

2

parte

Teoría de los procesos aleatorios

Capítulo 9

NOCIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE LOS PROCESOS ALEATORIOS

9.1. Definición del proceso aleatorio

9.1.1. Distribuciones de dimensiones finitas. Se denomina proceso aleatorio en el espacio probabilístico (Ω, \mathcal{E}, P) una familia de las magnitudes aleatorias $\xi(t, \omega)$ dependientes de un parámetro real t que toma los valores de cierto conjunto T . Este conjunto recibe el nombre de dominio de definición del proceso. Las propias magnitudes aleatorias $\xi(t, \omega)$ pueden ser reales o complejas, o bien vectoriales. Un espacio X en el cual $\xi(t, \omega)$ toma sus valores, se llama espacio físico del proceso. Según sea el espacio físico de un proceso, suele decirse que los procesos son numéricos, de valores complejos o vectoriales. Igual que en el caso de las magnitudes aleatorias, para los procesos aleatorios el argumento ω se omite con frecuencia y se escribe $\xi(t)$, en lugar de $\xi(t, \omega)$. Una de las características principales del proceso aleatorio la constituyen sus distribuciones de dimensiones finitas (parciales), esto es, un juego de funciones definidas para todo k natural mediante las correlaciones

$$E_{t_1, t_2, \dots, t_k}(A_1, A_2, \dots, A_k) = P \left\{ \bigcap_{j=1}^k \{ \xi(t_j, \omega) \in A_j \} \right\},$$

donde $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$, A_1, A_2, \dots, A_k son conjuntos borelianos del dominio de los valores del proceso.

Las distribuciones de dimensiones finitas satisfacen las siguientes condiciones evidentes:

I. Para t_1, t_2, \dots, t_k fijados la función $F_{t_1, t_2, \dots, t_k}(A_1, \dots, A_k)$ es una distribución conjunta de k magnitudes aleatorias;

II. $F_{t_1, \dots, t_k}(A_1, \dots, A_k) = F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_k}}(A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$, cualquiera que sea la permutación i_1, \dots, i_k de los números $1, 2, \dots, k$.

III. Si X es el dominio de los valores del proceso, entonces

$$F_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_k}(A_1, \dots, A_{k-1}, X) = F_{t_1, \dots, t_{k-1}}(A_1, \dots, A_{k-1}).$$

Las distribuciones de dimensiones finitas $F_{t_1, \dots, t_k}(A_1, \dots, A_k)$ pueden ser dadas mediante las densidades de dimensiones

finitas de una distribución, esto es, mediante las funciones $f_{t_1, \dots, t_h}(x_1, \dots, x_h)$ de tal índole que

$$F_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h) = \int_{A_1} \dots \int_{A_h} f_{t_1, \dots, t_h}(x_1, \dots, x_h) dx_1 \dots dx_h.$$

La respuesta a la pregunta de en qué condiciones existe un proceso aleatorio para el cual el juego dado de funciones $F_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h)$ constituye distribuciones de dimensiones finitas, nos la da el teorema que sigue.

Teorema 1 (de Kolmogórov). *Supongamos que las funciones $F_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h)$ están definidas para $t_1, \dots, t_h \in T$, y $A_1, \dots, A_h \in \mathfrak{B}(X)$ es la σ -álgebra de conjuntos borelianos en el espacio euclidiano de dimensiones finitas X . Entonces, para que exista un proceso aleatorio para el cual $F_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h)$ sean distribuciones de dimensiones finitas, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones I—III. A título de espacio probabilístico se puede elegir el espacio $\{\Omega, \mathfrak{E}, P\}$, donde Ω es el conjunto de todas las funciones $\omega(t)$ definidas en T que toman sus valores de X ; la σ -álgebra \mathfrak{E} es la σ -álgebra mínima generada por conjuntos cilíndricos, es decir, por los conjuntos del tipo*

$$\{\omega : \omega(t_1) \in A_1, \dots, \omega(t_h) \in A_h\} = C_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h),$$

y la medida P se determina por la correlación

$$P(C_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h)) = F_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h).$$

El proceso aleatorio buscado en este espacio probabilístico se determina mediante la igualdad

$$\xi(t, \omega) = \omega(t).$$

Las funciones $\xi(t, \omega)$ con ω fijado se denominan **funciones muestrales** del proceso aleatorio.

La construcción de un proceso aleatorio con las distribuciones de dimensiones finitas dadas, propuesta en el teorema de Kolmogórov, conduce a un espacio de funciones muestrales demasiado amplio. A veces resulta deseable construir un proceso cuyas funciones muestrales posean ciertas propiedades de regularidad (por ejemplo, que son medibles, continuas, derivables, etc.).

Dos procesos aleatorios son **estocásticos equivalentes en amplio sentido**, si coinciden sus distribuciones de dimensiones finitas.

Teorema 2. *Con el fin de conseguir que para el proceso dado exista un proceso estocástico equivalente en amplio sentido, cuyas funciones muestrales pertenecen al conjunto $F \subset \Omega$, es necesario y suficiente que $P^*(F) = 1$, donde P^* es una medida exterior construida según la medida P que fue determinada en el teorema de Kolmogórov.*

$$P^*(G) = \inf_{\cup C_h = G} \sum P(G_h),$$

donde C_h son conjuntos cilíndricos; G es un conjunto arbitrario de Ω .

Si esta condición se cumple, a título de espacio probabilístico en el que está dado el proceso podemos tomar $\{F, \mathfrak{S}^*, P^*\}$, donde \mathfrak{S}^* es una σ -álgebra de los conjuntos Ω del tipo $F \cap C$, donde $C \in \mathfrak{S}$ y el propio proceso se determina, como antes, por la correlación

$$\xi(t, \omega) = \omega(t).$$

Sea $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, un proceso aleatorio (real, complejo o vectorial), definido en un espacio probabilístico arbitrario $\{\Omega, \mathfrak{S}, P\}$. Si \mathfrak{E}_T designa el espacio de todas las funciones con los mismos valores que $\xi(t, \omega)$ en tanto que \mathfrak{S}_T es la σ -álgebra mínima que contiene todos los conjuntos cilíndricos del conjunto F_T , entonces la aplicación

$$\omega \rightarrow \xi(\cdot, \omega)$$

es una aplicación medible del espacio $\{\Omega, \mathfrak{S}\}$ en $\{F_T, \mathfrak{S}_T\}$, es decir, para cualquier $A \in \mathfrak{S}_T$ se tiene $\{\omega: \xi(\cdot, \omega) \in A\} \in \mathfrak{S}$. Esta aplicación transforma la medida P en cierta medida μ_ξ :

$$\mu_\xi(A) = P(\{\omega: \xi(\cdot, \omega) \in A\}), \text{ cuando } A \in \mathfrak{S}_T.$$

La medida $\mu_\xi(\cdot)$ se llama una medida correspondiente al proceso aleatorio $\xi(t, \omega)$. Ella coincide con otra medida construida a base de las distribuciones de dimensiones finitas de que se ha tratado en el teorema de Kolmogórov.

Resulta cómodo fijar las distribuciones de dimensiones finitas del proceso $\xi(t, \omega)$ con ayuda de la funcional característica del proceso:

$$\chi(g) = M \exp(i \int \xi(t, \omega) dg(t)),$$

definido para todas las funciones escalonadas g en T con los valores en X ; (ξ, dg) es un producto escalar en X ; la integral del índice del exponente es una integral de Stieltjes.

9.1.2. Funciones de momento. Sea $\xi(t, \omega)$ un proceso aleatorio numérico, para el cual $M |\xi(t, \omega)|^m < \infty$. Entonces, para $k \leq m$ quedan definidas las funciones

$$m_k(t_1, \dots, t_k) = M \xi(t_1, \omega) \dots \xi(t_k, \omega).$$

La función $m_k(t_1, \dots, t_k)$ se llama k -ésima función de momento del proceso $\xi(t, \omega)$. Si $M |\xi(t, \omega)|^k < \infty$, $t \in T$ para todo k , quedan definidas para el proceso las funciones de momento de todos los órdenes.

Entre las funciones de momento son de mayor uso las de los primeros dos órdenes: $m_2(t)$ que es valor medio del proceso, en lugar de $m_2(t_1, t_2)$ se considera habitualmente la función $R(t_1, t_2) = m_2(t_1, t_2) - m_1(t_1) m_1(t_2)$, la cual se denomina **función de correlación**. El valor medio puede ser una función cualquiera definida en T . La función de correlación $R(t_1, t_2)$ está positivamente definida; para cualesquiera t_1, t_2, \dots, t_n de T y x_1, x_2, \dots, x_n reales se tiene

$$\sum_{i, k} R(t_i, t_k) x_i x_k \geq 0.$$

Toda función $R(t_1, t_2)$, si es positivamente definida, es una función de correlación de cierto proceso.

Sea $\xi(t, \omega)$ un proceso aleatorio con los valores en el espacio euclídeo de dimensiones finitas X . La función $a(t)$, que está definida

en T y que toma los valores de X , se denomina **valor medio del proceso**, si para todos los $z \in X$

$$M(\xi(t, \omega), z) = (a(t), z).$$

La función $B(t, s)$, definida para $t, s \in T$, como valores de la cual sirven los operadores lineales en X , se llama **función operacional de correlación de un proceso vectorial**, si con $z, u \in X$

$$M(\xi(t, \omega), z) M(\xi(s, \omega), u) = (B(t, s)z, u) + (a(t), z)(a(s), u).$$

La función operacional $B(t, s)$ está también positivamente definida: si $z_1, \dots, z_k \in X$, $t_1, \dots, t_k \in T$, entonces

$$\sum_{i, j} (B(t_i, t_j)z_i, z_j) \geq 0.$$

Además, ella es simétrica en el siguiente sentido: $B(t, s) = B^*(t, s)$, donde B^* es un operador conjugado de B .

La función operacional de correlación puede ser dada por su matriz en cierta base; tal matriz se llama **matriz de correlación del proceso vectorial**.

Sean $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ dos procesos aleatorios en un mismo espacio probabilístico. La función

$$b_{12}(t, s) = M\xi_1(t)\xi_2(s) - M\xi_1(t)M\xi_2(s)$$

se denomina **función de correlación recíproca** de los procesos $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$. Si $b_{hk}(t, s)$ ($k = 1, 2$) es una función de correlación del proceso $\xi_k(t)$, entonces la función matricial

$$\begin{pmatrix} b_{11}(t, s), & b_{12}(t, s) \\ b_{12}(t, s), & b_{22}(t, s) \end{pmatrix}$$

queda positivamente definida: para todos los $x_1, x_2, \dots, x_h, y_1, \dots, y_h, t_1, t_2, \dots, t_h$

$$\sum_{i, j=1}^h (b_{11}(t_i, t_j)x_ix_j + b_{12}(t_i, t_j)(x_iy_j + x_jy_i) + b_{22}(t_i, t_j)y_iy_j) \geq 0. \quad (1.1)$$

Toda función operacional simétrica y positivamente definida es una función de correlación de cierto proceso. Por esta razón el cumplimiento de la condición (1.1) es necesario y suficiente para que $b_{12}(t, s)$ sea la función de correlación recíproca de los procesos $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$.

9.1.3. Continuidad estocástica. Sea dado en cierto intervalo T un proceso aleatorio $\xi(t)$. Este se denomina **estocástico continuo en cierto punto** $t_0 \in T$, si para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P(|\xi(t) - \xi(t_0)| > \varepsilon) = 0.$$

Si un proceso es estocástico continuo en todo punto del intervalo T , suele decirse que es **estocástico continuo en el intervalo T** . (Esta definición es válida no sólo para los procesos numéricos, sino también para los vectoriales. En este último caso $|\cdot|$ significa la norma del

vector). Supongamos que $\xi(t)$ es un proceso estocástico continuo en T . En este caso serán justas las siguientes afirmaciones:

a) si $f(t, x)$ es una función continua para $t \in T$, $x \in X$, donde X es el dominio de los valores de $\xi(t)$, entonces $f(t, \xi(t))$ es también un proceso estocástico continuo en T ;

b) sea, para cierto $\delta > 0$,

$$\sup_t M |f(t, \xi(t))|^{1+\delta} < \infty,$$

donde f es una función del mismo tipo que la indicada en la afirmación a), entonces la función $Mf(t, \xi(t))$ es continua respecto de t ;

c) sea f la misma que en la afirmación a) y supongamos que una función numérica no negativa $\lambda(h) \uparrow +\infty$, cuando $h \rightarrow +\infty$. Aquí, si

$$\sup_t Mf(t, \xi(t)) \lambda(|f(t, \xi(t))|) < \infty,$$

entonces $Mf(t, \xi(t))$ es una función continua;

d) si, para cierto $\delta > 0$, $\sup M |\xi(t)|^{k+\delta}$, entonces las funciones de momento del proceso $\xi(t) - m_j(t_1, \dots, t_j)$ para $j \leq k$, son continuas en la totalidad de variables;

e) si un proceso $\xi(t)$ es estocástico continuo en el conjunto cerrado y acotado T , el es continuo de modo uniforme y estocástico, es decir, para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq h}} P(|\xi(t_1) - \xi(t_2)| > \varepsilon) = 0,$$

f) un proceso $\xi(t)$ se llama acotado en probabilidad en el conjunto T , si

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{t \in T} P(|\xi(t)| > c) = 0.$$

Si un proceso es estocástico continuo en el conjunto cerrado acotado T , es acotado en probabilidad.

9.1.4. Procesos con el espacio físico discreto. En muchos problemas el dominio de los valores de un proceso es un conjunto numerable. (Por ejemplo, un proceso tiene los valores de números enteros, o bien los vectores tienen las coordenadas de números enteros, etc.). Para los procesos de este tipo la forma concreta del espacio físico no tiene importancia. Supongamos que el dominio de los valores posibles X consta de los elementos $\{x_1, x_2, \dots\}$, T es el dominio de definición del proceso. En este caso resulta cómodo definir las distribuciones de dimensiones finitas del proceso con ayuda de las probabilidades

$$P_{t_1, \dots, t_n}(k_1, \dots, k_n) = P\{\xi(t_1) = x_{k_1}, \dots, \xi(t_n) = x_{k_n}\}.$$

Es evidente que, conociendo estas probabilidades, se pueden determinar también las distribuciones de dimensiones finitas del proceso según la fórmula

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A_1, \dots, A_n) = \sum_{x_{k_1} \in A_1, \dots, x_{k_n} \in A_n} P_{t_1, \dots, t_n}(k_1, \dots, k_n).$$

9.1.5. Procesos con el tiempo discreto. Si el conjunto T , en el cual está determinado un proceso, es una sucesión de números enteros no negativos o bien una sucesión de todos los números enteros, entonces $\xi(t)$ se llama proceso con el tiempo discreto o sucesión aleatoria.

Sea $T = \{0, 1, 2, \dots\}$. Escribiremos ξ_n en lugar de $\xi(n, \omega)$. Las distribuciones de dimensiones finitas de la sucesión $\{\xi_n\}$ se determinan completamente por las funciones de distribución

$$F_n(A_0, \dots, A_n) = P\{\xi_0 \in A_0, \dots, \xi_n \in A_n\}.$$

En lugar de estas funciones de distribución resulta, a veces, más cómodo prefijar las funciones condicionales de distribución ξ_n para ξ_0, \dots, ξ_{n-1} dados:

$$F_n(A/x_0, \dots, x_{n-1}),$$

son tales funciones que con la probabilidad 1

$$P\{\xi_n \in A/\xi_0, \dots, \xi_{n-1}\} = F_n(A/\xi_0, \dots, \xi_{n-1}).$$

Si $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, se utilizan las distribuciones de dimensiones finitas

$$F_n(A_{-n}, \dots, A_0, \dots, A_n) = P\{\xi_0 \in A_0, \xi_1 \in A_1, \dots, \xi_{-1} \in A_{-1}, \dots, \xi_n \in A_n, \xi_{-n} \in A_{-n}\}.$$

Estas también pueden prefijarse con ayuda de las distribuciones condicionales

$$P\{\xi_n \in A/\xi_0, \xi_1, \xi_{-1}, \dots, \xi_{n-1}, \xi_{-n+1}\};$$

$$P\{\xi_{-n} \in A/\xi_0, (\xi_1, \xi_{-1}, \dots, \xi_{n-1}, \xi_{-n+1})/\xi_n\}.$$

EJEMPLOS DE PROCESOS ALEATORIOS.

a. En un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{G}, P) , donde Ω es $[0, 1]$, \mathcal{G} es el σ -álgebra de los conjuntos borelianos de este segmento; P es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$, el proceso $\xi(t, \omega)$ para $t \in [0, 1]$ se determina por la igualdad

$$\xi(t, \omega) = \begin{cases} 1, & t > \omega, \\ 0, & t \leq \omega. \end{cases}$$

Las distribuciones de dimensiones finitas del proceso (el espacio fásico del proceso se compone de dos puntos: 0 y 1) se determinan por las correlaciones:

$$\text{para } t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

$$P\{\xi(t_1) = 0, \dots, \xi(t_{i-1}) = 0, \xi(t_i) = 1, \dots, \xi(t_n) = 1\} = t_i - t_{i-1};$$

$$\text{para } 1 < i \leq n$$

$$P\{\xi(t_1) = 0, \dots, \xi(t_n) = 0\} = 1 - t_n;$$

$$P\{\xi(t_1) = 1, \dots, \xi(t_n) = 0\} = t_1.$$

En todos los casos restantes $P\{\xi(t_1) = k_1, \dots, \xi(t_n) = k_n\} = 0$ (k_1, \dots, k_n toman los valores 0 y 1).

El proceso $\xi(t)$ es estocástico continuo: para $\varepsilon < 1$, $t_1 < t_2$ $P\{|\xi(t_2) - \xi(t_1)| > \varepsilon\} = P\{\xi(t_1) = 0, \xi(t_2) = 1\} = t_2 - t_1$. No obstante, casi todas las funciones muestrales del proceso son discontinuas. Este ejemplo muestra que la continuidad estocástica no provoca continuidad de las funciones muestrales.

b. Proceso de Poisson. Así se llama el proceso $\xi(t)$, cuyos valores están representados por números enteros no negativos y que está definido para $t \geq 0$, si sus distribuciones de dimensiones finitas con $0 <$

$t_1 < \dots < t_n$ están dadas mediante la igualdad

$$P\{\xi(t_1) = k_1, \xi(t_2) = k_2, \dots, \xi(t_n) = k_n\} = \begin{cases} a^k n e^{-at} \frac{t_1^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2 - k_1} \dots (t_n - t_{n-1})^{k_n - k_{n-1}}}{k_1! (k_2 - k_1)! \dots (k_n - k_{n-1})!}, \\ \text{si } 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n \\ 0 \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Este proceso describe el número de sucesos raros que se realizan durante el tiempo t (por ejemplo, el número de partículas cósmicas registradas por un contador, el número de llamadas recibidas en una central telefónica, etc.). El número $a > 0$ se llama parámetro del proceso.

$$a = \frac{M\xi(t)}{t}.$$

El proceso de Poisson puede construirse del modo siguiente. Sea η_1, η_2, \dots una sucesión de magnitudes independientes no negativas igualmente distribuidas, para las cuales

$$P\{\eta_k > t\} = e^{-at}.$$

Si $\varepsilon(z) = 1$ para $z \geq 1$, $\varepsilon(z) = 0$ para $z < 0$, entonces la función

$$\xi(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon\left(t - \sum_{i=1}^h \eta_i\right)$$

será un proceso de Poisson (la última fórmula define el proceso como una función de t y ω , ya que de ω dependen las magnitudes η_i).

c. **Proceso de crecimiento puro.** Supongamos que η_h son las mismas que en el ejemplo anterior, y $\lambda_h > 0$ es una sucesión para la cual

$$\sum \frac{1}{\lambda_h} = +\infty.$$

Un proceso del tipo

$$\xi(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon\left(t - \sum_{i=1}^h \frac{\eta_i}{\lambda_i}\right)$$

se denomina proceso de crecimiento puro. Las funciones muestrales de este proceso son escalonadas no decrecientes de valores enteros; todos los saltos de estas funciones son iguales a 1, $\xi(0) = 0$.

d. El movimiento browniano unidimensional (proceso de Wiener) es el proceso $w(t)$, definido para $t \geq 0$; sus distribuciones de dimensiones finitas se determinan por las densidades conjuntas de distribución de las magnitudes $w(t_1), w(t_2), \dots, w(t_n)$ para $t_1 < t_2 < \dots$

$\dots < t_n$, que tienen la forma

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = [(2\pi)^n t_1(t_2 - t_1) \dots \dots (t_n - t_{n-1})]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} \right] \right\}.$$

El proceso $w(t)$ puede servir de modelo probabilístico de los fenómenos de difusión o de movimiento browniano ($w(t)$ es una de las coordenadas de una partícula en difusión).

9.2. Mensurabilidad e integrabilidad de los procesos aleatorios

9.2.1. Procesos aleatorios medibles. Un proceso aleatorio $\xi(t, \omega)$, definido en el conjunto boreliano T con el espacio físico X , se llama medible, si $\xi(t, \omega)$ es medible respecto de la σ -álgebra $\mathfrak{B}_T \times \mathfrak{E}$, donde \mathfrak{B}_T es una σ -álgebra de conjuntos borelianos en T ; \mathfrak{E} es la σ -álgebra de los sucesos del espacio probabilístico $\{\Omega, \mathfrak{E}, \mathbf{P}\}$, en el cual está definido el proceso aleatorio. Esto significa que para todo conjunto boreliano $A \subset X$

$$\{(t; \omega) : \xi(t, \omega) \in A\} \in \mathfrak{B}_T \times \mathfrak{E}$$

(el producto de las σ -álgebras \mathfrak{B}_T y \mathfrak{E} es una σ -álgebra mínima que contiene los conjuntos $B \times S$, donde $B \in \mathfrak{B}_T$, $S \in \mathfrak{E}$).

Si el proceso $\xi(t, \omega)$ es medible, para casi todos los ω las funciones muestrales $\xi(\cdot, \omega)$ serán funciones borelianas de t .

Un proceso que se construye en el teorema de Kolmogórov según las distribuciones de dimensiones finitas (véase p. 9.1) no será medible. Surge la pregunta, ¿en qué condiciones puede construirse un proceso medible según las distribuciones de dimensiones finitas dadas?

Hagamos uso de la noción de **equivalencia estocástica** de dos procesos aleatorios (dicha noción se diferencia de la noción de equivalencia estocástica en amplio sentido introducida en el p. 9.1.). Dos procesos $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$, definidos en un mismo espacio probabilístico $\{\Omega, \mathfrak{E}, \mathbf{P}\}$ y dados en un mismo conjunto T , se llaman **equivalentes estocásticos**, si

$$\mathbf{P} \{ \xi_1(t) = \xi_2(t) \} = 1, \quad \forall t \in T.$$

Es evidente que los procesos equivalentes estocásticos tienen distribuciones de dimensiones finitas iguales.

Teorema 1. Si un proceso $\xi(t)$ es estocástico continuo en el conjunto boreliano T , entonces existe un proceso medible $\xi'(t)$ que es estocásticamente equivalente a $\xi(t)$.

Este proceso $\xi'(t)$ se puede definir como un límite de los procesos $\xi_{n_k}(t) = \xi(t_{n_k})$ para $t \in [t_{n_k}, t_{n_k+1})$, donde $t_{n_k} \in T$ y $\max_{k \rightarrow \infty} |t_{n_k+1} - t_{n_k}| \rightarrow 0$. Para aquellos pares (t, ω) , para los cuales dicho límite no existe, suponemos que $\xi'(t) = 0$.

Corolario. Si $\xi(t)$ tiene a lo sumo un conjunto numerable de los puntos de discontinuidad, existe un proceso medible $\xi'(t)$ que es estocásticamente equivalente a $\xi(t)$.

He aquí algunas propiedades importantes de los procesos medibles.

a. Sea $\varphi(t, x)$ una función medible respecto de $\mathfrak{B}_T \times \mathfrak{B}_X$, donde \mathfrak{B}_X es una σ -álgebra de conjuntos borelianos en el espacio físico X del proceso en consideración. Si

$$\mathbf{M} |\varphi(t_1, \xi(t_1))| \dots |\varphi(t_h, \xi(t_h))| < \infty, \quad \forall t_1, \dots, t_h \in A,$$

entonces la función

$$g(t_1, \dots, t_h) = \mathbf{M} \varphi(t_1, \xi(t_1)) \dots \varphi(t_h, \xi(t_h))$$

es boreliana, es decir, medible respecto de \mathfrak{B}_T^h .

En particular, todas las funciones de momento de un proceso medible son borelianas.

b. Si $\varphi(t, x)$ es una función acotada $\mathfrak{B}_T \times \mathfrak{B}_X$ -medible, entonces

$$\int_T \varphi(t, \xi(t, \omega)) dt$$

existe para casi todos los ω , esta integral es una magnitud \mathfrak{F} -medible y

$$\mathbf{M} \int_T \varphi(t, \xi(t, \omega)) dt = \int_T \mathbf{M} \varphi(t, \xi(t, \omega)) dt$$

(esta afirmación es un corolario del teorema de Fubini).

c. Si es que $\mathbf{M} |\xi(t, \omega)| < \infty$, y $\int_T \mathbf{M} |\xi(t, \omega)| dt < \infty$, entonces

para casi todos los ω existe $\int_T \xi(t, \omega) dt$.

9.2.2. Integración de los procesos aleatorios. Sea $\xi(t)$ un proceso aleatorio continuo estocástico real y medible en el segmento $[a, b]$. Demos a conocer las condiciones en las cuales las funciones muestrales $\xi(t)$ pertenecen, con la probabilidad 1, a $L_p[a, b]$, donde $0 < p \leq \infty$, es decir,

$$\mathbf{P} \left\{ \int_a^b |\xi(t)|^p dt < \infty \right\} = 1. \quad (2.4)$$

Designemos mediante $\chi(g)$ la funcional característica del proceso

$$\chi(g) = \mathbf{M} \exp \left\{ i \int_a^b \xi(t) dg(t) \right\},$$

definida en las funciones escalonadas g , dadas en $[a, b]$.

Sean ahora: $t_{nk} = a + \frac{k}{n}(b - a)$, $k = 0, \dots, n$; $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \dots$ unas magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas en $[0, 1]$; $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$, unas magnitudes aleatorias que no dependen una de la otra, ni tampoco de η_0, η_1, \dots ,

para las cuales

$$M e^{i t \xi_h} = e^{-|t|^p}$$

(es decir, ξ_h tienen distribución estable simétrica con el exponente p).
Introduzcamos en $[a, b]$ un proceso aleatorio

$$v_n^p(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\xi_j}{n^{1/p}} \varepsilon \left(t - t_{nj} - \frac{b-a}{n} \eta_j \right),$$

donde $\varepsilon(t) = 0$ para $t < 0$, $\varepsilon(t) = 1$ para $t \geq 1$.

Como que $v_n^p(t)$ es una función escalonada en $[a, b]$, queda definida la magnitud $\chi(\lambda v_n^p)$. Dado que $v_n^p(\cdot)$ es una función aleatoria, entonces también $\chi(\lambda v_n^p)$ será magnitud aleatoria.

