos de un elemento $M$, card $\mathcal{P}(M) \geqslant$ card $M$. Además, ninguna aplicación $f: M \to \mathcal{P}(M)$ no puede ser biunívoca (ni siquiera aplicación sobre). En efecto, pongamos

$$N = \{z \mid z \notin f(z)\} \in \mathcal{P}(M)$$

y demostremos que $N$ no se encuentra en la imagen $f$. La suposición acerca de la existencia de $n \in M$ tal que $N = f(n)$ inmediatamente se reduce a la contradicción, si examinamos la posición de $n$ respecto de $N$:

$n \in N \Rightarrow n \in f(n) \Rightarrow n \notin N$ según la definición de $N$;

$n \notin N \Rightarrow n \notin f(n) \Rightarrow n \in N$ según la definición de $N$.

Eso es el célebre «proceso diagonal» de Cantor.

c) La buena ordenación de las potencias se establece simultáneamente con la comparabilidad en los primeros pasos de la teoría de los ordinales (véase el apéndice al cap. II).

**1.3.** OBSERVACIÓN. La referida demostración del lema acerca de la posibilidad de ordenar bien cualquier conjunto pertenece, en realidad, a Zermelo. La misma fue, probablemente, el motivo más serio para someter a fuerte crítica el axioma sobre la elección. En efecto, las representaciones intuitivas que siguen dicha demostración se reducen a la receta: sacar un elemento del conjunto $M$ tras otro hasta que todo el $M$ sea agotado. En tal forma el carácter inconcebible «físico» de la prescripción salta a los ojos, y a muchos contemporáneos toda la demostración les parecía no más que un truco. La proposición de sacar «primeramente» de cada subconjunto $N \subseteq M$ el elemento $c(N)$ provocó, por ejemplo, tal objeción de Lebesgue. Si los elementos escogidos no están dotados de ningunas propiedades especiales, entonces ¿cómo podemos estar seguros de que en el proceso de todo el razonamiento continuemos pensando en los mismos elementos?

En la actualidad los matemáticos trabajadores, a excepción de los especialistas en fundamentos de las matemáticas, casi no están propensos a percibir estas dudas.

Planteemos ahora la tarea principal de la cual nos ocuparemos en este capítulo. Escribiremos card $\mathcal{P}(M) = 2^{\mathrm{card}\, M}$ por la analogía con el caso finito. El continuo es $2^{\omega_0}$.

**1.4. Problema del continuo.** *¿Cuál es el lugar del continuo en la escala de potencias?*

Según el teorema 1.2 b) $2^{\omega_0} \geqslant \omega_0$. Por eso en todo caso $2^{\omega_0} \geqslant \omega_1$. Si, pues, $2^{\omega_0} > \omega_1, > \omega_2, \ldots, > \omega_n$ para $n$ cualquiera, entonces $2^{\omega_0} > \omega_{\omega_0}$, puesto que el continuo no puede ser unión del conjunto numerable de los subconjuntos de menor potencia (König).

**1.5. Hipótesis del continuo** (HC): $2^{\omega_0} = \omega_1$. La hipótesis generalizada del continuo afirma que $2^{\text{card } M}$ sigue directamente en pos de card $M$ para cualquier $M$ infinito. He aquí casi todos los conocimientos nuestros acerca de esto.

**1.6. Teorema.** a) *La negación de la hipótesis del continuo no puede ser deducida de los demás axiomas de la teoría de los conjuntos, si éstos no son contradictorios* (*Gödel*).

b) *La hipótesis del continuo no puede ser deducida de los demás axiomas de la teoría de los conjuntos, si éstos no son contradictorios* (*Cohen*).

Lo mismo es justo también para la hipótesis generalizada del continuo.

Si se acepta que los axiomas de la teoría de los conjuntos y los medios lógicos de deducción en el lenguaje $L_1$ Set que se sobreentienden en la formulación agotan de hecho el aparato demostrativo de las matemáticas actuales, se puede decir que el problema del continuo representa en sí un ejemplo de un problema absolutamente insoluble. Aunque el teorema de Gödel sobre la incompletitud brinde ejemplos concretos de opiniones insolubles en cualquier sistema formal con propiedades sensatas, éstos se resuelven de un modo «obvio» en cierto sistema superior. La situación con el problema del continuo tiene un aire mucho más difícil. Si se reconoce que dicho problema es comprensivo, se lo puede solucionar solamente por introducción de un nuevo principio de demostración. Aunque se discutían distintas posibilidades de ello, los nuevos axiomas de la teoría de los conjuntos propuestos no parecen ser suficientemente convincentes, ni, lo principal, bastante eficaces en las «grandes» matemáticas. En el transcurso de cien años después de la introducción de la inducción transfinita ningún nuevo método de la construcción de los conjuntos no se puso en circulación. Entretanto, la idea de demostración del teorema de Gödel 1.6 a) precisamente consiste en la verificación de lo que todos los métodos anteriores permiten construir no más que $\omega_1$ subconjuntos en la serie natural (o de números reales).

**1.7. Idea de Gödel.** Gödel examina las operaciones de la teoría de conjuntos principales: la formación del par, el producto, complemento, la suma, etc., y construye la clase de todos los conjuntos que se obtienen por iteración transfinita de estas operaciones partiendo de $\varnothing$. Tales conjuntos se denominan constructivos. De antemano totalmente no está claro si es constructivo todo conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$ o, más general, si es constructivo todo conjunto del universo $V$. (Resulta que este problema formalmente es tan insoluble como el del continuo.) No obstante, dentro de la clase de conjuntos constructivos el número de subconjuntos $\{0, 1, 2, \ldots\}$ resulta igual a $\omega_1$, porque, lo más probable, hemos omitido la masa de subconjuntos no constructivos. Al mismo tiempo, todos los axiomas de la teoría de los conjuntos limitados para esta clase resultan, en el sentido sensato de la palabra, ciertos al igual que todas las deducciones de los mismos. Por eso la negación de HC no es deductivo siendo irreal en este modelo.

En este libro no se expone la demostración de Gödel, véase, por ejemplo, [20].

**1.8. Idea de Cohen.** La exponemos a continuación en la variante de D. Scott y Solovey y, además, a base de un problema modal.

Discutiremos HC en la forma siguiente: *no existe ningún subconjunto de números reales R cuya potencia sea estrictamente intermedia entre las potencias* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *y* $R$.

En efecto, si $2^{\omega_0} > \omega_1$, entonces el conjunto de la potencia $\omega_1$ en $R$ tendría una potencia intermedia.

Para establecer que esta afirmación es indemostrable, lo que equivale al teorema de Cohen, basta construir un modelo de números reales, en el cual se cumplan todos los axiomas y corolarios de los mismos, mientras que exista el conjunto de la potencia intermedia.

De este modelo servirá el conjunto $\overline{R}$ de números aleatorios en el espacio probabilístico muy grande $\Omega$. Escogiendo $\Omega$ se puede hacer $\overline{R}$ tan grande que entre $\overline{N}$ (números enteros del modelo) y $\overline{R}$ (continuo del modelo) habrá un conjunto de potencia intermedia sumergido en $\overline{R}$ dentro del modelo.

Desde luego, la cosa no puede ser tan sencilla y a la ejecución del programa le ha de molestar algo. Molesta lo que casi todas las propiedades de $R$, incluso la mayoría de los axiomas, resultan falsos para $\overline{R}$, así que $\overline{R}$ no puede servir de modelo a $R$ en el sentido corriente de la palabra. El modo de vencer esta dificultad es el que constituye la idea principal de Cohen. Cohen reemplaza la propiedad de veracidad de la afirmación por otra, la cual denominaremos provisionalmente «veracidad» y la cual posee las cualidades formales imprescindibles. Precisamente, todos los axiomas de $R$ resultan «ciertos» en $\overline{\mathrm{R}}$, todas las deducciones de las afirmaciones «ciertas» según las reglas de la lógica conducen nuevamente a las afirmaciones «ciertas», y HC resulta no «cierta» y, por tanto, no deductiva de los axiomas.

Mostraremos más detalladamente, como se lo hace.

**1.9.** Sea $I$ un conjunto de potencia $> \omega_1$. Pongamos $\Omega = [0,\ 1]^I$ con medida de Lebesgue; $\overline{R}$ = conjunto de números aleatorios sobre

$\Omega$ = conjunto de funciones reales medibles sobre $\Omega$.

**1.10. Teorema.** a) *Para $\bar{R}$ son «ciertos» todos los axiomas de números reales y todas las conclusiones de los mismos.*

b) *La afirmación* de HC *no es* «cierta» *para $\bar{R}$.*

Propiedad: la afirmación $P$ acerca de los números aleatorios $\bar{x}, \bar{y}, \ldots \in \bar{R}$ «cierta» debe entenderse así:

si examinamos el punto $\omega = \Omega$, tomamos del mismo los valores $\bar{x}(\omega), \bar{y}(\omega), \ldots$ de los números aleatorios $\bar{x}, \bar{y}$ y formamos la afirmación $P_\omega$ acerca de estos números reales ordinarios, entonces para casi todos los $\omega \in \Omega$ (salvo el conjunto de medida 0) $P_\omega$ resultará cierta en el sentido corriente de la palabra.

Más breve: la «veracidad» es una veracidad a todas las pruebas con una probabilidad de unidad.

EJEMPLO. Supongamos que $P$ es una afirmación «en $R$ no existen divisores del cero», o sea, «si $x, y \in R$ son tales que $xy = 0$, entonces ora $x = 0$, ora $y = 0$. Entonces la afirmación «en $\bar{R}$ no existen divisores del cero», naturalmente, no es cierta. No obstante, la misma es «cierta», puesto que es cierta la afirmación: «si $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{R}$ son tales que $\overline{xy} = 0$, entonces para casi todos los $\omega \in \Omega$ ora $\bar{x}(\omega) = 0$, ora $\bar{y}(\omega) = 0$».

**1.11.** Para conferir a la definición de la «veracidad» un sentido exacto y aprender verificar con eficacia la «veracidad» de afirmaciones bastante complicadas, es necesario introducir prácticamente un lenguaje formal (en este caso, el lenguaje de la teoría de los números reales). Eso es un objeto matemático, y el teorema 1.10 en su formulación exacta será la afirmación acerca de este objeto y no de $R$ ni de $\bar{R}$.

El enlace de este lenguaje con $R$ se realiza a través del sistema de recetas no formales que permiten traducir al mismo los textos corrientes no formales acerca de $R$, y a través del sistema de teoremas los cuales sirven de argumentos a favor de la posibilidad de adecuación de tal traducción.

El papel de $\bar{R}$ se reducirá a la construcción auxiliar la cual se utilizará para determinar y calcular la función especial de la «veracidad» en las fórmulas del lenguaje.

Tal es el lugar de la lógica en el programa expuesto.

**1.12.** La demostración detallada del teorema 1.9 sería bastante larga y no trivial por varias causas. Ante todo, la descripción del lenguaje formal y de los axiomas de $R$ en ella por si mismo no puede ser demasiado corta. Luego se requiere verificar la «veracidad» de todos los axiomas y la no «veracidad» de HC, en total unados docenas de verificaciones cada una de las cuales es un cálculo inductivo con sumas infinitas y productos dentro del álgebra booleana de los conjuntos medibles en $\Omega$. Las dificultades más serias, no obstante, están relacionadas con lo que el sentido de todas las afirmaciones acerca de $R$ en $\bar{R}$ cambia fuertemente, y no siempre hacia el lado cómodo.

Ilustraremos el lado cualitativo de la cosa tratando explicar, por qué HC no es «cierta» y por qué esto no es trivial.

Como ya se ha dicho, queremos construir el subconjunto $\bar{M}$ en $\bar{R}$ de potencia intermedia entre la potencia de $N$ y la de $\bar{R}$. Para eso se puede proceder así: supongamos que para cualquier $i \in I$ el número aleatorio $\bar{x}_i$: $[0, 1]^I \to [0, 1]$ es la $i$-ésima proyección. Elijamos el subconjunto

$J \subset I$ tal que $\omega_0 <$ card $J <$ card $I$ (eso es posible, si $I$ es grande) y pongamos

$$\overline{M} = \{x_j \mid j \in J\} \subset \overline{R}.$$

Entonces en el sentido habitual de la palabra card $\overline{N} <$ card $\overline{M} <$ card $\overline{R}$. No obstante, tenemos que demostrar que las afirmaciones respectivas son «ciertas» en nuestro sentido de Pickwick. Pero en dicho sentido el papel de los números enteros lo desempeñan los números aleatorios «localmente enteros» (enteros con probabilidad de 1 para todas las pruebas), cuya potencia puede ser mucho mayor que $\omega_0$. Por eso la estimación inferior necesaria card $\overline{M}$ resulta bruscamente elevada. Análogamente la descripción de $\overline{M}$ dada por nosotros en términos ingenuos, después de su formalización y descifrado ulterior para $\overline{R}$, comienza a adquirir otro sentido y conduce al conjunto mucho mayor que el «verdadero» $\overline{M}$, por eso no está claro que se conserve la desigualdad superior para card $\overline{\overline{M}}$. Lo que todo, al fin y al cabo, resulta en orden parece ser un milagro.

El plan de la parte restante del capítulo es tal como viene a continuación. En los párrafos 2 y 3 exponemos (con reducciones) esta variante recortada del teorema acerca de la no deductividad de HC en el lenguaje de los números reales de segundo orden. El lector al cual le interesa la demostración completa puede comenzar directamente por el § 4, donde se introduce un «universo de conjuntos aleatorios» booleano que sustituye el $V$. En los párrafos 5—7 se verifica la «veracidad» de los axiomas de Zermelo—Fraenkel y en el § 8, la «falsedad» de HC.

## 2. Lenguaje del análisis real

**2.1.** En este párrafo describiremos el lenguaje formal orientado hacia la teoría de los números reales. Eso quiere decir, en particular, que las variables $x$, $y$, $z$, . . . se considerarán como nombres de números reales. No obstante, al tratar de escribir en el lenguaje de primer orden las afirmaciones que nos interesan, por ejemplo, la hipótesis del continuo HC o siquiera el axioma de completitud (que distingue el conjunto de todos los números reales respecto de los racionales), nos daremos cuenta que somos incapaces de hacerlo. En efecto, en estas formulaciones se trata de los subconjuntos arbitrarios (o relaciones de un lugar) de los números reales mientras que en el lenguaje de primer orden no hay símbolos para las relaciones variables: compárese el p. 3.17 del cap. I.

Por eso tendremos que examinar el lenguaje de segundo orden $L_2$ Real, el más económico, en el cual se expresan los axiomas y HC. Al describir el lenguaje seremos breves, notando en lo fundamental la específica relacionada con la orientación y las peculiaridades del segundo orden.

**2.2. Lenguaje $L_2$** Real. El alfabeto consta de los símbolos de las variables $x$, $y$, $z$, . . ., variables del rango 1: $f$, $g$, $h$, . . ., constantes $\overline{0}$, $\overline{1}$, operaciones $+$, $\cdot$ del rango 2; relaciones $=$, $\leqslant$ del rango 2; conectivas, cuantificadores, paréntesis, comas, los cuales son los mismos que en los lenguajes $\mathscr{L}_1$.

Son *términos* $x$, $y$, $z$, . . . y $\overline{0}$, $\overline{1}$, así como $f(t)$, $t_1 \cdot t_2$ y $t_1 + t_2$, si $f$ es el símbolo de la función; $t$, $t_1$ y $t_2$ son términos. Los términos son nombres de los números reales.

*Las formulas elementales*: $t_1 = t_2$ y $t_1 \leqslant t_2$, donde $t_i$ son términos.

*Fórmulas* se determinan inductivamente, al igual que en los lenguajes de $\mathcal{L}_1$, con el siguiente complemento: $\forall f\,(Q)$ y $\exists f\,(Q)$ son fórmulas si $Q$ es una fórmula y $f$, un símbolo de la función variable.

Los conceptos de la entrada libre de la variable ($x$ o $f$) de una fórmula cerrada y otros se transponen obviamente a nuestro lenguaje. Los procedimientos de la escritura abreviada son los mismos que han sido demostrados en el cap. I. La interpretación estándar de las fórmulas del lenguaje que se sobreentiende debe ser evidente a partir de las definiciones y ejemplos de las fórmulas que vienen a continuación.

**2.3.** *Fórmula $Z(y)$: «$y$ es un número entero».* El modo de escribirlo, probablemente, no es del todo obivo: escribimos «$y$ se puede obtener agregando (o restando) 1 a 0» o «cualquier función $f$ con período de 1 la cual se anula en cero, se anula en $y$», lo que brinda

$$Z(y)\colon \forall f\,((f(0) = 0 \wedge \forall x\,(f(x) = f(x+1))) \to$$
$$\to f(y) = 0).$$

**2.4.** *Fórmula de HC «cualquier subconjunto en $R$ ora es equipotente a $R$, ora numerable, ora finito».*

La formulación verbal preparada: «para cualquier conjunto de ceros de cualquier función $h$ ora existe una función $g$ que lo aplica sobre todos los $R$, ora existe una función $f$ que aplica números enteros sobre él».

Fórmula:

$$\text{HC}\colon \forall h\,(\exists g \forall y \exists x\,(h(x) = 0 \wedge y =$$
$$= g(x)) \vee \exists f \forall y\,(h(y) = 0 \to \exists x\,(Z(x) \wedge y =$$
$$= f(x)))).$$

Fíjense, $Z(x)$ entra en HC eomo parte integrante.

Escribamos aún el axioma de completitud:

2.5. *Fórmula C*: «cualquier subconjunto acotado superiormente en $R$ (conjunto de los valores de la función $f$) tiene una cota superior ($z$):

$$\forall f\,(\exists y\,\forall x\,(f\,(x) \leqslant y \rightarrow \exists z\,\forall y\,(\forall x\,(f\,(x) \leqslant y) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow z \leqslant y)).$$

Todas las demás fórmulas que nos interesan se escriben aún más sencillamente y no requieren comentarios especiales.

Ahora definamos exactamente la propiedad de la «veracidad» de una fórmula cerrada del lenguaje $L_2$ Real descrito informalmente en el § 1. Subrayamos que esta definición no es absoluta sino que depende de la elección del espacio probabilístico fundamental $\Omega$, el cual se utiliza para construir el «modelo» de los números reales.

**2.6. Algebra de los valores de veracidad.** Al igual que en el § 1, pongamos:

$I$ es cierto conjunto;

$\Omega = [0, 1]^I$, con medida de Lebesgue;

$B$, álgebra de conjuntos medibles $\Omega$ según el módulo de los subconjuntos de la medida de 0;

0, clase del conjunto vacío en $B$;

1, clase de $\Omega$ en $B$.

En el álgebra $B$ van definidas las operaciones siguientes:

$a'$ es un «complemento» para el elemento $a \in B$;

$a \wedge b$, «intersección» de los elementos $a, b \in B$;

$a \vee b$, «unión» de los elementos $a, b \in B$,

las cuales satisfacen las identidades corrientes y definen en $B$ la estructura del álgebra booleana. Escribimos $a \leqslant b$, si $a \wedge b = a$.

Es más, las operaciones de intersección y de producto se definen complementariamente de modo unívoco en *familias infinitas* de elementos y continuan satisfaciendo las identidades corrientes que se cumplen en el álgebra de todos los subconjuntos de cualquier conjunto. No lo verificaremos.

Notemos sólo que aquí es esencial la identificación de los conjuntos «según el módulo de cero» y que las identidades del tipo $A \bmod 0 \wedge B \bmod 0 = (A \cap B) \bmod 0$ ya no se transponen sobre el caso de familias infinitas.

Por último, $B$ satisface la *condición de numerabilidad*: si $\bigvee a_\alpha = 1$ y $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ para $\alpha \neq \beta$, entonces $a_\alpha = 0$ pero no más que para el conjunto numerable de índices $\alpha$. Eso se deduce de la positividad y aditividad de la medida de Lebesgue.

Hablando técnicamente, $B$ es un *álgebra booleana completa con condición de numerabilidad*. Su origen exacto y la presencia sobre ella de la medida desempeñan un papel menos importante.

**2.7. Conjunto de interpretación.** Ahora introduciremos el conjunto grande $\overline{M}$, cada punto del cual $\xi$ consistirá en atribuir ciertos valores a todos los símbolos del alfabeto del lenguaje $L_2$Real. Después de fijar $\xi$ cada fórmula del lenguaje resultará un enunciado concreto acerca de las funciones medibles (magnitudes aleatorias) de $\Omega$ y las funcionales sobre éstas (compárese el § 2 del cap. II).

Pongamos para eso:

$\overline{R}$, es un conjunto de las funciones medibles reales de $\Omega$;

$\overline{R}^{(1)}$, conjunto de distinta clase de aplicaciones $\overline{R} \xrightarrow{\overline{f}} \overline{R}$ que satisface la condición

$$\forall x,\ y \in \overline{R} \text{ conjunto } \{w \in \Omega \mid \overline{x}(w) = \overline{y}(w)\} \times$$
$$\times \bmod 0 \leqslant \{w \in \Omega \mid \overline{f}(\overline{x})(w) =$$
$$= \overline{f}(\overline{y})(w)\} \bmod 0.$$

El sentido intuitivo de la definición $\overline{R}^{(1)}$ es el siguiente. Si excluimos de ella la condición «mod 0», entonces la exigencia significará sólo que el valor de la magnitud aleatoria $\overline{f}\,(\overline{x})$ en cada verificación deberá definirse por el valor de $\overline{x}$ durante esta prueba. Desde luego, ésta es una exigencia muy natural si queremos que $\overline{f}$ transformen de modo adecuado las propiedades de las funciones reales ordinarias en el sentido del § 1. La adición de «mod 0» debilita esta condición hasta el requerimiento «con probabilidad condicional de 1».