Una condición necesaria y suficiente para que se cumpla (2.1) consiste en lo siguiente: para todos los λ positivos existe el límite

$$\Psi(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} M \chi(\lambda v_n^p),$$

que satisface la correlación: $\Psi(0+) = 1$. En este caso

$$\Psi(\lambda) = M \exp \left\{ -\frac{\lambda^p}{b-a} \int_a^b |\xi(t)|^p dt \right\}.$$

Supongamos que $\xi(t)$ pertenece, con la probabilidad 1, a $L_p[a, b]$, $p \geq 1$. Entonces para toda función acotada medible $\varphi(t)$ en $[a, b]$ queda definida con la probabilidad 1, la integral

$$\int_a^b \xi(t) \varphi(t) dt.$$

Por esta razón para tal proceso quedará definida también la funcional característica

$$\chi_1(\varphi) = M \exp \left\{ i \int_a^b \xi(t) \varphi(t) dt \right\}.$$

Las funcionales características $\chi_1(\varphi)$ y $\chi(g)$ están ligadas entre sí mediante las siguientes correlaciones

$$1) \chi_1(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} M \chi(v_n).$$

donde v_n es una sucesión de funciones aleatorias en $[a, b]$ del tipo

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \varphi \left(t_{nj} + \frac{b-a}{n} \eta_j \right) \varepsilon \left(t - t_{nj} - \frac{b-a}{n} \eta_j \right),$$

donde η_j es una sucesión de magnitudes independientes e igualmente distribuidas en $[0, 1]$;

2) si $\xi(t)$ es un proceso continuo estocástico, entonces

$$\chi(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_1(\varphi_n),$$

donde φ_n es tal sucesión de funciones medibles, que

$$\int_a^t \varphi_n(s) ds \rightarrow g(t) - g(a).$$

Examinemos a título de ejemplo el proceso de movimiento browniano $w(t)$. Para tal proceso

$$\chi(g) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \min[t, s] d_g(t) d_g(s) \right\},$$

de donde

$$\chi_1(\varphi) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \min[t, s] \varphi(t) \varphi(s) dt ds \right\}.$$

9.3. Separabilidad. Propiedades de las funciones muestrales

9.3.1. Definición del proceso separable. Al estudiar las propiedades de continuidad o de acotación de las funciones muestrales de procesos aleatorios un gran papel pertenece al concepto de separabilidad. Para los procesos aleatorios separables, si sólo se conocen sus valores en cierto conjunto numerable de valores t , se pueden hacer conclusiones sobre el comportamiento de las funciones muestrales para todos los t . Ya que el valor de las distribuciones de dimensiones finitas permite determinar las probabilidades sólo de aquellos sucesos (asociados con el proceso aleatorio) que se determinan mediante los valores del proceso en el conjunto numerable, entonces sin recurrir a la separabilidad resulta imposible determinar las probabilidades de tales sucesos como la continuidad (ausencia de discontinuidades de segunda especie), el carácter acotado o la diferenciabilidad del proceso aleatorio.

Sea $\xi(t)$ un proceso aleatorio con el espacio fasico X en el espacio probabilístico $\{\Omega, \mathcal{E}, P\}$ definido en el conjunto T . Se denomina separable, si existen un subconjunto $I \subset T$, numerable y denso en T y un conjunto $\Lambda \in \mathcal{E}$, $P(\Lambda) = 0$, tales que para todos los conjuntos cerrados $F \subset X$ y para todo intervalo (α, β)

$$\{\omega: \xi(t, \omega) \in F, t \in (\alpha, \beta) \cap I\} -$$

$$- \{\omega: \xi(t, \omega) \in F, t \in (\alpha, \beta) \cap T \subset \Lambda.$$

El conjunto I se llama conjunto de separabilidad del proceso.

Si, por ejemplo, $\xi(t)$ es un proceso aleatorio numérico separable en $[a, b]$ e $I = \{t_1, \dots, t_n, \dots\}$, entonces

$$P\left\{ \sup_{a \leq t \leq b} \xi(t) \leq x \right\} = P\left\{ \sup_{I_n} \xi(t_n) \leq x \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \xi(t_1) \leq x, \dots, \xi(t_n) \leq x \right\}.$$

Resulta pues que, al pasar a los procesos estocásticos continuos, el proceso siempre puede ser transformado en separable. Esto lo confirma el siguiente teorema de J. L. Doob.

Teorema 1. *Supongamos que $\xi(t)$ es un proceso aleatorio con el espacio fásico X que es un espacio euclídeo de dimensiones finitas y sea \hat{X} una cierta dilatación compacta de X . En este caso existe un proceso separable $\xi'(t)$ con los valores en \hat{X} , que es estocásticamente equivalente a $\xi(t)$.*

Como X es un espacio compacto local, dicha dilatación compacta \hat{X} siempre existe. Si, por ejemplo, X es una recta, entonces con el fin de obtener la dilatación compacta es necesario añadir a X los puntos $\pm \infty$.

Aunque, en el caso general, no es posible indicar un conjunto de separabilidad para el proceso dado, no obstante para los procesos estocásticos continuos a título de conjunto de separabilidad puede servir cualquier conjunto numerable siempre denso $I \subset T$.

9.3.2. Procesos continuos. Si suponemos que $\{F_T, \mathfrak{E}_T\}$ es un conjunto de todas las funciones con valores de X , determinados en T y \mathfrak{E}_T es una σ -álgebra generada por conjuntos cilíndricos, mientras que C_T es un espacio de todas las funciones continuas en T con valores de X , entonces para T no numerables C_T no pertenece a \mathfrak{E}_T . Por ello, si el proceso está construido tal como se ha indicado en el teorema de Kolmogórov (p. 9.1), entonces no hay sentido en hablar de la continuidad de las funciones muestrales del proceso. Para el proceso separable y conjunto cerrado T , el conjunto de funciones muestrales continuas ya es medible, puesto que

$$\begin{aligned} P\{(\omega : \xi(\cdot, \omega) \in C_T)\} = \\ = P\left\{\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcap_{t, s \in I} \left\{\omega : |\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)| \leq \frac{1}{m}\right\} \right. \\ \left. |t-s| \leq \frac{1}{h}\right\}. \end{aligned}$$

Aquí, I es un conjunto de separabilidad del proceso. La última probabilidad es la de las funciones muestrales continuas. Para que las funciones muestrales de un proceso separable sean continuas con la probabilidad 1, es necesario y suficiente, que para cierto conjunto I , numerable y denso en T , se cumpla la correlación

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcap_{t, s \in I} \left\{\omega : |\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)| \leq \frac{1}{m}\right\} \right) = 1, \\ |t-s| \leq \frac{1}{h}$$

Esta correlación requiere para su comprobación el conocimiento de todas las distribuciones finitas y, como regla, no es comprobable. El siguiente teorema de Kolmogórov proporciona cómodas condiciones suficientes de continuidad del proceso.

Teorema 2. *Sea $\xi(t)$ un proceso separable dado en $[a, b]$. Si existen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y K tales que para cualesquiera $t, s \in [a, b]$*

$$M|\xi(t) - \xi(s)|^\alpha \leq K|t-s|^{1+\beta},$$

entonces $\xi(t)$ es continuo con la probabilidad 1.

Veamos cómo se aplica este teorema a la cuestión acerca de la continuidad del proceso de Wiener. Para ésto, cuando $t \geq s$, la magnitud $w(t) - w(s)$ tiene distribución normal con la media nula y la varianza $t - s$. Por esta razón

$$P\{w(t) - w(s) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du;$$

$$\begin{aligned} M|w(t) - w(s)|^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^\alpha e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du = \\ &= |t-s|^{\alpha/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|^\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du. \end{aligned}$$

Las condiciones del teorema de Kolmogórov quedan cumplidas, si $\alpha > 2$, $\beta = \frac{\alpha}{2} - 1$. Esto quiere decir, el proceso separable de Wiener es continuo con la probabilidad 1.

9.3.3. Procesos sin discontinuidades de segunda especie. Supongamos que en el segmento $[a, b]$ está dado un proceso $\xi(t, \omega)$ con el espacio fásico X que es un espacio euclídeo de dimensiones finitas. Designemos mediante D un conjunto de funciones $x(t)$ con los valores de X , determinados en $[a, b]$, para las cuales, con $t \in [a, b]$ están definidos los límites a la derecha, y con $t \in (a, b)$, los límites a la izquierda. Las funciones de D no tienen discontinuidades de segunda especie. Para que la función $x(t)$ no tenga discontinuidades de segunda especie, es necesario y suficiente que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{a \leq t \leq s \leq u \leq t+h \leq b} \min\{|x(s) - x(t)|, |x(u) - x(s)|\} = 0.$$

Sean $\xi(t, \omega)$ un proceso separable e I , un conjunto de separabilidad. Entonces, con la probabilidad 1

$$\begin{aligned} &\sup_{a \leq t \leq s \leq u \leq t+h \leq b} \min\{|\xi(s, \omega) - \xi(t, \omega)|, |\xi(u, \omega) - \xi(s, \omega)|\} = \\ &= \sup_{\substack{a \leq t \leq s \leq u \leq t+h \leq b \\ t, s, u \in I}} \min\{|\xi(s, \omega) - \xi(t, \omega)|, |\xi(u, \omega) - \xi(s, \omega)|\}. \end{aligned}$$

Por ésto, para un proceso separable, la condición necesaria y suficiente para que las funciones muestrales del proceso pertenezcan a D , es decir, para que el proceso con la probabilidad 1 no tenga discontinuidades de segunda especie consiste en el cumplimiento de la correlación

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcap_{t=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{t, s, u \in I \\ a \leq t \leq s \leq u \leq t+\frac{1}{r} \leq b}} \left\{\omega_r: |\xi(s, \omega) - \xi(t, \omega)| \leq \frac{1}{r}\right\} \cup \right. \\ \left. \cup \left\{\omega: |\xi(u, \omega) - \xi(s, \omega)| \leq \frac{1}{r}\right\}\right) = 1. \end{aligned}$$

Con el fin de comprobar la pertenencia a D se puede utilizar el número de ε -oscilaciones de la función. Se dice que la función $x(t)$ tiene en

$[a, b]$ no menos que k ε -oscilaciones, si existen tales puntos $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ que

$$|x(t_{i+1}) - x(t_i)| \geq \varepsilon, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Para que $x(\cdot) \in D$, es necesario y suficiente que para todos los $\varepsilon > 0$ la función $x(t)$ tenga en $[a, b]$ un número finito de ε -oscilaciones.

Si $\xi(t, \omega)$ es un proceso separable e I es un conjunto de separabilidad, entonces $\xi(\cdot, \omega) \in D$ con la probabilidad 1, si para todo $\varepsilon > 0$ $\xi(\cdot, \omega)$ tiene con la probabilidad 1 un número finito de ε -oscilaciones en I . Sea $I = \bigcup_n I_n$, donde I_n es una sucesión creciente de conjuntos

finitos. Si v_ε es el número de ε -oscilaciones en I , y v_ε^n es el número de ε -oscilaciones en I_n , entonces $v_\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} v_\varepsilon^n$. Conociendo la distribu-

ción conjunta de las magnitudes $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$, donde $I_n = \{t_1, \dots, t_n\}$, podemos calcular la distribución v_ε^n y luego, pasando al límite, la distribución v_ε y comprobar la condición de que $P\{v_\varepsilon < \infty\} = 1$.

Las condiciones citadas de la ausencia en un proceso de las discontinuidades de segunda especie requieren el conocimiento de todas las distribuciones de dimensiones finitas del proceso y el cálculo de las probabilidades de sucesos muy complejos. Demos a conocer ciertas condiciones de la ausencia de las discontinuidades de segunda especie que se comprueban con facilidad.

Teorema 3. Sea $\xi(t)$ un proceso separable en el segmento $[a, b]$, para el cual existen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y K tales que con $t < s < u$

$$M(|\xi(u) - \xi(s)| | \xi(s) - \xi(t)|^\alpha) \leq K(u-t)^{\alpha+\beta}.$$

En este caso, con la probabilidad 1 el proceso $\xi(t)$ no tiene discontinuidades de segunda especie.

A título de ejemplo examinemos un proceso de Poisson del parámetro a . Para este proceso las magnitudes $\xi(u) - \xi(s)$ y $\xi(s) - \xi(t)$ son independientes. Al tomar $\alpha = 1$, tendremos

$$\begin{aligned} M(|\xi(u) - \xi(s)| | \xi(s) - \xi(t)|) &= \\ &= M(|\xi(u) - \xi(s)|) M|\xi(s) - \xi(t)| = \\ &= a^2(u-s)(s-t) \leq a^2(u-t)^2. \end{aligned}$$

De este modo, las condiciones del teorema quedan cumplidas para $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $K = a^2$. Esto significa que el proceso separable de Poisson no tiene discontinuidades de segunda especie.

El teorema que sigue emplea las distribuciones condicionales del proceso. Sea $\xi(t)$ cierto proceso. Designaremos con \mathfrak{F}_t^ξ la σ -álgebra mínima, respecto de la cual son medibles las magnitudes $\xi(u)$ para $u \leq t$.

Teorema 4. Sea $\xi(t)$ un proceso separable dado en $[a, b]$. Si existe una función (no aleatoria) $\varphi_\varepsilon(h)$, $\varepsilon > 0$, $h > 0$, tal que $\varphi_\varepsilon(h) \downarrow 0$, cuando $h \downarrow 0$ y con la probabilidad 1 se verifica

$$P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > \varepsilon / \mathfrak{F}_t^\xi\} \leq \varphi_\varepsilon(h),$$

entonces el proceso $\xi(t)$ con la probabilidad 1 no tiene discontinuidades de segunda especie.

El último teorema es cómodo para aplicarlo en el caso de procesos con incrementos independientes. Así se llama un proceso $\xi(t)$, para el cual las magnitudes $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, ..., $\xi(t_h) - \xi(t_{h-1})$ son independientes para $t_0 < t_1 < \dots < t_h$. Para los procesos con incrementos independientes la magnitud $\xi(t+h) - \xi(t)$ no depende de la σ -álgebra \mathfrak{F}_t^ξ ($h > 0$), razón por la cual

$$P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > \varepsilon / \mathfrak{F}_t^\xi\} = P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > \varepsilon\}.$$

Como un proceso continuo estocástico será a la vez continuo y estocástico uniformemente, entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{a \leq t < t+h \leq b} P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > \varepsilon\} = 0.$$

Por consiguiente, todo proceso separable continuo estocástico de incrementos independientes no tiene con la probabilidad 1 discontinuidades de segunda especie.

9.3.4. Condiciones de continuidad para los procesos sin discontinuidades de segunda especie. Sea $x(t)$ una función de D . Elijamos una sucesión de particiones del segmento $[a, b]$: $a = t_{n0} < t_{n1} < \dots < t_{nn} = b$, para la cual $\max_h (t_{nh+1} - t_{nh}) \rightarrow 0$. Si n_ε es el número de discontinuidades del proceso $x(t)$, superiores a $\varepsilon > 0$, entonces

$$n_\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\varepsilon, \infty}(|x(t_{nk+1}) - x(t_{nk})|),$$

donde χ_A es el indicador del conjunto A . Por ello, si el número de discontinuidades del proceso aleatorio $\xi(t, \omega)$, superiores a $\varepsilon > 0$, lo designamos con v_ε , entonces

$$\begin{aligned} Mv_\varepsilon &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} M\chi_{\varepsilon, \infty}(|\xi(t_{nk+1}) - \xi(t_{nk})|) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^{\infty} P\{|\xi(t_{nh+1}) - \xi(t_{nh})| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Para que el proceso sea continuo, es necesario y suficiente que $v_\varepsilon = 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Así pues, para la continuidad de un proceso, el cual con la probabilidad 1 no tiene discontinuidades de segunda especie es suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ se verifique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^{n-1} P\{|\xi(t_{nh+1}) - \xi(t_{nh})| > \varepsilon\} = 0. \quad (3.1)$$

Como el proceso separable con incrementos independientes no tiene discontinuidades de segunda especie, siempre que sea continuo estocástico, en tanto que la condición (3.1) lleva consigo una continuidad estocástica, entonces (3.1) es suficiente para que el proceso separable $\xi(t)$ con incrementos independientes sea continuo con la probabilidad 1. Resulta que esta condición es también necesaria para la continuidad de un proceso con incrementos independientes.

La condición (3.1) es necesaria y suficiente para que un proceso separable con incrementos independientes $\xi(t)$ sea continuo con la probabilidad 1.

9.4. Continuidad absoluta de las medidas correspondientes a los procesos aleatorios

9.4.1. **Medidas correspondientes a los procesos aleatorios.** Supongamos que $\xi(t)$ es un proceso aleatorio dado en el conjunto T con el espacio fásico X , F_T es el espacio de todas las funciones $x(t)$ definidas en T con los valores de X ; \mathfrak{E}_T es la σ -álgebra mínima de los subconjuntos F_T en la que están contenidos todos los conjuntos cilíndricos. La medida μ_{ξ} , definida en \mathfrak{E}_T por la correlación

$$\mu_{\xi}(A) = P \{ \xi(\cdot) \in A \}, \quad A \in \mathfrak{E}_T,$$

se denomina medida correspondiente al proceso $\xi(\cdot)$. A veces, en lugar de F_T se considera otro conjunto tal de funciones (por ejemplo, \mathcal{M}_T que es un espacio de funciones medibles, D_T que es un espacio de funciones sin discontinuidades de segunda especie, C_T que es un espacio de funciones continuas) que las funciones muestrales del proceso pertenecen con la probabilidad 1 a este conjunto. Toda función $\varphi(x(\cdot)) \in \mathfrak{E}_T$ -medible determina cierta funcional del proceso, o sea, la magnitud aleatoria $\varphi(\xi(\cdot))$. Supongamos que con la probabilidad 1 el proceso pertenece a D_T . Aquí, dichas funcionales serán, por ejemplo,

$$\sup_{t \in T} |\xi(t)|, \quad \int_T f(t, \xi(t)) dt,$$

donde $f(t, x)$ es una función acotada medible.

Conociendo la medida que corresponde al proceso, podemos determinar la distribución de cualquier funcional del proceso. Con este objeto se puede recurrir a la fórmula: si $\varphi(x(\cdot))$ es una funcional acotada \mathfrak{E}_T -medible, entonces

$$M\varphi(\xi(\cdot)) = \int_{F_T} \varphi(x) \mu_{\xi}(dx).$$

Por eso, para toda funcional $\varphi(x(\cdot)) \in \mathfrak{E}_T$ -medible la función característica de la magnitud $\varphi(\xi(\cdot))$ se definirá mediante la igualdad

$$Me^{i\lambda\varphi}(\xi(\cdot)) = \int_{F_T} e^{i\lambda\varphi(x)} \mu_{\xi}(dx).$$

9.4.2. **Continuidad absoluta de las medidas.** Una de las cuestiones consideradas en la teoría de las medidas, correspondientes a los procesos aleatorios, es la de continuidad absoluta (la singularidad) de estas medidas. He aquí algunas definiciones necesarias. Sea X un conjunto en el cual se ha escogido la σ -álgebra de los subconjuntos \mathfrak{B} . El par (X, \mathfrak{B}) se denomina espacio medible. Supongamos que en (X, \mathfrak{B}) están dadas dos medidas μ y ν . Se dice que la medida μ es absolutamente continua (se denota $\mu \ll \nu$) respecto a la medida ν , si $\mu(A) = 0$ para todos los $A \in \mathfrak{B}$, para los cuales $\nu(A) = 0$. Si $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$, suele decirse que μ y ν son equivalentes (se denota $\mu \sim \nu$). Las medidas μ y ν son singulares o bien ortogonales ($\mu \perp \nu$), si existe tal conjunto $S \in \mathfrak{B}$ que $\mu(S) = 0$, $\nu(X \setminus S) = 0$. Cualesquiera que sean μ y ν , siempre es posible la representación $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\nu = \nu_1 + \nu_2$, donde $\mu_1 \sim \nu_1$, $\mu_2 \perp \nu_1$, $\nu_2 \perp \mu$.

Teorema de Radon-Nikodym. Si μ y ν son medidas finitas y $\mu \ll \nu$, entonces existe tal función \mathfrak{B} -medible $\rho(x)$, que para todos los $A \in \mathfrak{B}$ se verifica

$$\mu(A) = \int_A \rho(x) \nu(dx).$$

Esta función se determina unívocamente con la exactitud salvo los conjuntos de medida nula ν ; $\rho(x)$ se denomina densidad de la medida μ respecto a la medida ν o derivada y se designa por $\frac{d\mu}{d\nu}(x)$.

Para los procesos aleatorios se estudian las condiciones: 1) de continuidad absoluta de una medida respecto de la otra; 2) de singularidad recíproca de las medidas; 3) en el caso de continuidad absoluta se calcula la densidad de una medida respecto de la otra. Señalemos aquí aquellas aplicaciones que pueden ser obtenidas al estudiar las cuestiones de continuidad absoluta.

Si se sabe que para dos procesos aleatorios $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ se tiene que $\mu_{\xi_1} \ll \mu_{\xi_2}$, entonces todo suceso que tiene probabilidad 1 para el proceso $\xi_2(t)$, contará con la misma probabilidad para el proceso $\xi_1(t)$. En particular, si las funciones muestrales del proceso $\xi_2(t)$ poseen con la probabilidad 1 cierta propiedad (son continuas, no tienen discontinuidades de segunda especie, son medibles, derivables, etc.), existe un proceso $\xi_1'(t)$, equivalente estocásticamente a $\xi_1(t)$, cuyas funciones muestrales poseen, con la probabilidad 1, aquella misma propiedad. Si, además, se conoce la densidad $\frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}(x(\cdot))$, entonces el cálculo de las esperanzas matemáticas de las funcionales del proceso $\xi_1(\cdot)$ se puede reducir al cálculo de las esperanzas matemáticas de las funcionales del proceso $\xi_2(\cdot)$, haciendo uso de la fórmula

$$M\varphi(\xi_1(\cdot)) = M\varphi(\xi_2(\cdot)) \frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}(\xi_2(\cdot)).$$

Esta fórmula permite calcular también las distribuciones de las funcionales:

$$\begin{aligned} P\{\varphi(\xi_1(\cdot)) < \lambda\} &= M\chi_{(-\infty, \lambda)}(\varphi(\xi_1(\cdot))) = \\ &= M\chi_{(-\infty, \lambda)}(\varphi(\xi_2(\cdot))) \frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}(\xi_2(\cdot)), \end{aligned}$$

donde $\chi_{(-\infty, \lambda)}$ es el indicador del intervalo $(-\infty, \lambda)$.

Si se ha establecido que $\mu_{\xi_1} \perp \mu_{\xi_2}$ y está indicado aquel conjunto S , para el cual $\mu_{\xi_1}(S) = 1$, $\mu_{\xi_2}(S) = 0$, podríamos solucionar el siguiente problema estadístico. Se observa un proceso $\xi(t)$, $t \in T$, cuyas distribuciones de dimensiones finitas se desconocen. Sólo sabemos que la medida que corresponde a este proceso es o μ_{ξ_1} , o bien μ_{ξ_2} . Es necesario determinar, sobre la base de las observaciones, cuál de estas dos medidas corresponde a $\xi(t)$. (Por ejemplo, al detectar una señal en el fondo de un ruido aleatorio, μ_{ξ_1} es la distribución del ruido puro, μ_{ξ_2} es la distribución de la señal con el ruido. Es necesario de-

terminar, a base de las observaciones, si hay o no señales). La solución del problema es, evidentemente, la siguiente si $\xi(\cdot) \in S$, consideramos que $\mu_{\xi} = \mu_{\xi_1}$; si $\xi(\cdot) \notin S$, entonces $\mu_{\xi} = \mu_{\xi_1}$.

9.4.3. Continuidad absoluta de las medidas correspondientes a los procesos aleatorios. Supongamos que los procesos $\xi_t(t)$ están definidos y son estocásticos continuos en el conjunto T y que T_n es tal sucesión creciente de conjuntos finitos que $\cup T_n$ es denso en T . Designaremos mediante \mathfrak{E}_{T_n} la σ -álgebra generada por los conjuntos cilíndricos con sus bases en T_n . Si $T_n = \{t_{n1}, \dots, t_{nk_n}\}$, entonces los conjuntos A de \mathfrak{E}_{T_n} tienen la forma

$$\{x(\cdot) : (x(t_{n1}), \dots, x(t_{nk_n})) \in B_{k_n}\},$$

donde B_{k_n} es un conjunto boreliano arbitrario de R^{k_n} (es decir, de un espacio euclideo k_n -dimensional), (x_1, \dots, x_{k_n}) es un punto de este espacio de coordenadas x_i .

Denotemos con $\mu_{\xi_1}^{T_n}$ la contracción de la medida μ_{ξ_1} en la σ -álgebra \mathfrak{E}_{T_n} . La medida $\mu_{\xi_1}^{T_n}$ se determina unívocamente por la función

$$P_{t_{n1}, \dots, t_{nk_n}}^{(1)}(A_1, \dots, A_{k_n}) = P\{\xi_1(t_{n1}) \in A_1, \dots, \xi_1(t_{nk_n}) \in A_{k_n}\}.$$

Tienen lugar las siguientes afirmaciones.

1) si $\mu_{\xi_1} \ll \mu_{\xi_2}$, entonces para todo n , $\mu_{\xi_1}^{T_n} \ll \mu_{\xi_2}^{T_n}$

$$P_{t_{n1}, \dots, t_{nk_n}}^{(1)}(A_1, \dots, A_{k_n}) =$$

$$= \int_{A_1} \dots \int_{A_{k_n}} g_n(x_1, \dots, x_{k_n}) P_{t_{n1}, \dots, t_{nk_n}}^{(2)}(dx_1, \dots, dx_{k_n}) \quad (4.1)$$

siendo en este caso

$$\frac{d\mu_{\xi_1}^{T_n}}{d\mu_{\xi_2}^{T_n}}(x(\cdot)) = g_n(x(t_{n1}), \dots, x(t_{nk_n}));$$

2) sea $\mathfrak{E}_{T_n}^{\xi_2}$ una σ -álgebra engendrada por las magnitudes $\xi_2(t_{ni})$, $i=1, \dots, k_n$. Entonces

$$\frac{d\mu_{\xi_1}^{T_n}}{d\mu_{\xi_2}^{T_n}}(\xi_2(\cdot)) = M \left(\frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}(\xi_2(\cdot)) / \mathfrak{E}_{T_n}^{\xi_2} \right);$$

3) supongamos que para todo n existe una función g_n tal que queda cumplida (4.1) para todos los conjuntos borelianos A_1, \dots, A_{k_n} de R^1 . En este caso, con la probabilidad 1, existe el límite

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi_2(t_{n1}), \dots, \xi_2(t_{nk_n})).$$

Si con ello $M\rho = 1$, entonces $\mu_{\xi_1} \ll \mu_{\xi_2}$ y

$$\frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_2(\cdot)) = \rho.$$

4) supongamos que la función g_n es tal que se cumple (4.1), $\rho_n = g_n(\xi_2(t_{n1}), \dots, \xi_2(t_{nk_n}))$ y que la sucesión ρ_n es uniformemente integrable, entonces $M\rho = 1$. En particular, esto quedará cumplido, si para cierta función $\psi(\lambda)$, para la cual $\psi(\lambda) \uparrow +\infty$ con $\lambda \uparrow +\infty$, $\sup_n M\rho_n \psi(\rho_n) < \infty$ (por ejemplo, para cierto $\alpha > 1$, $\sup_n M\rho_n^\alpha < \infty$);

5) supongamos que las funciones g_n , que satisfacen (4.1), son positivas. En este caso, con la probabilidad 1, existe el límite

$$\rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \{g_n(\xi_1(t_{n1}), \dots, \xi_1(t_{nk_n}))\}^{-1}.$$

Si $P\{\rho_1 = 0\} = 0$, entonces $\mu_{\xi_1} \sim \mu_{\xi_2}$ y

$$\frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}(\xi_2(\cdot)) = \rho, \quad \rho_1 = \frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(\cdot)).$$

EjemPlo. Supongamos que $\xi_2(t) = w(t)$, $\xi_1(t) = w(t) + a(t)$, donde $w(t)$ es un proceso de Wiener, $a(t)$ es una función continua, $a(0) = 0$. Hallemos las condiciones con las cuales $\mu_{\xi_1} \ll \mu_{\xi_2}$, si $T = [0, 1]$.