Ahora volveremos al conjunto $\overline{M}$: un punto $\xi \in \overline{M}$ está en la elección

$x^{\xi} \in \overline{R}$ para cada símbolo de la variable $x$;

$f^{\xi} \in \overline{R}^{(1)}$ para cada símbolo de la función variable $f$.

Describamos la interpretación de las expresiones del lenguaje que responde a la elección de $\xi$.

a) *Términos.* Sea $t$ un término, $\xi \in \overline{M}$. Entonces $t^{\xi} \in \overline{R}$ es una magnitud aleatoria que se determina por el obvio proceso inductivo.

b) *Función de veracidad* $\| \quad \|$ *en las fórmulas elementales.* Sea $P$ una fórmula elemental $t_1 \leqslant t_2$ o $t_1 = t_2$. Se denomina su valor de veracidad en el punto $\xi \in \overline{M}$ el elemento del álgebra $B$, el cual se define así:

$$\| t_1 \leqslant t_2 \| (\xi) = \{w \in \Omega \mid t_1^{\xi} (w)\} \text{ mod } 0.$$

Una definición análoga concierne a $t_1 = t_2$.

c) *Función de veracidad* $\| \quad \|$ *en el caso general.* La definición general es inductiva. Para la unión mediante las conectivas se utilizan las mismas fórmulas que en el p. 5.7 del cap. II:

$$\| \neg P \| = \| P \|', \quad \| P \vee Q \| = \| P \| \vee \| Q \|,$$

$$\| P \wedge Q \| = \| P \| \wedge \| Q \|,$$

$$\| P \rightarrow Q \| = \| P \|' \vee \| Q \|, \quad \| P \leftrightarrow Q \| =$$

$$= (\| P \| \wedge \| Q \|) \vee (\| P \|' \wedge \| Q \|').$$

En estas cinco fórmulas, para abreviar, hemos omitido la indicación de $\xi$. Por último,

$\| \forall x P \| (\xi) = \bigwedge\limits_{\xi'} \| P \| (\xi')$ (por todos los $\xi'$ que difieren de $\xi$ sólo por la variación de $x$);

$\| \exists x P \| (\xi) = \bigwedge\limits_{\xi'} \| P \| (\xi')$ (por los mismos $\xi'$)

y análogamente con los cuantificadores por las funciones variables.

Intuitivamente el valor de la función de veracidad de la afirmación acerca de los números aleatorios representa en sí un conjunto de pruebas mod 0 a las cuales dicha afirmación se hace cierta como hecho acerca de los números reales.

**2.8. Lema.** *Si $P$ es una fórmula cerrada, entonces $\| P \| (\xi)$ no depende de la elección de $\xi \in \overline{M}$ y adquiere solamente los valores de* 0 *ó* 1.

(Se establece por un razonamiento inductivo no complicado a lo largo de la descripción de $P$. Más cómodo es demostrar el hecho general: si $P$ es cualquier fórmula, y $\xi$ y $\xi'$ no se diferencian en las variables que entran libremente en $P$, entonces $\| P \| (\xi) = \| P \| (\xi')$: compárese la proposición 2.10 del cap. II).

Este valor general $\| P \| (\xi)$ lo podemos denotar simplemente por $\| P \|$. Ahora estamos capaces de formular la definición fundamental de este párrafo.

**2.9. Definición.** *Se llama «cierta» la fórmula $P$ del lenguaje* $L_2$Real, *si $\| P \| (\xi) = 1$ para todos los $\xi \in \overline{M}$.*

## 3. La no deductividad de la hipótesis del continuo en $L_2$ Real

**3.1. Lema fundamental.**

a) *Las reglas de inferencia conservan su «veracidad»;*

b) *los axiomas lógicos de primer orden y sus variantes* en $L_2$Real *son «ciertos»;*

c) *los axiomas especiales del lenguaje* $L_2$Real *son «ciertos»;*

d) *HC no es «cierta», si* card $I > \omega_1$.

De aquí se deduce

**3.2. Teorema.** *HC no se deduce de los axiomas del lenguaje* $L_2$Real.

En este párrafo aduciremos los fragmentos de la demostración del lema principal, los cuales son esenciales también para el teorema «verdadero» de Cohen y no sólo para nuestro problema modelo. Notemos que el teorema 3.2 es más débil que el de Cohen, ya que el lenguaje $L_2$Real tiene mucho menos medios expresivos que el de la teoría de los conjuntos. Aunque en él se formula la hipótesis del continuo, en virtud de los resultados generales de Gödel no hay ningunos motivos de esperar que su demostración imaginaria también está obligada a tolerar la formalización en este lenguaje. Por ejemplo, para la deducción podría ser necesaria la introducción de funcionales de las funciones, funcionales de las funcionales, etc. El lenguaje de la teoría de los conjuntos, al cual volveremos en el § 4, tiene medios para examinar simultáneamente todos estos niveles finitos y hasta transfinitos.

**3.3.** DEMOSTRACION 3.1a. Si $\| P \| = 1$ y $\| P \to Q \| = 1$, entonces $\| P \|' = 0$ y $\| P \|' \vee \vee \| Q \| = 1$, de donde $\| Q \| = 1$.

Si $\| P \| = 1$, entonces $\| P \| (\xi) = 1$ para todos los $\xi \in \overrightarrow{M}$, pero entonces ($\xi'$ recorre todas las variaciones de $\xi$ por $x$):

$$\| \forall xP \| (\xi) = \bigwedge_{\xi'} \| P \| (\xi') = \bigwedge_{\xi'} 1 = 1.$$

De forma análoga se analiza Gen por las funciones.

**3.4.** DEMOSTRACIÓN 3.1b. (esbozo).

*Tautologías.* Su «veracidad» queda demostrada en el § 5 del cap. II.

*Axiomas con cuantificadores.* La demostración se obtiene por inducción a lo largo de la descripción de las fórmulas que entran en los esquemas de los axiomas y es bien rectilínea, por eso la omitimos.

**3.5.** DEMOSTRACIÓN 3.1c (esbozo). Nos limitaremos a indicar la lista de axiomas y dar breves comentarios.

*Axiomas especiales de la teoría de los conjuntos*: son axiomas de igualdad y (esquema de los) axiomas de elección:

$$AB\colon \forall x \exists y P(x, y) \to \exists f \forall x P(x, f(x)),$$

donde $P$ es cualquier fórmula que no tiene variables libres, salvo $x$ e $y$, e $y$ no acota $f$ en $P$.

*Axiomas especiales de la teoría de los campos*: son axiomas de los grupos aditivo, multiplicativo y de distributividad de la adición con respecto a la multiplicación.

*Axiomas especiales del orden:*

$$x \leqslant y \vee y \leqslant x; \ (x \leqslant y \wedge y \leqslant x) \leftrightarrow x = y;$$
$$x \leqslant y \to (x + z \leqslant y + z); \ (x \leqslant y \wedge \bar{0} \leqslant z) \to$$
$$\to xz \leqslant yz.$$

*Axioma de completitud* (p. 2.5).

Esfuerzos máximos los requiere la verificación de la «veracidad» de los axiomas de elección y de completitud. El carácter de cálculos en este caso, sin embargo, es análogo a los de la demostración de «falsedad» de la HC, los cuales realizaremos a continuación. Por eso omitimos aquí estas verificaciones.

El primer axioma de igualdad es trivial. El segundo se verifica primeramente para las fórmulas elementales $P$ y luego se realiza una inducción por la longitud de la descripción de $P$. Los razonamientos son bastante minuciosos pero sencillos.

Los axiomas del campo ordenado se verifican sin dificultad. Limitémonos a un ejemplo: «el número no nulo tiene un inverso»:

$$\| \forall x (\neg (x = \overline{0}) \rightarrow \exists y (xy = \overline{1})) \| =$$
$$= \bigwedge_{x \in \overline{R}} (\| \overline{x} = 0 \| \vee \bigvee_{\overline{y} \in \overline{R}} \| \overline{x}\overline{y} = 1 \| ).$$

Para verificar que este valor es igual a 1 basta establecerlo para cada término con valor fijo de $\overline{x} \in \overline{R}$ para lo cual, por su parte, basta construir por $\overline{x}$ una magnitud aleatoria $\overline{y} \in \overline{R}$ tal que $\| \overline{x} = 0 \| \vee \| \overline{xy} = 1 \| = 1$. Para eso pongamos

$$\overline{y}(w) = \begin{cases} \overline{x}(w)^{-1}, & \text{si } \overline{x}(w) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \overline{x}(w) = 0. \end{cases}$$

**3.6.** DEMOSTRACIÓN 3.1d. Recordemos primero que forma tiene HC:

$$\forall h\, (\exists g \forall y \exists x\, (h(x) = 0 \wedge y = g(x)) \vee$$
$$\vee \exists f \forall y\, (h(y) = 0 \rightarrow \exists x\, (Z(x) \wedge y = f(x)))).$$

Denotemos por $P_1$, $P_2$ la primera y segunda alternativas en esta fórmula: HC tiene forma de $\forall h\, (P_1 \vee P_2)$. Queremos demostrar que para cualquier punto $\xi \in \overline{M}$ tenemos

$$\| \forall h\, (P_1 \vee P_2) \| (\xi) = 0.$$

De acuerdo con la definición en el p. 2.7

$$\| \forall h\, (P_1 \vee P_2) \| (\xi) = \bigwedge_{\xi'} (\| P_1 \| (\xi') \vee P_2 (\xi') \|),$$

donde $\xi'$ recorre todas las variaciones de $\xi$ por $h$. Para verificar que el valor es igual a 0 basta establecer la existencia del punto $\xi'$ tal que $\| P_2 \|(\xi') = \| P_2 \|(\xi') = 0$. Por cuanto en $P_1$ y $P_2$ todas las variables, excepto $h$, son enlazadas, la determinación de $\xi'$ equivale a la elección de $h^{\xi'} = \overline{h} \in \overline{R}^{(1)}$. Señalaremos $\overline{h}$ explícitamente: será la función, cuyo «conjunto de ceros tiene una potencia intermedia».

Para este fin, al igual que en el § 1, fijamos el subconjunto $J \subset I$ de potencia estrictamente intermedia entre $\omega_0$ y card I. Recordemos que $\overline{x}_i \in \overline{R}$ para cada $i \in I$ es la función «$i$-ésima coordenada».

Luego, para cada magnitud $\overline{x} \in \overline{R}$ aleatoria eligiremos un conjunto $\Omega(\overline{x}) \leqslant \Omega$ tal que

$$\bigvee_{j \in J} \| \overline{x} = \overline{x}_j \| = \Omega(\overline{x}) \bmod 0$$

(aquí se utiliza la completitud de $B$). Por último, definamos $\overline{h} \in \overline{R}^{(1)}$ poniendo para cada $\overline{x} \in \overline{R}$ y $w \in \Omega$:

$$\overline{h}(\overline{x})(w) = \begin{cases} 0, & \text{si } w \in \Omega(\overline{x}), \\ 1 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

**3.7. Afirmación acerca de la corrección.**

a) *$\overline{h}(\overline{x})$ como función de $w$ (siendo fijo $\overline{x}$) es medible, así que $\overline{h}$ aplica $\overline{R}$ en $\overline{R}$.*

b) *Para cada $\overline{x} \in \overline{R}$ tenemos*

$$\| \overline{h}(\overline{x}) = 0 \| = \bigvee_{j \in J} \| \overline{x} = \overline{x}_j \|.$$

c) $\overline{h} \in \overline{R}^{(1)}$ (véase el p. 4.2), *ya que existe un punto $\xi' \in \overline{M}$ para el cual $h^{\xi'} = \overline{h}$:*

DEMOSTRACIÓN a) $\bar{h}(\bar{x})$ adquiere sobre $\Omega$ sólo dos valores: 0 y 1, y los conjuntos del nivel de estos valores son medibles según la definición y la propiedad de la completitud de $B$.

b) Es evidente de la definición.

c) Hemos de verificar que para todos los $\bar{x}$, $\bar{y} \in \bar{R}$ tenemos

$$\{w \in \Omega \mid \bar{x}(w) = \bar{y}(w)\} \bmod 0 \leqslant \mid w \in \Omega \mid \bar{h}(\bar{x})(w) = \bar{h}(\bar{y})(w)\} \bmod 0.$$

Demostremos que el conjunto de puntos $w \in \Omega$, para los cuales simultáneamente $\bar{x}(w) = \bar{y}(w)$ y $\bar{h}(\bar{x})(\bar{w}) \neq \bar{h}(\bar{y})(w)$, tiene una medida 0.

Basta examinar el caso $\bar{h}(\bar{x})(w) = 0$, $\bar{h}(\bar{y})(w) = 1$, ó sea, establecer que

$$\| \bar{x} = \bar{y} \| \wedge \| \bar{h}(\bar{x}) = 0 \| \wedge \| \bar{h}(\bar{y}) = 1 \| = 0.$$

Escribamos el segundo factor en forma de $\bigvee\limits_{j \in J} \| \bar{x} = \bar{x}_j \|$ (véase la afirmación 3.7b) y apliquemos a éste y al primer factor la regla de la distributividad (se aprovecha la completitud de $B$). Además, tomemos en consideración que $\| \bar{x} = \bar{y} \| \wedge \| \bar{x} = \bar{x}_j \| \leqslant \| \bar{y} = \bar{x}_j \|$. Entonces obtendremos

$$\|\bar{x} = \bar{y}\| \wedge \|\bar{h}(\bar{x}) = 0\| \leqslant \|\bigvee_{j \in J} \|\bar{y} = \bar{x}_j\| = \|\bar{h}(\bar{y}) = 0\|,$$

de donde sigue lo requerido.

EXPLICACIÓN La elección de $\bar{h}$ es un lugar esencial de la demostración y lo queremos motivar. Recordemos que $h$ es el nombre de la función cuya potencia del conjunto de ceros nos interesa. La elección de la $\bar{h}$ concreta para «refutar» HC se realiza de modo que entre «casi siempre ceros» de $\overline{h}$ haya elementos del conjunto $\{\overline{x}_j \mid j \in J\}$, el cual tiene una potencia intermedia en el sentido ingenuo de la palabra (compárese el § 1). No obstante, $\overline{h}$ no puede ser una aplicación cualquiera de $\overline{R}$ en $\overline{R}$: se la ha superpuesto la fuerte acotación $\overline{h} \in \overline{R}^{(1)}$. Por eso juntamente con todas las $\overline{x}_j$ en el conjunto de ceros $\overline{h}$ casi siempre pueda resultar inevitable incluir aún más cualesquier $\overline{y} \in \overline{R}$, así como «incluir parcialmente» cualesquier $z \in \overline{R}$. La última expresión es una intención de transmitir la posibilidad de que $\| \overline{h}(z) = 0 \|$ no sea 0 ni 1, así que $\overline{z}$ es el cero de $\overline{h}$ con «cierta probabilidad».

De este modo, el «conjunto de ceros» $\overline{h}$ puede resultar mayor que lo queremos, así que es cosa natural esperar dificultades en la demostración de lo que no se lo puede aplicar sobre todos los $\overline{R}$ (alternativa $P_1$). Parecía que la circunstancia haga trivial la refutación de la alternativa $P_2$ (no se puede aplicar $Z$ sobre el conjunto de ceros), sin embargo ¡y eso no es justo! Como ya notamos, resultará que $\| Z(\overline{x}) \| = 1$ para muchas $\overline{x}$ que no son funciones de valores enteros continuas sobre $\Omega$, además, $\| Z(\overline{x}) \| = 0$, 1 aún para $\overline{x}$ cualesquiera, así que el «conjunto de números enteros» en nuestro modelo creció bruscamente.

Ultima observación: en nuestra discusión en realidad se originó el concepto del «conjunto $B$-aleatorio», el cual será el central en la exposición ulterior (véase el § 4). Precisamente, el «conjunto de ceros $\overline{h}$» es aleatorio en el sentido de que para cada $\overline{z} \in \overline{R}$ a la afirmación «$\overline{z} \in$ $\in$ (ceros $\overline{h}$)» se le atribuye naturalmente el valor booleano de veracidad $\| \overline{h}(\overline{z}) = 0 \|$.

Volvamos ahora a la demostración interrumpida de que $\| \mathrm{IIC} \| = 0$.

**3.8.** DEMOSTRACIÓN. $\| P_1 \| (\xi') = 0$. De acuerdo con las reglas de cálculo de la función de veracidad hallamos

$$\| P_1 \| (\xi') = \bigvee_{\bar{g}} \bigwedge_{\bar{y}} \bigvee_{\bar{x}} \{ \| \bar{h}(\bar{x}) = 0 \| \wedge \| \bar{y} = \bar{g}(\bar{x}) \| \}$$

($\bar{h}$ está definida arriba. $\bar{g}$ recorre todos los elementos de $\bar{R}^{(1)}$ y $\bar{x}$, $\bar{y}$ son todos los elementos de $\bar{R}$). Supondremos que $\| P_1 \| (\xi') = 0$ y llegaremos a la contradicción. Denotemos ese valor por $\bigvee_{\bar{g}} a(\bar{g})$.

Si el mismo $\neq 0$, entonces $a(\bar{g}) \neq 0$ para alguna función concreta $\bar{g} \in \bar{R}^{(1)}$. Elijámosla y pongamos

$$a = \bigwedge_{\bar{y}} \bigvee_{\bar{x}} (\bigvee_{j \in J} \| \bar{x} = \bar{x}_j \| \wedge \| \bar{y} = \bar{g}(\bar{x}) \|.$$

Aquí $\bigvee_j$ apariciό como una sustitución de $\| \bar{h}(\bar{x}) = 0 \|$ en virtud de 3.7b. Luego $\| \bar{x} = \bar{x}_j \| \wedge \| \bar{y} = \bar{g}(\bar{x}) \| \leqslant \| \bar{y} = \bar{g}(\bar{x}_j) \|$. Haciendo uso de esto y de la distributividad, hallamos

$$a \leqslant \bigwedge_{\bar{y}} \bigvee_{j \in J} \| \bar{y} = \bar{g}(\bar{x}_j) \|.$$

En particular, para cada $\bar{x}_i$ en lugar de $\bar{y}$

$$a \leqslant \bigvee_{j \in J} \| \bar{x}_i = \bar{g}(\bar{x}_j) \|.$$

Si, como lo hemos supuesto, $a \neq 0$, entonces para cada $i$ se hallará $j(i) \in J$ tal que

$$\| \bar{x}_j = \bar{g}(\bar{x}_{j(i)}) \| \neq 0.$$

Por cuanto $I$ es innumerable y card $J <$ $<$ card $I$, ha de existir un índice $j_0 \in J$ tal que $j_0 = j(i)$ para todos los $i$ del subconjunto innumerable $I_0 \in J$. No obstante, eso contradice la condición de numerabilidad para $\overline{B}$, porque los términos de la familia $\| \overline{x}_i = \overline{g}(\overline{x}_{j_0}) \|$ $(i \in I_0)$ no se intersecan dos a dos. En efecto,

$$\| \overline{x}_{i_1} = \overline{g}(\overline{x}_{j_0}) \| \wedge \| \overline{x}_{i_2} = \overline{g}(\overline{x}_{j_0}) \| \leqslant \| \overline{x}_{i_1} = \overline{x}_{i_2} \| = 0,$$

si $i_1 \neq i_2$.

Préstese la atención cuan paralelo es ese razonamiento al «ingenuo» del § 1. La función $\overline{g}$, según se supone, aplica los ceros $\overline{h}$ sobre $\overline{R}$ «con probabilidad no nula», pero es poco probable que se pueda formular verbalmente el sentido exacto de los cálculos.

**Cálculo de** $\| Z(y) \|$. La fórmula $Z(y)$, «$y$ es un número entero», viene escrita en el p. 2.3. Como la misma entra en $P_2$, el cálculo de $\| Z(y) \|$ es necesario para calcular $\| P_2 \|$.

**3.9. Lema.** *Sea* $\eta \in \overline{M}$, $y^\eta = \overline{y} \in \overline{R}$. Entonces $\| Z(y) \| (\eta) = \bigvee_{n \in Z} \| \overline{y} = n \| = \{ w \in \Omega \mid \overline{y}(w) \in$ $\in Z \}$ mod 0.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que establecer que

$$\bigvee_{\overline{f}} (\| \overline{f}(0) = 0 \|') \vee (\bigvee_{\overline{x}} \| \overline{f}(\overline{x}) =$$

$$= \overline{f}(\overline{x} + 1) \|' \vee \| \overline{f}(\overline{y}) = 0 \| = \bigvee_{n \in Z} \| \overline{y} = n \|.$$

Verifiquemos por turno la desigualdad por ambos lados.

DESIGUALDAD $\leqslant$. Basta hallar la función concreta $\overline{f} \in \overline{R}^{(1)}$, para la cual el correspondiente término del primer miembro se contenga en el segundo.