Sea $T_n = \left\{ \frac{k}{2^n}, k=0, 1, \dots, 2^n \right\}$. Aprovechando la circunstancia de que $\xi_t \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - \xi_t \left(\frac{k}{2^n} \right)$, para $k=0, \dots, 2^n-1$, son independientes entre sí y tienen distribución normal con la varianza $\frac{1}{2^n}$ y las medias: 0 para $t=2$; $a \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - a \left(\frac{k}{2^n} \right)$ para $t=1$, nos convencemos de que

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{\xi_1}^{T_n}}{d\mu_{\xi_2}^{T_n}}(w(\cdot)) &= \exp \left\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n \left[a \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - a \left(\frac{k}{2^n} \right) \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[w \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - w \left(\frac{k}{2^n} \right) \right] - \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \left\{ 2^n \left[a \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - a \left(\frac{k}{2^n} \right) \right] \right\}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Esta magnitud tiene un límite distinto de cero, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \left\{ 2^n \left[a \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - a \left(\frac{k}{2^n} \right) \right] \right\}^2 < \infty.$$

La última condición lleva a la existencia de la derivada $a'(t)$, de cuadrado integrable, y, en este caso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \left\{ 2^n \left[a \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - a \left(\frac{k}{2^n} \right) \right] \right\}^2 = \int_0^1 [a'(t)]^2 dt,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n \left[a \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - a \left(\frac{k}{2^n} \right) \right] \left[\omega \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - \omega \left(\frac{k}{2^n} \right) \right] = \int_0^1 a'(t) d\omega(t)$$

(la definición de esta integral se da en el p. 19.2).

De este modo,

$$\rho = \exp \left\{ \int_0^1 a'(t) d\omega(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 [a'(t)]^2 dt \right\}. \quad (4.2)$$

Como $\int_0^1 a'(t) d\omega(t)$ es una magnitud distribuida en conformidad

con la ley normal, teniendo la media 0 y la varianza $\int_0^1 [a'(t)]^2 dt$, entonces $M\rho = 1$. Así pues, el segundo miembro en (4.2) nos da la densidad $\frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}$ en el caso de que exista $a'(t)$ de cuadrado integrable. En el caso contrario $\mu_{\xi_2} \perp \mu_{\xi_1}$.

Capítulo 10

TEORÍA \mathcal{L}_2

10.1. Espacio de las magnitudes aleatorias de Hilbert $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$

10.1.1. Definición. Convergencia. Una totalidad de magnitudes aleatorias de valores complejos ξ , dadas en el espacio probabilístico $\{\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P}\}$, con el segundo momento finito $\mathbf{M}|\xi|^2 < \infty$ forma un espacio lineal normado de Hilbert $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ con el producto escalar

$$(\xi, \eta) = \mathbf{M}\bar{\xi}\eta \quad (1.1)$$

y la norma

$$\|\xi\| = [\mathbf{M}|\xi|^2]^{1/2}. \quad (1.2)$$

Con la ayuda de la norma se determina la distancia entre las magnitudes aleatorias de $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$

$$\rho(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|.$$

Las magnitudes aleatorias ξ , pertenecientes a $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ se denominan **magnitudes aleatorias de Hilbert**.

Las magnitudes aleatorias de Hilbert ξ y η se llaman ortogonales, si $\mathbf{M}\bar{\xi}\eta = 0$.

La definición citada de $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ queda en vigor también en una situación más general para los elementos aleatorios cuyos valores se encuentran en el espacio completo medible de Hilbert \mathcal{H} . En este último caso $\bar{\xi}\eta$ significa un producto escalar en \mathcal{H} , $|\xi|^2 = \bar{\xi}\xi$.

La convergencia en el espacio $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ se determina en la media cuadrática:

$$\text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi,$$

si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n - \xi\| = 0$, o bien, en la forma equivalente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}|\xi_n - \xi|^2 = 0.$$

De la convergencia en media cuadrática (m.c.) proviene la convergencia en probabilidad. Lo recíproco no es cierto.

No obstante, si $|\xi_n| < \eta \in \mathcal{L}_2$, entonces de la convergencia de ξ_n en probabilidad proviene también la convergencia en media cuadrática.

10.1.2. Covariación, propiedad característica. Una función aleatoria de Hilbert $\xi(x)$, $x \in \mathcal{X}$ se da por la totalidad de magnitudes aleatorias de Hilbert $\xi(x)$, dependientes del parámetro x , que toma los valores en cierto conjunto paramétrico \mathcal{X} .

Llamamos **covariación** $B(x, y)$ de una función aleatoria de Hilbert $\{\zeta(x), x \in \mathcal{X}\}$ la función

$$B(x, y) = M \zeta(x) \bar{\zeta}(y); \quad x, y \in \mathcal{X}.$$

La covariación $B(x, y)$ es una función positivamente definida:

$$\sum_{h, r=1}^n B(x_h, x_r) z_h \bar{z}_r \geq 0$$

para cualesquiera $n \geq 1$, $x_h \in \mathcal{X}$ y para los números complejos z_h . Con ello

$$\sum_{h, r=1}^n B(x_h, x_r) z_h \bar{z}_r = M \left| \sum_{h=1}^n \zeta(x_h) z_h \right|^2$$

La definición positiva es una propiedad característica de la covariación.

Teorema 1. Para que la función $B(x, y)$ sea covariacional es necesario y suficiente que sea positivamente definida.

Las propiedades de las funciones aleatorias de Hilbert expresadas en términos de las propiedades de la función covariacional se llaman **propiedades covariacionales** o **propiedades de segundo orden**.

10.1.3. Continuidad de una función aleatoria. Sea \mathcal{X} un espacio métrico con la métrica ρ .

Definición 1. Una función aleatoria de Hilbert $\{\zeta(x), x \in \mathcal{X}\}$ se llama **continua (en media cuadrática)** en el punto x_0 , si

$$M |\zeta(x) - \zeta(x_0)|^2 \rightarrow 0 \quad \text{para } \rho(x, x_0) \rightarrow 0.$$

Teorema 2. Para que $\zeta(x)$ sea continua en el punto x_0 , es necesario y suficiente que la covariación $B(x, y) = M \zeta(x) \bar{\zeta}(y)$ sea continua en el punto (x_0, x_0) .

Corolario. Si la covariación $B(x, y)$ es continua en todo punto diagonal $(x_0, x_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, es también continua en todos los puntos $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Observemos que de la continuidad (en m.c.) de una función aleatoria $\zeta(x)$ no proviene la continuidad de sus funciones muestrales.

10.1.4. Diferenciabilidad de una función aleatoria. Sea $x = (a, b)$ un intervalo de un eje real.

Definición 2. Una función aleatoria de Hilbert $\{\zeta(x), x \in \mathcal{X}\}$ es **derivable (en m.c.)** en el punto x_0 , si existe

$$\zeta'(x_0) = \text{l.i.m.}_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\zeta(x_0 + h) - \zeta(x_0)]; \quad x_0, x_0 + h \in (a, b).$$

La magnitud aleatoria $\zeta'(x_0)$ se denomina **derivada (m.c.)** de la función aleatoria $\zeta(x)$ en el punto x_0 .

Teorema 3. Una función aleatoria de Hilbert $\{\zeta(x), x \in (a, b)\}$ es derivable en todo punto x_0 del intervalo (a, b) , cuando, y sólo cuando, existe la derivada mixta generalizada de segundo orden de la covariación

$$\frac{\partial^2 B(x, y)}{\partial x \partial y} \Big|_{x=y} = \lim_{h, h_1 \rightarrow 0} \frac{1}{hh_1} [B(x_0 + h, x_0 + h_1) - B(x_0, x_0 + h_1) - B(x_0 + h, x_0) + B(x_0, x_0)].$$

En este caso

$$M \zeta' (x) \bar{\zeta}' (y) = \frac{\partial^2 B (x, y)}{\partial x \partial y} ;$$

$$M \zeta' (x) \bar{\zeta} (y) = \frac{\partial B (x, y)}{\partial x} .$$

10.1.5. Integración de una función aleatoria. Supongamos que \mathcal{X} es un espacio métrico separable completo con la medida σ -finita $m(dx)$ y que $m(\mathcal{X}) < \infty$.

Definición 3. Para la función aleatoria medible $\{\zeta(x), x \in \mathcal{X}\}$ la integral de Lebesgue se determina del modo siguiente:

$$\int_{\mathcal{X}} \zeta(x) m(dx) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \zeta_n(x) m(dx), \quad (1.3)$$

donde $\zeta_n(x)$ es una sucesión monótona no decreciente de funciones aleatorias que toman un número finito de valores y son tales que $\zeta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n(x)$ con la probabilidad 1.

Observación. La integral de Lebesgue (1.3) puede definirse también como un límite (en m.c.) de las sumas integrales lebesguianas

$$\int_{\mathcal{X}} \zeta(x) m(dx) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \zeta(x_k) m(\Delta x_k), \quad (1.4)$$

donde

$$\mathcal{X} = \sum_{k=1}^n \Delta x_k, \quad x_k \in \Delta x_k.$$

Teorema 4. Si es finita la integral

$$\int_{\mathcal{X}} B(x, x) m(dx) < \infty \quad (1.5)$$

y $m(\mathcal{X}) < \infty$, entonces para la función aleatoria medible $\{\zeta(x), x \in \mathcal{X}\}$ es finita, con la probabilidad 1, la integral de Lebesgue (1.3) que puede ser definida o por la correlación (1.4), o bien para cada realización de $\zeta(x)$. En este caso

$$M \int_{\mathcal{X}} |\zeta(x)|^2 m(dx) = \int_{\mathcal{X}} B(x, x) m(dx).$$

Corolario. Supongamos que las funciones $f_i(x)$, $i = 1, 2$, pertenecen a $\mathcal{L}_2(\mathcal{X}, \mathfrak{F}, m)$ y está cumplida la condición (1.5). En este caso, con la probabilidad 1, existen las integrales

$$\eta_{it} = \int_{\mathcal{X}} f_i(x) \zeta(x) m(dx), \quad i = 1, 2,$$

y

$$M \eta_{11} \bar{\eta}_{12} = \int_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} f_1(x) B(x, y) \bar{f}_2(y) m(dx) m(dy),$$

Observación. Una integral impropia (en m.c.) se define del modo siguiente:

$$\int_a^\infty \zeta(t) dt = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \zeta'(t) dt. \quad (1.6)$$

Para que exista la integral impropia (1.6), es necesario y suficiente que exista

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \int_a^N \int_a^M B(t, s) dt ds.$$

10.1.6. Desarrollo en series ortogonales. Sea $\{\zeta(x), x \in [a, b]\}$ una función aleatoria continua de Hilbert con la covariación $B(x, y)$. De acuerdo con la teoría de las ecuaciones integrales el núcleo $B(x, y)$ puede ser desarrollado en una serie uniformemente convergente según sus funciones propias $\varphi_n(x)$:

$$B(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}, \quad (1.7)$$

donde

$$\lambda_n \varphi_n(x) = \int_a^b B(x, y) \varphi_n(y) dy, \quad \int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \delta_{nm}, \quad (1.8)$$

con la particularidad de que los números propios λ_n son positivos. Hagamos

$$\xi_n = \int_a^b \zeta(x) \overline{\varphi_n(x)} dx. \quad (1.9)$$

Entonces (véase el corolario del teorema 4)

$$M \xi_n \bar{\xi}_m = \int_a^b \int_a^b B(x, y) \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(y)} dx dy = \lambda_n \delta_{nm} \quad (1.10)$$

y

$$M \zeta^*(x) \xi_n = \int_a^b B(x, y) \varphi_n(y) dy = \lambda_n \varphi_n(x). \quad (1.11)$$

De suerte que la sucesión de magnitudes aleatorias $\xi_n, n \geq 1$, es ortogonal.

Teorema 5. Una función aleatoria de Hilbert $\zeta(x)$, medible y continua (en m.c.), puede ser representada en el intervalo cerrado $[a, b]$ por la serie

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varphi_n(x), \quad (1.12)$$

que converge en \mathcal{L}_2 con todo $x \in [a, b]$.

En este desarrollo, $\{\xi_n, n \geq 1\}$ es una sucesión ortogonal de magnitudes aleatorias con $M|\xi_n|^2 = \lambda_n$, λ_n son números propios, $\varphi_n(x)$ son funciones propias de la covariación $B(x, y)$ de la función aleatoria $\zeta(x)$.

Observación. Si la función aleatoria $\zeta(x)$ tiene distribución gaussiana para todo x , las magnitudes aleatorias ξ_n en el desarrollo (1.12) son magnitudes gaussianas independientes y la serie (1.12) converge con la probabilidad 1.

Ejemplo. El proceso del movimiento browniano $\zeta(t)$ en el segmento $[0, 1]$ con $\zeta(0) = 0$, $M\zeta(t) = 0$, $D\zeta(t) = t$ y $B(t, s) = M\zeta(t)\zeta(s) = \min(t, s)$ puede representarse en forma de la serie ortogonal

$$\zeta(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi t}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi},$$

donde ξ_n es una sucesión de magnitudes aleatorias gaussianas independientes con los parámetros $M\xi_n = 0$, $D\xi_n = 1$.

10.2. Medidas e integrales estocásticas

10.2.1. Definición de la integral estocástica. Sean: $\{\Omega, \sigma, P\}$ un espacio probabilístico, E cierto conjunto y \mathfrak{M} , un semianillo de los subconjuntos de E .

Una familia de magnitudes aleatorias de Hilbert $\{\zeta(\Delta), \Delta \in \mathfrak{M}\}$ que satisface las condiciones: 1) $\zeta(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \zeta(\Delta_1) + \zeta(\Delta_2) \times (\text{mod } P)$, si $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$; 2) $M\zeta(\Delta_1)\zeta(\Delta_2) = m(\Delta_1 \cap \Delta_2)$, donde $m(\Delta)$ es una función de los conjuntos en \mathfrak{M} ; 3) $\zeta(\emptyset) = 0$, $m(\emptyset) = 0$, se denomina **medida estocástica ortogonal elemental**, mientras que $m(\Delta)$ es su **función estructural**.

La ortogonalidad de la medida estocástica $\zeta(\Delta)$ se desprende de la propiedad 2): $M\zeta(\Delta_1)\zeta(\Delta_2) = 0$, si $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$.

La función estructural $m(\Delta)$ es una medida elemental en el semianillo \mathfrak{M} , puesto que es no negativa: $m(\Delta) = M|\zeta(\Delta)|^2 \geq 0$, $m(\emptyset) = 0$ y aditiva: $m(\Delta_1 \cup \Delta_2) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2)$, si $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$.

La **integral estocástica** de una función sencilla $f(x) = \sum_{h=1}^n c_h \chi_{\Delta_h}(x)$, $\Delta_h \in \mathfrak{M}$, definida en E , según la medida estocástica elemental $\zeta(\Delta)$ se determina mediante la correlación

$$\int f(x) \zeta(dx) = \sum_{h=1}^n c_h \zeta(\Delta_h). \quad (2.1)$$

Supongamos que la medida elemental $m(\Delta)$ es semiaditiva y, por ello, puede ser prolongada hasta una medida completa $\{E, \mathfrak{B}, m\}$. Introduzcamos un espacio de Hilbert $\mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$ de las funciones que por producto escalar tienen

$$(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} m(dx).$$

Definición. Una integral estocástica de $f(x)$ $\mathcal{L}_2(E, \mathcal{L}m)$ extendida a la medida estocástica elemental $\zeta(\Delta)$, se determina por la correlación

$$\int f(x) \zeta(dx) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) \zeta(dx) \quad (2.2)$$

para una sucesión arbitraria de funciones sencillas $f_n(x) \in \mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$ tales que

$$\int |f(x) - f_n(x)|^2 m(dx) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Teorema 1. Para una sucesión arbitraria de las funciones $f_n(x) \in \mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$ tales que se cumple la condición (2.3) tiene lugar la correlación (2.2). Para cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$ de $\mathcal{L}_2(E, \mathcal{L}m)$ se cumplen las igualdades:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] \zeta(dx) = \alpha \int f(x) \zeta(dx) + \beta \int g(x) \zeta(dx), \quad (2.4)$$

donde α, β son constantes arbitrarias;

$$M \int f(x) \zeta(dx) \int \overline{g(x) \zeta(dx)} = \int f(x) \overline{g(x)} m(dx). \quad (2.5)$$

Observación. La igualdad (2.5) significa una correspondencia isométrica entre $\mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$ y $\mathcal{L}_2(\zeta)$, que es un espacio de Hilbert de las magnitudes aleatorias $\eta = \int f(x) \zeta(dx)$, donde $f(x) \in \mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$.

La correlación isométrica que existe entre $\mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$ y $\mathcal{L}_2(\zeta)$ se la puede tomar de base para determinar la integral estocástica.

Sea L_0 una clase de todos los conjuntos $A \in \mathfrak{B}$, para los cuales $m(A) < \infty$. La función aleatoria de los conjuntos

$$\tilde{\zeta}(A) = \int \chi_A(x) \zeta(dx) = \int_A \zeta(dx) \quad (2.6)$$

es una medida ortogonal estocástica en L_0 , satisfaciendo a las siguientes condiciones:

$$a) \tilde{\zeta}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\zeta}(A_n),$$

si $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in L_0$ y $A_k \cap A_r = \emptyset$, cuando $k \neq r$.

$$b) M \tilde{\zeta}(A) \tilde{\zeta}(B) = m(A \cap B), \quad A, B \in L_0;$$

$$c) \tilde{\zeta}(\Delta) = \zeta(\Delta), \quad \Delta \in \mathfrak{B}.$$

Teorema 2. Si una función estructural $m(\Delta)$ de la medida estocástica elemental $\zeta(\Delta)$ es semiaditiva, entonces $\{\zeta(\Delta), A \in \mathfrak{R}\}$ puede ser prolongada hasta la medida estocástica $\{\zeta(A), A \in L_0\}$, con la particularidad de que

$$\int f(x) \zeta(dx) = \int f(x) \tilde{\zeta}(dx). \quad (2.7)$$

10.2.2. Propiedades de la integral estocástica. Sea ζ una medida estocástica ortogonal con la función estructural m que sirva de medida completa en $\{E, \mathfrak{B}\}$. Hagamos para $g(x) \in \mathcal{L}_2(m)$

$$\lambda(A) = \int \chi_A(x) g(x) \zeta(dx), \quad A \in \mathfrak{R}. \quad (2.8)$$

1. Entonces, $\lambda(A)$ es una medida estocástica ortogonal en $\{E, \mathfrak{B}\}$ con la función estructural

$$l(A) = \int_A |g(x)|^2 m(dx). \quad (2.9)$$

2. Si $f(x) \in \mathcal{L}_2(l)$, entonces $f(x)g(x) \in \mathcal{L}_2(m)$ y

$$\int f(x) \lambda(dx) = \int f(x) g(x) \zeta(dx). \quad (2.10)$$

3. Si $m(A) < \infty$, entonces

$$\zeta(A) = \int \frac{\chi_A(x)}{g(x)} \lambda(dx). \quad (2.11)$$

4. Sea T un segmento finito o infinito de una recta real y sean B una σ -álgebra de los subconjuntos borelianos de T y l , una medida de Lebesgue.

Teorema 3. Para la función boreliana $g(t, x) \in \mathcal{L}_2(l \times m)$ y $g(t, x) \in \mathcal{L}_2(m)$, para todo $t \in T$, la integral estocástica

$$\xi(t) = \int g(t, x) \zeta(dx) \quad (2.12)$$

se puede definir como función t de tal modo que el proceso $\xi(t)$ sea medible.

5. Si $g(t, s)$ y $h(t)$ son las funciones borelianas,

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} |g(t, s)|^2 dt m(dx) < \infty, \quad \int_a^b |h(t)|^2 dt < \infty, \quad (2.13)$$

entonces

$$\int_a^b h(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(t, s) \zeta(dx) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(dx) \int_a^b h(t) g(t, s) dt. \quad (2.14)$$

Observación. La correlación (2.14) subsiste también cuando $a = -\infty$, $b = +\infty$, si existe una integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) g(t, s) dt$ en el sentido de convergencia en $\mathcal{L}_2(m)$.

6. Sea $\{\xi(t), t \in [a, b]\}$ un proceso con incrementos ortogonales:

$$M(\xi(t_2) - \xi(t_1)) \overline{(\xi(t_4) - \xi(t_3))} = 0$$

para cualesquiera $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, pertenecientes a $[a, b]$, continuo (m.c.) a la izquierda:

$$M|\xi(t) - \xi(s)|^2 \rightarrow 0, \text{ cuando } s \uparrow t.$$

Sea \mathfrak{W} una clase de todos los subintervalos $\Delta = [t_1, t_2]$, $a \leq t_1 < t_2 \leq b$. Determinemos la medida estocástica elemental

$$\zeta([t_1, t_2]) = \xi(t_2) - \xi(t_1), \quad (2.15)$$

con la función estructural

$$m([t_1, t_2]) = M|\xi(t_2) - \xi(t_1)|^2 = F(t_2) - F(t_1), \quad (2.16)$$

donde

$$F(t) = M|\xi(t) - \xi(p)|^2. \quad (2.17)$$

La función $F(t)$ es monótona no decreciente y continua a la izquierda. Por esta razón, la función estructural (2.16) admite una prolongación hasta obtener la medida completa en $[a, b]$. Por consiguiente, queda definida una integral estocástica de Stieltjes extendida por el proceso con incrementos independientes y esta definición se hace por medio de la igualdad:

$$\int_a^b f(t) d\zeta^*(t) = \int_a^b f(t) \zeta(dt) \quad (2.18)$$

para una función boreliana arbitraria $f(t) \in \mathcal{L}_2(F)$. La definición de la integral (2.18) queda también en vigor para $b = +\infty$.

10.2.3. Integral estocástica extendida a una medida vectorial. La integral estocástica se generaliza para las medidas estocásticas vectoriales. Supongamos que $\zeta(\Delta) = \{\zeta^1(\Delta), \zeta^2(\Delta), \dots, \zeta^p(\Delta)\}$ que es la medida estocástica (ortogonal) vectorial en \mathfrak{W} con la matriz estructural $m(\Delta) = \{m_j^k(\Delta)\} = M\zeta(\Delta)\zeta^*(\Delta)$ ($m_j^k(\Delta) = M\zeta^k(\Delta)\overline{\zeta^j(\Delta)}$), $1 \leq j, k \leq p$, satisface las condiciones:

- 1) $\zeta(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \zeta(\Delta_1) + \zeta(\Delta_2) \pmod{P}$, si $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$;
- 2) $M\zeta^k(\Delta_1)\zeta^j(\Delta_2) = m_j^k(\Delta_1 \cap \Delta_2)$; $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{W}$, $1 \leq k, j \leq p$;
- 3) $M|\zeta(\Delta)|^2 = M\zeta^*(\Delta)\zeta(\Delta) = M \sum_{h=1}^p |\zeta^h(\Delta)|^2 < \infty$, $\zeta(\emptyset) = 0$.

Hagamos $m_0(\Delta) = \text{Sp } m(\Delta) = \sum_{h=1}^p m_h^h(\Delta)$.

Si la traza $m_0(\Delta)$ de la matriz $m(\Delta)$ es una función semiaditiva en \mathfrak{W} , entonces $m_h^h(\Delta)$ pueden prolongarse hasta las funciones numerales aditivas de los conjuntos en $\{E, \mathfrak{E}\}$. La medida matricial completa $m(\Delta)$ en $\{E, \mathfrak{E}\}$ posee la propiedad de que está positivamente definida:

$$\sum_{j, k=1}^n z_j^* m(\Delta_j \cap \Delta_k) z_k = M \left| \sum_{h=1}^n \zeta^*(\Delta_h) z_h \right|^2 \geq 0 \quad (2.19)$$

para cualesquiera vectores $z_k = \{z_k^1, z_k^2, \dots, z_k^p\}$ y todo $\Delta_k \in \mathfrak{A}$, $1 \leq k \leq p$.

Aquí, $\xi^*(\Delta)$ es un vector fila de componentes $\xi_j^*(\Delta)$, $j = 1, 2, \dots, p$.

Introducimos el espacio $\mathcal{L}_0(\mathfrak{M})$ -funciones sencillas

$$f(x) = \sum_{h=1}^n c_h \chi_{\Delta_h}, \quad \Delta_h \in \mathfrak{M}, \text{ con el producto escalar}$$

$$(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} m_0(dx).$$

A continuación, determinemos el espacio de $\mathcal{L}_0^p(\xi)$ -vectores aleatorios $\eta = \sum_{h=1}^n c_h \xi(\Delta_h)$, $\Delta_h \in \mathfrak{M}$, con el producto escalar $(\eta_1, \eta_2) = M\eta_1 \overline{\eta_2}$.

La clausura (en el sentido de convergencia en m.c.) del espacio de magnitudes aleatorias $\mathcal{L}_0^p(\xi)$ se designará mediante $\mathcal{L}_2^p(\xi)$ y el complemento $\mathcal{L}_0(m)$, mediante $\mathcal{L}_2(m)$.

La igualdad

$$\eta = \int f(x) \xi(dx) = \sum_{h=1}^n c_h \xi(\Delta_h) \quad (2.20)$$

establece para $f(x) = \sum_{h=1}^n c_h \chi_{\Delta_h}(x)$ una aplicación isométrica $\eta = \mathfrak{F}(f)$ del espacio $\mathcal{L}_0(m)$ sobre $\mathcal{L}_0^p(\xi)$, que puede ser prolongado hasta la correspondencia isométrica $\eta = \mathfrak{F}(f)$ de $\mathcal{L}_2(m)$ sobre $\mathcal{L}_2^p(\xi)$. Con ello el vector aleatorio $\eta = \mathfrak{F}(f)$ lo llaman integral estocástica y se escribe

$$\eta = \int f(x) \xi(dx), \quad f(x) \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{M}). \quad (2.21)$$

Las propiedades de integral estocástica mencionadas más arriba quedan en vigor también en el caso dado.

10.2.4. Representación integral de las funciones aleatorias. Con la ayuda de integrales estocásticas se pueden obtener las representaciones integrales de diferentes clases de funciones aleatorias.

Teorema. Supongamos que está dada una función aleatoria vectorial p -dimensional $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$ cuya matriz de covarianza $B(x_1, x_2) = M\xi^*(x_1) \xi^*(x_2) = \{B_j^k(x_1, x_2)\}$, $B_j^k(x_1, x_2) = M\xi_j^*(x_1) \xi_k^*(x_2)$, $1 \leq j, k \leq p$, admite la representación integral

$$B(x_1, x_2) = \int g(x_1, u) \overline{g(x_2, u)} m(du), \quad (2.22)$$

donde $m(\Delta)$ es una medida matricial positivamente definida en $\{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}\}$ con $m_0(u) = \text{Sp } m(u)$ y $g(x, u)$ es una función escalar que satisface las condiciones: 1) $g(x, u) \in \mathcal{L}_2\{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, m_0\}$ para todo $x \in \mathfrak{X}$; 2) la familia de funciones $\{g(x, u), x \in \mathfrak{X}\}$ es completa en $\mathcal{L}_2\{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, m_0\}$.

En este caso existe tal medida vectorial ortogonal estocástica $\{\zeta(B), B \in \mathfrak{B}\}$ con la función matricial estructural $m(B) = M\zeta(B)\zeta^*(B)$ que, con la probabilidad 1, para todo x la función aleatoria $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$ puede ser representada en la forma

$$\xi(x) = \int g(x, u) \zeta(du). \quad (2.23)$$

Con ello, la medida estocástica $\{\zeta(B), B \in \mathfrak{B}\}$ está subordinada a la función aleatoria $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$ en el sentido que $\zeta(B) \in \mathcal{L}_2^P(\xi)$ para todo $B \in \mathfrak{B}$.

La medida estocástica $\{\zeta(B), B \in \mathfrak{B}\}$ se determina con la ayuda de una correspondencia isométrica entre los espacios $\mathcal{L}_2(\xi)$ y $\mathcal{L}_2(g)$, para la cual

- a) $\xi(x) \leftrightarrow g(x, u), \zeta(B) \leftrightarrow \chi_B(u)$;
 b) si $\eta_l \leftrightarrow f_l(u)$ ($l = 1, 2$), entonces

$$\eta_l = \int f_l(u) \zeta(du); \quad M\eta_1\eta_2^* = \int f_1(u)\overline{f_2(u)} m(du).$$

10.3. Extrapolación lineal y filtración de las funciones aleatorias de Hilbert

Una función aleatoria de Hilbert $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$ con sus valores en el espacio medible $\{E, \mathfrak{B}\}$ genera un espacio de magnitudes aleatorias de Hilbert \mathcal{L}_2 $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$, que representa la cápsula lineal cerrada (en el sentido de convergencia en m.c.) de una familia de magnitudes aleatorias $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$ y de unas constantes.

El espacio de Hilbert \mathcal{L}_2 $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$ es un subespacio del espacio de Hilbert $\mathcal{L}_2(\Omega, \sigma, P)$ de todas las magnitudes aleatorias de Hilbert definidas en el mismo espacio probabilístico básico $\{\Omega, \sigma, P\}$ donde está definida la familia de magnitudes aleatorias de Hilbert $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$.

La mejor aproximación (estimación) lineal $\tilde{\zeta}$ de una magnitud aleatoria de Hilbert $\zeta \in \mathcal{L}_2(\Omega, \sigma, P)$ en el espacio \mathcal{L}_2 $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$ se determina por la condición

$$M|\tilde{\zeta} - \zeta|^2 \leq M|\zeta' - \zeta|^2 \text{ para cualquier } \zeta' \in \mathcal{L}_2(\xi(x), x \in \mathfrak{X}). \quad (3.1)$$

La condición (3.1) significa que la estimación $\tilde{\zeta}$ admite un error medio cuadrático mínimo.

De la teoría de los espacios de Hilbert se deduce que el elemento $\tilde{\zeta}$ es una proyección de ζ on el subespacio \mathcal{L}_2 $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$ y se determina de modo unívoco (mod P) mediante el sistema de ecuaciones lineales

$$M\tilde{\zeta}\bar{\xi}(x) = M\zeta\bar{\xi}(x), \quad x \in \mathfrak{X}. \quad (3.2)$$

El error medio cuadrático δ de la igualdad aproximada $\tilde{\zeta} \approx \zeta$ es igual a la longitud de una perpendicular trazada del extremo del vector ζ al subespacio \mathcal{L}_2 $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$ y se expresa mediante la fórmula

$$\delta^2 = M|\zeta - \tilde{\zeta}|^2. \quad (3.3)$$

En particular, se cumple la condición de estimación insesgada:

$$M\tilde{\xi} = M\zeta.$$

La mejor estimación lineal $\tilde{\xi}$, determinada mediante el sistema (3.2), es una función lineal de $\xi(x)$ con varianza finita.

El problema de construcción de la estimación $\tilde{\xi}$ surge durante la extrapolación lineal de un proceso aleatorio $\{\xi(t), t \in T\}$, cuando se requiere evaluar el valor de $\xi(t^*)$ en cierto momento de tiempo t^* , partiendo de los valores del proceso $\xi(t)$ en el conjunto de momentos de tiempo T precedentes a t^* .

Otro ejemplo de construcción de la estimación $\tilde{\xi}$ es el problema de filtración lineal de un proceso aleatorio que consiste en lo siguiente. Se observa el proceso $\xi(t) = \zeta(t) + \eta(t)$, que representa en sí una suma de la señal útil $\zeta(t)$ con el ruido $\eta(t)$. Se necesita separar la señal del ruido, es decir, para el t^* dado hace falta hallar las mejores aproximaciones lineales $\tilde{\zeta} \in \mathcal{L}_2\{\xi(t), t \in T\}$ de la señal $\zeta(t^*)$.

Por supuesto, la estimación lineal $\tilde{\zeta}$ no siempre es aceptable desde el punto de vista práctico. Sin embargo, en un caso muy importante, cuando todas las distribuciones de dimensiones finitas de las magnitudes aleatorias $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$ son normales y $M\xi(x) = 0$, $M\zeta = 0$, la mejor estimación lineal en $\mathcal{L}_2\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$ es a la vez la mejor en el sentido m.e.

En este caso

$$\tilde{\zeta} = M\{\zeta/\sigma(\xi(x), x \in \mathcal{X})\}, \quad (3.4)$$

donde $\sigma(\xi(x), x \in \mathcal{X})$ es una σ -álgebra generada por la totalidad de magnitudes aleatorias $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$.

EJEMPLO 1. Sea dada una totalidad finita de magnitudes aleatorias de Hilbert linealmente independientes $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots, n\}$. La solución del sistema de ecuaciones lineales (3.2) se determinará mediante la fórmula

$$\tilde{\zeta} = \frac{1}{\Gamma} \begin{vmatrix} (\xi_1, \xi_1) & \dots & (\xi_1, \xi_n) & \xi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_n, \xi_1) & \dots & (\xi_n, \xi_n) & \xi_n \\ (\zeta, \xi_1) & \dots & (\zeta, \xi_n) & 0 \end{vmatrix}, \quad (3.5)$$

donde $\Gamma = \Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ es el determinante de Gram del sistema de magnitudes $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots, n\}$:

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} (\xi_1, \xi_1) & \dots & (\xi_1, \xi_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\xi_n, \xi_1) & \dots & (\xi_n, \xi_n) \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

El error medio cuadrático $\delta^2 = M|\tilde{\zeta} - \zeta|^2$ se determina por la igualdad

$$\delta^2 = \frac{\Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \zeta)}{\Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}. \quad (3.7)$$

EJEMPLO 2. Sea dado un proceso aleatorio continuo de Hilbert $\{\xi(t), t \in [a, b]\}$ en un segmento temporal finito con la función de

correlación

$$R(t, s) = M[(\xi(t) - a(t))(\xi(s) - a(s))], \quad a(t) = M\xi(t).$$

El proceso $\{\xi(t), t \in [a, b]\}$ puede ser desarrollado en una serie ortogonal

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varphi_n(t), \quad (3.8)$$

en la que $M\xi_n \bar{\xi}_m = \lambda_n \delta_{nm}$; λ_n y $\varphi_n(t)$ son, respectivamente, los valores propios y las funciones propias de la función de correlación $R(t, s)$ en $[a, b]$:

$$\int_a^b R(t, s) \varphi_n(s) ds = \lambda_n \varphi_n(t).$$

En este caso la mejor estimación lineal $\tilde{\zeta}$ se determina por las correlaciones

$$\tilde{\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi_n, \quad \xi_n = \int_a^b \overline{\varphi_n(t)} \xi(t) dt, \quad (3.9)$$

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n} M \tilde{\zeta} \bar{\xi}_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b R_{\tilde{\zeta}\xi}(t) \varphi_n(t) dt, \quad (3.10)$$

donde

$$R_{\tilde{\zeta}\xi}(t) = M \tilde{\zeta} \bar{\xi}(t).$$

El error medio cuadrático de la estimación se determina por la fórmula

$$\delta^2 = M |\zeta - \tilde{\zeta}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \quad (3.11)$$

El empleo práctico de las fórmulas expuestas es posible a condición de que se conozcan los números propios y las funciones propias del núcleo $R(t, s)$.

PROCESOS ESTACIONARIOS

Un lugar de importancia ocupan en la teoría de los procesos aleatorios los procesos en los cuales algunas de sus características quedan invariables con desplazamientos del parámetro temporal o espacial o, en el caso más general, los procesos determinadas características de los cuales son invariantes respecto de cierto grupo o semigrupo de transformaciones.

Los procesos de este tipo poseen ciertas propiedades de invariabilidad y tienen carácter estacionario. Con la mayor frecuencia, a título de características, invariantes respecto de un grupo (o semigrupo) dado de transformaciones, intervienen o los momentos, o bien las distribuciones de dimensiones finitas.

En el primer caso se habla de los procesos estacionarios de r -ésimo orden, si la propiedad de invariación la poseen los momentos de r -ésimo orden inclusive. La clase más importante la constituyen los procesos estacionarios de segundo orden, llamados comúnmente procesos estacionarios en amplio sentido.

Si en calidad de características invariantes se eligen las distribuciones de dimensiones finitas, los procesos correspondientes se denominan estacionarios en estrecho sentido.

11.1. Procesos aleatorios estacionarios en amplio sentido

11.1.1. Definiciones fundamentales. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio probabilístico fijado en el cual se consideran los procesos aleatorios $\{\xi(t), t \in T\}$, donde T es uno de los conjuntos del tipo $(-\infty, \infty)$, $[0, \infty)$ (tiempo continuo) o bien $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\{0, 1, 2, \dots\}$ (tiempo discreto).

El proceso $\xi(t)$ puede tomar valores en $R^1 = (-\infty, \infty)$ (proceso escalar real) o bien en el plano complejo Z (proceso escalar complejo), o bien en el espacio euclídeo R^k (proceso real k -dimensional), o bien en el espacio complejo k -dimensional Z^k (proceso complejo k -dimensional).

Definición 1. a) Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso escalar y existe $M|\xi(t)|^2$ para $t \in T$, entonces $C(t, s) = M\xi(t)\overline{\xi(s)}$ se denomina función de covariación y la función $B(t, s) = M[\xi(t) - M\xi(t)] \times [\xi(s) - M\xi(s)]$, función de correlación del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$.

b) Si $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_k(t))$, $t \in T$, es un proceso vectorial, para el cual existen $M\xi_l(t)\overline{\xi_m(t)}$, $l, m = \overline{1, k}$, entonces la

matriz $C(t, s) = \{c_{lm}(t, s), l, m = \overline{1, k}\}$, donde $c_{lm}(t, s) = M \xi_l(t) \overline{\xi_m(s)}$, se llama matriz de covariación, mientras que la matriz $B(t, s) = \{B_{lm}(t, s), l, m = \overline{1, k}\}$, donde $B_{lm}(t, s) = M [\xi_l(t) - M \xi_l(t)] [\xi_m(t) - M \xi_m(t)]$, matriz de correlación del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$. La matriz de covariación $C(t, s)$ puede ser representada en la forma

$$C(t, s) = M \xi_s^*(t) \xi^*(s), \quad (1.1)$$

donde el signo de conjugación* significa la transposición del vector columna $\xi(s)$ y el paso a los elementos complejos conjugados.

En el caso escalar resulta cómodo considerar que $\xi^*(s) = \overline{\xi(s)}$, razón por la cual podemos emplear la fórmula (1.1) tanto en el caso escalar, como en el vectorial. $C(t, s)$ y $B(t, s)$ en los casos escalar y vectorial se llaman a menudo función de covariación y función de correlación, respectivamente.

Definición 2. Un proceso aleatorio $\{\xi(t), t \in T\}$ se denomina estacionario en amplio sentido, si su esperanza matemática $M \xi(t) = a$ no depende de t , y la función de correlación $B(t, s)$ sólo depende de la diferencia $(t - s)$, es decir, si

$$B(t, s) = B(t - s), \quad (1.2)$$

Así pues, si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso estacionario en amplio sentido, entonces el proceso $\{\xi_u(t), t \in T\}$, donde $\xi_u(t) = \xi(t + u)$ y $u \in T$ es fijado, tiene la esperanza matemática $M \xi_u(t) = a$, igual a la de $\xi(t)$ y la función de correlación $B(t) = B(t, 0)$.

La varianza de un proceso estacionario en amplio sentido coincide con $B(0)$: $M \{\xi(t) - a\} \{\xi(t) - a\}^* = B(0)$.

Las funciones de covariación y de correlación están entrelazadas por la correlación

$$C(t, s) = B(t, s) + aa^*,$$

por consiguiente, para los procesos estacionarios $C(t, s) = C(t - s)$.

Si $M \xi(t) = 0$, la función de correlación y la de covariación coinciden. Más aún, si $C(t) = C(t, 0)$, la fórmula

$$C(t) = B(t) + aa^*$$

muestra que sin perder la generalidad de razonamientos podemos tomar para la consideración un proceso con esperanza matemática nula, pues siempre podemos pasar al proceso $\xi_0(t) = \xi(t) - M \xi(t)$, para el cual la propiedad dada está cumplida.

Todos los procesos de tiempo continuo considerados en este capítulo se supone que son continuos a la derecha de manera media cuadrática (m.c.), es decir,

$$\lim_{s \downarrow t} M \|\xi(s) - \xi(t)\|^2 = 0, \quad t \in T.$$

Sean $\{\xi(t), t \in T\}$ y $\{\eta(t), t \in T\}$ unos procesos estacionarios en amplio sentido cuyas funciones de correlación son $B_\xi(t)$ y $B_\eta(t)$, respectivamente.

Definición 3. Los procesos $\{\xi(t), t \in T\}$ y $\{\eta(t), t \in T\}$ se llaman ligados de manera estacionaria, si su función de correlación recíproca $B_{\xi\eta}(t) = M \xi(t) \eta^*(s)$ sólo depende de la diferencia $(t - s)$. Con

este motivo $B_2(t)$ y $B_n(t)$ se llaman a veces funciones de autocorrelación.

La función de correlación $B(t)$ de un proceso estacionario posee las siguientes propiedades.

1. Carácter hermitiano:

$$B(t) = \begin{cases} \overline{B(-t)} & \text{(proceso escalar),} \\ B^*(-t) & \text{(proceso vectorial).} \end{cases} \quad (1.3)$$

2. Definición no negativa:

$$\sum_{l, m=1}^N B(t_l - t_m) \lambda_l \overline{\lambda_m} \geq 0 \quad \text{(proceso escalar),} \quad (1.4)$$

cualesquiera que sean $N \geq 1$, $t_l \in T$ y los números complejos λ_l , $l = \overline{1, N}$;

$$\sum_{l, m=1}^N z_l^* B(t_l - t_m) z_m \geq 0 \quad \text{(proceso vectorial),} \quad (1.4')$$

cualesquiera que sean $N \geq 1$, $t_l \in T$ y los vectores z_l , $l = \overline{1, N}$.

3. $|B(t)| \leq B(0)$ (proceso escalar).

$|B_{lm}(t)|^2 \leq B_{ll}(0) B_{mm}(0)$, $l, m = \overline{1, k}$ (proceso vectorial).

4. Si (en el caso de tiempo continuo) la función de correlación $B(t)$ es continua en el punto $t = 0$, será continua en cualquier otro punto $t \in T$.

5. Si $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_k(t))$ es un proceso vectorial, las funciones

$$\rho_{lm}(t) = \frac{B_{lm}(t)}{\sqrt{B_{ll}(0) B_{mm}(0)}},$$

llamadas coeficientes de correlación recíproca de las componentes $\xi_l(t)$ y $\xi_m(t)$, satisfacen la desigualdad

$$-1 \leq \rho_{lm}(t) \leq 1, \quad l, m = \overline{1, k},$$

y determinan el grado de la dependencia lineal de los procesos $\xi_l(t)$ y $\xi_m(t)$.

Diferentes procesos estacionarios pueden tener las mismas esperanzas matemáticas o igual función de covariación.

Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso estacionario y para todo $n \geq 1$ y cualquier juego $\{t_k \in T, k = \overline{1, n}\}$ el vector $(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n))$ tiene distribución normal multidimensional, entonces $\{\xi(t), t \in T\}$ se denomina proceso gaussiano estacionario (o bien proceso estacionario normal).

El proceso estacionario gaussiano se determina por su esperanza matemática y la función de covariación.

Y viceversa, toda función $m(t) = \text{const}$ y la función $B(t)$, que posea las propiedades (1.3) y (1.4), define cierto proceso estacionario gaussiano.

Sea $\xi^{(N)} = \sum_{l=1}^N \lambda_l \xi(t_l)$, donde $N \geq 1$ es un número entero cualquiera, $t_l \in T$, λ_l , unos números arbitrarios. La cápsula lineal $H_0\{\xi\}$

de todas las magnitudes aleatorias de esta índole, construidas según el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, es un subespacio del espacio de Hilbert $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ de cuadrado integrable según la medida \mathbf{P} de las funciones \mathcal{E} -medibles en Ω . Introduzcamos en $H_0(\xi)$ un producto escalar de acuerdo con la fórmula

$$(\xi, \eta) = \begin{cases} \overline{M\xi\eta} & (\text{proceso escalar}), \\ \text{Sp } M\xi\eta^* & (\text{proceso vectorial}), \end{cases} \quad (1.5)$$

donde $\text{Sp } B$ significa la traza de la matriz B , es decir, la suma de sus elementos diagonales. El espacio de Hilbert H_ξ , que es una clausura de $H_0(\xi)$ en la norma generada por el producto escalar (1.5), se llama espacio de valores del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$. Desde el punto de vista geométrico el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ es una curva en el espacio $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ y H_ξ es la intersección de todos los subespacios en $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$ que contienen dicha curva.

11.1.2. Ejemplos. 1. Sea $\zeta_m, m = \overline{1, p}$, un juego de tales magnitudes aleatorias incorrelacionadas que

$$M\zeta_m = 0, \quad M\zeta_m\zeta_l^* = \delta_{ml}\sigma_m^2,$$

donde δ_{ml} es el símbolo de Kronecker, $\sigma_m^2 < \infty$. Si $p = \infty$, sea $\sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^2 < \infty$ y $\lambda_m, m = \overline{1, p}$, un juego de números reales arbitrarios.

El proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, donde $\xi(t) = \sum_{m=1}^p e^{i\lambda_m t} \zeta_m$, es estacionario

en amplio sentido, puesto que $M\xi(t) = 0$ y $B(t, s) = \sum_{m=1}^p e^{i\lambda_m(t-s)} \sigma_m^2 = B(t-s)$.

2. Sea $\zeta_m, m = \overline{1, p}$, un juego de vectores aleatorios incorrelacionados k -dimensionales tales que $M\xi_m = 0, M\zeta_m\zeta_l^* = \delta_{ml}G_m$, donde G_m es una matriz $k \times k$ de Hermite definida de modo no negativo y $\lambda_m, m = \overline{1, p}$, un juego de números reales arbitrarios.

El proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, donde $\xi(t) = \sum_{m=1}^p e^{i\lambda_m t} \zeta_m$ es estacionario en

amplio sentido, puesto que $M\xi(t) = 0, B(t, s) = \sum_{m=1}^p e^{i\lambda_m(t-s)} G_m = B(t-s)$.

3. Sea $\xi(t) = \cos(t\eta + \varphi)$, donde φ es una magnitud aleatoria uniformemente distribuida en $[0, 2\pi]$, mientras que la magnitud aleatoria η no depende de φ y su función de distribución es $G(x)$. El proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ es estacionario (real) en amplio sentido, puesto

que $M\xi(t) = 0, B(t, s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(t-s)x] G(dx) = B(t-s)$.

4. Supongamos que $T = [0, \infty)$ y $\{w(t), t \in T\}$ es un proceso estándar de Wiener. El proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, donde $\xi(t) = w(t+h) -$

— $w(t)$ y $h > 0$ es un número fijado, es estacionario (real) en amplio sentido, puesto que $M_{\xi}(t) = 0$ y

$$B(t, s) = \begin{cases} 0, & \text{si } |t-s| \geq h \\ h - |t-s|, & \text{si } |t-s| < h \end{cases} = B(t-s).$$

5. Supongamos que $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ y $\zeta(t)$, $t \in T$, es una sucesión estándar de magnitudes aleatorias incorrelacionadas, es decir, $M_{\xi}(t) = 0$, $M_{\xi}(m) \overline{\xi(m)} = \delta_{m1}$ y sea una sucesión de números complejos $c(t)$, $t \in T$, tal que $\sum_{t \in T} |c(t)|^2 < \infty$.

Una sucesión aleatoria $\{\xi(t), t \in T\}$, donde $\xi(t) = \sum_{s \in T} c(t-s) \zeta(s)$, es estacionaria en amplio sentido, puesto que $M_{\xi}(t) = 0$,

$$B(t, s) = \sum_{m \in T} c(t-s+m) \overline{c(m)} = B(t-s).$$

6. Supongamos que $T = (-\infty, \infty)$ y $\{\zeta(t), t \in T\}$ es un proceso estándar k -dimensional con incrementos ortogonales, es decir, $M_{\xi}(t) = 0$, $M[\zeta(t_1) - \zeta(t_2)] [\zeta(s_1) - \zeta(s_2)]^* = 0$ para $t_2 < t_1 \leq s_2 < s_1$ y $M[\zeta(t) - \zeta(s)] [\zeta(t) - \zeta(s)]^* = |t-s| I$, donde I es la matriz $k \times k$ unidad y supongamos, además, que la función de valores

matriciales $C(t)$, $t \in T$, es tal que $\text{Sp} \int_{-\infty}^{\infty} C(t) C^*(t) dt < \infty$.

El proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, donde $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t-s) d\zeta(s)$ y la integral se entiende como un límite en el sentido medio cuadrático, es estacionario en amplio sentido, puesto que $M_{\xi}(t) = 0$, $B(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t-s+u) C^*(u) du = B(t-s)$.

Los procesos indicados en los ejemplos 5 y 6 se llaman procesos de sumación deslizando.

11.2. Representación espectral de las funciones de correlación

11.2.1. Teorema de Bochner—Ginčin. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso estacionario en amplio sentido cuya función de correlación es $B(t)$.

a) Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso escalar con tiempo discreto, entonces

$$B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dF(\lambda) = \int_0^{\pi} [\cos \lambda t dC(\lambda) + \text{sen } \lambda t dQ(\lambda)], \quad (2.1)$$

donde $F(\lambda)$ es una función no decreciente no negativa, determinada según $B(t)$ unívocamente, si se exige que $F(-\pi) = 0$ y $F(\lambda)$ sea continua a la derecha; $C(\lambda)$ es una función par real de una variación acotada tal que $C(\lambda_1) - C(\lambda_2) \geq 0$ para $\lambda_1 \geq \lambda_2$; $Q(\lambda)$ es una función real impar de una variación acotada.

b) Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso vectorial con tiempo discreto, entonces para $B(t)$ tienen lugar las representaciones (2.1) donde $F(\lambda)$ es una matriz cuyos incrementos $F(\lambda_1) - F(\lambda_2)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$, son hermitianos y están definidos de modo no negativo; $C(\lambda)$ es una matriz simétrica real cuyos incrementos $C(\lambda_1) - C(\lambda_2)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$ están definidos de modo no negativo; $Q(\lambda)$ es una matriz real antisimétrica. $F(\lambda)$ se determina unívocamente según $B(t)$, si se exige que $F(-\pi) = 0$ (matriz nula) y $F(\lambda)$ sea continua a la derecha (en el sentido de convergencia por elementos).

c) Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso escalar con tiempo continuo, entonces

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dF(\lambda) = \int_0^{\infty} [\cos t\lambda dC(\lambda) + \text{sen } t\lambda dQ(\lambda)], \quad (2.2)$$

donde las funciones $F(\lambda)$, $C(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ se determinan igual que en el caso a), a excepción de la condición: $F(-\infty) = 0$.

d) Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso vectorial con tiempo continuo, entonces para $B(t)$ tienen lugar las representaciones (2.2), donde las matrices $F(\lambda)$, $C(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ se determinan igual que en el caso b), a excepción de la condición: $F(-\infty) = 0$ (matriz nula).

$F(\lambda)$ se denomina función espectral (matricial) del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, y la medida, generada por la función espectral $F(\lambda)$, medida espectral.

$C(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ se llaman, respectivamente, función coespectral (matricial) y función espectral cuadrática (matricial).

Se verifican las igualdades:

$$B(0) = \begin{cases} F(\pi) & (\text{tiempo discreto}), \\ F(\infty) & (\text{tiempo continuo}), \end{cases} \quad (2.3)$$

$$dC(\lambda) = \begin{cases} dF(\lambda), & \lambda = 0, \\ 2\text{Re } dF(\lambda), & \lambda \neq 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$dQ(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda = 0, \\ 2\text{Im } dF(\lambda), & \lambda \neq 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

11.2.2. Ejemplos. 1. Supongamos que $T = (-\infty, \infty)$, $\xi(t) = \eta e^{it\xi}$, donde las magnitudes aleatorias η y ξ son independientes, $M\eta = 0$, $D\eta = \sigma_\eta^2$, y la magnitud aleatoria ξ cuenta con la función de distribución $G_\xi(x)$. El proceso estacionario $\{\xi(t), t \in T\}$ tiene la función de correlación $B_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\alpha} \sigma_\eta^2 G_\xi(d\alpha)$ y, por consiguiente, de la función espectral $F_\xi(\lambda)$ podemos decir que es igual a $F_\xi(\lambda) = \sigma_\eta^2 G_\xi(\lambda)$.

El ejemplo muestra que existen procesos estacionarios con cualquier función espectral profijada de antemano.

2. Supongamos que $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ y $\{\xi(t), t \in T\}$ es una sucesión de magnitudes aleatorias incorrelacionadas tales que

$M\bar{\xi}(t) = 0$, $M\bar{\xi}(t)\overline{\bar{\xi}(s)} = \delta_{ts}\sigma^2$. En este caso

$$B(t) = \begin{cases} \sigma^2 & t=0; \\ 0, & t \neq 0, \end{cases}$$

por lo tanto, $F(\lambda) = \frac{\pi + \lambda}{2\pi} \sigma^2$.

3. Supongamos que $T = [0, \infty)$ y $\{\bar{\xi}(t), t \in T\}$ representan un proceso estacionario en amplio sentido y un proceso de Márkov en amplio sentido. Lo último significa que $a(s, u) = a(s, t)a(t, u)$, $s < t < u$, donde

$$a(s, t) = \begin{cases} \frac{M\bar{\xi}(t)\overline{\bar{\xi}(s)}}{M|\bar{\xi}(s)|^2}, & \text{si } M|\bar{\xi}(s)|^2 > 0; \\ 0, & \text{si } M|\bar{\xi}(s)|^2 = 0. \end{cases}$$

La función de correlación $B(t)$ tiene por expresión

$$B(t) = e^{-\alpha|t|\sigma^2}, \quad \alpha > 0, \quad \text{o bien } B(t) = e^{i\beta t}$$

(β es un número real).

En el primer caso la función espectral es

$$F(\lambda) = \frac{\sigma^2}{\pi} \arctg \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\sigma^2}{2}.$$

En el segundo caso

$$F(\lambda) = \begin{cases} \sigma^2 & \lambda \geq \beta; \\ 0, & \lambda < \beta. \end{cases}$$

11.2.3. Densidad espectral. Si $\int_{\Lambda} \lambda^m dF(\lambda) < \infty$, donde Λ coincide con $[-\pi, \pi]$ en el caso de tiempo discreto con $(-\infty, \infty)$, en el caso de tiempo continuo, entonces $S_m = \int_{\Lambda} \lambda^m dF(\lambda)$ se llama *m-ésimo momento espectral*.

Teorema. $\int_{\Lambda} \lambda^{2m} dF(\lambda) < \infty$, cuando y sólo cuando, la función de correlación $B(t)$ tiene en cero una derivada de orden $2m$.

Para la función espectral $F(\lambda)$ tiene lugar la descomposición de Lebesgue:

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda). \quad (2.6)$$

Aquí, $F_1(\lambda)$ es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, es decir,

$$F_1(\lambda) = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\lambda} f(\lambda) d\lambda & \text{(tiempo discreto);} \\ \int_{-\infty}^{\lambda} f(\lambda) d\lambda & \text{(tiempo continuo).} \end{cases} \quad (2.7)$$

$F_2(\lambda)$ sólo puede variar a saltos en un conjunto de puntos λ , finito o numerable. $F_2(\lambda)$ es continua y tiene derivada nula casi siempre en la medida de Lebesgue. La derivada $F_1'(\lambda) = f(\lambda)$ del componente absolutamente continuo de la función espectral $F(\lambda)$ se llama densidad espectral (matricial).

Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso vectorial con una función espectral absolutamente continua $F(\lambda)$ y si la densidad espectral matricial de este proceso $f(\lambda) = F'(\lambda)$ tiene rango r , $r = \overline{1, k}$, donde k es la dimensión del proceso, entonces $\{\xi(t), t \in T\}$ se llama proceso de rango r . Si es que $r = k$, es decir, si $\det f(\lambda) \neq 0$ para casi todo λ , entonces $\{\xi(t), t \in T\}$ se llama proceso de rango máximo.