Definamos $\overline{f}$ poniendo $\overline{f}(\overline{x})(w) = \text{sen}^2 \pi \overline{x}(w)$ (en vez de $\text{sen}^2 \pi z$ se puede tomar cualquier función $R \to R$ medible con período de 1 y ceros sólo en los puntos enteros). Es fácil ver que $\overline{f}(\overline{x}) \in \overline{R}$ y $\overline{f} \in R^{(1)}$. Entonces $\|\overline{f}(0) = 0\|' = 0$ y $\|\overline{f}(\overline{x}) = f(\overline{x}+1)\|' = 0$. Por eso es necesario sólo verificar que

$$\|\operatorname{sen}^2 \pi\overline{y} = 0\| \leqslant \bigvee_{n \in Z} \|\overline{y} = n\|,$$

y eso es evidente.

DESIGUALDAD $\geqslant$. Basta verificar que para cualesquier valores fijos $n \in Z$, $\overline{f} \in \overline{R}^{(1)}$, $\bar{y} \in \overline{R}$ tenemos

$$\|\bar{y} = n\| \leqslant b \vee c,$$

donde

$$b = \|\overline{f}(0) = 0\|' \vee (\bigvee_{\overline{x}} \|\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x}+1)\|');$$

$$c = \|\overline{f}(\overline{y}) = 0\|.$$

Pero la desigualdad $a \leqslant b \vee c$ equivale a que $a \wedge c' \leqslant b$. Luego, en nuestra situación

$$a \wedge c' = \|\bar{y} = n\| \wedge \|\overline{f}(\bar{y}) = 0\|' \leqslant \|\overline{f}(n) = 0\|'$$

($n$ bajo el signo de $\overline{f}$ es una magnitud aleatoria constante siempre igual a $n$). Por eso basta cerciorarse de que

$$\|\overline{f}(n) = 0\|' \leqslant \|\overline{f}(0) = 0\|' \vee (\bigvee_{\overline{x}} \|\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x}+1)\|')$$

o pasando a los complementos, de que

$$\|\overline{f}(n) = 0\| \geqslant \|\overline{f}(0) = 0\| \wedge (\bigwedge_{\overline{x}} \|\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x}+1)\|).$$

Aumentaremos sólo el miembro derecho si dejamos en él sólo los términos que responden a $\bar{x} = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, pero la intersección de estos términos, probablemente, sea igual a $\| f(0) = 0 \| \wedge \| f(0) = \bar{f}(1) = \ldots = \bar{f}(n) \| \leqslant$ $\leqslant \| \bar{f}(n) = 0 \|$.

**3.10.** DEMOSTRACIÓN de $\| P_2 \| (\xi') = 0$. Según las reglas del cálculo de $\| P_2 \|$, tomando en cuenta el lema anterior, hallamos

$$\| P_2 \| (\xi') = \bigvee_{\bar{f}} \bigwedge_{\bar{y}} ( \| \bar{h}(\bar{y}) = 0 \|' \vee \bigvee_{\bar{x}} (\bigvee_{n} ( \| \bar{x} =$$
$$= n \| \wedge \| \bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) \| ))).$$

Como $\bar{f} \in \bar{R}^{(1)}$, tenemos $\| \bar{x} = n \| \leqslant \| \bar{f}(\bar{x}) =$ $= \bar{f}(n) \|$, así que

$$\| \bar{x} = n \| \wedge \| y = \bar{f}(\bar{x}) \| \leqslant \| y = \bar{f}(n) \|.$$

Luego, basta demostrar que el término que responde a cualquier elección concreta de $\bar{f}$ es igual a 0. Supongamos que eso no es así y llegaremos a la contradicción. Supongamos que $a \neq 0$ es un término que responde a $\bar{f}$. Según lo dicho

$$a \leqslant \bigwedge_{y} ( \| \bar{h}(\bar{y}) = 0 \|' \vee \bigvee_{n} \| \bar{y} = \bar{f}(n) \| ).$$

En particular, para cada $j \in J$ debemos tener (con $\bar{x}_j$ en lugar de $\bar{y}$):

$$a \leqslant \bigvee_{n} \| \bar{x}_j = \bar{f}(n) \|$$

(tomar en consideración que $\| \bar{h}(\bar{x}_j) = 0 \|' = 0$ en virtud de 5.7b). Quiere decir, que para cada $j$ ha de hallarse un número entero $n(j)$ tal que $\| \bar{x}_j = \bar{f}(n(j)) \| \neq 0$. Como $J$ es innumerable, existen $n_0$ y el subconjunto innumerable $J_0 \subsetneq J$

de tales $j_0$ que $n(j_0) = n_0$ para todos los $j_0 \in \in J_0$. Entonces $\| \bar{x}_j = \bar{f}(n_0) \|$, $j \in J_0$ forman el conjunto innumerable de elementos de $B$ no nulos que no se intersecan dos a dos. Eso contradice la condición de numerabilidad para $B$.

## 4. Universo sobre el álgebra booleana

**4.1.** En este párrafo fijamos cierta álgebra booleana completa $B$ (véase el p. 2.6) y construiremos sobre ella el universo de «conjuntos $B$-aleatorios». El universo resultará el modelo para los axiomas de Zermelo—Fraenkel en el mismo sentido generalizado, en el cual los números aleatorios de $\bar{R}$ han servido de modelo a los números reales de $R$ en el § 3. Verificaremos la «veracidad» de todos los axiomas de $L_1$Set en los §§ 5—7 y luego la «falsedad» de la hipótesis del continuo para la conveniente elección de $B$ en el § 8.

Los objetos de $V^B$ se denotarán por las mayúsculas $X$, $Y$, $Z$. Juntamente con cada dos objetos serán definidos los elementos $\| X \in Y \| \in B$ e $\| Y = X \| \in B$. Su sentido intuitivo es tal: si $B$ es el álgebra de conjuntos medibles del espacio probabilístico, entonces $\| X \in Y \|$ es el conjunto máximo, sobre el cual «$X$ es elemento de $Y$ con la probabilidad de unidad». Como en el caso general las medidas probabilísticas no juegan ningún papel, llamaremos «probabilidades» simplemente los elementos de $B$ y entonces $\| X \in Y \|$ es simplemente una probabilidad de inclusión $X$ en $Y$.

La construcción de las definiciones no es trivial, puesto que queremos conservar la «veracidad» del axioma de extensión. Si un conjunto aleatorio ha de definirse unívocamente por sus elementos (también aleatorios), en el sentido generalizado al menos, entonces no puede ser «demasiado» aleatorio: véase el p. 4.3.

Vamos a considerar que el álgebra $B$ como conjnuto es un elemento del universo $V$ de von Neumann. En tal caso todos los objetos de $V^B$ también serán elementos de $V$, y las construcciones que necesitamos podremos formalizar usando los medios de $L_1$Set. Eso en principio permite aceptar un punto de vista más formalístico que nuestro; entonces la demostración de la independencia de HC que se expone a continuación puede ser considerada como una guía para construir una variante mucho más sintáctica aprovechando la «interpretación interna» del lenguaje $L_1$Set en el mismo. La suposición acerca del carácter no contradictorio de los axiomas de Zermelo—Fraenkel en la formulación del teorema 1.6 adquiere en este caso un sentido de precaución razonable, ya que este carácter no contradictorio no puede ser establecido con los medios del propio lenguaje (Gödel). En nuestra exposición esta cláusula es pura hipocresía, ya que la «existencia» del universo $V$ aceptada por nosotros el cual es un modelo para los axiomas, es la que «demuestra» su carácter no contradictorio: compárese el apéndice, p. 1.8.

**4.2. Construcción de $V^B$.** Construiremos para cada ordinal $\alpha$ un conjunto $V_\alpha^B$ mediante la recursión transfinita por $\alpha$ y luego pondremos $V^B = \bigcup\limits_\alpha V_\alpha^B$. Origen de la recursión: $V_\alpha^B = \varnothing$.

*Suposición inductiva*:

Para el ordinal $\alpha \geqslant 1$ está definido el conjunto $V_\alpha^B$;

para cada elemento de $X \in V_\alpha^B$ está definido el subconjunto $D(X) \subseteq V_\alpha^B$ (su sentido inductivo se explicará a continuación;

para cada par de elementos $X, Y \in V_\alpha^B$ están definidas las «funciones booleanas de veracidad» $\| X \in Y \| \in B$, $\| X = Y \| \in B$ las cuales intuitivamente se han de imaginar como una «probabilidad de que $X$ sea un elemento de $Y$» y «probabilidad de que $X$ coincida con $Y$», respectivamente.

Estos datos, según se supone, satisfacen las condiciones siguientes:

a) si $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha$, entonces $V_{\beta_1}^B \subseteq V_{\beta_2}^B$;

b) si $\beta < \alpha$, $X \in V_{\beta+1}^B \setminus V_\beta^B$, entonces $D(X) = V_\beta^B$;

$$c_1) \; \| X \in Y \| = \bigvee_{Z \in D(Y)} (\| X = Z \| \wedge \| Z \in Y \|). \qquad (1)_\alpha$$

La condición $(1)_\alpha$ es una reflexión de la exigencia de que resulte «cierta» la siguiente fórmula de la teoría de conjuntos que se deduce fácilmente de los axiomas:

$$x \in y \leftrightarrow \exists z\, (x = z \wedge z \in y).$$

$$c_2) \; \| X = Y \| = (\bigwedge_{Z \in D(X)} \| Z \in X \|' \vee \| Z \in Y \|) \wedge$$

$$\wedge (\bigwedge_{Z \in D(Y)} \| Z \in Y \|' \vee \| Z \in X \|). \qquad (2)_\alpha$$

La condición $(2)_\alpha$ es una reflexión de la «veracidad» que se deduce de la fórmula

$$x = y \leftrightarrow (z \in x \rightarrow z \in y) \wedge (z \in y \rightarrow z \in x).$$

Notemos que en este nivel no es del todo claro por qué, digamos, en $(1)_\alpha$ nos hemos limitado sólo a los $Z$ que están contenidos en $D(Y)$, pareciera ser cosa natural verificar en general todos los $Z$. Más tarde veremos que la fórmula queda justa si la unión booleana se tomará por todos los $Z$.

Con eso terminamos la descripción de los datos para $V_\alpha^B$.

Ahora indicaremos una construcción recursiva explícita de $V_\alpha^B$ y los datos enlazados con él.

Definición de $V_{\alpha+1}^B$ y de $D$. Pongamos $V_{\alpha+1}^B = V_\alpha^B \cup V_{\alpha+1}^{B*}$, donde $V_{\alpha+1}^{B*}$ consta de distinta clase de funciones $Z$ con el campo de definición de $V_\alpha^B$ y el de valores de $\subseteq B$, que satisfacen la «condición de extensionalidad» siguiente:

para todos los $X, Y \in V_\alpha^B$, $\| X = Y \| \wedge Z(X) = \| X = Y \| \wedge Z(Y)$. (3)

Un poco más a continuación definiremos $\| X \in Z \| = Z(X)$ para $X \in V_\alpha^B$, $Z \in V_{\alpha+1}^B \setminus V_\alpha^B$; por eso (3), como más arriba, puede ser interpretado como reflexión de la «veracidad» de la fórmula

$$(x = y) \wedge (x \in z) \leftrightarrow (x = y) \wedge (y \in z).$$

Compárense también los comentarios en el p. 2.7 acerca de la definición de $\overline{R}^{(1)}$.

Los elementos $V_{\alpha+1}^B \setminus V_\alpha^B$ los llamaremos *nuevos* (del rango $\alpha$), y los $V_\alpha^B$, *viejos*. Pongamos $D(Z) = V_\alpha^B$, si $Z$ es nuevo.

*Definición de las funciones booleanas de veracidad.* En los pares de elementos viejos estas funciones ya están definidas. Pongamos a continuación:

$\| X \in Y \| = Y(X)$, si $X$ es viejo e $Y$, nuevo; (4)

$$\| X = Y \| = \Big( \bigwedge_{Z \in D(X)} \| Z \in X \|' \vee \| Z \in Y \| \Big) \wedge$$
$$\wedge \Big( \bigwedge_{Z \in D(Y)} \| Z \in Y \|' \vee \| Z \in X \| \Big). \quad (5)$$

La fórmula (5) está cumplida automáticamente si ambos $X$ e $Y$ son viejos en virtud de $(2)_\alpha$; en los demás casos define de modo unívoco $\| X = Y \|$ tomando en cuenta (4) y lo que $Z$ en (5) recorre sólo los elementos viejos.

Por último, pongamos

$$\| X \in Y \| = \bigvee_{Z \in D(Y)} \| X = Z \| \wedge \| Z \in Y \|, \qquad (6)$$

si $X$ es un elemento nuevo e $Y$, cualquiera. El segundo miembro se define unívocamente con la ayuda de (4) y (5), puesto que $D(Y) \subseteq V_\alpha^B$.

Las fórmulas (4) y (6) muestran para los $X$ nuevos e $Y$ viejos lo siguiente. Como primera aproximación podemos considerar que el conjunto aleatorio $Y$ del rango $\alpha$ «consta» de los conjuntos $Z$ de rango menor que entran en $Y$ con las probabilidades $Y(Z)$, las cuales pueden ser elegidas con un grado de arbitrariedad considerablemente menor subordinándose solamente a la condición de extensionalidad (3).

Pero luego resulta que debemos «incluir» automáticamente en $Y$ nuevos y nuevos elementos $X$ con probabilidades que ya se prescriben por la fórmula (6). Las condiciones (3) y (6) significan que nuestros conjuntos no pueden ser del todo aleatorios.

Definición de $V_\alpha^B$ y de otros datos para los ordinales límite $\alpha$. Ponemos simplemente $V_\alpha^B = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^B$, y todos los demás datos ya están construidos.

**4.3. Verificación de la corrección de las definiciones.** Tenemos que verificar $(1)_{\alpha+1}$ y $(2)_{\alpha+1}$: las propiedades de 4.2a y b, al pasar de $\alpha$ a $\alpha+1$, por lo visto, se conservan. Por su parte, la identidad única y no del todo obvia se obtiene, si en $(1)_{\alpha+1}$ se toma $X$ por viejo e $Y$ por nuevo:

$$Y(X) = \bigvee_{Z \in V_\alpha^B} (\| X = Z \| \wedge Y(Z)).$$

Se verifica así. La desigualdad $\geqslant$ se obtiene si apuntamos el segundo miembro en forma de $V_Z (\| X = Z \| \wedge Y (X))$ con ayuda de (3). La desigualdad $\leqslant$ se obtiene si consideramos el término con $Z = X$ y si tomamos en cuenta que $\| X = X \| = 1$ para todos los $X$ (inducción ligera por $\alpha$).

En eso queda terminada la construcción del universo booleano.

**4.4. Ejemplos y observaciones.** Examinemos varios casos particulares de nuestras construcciones para aclarar su estructura.

a) Es obvio que $V_1^B = \{\varnothing\}$ ya que existe la única función «vacía» cuyo campo de definición es el subconjunto $V_0^B = \varnothing$. Calculemos $V_2^B = V_1^B \cup V_2^{B*}$. Denotaremos por $\{\varnothing\}_b \in V_2^{B*}$ la función en el conjunto $V_1^B$ de un elemento que adquiere el valor $b \in B$. Todas ellas son extensionales, así que

$$V_2^B = \{\varnothing, \{\varnothing\}_b \text{ para todos los } b \in B\}.$$

De (4) se sigue que

$$\| \varnothing \in \{\varnothing\}_b \| = b.$$

De (5) se ve que

$$\| \varnothing = \{\varnothing\}_b \| = b'.$$

Intuitivamente estas fórmulas significan que $\{\varnothing\}_b$ consta de un elemento $\varnothing$ «sobre $b$» y está vació fuera de $b$. Aplicando de nuevo (5), hallamos

$$\| \{\varnothing\}_a = \{\varnothing\}_b \| = (a' \vee b) \wedge (a \vee b') = \\ = (a \wedge b) \vee (a' \wedge b').$$

De este modo, $\{\varnothing\}_a$ y $\{\varnothing\}_b$ coinciden allí, donde ora ambos son vacíos ora ambos constan de un elemento $\varnothing$, de acuerdo con la intuición.

Aplicando (6), hallamos

$$\| \{\varnothing\}_a \in \{\varnothing\}_b \| = \| \{\varnothing\}_a =$$
$$= \varnothing \| \wedge \| \varnothing \in \{\varnothing\}_b \| = a' \wedge b$$

(la única posible inclusión del tipo $\varnothing \in \{\varnothing\}$ tiene lugar allí, donde $\{\varnothing\}_a$ es vacío y $\{\varnothing\}_b$, no vacío). Sea, por último, $X \in V_3^{B*}$ cierta función extensional sobre el subconjunto $V_2^B$ con valores en $B$. Entonces, según (6)

$$\| X \in \{\varnothing\}_b \| = \| X = \varnothing \| \wedge \| \varnothing \in \{\varnothing\}_b \| =$$
$$= \| X = \varnothing \| \wedge b$$

y en virtud de (5)

$$\| X = \varnothing \| = (\bigwedge_{a \in B} \| \{\varnothing\}_a \in X \|') \wedge \| \varnothing \in X \|' =$$
$$= (\bigvee_{a \in B} \| \{\varnothing\}_a \in X \| \vee \| \varnothing \in X \|)'.$$

De este modo, $\| X = \varnothing \|$ significa intuitivamente complemento al portador de $X$ en $B$, y $\| X \in \{\varnothing\}_b \|$ es un conjunto, donde simultáneamente $X$ es vacío y $\{\varnothing\}_b$ no es vacío de nuevo conforme con la fórmula corriente $\varnothing \in \{\varnothing\}$. Eso muestra, cómo los nuevos objetos de $X$ pueden resultar elementos aleatorios de los viejos con probabilidad no nula.

b) Examinemos el caso $B = \{0, 1\}$. El espacio probabilístico respectivo es de un punto, y nuestros conjuntos aleatorios deben hacerse determinados. Y eso sucede: el universo $V^B$ se aplica en forma natural sobre el universo de von Neumann $V$ de modo que si denotamos por $\tilde{X} \in V$ la imagen $X \in V^B$, entonces para todos los $X$, $Y$ se cumplen las condiciones:

$$\| X \in Y \| = 1 \iff \tilde{X} \in \tilde{Y};\ \| X = Y \| =$$
$$= 1 \iff \tilde{X} = \tilde{Y}.$$

NB: $\| \varnothing = \{\varnothing\}_0 \| = 1$, pero $\varnothing \neq \{\varnothing\}_0$.

Para la construcción de esta aplicación pongamos $\tilde{\varnothing} = \varnothing$, $\{\varnothing\}^{\sim} = \{\varnothing\}$. Luego, habiendo supuesto que la aplicación $V_\alpha^{\{0,1\}} \to V_\alpha$ con las propiedades necesarias ya está construida, la continuaremos hasta $\alpha + 1$. Con este fin al nuevo elemento $X \in V_\alpha^{\{0,1\}}$ le pondremos en correspondencia primeramente el subconjunto $V_\alpha^{\{0,1\}}$, en el cual $X$ adquiere el valor 1, y luego la imagen de este subconjunto en $V_\alpha$, o sea, el elemento $\mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$: según la definición, éste será $\tilde{X}$.

La verificación de las propiedades de esta aplicación se ofrece al lector.

c) *Funciones de veracidad booleanas de las fórmulas del lenguaje* $\mathrm{L_1}$ Set. Las determinaremos por el modelo del § 2. Introduzcamos una clase de interpretación $\overline{M}$: cada punto $\xi \in \overline{M}$ le pone en correspondencia a cualquier símbolo de la variable $x$ del lenguaje $\mathrm{L_1}$ Set cierto objeto $x^\xi = X$ del universo $V^B$. Consideraremos aún que cualquier punto $\xi$ aplica el símbolo del lenguaje $\varnothing$ en el conjunto vacío $\varnothing = V_0^B$.

Si $P$ es una fórmula elemental de $x \in y$ ó de $x = y$ del lenguaje $\mathrm{L_1}$ Set, entonces los valores $\| P \| (\xi)$ se definen como $\| x^\xi \in y^\xi \| \in B$ y $\| x^\xi = y^\xi \| \in B$, respectivamente.

Para las demás fórmulas de $P$ del lenguaje los valores $\| P \| (\xi)$ se definen luego inductivamente, exactamente con las mismas fórmulas que vienen en el p. 2.7. Sólo se ha de notar que a pesar de que en los cálculos con los cuantificadores uno se vea obligado a examinar las expresiones $\bigvee_\xi a_\xi$, $\bigwedge_\xi a_\xi$ según las familias numeradas *con la clase* $\overrightarrow{M}$, *distintos* elementos de la familia forman *el subconjunto* $B$, así que estas expresiones tienen sentido. Llamaremos «cierta» la fórmula $P$ (en el modelo $V^B$), si $\| P \| (\xi) = 1$ para todos los $\xi$

y «falsa», si $\| P \| (\xi) = 0$ para todos los $\xi$.

Al igual que en el § 3 del cap. II se verifica que todas las tautologías y axiomas lógicos con los cuantificadores son «ciertos» y que las reglas de inferencia conservan la «veracidad». Por eso la parte restante del trabajo que ha quedada para nosotros consiste en verificar la «veracidad» de los axiomas de Zermelo—Fraenkel (para cualquier $B$) y la «falsedad» de la hipótesis del continuo (para la $B$ conveniente).

## 5. El axioma de extensionalidad es «cierto»

Comenzaremos por la demostración de varias correlaciones que enlazan las funciones de veracidad. Ante todo, de la fórmula (5), § 4 se ve que $\| X = Y \| = \| Y = X \|$ y $\| X = X \| = 1$. El lema siguiente exige un trabajo más detallado.

**5.1. Lema.** *Para $X, Y, Z \in V^B$ cualesquiera tenemos*

$$\| X = Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| X = Z \|; \tag{1}$$

$$\| X = Y \| \wedge \| Y \in Z \| \leqslant \| X \in Z \|; \tag{2}$$

$$\| X \in Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| X \in Z \|. \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN a) (3) *es justa si $X \in D(Y)$*. En efecto, en este caso según la fórmula (5) del § 4

$$\| Y = Z \| \leqslant \| X \in Y \|' \vee \| X \in Z \|,$$

de donde, intersecando con $\| X \in Y \|$, hallamos lo requerido.

b) (3) *es justa si $X, Y \in V^B_\alpha$, $Z \in V^B_{\alpha+1}$*. En efecto, elijamos $U \in D(Y)$ y apliquemos el caso particular ya demostrado (3):

$$\| U \in Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| U \in Z \|.$$

Tomemos la intersección booleana de los dos miembros con $\| X = U \|$ y la suma booleana por todos los $U \in D(Y)$; luego aplicaremos al primer miembro la fórmula (6) del § 4 y haremos uso de la distributividad. Eso brinda

$$\| X \in Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \bigvee_{U \in D(Y)} \| X = U \| \wedge \| U \in Z \| \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_{U \in D(Z) = V^B_\alpha} \| X = U \| \wedge \| U \in Z \| = \| X \in Z \|.$$

c) (1) *es justa en* $V^B_{\alpha+1}$, *si* (3) *es justa en* $V^B_\alpha$. Examinemos el elemento $U \in D(X) \subseteq V^B_\alpha$. Según el p. a)

$$\| U \in X \| \wedge \| X = Y \| \leqslant \| U \in Y \|.$$

Tomemos la intersección booleana con $\| Y = Z \|$:

$$\| U \in X \| \wedge \| X = Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| U \in Y \| \wedge \| Y = Z \|.$$

El segundo miembro es siempre $\leqslant \| U \in Z \|$: si $Y \in V^B_\alpha$, entonces según el p. b) o la suposición inductiva; pero si $Y \in V^B_{\alpha+1}$ es nuevo, entonces según el p. a).

Pues bien, hemos establecido que para todos los $X, Y, Z \in V^B_{\alpha+1}$, $U \in D(X)$

$$\| U \in X \| \wedge \| X = Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| U \in Z \|.$$

Aprovechando el hecho de que en cualquier álgebra booleana de $a \wedge b \leqslant c$ sigue $b \leqslant a' \vee c$, obtenemos de aquí

$$\| X = Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| U \in X \|' \vee \| U \in Z \|$$

y luego

$$\| X = Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \bigwedge_{U \in D(X)} \| U \in X \|' \vee \| U \in Z \|.$$

Cambiando aquí de lugares $X$ y $Z$, obtenemos para todos los $U \in D(Z)$

$$\| Z = Y \| \wedge \| Y = X \| \leqslant \bigwedge_{U \in D(Z)} \| U \in Z \|' \vee \| U \in X \|.$$

De las dos últimas fórmulas y de (5), por lo visto, sigue (3).

d) (2) *es justa en* $V^B_{\alpha+1}$ *si* (1) *es justa en* $V^B_{\alpha+1}$. En efecto, sea $U \in D(Z)$. Según (1)

$$\| X = Y \| \wedge \| Y = U \| \leqslant \| X = U \|.$$

Tomemos la intersección booleana con $\| U \in Z \|$ y la suma booleana por todos los $U \in D(Z)$:

$$\| X = Y \| \wedge \Big( \bigvee_{U \in D(Z)} \| U \in Z \| \wedge \| Y = U \| \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_{U \in D(Z)} \| X = U \| \wedge \| U \in Z \|.$$

Aplicando $(1)_{\alpha+1}$ del § 4 obtenemos (2).

e) (3) *es justa en* $V^B_{\alpha+1}$, *si* (2) *es justa en* $V^B_{\alpha+1}$. En efecto, sea $U \in D(Y)$. Según el p. a)

$$\| U \in Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| U \in Z \|.$$

Al tomar el producto booleano con $\| X = U \|$ y al aplicar (2) al segundo miembro, obtenemos

$$\| X = U \| \wedge \| U \in Y \| \wedge \| Y = Z \| \leqslant \| X \in Z \|.$$

Por último, construyamos la suma booleana por todos los $U \in D(Y)$ y, al aprovechar (1) del § 4, obtendremos (3).

Por lo visto, todo lo demostrado asegure el paso inductivo de $\alpha$ a $\alpha + 1$.

Ahora ya podemos establecer el resultado principal de este párrafo.

**5.2. Proposición.** *El axioma de extensión*

$$x = y \leftrightarrow \forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

*es «cierto».*

DEMOSTRACIÓN. La fórmula $\| P \leftrightarrow Q \| (\xi) = 1$ equivale a $\| P \| (\xi) = \| Q \| (\xi)$. Por eso basta demostrar que para todos los $X, Y \in V^B$

$$\| X = Y \| = \bigwedge_{Z \in V^B} (\| Z \in X \| \vee \| Z \in Y \|') \wedge$$

$$\wedge (\| Z \in X \|' \vee \| Z \in Y \|).$$

La desigualdad $\geqslant$ sigue inmediatamente de la fórmula (2) del § 4. Para obtener la desigualdad inversa apuntaremos dos corolarios evidentes de (3) del lema 5.1:

$$\| X = Y \| \leqslant \| Z \in X \| \vee \| Z \in Y \|'; \quad \| X = Y \| \leqslant$$

$$\leqslant \| Z \in X \|' \vee \| Z \in Y \|$$

y tomaremos el producto booleano por todos los $Z$. La proposición queda demostrada.

Notemos que de (2) sigue *la propiedad* general *de la extensionalidad*: para todos los $X, Y, Z \in V^B$

$$\| X = Y \| \wedge \| Y \in Z \| = \| X = Y \| \wedge \| X \in Z \|.$$

**5.3. Corolario.** *Los axiomas de igualdad son «ciertos» en el lenguaje* $L_1$Set.

En efecto (véase la proposición 4.6, cap. II), ellos se deducen del axioma de extensión, de las fórmulas «ciertas» $x = x$ y $x = y \leftrightarrow \forall\ z\, (x \in z \leftrightarrow y \in z)$ con ayuda de las reglas estándares de inferencia, las cuales conservan la «veracidad».

5.4. **Nota.** En la mayoría de los cálculos para nosotros serán importantes solamente los valores $\| X \in Y \|$ y $\| X = Y \|$, y no la definición exacta de los objetos $X, Y$. Notemos en relación con eso que las siguientes dos relaciones binarias en $V^B$:

a) $\| X = Y \| = 1$,

b) $\forall Z \in V^B, \quad \| Z \in X \| = \| Z \in Y \|$,

coinciden (corolario ligero (2) y axiomas de extensión). Llamaremos *equivalentes* tales $X, Y$ y escribiremos $X \sim Y$.

## 6. Los axiomas de par, de la suma, del grado y de la regularidad son «ciertos»

6.1. Los cálculos del párrafo anterior muestran que el trabajo principal para asegurar la «veracidad» del axioma de extensión estaba encajado en la definición del universo $V^B$. Las fórmulas explícitas para el cálculo recursivo $\| X \in Y \|$ y $\| X = Y \|$ reflejaban tantas propiedades particulares de inclusión y de igualdad que su unión garantizaba el cumplimiento del axioma general.

La verificación de una serie de otros axiomas requiere en realidad que en $V^B$ se definan los análogos de la operaciones existentes en $V$, del par desordenado, del conjunto de subconjuntos, etc. Estas operaciones pueden ser definidas por medio de las fórmulas del lenguaje $L_1$ Set. No obstante, recordemos que si $P(x)$ es una fórmula con la única variable libre $x$, entonces la población $x^\xi \in V$- para las cuales $P(x^\xi)$ es cierta, forma, hablando en gene, ral, no más que una clase y no un conjunto.

Resulta cómodo introducir un concepto auxiliar de «clase aleatoria» también con respecto a $V^B$. Luego, las construcciones subsiguientes de las operaciones en $V^B$ se efectúan por medio de dos procedimientos: primeramente, de significado de la operación sirve la clase aleatoria, la cual ya después se «identifica» con el conjunto aleatorio por medio de un razonamiento aislado.

6.2. **Definición.** a) *Se denomina clase aleatoria cualquier función $W$ sobre $V^B$ con valores en $B$, la cual satisface la condición de extensionalidad siguiente:*

$W(X) \wedge \| X = Y \| = W(Y) \wedge \| X = Y \|$ para todos los $X, Y \in V^B$.

b) *Se denomina equivalente al conjunto aleatorio $Z \in V^B$ (inscripción $W \sim Z$) la clase aleatoria $W$ si $W(X) = \| X \in Z \|$ para todos los $X \in V^B$.*

**6.3. Ejemplos y notas.** a) Para cualquier conjunto $Z$ aleatorio la función $X \mid\longrightarrow \| X \in Z \|$ es extensional en virtud de (2) del § 5 y por eso es una clase aleatoria. Análogamente con eso escribiremos a menudo $\| X \in W \|$ es vez de $W(X)$ y para cualesquier clases $W$ aleatorias.

b) Existen clases aleatorias no equivalentes a los conjuntos aleatorios. Por ejemplo, la clase aleatoria «universal»: $W(X) = 1$ para todos los $X$. (Si no, tendríamos $\| W \in W \| = 1$ en contradicción con el axioma de regularidad, cuya «veracidad» se verificará más tarde).

c) Sea $W$ una clase aleatoria y $\alpha$, cualquier ordinal. Definamos así el elemento $W_\alpha \in V^B_{\alpha+1}$:

$$D(W_\alpha) = V^B_\alpha, \ W_\alpha = \text{acotación de } W \text{ sobre } V^B_\alpha$$

(como funciones, véase 4.2). Es fácil ver que para todos los $X \in V^B$ tenemos

$$\| X \in W_\alpha \| \leqslant \| X \in W \|. \tag{1}$$

En efecto, sean $U \in V^B_\alpha$, $X \in V^B$. Entonces tenemos

$$\| X = U \| \wedge W_\alpha(U) = \| X = U \| \wedge W(U) =$$

$$= \| X = U \| \wedge W(X) \leqslant W(X),$$

de donde en virtud de (6) del § 4:

$$\| X \in W_\alpha \| = \bigvee_{U \in V^\beta_\alpha} \| X = U \| \wedge W_\alpha(U) \leqslant$$

$$\leqslant W(X) = \| X \in W \|.$$

A continuación verificaremos a menudo que la clase $W$ concreta que nos interesa equivale al conjunto, buscando tal ordinal $\alpha$ que $W \sim W_\alpha$. De (1) se ve que para esto basta verificar la desigualdad $\| X \in W \| \leqslant \| X \in$ $\in W_\alpha \|$ para todos los $X$.

d) Sean $W$, $W_1$, $W_2$ clases aleatorias. Entonces $W_1 \wedge W_2$, $W_1 \vee W_2$, $W'$ son también clases aleatorias puesto que la condición de extensionalidad para estas funciones se verifica trivialmente. Escribiremos $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$ en vez de $W_1 \wedge W_2$, $W_1 \vee W_2$, respectivamente.

e) Sean $W$ una clase aleatoria y $X$, un conjunto aleatorio. Demostremos que $W \cap X$ está equivalente al conjunto aleatorio. Más exacto, si $D(X) = V^B_\alpha$, entonces $W \cap X \sim (W \cap X)_\alpha$. En efecto, para cualquier $Y \in V^B$

tenemos según (6) del § 4:

$$\| Y \in (W \cap X)_\alpha \| = \bigvee_{U \in V_\alpha^B} \| U = Y \| \wedge \| U \in (W \cap X)_\alpha \| =$$

$$= \bigvee_{U \in V_\alpha^B} (\| U = Y \| \wedge \| U \in W \| \wedge \| U \in X \| =$$

$$= \bigvee_{U \in V_\alpha^B} \| U = Y \| \wedge \| Y \in W \| \wedge \| U \in X \| =$$

$$= \| Y \in W \| \wedge \| Y \in X \| = \| Y \in W \cap X \|.$$

De este resultado sigue la «veracidad» de las fórmulas de la distinción (véase el p. 4.9b, cap. II).

La proposición siguiente brinda el método común de construcción de las clases aleatorias.

**6.4. Proposición.** *Supongamos que* $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ *es una fórmula que no contiene variables libres excepto* $x$, $y_1, \ldots, y_n$. *Supongamos que* $Y_1, \ldots, Y_n \in V^B$ *son fijos. Entonces la función*

$$X \mapsto W(X) = \| P(X, Y_1, \ldots, Y_n) \|$$

*es una clase aleatoria.*

Intuitivamente $W$ contiene cada conjunto $X$ con la probabilidad, con la cual es cierta para él la afirmación $P(X)$; $Y_1, \ldots, Y_n$ desempeñan el papel de «constantes».

DEMOSTRACIÓN. Aprovechemos la «veracidad» del correspondiente axioma de igualdad:

$$\| \forall x \forall y_1 \ldots \forall y_n (x = y \to (P(x, y_1, \ldots, y_n) \to$$

$$\to P(y, y_1, \ldots, y_n))) \| = 1.$$

Después de examinar el punto $\xi$ de la clase de interpretación la cual confiere a $x, y_1, \ldots, y_n$ los valores de $X, Y_1, \ldots, Y_n \in V^B$, respectivamente, obtendremos

$$\| X = Y \| \leqslant \| P(X, Y_1, \ldots, Y_n) \|' \vee$$

$$\vee \| P(Y, Y_1, \ldots, Y_n) \|$$

o

$$\| X = Y \| \wedge W(X) \leqslant W(Y),$$

de donde sigue la extensionalidad de $W$.

Ahora podemos comenzar la verificación de los axiomas.

**6.5. Proposición.** *El axioma del par*

$\forall u \forall w \exists x \forall z \, (z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = w)$

*es «cierto».*

DEMOSTRACIÓN. Según la definición tenemos

$$\| \forall u \forall w \exists x \forall z \, (z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = w) \| =$$

$$= \bigwedge_U \bigwedge_W \bigvee_X \bigwedge_Z \| Z \in X \leftrightarrow Z = U \vee Z = W \|.$$

Por eso basta hallar para cualesquier $U$, $W \in V^B$ tal $X \in V^B$ que para todos los $Z \in V^B$

$$\| Z \in X \| = \| Z = U \| \vee \| Z = W \|. \qquad (2)$$

Con los $U$, $W$ fijos examinemos el segundo miembro (2) como función de $Z$. Esta es una clase aleatoria según la proposición 6.4, ya que responde a la fórmula $z = U \vee z = W$. Demostremos que dicha clase está equivalente al conjunto aleatorio. Más exactamente, si $U$, $W \in V^B_\alpha$, entonces $X \sim X_\alpha$. Según la nota al final del p. 6.3c para eso basta verificar que para todos los $Z$

$$\| Z \in X \| \leqslant \| Z \in X_\alpha \|.$$

Pero como $\| U \in X_\alpha \| = 1$, entonces según la fórmula (2) del § 5 tenemos

$$\| Z = U \| \leqslant \| Z \in X_\alpha \|$$

y de forma análoga

$$\| Z = W \| \leqslant \| Z \in X_\alpha \|,$$

de donde sigue lo requerido.

**6.6. Proposición.** *El axioma de la suma*

$\forall x \exists y \forall u \, (\exists z \, (u \in z \wedge z \in x) \leftrightarrow u \in y)$

*es «cierto».*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $X \in V^B$ y construyamos un conjunto aleatorio $Y$ tal que para todos los $U \in V^B$

$$\| U \in Y \| = \| \exists z \, (U \in z \wedge z \in X) \| =$$

$$= \| \bigvee_{Z \in V^B} \| U \in Z \| \wedge \| Z \in X \|.$$

Según la proposición 6.4 la clase aleatoria con tal propiedad existe. Mostremos que si $D(X) = V^B_\alpha$, entonces $Y \sim Y_\alpha$. Teniendo en cuenta que $D(Y_\alpha) = D(X)$, tenemos

$$\| U \in Y_\alpha \| = \bigvee_{Z \in D(X)} \| U = Z \| \wedge \| Z \in Y_\alpha \| =$$

$$= \bigvee_{Z \in D(X)} \| U = Z \| \wedge ( \bigvee_{Z_1 \in V^B} \| Z \in Z_1 \| \wedge \| Z_1 \in X \| ). \quad (3)$$

Mostremos que en la suma interior (3) puede limitarse sumando por $Z_1 \in D(X)$. En efecto, para cualquier $Z_1$

$$\| Z_1 \in X \| = \bigvee_{Z_2 \in D(X)} \| Z_1 = Z_2 \| \wedge \| Z_2 \in X \|,$$

$$\| Z \in Z_1 \| \wedge \| Z_1 \in X \| = \bigvee_{Z_2 \in D(X)} \| Z \in Z_1 \| \wedge \| Z_1 =$$

$$= Z_2 \| \wedge \| Z_2 \in X \| \leqslant \bigvee_{Z_2 \in D(X)} \| Z \in Z_2 \| \vee \| Z_2 \in X \|. \quad (4)$$

Tomándolo en cuenta, efectuaremos primeramente la adición en (3) por $Z$ estando fijo $Z_1 \in D(X)$. Como $D_1(Z_1) \leqslant D(X)$, la suma por $Z \in D(X)$ coincide con la por $Z \in D(Z_1)$ y será igual a $\| U \in Z_1 \|$. Por tanto,

$$\| U \in Y_\alpha \| = \bigvee_{Z_1 \in D(X)} \| U \in Z_1 \| \wedge \| Z_1 \in X \| =$$

$$= \bigvee_{Z_1 \in V^B} \| U \in Z_1 \| \wedge \| Z_1 \in X \| = \| U \in Y \|$$

en virtud de (4).

**6.7. Proposición.** *El axioma del grado*

$$\forall x \exists y \forall z \, (z \subseteq x \leftrightarrow z \in y)$$

*es "cierto"*. (Recordemos que $z \subseteq x$ es una abreviatura para $\forall u \, (u \in z \rightarrow u \in x)$.)

DEMOSTRACIÓN. Después de fijar $X \in V^B$ construiremos tal $Y \in Y^B$ que para todos los $Z \in Y^B$

$$\| Z \in Y \| = \| Z \subseteq X \| = \bigwedge_{U \in V^B} \| U \in Z \|' \vee \| U \in X \|.$$

El segundo miembro define $Y$ como clase aleatoria en virtud de la proposición 6.4. Mostremos que si $D(X) = V^B_\alpha$, entonces $Y \sim Y_{\alpha+1}$.

Ante todo, construiremos el elemento $Z_\alpha \in V^B_{\alpha+1}$ considerando $Z$ como clase aleatoria. Tenemos en virtud de (1) $\| U \in Z_\alpha \|' \geqslant \| U \in Z \|'$, así que

$$\| Z \in Y \| \leqslant \| Z_\alpha \in Y \| = \| Z_\alpha \in Y_{\alpha+1} \|. \quad (5)$$

Demostraremos, además, la desigualdad

$$\| Z \in Y \| \leqslant \| Z_\alpha = Z \|. \tag{6}$$

De (5) y (6) se sigue inmediatamente que $Y \sim Y_{\alpha+1}$, puesto que en virtud de (2), § 4

$$\| Z \in Y \| \leqslant \| Z_\alpha \in Y_{\alpha+1} \| \wedge \| Z_\alpha = Z \| \leqslant$$
$$\leqslant \| Z \in Y_{\alpha+1} \|.$$

Queda verificar (6). Sea primeramente $U \in D(X) \subseteq V_\alpha^B$. Entonces $\| U \in Z_\alpha \| = \| U \in Z \|$, de donde $\| U \in Z_\alpha \leftrightarrow U \in Z \|' = 0$, y tanto más

$$\| U \in X \| \wedge \| U \in Z_\alpha \leftrightarrow U \in Z \|' = 0. \tag{7}$$

El primer miembro de (7), siendo variable $U$, define la clase aleatoria de tipo $X \cap W$, donde $W$ responde a la fórmula $\neg (u \in Z_\alpha \leftrightarrow u \in Z)$. Como $D(X) = V_\alpha^B$ tenemos en virtud de 6.3c $X \cap W \sim (X \cap W)_\alpha$. Pero de acuerdo con (7) $(X \cap W)_\alpha$ es la función nula en $V_\alpha^B$ y por tanto $\| U \in X \cap W \| = 0$ para todos los $U \in V^B$. Por consiguiente,

$$\| U \in X \| \leqslant \| U \in Z_\alpha \leftrightarrow U \subset Z \| \text{ para todos los } U. \tag{8}$$

Ahora para verificar (6) apuntaremos aparte el primero y segundo miembros (haciendo uso de la «veracidad» de la fórmula $Z_\alpha = Z \leftrightarrow \forall u \, (u \in Z_\alpha \leftrightarrow u \in Z)$:

$$\| Z \in Y \| = \bigwedge_{U \in V^B} \| U \in Z \|' \vee \| U \in X \|;$$

$$\| Z_\alpha = Z \| \bigwedge_{U \in V^B} \| U \in Z_\alpha \leftrightarrow U \in Z \|.$$

Ahora está claro que la desigualdad que se requiere en (6) tiene lugar término a término: para $\| U \in X \|$ eso se sigue de (8), y para $\| U \in Z \|'$, de lo que

$$\| U \in Z_\alpha \leftrightarrow U \in Z \| = (\| U \in Z_\alpha \|' \vee \| U \in Z \|) \wedge$$
$$\wedge (\| U \in Z_\alpha \| \vee \| U \in Z \|')$$

y $\| U \in Z \|' \leqslant \| U \in Z_\alpha \|'$ para todos los $U$.