11.3. Representación espectral de los procesos estacionarios

11.3.1. Representación espectral. A las representaciones espectrales de la función de correlación $B(t)$ de los tipos (2.1) y (2.2) corresponden las representaciones espectrales del mismo proceso $\{\xi(t), t \in T\}$.

Teorema 1. Para todo proceso aleatorio estacionario en amplio sentido dotado de la función espectral $F(\lambda)$ tiene lugar la representación espectral

$$\xi(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda) = \int_{\Lambda} [\cos t\lambda d\eta(\lambda) + i \sin t\lambda d\theta(\lambda)], \quad (3.1)$$

donde: $\Lambda = [-\pi, \pi]$, si el tiempo t es discreto, $\Lambda = (-\infty, \infty)$, si el tiempo t es continuo; las integrales se entienden como límites m.c. de las sucesiones de Riemann—Stieltjes; $\zeta(\lambda)$, $\eta(\lambda)$, $\theta(\lambda)$ son tales procesos con incrementos ortogonales que

$$M\zeta(\lambda) = M\eta(\lambda) = M\theta(\lambda) = 0,$$

$$M d\zeta(\lambda) d\zeta^*(\lambda) = dF(\lambda),$$

$$M d\eta(\lambda) d\eta^*(\lambda) = dC(\lambda),$$

$$M d\theta(\lambda) d\theta^*(\lambda) = \begin{cases} dQ(\lambda), & \lambda = 0; \\ dC(\lambda), & \lambda \neq 0, \end{cases}$$

$$M d\eta(\lambda) d\theta^*(\lambda) = -M d\theta(\lambda) d\eta^*(\lambda) = dQ(\lambda).$$

Si exigimos que el proceso $\zeta(\lambda)$ sea continuo a la derecha en media cuadrática, entonces se determinará unívocamente con la exactitud salvo subconjuntos del conjunto Ω de probabilidad nula.

El proceso $\zeta(\lambda)$ en la representación (3.1) se llama proceso espectral correspondiente al proceso estacionario $\{\xi(t), t \in T\}$.

Sea Γ un conjunto boreliano arbitrario de Λ . Hagamos $\Phi(\Gamma) = \int_{\Gamma} d\zeta(\lambda)$. La función aleatoria del conjunto $\Phi(\Gamma)$ posee las siguientes propiedades:

$$1) \Phi(\Gamma_1) + \Phi(\Gamma_2) = \Phi(\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad \text{si } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset;$$

$$2) M\Phi(\Gamma)\Phi^*(\Gamma) = \int_{\Gamma} dF(\lambda);$$

$$3) M\Phi(\Gamma_1)\Phi^*(\Gamma_2) = 0, \quad \text{si } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset;$$

4) si $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$, $\Gamma_i \cap \Gamma_m = \emptyset$, entonces $\Phi(\Gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi(\Gamma_i)$, y la serie en el segundo miembro converge en media cuadrática. $\Phi(\cdot)$ se denomina **medida espectral**.

Las propiedades de la medida espectral permiten ofrecer una representación espectral equivalente del proceso estacionario

$$\xi(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} d\zeta_{\xi}^{\lambda} = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda).$$

Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso escalar, entonces el elemento $e^{i\lambda t} d\zeta_{\xi}^{\lambda}$ representa en si una oscilación armónica cuya frecuencia angular es λ , mientras que la amplitud y la fase aleatorias se determinan por la magnitud aleatoria

$$d\zeta_{\xi}^{\lambda} = |d\zeta_{\xi}^{\lambda}| e^{i \arg(d\zeta_{\xi}^{\lambda})}.$$

La representación espectral muestra de qué modo el proceso $\xi(t)$ se forma de las oscilaciones armónicas elementales.

Los procesos espectrales ζ^{λ} en la representación (3.1) están subordinados al proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ en el sentido que $\zeta \in H_{\xi}$, donde H_{ξ} es el espacio de los valores del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, y ζ es el límite en la expresión media cuadrática del tipo

$$\zeta^N = \sum_1^N \alpha_{h^k} \zeta^{\lambda_k}.$$

Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso escalar cuya función espectral es $F(\lambda)$. Designemos mediante $\mathcal{L}_2\{F\}$ el espacio de Hilbert de las funciones $\varphi(\lambda)$, de cuadrado integrable según una medida generada por $F(\lambda)$ y supongamos que el producto escalar del espacio mencionado tiene la forma

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Lambda} \varphi(\lambda) \overline{\psi(\lambda)} dF(\lambda),$$

en tanto que la integración se realiza en $[-\pi, \pi]$ o bien en $(-\infty, \infty)$. En $\mathcal{L}_2\{F\}$ no se distinguen las funciones $\varphi_1(\lambda)$ y $\varphi_2(\lambda)$ para las cuales

$$\int [\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda)] \overline{[\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda)]} dF(\lambda) = 0.$$

Como corolario inmediato de la representación espectral (3.1) interviene el isomorfismo isométrico H_{ξ} y $\mathcal{L}_2\{F\}$, puesto que para todo $\eta \in H_{\xi}$ existe la única (con la exactitud salvo la equivalencia determinada arriba) función $\varphi(\lambda) \in \mathcal{L}_2\{F\}$, tal que $\eta = \int_{\Lambda} \varphi(\lambda) d\zeta_{\xi}^{\lambda}$ y viceversa, si $\psi(\lambda) \in \mathcal{L}_2\{F\}$ entonces $\int_{\Lambda} \psi(\lambda) d\zeta_{\xi}^{\lambda} = \eta \in H_{\xi}$. La correspondencia $\eta \leftrightarrow \varphi(\lambda)$ es isométrica: si $\eta_1 \leftrightarrow \varphi_1(\lambda)$,

$t=1, 2$, entonces

$$\begin{aligned}
 (\eta_1, \eta_2) M \eta_1 \eta_2^* &= \int_{\Lambda} \varphi_1(\lambda) \overline{\varphi_2(\lambda)} M |d\zeta(\lambda)|^2 = \\
 &= \int_{\Lambda} \varphi_1(\lambda) \overline{\varphi_2(\lambda)} dF(\lambda) = (\varphi_1, \varphi_2).
 \end{aligned}$$

Para los procesos vectoriales de modo análogo se determina el espacio de Hilbert $\mathcal{L}_2\{F\}$ de las matrices $m \times k$ de $\varphi(\lambda)$ (aquí, m es arbitrario, pero fijado, k es la dimensión del proceso) en el cual el producto escalar tiene por expresión

$$(\varphi, \psi) = \text{Sp} \left[\int_{\Lambda} \varphi(\lambda) dF(\lambda) \psi^*(\lambda) \right]$$

y si $m = k$, entonces H_{ξ} y $\mathcal{L}_2\{F\}$ serán isométricamente isomorfos.

11.3.2. Procesos con la función espectral absolutamente continua. A la descomposición de Lebesgue (2.6) de la función espectral $F(\lambda)$ corresponde la descomposición del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ del tipo

$$\xi(t) = \xi_{(1)}(t) + \xi_{(2)}(t) + \xi_{(3)}(t) \quad (3.2)$$

en tres procesos estacionarios mutuamente ortogonales.

El proceso $\xi_{(1)}(t)$ tiene la función espectral $F_1(\lambda)$ que es absolutamente continua. Tales procesos se caracterizan del modo siguiente.

Teorema 2. *Un proceso estacionario en amplio sentido $\{\xi(t), t \in T\}$ dispone de una función espectral absolutamente continua cuando y sólo cuando, es un proceso de suma deslizante, es decir, cuando existen tales funciones (matrices) $C(t)$ que:*

a) en el caso de tiempo discreto

$$\xi(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C(t-s) \zeta_0(s), \quad (3.3)$$

donde $\sum_{s=-\infty}^{\infty} |C(t)|^2 < \infty$ (proceso escalar), o bien $\text{Sp} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C(t) C^*(t) < \infty$ (proceso vectorial) y $\zeta_0(t)$ es una sucesión estacionaria estándar con valores incorrelacionados;

b) en el caso de tiempo continuo

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t-s) d\zeta_0(s), \quad (3.4)$$

donde $\int_{-\infty}^{\infty} |C(t)|^2 dt < \infty$ (proceso escalar), o bien $\text{Sp} \int_{-\infty}^{\infty} C(t) C^* dt < \infty$ (proceso vectorial) y $\zeta_0(t)$ es un proceso estándar con incrementos ortogonales.

Para los procesos vectoriales se pueden indicar otros rasgos característicos que toman en consideración el hecho de que la densidad espectral $f(\lambda)$ puede tener distintos rangos para λ diferentes.

Teorema 3. Un proceso estacionario vectorial $\{\xi(t), t \in T\}$ tiene una función espectral absolutamente continua cuando y sólo cuando, puede ser representado en forma de una suma de a lo sumo k (k es la dimensión del proceso) procesos recíprocamente ortogonales de adición deslizante

$$\xi(t) = \sum_{l=1}^k \xi_l(t), \quad (3.5)$$

donde, en el caso de tiempo discreto,

$$\xi_l(t) = \sum_{s \in T} C_l(t-s) \zeta_l(s), \quad \text{Sp} \sum_{t \in T} C_l(t) C_l^*(t) < \infty,$$

$C_l(t)$ son las matrices $k \times l$, $\zeta_l(s)$ son las sucesiones aleatorias estacionarias incorrelacionadas, l -dimensionales recíprocamente incorrelacionadas, mientras que en el caso de tiempo continuo

$$\xi_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_l(t-s) d\zeta_l(s),$$

$$\text{Sp} \int_{-\infty}^{\infty} C_l(t) C_l^*(t) dt < \infty,$$

$C_l(t)$ son las matrices $k \times l$, $\zeta_l(s)$ son los procesos estándar recíprocamente ortogonales con incrementos ortogonales.

En particular, si el proceso $\xi(t)$ tiene densidad espectral absolutamente continua y rango constante r , entonces $\xi(t) = \xi_r(t)$, donde $\xi_r(t)$ es uno de los procesos descritos más arriba

11.4. Propiedades analíticas de los procesos estacionarios y de sus trayectorias

11.4.1. Continuidad media cuadrática y diferenciability de los procesos estacionarios. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso escalar con tiempo continuo y $B(t)$ y $F(\lambda)$ sus funciones de correlación y espectral, respectivamente. La continuidad media cuadrática y la diferenciability de los procesos estacionarios, que constituyen un caso particular de los procesos aleatorios de Hilbert, se determinan del mismo modo que para los últimos.

Teorema 1. Para que un proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ sea continuo en media cuadrática es necesario y suficiente que su función de correlación $B(t)$ sea continua en cero. Para que el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ tenga una derivada media cuadrática de orden m es necesario y suficiente que exista la m -ésima derivada de su función de correlación $B(t)$ en cero, o bien, lo que es equivalente, exista el $2m$ -ésimo momento espectral

$$S_{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2m} dF(\lambda).$$

En particular, si el proceso escalar real $\{\xi(t), t \in T\}$ dispone del segundo momento espectral finito $S_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 dF(\lambda)$, entonces el proceso $\eta(t) = (\xi'(t), \xi(t)), t \in T$, donde $\xi'(t)$ significa la derivada media cuadrática en t , es estacionario en amplio sentido y su función de correlación matricial $B_\eta(t)$ tiene por expresión

$$B_\eta(t) = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \lambda^2 dF(\lambda) & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \lambda dF(\lambda) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \lambda dF(\lambda) & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dF(\lambda) \end{pmatrix}.$$

11.4.2. Propiedades analíticas de las trayectorias. Las propiedades de las trayectorias de los procesos estacionarios se describen por los siguientes teoremas.

Teorema 2. Si, para $t \rightarrow 0$ con cierto $q > 3$, se tiene

$$2B(0) - B(t) - B(-t) = O\left(\frac{|t|}{|\ln|t||^q}\right), \quad (4.1)$$

entonces el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ con tal función de correlación es equivalente a un proceso cuyas trayectorias son continuas con la probabilidad 1 en cualquier intervalo finito. La condición (4.1) queda cumplida, en particular, si $B(t)$ tiene en cero una derivada de segundo orden.

Observación. Para los procesos estacionarios gaussianos la afirmación del teorema 2 se considera cumplida, cuando en lugar de (4.1) se cumple la condición

$$B(t) - 1 = O\left(\frac{1}{|\ln|t||^q}\right) \quad \text{para } t \rightarrow 0.$$

Teorema 3. Si, para $t \rightarrow 0$ con cierto $q > 3$, se tiene

$$6B(0) - 4B(t) - 4B(-t) + B(2t) + B(-2t) = O\left(\frac{|t|^3}{|\ln|t||^q}\right) \quad (4.2)$$

entonces el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ con tal función de correlación es equivalente a un proceso cuyas trayectorias son continuamente derivables con la probabilidad 1. La condición (4.2) se considera cumplida, en particular, si $B(t)$ tiene en cero una derivada de cuarto orden.

Observación. Para los procesos estacionarios gaussianos la afirmación del teorema 3 queda cumplida, si en lugar de (4.2) se cumple la condición

$$B(t) = 1 - \frac{\lambda_2}{2} t^2 + O\left(\frac{|t|}{|\ln|t||^q}\right).$$

Análogamente, la existencia de las derivadas de órdenes superiores en las trayectorias de los procesos estacionarios está relacionada con el comportamiento de la función de correlación en cero.

Teorema 4. Si la función espectral $F(\lambda)$ de un proceso estacionario sólo varía en el intervalo finito, entonces existe un proceso, equivalente al dado, cuyas trayectorias son analíticas con la probabilidad 1.

11.5. Teorema ergódico y teorema del límite central

11.5.1. Teorema ergódico. Sean: $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso estacionario en amplio sentido; $B(t)$ y $F(\lambda)$, sus funciones de correlación y espectral, respectivamente; $\xi(t) \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} d\xi(\lambda)$, la representación espectral del proceso.

Las magnitudes

$$\xi_s = \begin{cases} \frac{1}{s} \sum_{t=0}^{s-1} \xi(t), & T = \{0, 1, 2, \dots\}, s \text{ son números enteros positivos;} \\ \frac{1}{2s+1} \sum_{t=-s}^s \xi(t), & T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, s \text{ son números enteros positivos;} \\ \frac{1}{s} \int_0^s \xi(t) dt, & T = [0, \infty), s \text{ son números positivos;} \\ \frac{1}{2s} \int_{-s}^s \xi(t) dt, & T = (-\infty, \infty), s \text{ son números positivos,} \end{cases}$$

se denominan medias temporales.

Sea

$$\hat{B}_s = \begin{cases} \frac{1}{s} \sum_{t=0}^{s-1} B(t), & T = \{0, 1, 2, \dots\}; \\ \frac{1}{2s+1} \sum_{t=-s}^s B(t), & T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}; \\ \frac{1}{s} \int_0^s B(t) dt, & T = [0, \infty); \\ \frac{1}{2s} \int_{-s}^s B(t) dt, & T = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

La existencia de los límites medios cuadráticos de las medias temporales ξ_s para $s \rightarrow \infty$ constituye para los procesos estacionarios el contenido de los llamados teoremas ergódicos o de la ley de los grandes números.

Teorema 1.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_s = \xi(0) - \zeta(0-);$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{B}_s = F(0) - F(0-).$$

Teorema 2. Para que sea l.i.m. $\xi_s = M\xi(t) = 0$ es necesario y suficiente que la función espectral $F(\lambda)$ sea continua en cero.

Para la continuidad de $F(\lambda)$ en cero es suficiente la condición $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$. Cuando $B(t)$ tiende a cero para $t \rightarrow \infty$ con suficiente rapidez, las medias temporales ξ_s pueden converger hacia $M\xi(t) = 0$ no solamente en media cuadrática, sino también con la probabilidad 1.

Teorema 3. Si existen tales constantes $K > 0$ y $\alpha > 0$ que

$$\frac{1}{s} \sum_{t=0}^{s-1} \sum_{u=0}^{s-1} B_{ii}(t-u) = \frac{1}{s} \sum_{t=-s+1}^{s-1} B_{ii}(t) \left[1 - \frac{|t|}{s} \right] \leq Ks^{-\alpha},$$

en el caso de tiempo discreto y

$$\frac{1}{s} \int_0^s \int_0^s B_{ii}(t-u) du dt = \frac{1}{s} \int_{-s}^s B_{ii}(t) \left[1 - \frac{|t|}{s} \right] dt \leq Ks^{-\alpha},$$

en el caso de tiempo continuo, ξ_s converge hacia $M\xi(t) = 0$ con la probabilidad 1.

Observación. El teorema 3 se ha enunciado para un proceso vectorial. En el caso escalar en lugar de $B_{ii}(t)$ se debe tomar $B(t)$.

Para el cumplimiento de las condiciones del teorema 3 es suficiente la condición

$$B_{ii}(t) \leq \gamma |t|^{-\alpha}, \quad \gamma > 0 \text{ es una constante.}$$

11.5.2. Teorema del límite central. Si el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ dispone de la función espectral absolutamente continua $F(\lambda)$ y la densidad espectral $f(\lambda)$ es continua en cero, entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sM \xi_s \xi_s^* = 2\pi f(0).$$

Teorema 4. (Teorema del límite central para los procesos estacionarios). Si el proceso vectorial $\{\xi(t), t \in T\}$ tiene la función espectral absolutamente continua $F(\lambda)$ y la densidad espectral $f(\lambda)$ es continua en cero,

con la particularidad de que $Sp f(\lambda) = \sum_{j=1}^k f_{jj}(\lambda)$ (k es la dimensión del proceso) es uniformemente acotado y $\det f(0) \neq 0$, entonces los vectores $\sqrt{s}\xi_s$ son asintóticamente normales con la media nula y la matriz de covarianza $2\pi f(0)$.

11.6. Transformaciones lineales (filtros)

11.6.1. Definición del filtro lineal. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso estacionario en amplio sentido, mientras que $B_\xi(t)$ y $F_\xi(\lambda)$ son su función de correlación y función espectral, respectivamente. Imaginémonos que el proceso $\xi(t)$, como función del tiempo t , llega a la entrada de un dispositivo físico y se transforma por éste de modo que del dispositivo sale un proceso nuevo (transformado) $\{\eta(t), t \in T\}$.

La transformación A del proceso $\xi(t)$ en el proceso $\eta(t) = A\xi(t)$ se denomina filtro lineal admisible (o simplemente filtro), si el proceso $\eta(t)$ se representa en la forma

$$\eta(t) = \begin{cases} \sum_{s=-\infty}^{\infty} h(t-s)\xi(s) & \text{(tiempo discreto);} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\xi(s)ds & \text{(tiempo continuo),} \end{cases} \quad (6.1)$$

donde $h(t)$ son tales que

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \sum_{t_2=-\infty}^{\infty} h(t_1)B(t_2-t_1)h^*(t_2) < \infty & \text{(tiempo discreto);} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)B(t_2-t_1)h^*(t_2)dt_1dt_2 < \infty & \text{(tiempo continuo),} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

y la suma, como también la integral en (6.1), se entienden como límites medios cuadráticos de las correspondientes sumas

$\sum_{t_1=-n}^n h(t_1)B(t_2-t_1)h^*(t_2)$ e integrales $\int_{-n}^n h(t-s)\xi(s)ds$, para $n \rightarrow \infty$. La

función $h(t)$ se llama función impulsora (matricial) de transición del filtro A .

Observación. Esta denominación está relacionada con el hecho de que si a la entrada del filtro llega una función impulsora (función delta de Dirac con singularidad en cero, en el caso de tiempo continuo), en la salida del filtro habrá $h(t)$.

Sea

$$H(i\lambda) = \begin{cases} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}h(t) & \text{(tiempo discreto);} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}h(t)dt & \text{(tiempo continuo)} \end{cases}$$

una transformación de Fourier de la función impulsora de transición $h(t)$. La condición (6.2) es equivalente a la condición $H(i\lambda) \in \mathcal{L}_2(F_{\xi})$. La función $H(i\lambda)$ se llama característica de frecuencia (matricial) del filtro A .

Si el proceso $\xi(t)$ en la entrada del filtro A tiene representación espectral $\xi(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} d\xi(\lambda)$, el proceso $\eta(t)$ en la salida del

filtro tendrá la representación espectral $\eta(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} H(i\lambda) d\xi(\lambda)$.

En particular, si $\xi(t)$ y $\eta(t)$ son procesos escalares, entonces $H(i\lambda) = |H(i\lambda)| e^{i\psi(\lambda)}$ y $|H(i\lambda)|$ recibe el nombre de **coeficiente de amplificación del filtro** y $\psi(\lambda)$, fase del filtro.

El proceso $\eta(t) = AH\xi(t)$ es estacionario, con la particularidad de que

$$\begin{aligned}
 H_{\eta}(t) &= \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} h(t+n) B_{\frac{1}{2}}(m-n) h^*(m) = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} H(i\lambda) dF_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda) \quad (\text{tiempo discreto}); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) B_{\frac{1}{2}}(t-u) h^*(v) d\omega dv = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} H(i\lambda) dF_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda) \quad (\text{tiempo continuo}), \end{cases} \\
 dF_{\eta}(\lambda) &= H(i\lambda) dF_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda). \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

Si existen las densidades espectrales $f_{\xi}(\lambda)$ y $f_{\eta}(\lambda)$, entonces

$$f_{\eta}(\lambda) = H(i\lambda) f_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda). \quad (6.5)$$

Sean $\{\xi(t), t \in T\}$ y $\{\eta(t), t \in T\}$ dos procesos arbitrarios, estacionarios en amplio sentido, cuyas funciones espectrales son $F_{\xi}(\lambda)$ y $F_{\eta}(\lambda)$. La respuesta a la pregunta, si es o no el proceso $\eta(t)$ una transformación lineal del proceso $\xi(t)$, nos la da el

Teorema de Rozanov. *Supongamos que los procesos $\{\xi(t), t \in T\}$ y $\{\eta(t), t \in T\}$ son conjuntamente estacionarios, es decir, el proceso vectorial $\{\xi(t), \eta(t), t \in T\}$ es estacionario en amplio sentido. Para que el proceso $\{\eta(t), t \in T\}$ pueda obtenerse del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ con la ayuda de un filtro con característica de frecuencia $H(i\lambda)$, es necesario y suficiente que las correspondientes funciones espectrales y funciones espectrales recíprocas estén entrelazadas por las correlaciones:*

$$\left. \begin{aligned} dF_{\eta}(x) &= H(i\lambda) dF_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda); \\ dF_{\xi\eta}(\lambda) &= dF_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

11.6.2. Ejemplos de filtros. 1. El filtro de banda sólo deja pasar, sin cambiarlas, las componentes armónicas del proceso $\xi(t)$ cuyas frecuencias se encuentran dentro del intervalo dado (a, b) . Su característica de frecuencia es

$$H(i\lambda) = \chi_{(a, b)}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in (a, b); \\ 0, & \lambda \notin (a, b). \end{cases}$$

La función impulsora de transición $h(t)$ (para a y b finitos)

$$h(t) = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{2\pi it}.$$

En conformidad con la disposición del intervalo (a, b) , el filtro de banda puede llamarse de baja frecuencia, de media frecuencia y de alta frecuencia.

Si $a = -\infty$, o bien (y) $b = \infty$, la función impulsora de paso no existe.

2. Derivación. La operación $A = \sum_{l=0}^m B_l \frac{d^{m-l}}{dt^{m-l}}$ puede aplicarse al proceso $\{\xi(t), t \in F\}$ con tiempo continuo cuando y sólo cuando, el $2m$ -ésimo momento espectral es finito

$$S_{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2m} dF_{\xi}(\lambda)$$

La característica de frecuencia $H(i\lambda) = \sum_{l=0}^m B_l (i\lambda)^{m-l}$. En particular, si $A = \frac{d}{dt}$, entonces $H(i\lambda) = i\lambda$. La función impulsora de paso no existe.

3. Ecuaciones diferenciales. Consideremos un filtro determinado por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes $L \eta(t) = M \xi(t)$, donde L y M son los operadores diferenciales

$$L = \sum_{j=0}^l C_j \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}, \quad M = \sum_{j=0}^m B_j \frac{d^{m-j}}{dt^{m-j}}.$$

Se supone que existe el $2m$ -ésimo momento espectral del proceso $\xi(t)$.

Si $\frac{M(i\lambda)}{L(i\lambda)} \in \mathcal{L}_2\{t\}$, donde $L(i\lambda) = \sum_{j=0}^l C_j (i\lambda)^{n-j}$, $M(i\lambda) = \sum_{j=0}^m B_j (i\lambda)^{m-j}$, entonces existe un filtro que corresponde a la ecuación diferencial en consideración y cuya característica de frecuencia es $H(i\lambda) = \frac{M(i\lambda)}{L(i\lambda)}$.

11.6.3. Filtros físicamente realizables. En los filtros que se determinan por la ecuación (6.4) los valores del proceso $\{\eta(t), t \in T\}$ en la salida pueden depender en el instante t tanto de los momentos de tiempo en el pasado ($s < t$), como de los futuros ($s > t$).

Los dispositivos físicos reales están privados de la posibilidad de anticipar el futuro. Por esto, si un filtro ha de simular un objeto real, su función impulsora de paso $h(t)$ debe satisfacer la condición de realizabilidad física:

$$h(t) = 0, \quad t < 0, \quad (6.7)$$

Los filtros que satisfacen la condición (6.7) se llaman físicamente realizables.

Teorema 1. Para que un proceso escalar $\{\xi(t), t \in T\}$ con la función espectral $F(\lambda)$ constituya la reacción de un filtro físicamente realizable a cuya entrada llega la sucesión incorrelacionada estándar $\{\zeta_0(t), t \in T\}$ (en el caso de tiempo discreto) o bien el proceso estándar con incrementos ortogonales $\{\zeta_0(t), t \in T\}$ (en el caso de tiempo continuo), es necesario y suficiente que su función espectral $F(\lambda)$ sea absolutamente continua y la densidad espectral $f(\lambda)$ satisfaga la condición

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda > -\infty \quad (\text{tiempo discreto}); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda) d\lambda}{1+\lambda^2} > -\infty \quad (\text{tiempo continuo}). \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Cumplidas estas condiciones, el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ en la salida de un filtro físicamente realizable se puede representar en la forma

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= \sum_{s=-\infty}^t h(t-s) \zeta_0(s), \quad \sum_{s=0}^{\infty} |h(s)|^2 < \infty \quad (\text{tiempo discreto}); \\ \xi(t) &= \int_{-\infty}^t h(t-s) d\zeta_0(s), \quad \int_0^{\infty} |h(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{tiempo continuo}). \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Observación. La segunda igualdad de (6.9) se anota a veces en la forma

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) \varepsilon(t) dt, \quad (6.10)$$

donde $\varepsilon(t)$ es un proceso de ruido blanco que representa en sí el proceso generalizado estacionario en amplio sentido $M\varepsilon(t) = 0$, $M\varepsilon(t)\varepsilon(s) = \delta(t-s)$, donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac. Esto nos permite interpretar $\xi(t)$ como la reacción al ruido blanco de un filtro físicamente realizable.

11.6.4. Factorización de la densidad espectral. En el caso de tiempo discreto la densidad espectral $f(\lambda)$, que satisface la primera de las condiciones (6.8), admite una factorización

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(e^{-i\lambda})|^2, \quad (6.11)$$

donde $\varphi(e^{-i\lambda})$ representa un valor de frontera de la función analítica

$$\varphi(z) = \sqrt{2\pi} \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) \frac{e^{-i\lambda} + z}{e^{-i\lambda} - z} d\lambda \right\},$$

es decir,

$$\varphi(e^{-i\lambda}) = \lim_{\rho \uparrow 1} \varphi(\rho e^{-i\lambda}),$$

siendo

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \varphi(e^{-i\lambda}) d\lambda, \quad \varphi(e^{-i\lambda}) = \sum_{t=0}^{\infty} h(t) e^{-i\lambda t}.$$

Para el tiempo continuo la densidad espectral $f(\lambda)$, que satisface la segunda de las condiciones (6.8), admite la siguiente factorización

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(i\lambda)|^2, \quad (6.12)$$

donde $\varphi(i\lambda)$ es un valor de frontera de la función analítica en el semiplano derecho

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2} \frac{z+\lambda z}{\lambda-i z} d\lambda \right\},$$

siendo, en este caso,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi(i\lambda) d\lambda.$$

El análogo vectorial del teorema 1 dispone de la forma más sencilla en el caso cuando el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ tiene en la salida del filtro el rango máximo, es decir, la densidad espectral $f(\lambda)$ tiene casi siempre en la medida de Lebesgue un determinante distinto de cero.