**6.8. Proposición.** *El axioma de regularidad*

$$\forall x \, (\exists y \, (y \in x) \to \exists y \, (y \in x \wedge y \cap x = \varnothing))$$

*es «cierto».*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $X \in V^B$. El axioma con la «constante» $X$ en vez de $x$ tiene una forma de $R \to S$.

Tenemos que verificar que $\| R \to S \| = 1$. Para eso basta establecer que $\| R \| \wedge \| S \|' = 0$, donde

$$\| R \| = \bigvee_{Y \in V^B} \| Y \in X \|; \tag{9}$$

$$\| S \|' = \bigwedge_{Y \in V^B} \| Y \in X \|' \wedge ( \bigvee_{Z \in V^B} \| Z \in Y \| \wedge \| Z \in X \| ). \tag{10}$$

Supongamos que $\| R \| \wedge \| S \|' = a \neq 0$, y llegaremos a la contradicción. De (9) y (10) resulta que existe un $Y \in V^B$ tal que $\| Y \in X \| \wedge a \neq 0$. Elijamos $Y$ del rango mínimo con esta propiedad.

De nuevo se ve de (9) y (10) que

$$\| Y \in X \| \wedge a \leqslant \bigvee_{Z \in V^B} \| Z \in Y \| \wedge \| Z \in X \|.$$

Por la derecha uno puede limitarse sumando por $Z \in D(Y)$ sin que se cambie toda la suma, por eso ha de existir un $Z \in D(Y)$ tal que

$$\| Z \in X \| \wedge \| Y \in X \| \wedge a \neq 0$$

y, pues, $\| Z \in X \| \wedge \alpha = 0$, pero el rango de $Z$ es menor que el de $Y$ lo que contradice la elección de $Y$.

## 7. Los axiomas de la infinidad, de la sustitución y de la elección son «ciertos»

**7.1.** Nosotros comenzaremos este párrafo por la descripción de dos métodos útiles más de construir conjuntos aleatorios. El primero de los mismos, muy usual, resuelve el problema siguiente. Supongamos que está dado el conjunto de objetos $X_i \in V^B$, $i \in I$, y de elementos $a_i \in B$. Supongamos que queremos construir un conjunto aleatorio $X$ que contenga cada $X_i$ con la probabilidad de $a_i$. Tal $X$ puede no existir, no obstante, resulta que siempre existe un $X$ con $\| X_i \in X \| \geqslant a_i$ para todos los $i \in I$ y, es más, existe un $X$ mínimo con tal propiedad.

**7.2. Lema.** a) *En condiciones del punto anterior la función $X$ de $Y$*

$$\| Y \in X \| = \bigvee_i a_i \wedge \| Y = X_i \| \tag{1}$$

*es una clase aleatoria de $X$ equivalente al conjunto aleatorio. Además, $\| X_i \in X \| \geqslant a_i$, y si $X'$ es cualquier clase* *aleatoria, para la cual* $\| X_i \in X' \| \geqslant a_i$ *para todos los* $i$, *entonces* $\| Y \in X' \| \geqslant \| Y \in X \|$ *a todos los* $Y$.

Diremos que $X$ (y cualquier conjunto equivalente a $X$) *recoge* $X_i$ *con las probabilidades de* $a_i$.

b) *En las mismas condiciones la función* $Z$ *de* $Y$

$$\| Y \in Z \| = \bigvee_i a_i \wedge \| Y \in X_i \| \tag{2}$$

*es una clase aleatoria de* $Z$ *equivalente al conjunto aleatorio. Si además* $a_i \wedge a_j = 0$ *para todos los* $i \neq j$, *entonces* $\| Z = X_i \| \geqslant a_i$ *y para cualquier clase aleatoria* $Z'$ *con las condiciones de* $\| Z' = X_i \| \geqslant a_i$ para todos los $i$, tenemos $\| Y \in Z' \| \geqslant \| Y \in Z \|$ para todos los $Y$.

Diremos que $Z$ *está pegado de* $X_i$ *con las probabilidades de* $a_i$.

DEMOSTRACIÓN. La extensionalidad de las funciones $Z$ y $X$ definidas por las fórmulas (1) y (2) se verifica inmediatamente.

Existe un ordinal $\alpha$ tal que $X_i \in V^B_\alpha$ para todos los $i$. Mostraremos que $X \sim X_\alpha$ y $Z \sim Z_\alpha$. Para cualquier $Y \in V^B_\alpha$ tenemos

$$\| Y \in X_\alpha \| = \bigvee_{Z \in V^B} \| Y = Z \| \wedge \| Z \in X_\alpha \| =$$

$$= \bigvee_{Z \in V^B_\alpha} \bigvee_i \| Y = Z \| \wedge a_i \wedge \| Z = X_i \| =$$

$$= \bigvee_{Z \in V^B_\alpha} \bigvee_i a_i \wedge \| Y = X_i \| \wedge \| Z = X_i \|.$$

Examinando el término con $Z = X_i$ a la derecha, obtenemos $a_i \wedge \| Y = X_i \| \leqslant \| Y \in X_i \|$, de donde en virtud de (1) $\| Y \in X \| \leqslant \| Y \in X_\alpha \|$, lo que basta según el p. 6.3d.

De forma análoga para cualquier $Y \in V^B$

$$\| Y \in Z_\alpha \| = \bigvee_{Z \in V^B_\alpha} \bigvee_i \| Y = Z \| \wedge a_i \wedge \| Z \in X_i \| =$$

$$= \bigvee_{Z \in V^B_\alpha} \bigvee_i a_i \wedge \| Y \in X_i \| \wedge \| Y = Z \|.$$

Además, $\| Y \in X_i \| = \bigvee_{Z \in V^B_\alpha} \| Y = Z \| \wedge \| Y \in X_i \|$,

de donde resulta que $a_i \wedge \| Y \in X_i \| \leqslant \| Y \in Z_\alpha \|$ y con ayuda de (2) $\| Y \in Z \| \leqslant \| Y \in Z_\alpha \|$.

Sean ahora $X$, $Z$ cualesquier conjuntos aleatorios con propiedades de (1), (2). De (1) está claro que $\| X_i \in X \| \geqslant \geqslant a_i$. Si $\| X_i \in X' \| \geqslant a_i$ para todos los $i$, entonces $\| Y \in X' \| = \bigvee_Z \| Y = Z \| \wedge \| Z \in X' \| \leqslant \bigvee_i \| Y = = X_i \| \wedge \| X_i \in X' \| \geqslant \| Y \in X \|$ en virtud de (1). De forma análoga, si $a_i \wedge a_j = 0$ para $i \neq j$, entonces de (2) se ve que $a_i \wedge \| Y \in Z \| = a_i \wedge \| Y \in X_i \|$, de donde

$$a_i \wedge \| X_i = Z \| = \bigvee_Y a_i \wedge \| Y \in X_i \leftrightarrow Y \in Z \| =$$

$$= a_i; \quad \text{y} \quad X_i = Z \| \geqslant a_i.$$

No obstante, si $\| X_i = Z' \| \geqslant a_i$ para todos los $i$, entonces

$$\| Y \in Z' \| \geqslant \| Y \in Z' \| \wedge \| Z' = X_i \| =$$

$$= \| Y \in X_i \| \wedge \| Z' = X_i \| \geqslant a_i \wedge \| Y \in X_i \|,$$

así que $\| Y \in Z' \| \geqslant \| Y \in Z \|$.

He aquí el primer ejemplo de utilización del lema 7.2a.

**7.3. Proposición.** *El axioma de la infinidad*

$$\exists x (\varnothing \in x \wedge \forall u (u \in x \to \{u\} \in x))$$

es «cierto».

DEMOSTRACIÓN. Verificando la «veracidad» del axioma del par, hemos construido para cualesquier $U$, $W \in V^B$ (salvo la equivalencia) el elemento $Z \in V^B$ con la propiedad $\| Y \in Z \| = \| Y = U \vee Y = W \|$ para todas las $Y$. Es natural denotar tal elemento por $\{U, W\}^B$. Respectivamente el camino de $\{U\}^B = \{U, U\}^B$.

Procedamos ahora a la verificación del axioma. Pongamos $X_0 = \varnothing$, $X_1 = \{\varnothing\}^B, \ldots, X_n = \{X_{n-1}\}^B$. Luego, denotemos por $X \in V^B$ el elemento que recoge todos los $X_i$ con las probabilidades de 1. Comprobaremos que $\| \varnothing \in X \wedge \forall u (u \in X \to \{u\} \in X) \| = 1$.

Por lo visto, basta establecer que para todos los $U \in V^B$ tenemos $\| U \in X \| \leqslant \| \{U\}^B \in X$, es decir, en virtud de (1).

$$\bigvee_{i=0}^{\infty} \| U = X_i \| \leqslant \bigvee_{i=0}^{\infty} \| \{U\}^B = X_i \|.$$

En efecto, de la «veracidad» de la fórmula $u \in x \leftrightarrow \{u\} = = \{x\}$ y de lo que $X_{i+1} = \{X_i\}^B$ inmediatamente se deduce que $\| U \in X_i \| = \| \{U\}^B \in X_{i+1}$.

El lema 7.2b lo necesitaremos para demostrar el hecho auxiliar siguiente:

**7.4. Lema.** *Sea $W$ cierta clase aleatoria. Entonces existe un elemento $X \in V^B$ tal que*

$$\bigvee_{U \in V^B} W(U) = W(X)$$

El primer miembro puede ser representado en forma de $\| \exists x (x \in W) \| = \| W \neq \varnothing \|$. Por eso el sentido intuitivo del lema es tal: la probabilidad de que la clase no sea vacía coincide con la de la entrada en ella de un elemento adecuado.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, existe un ordinal $\beta$ tal que $\bigvee\limits_{U \in V^B} W(U) = \bigvee\limits_{U \in V^B} W(U)$. En efecto, sea $a_\gamma = \bigvee\limits_{U \in V^B_\gamma} W(U)$ y para cualquier $a \in B$ pongamos $\gamma(a) = \min \{\gamma \mid \alpha_\gamma > a\}$ (ó 0, si $a_\gamma \leqslant a$ para todos los $\gamma$). Pongamos, por último, $\beta = \sup\limits_{a \in B} \gamma(a)$. Esto es un ordinal, ya que $B$ es un conjunto. Si $\gamma > \beta$, entonces $a_\gamma \geqslant a_\beta$ en virtud de la monotonía, pero $a_\gamma > a_\beta$ no lo puede ser según la elección de $\gamma$.

Pues bien, sea $\bigvee\limits_{U} W(U) = \bigvee\limits_{U \in V^B_\beta} W(U)$. Enumeremos todos los elementos de $V^B_\beta$ con cierto segmento inicial de ordinales (¡axioma de elección!): $V^B_\beta = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Pongamos

$$a_\alpha = W(U_\alpha) \wedge (\bigvee_{\gamma < \alpha} W(U_\gamma))', \quad \alpha = I.$$

Por lo visto, $a_\alpha \wedge a_\gamma = 0$ para $\alpha \neq \gamma$. Haciendo uso lel lema 7.2b, pegaremos los conjuntos $U_\alpha$ con las probabilidades $a_\alpha$ $(\alpha \in I)$. Obtendremos el conjunto $X$ con las condiciones de $\| X = U_\alpha \| \geqslant a_\alpha \geqslant W(U_\alpha)$. Haciendo uso de la extensionalidad $W$, hallamos

$$W(X) \geqslant \bigvee_{\alpha \in I} \| X = U_\alpha \| \wedge W(U_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in I} W(U_\alpha) =$$

$$= \bigvee_{U \in V^B} W(U).$$

**7.5. Proposición.** *El axioma de la sustitución*

$$\forall \bar{z} \forall u (\forall x (x \in u \rightarrow \exists ! y P (x, y, \bar{z})) \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists w \forall y (y \in w \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge P (x, y, \bar{z}))))$$

*es «cierto»* (*aquí* $\bar{z} = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$).

DEMOSTRACIÓN. Fijamos el "vector" $\bar{Z} = \langle Z_1, \ldots, Z_n \rangle$ con $Z_i \in V^B$ y el elemento $U \in V^B$. En vez de $P (x, y, \bar{Z})$ escribiremos $P (x, y)$, etc. Al representar el axioma con las «constantes» $Z_i$, $U$ en forma de $R \rightarrow S$ tenemos que demostrar que $\| R \rightarrow S \| = 1$.

7.6. Caso particular: *si* $\| R \| = 1$, *entonces* $\| S \| = 1$.

Mostremos primeramente como el caso general se deduce de eso.

Sea $a \in B$. Denotemos por $B_a$ el conjunto $\{b \in B \mid b \leqslant a\}$. Las operaciones $B$ inducen en $B_a$ la estructura del álgebra booleana con la unidad $1_a = a$. La aplicación natural $B \mapsto B_a$: $b \mapsto b \wedge a = b_a$ es un homomorfismo. La ligera inducción por $\alpha$ permite construir la aplicación sobreyectiva de los universos $V^B \rightarrow V^{B_a}$: $X \rightarrow X_a$ tal que para todos los $X, Y \in V^B$

$$\| X_a \in Y_a \| = \| X \in Y \| \wedge a; \quad \| X_a = Y_a \| =$$
$$= \| X = Y \| \wedge a.$$

Ahora elijamos en las notaciones anteriores $a = \| R \|$. Entonces $\| R \|_a = 1_a$, así que en virtud de 7.6. $\| S \|_a = 1_a$. Eso significa que $\| S \| \geqslant a$, así que $\| R \rightarrow S \| = 1$. (En este razonamiento hacíamos uso del p. 7.6 para $V^{B_a}$: está claro que $\| R \|_a = \| R_a \|$ en abreviaturas obvias.)

7.7. DEMOSTRACIÓN DE 7.6. La condición $\| R \| = 1$ significa que para cualquier $X \in V^B$

$$\| X \in U \| \leqslant \| \exists ! y P (X, y) \|. \tag{3}$$

Para verificar la condición $\| S \| = 1$ basta hallar para cualquier $U \in V^B$ un $W \in V^B$ tal que para todos los $Y \in V^B$

$$\| Y \in W \| = \bigvee_{X \in V^B} \| X \in U \| \wedge \| P (X, Y) \|. \tag{4}$$

La fórmula (4) define $W$ como una clase aleatoria en virtud de la proposición 6.4. Hallemos tal $\alpha$ que $W \sim W_\alpha$.

Con este fin notemos primeramente que en (4) podemos limitarnos a sumar por $X \in D(U)$:

$$\| Y \in W \| = \bigvee_{X \in D(U)} \| X \in U \| \wedge \| P(X, Y) \| \qquad (5)$$

(la demostración es la misma como el razonamiento después de la fórmula (3) del § 6).

Apliquemos ahora el lema 7.4 a la clase $W_X(Y) = \| P(X, Y) \|$. Dicho lema permitirá hallar para cada $X \in D(U)$ un elemento $Y_X \in V^B$ tal que

$$\| \exists\, yP(X, y) \| = \| P(X, Y_X) \|. \qquad (6)$$

(Como $\| \exists\, !yP(X, y) \| \leqslant \| \exists\, yP(X, y) \|$, podremos aprovechar estos $Y_X$ para estimar $\| X \in U \|$ con ayuda de (9).)

Pongamos

$$\alpha = \sup (\alpha_X \mid Y_X \in V^B_{\alpha_X}) \text{ por todos los } X \in D(U)$$

y mostremos que $W \sim W_\alpha$ para este $\alpha$. Tenemos que verificar que para todo $Y$ tenemos $\| Y \in W \| \leqslant \| Y \in W_\alpha \|$, y para eso en virtud de (5) y (2) del § 4 basta establecer que para cualquier $X \in D(U)$

$$\| X \in U \| \wedge \| P(X, Y) \| \leqslant \| Y = Y_X \| \wedge$$
$$\wedge \| Y_X \in W_\alpha \|. \qquad (7)$$

Ante todo tenemos en virtud de (3), (5), (6) y de la definición $\alpha$:

$$\| X \in U \| \leqslant \| P(X, Y_X) \| \leqslant \| Y_X \in W \| =$$
$$= \| Y_X \in W_\alpha \|. \qquad (8)$$

Luego examinemos la fórmula la cual es «cierta», puesto que se deduce de los axiomas lógicos y el axioma de igualdad:

$$\forall\, x \exists\, !yP(x, y) \wedge P(x, y_1) \wedge P(x, y_2) \to y_1 = y_2.$$

De ella hallamos

$$\bigvee_{X_1 \in V^B} \| \exists !\, yP(X_1, y) \| \wedge \| P(X, Y) \| \wedge \| P(X, Y_X) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| Y = Y_X \|. \qquad (9)$$

Por último, tomando en cuenta que $\| X \in U \| \leqslant \leqslant \bigvee_{X_1 \in V^B} \| \exists\, !yP(X_1, y) \|$ en virtud de (3) y $\| X \in U \| \leqslant \leqslant \| P(X, Y_X) \|$ en virtud de 8, multipliquemos término a término las desigualdades (8) y (9). Eso brindará

$\| X \in U \| \wedge \| P(X, Y) \| \leqslant \| Y = Y_X \| \wedge$
$\wedge \| Y_X \in W_\alpha \|$,

o sea (7).

**7.8. Proposición.** *El axioma de la elección es «cierto».*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que el axioma de la elección tiene una forma de $\forall x \exists y (Q \wedge R \wedge S \wedge T)$, donde $Q$ significa:

$$\forall z (z \in y \to \exists u \exists w (z = \langle u, w \rangle))$$

(«$y$ es una correspondencia binaria»);

$R$ significa:

$$\forall u \forall w_1 \forall w_2 (\langle u, w_1 \rangle \in y \wedge \langle u, w_2 \rangle \in y \to w_1 = w_2)$$

(«$y$ es una función»);

$S$ significa:

$$\forall u (\exists w (\langle u, w \rangle \in y) \to u \in x)$$

(«el campo de definición de $y$ está contenido en $x$»);

$T$ significa:

$$\forall u (u \neq \varnothing \wedge u \in x \to \exists w (w \in u \wedge \langle u, w \rangle \in y)$$

(«el campo de definición de $y$ coincide con $x$; $y$ elige un elemento de cada elemento $x$ no vacío»).

Fijemos $X \in V^B$ y construyamos para $X$ la «función que elige» $Y$. Para eso

a) enumeremos $D(X)$ con el segmento inicial de ordinales:

$$D(X) = \{U_0, U_1, \ldots, U_\alpha, \ldots\}, \alpha \in I;$$

b) hallamos para cada $U_\alpha \in D(X)$ según el lema 7.4 un elemento $W_\alpha \in V^B$ tal que

$$\| W_\alpha \in U_\alpha \| = \bigvee_{W \in V^B} \| W \in U_\alpha \|;$$

c) pongamos para cada $\alpha \in I$

$$a_\alpha = \| U_\alpha \in X \| \wedge (\bigwedge_{\beta < \alpha} \| U_\beta \in X \|' \vee \| U_\beta = U_\alpha \|');$$

d) por último, denotemos por $Y$ el conjunto que «recoge los pares ordenados» $\langle U_\alpha, W_\alpha \rangle^B$ con las probabilidades $a_\alpha$, $\alpha \in I$. Aquí, naturalmente, $\langle U, W \rangle^B = \{\{U\}^B, \{U, W\}^B\}^B$.

El sentido de la construcción es tal: en cada $U_\alpha$ elegimos un elemento $W_\alpha$ que entra en $U_\alpha$ «con la probabilidad máxima posible», pero después incluimos los «pares» $(U_\alpha, W_\alpha)^B$ en el gráfico $Y$ de la función de la elección por turno, cada subsiguiente solo en tanto, en cuanto antes $U_\alpha$ «no se tenía en cuenta» en $X$.

Sustituyamos ahora $x$, $y$ por $X$, $Y$ en el axioma de la elección y, denotando por $Q$, $R$, $S$, $T$ las fórmulas respectivas con las constantes, verifiquemos que $\| Q \| = \| R \| = \| S \| = \| T \| = 1$.

Usaremos constantemente la fórmula que se deduce de (2) y de la definición de $Y$:

$$\| Z \in_1 Y \| = \bigvee_\alpha \| Z = (U_\alpha, W_\alpha)^B \| \wedge a_\alpha. \tag{10}$$

**7.9.** $\| Q \| = 1$. Según la definición de $Q$ eso significa que para $Z \in V^B$ debo haber $\| Z \in Y \| \leqslant \bigwedge_{U, W} \| Z = (U, W)^B \|$, y eso es evidente de (10).

**7.10.** $\| R \| = 1$. Según la definición de $R$ para cualesquier $U$, $W^1$, $W^2 \in V^B$ tenemos que demostrar la desigualdad

$$\| (U, W^1)^B \in Y \| \wedge \| (U, W^2)^B \in Y \| \leqslant W^1 - W^2 \|.$$

Con ayuda de (10) el primer miembro se copia en forma de

$$\bigvee_{\alpha, \beta} \| U = U_\alpha \| \wedge \| W^1 = W_\alpha \| \wedge a_\alpha \wedge \| U = U_\beta \| \wedge \| W^2 = W_\beta \| \wedge a_\beta.$$

Como $\| U = U_\alpha \| \wedge \| U = U_\beta \| \leqslant \| U_\alpha - U_\beta \|$ y $\| U_\alpha = U_\beta \| \wedge a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ para $\alpha \neq \beta$ (véase la definición de $a_\alpha$), en esta suma se puede dejar sólo los términos con $\alpha = \beta$. En cada tal término hay un factor $\| W^1 = W_\alpha \wedge \| W^2 = W_\alpha \| \leqslant \| W^1 = W^2 \|$ lo que demuestra lo requerido.

**7.11.** $\| S \| = 1$. Esta identidad equivale a la fórmula

$$\| (U, W)^B \in Y \| \leqslant \| U \in X \|.$$

Pero el primer miembro en virtud de (10) es igual a

$$\bigvee \| U = U_\alpha \| \wedge \| W = W_\alpha \| \wedge a_\alpha \leqslant \bigvee_\alpha \| U = U_\alpha \| \wedge \wedge \| W = W_\alpha \| \wedge \| U_\alpha \in X \| \leqslant \bigvee_\alpha \| U = U_\alpha \| \wedge \| U_\alpha \in X \| = \| U \in X \|.$$

**7.12.** $\| T \| = 1$. Nosotros debemos demostrar la igualdad (para cualquier $U \in V^B$)

$$\| U \in X \| \wedge \| U \neq \varnothing \| \leqslant \bigvee_{W \in V^B} \| W \in U \| \wedge$$

$$\wedge \| \langle U, W \rangle^B \in Y \|. \tag{11}$$

Como ya notamos repetidas veces

$$\bigvee_{U \in V^B} \| U \in X \| \wedge \| U \neq \varnothing \| = \bigvee_{U \in D(X)} \| U \in X \| \wedge \| U \neq \varnothing \|.$$

Por eso en (11) basta limitarse a los elementos $U$, $\alpha \in I$. Luego,

$$\| U_\alpha \neq \varnothing \| = \| \exists w \, (w \in U_\alpha) \| = \bigvee_W \| W \in U_\alpha \| =$$

$$= \| W_\alpha \in U_\alpha \|.$$

Por eso (11) se convierte en una desigualdad

$$\| U_\alpha \in X \| \wedge \| W_\alpha \in U_\alpha \| \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_W \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U_\alpha, W \rangle^B \in Y \|. \tag{12}$$

Para su demostración emplearemos la inducción por $\alpha$. Con $\alpha = 0$ ella es evidente, puesto que el término a la derecha con $W = W_0$ coincide con el primer miembro. Supongamos que dicha desigualdad es justa para todas las $\beta < \alpha$.

Según la definición de $a_\alpha$

$$\| U_\alpha \in X \| = a_\alpha \vee \big( \bigvee_{\beta < \alpha} \| U_\beta \in X \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \| \big).$$

Introduciendo esta fórmula en el primer miembro de (12) obtendremos que sea necesario demostrar dos desigualdades:

$$a_\alpha \wedge \| W_\alpha \in U_\alpha \| \leqslant \bigvee_W \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U_\alpha, W \rangle^B \in Y \|; \tag{13}$$

$$\| U_\beta \in X \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| W_\alpha \in U_\alpha \| \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_W \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U_\alpha, W \rangle^B \in Y \| \tag{14}$$

para todas las $\beta < \alpha$.

La desigualdad (13) es evidente: para su verificación basta analizar el término a la derecha con $W = W_\alpha$. La desigualdad (14) se reduce a la suposición inductiva de modo siguiente. El primer miembro se mayorea mediante la magnitud

$$\| U_\beta \in X \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| U_\alpha \in U_\beta \| \leqslant$$
$$\leqslant \| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| W_\beta \in U_\beta \|$$

según la definición $W_\beta$. Luego, según la inducción y en virtud de la extensionalidad

$$\| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| U_\beta \in X \| \wedge \| W_\beta \in U_\beta \| \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee_W \| W \in U_\beta \| \wedge \langle U_\beta, W \rangle^B \in Y \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \| \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee_W \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U_\alpha, W \rangle^B \in Y \|,$$

lo que finaliza la verificación del axioma de elección.

## 8. La hipótesis del continuo es «falsa» para los $B$ convenientes

8.1. Recordemos (lema 7.2a) que el conjunto $X \in V^B$ recoge los conjuntos $\{X_i\}$ con las probabilidades $a_i \in B$ $(i \in I)$, si $\| Y \in X \| = \bigvee_i \| Y = X_i \| \wedge a_i$ para todos los $Y$.

Haciendo uso de esta definición podemos introducir una aplicación canónica útil del universo de von Neumann $V$ en $V^B$: $t \mapsto \hat{t}$. Supongamos que $\hat{\varnothing} = \varnothing$ (recordemos que $\| Y \in \varnothing \| = 0$ para todos los $Y$), y si $\hat{s}$ ya están definidos para todos los $s \in V_\alpha$, entonces para $t \in V_{\alpha+1}$ pongamos:

*$\hat{t}$ recoge con las probabilidades de 1 todos los $\hat{s}$ para $s \in t$.*

En otras palabras, para cualquier $Y \in V^B$

$$\| Y \in \hat{t} \| = \bigvee_{s \in t} \| Y = \hat{s} \|. \tag{1}$$

(El objeto recogedor está definido no unívocamente sino sólo salvo la equivalencia, así que, hablando estrictamente, conviniera señalar el rango de $\hat{t}$, por ejemplo, exigir que coincida con el rango de $t$. Eso no es esencial, puesto que nos interesarán solamente las funciones de veracidad que no varían al reemplazar cualquier objeto por otro equivalente a él.)

Ahora podemos formular las condiciones adicionales (excepto la completitud) que serán superpuestas sobre el álgebra booleana $B$ para las necesidades de este párrafo.

Recordemos que $\omega_0$ es el primer ordinal infinito; $\omega_1$, el primer ordinal de potencia $>\omega_2$; $\omega_2$ es el primer ordinal de potencia $>\omega_1$.

**8.2. Condiciones sobre $B$.** a) *Condición de numerabilidad*. Recordemos su contenido: si se da una familia de elementos $\{a_i\}$, $i \in I$, con las condiciones $a_i \neq 0$, $a_i \wedge \wedge a_j = 0$ para $i \neq j$, entonces $I$ no es más que numerable.

b) Existe una familia de elementos $b(n, \alpha) \in B$ enumerada por el conjunto $\omega_0 \times \omega_2$ con la propiedad siguiente: si $Z(\alpha)$ recoge los elementos $n$, $n \in \omega_0$ con las probabilidades $b(n, \alpha)$, entonces $\| Z(\alpha) = Z(\beta) \| = 0$ para $\alpha \neq \beta$.

El sentido intuitivo de la segunda condición es el siguiente. Es fácil ver que $\| Z(\alpha) \subseteq \hat{\omega}_0 \| = 1$. En efecto, esta condición equivale a $\| \forall x (x \in Z(\alpha) \to x \in \hat{\omega}_0 \| = = 1$, o sea, a

$$\forall X \in V^B, \quad \| X \in Z(\alpha) \| \leqslant X \in \hat{\omega}_0 \|,$$

lo que es obvio de (1), puesto que $\hat{\omega}_0$ recoge $\hat{n}$ con las probabilidades de 1, mientras que $Z(\alpha)$, con las de $b(n, \alpha) \leqslant \leqslant 1$.

De este modo, la condición (8.2b) significa que podemos componer $\omega_2$ de distintos subconjuntos $Z(\alpha) \subseteq \hat{\omega}_0$, así que en el sentido ingenuo de la palabra card $(\hat{\omega}_0) > > \omega_1$ es precisamente la negación de la hipótesis del continuo. Desde luego, es necesario también verificar la posibilidad de convertir esta consideración intuitiva en una demostración.

**8.3. Existencia de $B$ con propiedades necesarias.** Se podría hacer uso de los conjuntos medibles como en el § 3. Para variar y comparar con el § 9 aduciremos una construcción más. Sea $\{0, 1\}$ un espacio discreto de dos puntos; sea $I = \omega_0 \times \omega_2$, $S = \{0, 1\}^I$ un espacio de vectores de 0 y 1, cuyas coordenadas están enumeradas por el conjunto $I$. Introduzcamos en $S$ la topología de producto directo. Su base estándar forma subconjuntos abiertos que se componen de todos los vectores, cuyas coordenadas están fijadas en cierto subconjunto finito $J \subset I$.

Si $a \subseteq S$ pondremos

$a'$ = complemento de clausura de $a$ en $S$, $a'' = = (a')'$.

Los conjuntos $a \subseteq S$ con $a'' = a$ se denominan conjuntos abiertos regulares del espacio $X$.

8.4. TEOREMA. *Pongamos*

$B = \{a \subseteq S \mid a'' = a\}, \quad a \wedge b = a \cap b; \quad a \vee b = = (a \cup b)''.$

*Entonces B con las operaciones* $\vee$, $\wedge$ *y* $'$ *es el álgebra booleana completa con condición de numerabilidad,* $u \bigvee a_i = (\bigcup_i a_i)''$ *para cualquier familia* $a_i \in B$.

Omitamos la demostración: véase Rosser [6, cap. 2].

8.5. LEMA. *En condiciones del teorema 8.4 pongamos:* $b(n, \alpha)$ *es un conjunto de vectores con 1 en el lugar* $(n, \alpha)$ *y definamos* $Z(\alpha)$ *como en el p. 8.2b. Entonces* $\| Z(\alpha) = Z(\beta) \| = 0$ *para* $\alpha \neq \beta$.

DEMOSTRACIÓN. Según la fórmula (5) del § 4

$$\| Z(\alpha) = Z(\beta) \| = \bigwedge_{n \in \omega_0} (b(n, \alpha) \wedge b(n, \beta)) \vee' \vee (b(n, \alpha)' \wedge b(n, \beta)').$$

El segundo miembro sólo puede aumentarse, si reemplazamos $\wedge$ por $\cap$ y $\vee$ por $\cup$; las virgulillas coinciden aquí con los complementos corrientes. Si $\| Z(\alpha) = Z(\beta) \| \neq \neq 0$, entonces habría de existir un elemento de la base estándar de la topología $X$, descrita al principio del p. 8.3, el que está contenido en

$$\prod_{n \in \omega_n} (b(n, \alpha) \cap b(n, \beta)) \cup (b, (n, \alpha)' \cap b(n, \beta)').$$

Pero esta intersección se compone de vectores, cuyas coordenadas en los lugares $(n, \alpha)$ y $(n, \beta)$ son iguales para todos los $n$, mientras que en cualquier elemento de la base estándar las topologías de acotación están superpuestas solamente sobre el número finito de coordenadas.

**8.6. Formulación de la negación de hipótesis del continuo.** Demostraremos la "veracidad" de la fórmula siguiente: $\neg$HC: $\forall x$ (($x$ *es ordinal* $\wedge$ $x$ *no es finito* $\wedge \forall y$ ($y \in x \rightarrow y$ *es finito*)) $\rightarrow \exists w$ (*no hay función de* $x$ *para todos los* $\omega$ $\wedge$ *no hay función de* $w$ *para* $\mathcal{P}(x)$).

Aquí $x$ es finito: $\forall y$ ($y \subseteq x \wedge y \neq x \rightarrow$ no hay función de $y$ para todos los $x$).

El descifrado de las demás abreviaturas lo dejamos al lector.

La premisa en $\neg$HC significa: "$x$ es el primer ordinal infinito"; la conclusión: «$w$ es un conjunto de potencia estrictamente intermedia entre la potencia de $x$ y la de $\mathcal{P}(x)$».

Escribiremos abreviadamente $\neg$HC en forma de

$$\forall x\,(P\,(x) \rightarrow \exists w\,(Q_1\,(x,\,w) \wedge Q_2\,(x,\,w))). \qquad (2)$$

**8.7. Lema de reducción.** *Sean $P\,(x)$, $Q\,(x)$ dos fórmulas del lenguaje de Zermelo—Fraenkel con la única variable libre $x$ y con las propiedades siguientes:*

*La fórmula $\exists!xP\,(x)$ puede ser deducida de los axiomas;*

*$X_0 \in V^B$ es un elemento tal que $\|\, P\,(X_0)\,\| = 1$.*

*Entonces $\|\, P\,(X)\,\| = \|\, X = X_0\,\|$ para todos los $X$, y si $\|\, Q\,(X_0)\,\| = 1$, entonces $\|\, \forall x\,(P\,(x) \rightarrow Q\,(x))\,\| = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos ante todo que $\|\, \exists xP\,(x)\,\| \geqslant$ $\geqslant \| \leqslant \|\, \exists! xP\,(x)\,\| = 1$ puesto que todos los axiomas son "ciertos" en $V^B$, y las reglas de inferencia conservan la "veracidad". Entonces, la existencia del objeto $X_0 \in V^B$ con $\|\, P\,(X_0)\,\| = 1$ se asegura por el lema 7.4.

Luego, $P\,(x) \wedge P\,(y) \rightarrow x = y$ también puede ser deducida, de donde, aplicándolo a $X$ en lugar de $x$ y a $X_0$ en lugar de $y$, hallamos

$$\|\, P\,(X)\,\| \leqslant \|\, X = X_0\,\|, \qquad (3)$$

pero $\|\, P\,(X)\,\| \wedge \|X = X_0\,\| = \|\, P\,(X_0)\,\| \wedge \|\, X = X_0\,\|$; comparándolo con (3) obtenemos que en (3) podemos colocar una igualdad.

Por último, supongamos que $\|\, Q\,(X_0)\,\| = 1$. Entonces según lo demostrado

$$\|\, P\,(X)\,\| = \|\, Q\,(X_0)\,\| \wedge \|\, X = X_0\,\| = \|\, Q\,(X)\,\| \wedge$$
$$\wedge \|\, X = X_0\,\| = \|\, Q\,(X)\,\| \wedge \|\, P\,(X)\,\|,$$

de donde $\|\, P\,(X)\,\| \leqslant \|\, Q\,(X)\,\|$ y $\|\, \forall x\,(P\,(x) \rightarrow$ $\rightarrow Q\,(x))\,\| = 1$.

Este lema puede ser aplicado a la demostración de $\neg$HC en forma de (2) porque de los axiomas puede ser deducida la fórmula $\exists! xP\,(x)$, donde $P\,(x)$ es la premisa «$x$ es el primer ordinal infinito». No aduciremos la conclusión formal respectiva, y quedaremos satisfechos constatando que la unicidad de $\omega_0$ es notoria.

Ahora, en virtud del lema 8.7, para verificar $\neg$HC basta establecer los hechos siguientes:

8.8. $\|\, P\,(\hat{\omega}_0)\,\| = 1$.

(Con otras palabras, el papel de $X_0$ en nuestra situación lo desempeña $\hat{\omega}_0$.)

8.9. $\|\, Q_1\,(\hat{\omega}_0,\, \hat{\omega}_1)\,\| = 1$.

8.10. $\|\, Q_2\,(\hat{\omega}_0,\, \hat{\omega}_1)\,\| = 1$

(pues $\| \exists w\,(Q_1(\hat{\omega}_0, w) \wedge Q_2(\hat{\omega}_0, w)) \| = 1$, lo que termina la verificación de las condiciones del lema).

La verificación de 8.8. se realiza casi mecánicamente, y la dejamos aquí en calidad de ejercicio.

**8.11. Verificación del p. 8.9.** Hemos de establecer que si $B$ satisface la condición de numerabilidad, entonces $\| \exists$ función de $\hat{\omega}_0$ para todos los $\hat{\omega}_1 \| = 0$. La demostración siguiente se atribuye palabra por palabra al caso más general, cuando en vez de $\omega_0$, $\omega_1$ se toma cualquier par de $s$, $t \in V$ con card $s <$ card $t$ y card $s$ es infinito.

Supongamos que

$$0 \neq a = \| \exists f\,(f \text{ función } \wedge \forall y\,(y \in \hat{\omega}_1 \rightarrow \exists x\,(x \in$$
$$\in \hat{\omega}_0 \wedge \langle x, y\rangle \in f))) \|,$$

y llegaremos a la contradicción. Debe existir un elemento $F \in V^B$ tal que

$$a \leqslant \| F \text{ función } \| \wedge \bigwedge_Y (\ldots).$$

Para cada $\alpha \in \omega_1$ examinaremos el término del producto que responde a $Y = \hat{\alpha}$ y tomaremos en cuenta que $\| \alpha \in$ $\in \hat{\omega} \|\ \omega = 1$. Obtendremos

$$a \leqslant \| F \text{ función } \| \wedge (\bigvee_X \| X \in \hat{\omega}_0 \| \wedge \| \langle X, \hat{\alpha}\rangle^B \in F \|. \quad (4)$$

En virtud de (1)

$$\| X \in \hat{\omega}_0 \| \wedge \| \langle X, \hat{\alpha}\rangle^B \in F \| = \bigvee_{n<\omega_0} \| X =$$
$$= \hat{n} \| \wedge \| \langle X, \hat{\alpha}\rangle^B \in F = \bigvee_{n<\omega_0} \| X = \hat{n} \| \wedge \| \langle \hat{n}, \hat{\alpha}\rangle^B \in F \|,$$

así que, sumando primeramente por $X$ y luego por $n$, se puede representar (4) en forma de

$$a \leqslant \| F \text{ función } \| \wedge \bigvee_{n<\omega_0} \| \langle \hat{n}, \hat{\alpha}\rangle^B \in F \|.$$

Entonces, para cada $\alpha < \omega_1$ se hallará un $n(\alpha) < \omega_0$ tal que

$$\| F \text{ función } \| \wedge \| \langle n(\hat{\alpha}), \hat{\alpha}\rangle^B \in F \| \neq 0.$$

Por eso existe tal valor de $n_0$ y tal subconjunto $J \subseteq \omega_1$ de potencia $\omega_1$ que

$0 \neq a_\alpha = \| F$ función $\| \wedge \| \langle \hat{n}_0, \hat{\alpha}_0\rangle^B \in F \|$ para todos los $\alpha \in J$.

Queda verificar que $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ a $\alpha \neq \beta$ lo que contradice la condición de numerabilidad para $B$. Como según la definición de la función

$$a_\alpha \wedge a_\beta = \| F \text{ función} \| \wedge \| \langle \hat{n_0}, \hat{\alpha} \rangle^B \in F \| \wedge \|$$

$$\langle n_0, \beta \rangle^B \in F \| \leqslant \| \hat{\alpha} = \hat{\beta} \|$$

basta verificar que si $\alpha \neq \beta$, entonces $\| \hat{\alpha} = \hat{\beta} \| = 0$.

En efecto, si, digamos, $\gamma \in \alpha$, pero $\gamma \notin \eta$, entonces en la fórmula (5) del § 4 para $\| \alpha = \beta \|$ existe un término nulo $\| \ddot{\gamma} \in \tilde{\alpha} \|' \vee \| \hat{\gamma} \in \ddot{\beta} \|$. (La verificación de lo que $\| \ddot{\gamma} \in \hat{\beta} \| = 0$ para $\gamma \notin \beta$ por su parte requiere conocimiento de lo que $\| \hat{\gamma} = \hat{\delta} \| = 0$ para $\gamma \neq \delta$, pero sólo para $\gamma$ y $\delta$ de rango menor que $\alpha$ y $\beta$, así que la demostración completa requiere una inducción por el rango.)

**8.12. Verificación de 8.10.** Hemos de establecer que $\| \exists$ función de $\hat{\omega}_1$ en $P^B(\omega_0) \| = 0$, o sea, que

$$\| \exists g\, (g \text{ función } \vee \forall z\, (z \subseteq \hat{\omega}_0 \rightarrow \exists y\, (y \in \omega_1 \wedge$$

$$\wedge \langle y, z \rangle \exists g)) \| = 0.$$

Supongamos que para cierto $G \in V^B$ tenemos $0 \neq a = \| G$ función $\| \wedge \bigwedge_z (\ldots)$. Examinemos para cada $\alpha < \omega_2$ el término que responde a $Z = Z(\alpha)$ (definición en los p.p. 8.1 y 8.5) y tomemos en consideración que $\| Z(\alpha) \subseteq \hat{\omega}_0 \| = 1$:

$$0 \neq a \leqslant \| G \text{ función } \| \wedge \bigvee_Y \| Y \in$$

$$\in \hat{\omega}_1 \| \wedge' \| \langle Y, Z(\alpha) \rangle^B \in G \|. \tag{5}$$

En virtud de (1)

$$\| Y \in \hat{\omega}_1 \| \wedge \| \langle Y, Z(\alpha) \rangle^B \in G \| = \bigvee_{\beta < \omega_1} \| Y =$$

$$= \hat{\beta} \| \wedge \| \langle Y, Z(\alpha) \rangle^B \in G \| = \bigvee_{\beta < \omega_1} \| Y =$$

$$= \hat{\beta} \| \wedge \| \langle \hat{\beta}, Z(\alpha) \rangle^B \in G \|.$$

Sumando primeramente por $Y$ copiemos (5) en forma de

$$0 \neq a \leqslant \| G \text{ función } \| \wedge \bigvee_{\beta < \omega_1} \| \langle \beta, Z(\alpha) \rangle^B \in G \|.$$

Entonces, para cada $\alpha < \omega_2$ existirá un $\beta(\alpha) < \omega_1$ tal que

$$0 \neq a_\alpha = \| G \text{ función} \| \wedge \| \langle \beta(\alpha)^\wedge, Z(\alpha) \rangle^B \in G \|.$$

Por eso existirán tal valor de $\beta_0 < \omega_1$ y tal subconjunto $J \subseteq \omega_2$ de potencia $\omega_2$ que

$0 \neq a_\alpha = \| G$ función $\| \wedge \| \langle \hat{\beta}_0, Z(\alpha) \rangle^B \in G \|$ para todos los $\alpha \in J$.