Teorema 2. Para que un proceso vectorial $\{\xi(t), t \in T\}$ de rango máximo con la función espectral $F(\lambda)$ constituya la reacción de un filtro físicamente realizable a cuya entrada llega la sucesión estándar de vectores aleatorios incorrelacionados $\{\zeta_0(t), t \in T\}$ (en el caso de tiempo discreto) o el proceso estándar k -dimensional con incrementos ortogonales $\{\zeta_0(t), t \in T\}$ (en el caso de tiempo continuo), es necesario y suficiente que la función espectral $F(\lambda)$ sea absolutamente continua y la densidad espectral $f(\lambda)$ satisfaga la condición

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det [f(\lambda)] d\lambda > -\infty \quad (\text{tiempo discreto}); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \det [f(\lambda)]}{1+\lambda^2} d\lambda > -\infty \quad (\text{tiempo continuo}). \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Cumplidas estas condiciones, el proceso $\{\eta(t), t \in T\}$ se puede representar en la salida del filtro físicamente realizable en la forma

$$\left. \begin{aligned} \eta(t) &= \sum_{-\infty}^t h(t-s) \xi_0(s), \\ \text{Sp} \sum_{t=0}^{\infty} h(t) h^*(t) &< \infty \text{ (tiempo discreto)}, \\ \eta(t) &= \int_{-\infty}^t h(t-s) \xi_0(ds), \\ \text{Sp} \int_0^{\infty} h(t) h^*(t) dt &< \infty \text{ (tiempo continuo)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Siendo el tiempo discreto, la densidad espectral $f(\lambda)$, satisfaciendo a la primera condición de (6.13), admite la siguiente factorización

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{2\pi} \varphi(e^{-i\lambda}) \varphi^*(e^{-i\lambda}), \quad (6.15)$$

donde la matriz $\varphi(e^{-i\lambda})$ de dimensión $k \times k$ es un valor de frontera de la matriz $\varphi(z)$, que es analítica dentro del círculo unitario y que se determina unívocamente por las condiciones

$$\lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{-i\lambda}) \varphi^*(re^{-i\lambda}) = 2\pi f_{\eta}(\lambda),$$

$$|\det \varphi(z)|^2 = (2\pi)^k \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det [f_{\eta}(\lambda)] d\lambda \right\}.$$

11.7. Procesos con densidades espectrales racionales fraccionales

11.7.1. Teoremas de factorización. Una densidad espectral $f(\lambda)$ se denomina racional fraccional, si $f(\lambda)$ o bien sus elementos $f_{ml}(\lambda)$, cuando $f(\lambda)$ es una matriz, admiten la representación en la forma $\frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})}$ (tiempo discreto) o $\frac{P(i\lambda)}{Q(i\lambda)}$ (tiempo continuo), donde $P(z)$ y $Q(z)$ son ciertos polinomios.

Los procesos con densidades espectrales racionales fraccionales pueden ser representados en forma de procesos de sumación deslizante, mientras que los procesos vectoriales tienen, además, un rango constante.

El resultado principal para esta clase de procesos estacionarios se contiene en los teoremas de factorización.

Teorema 1. Si $f(\lambda)$ es una densidad espectral racional fraccional de cierto proceso estacionario con tiempo discreto, admite la factorización

del tipo

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left| \frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})} \right|^2 & (\text{proceso escalar}), \\ \frac{1}{2\pi} B(e^{-i\lambda})B^*(e^{-i\lambda}) & (\text{proceso vectorial}), \end{cases} \quad (7.1)$$

donde los polinomios $P(z) = \sum_{l=0}^p p_l z^l$ y $Q(z) = \sum_{l=0}^q q_l z^l$ no tienen ceros dentro del círculo unitario, con la particularidad de que si $f(\lambda) = f(-\lambda)$, los coeficientes p_l , $l = 1, p$, y q_l , $l = 1, q$, pueden ser reales; $B(z)$ es una matriz $k \times r$ (k es la dimensión del proceso y r , su rango), cuyos elementos son racionales fraccionales respecto a z , siendo $B(z)$ analítica dentro del círculo unitario.

Teorema 2 Si $f(\lambda)$ es una densidad espectral racional fraccional de cierto proceso estacionario con tiempo continuo, admite factorización del tipo

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left| \frac{P(i\lambda)}{Q(i\lambda)} \right|^2 & (\text{proceso escalar}); \\ \frac{1}{2\pi} B(i\lambda)B^*(i\lambda) & (\text{proceso vectorial}), \end{cases} \quad (7.2)$$

donde los polinomios $P(z) = \sum_{l=0}^p p_l z^l$ y $Q(z) = \sum_{l=0}^q q_l z^l$ no tienen ceros en el semiplano inferior y si, además, $f(\lambda) = f(-\lambda)$, entonces los polinomios $P(iz)$ y $Q(iz)$ tienen coeficientes reales; $B(z)$ es una matriz $k \times r$ (k es la dimensión del proceso, r , su rango), cuyos elementos son racionales fraccionales respecto de z y la matriz $B(z)$ es analítica en el semiplano inferior.

Los teoremas de factorización proporcionan las siguientes representaciones espectrales de los procesos con densidades espectrales racionales fraccionales.

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})} d\zeta_0(\lambda) && (\text{proceso escalar con tiempo discreto}); \\ \xi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{P(i\lambda)}{Q(i\lambda)} d\zeta_0(\lambda) && (\text{proceso escalar con tiempo continuo}). \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

donde $\zeta_0(\lambda)$ es el proceso estándar con incrementos ortogonales:

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} B(e^{-i\lambda}) d\zeta_0(\lambda) && (\text{proceso vectorial con tiempo discreto}); \\ \xi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B(i\lambda) d\zeta_0(\lambda) && (\text{proceso vectorial con tiempo continuo}). \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

donde $\xi_0(\lambda)$ es un proceso estándar r -dimensional con incrementos ortogonales, r es el rango del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$.

11.7.2. Ejemplos. Los ejemplos, que vienen abajo de procesos estacionarios escalares con tiempo discreto $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ describen por entero la clase de procesos con densidades espectrales racionales fraccionales.

1. Procesos de la media deslizante. Sea $\{\zeta_0(t), t \in T\}$ una sucesión estándar incorrelacionada y sea $a_l, l = 0, p$, un juego arbitrario de magnitudes reales. El proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, donde $\xi(t) = a_0 \zeta_0(t) + a_1 \zeta_0(t-1) + \dots + a_p \zeta_0(t-p)$, se llama proceso de la media deslizante de orden p .

La densidad espectral

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |a_0 + a_1 e^{-i\lambda} + \dots + a_p e^{-ip\lambda}|^2.$$

La representación espectral

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} [a_0 + a_1 e^{-i\lambda} + \dots + a_p e^{-ip\lambda}] d\zeta_0(\lambda).$$

En particular, si $a_l = \frac{\sigma}{p+1}$, $l = \overline{0, p}$, entonces

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi (p+1)^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (p+1) \lambda}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \lambda};$$

$$\xi(t) = \frac{\sigma}{(p+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{-i(p+1)\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}} e^{i\lambda t} d\zeta_0(\lambda).$$

2. Procesos de autorregresión. Sea $\{\zeta_0(t), t \in T\}$ una sucesión estándar incorrelacionada. Examinemos la ecuación en diferencias finitas para definir el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$:

$$\xi(t) + b_1 \xi(t-1) + \dots + b_q \xi(t-q) = \sigma^2 \zeta_0(t). \quad (7.5)$$

La ecuación (7.5) es análoga a la ecuación de regresión múltiple lineal, por lo cual su solución, si existe como proceso estacionario en amplio sentido, se llama proceso de autorregresión de orden q . La solución estacionaria de la ecuación (7.5) existe, si los ceros del polinomio $Q(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_q z^q$ se encuentran fuera del círculo unitario.

La densidad espectral

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|1 + b_1 e^{-i\lambda} + \dots + b_q e^{-iq\lambda}|^2}.$$

La densidad espectral

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \frac{d\zeta_0(\lambda)}{1 + b_1 e^{-i\lambda} + \dots + b_q e^{-iq\lambda}},$$

donde $\zeta_0(\lambda)$ es un proceso estándar con incrementos ortogonales.

Observación. El proceso de autorregresión de primer orden es de Márkov en amplio sentido.

3. Modelo mixto de autorregresión y de media deslizando. Sean T y $\{\xi_0(t), t \in T\}$ los mismos que en dos ejemplos antecedentes. La combinación de los modelos de autorregresión y de media deslizando conduce a la ecuación

$$\begin{aligned} \xi(t) + b_1\xi(t-1) + b_2\xi(t-2) + \dots + b_q\xi(t-q) = \\ = a_0\xi(t) + a_1\xi(t-1) + \dots + a_p\xi(t-p). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Si los ceros del polinomio $Q(z) = 1 + b_1z + \dots + b_qz^q$ se hallan fuera del círculo unitario, la ecuación (7.6) tiene solución estacionaria $\{\xi(t), t \in T\}$ que se llama proceso mixto de autorregresión y de media deslizando de orden (q, p) .

La densidad espectral

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{a_0 + a_1e^{-i\lambda} + \dots + a_pe^{-ip\lambda}}{1 + b_1e^{-i\lambda} + \dots + b_qe^{-iq\lambda}} \right|^2.$$

La representación espectral

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \frac{a_0 + a_1e^{-i\lambda} + \dots + a_pe^{-ip\lambda}}{1 + b_1e^{-i\lambda} + \dots + b_qe^{-iq\lambda}} d\zeta_0(\lambda).$$

Atrae la atención el hecho de que la descripción adecuada de los fenómenos que observamos en la práctica y que son simulados por los procesos estacionarios se obtiene con la ayuda de los modelos (mixtos) de autorregresión y de media deslizando cuyo orden no es superior a 2.

11.8. Pronosticación, interpolación y filtración de los procesos estacionarios

11.8.1. Problemas generales de la pronosticación, interpolación y filtración. 1) **Pronosticación (extrapolación).** Supongamos que el proceso estacionario en amplio sentido $\{\xi(t), t \in T\}$ se observa en los momentos de tiempo $t \in T_0$, donde $T_0 = \{t \in T : t \leq t_0\}$ o $T_0 = \{t \in T : t_0 - h \leq t \leq t_0\}$, $h > 0$. Es necesario dar, sobre la base de estas observaciones, el mejor pronóstico medio cuadrático de dicho proceso en cierto momento futuro de tiempo $t^* = t_0 + \tau$, $\tau > 0$, es decir, se requiere hallar tal funcional $\eta(t^*) = g_{t^*}(\xi(t), t \in T_0)$ de los valores del proceso $\xi(t)$ en los momentos $t \in T_0$, que sea

$$M \|\xi(t^*) - \eta(t^*)\|^2 \ll M \|\xi(t^*) - \eta_1(t^*)\|^2, \quad (8.1)$$

donde $\eta_1(t^*)$ es cualquier otra funcional de los valores del proceso $\xi(t)$ en los momentos $t \in T_0$.

2) **Interpolación.** Supongamos que el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ se observa en los momentos $t \in T_0 \subset T$ y sea $t^* \in T$ tal momento de tiempo que $t^* \notin T_0$ y que existen $t_i \in T_0$, $i = 1, 2$, para los cuales $t_1 < t^* < t_2$.

Hace falta, basándose en dichas observaciones del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, interpolar, del mejor modo posible en el sentido del criterio medio cuadrático, el valor del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ en el momento de

tiempo t^* , es decir, hallar la funcional $\eta(t^*) = g_{t^*}(\xi(t), t \in T_0)$ de los valores del proceso $\xi(t)$ en los momentos de tiempo $t \in T_0$, para los cuales tiene lugar la correlación (8.1).

3) **Filtración.** Supongamos que en los momentos de tiempo $t \in T_0 \subset T$ se observa un proceso $\xi(t) = s(t) + \theta(t)$ que representa en sí una suma de la señal útil $s(t)$ y el ruido $\theta(t)$, donde $\{s(t), t \in T\}$ son procesos estacionarios incorrelacionados.

Se requiere separar (filtrar) el ruido $\theta(t)$ de la señal $s(t)$, es decir, encontrar tal funcional $\eta(t^*) = g_{t^*}(\xi(t), t \in T_0)$ de los valores del proceso $\xi(t)$ en los momentos $t \in T_0$, que

$$M \|\eta(t^*) - \eta_1(t^*)\|^2 \ll M \|\eta(t^*) - \eta_1(t^*)\|^2, \quad (8.2)$$

donde $\eta_1(t^*)$ es cualquier otra funcional de los valores del proceso $\xi(t)$ en observación en los momentos $t \in T_0$.

Los primeros miembros de (8.1) y (8.2) llámense, respectivamente, **error de pronosticación e interpolación y error de filtración.**

La solución general de todos los problemas enunciados se da mediante el siguiente teorema (que es justo, a propósito, para cualesquiera procesos aleatorios de Hilbert).

Teorema. Sea \mathfrak{F}_{T_0} una σ -álgebra generada por los valores del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ en los momentos $t \in T_0$. La mejor (en el sentido medio cuadrático) funcional que resuelve el problema de pronosticación, interpolación o filtración tiene por expresión

$$\eta(t^*) = M \{\xi(t^*) / \mathfrak{F}_{T_0}\}. \quad (8.3)$$

Desgraciadamente, el valor práctico de este teorema no es grande, pues el cálculo efectivo del segundo miembro de (8.3) es una tarea en extremo difícil.

11.8.2. Los problemas de pronosticación lineal, interpolación y filtración se consideran siendo planteados en forma más simple: la funcional $\eta(t^*)$ se busca en la clase de funcionales lineales de los valores del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ en los momentos de tiempo $t \in T_0$, es decir,

$$\eta(t^*) = \sum_{s \in T_0} C(s) \xi(s) \quad (\text{tiempo discreto}), \quad (8.4)$$

o bien

$$\eta(t^*) = \int_{T_0} C(s) \xi(s) ds \quad (\text{tiempo continuo}). \quad (8.5)$$

Cuando el tiempo es continuo, incluso para las clases relativamente sencillas de procesos, la función $C(s)$ en (8.5) resulta ser generalizada.

El estudio de las funcionales lineales del tipo

$$\eta(t^*) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t^*} C(i\lambda) d\zeta(\lambda), \quad (8.6)$$

donde $\zeta(\lambda)$ es un proceso espectral correspondiente al proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ (es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda) = \xi(t)$), permite realizar el análisis

sis sin recurrir inmediatamente a las funciones generalizadas. Los problemas de pronosticación, interpolación y filtración lineales tienen un significado geométrico muy simple.

Supongamos que H_{ξ} es un espacio de valores del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ y $H_{\xi}(T_0)$ es un subespacio cerrado en H_{ξ} que sirve de clausura en H_{ξ} de la cápsula lineal de las magnitudes aleatorias $\xi(t_j), t_j \in T_0, j = 1, N$. Los problemas de pronosticación e interpolación lineales consisten en la búsqueda de las magnitudes $\hat{\eta}(t^*)$ que son proyecciones de los valores desconocidos $\xi(t^*)$ en el subespacio $H_{\xi}(T_0)$; el problema de filtración lineal consiste en la búsqueda de las magnitudes $\hat{\eta}(t^*)$ que son proyecciones de los valores desconocidos $s(t^*)$, construidas del subespacio $H_s \subset H_{\xi}$ al subespacio $H_{\xi}(T_0)$.

Supongamos que el proceso estacionario $\{\xi(t), t \in T\}$ con la función de correlación $B_{\xi}(t)$ se observa en los momentos de tiempo $t \in T_0 \subset T$ y sea $\{\eta(t), t \in T\}$ un proceso estacionario ligado de modo estacionario con $\{\xi(t), t \in T\}$, mientras que $B_{\eta\xi}(t)$ es su función de correlación recíproca.

Si suponemos que la estimación $\hat{\eta}(t^*)$ del valor del proceso no observado $\{\eta(t), t \in T\}$ en el momento $t^* \in T$ tiene la forma

$$\hat{\eta}(t^*) = \begin{cases} \sum_{s \in T_0} C_{t^*}(s) \xi(s) & (\text{tiempo discreto}); \\ \int_{T_0} C_{t^*}(s) \xi(s) ds & (\text{tiempo continuo}). \end{cases}$$

la función $C_{t^*}(t), t \in T_0$, llamada función impulsora de transición del filtro lineal óptimo, puede hallarse como solución de una ecuación lineal (integral) de Fredholm de primer género con núcleo de Hermite:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s \in T_0} C_{t^*}(s) B_{\xi}(s-t) &= B_{\eta\xi}(t^*-t), t \in T_0 \text{ (tiempo discreto);} \\ \int_{T_0} C_{t^*}(s) B_{\xi}(s-t) ds &= B_{\eta\xi}(t^*-t), t \in T_0 \text{ (tiempo continuo).} \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Así, por ejemplo, si $T_0 = \{t \in (-\infty, \infty) : t \leq t_0\}$, $t^* = t_0 + \tau$, la segunda ecuación de (8.7) toma la forma

$$\int_{-\infty}^{t_0} C_{t^*}(s) B_{\xi}(s-u) ds = B_{\eta\xi}(t^*-u), u \leq t_0;$$

realizada la sustitución $t_0 - u = v, t_0 - s = z$, la última ecuación pasa a la que sigue

$$\int_0^{\infty} C_{t^*}(t_0-z) B_{\xi}(v-z) dz = B_{\eta\xi}(\tau+v), v \geq 0 \quad (8.8)$$

Si la solución de la ecuación integral (8.8) existe, entonces $C_{\tau}(z) = C_{t^*}(t_0 - z)$ no depende de t_0 , de donde tenemos

$$\int_0^{\infty} C_{\tau}(s) B_{\xi}(t-s) ds = B_{\eta_{\xi}}(\tau+t), t \geq 0, \quad (8.9)$$

y el proceso de pronosticación tiene la forma

$$\tilde{\eta}_{\tau}(t) = \int_{-\infty}^t C_{\tau}(s) \xi(s) ds = \int_0^{\infty} C_{\tau}(s) \xi(t-s) ds$$

con el error de pronosticación

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= B_{\xi}(0) - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C_{\tau}(s) B_{\xi}(t-s) \overline{C_{\tau}(t)} ds dt = \\ &= B_{\xi}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} |C_{\tau}(i\lambda)|^2 dF_{\xi}(\lambda), \end{aligned}$$

donde $F_{\xi}(\lambda)$ es una función espectral del proceso $\xi(t)$ y $C_{\tau}(i\lambda) = \int_0^{\infty} C_{\tau}(t) e^{-i\lambda t} dt$ es la característica de frecuencia del filtro óptimo.

11.8.3. Método de Wiener. Con algunas suposiciones adicionales la ecuación integral (8.9) puede ser resuelta con la ayuda de un método propuesto por Wiener. A saber, supongamos que el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ es absolutamente continuo y su densidad espectral $f_{\xi}(\lambda)$ admite la factorización del tipo

$$f_{\xi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(i\lambda)|^2, \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-zt} h(t) dt, \quad \operatorname{Re} z \geq 0$$

y sea $f_{\eta_{\xi}}(\lambda)$ la densidad espectral recíproca de los procesos $\{\xi(t), t \in T\}$ y $\{\eta(t), t \in T\}$, con la particularidad de que la función $k(i\lambda) = \frac{f_{\eta_{\xi}}(\lambda)}{\varphi(i\lambda)}$ es de cuadrado integrable, de suerte que

$$\begin{aligned} B_{\eta_{\xi}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_{\lambda_{\xi}}(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} k(i\lambda) \overline{\varphi(i\lambda)} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} b(t+s) \overline{h(s)} ds, \end{aligned}$$

donde

$$b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} k(i\lambda) d\lambda.$$

La ecuación (8.9) puede escribirse en la forma

$$\int_0^{\infty} \left[b(\tau+t+s) - \int_0^{\infty} C_{\tau}(u) h(t+s-u) du \right] \overline{h(s)} ds = 0, \quad t > 0.$$

La última ecuación se cumple, si

$$b(\tau+t) = \int_0^{\infty} C_{\tau}(u) h(t-u) du, \quad t > 0, \quad (8.10)$$

o bien

$$b(\tau+t) = \int_0^t C_{\tau}(u) h(t-u) du, \quad t > 0.$$

La ecuación (8.10) se resuelve con la ayuda de la transformación de Laplace:

$$C_{\tau}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{B_{\tau}(i\lambda)}{\varphi(i\lambda)} d\lambda, \quad (8.11)$$

donde

$$B_{\tau}(z) = \int_0^{\infty} b(\tau+x) e^{-zx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau\lambda} f_{\eta\xi}(\lambda)}{\varphi(i\lambda)} \frac{d\lambda}{z-i\lambda}.$$

11.8.4. Método de Yaglom. Como ya hemos indicado en el p. 11.8.2, la función impulsora de transición $C_{\tau}(t)$ de un filtro óptimo puede no existir (para mayor precisión, sólo puede existir como una función generalizada). En tales casos resulta natural recurrir a la característica de frecuencia $C_{\tau}(i\lambda)$ del correspondiente filtro óptimo.

Así, por ejemplo, si $T_0 = \{t \in (-\infty, \infty): t \leq t_0\}$, $t^* = t_0 + \tau$, $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d_{\xi}^*(\lambda)$, $\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d_{\eta}^*(\lambda)$ son procesos ligados de modo estacionario con densidades espectrales respectivas $f_{\xi}^*(\lambda)$ y $f_{\eta}(\lambda)$ y, además, $f_{\eta\xi}(\lambda)$ es su densidad espectral recíproca,* con la particularidad de que el proceso $\xi(t)$ se observa en T_0 , entonces se busca la característica de frecuencia $C_{\tau}(i\lambda)$ del filtro lineal óptimo, es decir, tal función que para $t^* = t_0 + \tau$ se verifiquen

$$\hat{\eta}(t^*) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t^*} C_{\tau}(i\lambda) d_{\xi}^*(\lambda), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |C_{\tau}(i\lambda)|^2 f_{\xi}(\lambda) d\lambda < \infty.$$

El método de Yaglom ofrece un procedimiento que permite hallar la característica de frecuencia como una función definida unívocamente por ciertas condiciones.

Teorema de Yaglom. Si la densidad espectral $f_{\xi}(\lambda)$ es acotada, entonces las condiciones:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} |C_{\tau}(i\lambda)|^2 f_{\xi}(\lambda) d\lambda < \infty;$$

b) $C_{\tau}(i\lambda)$ es un valor de frontera de la función $C_{\tau}(z)$ que es analítica en el semiplano derecho y creciente para $|z| \rightarrow \infty$, no más rápido que cierto grado de $|z|$;

c) la función $\psi(i\lambda) = e^{i\lambda\tau} f_{\eta}(\lambda) - C_{\tau}(i\lambda) f_{\xi}(\lambda)$ es un valor de frontera de la función analítica en el semiplano izquierdo $\psi(z)$, para la cual

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x+iy)|^2 dy < \infty \text{ con } x < 0,$$

definen unívocamente la característica de frecuencia $C_{\tau}(i\lambda)$ del filtro óptimo que evalúa la magnitud

$$\eta(t^*) = \eta(t_0 + \tau).$$

En este caso, el error medio cuadrático de la estimación óptima es

$$\sigma_{\xi}^2 = M |\eta(t_0 + \tau) - \hat{\eta}(t_0 + \tau)|^2 = B_{\eta}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} |C_{\tau}(i\lambda)|^2 f_{\xi}(\lambda) d\lambda.$$

EJEMPLO. Consideremos un problema de pronosticación pura del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ cuya densidad espectral es racional fraccional, es decir, $\xi(t) = \eta(t)$,

$$f_{\xi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2},$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios de grado p y q , respectivamente, cuyos ceros se encuentran en el semiplano izquierdo.

Si $z_j^{(p)}$ y $z_j^{(q)}$ son ceros de los polinomios respectivos $P(z)$ y $Q(z)$, entonces tienen lugar las representaciones

$$P(z) = a \prod_{j=1}^m (z - z_j^{(p)})^{\alpha_j}, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = p;$$

$$Q(z) = b \prod_{j=1}^n (z - z_j^{(q)})^{\beta_j}, \quad \sum_{j=1}^n \beta_j = q.$$

Sea:

$$P_1(z) = (-1)^p a \prod_{j=1}^m (z + z_j^{-(p)})^{\alpha_j};$$

$$Q_1(z) = (-1)^n b \prod_{j=1}^n (z + z_j^{-(q)})^{\beta_j}.$$

La prolongación analítica de la función $\psi(i\lambda) = [e^{i\lambda\tau} - C_{\tau}(i\lambda)] f_{\xi}(\lambda)$ tiene por expresión

$$\psi(z) = [e^{z\tau} - C_{\tau}(z)] \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}.$$

Las condiciones del teorema de Yaglom exigen que la función $C_\tau(t)$ tenga la forma

$$C_\tau(z) = \frac{M_\tau(z)}{P(z)},$$

donde $M_\tau(z)$ es un polinomio de grado $m_\tau \leq p - 1$ tal que

$$\frac{d^j M_\tau(z)}{dz^j} \Big|_{z=\alpha_k(q)} = \frac{d^j (e^{z\tau} P(z))}{dz^j} \Big|_{z=\alpha_k(q)},$$

$$j = 0, \beta_k - 1, \quad k = \overline{1, n}.$$

11.9. Descomposición del proceso estacionario

11.9.1. Descomposición de Wold. Supongamos que $T_0 = \{t \in T : t \leq t_0\}$ y $H_\xi(T_0) = H_\xi(t_0)$. Designemos $H_\xi^* = \bigcap_{t_0 \in T} H_\xi(t_0)$. Para el subespacio H_ξ^* tienen lugar las siguientes posibilidades:

$$H_\xi^* = H_\xi \quad \text{y} \quad H_\xi^* \neq H_\xi.$$

En el último caso la situación será extremal, cuando $H_\xi^* = 0$ (un espacio trivial compuesto del vector nulo).

Si $H_\xi^* = H_\xi$, el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ se llama **singular** (o **determinista**).

Si H_ξ^* es un subespacio propio del espacio H_ξ , entonces el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ se denomina **indeterminista**.

Si $H_\xi^* = 0$, el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ se llama **regular** (o **totalmente indeterminista**). Desde el punto de vista de los problemas de pronosticación (lineal) la singularidad del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ significa que su pronosticación lineal $\hat{\eta}_\tau(t) = \hat{\eta}(t^*)$, $t^* = t + \tau$, $\tau > 0$, para cualquier tiempo τ en adelante es infalible, es decir,

$$\hat{\eta}_\tau(t) = \xi(t + \tau).$$

Por el contrario, siendo regular el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, la mejor pronosticación lineal del futuro infinitamente lejano sólo consiste en indicar la media, es decir,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{\eta}_\tau(t) = M\xi(t) = 0.$$

Sean $\{\xi(t), t \in T\}$ y $\{\eta(t), t \in T\}$ unos procesos estacionarios con los espacios de valores H_ξ y H_η , respectivamente. El proceso $\{\eta(t), t \in T\}$ es **totalmente subordinado** al proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, si $H_\eta(t) \subset H_\xi(t)$ para todo $t \in T$.

Teorema 1. (Descomposición de Wold). *Todo proceso estacionario $\{\xi(t), t \in T\}$ puede ser representado y, además, de modo único, en la forma*

$$\xi(t) = \xi^s(t) + \xi^r(t), \quad (9.1)$$

donde $\xi^s(t)$ y $\xi^r(t)$ son procesos incorrelacionados entre sí, totalmente subordinados al proceso $\{\xi(t), t \in T\}$.

El proceso $\xi^s(t)$ es singular, el proceso $\xi^r(t)$ es regular.