Nosotros llegaremos a la contradicción con la condición de numerabilidad, al igual que en el punto anterior, si mostramos que $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ para $\alpha \neq \beta$, pero eso resulta de que $a_\alpha \wedge a_\beta \leq \| Z(\alpha) = Z(\beta) \| = 0$ en virtud del lema 8.5.

## 9. ¡Cuál es la potencia del continuo!

**9.1.** Después de todo lo que hemos conocido acerca del lenguaje y la axiomática de Zermelo—Fraenkel, puede parecer ingenuo reanudar este problema, no obstante, eso es inevitable si se considera que el sentido es el valor principal.

Entre los especialistas de los fundamentos de las matemáticas existe y está difundido el punto de vista según el cual la contestación consiste en que el problema es absurdo. Parece que a tal punto de vista comenzó a inclinarse Paul Cohen mismo [19] reconociendo que con ello «asume una carga pesada».

Desde luego, a partir de estas posiciones ha de ser rechazada casi toda la semántica del lenguaje $L_1$ Set, incluso a ciencia cierta los pisos $V_\alpha$ del universo de von Neumann comenzando de $\alpha = \omega_0 + 1$. Ninguna solución indecisa puede salvar la situación, por cuanto las cuestiones acerca de los axiomas superiores de la infinidad o de los tal llamados «cardinales medibles» se hallen en una posición aún peor que la HC.

En tal caso es necesario emprender una búsqueda seria de lenguajes alternativos y de semántica. Las discrepancias aquí son grandes e irreconciliables. La posición más nítida la ocupan los constructivistas a pesar de que tienen opiniones de distintos matices. Ellos rechazan la infinidad actual y las demostraciones no eficaces de la existencia. (A propósito, lo último en la práctica a menudo se reduce al uso de las palabras más diferenciado: «no puede no existir», «cuasi-existe», que es casi sinónimo de las precauciones lingüísticas adoptados en los textos clásicos.) La deficiencia de esta posición, según nuestro parecer, consiste en que el constructivismo no es «otra matemática». Esto es un subsistema muy refinado de las matemáticas clásicas que rechaza sus extremos y que trata con cuidado el aparato de cálculo efectivo.

Desgraciadamente, parece que precisamente los «extremos»—extrapolaciones valientes, abstracciones infinitas y que no se dejan interpretar constructivamente—dan eficacia al aparato. Es difícil imaginarse cual ayuda podrían prestar las matemáticas a la física cuántica del siglo XX, si en el transcurso del último centenario el aparato de las mismas se desarrollase sólo sobre la base de la abstracción del «objeto constructivo». Cualesquiera cálculos estándares con representaciones de dimensiones infinitas de los grupos de Lie que hoy en día desempeñan un importante papel en la comprensión del micromundo, lo más probable no serían inventados.

No se excluye que es conveniente buscar nueva (o bien olvidada vieja) concepción del continuo, con la cual éste no tendrá ninguna «potencia», en el profundo estudio del mundo exterior. La idea acerca del conjunto que consta de elementos corre verdaderamente el riesgo de resultar adecuado sólo para los conjuntos finitos o numerables, mientras que las «infinidades superiores» puedan resultar abstracciones de objetos de totalmente otro tipo.

La física como si indicara la diferencia de principio del procedimiento del «cálculo» desde la idealización de la medida según Eudox—Dedekind. Se dejan calcular los dominios materiales de atracción, los «atractores» (R. Thom), los cuales son unidades sin fronteras pronunciadas. Las fracciones de la unidad, incluso si se realizan físicamente, son atractores ya de otra naturaleza, en el micromundo estas representaciones, por lo visto, también pierden el sentido.

Si el carácter estadístico es una propiedad fundamental de la naturaleza, puede resultar fructuoso el examen de los modelos matemáticos, en los cuales aquel aparece en calidad de un concepto indeterminado. La inesperada riqueza de las interpretaciones no estándares de las matemáticas clásicas en los modelos de valor booleano concuerdan con la suposición de que todas las palabras que pronunciamos han de entenderse de otra manera.

**9.2.** Pasemos ahora al punto de vista menos radical respecto del problema del continuo para el cual éste se considera sensato. Entonces el problema principal continúa consistiendo en cómo se llega a saber el lugar que ocupa el continuo en la escala de álefes.

P. Cohen termina su libro [7] con la opinión siguiente: «El punto de vista el cual, como lo presiente el autor, al fin y al cabo pueda ser aceptada consiste en que la HC es, por lo visto, falsa ... $C$ es mayor que $\aleph_n$, $\aleph_\omega$, $\aleph_\alpha$, donde $\alpha = \aleph_\omega$, etc. Desde este punto de vista $C$ se considera un conjunto tremendamente grande, el cual nos ha sido dado por un cierto axioma nuevo y valeroso y al cual no se puede aproximarse por medio de algún proceso gradual de construcción».

De este modo, aquí se ha dado una estimación hipotética inferior de $C$ y nada más, incluso no hay suposiciones acerca de si es regular o singular el cardinal de $C$.

Sin embargo, el problema consiste, naturalmente, no sólo en adivinar la hipótesis verosímil. Se debe mantenerla con testimonios indirectos tan convincentes que se haga aceptada sin demostración. ¿Cuál puede ser el carácter de estos testimonios?

Gödel [20], discutiendo cualesquiera nuevos axiomas de la teoría de conjuntos, escribe lo siguiente: «desde luego, nosotros podemos tener esperanza en alcanzar una comprensión más profunda de las concepciones sobre las cuales se basan la lógica y las matemáticas. lo que permitirá discernir el axioma que nos interesa como consecuencia de estas concepciones».

Sin embargo, haciendo caso omiso de la necesidad interna de algún axioma nuevo e incluso reconociendo la ausencia de esta necesidad, podemos tomar la decisión acerca de la veracidad de dicho axioma mediante otro procedimiento: por inducción, estudiando su «buen éxito», o sea, su carácter fructuoso al deducir corolarios «que se verifican». Tenemos en cuenta corolarios que se demuestran sin este axioma, pero cuyas demostraciones, al utilizarlo, se simplifican considerablemente, se hace más fácil descubrirlos, se logra combinar en un razonamiento muchas distintas demostraciones. Los axiomas de los números reales que se rechazan por los intuicionistas, hasta cierto grado fueron probados en este sentido, porque la teoría analítica de los números a menudo permite establecer teoremas de la teoría de números que más tarde se dejan a demostrar con medios elementales. Pero es supuesto también un grado de seguridad mucho más alto. Pueden ser descubiertos axiomas tan ricos en corolarios a comprobar, que iluminan con luz tan viva disciplinas enteras y que brindan tan fuertes métodos de solucionar problemas (incluso que los resuelven en cierto sentido constructivo) que, independientemente de su necesidad interna, se conviene aceptar estos axiomas aunque sea en el mismo sentido en el cual se acepta cualquier teoría física bien argumentada».

Poco queda añadir a esta esperanza expresada con energía. No obstante, hay un teorema demostrado por el mismo Gödel; según este teorema en un sistema formal bastante rico, *cualquier* axioma nuevo e independiente reduce tan fuertemente como se quiere las demostraciones de las afirmaciones convenientes las cuales se demuestran sin aquél. Eso atenúa en cierto grado la fe en los criterios pragmáticos de la veracidad.

## Conclusión. Acerca del sentido del texto matemático

Los resultados arriba expuestos que ponen de manifiesto la inmensa complejidad de los conceptos «demostrabilidad» y «veracidad» de las afirmaciones matemáticas hacen natural la intención de discutir, cuál es en general el sentido de las abstracciones matemáticas. Los posibles puntos de vista al respecto sirvieron de partida para las distintas escuelas en el campo de fundamentos de las matemáticas las cuales se han formado en el siglo XX. A continuación describiremos brevemente las concepciones de estas escuelas y los problemas a resolver por nosotros.

No obstante, comenzaremos por la observación acerca de que el concepto de sentido del texto matemático por sí mismo es una abstracción de alto nivel. Al estudio más inmediato se entregan los *procesos de intelección del texto*, los cuales se aceptan por nosotros como material de origen. En estos procesos se destacan varios aspectos que alternativamente intervenían en el primer plano en los distintos actos individuales de intelección. Tenemos la intención de describirlos y proseguir, cómo la absolutización de alguno de estos aspectos define en los problemas de los fundamentos cada una de las posiciones filosóficas que se han formado.

Desde la niñez el hombre aprende entender los textos cotidianos en su lengua natal, paralelamente con la asimilación de la propia lengua, encontrándose en el medio lingüístico homogéneo. Así, en la conciencia individual se forma el núcleo potencial de los textos que se comprenden de una vez y unívocamente. Esta indivisibilidad del proceso de entendimiento del texto cotidiano permite atribuirle la presencia de un determinado sentido. Desde luego, cuando este proceso de entendimiento llega a ser objeto de estudio de los psicólogos, lingüistas, psiquiatras resulta que es muy complicado y tiene una organización jerárquica. Aquí lo podemos considerar como un todo, y el sentido producido por esta intelección, como una abstracción legítima.

Una cosa diferente ocurre con las lenguas de la ciencia. Al crear un concepto natural-científico de turno, un sistema de conceptos o una teoría, así como al efectuar la enseñanza de ellos, los textos se ofrecen juntamente con las instrucciones para su intelección. Estas instrucciones pueden constituir una parte explícitamente distinguida del texto, pero también pueden ser enmascaradas en las construcciones lingüísticas paralelas a las de los textos ya entendidos. Así aparece una expresión aparentemente comprensible «el electrón voló por la rendija *A* (y no por la rendija *B*)» en los manuales de la mecánica cuántica, cuyas «instrucciones» para su intelección es su sintaxis paralelo al sintaxis de la frase «la piedra voló por la rendija *A* y no por la *B*» que se en-tiende unívocamente. Estas «instrucciones» inducen al error y las explicaciones subsiguientes prolongadas están dedicadas a la introducción de la frase «amplitud de paso del electrón por la rendija *A*» construida correctamente para el lenguaje de la mecánica cuántica y a las instrucciones para su intelección. En el extremo lejano de tal jerarquía de instrucciones se encuentran habitualmente las descripciones de los procedimientos operacionales de las ciencias experimentales: de las medidas, observaciones, etc. La intelección del texto incluye en sí una comprensión más o menos completa de esta jerarquía.

La originalidad de los textos matemáticos suele consistir en la ausencia de tales procedimientos operacionales a los cuales el contenido del texto se reduzca en fin de cuentas. No obstante, en ciertas situaciones tal aspecto «realista» en la intelección del texto matemático desempeña el papel principal.

Luego, interpretando el texto matemático el matemático hace uso de imágenes visuales, cinemáticas y otras más o menos determinadas que surgen en su consciencia. El aspecto respectivo del sentido lo llamamos «interno».

Por último, interpretando el texto en su relación con otros textos reales o potenciales, o sea, construyendo sus traducciones a otros sublenguajes, haciendo explícitas las definiciones, formalizando, etc., el matemático se dirige al aspecto «exterior» del sentido.

Examinemos como ejemplo sencillo la intelección del concepto «dos» en los contextos «toma dos manzanas», «dualismo filosófico» y «el sexto signo después de la coma en la descomposición decimal de $\pi$ es dos». En el primero de los mismos lo más esencial es el aspecto realista del sentido, en el segundo, el interno, puesto que la representación acerca de «dos» debe aplicarse a un sistema conceptual tan compleja como «esencias iniciales que, por suposición, son la base del mundo entre los límites de los sistemas filosóficos de una cierta clase». Por último, en el tercer contexto prevalece el sentido exterior ya que la comprensión de este texto apela a la reconstrucción de cierto método de cálculo aproximado de $\pi$, método de obtención de decimales de aproximación respectiva, método de estimación de la exactitud de la aproximación, etc.

Preocupémonos de la descripción de estos aspectos del sentido y de su influencia en la elección y estimación de uno u otro sistema de fundamentos de matemáticas más detalladamente.

a) *Aspecto realista de la semántica*. No cabe duda que desempeña el papel principal en las matemáticas «aplicadas» en el sentido lato de la palabra. Aquí entran, naturalmente, los cálculos de ingeniería y económicos. Lo mismo se refiere también al aparato de la física teórica, sin embargo, aquí bruscamente crece el papel y la complejidad de los procedimientos de explicación del sentido físico de los cálculos. Por esta causa la estrictez formal matemática de los cálculos para el físico puede retroceder al segundo plano si las reglas de interpretación sirven de factor formador de formas más fuerte de la teoría. Así es el estado de cosas con los procedimientos del cambio de reglamentación en la electrodinámica cuántica los cuales para las matemáticas parecen ser reglas de inferencia que se introducen ad hoc en el texto formal, pero obtienen una intelección y justificación final al coincidir las correcciones de radiación calculadas con las medidas experimentalmente. La física brinda modelos importantísimos de pluralidad de las interpretaciones realistas de la misma teoría matemática: la ecuación de la onda puede describir la oscilación de una cuerda y la dispersión de los electrones; la integral puede responder al objeto, a la carga, al camino o a la probabilidad; se pueden aducir ejemplos hasta el infinito. La acentuación de esta idea conduce a muy diferentes concepciones tales como el «convencionalismo» de A. Poincare, «relativismo de la teoría de conjuntos» de Skolem o interpretación de teoría de conjuntos de la lógica intuicionista.

Para un «puro» matemático el aspecto realista del sentido puede prevalecer, cuando el texto se interpreta como una descripción del procedimiento algorítmico que se realiza con los mismos textos. Tales son los algoritmos de escuela de las operaciones con las fracciones decimales o las reglas matemáticas de substitución del término en la fórmula. Por último, el sentido del programa para el ordenador es la sucesión de estados, la cual reproduce ésta obrando de acuerdo con el programa. Exagerando un poco se puede decir que el funcionamiento del ordenador es uno de los procedimientos de intelección del programa. Las matemáticas de Egipto y Babilonia fueron casi totalmente «realistas», y así es la semántica de los manuales tradicionales de escuela para las clases menores.

Es preciso subrayar que la palabra «realista» ha de entenderse en el sentido lato en nuestras explicaciones. Incluso cuando su interpretación se efectúa en términos de procedimientos empíricos, entendemos siempre en realidad ciertas abstracciones, y a menudo muy refinadas. Estas abstracciones pueden ser no sólo natural-científicas sino también filosóficas: la suposición acerca de la existencia de cierto mundo «neoplatoniano» de conjuntos permite concernir a la «realista» la filosofía de las matemáticas clásicas de la teoría de conjuntos. El rechazamiento de este mundo como irreal y su reemplazo por otro mundo más real de textos y procedimientos algorítmicos sobre ellos caracteriza «otro realismo» de las matemáticas constructivas. La orientación hacia la realidad del mundo físico y la interpretación de las matemáticas en términos de las ciencias naturales predetermina la filosofía «aplicada» de las mismas, que casi no está formulada sistemáticamente aunque se crea diariamente por los físicos.

b) *Aspecto interno de la semántica*. Como ya se ha dicho este aspecto se revela en cada acto individual de intelección como un «sentido intuitivo» del texto que se hace explícito con dificultad y que depende de la consciencia individual.

Cada hombre tiene acceso directo solamente a su propia consciencia. La autoobservación y los medios lingüísticos permiten crear cierta imagen exterior de sus actos de razonamiento, no obstante, poco perfecto e incompleto. Al hacerlo, el componente fundamental subconsciente ora se cae en general de la descripción, ora se deforma brutalmente como resultado de las intenciones de su exteriorización.

Por estas causas las descripciones existentes del sentido intuitivo de los textos conciernen a conceptos aislados y a actos de razonamiento elementales. Además de los filósofos y psicólogos, estupendos modelos de tales descripciones los dejaron B. Pascal, P. S. Laplace, A. Poincare, J. Hadamard. La comunidad de las estructuras anatómica y funcional del sistema nervioso central de distintas personas por una parte y la de experiencia y de los conocimientos prácticos lingüísticos por otra permite desprender cierto conjunto de unidades elementales de expresión para el «lenguaje de los sentidos intuitivos». Aquí pueden penetrar tales términos bizmatemáticos como «cantidad», «proximidad»; en un nivel más alto, «relación», «continuidad/discreción», en un nivel aún más alto, «algoritmo». En el papel de tales unidades de expresión pueden intervenir también dibujos esquemáticos.

La atribución del estado de término al concepto intuitivo en el subsistema axiomatizado de las matemáticas lo conduce del nivel de la «semántica interna» al nivel de la «semántica exterior». En este caso la precisión del sentido se produce a costa del rechazo de las posibilidades potenciales encerradas en la imagen intuitiva. Así, el concepto intuitivo «variable infinitésima actual» fue rechazado totalmente en la motivación clásica del análisis, luego renació en los conceptos exactos del «elemento nilpotente» en las geometrías algebraica y diferencial de la actualidad y del «número infinitésimo» en los modelos no estándares de los campos reales de los lógicos. Conservando ciertos rasgos del arquetipo intuitivo estas interpretaciones «exteriores» de la variable infinitésima no coinciden y desvían el pensamiento hacia distintas direcciones.

El conujnto de unidades de sentido interno individual e históricamente es variable, es abierto y débilmente estructurado. La asimilación del material nuevö conduce a la formación de nuevas unidades. Por ejemplo, la interacción de las partículas elementales entre sí y con el campo en la física puede ser descrita en el lenguaje de los «grafos de Feynman». Cada uno de tales grafos «es» un dibujo de puntos de distinta clase unidos con aristas-líneas de distintas clases. Interpretando dicho grafo de «manera realista» el físico verá en la parte de sus aristas las líneas mundiales de las partículas elementales. La otra parte de aristas que no se deja interpretar de tal manera se confrontará con las partículas «virtuales». Así se origina una nueva unidad cómoda del sentido intuitivo que responde a los hechos no observables, sino a unidades de expresión intermedias en el lenguaje adoptado. De forma análoga surgieron los «quarks» que responden a las representaciones irreducibles de cierto grupo. El problema acerca de la «existencia real» de las partículas virutales o de los quarks necesita una fina interpretación que anteceda a las intenciones de resolverlo.

Notemos, por último, que la intelección «exterior» del grafo de Feynman supone, por ejemplo, saber escribir por éste el correspondiente término de la serie de la teoría de las perturbaciones, y que la intelección «exterior» de los quarks supone saber descomponer el producto tensiorial de dos representaciones en la suma de los componentes irreducibles.

Cualquier concepción sucesiva de los fundamentos de matemáticas tiende a limitar el fondo de unidades usuales del sentido intuitivo por el mínimo imprescindible, efectuándose tanto la selección de las unidades de expresión tolerables como la restricción de la extensión de su contenido intuitivo. Después de eso las demás unidades aceptables de la intuición se estructuran reduciéndose a las elementales.

La aceptación del lenguaje de la teoría de los conjuntos preparada por la «aritmetización del continuo» en realidad permitió reducir bruscamente el campo, necesario para el matemático, de las unidades elementales del sentido «interno» o, según N. Bourbaki, de las «distintas intuiciones», sin disminuir el volumen de las matemáticas clásicas. Después de aprender interpretar los conceptos de la teoría de conjuntos y construcciones, el matemático podía dejar de recurrir a la intuición como único manantial de muchos otros conceptos. La «curva», por ejemplo, se hizo una construcción compleja de la teoría de conjuntos pero que se deja transmitir de manera inequívoca.

El estudio ulterior de este concepto pudo descubrir en éste tanto las propiedades anteriores «intuitivamente obvias», como también totalmente nuevas, a la manera de la existencia de la curva de Peano que llena el cuadrado lo que parecía ser bruscamente contradictorio a la intuición (A. Poincare). La teoría de conjuntos libró la mayoría de los matemáticos de la anarquía de diferencia de las intuiciones individuales, verdad es que a costa de establecer la tiranía de la menoría que intenta conseguir la aclaración intuitiva y la concordancia del sentido interno del único concepto principal «conjunto» que primeramente parecía tan seguro.

Examinemos de este punto de vista varias alternativas del lenguaje de la teoría de conjuntos. La primera de las mismas es el lenguaje dual de las «propiedades», «predicados», etc. Su expresión elemental «poseer propiedad» reemplaza la expresión «ser elemento del conjunto». La semántica del concepto «propiedad» que se considera por primordial, en la intuición no está obligada a ser totalmente equivalente a la del concepto «conjunto de elementos con propiedad dada» aunque fuese por el simple hecho de que la claridad de la propiedad «ser rojo» no requiere en absoluto la claridad del «conjunto de objetos rojos» tomando en consideración al menos la presencia de la escala de los matices del color. Es más, en las matemáticas precantorianas el lenguaje de las propiedades se utilizaba precisamente para reemplazar la infinidad tabulizada actual. En efecto, intuitivamente la «verificación de lo que el objeto posee la propiedad dada» difiere fuertemente de la «reunión de todos los objetos con la propiedad dada».

No obstante, en los sistemas de Russel—Whitehead, Quine y otros autores la formalización del lenguaje de las propiedades en las «teorías de los tipos» se utilizaba precisamente para argumentar la teoría de conjuntos. El objetivo pragmático consistía en tal restricción del universo y de los medios lingüísticos para que se haga imposible la aparición de paradojas de tipo de Russel.

Para la teoría de tipos la «realidad» es el universo el cual consta de los indiyiduos (de tipo nulo), sus propiedades (de primer tipo), de las propiedades de sus propiedades (de segundo tipo), etc. hasta el infinito. La paradoja de Russel no es reproductible, ya que la propiedad de «ser propiedad que no la posee misma» no pertenece al universo. En este universo, no obstante, no es cómodo interpretar las matemáticas clásicas ya al nivel del lenguaje y casi imposible al nivel de las axiomas de existencia: el «axioma de reductibilidad» específico que se postula por Russel no le satisfacía a el mismo. Las variantes de la teoría de tipos se asocian con la tesis «logística» según la cual las matemáticas son reductibles a la lógica por causas históricas e intuitivas. Es poco probable que esta misma tesis posea un contenido nítido (véase Kleene [3]).

En las matemáticas intuicionistas tanto el lugar del «conjunto» como el de la «propiedad» lo ocupa aproximadamente la expresión «ley de formación»; no obstante, la orientación de principio del intuicionismo hacia el carácter no importante del «sentido exterior» de sus textos, en particular, el carácter inadecuado de cualquiera de las formalizaciones impide que esta confrontación se conduzca demasiado lejos.

Para Brouwer y su escuela de intuicionismo el objeto de la intuición inicial es la serie de los números enteros 0, 1, 2, 3, . . ., que en este caso se considera no como terminada, sino como una que se forma por medio de la ley de paso de $n$ a $n+1$. Correspondientemente la inducción se considera por prototipo principal de todas las construcciones admisibles en matemáticas. Por si mismas las construcciones deberán realizarse con ayuda de los medios finitos sobre objetos finitos, y la existencia del objeto matemático se comprende como una posibilidad de construirlo. Eso excluye las demostraciones de la existencia «por reducción al absurdo» que no se acompañan por la presentación del objeto respectivo en el caso cuando éste deba elegirse del conjunto potencialmente inifinito. Eso es el conocido principio de no aplicabilidad de la ley del tercer excluido en los dominios infinitos.

El continuo de Brouwer representa un «ambiente de formación libre», digamos, de fracciones decimales infinitas no actualmente, sino potencialmente, el cual, en términos clásicos, se hace explícito con dificultad y en el cual, no obstante, la elección de las decimales sucesivas no está subordinada a ninguna ley.

Kronecker füe el primer propagador de limitaciones, que se imponen por tal punto de vista sobre las matemáticas, y uno de los más poderosos contrarios de Cantor. Brouwer y sus adeptos aplicaron muchos esfuerzos para aclarar los contornos de las matemáticas intuicionistas y de la lógica desarrollando sus principios positivos. Sin embargo, ellos, en particular, Heyting, siempre subrayaban el primado de la interpretación interna de los textos matemáticos y las posibilidades limitadas de su transmisión en las teorías axiomáticas que se entienden unívocamente. De estas posiciones filosóficas la falta de disposición de aceptar la interpretación interna de la teoría de conjuntos al estilo de Cantor puede parecer inexplicable: muchos matemáticos reconocen la interpretación interna de la teoría de conjuntos en su totalidad. Para explicarlo los intuicionistas aducen argumentos psicológicos a favor del primado de la idea del desmembramiento, discontinuidad y, quiere decir, de la numerabilidad potencial como único tipo legal de la infinidad. A los intuicionistas les son propias también las apelaciones al sentido «realista» de las matemáticas; en uno de los artículos Brouwer afirma que el empleo del principio del tercer excluido en las ciencias naturales depende de que el mundo físico es finito y discreto.

El constructivismo de la escuela de A. A. Markov comenzó a formarse a fines de los años cuarenta como variante del intuicionismo que utiliza las precisiones de los conceptos del objeto constructivo y algoritmo a base de la teoría de las funciones recursivas o de sus variantes. Sin meterse aquí en los detalles de las definiciones indicaremos sólo ciertas orientaciones características de principio de esta escuela.

La «realidad» de los constructivistas la constituyen los textos en alfabetos finitos que se someten a procesos de tratamiento los cuales son algorítmicos y en particular también son descritos por textos en alfabeto finito.

La infinidad potencial se admite como una abstracción de los textos de longitud no limitada de antemano y de los algoritmos que funcionan un tiempo no limitado con anticipación; la infinidad actual se rechaza.

La existencia del objeto matemático se interpreta ora como su presentación ora como una posibilidad de construirlo algorítmicamente. La sutileza esencial consiste en que según A. A. Márkov la posibilidad de la construcción algorítmica por sí misma puede ser establecida con medios clásicos y no exclusivamente por presentación de tal construcción. En particular, en tales demostraciones puede aprovecharse la reducción a la contradicción.

El continuo constructivo está representado por pares de algoritmos de los cuales el primero prefija la sucesión calculable de Cauchy de los números racionales y el segundo, las estimaciones explícitas de la velocidad de convergencia (en el sentido clásico). Desde le punto de vista de las matemáticas clásicas el continuo constructivo es numerable, además, a) la propiedad del par de algoritmos de definir el número real algorítmicamente es insoluble; b) la propiedad de dos tales pares de definir el mismo número es insoluble; precisamente así mismo es insoluble la propiedad de representar dicho número. Por estas causas el análisis constructivo difiere bruscamente del corriente. Por ejemplo, como funciones de una variable real se consideran algoritmos que traducen el número real constructivo en otro semejante. Pero entonces una función simple como $f(x) = -1$ para $x \leqslant 0$, $f(x) = 0$ para $x > 0$, no existe en el análisis constructivo, pues en el caso contrario fuese soluble la propiedad del número de «ser cero». En la realidad, todas las funciones constructivas son continuas en el sentido clásico de de la palabra.

La «realidad» con la cual las matemáticas clásicas confrontan sus construcciones, para la mayoría es algo parecido a la «realidad» de Platón del mundo de ideas. Desde el punto de vista del materialismo filosófico eso es una realidad sublimada y exteriorizada de las conciencias individuales que reflejan el mundo exterior; desde el punto de vista del platonismo, una realidad independiente de la conciencia y que se encuentra con ella en harmonía preestablecida. Nosotros también podemos considerar este mundo como una parte general de proyecciones fuera de los sentidos interiores de las matemáticas en las conciencias individuales. La representación sobre la unidad de tal mundo podía existir sólo hasta que las voces protestantes de los eminentes matemáticos del mundo demostraran lo contrario.

No obstante, es poco probable que se pueda considerar definitivas cualesquiera argumentos que se han enunciado respecto a la semántica del concepto «conjunto» en las matemáticas. Su análisis atento muestra la extremada pobreza del material científico utilizado.

Por ejemplo, criticando la infinidad actual cantoriana de esencias discernibles desde las posiciones «realistas» se podría notar que ésta absolutiza (hace absoluta) no tanto la experiencia de tratamiento con el finito como la física cotidiana de la cordura, en la cual el mundo se compone de cosas aisladas que pueden ser contadas, ordenadas, reunidas, etc. La física cuántica sugiere entonces abstracciones del mundo de totalmente otro tipo, en el cual el «conjunto» de electrones, digamos, se compone de esencias distintas, pero no discernibles, en el cual la lógica no refleja la del habla corriente orientada hacia el micromundo, pero tampoco coincide con la lógica del intuicionismo: en general con cualquiera de las versiones que se han propuesto por los filósofos de las matemáticas. La infinidad del micromundo «adentro» y «a lo ancho» con sus aspectos probabilísticos y de campo totalmente no se parece a la cantoriana y seguramente es irreducible a la sucesión de los «actos elementales de discernimiento», no importa como considerarla: actual o potencial. El predicado mismo «ser elemento» tiene en el micromundo un estado dudoso.

Por otra parte, tanto los razonamientos psicológicos de Brouwer, Heyting como los de otros apelan en lo general a la autoobservación elemental y totalmente no toman en consideración los alcances de las psicología y neurofisiología científicas. Se puede decir que la gran atención prestada a los aspectos constructivos de las matemáticas permitió destacar el concepto de la máquina universal de Turing como «factor mínimo común» de todas las consciencias individuales. Su base fisiológica es la actividad motora discretizada con empleo de los receptores más sencillos, por ejemplo, de los táctiles.

La infinidad potencialmente numerable de los intuicionistas y constructivistas es una que está al alcance de este factor. No obstante, la intuición geométrica, sobre la cual se funda la infinidad del continuo, se ignora totalmente con tal manera de abordar la cuestión. Su base fisiológica es la actividad motora más amplia que se apoya sobre los procesos más complicados de tratamiento de la información mediante los receptores visuales de las zonas corticales respectivas. La descripción neurofisiológica de estos procesos sólo se comienza, pero ya es bien claro que las concepciones supersimplificadas de la intuición matemática que se proponen en el ardor polémico están lejos de la realidad.

c) *Aspecto exterior de la semántica*. Este aspecto complementa el interno en el mismo sentido en el cual la descripción de las reglas de uso de la palabra «conjunto» complementa su definición según Cantor. Interpretando el texto matemático de modo «exterior» el matemático puede construir sus traducciones a otros sublenguajes (de las fórmulas a los gráficos y viceversa), componer distintas abreviaturas del texto o, al revés, reconstruir los detalles omitidos de las demostraciones, experimentar con el cambio de las premisas, etc. El «sentido exterior» del texto matemático es su sentido de trabajo para un matemático profesional, cuando éste escribe un artículo, enseña matemáticas a los estudiantes o se comunica con sus colegas. El procedimiento de la intelección exterior no está obligado a ser y raras veces suele ser dato completo, exacto y rectilíneo con respecto a los conceptos fundamentales (así es sólo su modelo en la teoría formal). Dicho procedimiento contiene círculos, atolladeros y saltos. La intelección de la recta euclidiana como modelo de los números reales, y de los números reales como conjuntos de puntos de la recta no define ninguno de estos conceptos, pero esclarece el sentido de los dos.

Interpretando de la manera «realista» la función delta de Dirac ($\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$, $\delta(0) = \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$), el físico se la imaginará, digamos, como una masa unitaria puntual de densidad infinita. Para el matemático la variante un poco más abstraída de esta representación concernirá más bien a la categoría de la semántica «interna». Y sólo después de obtener la posibilidad de comprender la función delta de manera «exterior» como funcional sobre un espacio de funciones finitas, y después de incluirla de este modo como un término bien definido en los formalismos del análisis y como objeto particular de la teoría de conjuntos en las teorías de las matemáticas generales, el matemático se sentirá completamente tranquilo. Sin embargo, el físico puede por completo quedar satisfecho con el formalismo exterior para el caso dado sin postular en absoluto su reductibilidad a la teoría de conjuntos.

El componente filosófico de las concepciones formalistas de las matemáticas está precisamente relacionado con la absolutización de su aspecto exterior, cuando el contenido totalmente se identifica con la forma. La cristalización de las matemáticas formales en las obras de Hilbert y de su escuela la debemos de nuevo a las dificultades de la teoría de conjuntos.

La innovación de Cantor ante todo se manifestó en la creación de una teoría no formal de «órdenes de la infinidad». Desde el punto de vista lingüístico eso significaba la introducción implícita de algunos axiomas de la existencia de conjuntos (incluso la axioma del conjunto de partes y la axioma de la elección), el uso de construcciones lingüísticas de tipo nuevo (como definición de la ordenación completa) y, por último, el empleo libre de la lógica del finito en el nuevo mundo infinitario (en particular, de la ley del tercer excluido).

Desde luego, tal estimación de la obra de Cantor se hizo posible solamente en la retrospección, para él y mucho tiempo después de él el primer lugar lo ocupaba la semántica de la infinidad actual de tipo platoniano, aunque, posiblemente, no revelada hasta el final. En todo caso las afirmaciones y problemas acerca de la existencia de unos u otros conjuntos se percibían como tales que tenían un sentido comprensible para todos. Los mismos conjuntos, cuya existencia se confirmaba, podían asignarse por indicación de la propiedad de su elemento común o por la construcción de algunos conjuntos ya dados.

El traslado de la acentuación desde el «sentido» al «texto» ha sido provocado precisamente por la crítica de tal semántica tanto debido al descubrimiento de las paradojas como debido a la inadmisibilidad intuitiva para muchos del teorema de Zermelo acerca de la posibilidad de ordenar bien cualquier conjunto. El punto de vista de Hilbert consistía en que no todos los conceptos matemáticos y razonamientos en general habían de ser interpretados directamente en los términos finitos. Los que no admiten tal interpretación son construcciones lingüísticas «ideales» que se adjuntan al sistema para simplificar las demostraciones de los teoremas, estandarizar el lenguaje, etc. No obstante, su admisión al sistema requiere que se observen determinadas reglas de higiene la principal de las cuales es el carácter no contradictorio del mismo. El carácter no contradictorio debe ser asegurado con anticipación por investigación minuciosa de la sintaxis del lenguaje que ya debe realizarse sin que se apele a la infinidad actual.

La totalidad de los modelos formales de las matemáticas y de la lógica que se ha originado como resultado de ejecución de este programa ha sido su resultado más importante. En particular, la formalización de los conceptos matemáticos exactos del «carácter calculable» y «algoritmo» y de toda la teoría de las funciones recursivas está estrechamente enlazada con el programa de Hilbert. La imposibilidad de su cumplimiento en el volumen descrito descubierta por Gödel constituye el otro aspecto del problema. Es difícil decidir si atestigua esta imposibilidad a favor de la aceptación de la teoría intuitiva del conjunto, como la conocemos ahora, o de su rechazo; con los mismos motivos este problema ya puede plantearse para la aritmética.

En todo caso, el punto de vista a las matemáticas como a un sistema formal es muy fértil si se da cuenta de su limitación. Este punto de vista permite alcanzar una comprensión mutua considerable al analizar tales concepciones distintas como la lógica intuicionista y la física teórica proporcionando «esquemas vacíos» de estructuras complejas. El carácter no contradictorio del sistema formal cuyo efecto benéfico ha sido comprobado experimentalmente deja de ser un problema primordial. La elección de los textos generados concretamente en tal sistema los cuales constituyen una parte muy insignificante de todos los textos tolerables, a pesar de todo se realiza según las reglas que no se formalizan y que son más importantes que el carácter no contradictorio formal el cual se describe en los términos de todos los textos que pueden ser engendrados. El papel de los textos que se eligen consiste en la mediación importantísima aunque mal estudiada entre el cerebro y otro tanto, entre el cerebro y el mundo exterior, así como entre el cerebro y sí mismo (el texto es la memoria exterior, el texto establece el puente entre las intuiciones geométrica y aritmética de cada consciencia individual, las cuales, posiblemente, se apoyen sobre mecanismos fisiológicos esencialmente distintos). En fin de cuentas, el aspecto principal del texto es su capacidad de participar en tales actos de mediación, y sólo el estudio de esta capacidad puede resolver el enigma de las matemáticas. La vieja metáfora de V. Hugo que confronta el libro con la catedral tiene un sentido profundo si la estructuración del texto constituye una premisa más importante de su papel social.

Todos estos problemas contribuyen a lo que las matemáticas se hagan humanitarias; junto con el movimiento al encuentro de «matematización» de los conocimientos humanitarios ellos ayudan a devolver la unidad perdida de las dos culturas. En previsión de la síntesis podemos esperar una comprensión nueva del «conjunto» como una de las más asombrosas gemas mitológicas de la actualidad.

# Bibliografía


**Libros y artículos sobre la lógica matemática y la teoría de los conjuntos**

1. **Shoenfield J.** Mathematical Logic, Addison-Wesley, 1967
2. **Mendelson E.** Introduction to Mathematical Logic
3. **Kleene S.** Introduction to Metamathematics, New York, 1952
4. **Lyndon R.** Notes of Logic, Priceton, 1966
5. **Bourbaki N.** Théorie des ensembles, Paris, 1958
6. **Rosser J. B.** Logic for Mathematicians, New York, Putnam, 1953
7. **Cohen P.** Set Theory and the Continuum Hypothesis, New York, 1966

**Libros y artículos acerca da la teoría de las funciones recursivas y los algoritmos**

8. **Марков А. А.** Теория алгоритмов, Труды мат. ин-та В. А. Стеклова АН СССР, 1954, т. 42 (Markov A. A. Teoría de los algoritmos)
9. **Успенский В. А.** Лекции о вычислимых функциях, М., Физматгиз, 1960 (Uspenski V. A. Lecciones sobre las funciones calculables)
10. **Мальцев А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции, М., Наука, 1966 (Maltsev A. I. Algoritmos y funciones recursivas)
11. **Rogers H. Jr.** Theory of Recursive Functions and Effective Computability, New York, 1967
12. **Матиясевич Ю. В.** Диофантовы множества, УМН, 1972, т. 22, вып. 5, с. 185—222 (Matiyasevich Yu. V. Conjuntos diofánticos)
13. **Манин Ю. И.** Десятая проблема Гильберта, Современные проблемы математики, Под ред. Р. В. Гам-

крелидзе, М., ВИНИТИ, 1973, вып. I, с. 5—37 (Manin Yu. I. Décima problema de Hilbert)
14. **Манин Ю. И.** Теорема Геделя, Природа, 1975, № 2, с. 80—87 (Manin Yu. I. Teorema de Gödel)
15. **Успенский В. А.** Теорема Геделя о неполноте в элементарном изложении, УМН, 1974, т. 29, вып. 1, с. 3—47 (Uspenski V. A. Teorema de Gödel sobre la incompletitud en interpretación elemental)

**Libros y artículos sobre los problemas acerca de los fundamentos de las matemáticas**

16. **Tarski A.** Introduction to Logic and Methodology of Natural Sciences
17. **Fraenkel A., Bar-Hillel Y.** Foundations of Set Theory, Amsterdam, 1958
18. **Тростников В. Н.** Конструктивные процессы в математике, М., Наука, 1975 (Trostnikov V. N. Procesos constructivos en las matemáticas)
19. **Cohen P.** Foundations of Set Theory
20. **Gödel K.** What is Canotor's continuum problem? American Mathematical Monthly, 1947, v. 54, № 9
21. **Lakatos I.** Proofs and Disproofs

**Otros trabajos citados**

22. **Cartan A., Eilenberg S.** Homological Algebra, Priceton, 1956
23. **Lindsey C., van der Meulen S.** Informal Introduction to ALGOL-68, Amsterdam, 1971
24. **Гладкий А. В., Мельчук И. А.** Элементы математической логики, М., МИР, 1969 (Gladki A. V., Melchuk I. A. Elementos de la lógica matemática)
25. **Ивин А. А.** Логика норм, М., МГУ, 1973 (Ivin A. A. Lógica de las normas)
26. **Лурия А. Р.** Потерянный и возвращенный мир, М., МГУ, 1971 (Luria A. R. El mundo perdido y recuperado)
27. **Стеблин-Каменский М. И.** Культура Исландии, Л., Наука, 1967 (Steblin-Kamenski M. I. Cultura de Islandia)
28. **von Neumann J.** Mathematische Grundlagen der Quanten Mechanik, Berlin, Springer, 1932
29. **Mackey G.** The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. A Lecture-Note Vol., New York, 1963
30. **Reid C.** Hilbert, Berlin, Springer, 1975
31. **Ŝmullyan R. M.** Languages in which selfreference is possible, J. Symbolic Logic, 1975, v. 22, № 1

32. **Selfridge J., Nicol C. A., Vandiver H. S.** On the loust Fermat theorem, "Proc. National Academy USA", 1955, v. 41, p. 970—973
33. **Swinnerton-Dyer H. P. E.** On the product of three homogeneous linear forms, "Acta Arithmetica", 1971, v. 18, p. 371—385
34. **Siegel C.-L.** Zuzwei Bemerkugern Kummers, "Nachrichten Ak. Wiss. Götingen, Math.-Phys. Klasse", 1964, № 6, p. 51—57
35. **Mumford D.** Equations defining abelian varieties, Inventiones Mathematicael, 1967, v. 3, p. 3
36. **Kochen S., Specker E. P.** The Problem of hidden variables in quantum Mechanics, J. Mathematics and Mechanics, 1967, v. 17, p. 59—87

# Indice alfabético de materias y nombres

# Indice

## Capítulo III. Problema del continuo y forcing



---

## A nuestros lectores:

УДК 51—007=60

Юрий Иванович Манин

ДОКАЗУЕМОЕ И НЕДОКАЗУЕМОЕ

Контрольный редактор С. Н. Балашник
Редактор Ю. А. Захаров
Художник С. И. Кравцова
Художественный редактор Л. Н. Подмарькова
Технический редактор Л. П. Бирюкова
Корректор Г. И. Власова

ИБ № 2850

Сдано в набор 25.12.80.
Подписано к печати 29.04.81.
Формат 74×90 1/32.
Бумага типографская № 1.
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая.
Объем 4,13 бум. л. Усл. печ. л. 10,15. Усл. кр.-отт. 10,29.
Уч.-изд. л. 11,80. Изд. № 1/1162.
Тираж 7000 экз. Зак. 01152. Цена 1 р. 34 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома Государственного Комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва 103001, Трехпрудный пер., 9.

2500000000

М $\frac{30501—246}{041(01)—81}$ инф. письмо

En la actualidad los métodos matemáticos se utilizan ampliamente en las ciencias naturales y humanitarias. Ello contribuye a que entre los amplios círculos de usuarios de matemáticas crezca el interés hacia la misma esencia del razonamiento matemático y hacia la naturaleza de la demostración. En el libro se hace la intención de satisfacer dicho interés. La presentación va acompañada de digresiones a la física, psicología y semiótica.