Las magnitudes $\xi^r(t)$ son perpendiculares en H_{ξ} , trazadas desde $\xi(t)$ sobre el subespacio H_{ξ}^r , mientras que las magnitudes $\xi^s(t)$ son las proyecciones correspondientes.

11.9.2. Componentes regular y singular del proceso estacionario. Sean: $F(\lambda)$ una función espectral del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ y $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda)$, su desarrollo de Lebesgue, donde $F_1(\lambda)$ es absolutamente continua, $F_2(\lambda)$ es constante a trozos y $F_3(\lambda)$ es continua y casi siempre en la medida de Lebesgue tiene derivada nula. $F_1(\lambda)$ es una función espectral del componente regular $\xi^r(t)$, mientras que $F_2(\lambda) + F_3(\lambda)$ es una función espectral del componente singular $\xi^s(t)$. El componente singular (proceso singular) puede, en principio, pronosticarse infaliblemente.

EJEMPLO Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso estacionario con tiempo discreto cuya densidad espectral es constante a trozos: $F_{\xi}(\lambda) = F_{(2)}(\lambda)$, es decir, el proceso es singular.

Se busca el pronóstico lineal $\hat{\eta}_{\tau}(t_0)$ del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ según las observaciones en los momentos de tiempo $s \leq t_0$, es decir, se necesita hallar $\alpha_h, k \geq 0$, tales que el error de pronosticación

$$M |\xi(t_0 + \tau) - \hat{\eta}_{\tau}(t_0)|^2 = M |\xi(t_0 + \tau) - \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi(t_0 - h)|^2$$

sea mínimo.

Puesto que el error de pronosticación puede expresarse en la forma

$$B_{\xi}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \bar{\alpha}_l e^{i(l-h)\lambda} dF_{\xi}(\lambda)$$

y $F_{\xi}(\lambda)$ es constante a trozos, entonces se pueden indicar tales α_h que

$$B_{\xi}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \bar{\alpha}_l e^{i(l-h)\lambda} dF_{\xi}(\lambda) = 0,$$

es decir, el pronóstico puede ser, en principio, infalible.

Son singulares aquellos procesos escalares cuya $f(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} F_1(\lambda)$ se anula en el conjunto de la medida positiva de Lebesgue, o bien

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln F'_{11}(\lambda) d\lambda = -\infty \quad (\text{tiempo discreto});$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln F'_{11}(\lambda) d\lambda}{1 + \lambda^2} = -\infty \quad (\text{tiempo continuo}).$$

$$\text{En el caso de que sea } \int_{-\pi}^{\pi} \ln F'_{11}(\lambda) d\lambda >$$

$$> -\infty \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln F'_{11}(\lambda) d\lambda}{1 + \lambda^2} > -\infty \right),$$

los componentes regular y singular de tales procesos son iguales a

$$\xi^r(t) = \int_{\rho_0} e^{i\lambda t} d\xi^r(\lambda), \quad \xi^s(t) = \int_{\rho_0} e^{i\lambda t} d\xi^s(\lambda),$$

donde $\xi(t) = \int_{\rho_0} e^{i\lambda t} d\xi(\lambda)$ es una descomposición espectral del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$; $\rho_0 \subset \Lambda$ es un conjunto de la medida de Lebesgue nula, en el cual están concentrados los puntos de discontinuidad (crecimiento) de la función $F_{(2)}(\lambda) + F_{(3)}(\lambda)$; $\bar{\rho}_0$ es el complemento de ρ_0 en Λ .

Todo proceso estacionario vectorial del primer rango es o regular, o bien singular.

Como el componente singular de un proceso estacionario puede predecirse en principio infaliblemente según el pasado infinitamente alejado, en los problemas de pronosticación, interpolación y filtración provocan el mayor interés los procesos regulares.

Teorema 2. Para que un proceso estacionario escalar sea regular, es necesario y suficiente que este proceso constituya una reacción de un filtro físicamente realizable a cuya entrada llega una sucesión incorrelacionada estándar (en el caso de tiempo discreto), o un proceso estándar con incrementos ortogonales (en el caso de tiempo continuo).

La condición del teorema 2 es necesaria y suficiente para que un proceso vectorial de rango máximo sea regular. Los procesos con densidades espectrales racionales fraccionales son regulares.

11.10. Resolución de los problemas de pronosticación lineal, interpolación y filtración

11.10.1. Pronosticación lineal (extrapolación). Supongamos que $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso regular escalar con tiempo discreto;

$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(e^{-i\lambda})|^2$, la densidad espectral de éste; $\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d\xi^r(\lambda)$, su representación espectral y $\xi(t) = \sum_{s=-\infty}^t C(t-s) \xi_0(s)$, una representación en forma de un proceso de sumación deslizante, $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |C(t)|^2 < \infty$.

Teorema 1. El mejor pronóstico lineal $\xi_{\tau}(t)$ del valor $\xi(t+\tau)$, $\tau > 0$, realizado según las observaciones $\xi(s)$, $s \leq t$, para el tiempo τ en adelante se da mediante la fórmula

$$\xi_{\tau}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t+\tau)\lambda} \frac{\varphi_{\tau}(e^{-i\lambda})}{\varphi(e^{-i\lambda})} d\xi^r(\lambda), \quad (10.1)$$

donde

$$\varphi(e^{-i\lambda}) = \sum_{t=0}^{\infty} C(t) e^{-i\lambda t}; \quad \varphi_{\tau}(e^{-i\lambda}) = \sum_{t=\tau}^{\infty} C(t) e^{-i\lambda t}.$$

El error de pronosticación $\sigma_{\tau}^2 = M |\xi(t+\tau) - \hat{\xi}_{\tau}(t)|^2$ es

$$\sigma_{\tau}^2 = \sum_{s=0}^{\tau-1} C(s) = 2\pi \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda \right\} \sum_{s=0}^{\tau-1} |d_s|^2, \quad (10.2)$$

donde d_n se determina de la correlación

$$\exp \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \ln f(\lambda) d\lambda \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n.$$

En particular,

$$\sigma_{\tau}^2 = 2\pi \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda \right\}, \quad (10.3)$$

es decir, $\frac{\sigma_{\tau}^2}{2\pi}$ es la media geométrica (continua) de la densidad espectral.

EjemPlo 1. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$, $T = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, un proceso de MArkov en amplio sentido con función de correlación $B(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$. La densidad espectral $f(\lambda)$ tiene por expresión

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1 - \beta^2}{|1 - \beta e^{-i\lambda}|^2}, \quad \beta = e^{-\alpha}.$$

El mejor pronóstico lineal para el tiempo τ en adelante se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}_{\tau}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} e^{-\alpha\tau} d\zeta_{\tau}^*(\lambda) = e^{-\alpha\tau} \zeta_{\tau}^*(t),$$

donde $\zeta(\lambda)$ es un proceso espectral correspondiente al proceso $\{\xi(t), t \in T\}$. El error de pronosticación

$$\sigma_{\tau}^2 = \sigma^2 (1 - e^{-2\alpha\tau}).$$

Sean: $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso regular vectorial de rango máximo con tiempo discreto; $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \varphi(e^{-i\lambda}) \varphi^*(e^{-i\lambda})$, la densidad espectral (matricial); $\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d\zeta_{\tau}^*(\lambda)$, una representación espectral, mientras que la matriz $\varphi(z)$ se desarrolla en la serie

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n) z^n.$$

Teorema 2. El mejor pronóstico lineal $\hat{\xi}_\tau(t)$ para el tiempo τ en adelante se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}_\tau(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t+\tau)} \left[\varphi(e^{-i\lambda}) - \sum_{n=0}^{\tau-1} b(n) e^{-in\lambda} \right] \varphi^{-1}(e^{-i\lambda}) d\zeta(\lambda). \quad (10.4)$$

La matriz de errores de la pronosticación para un paso adelante

$$G = \varphi(0) \varphi^*(0). \quad (10.5)$$

EJEMPLO 2. Sea $\{\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)), t \in T\}$ un proceso mixto de autorregresión y media deslizante cuya densidad espectral tiene por expresión

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} B^{-1}(e^{-i\lambda}) A(e^{-i\lambda}) G A^*(e^{-i\lambda}) B^{*-1}(e^{-i\lambda}),$$

donde $A(z)$ y $B(z)$ son polinomios matriciales, $A(0) = B(0) = I$ (matriz $k \times k$ unidad), $\det G \neq 0$. Aquí, $\varphi(e^{-i\lambda}) = B^{-1}(e^{-i\lambda}) \times \times A(e^{-i\lambda}) G^{\frac{1}{2}}$. El mejor pronóstico lineal $\hat{\xi}_\tau(t)$ se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}_\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi(t-n),$$

donde C_n se determinan como los coeficientes del desarrollo $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \left(\sum_{n=\tau}^{\infty} b_n z^n \right) \varphi^{-1}(z)$. La matriz de errores de la pronosticación para 1 paso adelante coincide con G .

En particular, para el proceso de autorregresión ($A(z) \equiv I$) el mejor pronóstico para un paso adelante se determina según los valores $\xi(t)$, $\xi(t-1)$, ..., $\xi(t-q)$, donde q es el grado del polinomio $B(z)$.

Supongamos que $\xi(t)$ es un proceso regular escalar con tiempo continuo.

$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(i\lambda)|^2$, su densidad espectral; $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda)$,

la representación espectral; $\hat{\xi}(t) = \int_{-\infty}^t C(t-s) d\zeta(s)$, una representación

en forma de un proceso de sumación deslizante.

Teorema 3. El mejor pronóstico lineal $\hat{\xi}_\tau(t)$ para el tiempo τ en adelante se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}_\tau(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t+\tau)} \frac{\Psi_\tau(i\lambda)}{\Psi(i\lambda)} d\zeta_\tau(\lambda), \quad (10.6)$$

donde $\Psi(i\lambda) = \int_0^\infty C(s) e^{-i\lambda s} ds$, $\Psi_\tau(i\lambda) = \int_\tau^\infty C(s) e^{-i\lambda s} ds$.

El error de pronosticación

$$\sigma_\tau^2 = \int_0^\tau |a(s)|^2 ds. \quad (10.7)$$

EJEMPLO 3. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso de autorregresión cuya densidad espectral tiene por expresión

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|Q(i\lambda)|^2},$$

donde $Q(z)$ es un polinomio de grado $q > 1$, cuyas raíces β_j , $j = \overline{1, q}$ son sencillas y tienen las partes reales positivas. El mejor pronóstico lineal para el tiempo τ en adelante se da mediante la fórmula

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_\tau(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \sum_{j=1}^q e^{-\beta_j \tau} \prod_{l \neq j} \frac{\beta_l + i\lambda}{\beta_l - \beta_j} d\zeta_\tau(\lambda) = \\ &= \sum_{j=1}^q e^{-\beta_j \tau} \prod_{l \neq j} \frac{1}{\beta_l - \beta_j} \left(\beta_l + \frac{d}{dt} \right) \xi(t). \end{aligned}$$

11.10.2. Interpolación del valor omitido. Sea $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ y $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso estacionario con la función espectral absolutamente continua $F(\lambda)$. Supongamos conocidos los valores $\xi(s)$, $s \neq t_0$. Es necesario hallar la mejor interpolación (lineal) $\hat{\xi}(t_0)$ del valor omitido $\xi(t_0)$. La magnitud

$$M[\xi(t_0) - \hat{\xi}(t_0)] [\xi^*(t_0) - \hat{\xi}^*(t_0)] = \begin{cases} \sigma^2 & (\text{proceso escalar}); \\ G & (\text{proceso vectorial}) \end{cases}$$

se llama error (matriz de errores) de la interpolación del valor omitido.

Teorema 4. Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso escalar y $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} < \infty$,

donde $f(\lambda)$ es la densidad espectral del proceso, entonces la mejor interpolación lineal $\hat{\xi}(t_0)$ del valor omitido $\xi(t_0)$ se da mediante la

fórmula

$$\hat{\xi}(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t_0} \left[I - \frac{2\pi}{f(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu}{f(\mu)}} \right] d\zeta(\lambda), \quad (10.8)$$

donde $\zeta(\lambda)$ es un proceso espectral para $\{\xi(t), t \in T\}$. En este caso, el error de interpolación

$$\sigma^2 = \frac{4\pi^2}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)}}. \quad (10.9)$$

Sean $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso vectorial y $f(\lambda)$, su densidad espectral matricial. Designemos con $f^{(-1)}(\lambda)$ una matriz inversa de $f(\lambda)$ (si $\det f(\lambda) \neq 0$), o bien una matriz inversa generalizada (si $\det f(\lambda) = 0$). Lo último significa que $f^{(-1)}(\lambda) = [f(\lambda) + \Pi(\lambda)]^{-1} - \Pi(\lambda)$, donde $\Pi(\lambda)$ se define unívocamente por las correlaciones: $f(\lambda)\Pi(\lambda) = \Pi(\lambda)f(\lambda) = 0$, $\Pi(\lambda) = \Pi^*(\lambda)$.

Teorema 5. Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso vectorial y la matriz $f^{(-1)}(\lambda)$ es integrable, entonces la mejor interpolación lineal $\hat{\xi}(t_0)$ del valor omitido $\xi(t_0)$ se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t_0} \left[I - \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(-1)}(\lambda) d\lambda \right\}^{-1} f^{(-1)}(\lambda) \right] d\zeta(\lambda), \quad (10.10)$$

donde $\zeta(\lambda)$ es un proceso espectral para $\{\xi(t), t \in T\}$. En este caso, la matriz de errores de la interpolación

$$G = 4\pi \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f^{(-1)}(\lambda) d\lambda \right\}^{(-1)}. \quad (10.11)$$

EJEMPLO 4. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso de Márkov en amplio sentido con densidad espectral

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \beta^2}{|1 - \beta e^{-i\lambda}|^2}, \quad \beta = e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

La mejor interpolación lineal $\hat{\xi}(t_0)$ del valor omitido se da mediante la fórmula

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(t_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t_0} \frac{\beta}{1 + \beta^2} [e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}] d\zeta(\lambda) = \\ &= \frac{\beta}{1 + \beta^2} \xi(t_0 + 1) + \frac{\beta}{1 + \beta^2} \xi(t_0 - 1). \end{aligned}$$

El error de interpolación

$$\sigma^2 = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}.$$

11.10.3. Interpolación de los valores del proceso estacionario con tiempo continuo según las observaciones en momentos discretos equidistantes. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso estacionario escalar con tiempo continuo, cuya función espectral $F(\lambda)$ es absolutamente continua. Supongamos que se observan los valores $\xi(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Teorema 6. La mejor interpolación lineal $\hat{\xi}(t)$ del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ según las observaciones $\xi(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi l) e^{i t(\lambda + 2\pi l)}}{\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi l)} d\zeta(\lambda), \quad (10.12)$$

donde $f(\lambda)$ es la densidad espectral del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ y $\zeta(\lambda)$, su proceso espectral. El error de interpolación $\sigma^2 = \mathbf{M} |\xi(t) - \hat{\xi}(t)|^2$ es igual a

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| 1 - \frac{\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda - 2\pi l) e^{i t 2\pi l}}{\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi l)} \right|^2 f(\lambda) d\lambda. \quad (10.13)$$

En particular, si $\sigma^2 = 0$, el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ puede ser interpolado infaliblemente según los valores $\xi(n), n = 0, \pm 1, \pm 2$. Para ello es necesario y suficiente que $f(\lambda)$ se reduzca a cero fuera del intervalo $[-\pi, \pi]$. En este caso se verifica la fórmula de Kotélnikov—Shannon

$$\hat{\xi}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \pi(j-t)}{\pi(j-t)} \xi(j). \quad (10.14)$$

11.10.4. Filtración lineal. El objetivo de la filtración consiste en separar la señal $s(t)$ según las observaciones del proceso estacionario $\xi(t) = s(t) + \theta(t)$. El problema se resuelve del modo más fácil en aquel caso cuando los valores del proceso $\xi(t)$ son observables en todo el intervalo de tiempo.

Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso estacionario escalar con la función espectral absolutamente continua $F_{\xi}(\lambda)$ y sean $f_{\xi}(\lambda), f_s(\lambda)$ y $F_{\theta}(\lambda)$ las densidades espectrales de los procesos $\xi(t), s(t)$ y $\theta(t)$, respectivamente.

Teorema 7. La característica de frecuencia del filtro óptimo para separar la señal $s(t)$ tiene por expresión

$$H(t\lambda) = \frac{f_s(\lambda)}{f_{\xi}(\lambda)}, \quad (10.15)$$

y el error medio cuadrático de filtración es igual a

$$\int_{\Lambda} \frac{f_s(\lambda)}{f_z(\lambda)} f_\theta(\lambda) d\lambda. \quad (10.16)$$

Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso estacionario vectorial de rango máximo con la función espectral (matricial) absolutamente continua $F_\xi(\lambda)$ y sean $\hat{f}_z(\lambda)$, $\hat{f}_s(\lambda)$ y $\hat{f}_\theta(\lambda)$ las derivadas de las funciones espectrales $F_z(\lambda)$, $F_s(\lambda)$ y $F_\theta(\lambda)$ en la medida $\mu(d\lambda) = \text{Sp } dF_\xi(\lambda)$, es decir,

$$\int_{\Gamma} dF_z(\lambda) = \int_{\Gamma} \hat{f}_z(\lambda) \mu(d\lambda), \quad \int_{\Gamma} dF_s(\lambda) = \int_{\Gamma} \hat{f}_s(\lambda) \mu(d\lambda),$$

$$\int_{\Gamma} dF_\theta(\lambda) = \int_{\Gamma} \hat{f}_\theta(\lambda) \mu(d\lambda).$$

Teorema 8. La característica de frecuencia del filtro óptimo para separar la señal $s(t)$ tiene por expresión

$$H(i\lambda) = \hat{f}_s(\lambda) \hat{f}_z^{-1}(\lambda), \quad (10.17)$$

y la matriz de errores de la filtración es igual a

$$\int_{\Lambda} \hat{f}_s(\lambda) \hat{f}_z^{-1}(\lambda) \hat{f}_\theta(\lambda) \mu(d\lambda). \quad (10.18)$$

Supongamos que $\xi(t) = s(t) + \theta(t)$ es un proceso estacionario regular (que tiene rango máximo en el caso vectorial) y sean $f_z(\lambda)$, $f_s(\lambda)$ las densidades espectrales de los procesos $\xi(t)$ y $s(t)$, respectivamente, y $f_{s\xi}(\lambda)$, la densidad espectral recíproca, mientras que $g(\lambda) = f_{s\xi}(\lambda) f_z^{-1}(\lambda)$. Mediante $\hat{s}_\tau(\lambda)$ está designada la mejor (en media cuadrática) estimación de la señal $s(t + \tau)$ según las observaciones del proceso $\xi(u)$, $u \leq t$. Cuando $\tau > 0$, se habla de una filtración con pronóstico; cuando $\tau < 0$, suele decirse de una filtración con retardo. Los teoremas 7 y 8 describen filtros óptimos para el caso de un retardo tan grande como se quiera.

Teorema 9. La característica de frecuencia $H_\tau(i\lambda)$ del filtro óptimo para estimar la señal $s(t + \tau)$ según las observaciones de $\xi(u)$, $u \leq t$, tiene por expresión

$$H_\tau(i\lambda) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\infty} a(s + \tau) e^{-i\lambda s} \varphi^{-1}(e^{-i\lambda}) & (\text{tiempo discreto}); \\ \left[\int_0^{\infty} e^{-i\lambda s} a(s + \tau) ds \right] \varphi^{-1}(i\lambda) & (\text{tiempo continuo}), \end{cases} \quad (10.10)$$

donde $\varphi(e^{-i\lambda})$, $\varphi(i\lambda)$ son los componentes de factorización de la densidad espectral $f_{\zeta}(\lambda)$;

$$a(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda s} g(\lambda) \varphi(e^{-i\lambda}) d\lambda & (\text{tiempo discreto}); \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} g(\lambda) \varphi(i\lambda) d\lambda & (\text{tiempo continuo}). \end{cases}$$

Por consiguiente, si $\xi(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} d\zeta_{\xi}(\lambda)$ es la densidad espectral del proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, entonces

$$\hat{r}_{\tau}(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} H_{\tau}(i\lambda) d\zeta_{\xi}(\lambda). \quad (10.2'')$$

11.11. Procesos aleatorios estacionarios en estrecho sentido

11.11.1. Definición. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso aleatorio con sus valores en el espacio $\{\mathfrak{X}\}$, donde \mathfrak{X} es un espacio métrico, \mathfrak{B} , una σ -álgebra boreliana en \mathfrak{X} , T es uno de los conjuntos del tipo $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\{0, 1, 2, \dots\}$ (tiempo discreto) o bien $(-\infty, \infty)$, $[0, \infty)$ (tiempo continuo).

Definición 1. El proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ se llama estacionario en estrecho sentido, si para cualesquiera $t, t_k \in T, k = \overline{1, n}, n \geq 1$, tales que $t_k + t \in T$, la distribución conjunta en $(\mathfrak{X}^n, \mathfrak{B}^n)$ de las magnitudes aleatorias $\{\xi(t_1 + t), \xi(t_2 + t), \dots, \xi(t_n + t)\}$ no depende de t .

En otras palabras, un proceso es estacionario en estrecho sentido, si sus distribuciones de dimensiones finitas no varían con los desplazamientos admisibles $(t_k + t \in T, k = \overline{1, n})$ de tiempo.

La definición 1 es equivalente a la siguiente: el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ es estacionario en estrecho sentido, si para una función n -medible arbitraria $f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_k \in \mathfrak{X}$, la esperanza matemática $Mf(\xi(t_1 + t), \xi(t_2 + t), \dots, \xi(t_n + t))$ no depende de t , cualesquiera que sean $t, t_k, k = \overline{1, n}, n \geq 1$, tales que $t_k + t \in T$.

En el caso de tiempo continuo ($T = (-\infty, \infty)$) o bien $T = [0, \infty)$) se supone corrientemente que el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ es continuo estocástico: $\lim_{t \rightarrow s} P\{d(\xi(t), \xi(s)) > \varepsilon\} = 0$ para todo

$\varepsilon > 0$, donde $d(\dots)$ es distancia en el espacio \mathfrak{X} .

Un proceso estacionario en amplio sentido no es (en el caso general) estacionario en estrecho sentido. Por otra parte, un proceso estacionario en estrecho sentido no cuenta forzosamente con la esperanza matemática y el segundo momento. Si, en cambio, la esperanza matemática y el segundo momento de un proceso estacionario en estrecho sentido tienen dimensiones finitas, entonces dicho proceso es también estacionario en amplio sentido.

11.11.2. Ejemplos. 1. Sea $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ o bien $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ y sea $\{\xi(t), t \in T\}$ una sucesión de magnitudes aleatorias independientes e igualmente distribuidas. El proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ es una sucesión aleatoria estacionaria en estrecho sentido.

2. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ la sucesión estacionaria definida en el ejemplo 1 y supongamos que $\alpha_t, t \in T$, es una sucesión de números reales o complejos tal que la serie $\sum_{s \in T} \alpha_s \xi(t+s), s+t \in T$, converge en probabilidad (y, por lo tanto, por ser $\xi(s)$ independiente, con la probabilidad 1). El proceso $\{\eta(t), t \in T\}$, donde $\eta(t) = \sum_{s \in T} \alpha_s \xi(t+s)$, es una sucesión aleatoria estacionaria en estrecho sentido.

3. Supongamos que $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ o bien $T = [0, \infty)$ y $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso de Márkov con sus valores en $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, donde \mathfrak{X} es un espacio métrico compacto cuya única distribución estacionaria es $\rho(\cdot)$ (la medida invariante).

Si la distribución $\xi(0)$ coincide con $\rho(\cdot)$, entonces $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso aleatorio estacionario en estrecho sentido.

4. Sea $\{\eta(t), t \in T\}, T = [0, \infty)$, un proceso homogéneo con incrementos independientes. Si $f(u, x)$ es una función continua para la cual

$$\int_0^{\infty} M |f(u, \eta(u))| du < \infty,$$

el proceso

$$\{\xi(t), t \in T\}, \quad \text{donde} \quad \xi(t) = \int_0^{\infty} f(u, \eta(t+u) - \eta(t)) du,$$

es estacionario en estrecho sentido.

5. Un proceso gaussiano estacionario en amplio sentido es también estacionario en estrecho sentido.

6. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ una sucesión de vectores aleatorios estacionaria en los sentidos amplio y estrecho simultáneamente.

El proceso $\{\eta_h(t), t \in T\}$, donde $\eta_h(t) = \xi(t) \xi^*(t+h), t+t+h \in T$ y h es fijado, es una sucesión de matrices aleatorias, estacionaria en estrecho sentido.

11.11.3. Transformaciones que conservan la medida. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso aleatorio estacionario en estrecho sentido con sus valores en $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$. Designemos mediante \mathfrak{X}^T el espacio de sucesiones $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ en el caso de tiempo discreto, o bien el espacio de funciones $x(t), t \in (-\infty, \infty)$ en el caso de tiempo continuo T ; se designará con \mathfrak{A} la σ -álgebra mínima en \mathfrak{X}^T que contiene los conjuntos cilíndricos y sea P_{ξ} una medida en \mathfrak{A} inducida por el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ y definida en los conjuntos cilíndricos de \mathfrak{A} por medio de la igualdad para cualesquiera $A_n \in \mathfrak{B}, t_k \in T, k = \overline{1, n}, n \geq 1$,

$$P_{\xi}(x \in \mathfrak{X}^T, x(t_1) \in A_1, \dots, x(t_n) \in A_n) = P\{\xi(t_1+h) \in A_1, \dots, \xi(t_n+h) \in A_n\},$$

donde $h = 0$, si $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, o bien $T = (-\infty, \infty)$ y $t_k + h \geq 0$, $k = \overline{1, n}$, si $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, o bien $T = \{0, \infty\}$.

El espacio $\{\mathfrak{X}^T, \mathfrak{X}, P_{\xi}\}$ se llama **representación del proceso** $\{\xi(t), t \in T\}$. Para todo $t \geq 0$, $t \in T$, determinemos la transformación del espacio \mathfrak{X}^T en sí mismo, llamada **operación de desplazamiento del tiempo** S_t , mediante la igualdad $\forall x \in \mathfrak{X}^T, x_t = S_t x$, donde $x_t(s) = x(t+s)$. Se verifica la siguiente igualdad

$$S_t S_s = S_{t+s}, \quad S_0 = I, \quad (11.1)$$

donde I es una transformación idéntica.

La condición de que el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ sea estacionario significa que para un conjunto cilíndrico arbitrario $C \in \mathfrak{B}$

$$P_{\xi}(C) = P_{\xi}(S_t C).$$

Definición 2. Soan $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{F}, \mu)$ un espacio con medida y S , una aplicación medible de $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{F})$ en $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{F})$. La transformación S es aquella que conserva la medida (endomorfismo), si para todo $A \in \mathfrak{F}$

$$\mu(S^{-1}A) = \mu(A), \quad (11.2)$$

donde $S^{-1}A$ es la preimagen completa del conjunto A en la aplicación S .

La transformación S se denomina **invertible**, si existe tal transformación medible S^{-1} que $SS^{-1} = S^{-1}S = I$.

La transformación S^{-1} se llama **inversa** de S .

La definición 2, siendo aplicada a los procesos aleatorios, significa que el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ es estacionario, si el operador de desplazamiento del tiempo S_t en \mathfrak{X}^T conserva la medida P_{ξ} .

Sea $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ el espacio probabilístico básico en el cual está definido el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$. Al poner la trayectoria $\xi(\cdot, \omega)$ del proceso $\{\xi(t) = \xi(t, \omega), t \in T\}$ en correspondencia con todo $\omega \in \Omega$, podemos determinar la aplicación medible T_{ξ} del espacio (Ω, \mathfrak{S}) en el espacio $(\mathfrak{X}^T, \mathfrak{B})$.

Si T_{ξ}^{-1} es una aplicación realizada desde $(\mathfrak{X}^T, \mathfrak{B})$ en (Ω, \mathfrak{S}) cuyo dominio de definición está constituido por los valores de la transformación T_{ξ} , entonces la transformación S_t del espacio \mathfrak{X}^T induce la transformación biunívoca \hat{S}_t del espacio Ω según la fórmula

$$\hat{S}_t = T_{\xi}^{-1} S_t T_{\xi}. \quad (11.3)$$

La transformación \hat{S}_t conserva la medida P . La transformación \hat{S}_t^{-1} genera, a su vez, una transformación de magnitudes aleatorias con valores en $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$: para cualquier magnitud aleatoria $\xi(\omega) \in \mathfrak{X}$

$$[\hat{S}_t \xi](\omega) = \xi(\hat{S}_t^{-1} \omega). \quad (11.4)$$

Todo proceso estacionario en estrecho sentido puede ser representado en la forma

$$\xi(t) = \hat{S}_t \xi(0). \quad (11.5)$$

En particular, si el tiempo t del proceso $\xi(t)$ es discreto, entonces

$$\xi(t) = \hat{S}_t \xi(0), \quad (11.6)$$

donde $\hat{S} = \hat{S}_1$.

11.11.4. Teoremas ergódicos. La teoría de los procesos aleatorios estacionarios en estrecho sentido, en aquella de sus partes donde se usa en gran escala el operador de desplazamiento, puede considerarse como un caso particular de la teoría ergódica concerniente a las transformaciones que conservan la medida (los endomorfismos) de un cierto espacio en sí mismo.

Una de las importantísimas propiedades de los procesos aleatorios $\{\xi(t), t \in T\}$, estacionarios en estrecho sentido, consiste en la existencia de límites de las medias de tiempo

$$\left. \begin{aligned} \eta^+(t) &= \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \xi(s), \quad T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ &\quad \text{o bien } T = \{0, 1, 2, \dots\}; \\ \eta^-(t) &= \frac{1}{2t+1} \sum_{s=-t}^t \xi(s), \quad T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}; \\ \eta^+(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \xi(s) ds, \quad T = (-\infty, \infty), \\ &\quad \text{o bien } T = [0, \infty); \\ \eta^-(t) &= \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \xi(s) ds, \quad T = (-\infty, \infty) \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

para $t \rightarrow \infty$.

Designaremos mediante $\mathfrak{E}^t \subset \mathfrak{E}$ y $\mathfrak{E}^{\pm t} \subset \mathfrak{E}$ las σ -álgebras generadas por las magnitudes aleatorias $\xi(s)$ para $s \geq t$, y $s \geq t, s \leq -t, t \geq 0$, respectivamente, y sea

$$\mathfrak{E}^\infty = \bigcap_{t \in T} \mathfrak{E}^t, \quad \mathfrak{E}^{\pm \infty} = \bigcap_{t \in T} \mathfrak{E}^{\pm t}.$$

Teorema de Birkhoff—Ginčin. Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso aleatorio estacionario en estrecho sentido para el cual $M\xi(0), 0 < < \infty$, entonces, con la probabilidad 1, existen los límites

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \eta^+(t) &= \eta^+; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \eta^\pm(t) &= \eta^\pm, \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

con la particularidad de que

$$\left. \begin{aligned} \eta^+ &= M[\xi(0)/\mathfrak{E}^\infty]; \\ \eta^\pm &= M[\xi(0)/\mathfrak{E}^{\pm \infty}]; \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

$$\left. \begin{aligned} M\eta^+ &= M\xi(0); \\ M\eta^\pm &= M\xi(0). \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

El suceso $A \in \mathfrak{E}$ se denomina invariante respecto de la transformación \hat{S}_t (\hat{S}_t -invariante), si

$$P\{\hat{S}_t^{-1}(A) \Delta A\} = 0,$$

donde Δ es el símbolo de la diferencia simétrica de los conjuntos.

La clase de todos los conjuntos \hat{S}_t -invariantes constituye la σ -álgebra \mathfrak{E}^∞ y $\mathfrak{E}^{\pm\infty}$ (lo último cuando $T = (-\infty, \infty)$ o $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$).

Si todo conjunto \hat{S}_t -invariante tiene probabilidad 0 ó 1, la transformación \hat{S}_t se denominará métrica transitiva.

Es evidente, que si \hat{S}_t es una transformación métrica transitiva, en las condiciones del teorema de Birkhoff-Ginčin tienen lugar las igualdades

$$\begin{cases} \eta^+ = M\xi(0); \\ \eta^\pm = M\xi(0). \end{cases}$$

Un proceso $\{\xi(t), t \in T\}$, estacionario en estrecho sentido, se denomina ergódico, si la σ -álgebra \mathfrak{E}^∞ es trivial, es decir, sólo contiene sucesos cuyas probabilidades son iguales a 0 ó 1.

Teorema 1. Para que un proceso estacionario $\{\xi(t), t \in T\}$ sea ergódico, es necesario y suficiente que se cumpla cualquiera de las dos condiciones:

- 1) la transformación \hat{S}_t es métrica transitiva;
- 2) para toda función \mathfrak{B} -medible $f(x)$ tal que $M|f(\xi(0))| < \infty$, la función

$$\hat{f} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{t-1} f(\hat{S}_m \xi(0)) & \text{(tiempo discreto),} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\hat{S}_u \xi(0)) du & \text{(tiempo continuo)} \end{cases} \quad (11.11)$$

es constante con la probabilidad 1.

Del teorema de Birkhoff-Ginčin se desprende directamente el siguiente corolario.

Teorema 2. (Ley reforzada de los grandes números para los procesos estacionarios en estrecho sentido).

Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso aleatorio ergódico estacionario en estrecho sentido, para el cual $M d(\xi(0), 0) < \infty$, entonces, con la probabilidad 1,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \eta^+(t) &= M\xi(0); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \eta^\pm(t) &= M\xi(0). \end{aligned}$$

11.11.5. Ejemplos de procesos ergódicos. 1. Una sucesión de magnitudes aleatorias independientes o igualmente distribuidas $\{\xi(t), t \in T\}$ con $M| \xi(0) | < \infty$ es ergódica.

2. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ un proceso gaussiano estacionario con la función de correlación $B(t)$. Si $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$, entonces $\{\xi(t), t \in T\}$ es un proceso ergódico.

3. Sea $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $\{\xi(t), t \in T\}$, $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, una cadena de Márkov con valores en X cuya matriz de las probabilidades de paso es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(cadena de Márkov cíclica).

Si la distribución $\xi(0)$ es del tipo $P\{\xi(0) = k\} = \frac{1}{n}$, entonces $\{\xi(t), t \in T\}$ es una sucesión estacionaria ergódica.

Si el proceso $\{\xi(t), t \in T\}$ es ergódico, entonces el proceso $\{\eta(t), t \in T\}$, donde $\eta(t) = f(\xi(t_1 + t), \xi(t_2 + t), \dots, \xi(t_n + t))$, $t, t_k \in T$, $k = 1, n$, $n \geq 1$ y $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función arbitraria \mathfrak{B}^n -medible, es también ergódico.

En particular, si $\{\xi(t), t \in T\}$ es una sucesión de magnitudes aleatorias independientes e igualmente distribuidas $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ y $f(x) = \chi_A(x)$ es el indicador del conjunto $A \in \mathfrak{B}$, entonces

$\frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \chi_A(\xi(s)) = \frac{v_n(A)}{n}$ es la frecuencia de aparición del suceso $\xi(s) \in A$. De conformidad con el teorema 2, con la probabilidad 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n(A)}{n} = M\chi_A(\xi(0)) = P\{\xi(0) \in A\}.$$

Esta afirmación se conoce como el teorema de Borel (véase el cap. 2).

11.11.6. Mezclado. Sean ξ_s las medias de tiempo introducidas en el punto anterior. Suele decirse que al proceso estacionario (multi-dimensional) $\{\xi(t), t \in T\}$ puede aplicarse el teorema del límite central, si existen los límites

$$\lim_{s \rightarrow \infty} M s \hat{\xi}_s \hat{\xi}_s^* = C$$

para $T = [0, \infty)$ o bien $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ o

$$\lim_{s \rightarrow \infty} M 2s \hat{\xi}_s \hat{\xi}_s^* = C$$

para $T = (-\infty, \infty)$ o bien $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, y si

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F_{\hat{\xi}_s}(x) = \Phi(x),$$

donde

$$F_{\xi(s)}(x) = \begin{cases} P(\sqrt{s}\bar{\xi}_s \leq x), & T = \{0, \infty\} \text{ o bien } T = \{0, 1, 2, \dots\}; \\ P(\sqrt{2s}\bar{\xi}_s \leq x), & T = \{-\infty, \infty\} \text{ o bien } T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}$$

(en el caso del proceso multidimensional la desigualdad se entiende por elementos), $\Phi(x)$ es la función de distribución normal (multidimensional) con media nula y varianza (matriz de covarianza) C . La presencia de las medias de tiempo en $F_{\xi(s)}(x)$ presupone la ergodicidad de los procesos a los cuales resulta aplicable el teorema del límite central. No obstante, a pesar de que todos los momentos necesarios están presentes, en el caso dado se requieren ciertas condiciones complementarias, más rigurosas que la ergodicidad.

El ejemplo 3 del punto antecedente (cadena de Markov cíclica) nos da una prueba más sencilla y bastante ilustrativa del proceso estacionario ergódico que dispone de todos los momentos y que, sin embargo, a él no puede ser aplicado el teorema del límite central. La razón radica en la dependencia de los sumandos en la suma

$$\sqrt{s}\bar{\xi}_s = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{t=0}^{s-1} \xi(t).$$

Sean $\mathfrak{E}_{-\infty}^t$ y $\mathfrak{E}_{t+\tau}^{\infty}$, $\tau > 0$, las σ -álgebras generadas por el proceso $\xi(t)$: $\mathfrak{E}_{-\infty}^t = \sigma\{\xi(s), s < t\}$, $\mathfrak{E}_{t+\tau}^{\infty} = \sigma\{\xi(s), s \geq t+\tau\}$. $\mathfrak{E}_{-\infty}^t$ se interpreta como el pasado del proceso $\xi(t)$ y $\mathfrak{E}_{t+\tau}^{\infty}$ como el futuro del mismo proceso. La posibilidad de aplicar el teorema del límite central a los procesos estacionarios está relacionada considerablemente con el cumplimiento de las condiciones que aseguran la disminución de la dependencia del pasado \mathfrak{E}^t del futuro \mathfrak{E}^{∞} a medida que crece τ . He aquí una de estas condiciones.

Definición. La condición

$$\alpha(\tau) = \sup_{\substack{A \in \mathfrak{E}_{-\infty}^t \\ B \in \mathfrak{E}_{t+\tau}^{\infty}}} |P(AB) - P(A)P(B)| \rightarrow 0$$

para $\tau \rightarrow \infty$ se llama condición de mezclado fuerte.

La función $\alpha(\tau)$ se denomina coeficiente de mezclado (fuerte). Los procesos que satisfacen la condición de mezclado fuerte son ergódicos, puesto que la condición de ergodicidad puede escribirse en forma de los límites de Cesaro:

$$\frac{1}{s} \sum_{\tau=1}^s \alpha(\tau, A, B) \rightarrow 0 \text{ cuando } s \rightarrow \infty \text{ (tiempo discreto);}$$

$$\frac{1}{s} \int_0^s \alpha(\tau, A, B) d\tau \rightarrow 0 \text{ cuando } s \rightarrow \infty \text{ (tiempo continuo)}$$

para cualesquiera $A \in \mathfrak{B}_{-\infty}^t$, $B \in \mathfrak{B}_{t+\tau}^{\infty}$, donde $\alpha(\tau, A, B) = P(AB) - P(A)P(B)$.

Unos criterios efectivos para comprobar la condición de mezclado fuerte existen para los procesos gaussianos.

Sean $\xi(t)$ un proceso gaussiano estacionario y $H_{-\infty}^t$ y $H_{t+\tau}^{\infty}$, los espacios de Hilbert generados por las magnitudes aleatorias $\xi(s)$ para $s < t$ y $s \geq t + \tau$, respectivamente.

Hagamos

$$\rho(\tau) = \sup_{\substack{\xi \in H_{-\infty}^t \\ \eta \in H_{t+\tau}^{\infty}}} M \xi \eta.$$

Teorema de Kolmogórov—Rozánov. Para los procesos gaussianos estacionarios se verifican las desigualdades

$$\alpha(\tau) \leq \rho(\tau) \leq 2\pi\alpha(\tau).$$

En el caso de sucesiones gaussianas estacionarias, para que se cumpla la condición de mezclado fuerte es suficiente que la densidad espectral $f(\lambda)$ sea continua y positiva, es decir, que sea $f(\lambda) > C > 0$.

11.11.7. Teorema del límite central. Sea $\xi(t)$ un proceso aleatorio (multidimensional) estacionario en estrecho sentido y supongamos que ξ_s son las medias de tiempo de dicho proceso.

Teorema 3. Si el proceso $\xi(t)$ satisface la condición de mezclado fuerte y tiene densidad espectral continua acotada $f(\lambda)$, verificándose (en el caso de un proceso multidimensional) $\det f(0) \neq 0$, entonces para que el teorema del límite central pueda ser aplicado al proceso $\xi(t)$, es necesario y suficiente la siguiente condición: para todo $\varepsilon > 0$ existen tales números N_ε y T_ε que

$$\int_{|x| > N_\varepsilon} \|x\|^2 dF_{\xi(s)}(x) < \varepsilon$$

para $s > T_\varepsilon$. Con ello la varianza (matriz de covariación) de la distribución normal límite es $C = 2\pi f(0)$.

Las condiciones suficientes de aplicabilidad del teorema del límite central que se comprueban con mayor facilidad están relacionadas o bien con las suposiciones adicionales acerca de la manera de cómo el coeficiente $\alpha(\tau)$ tiende a cero, o bien con las condiciones, aún más rígidas, que la condición de mezclado fuerte.

Teorema 4. Si: 1) el proceso $\xi(t)$ satisface la condición de mezclado fuerte, con la particularidad de que

$$\alpha(\tau) = O(\tau^{-(1+\nu)})$$

y $M \|\xi(t)\|^{2+\alpha} < \infty$ para ciertos $\varepsilon > 0$, $\alpha > \frac{4}{\nu}$, y

2) la densidad espectral $f(\lambda)$ del proceso es acotada, continua y (en el caso de un proceso multidimensional) $\det f(0) \neq 0$, entonces al proceso $\xi(t)$ se le puede aplicar el teorema del límite central. Aquí, la varianza (matriz de covariación) de la distribución normal límite es $C = 2\pi f(0)$.

CAMPOS ALEATORIOS

12.1. Definiciones fundamentales

12.1.1. Definición del campo aleatorio. Distribuciones de dimensiones finitas. Se llama campo aleatorio una función aleatoria de varias variables reales. Demos a conocer una definición más precisa. Supongamos que (Ω, \mathcal{E}, P) es un espacio probabilístico, D es cierto conjunto en R^m . Una función $\xi(\omega, x_1, \dots, x_m) = \xi(\omega, \vec{x})$, definida para $\omega \in \Omega$, $(x_1, \dots, x_m) = \vec{x} \in D$, se denomina campo aleatorio definido en el conjunto D , siempre que con x_1, \dots, x_m fijados, ella es \mathcal{E} -medible según ω . Si el dominio de valores de la función aleatoria $\xi(\omega, x_1, \dots, x_m)$ es R^1 , se habla de un campo escalar, si dicho dominio es R^n se habla de un campo vectorial. El caso más natural de un campo aleatorio es un campo definido en $D \times [0, T]$, donde D es cierto dominio en el espacio tridimensional y el segmento $[0, T]$ se interpreta como un segmento de tiempo. Con la ayuda de tales campos se puede describir la evolución aleatoria de los medios continuos (por ejemplo, la distribución del calor en las condiciones de conductibilidad térmica aleatoria, siendo aleatorias las fuentes de calor, la filtración en un medio aleatorio, etc.). Las funciones $\xi(\omega, x_1, \dots, x_m)$ para toda clase de ω fijados, son funciones muestrales del campo aleatorio.

Las distribuciones de dimensiones finitas de un campo aleatorio $\xi(\omega, \vec{x})$ ($\vec{x} \in D \subset R^m$) se representan por el juego de distribuciones

$$F_{x^1, \dots, x^k}^{\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k}(A_1, \dots, A_k) = P\left\{\bigcap_{j=1}^k \{\xi(\omega, \vec{x}^j) \in A_j\}\right\},$$

$$\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k \in D, \quad k=1, 2, \dots$$

(A_1, \dots, A_k son los conjuntos borelianos del dominio de valores $\xi(\cdot)$).

Con k fijado éstas son distribuciones k -dimensionales de un campo aleatorio.

Las distribuciones de dimensiones finitas de un campo aleatorio satisfacen las condiciones de concordancia:

I Para toda permutación i_1, \dots, i_k de los números $1, \dots, k$

$$F_{x^{i_1}, \dots, x^{i_k}}^{\vec{x}^{i_1}, \dots, \vec{x}^{i_k}}(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = F_{x^1, \dots, x^k}^{\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k}(A_1, \dots, A_k).$$

11. Para todo k

$$F_{\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k} (A_1, \dots, A_{k-1}, R^n) = F_{\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^{k-1}} (A_1, \dots, A_{k-1})$$

(R^n es el dominio de los valores de la función $\xi(\cdot)$)

El teorema de Kolmogórov (véase el p. 94) afirma que para toda familia concordada de las distribuciones de dimensiones finitas existe un campo aleatorio $\xi(\omega, \vec{x})$ con las distribuciones dadas de dimensiones finitas

12.1.2. Funciones de momento. Examinemos un campo aleatorio con los valores numéricos $\xi(\omega, \vec{x})$. La función

$$m_k(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k) = M \xi(\omega, \vec{x}^1) \dots (\xi, \vec{x}^k)$$

(si está definida para $\vec{x}_i \in D$, $i = 1, \dots, k$) se llama función de momento de k -ésimo orden del campo aleatorio $\xi(\omega, \vec{x})$.

Una función de momento de primer orden

$$m_1(\vec{x}) = M \xi(\omega, \vec{x}) = a(\vec{x})$$

se llama valor medio del campo aleatorio. Una función

$$\tilde{m}_k(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k) = M \xi(\omega, \vec{x}^1) - a(\vec{x}^1) \dots (\xi(\omega, \vec{x}^k) - a(\vec{x}^k))$$

se llama función de momento central de k -ésimo orden del campo aleatorio $\xi(\omega, \vec{x})$. Una función de momento central de segundo orden lleva el nombre de función de correlación del campo aleatorio:

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = M \xi(\omega, \vec{x}) \xi(\omega, \vec{y}) - M \xi(\omega, \vec{x}) M \xi(\omega, \vec{y}).$$

Sea $\vec{\xi}(\omega, \vec{x})$ un campo aleatorio con valores en R^n , $\vec{\xi}(\omega, \vec{x}) = (\xi_1(\omega, \vec{x}), \dots, \xi_n(\omega, \vec{x}))$. Una función vectorial

$$\vec{a}(\vec{x}) = (a_1(\vec{x}), \dots, a_n(\vec{x})) = (M \xi_{11}(\omega, \vec{x}), \dots, M \xi_{nn}(\omega, \vec{x}))$$

se llama valor medio del campo aleatorio vectorial. La función $B(\vec{x}, \vec{y})$, que está definida en $D \times D$ y toma valores matriciales, para la cual los elementos de la matriz $B(\vec{x}, \vec{y})$ se determinan por las igualdades

$$b_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) = M \xi_i(\vec{x}) \xi_j(\vec{y}) - a_i(\vec{x}) a_j(\vec{y}),$$

se denomina función matricial de correlación del campo aleatorio vectorial. Las funciones de momento de órdenes superiores de un campo vectorial se dan mediante las igualdades

$$m_{\vec{m}_1, \dots, \vec{m}_k}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k) = M \xi^{\vec{m}_1}(\vec{x}_1) \dots \xi^{\vec{m}_k}(\vec{x}_k),$$

donde $\vec{m}_j = (m_j^{(1)}, \dots, m_j^{(n)})$, $\xi^{\vec{m}} = \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_n^{m_n}$. Sin embargo, estas funciones ya son de poco uso.

12.1.3. Representación de los campos vectoriales mediante las series ortogonales. Sea D un conjunto acotado y sea $\vec{\xi}(\vec{x})$ un campo aleatorio numérico cuya función de correlación $B(\vec{x}, \vec{y})$ existe y

$$\int_D B(\vec{x}, \vec{x}) d\vec{x} < \infty$$

(integral según la medida de Lebesgue). En este caso existe una sucesión ortogonal completa de funciones $\varphi_h(\vec{x})$ en D que son funciones propias del operador integral con núcleo $B(\vec{x}, \vec{y})$

$$\lambda_h \varphi_h(\vec{x}) = \int B(\vec{x}, \vec{y}) \varphi_h(\vec{y}) d\vec{y},$$

siendo λ_h , en este caso, no negativos y $\sum \lambda_h < \infty$.

El campo aleatorio $\vec{\xi}(\vec{x})$ puede ser representado en forma de la serie

$$\vec{\xi}(\vec{x}) = a(\vec{x}) + \sum_{h=1}^{\infty} \eta_h \varphi_h(\vec{x}), \quad (1.4)$$

donde η_h es una sucesión de magnitudes aleatorias incorrelacionadas, $D\eta_h = 0$, $D\eta_h = \lambda_h$. La serie (1.4) converge en el siguiente sentido:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_D M \left| \vec{\xi}(\vec{x}) - a(\vec{x}) - \sum_{h=1}^N \eta_h \varphi_h(\vec{x}) \right|^2 d\vec{x} = 0.$$

Las magnitudes aleatorias η_h se determinan de las correlaciones

$$\eta_h = \int \vec{\xi}(\vec{x}) \varphi_h(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Un resultado análogo es también válido para los campos aleatorios vectoriales. Supongamos que el campo $\vec{\xi}(\vec{x})$ tiene la función matricial de correlación $B(\vec{x}, \vec{y}) = \|b_{ij}(\vec{x}, \vec{y})\|$, para la cual

$$\int_D \sum b_{ij}^2(\vec{x}, \vec{x}) d\vec{x} < \infty.$$

En este caso existe tal sucesión $\lambda_h \downarrow 0$, para la cual el sistema de ecuaciones integrales

$$\lambda \varphi^i(\vec{x}) = \sum_j \int b_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) \varphi^j(\vec{y}) d\vec{y}, \quad i=1, \dots, n, \quad (1.2)$$

tiene solución cuando $\lambda = \lambda_h$. Si

$$\vec{\varphi}_h(\vec{x}) = (\varphi_h^1(\vec{x}), \dots, \varphi_h^n(\vec{x}))$$

es la solución del sistema (1.2) cuando $\lambda = \lambda_h$, para la cual

$$\int \sum_{h=1}^n |\varphi_h^1(x)|^2 d\vec{x} = 1,$$

entonces

$$\xi(x) = a(x) + \sum_{h=1}^n \eta_h \vec{\varphi}_h(x). \quad (1.3)$$

donde η_h es una sucesión de magnitudes aleatorias incorrelacionadas, para las cuales $M\eta_h = 0$, $D\eta_h = \lambda_h$. La convergencia en (1.3) por coordenadas es la misma que en (1.1).

EJEMPLO 1 Campos aleatorios gaussianos. Un campo $\xi(\vec{x})$ se denomina gaussiano, si para cualesquiera $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in D$ la distribución conjunta de las magnitudes $\xi(\vec{x}_1), \dots, \xi(\vec{x}_k)$ es gaussiana. Por analogía, un campo vectorial $\vec{\xi}(\vec{x})$ se llama gaussiano, si la distribución conjunta de las magnitudes $\xi_1(\vec{x}_1), \dots, \xi_n(\vec{x}_1), \dots, \xi_1(\vec{x}_k), \dots, \xi_n(\vec{x}_k)$ es gaussiana. Las distribuciones de dimensiones finitas para los campos gaussianos $\vec{\xi}(\vec{x})$ se determinan completamente por las funciones $a(x)$ y $B(\vec{x}, \vec{y})$. La función $a(x)$ puede ser arbitraria, mientras que la función matricial de correlación debe ser positivamente definida: cualesquiera que sean $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in D$ y los números $\alpha_1, \dots, \alpha_1^n, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_k^n$, debe cumplirse la desigualdad

$$\sum_{i, j, h, l} b_{ij}(\vec{x}_h, \vec{x}_l) \alpha_i \bar{\alpha}'_j \geq 0$$

($\bar{\alpha}$ es un número complejo conjugado de α).

EJEMPLO 2 Campos con incrementos independientes. Sea $\xi(\vec{x})$ un campo aleatorio dado en $R_+^n = \{\vec{x}; x_i \geq 0, i=1, \dots, n\}$. Designemos para un rectángulo $\Pi = \{\vec{x}; a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, \dots, m\}$

$$\Delta_{\Pi} F(\vec{x}) = \Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \dots \Delta_{[a_m, b_m]}^{(m)} F(\vec{x}),$$

donde $\Delta_{[a, b]}^{(h)} = F(x_1, \dots, x_{h-1}, b, x_{h+1}, \dots, x_m) - F(x_1, \dots, x_{h-1}, a, x_{h+1}, \dots, x_m)$.

Si para los rectángulos disjuntos Π_1, \dots, Π_N , cualquiera que sea N , las magnitudes $\Delta_{\Pi_1} \xi(\vec{x}), \dots, \Delta_{\Pi_N} \xi(\vec{x})$ son independientes entre sí, entonces $\xi(\vec{x})$ se llama campo con incrementos independientes. Cuando $\xi(\vec{x}) = 0$ en la frontera de R_+^n , $\xi(\vec{x})$ tiene una distribución determinada por la función característica

$$M e^{i\lambda \xi(\vec{x})} = \exp \left\{ i\lambda a(r) + \int \left(e^{i\lambda z} - 1 - \frac{i\lambda z}{1+z^2} \right) \frac{1+z^2}{z^2} G(\Pi_{\vec{x}}, dz) \right\}, \quad (1.4)$$

donde $G(\cdot, dx)$ es una medida en $R_+^m \times (-\infty, \infty)$, $\prod_a^{\rightarrow} = \{\vec{x}; 0 \leq x_i \leq a_i, i = 1, \dots, m\}$ para $\vec{a} \in R_+^m$ (cuando $x = 0$, el integrando en (1.4) se considera igual a $-\frac{\lambda^2}{2}$). En particular, el campo gaussiano con incrementos independientes tiene en estas suposiciones la función característica

$$\text{Me}^{i\lambda \xi(\vec{x})} = \exp \left\{ i\lambda a(\vec{x}) - \frac{\lambda^2}{2} \mu_2(\Pi_{\vec{x}}) \right\}, \quad (1.5)$$

donde $a(\vec{x})$ es una función y μ_2 es la medida en R_+^m .

12.2. Propiedades de las funciones muestrales

12.2.1. Campos aleatorios medibles. Integración. El campo aleatorio $\xi(\vec{x})$ con distribuciones de dimensiones finitas dadas, construido en el teorema de Kolmogórov (véase el resultado análogo para los procesos aleatorios en el p. 9.1) contiene en calidad de funciones muestrales todas las funciones en D . Es de interés la cuestión, bajo qué condiciones existe un campo aleatorio con distribuciones de dimensiones finitas dadas, cuyas funciones muestrales pertenecen a la clase dada (son medibles, continuas, derivables, etc.).

Diremos que dos campos aleatorios $\xi(\vec{x})$ y $\eta(\vec{x})$, definidos en un mismo conjunto $D \subset R^m$, se llaman **equivalentes estocásticos**, si

$$\forall \vec{x} \in D \mathbf{P} \{ \xi(\vec{x}) = \eta(\vec{x}) \} = 1.$$

Sea D un conjunto (boreliano) medible. Un campo aleatorio $\xi(\omega, \vec{x})$ se denomina **medible**, si la función $\xi(\omega, \vec{x})$ es medible respecto de $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}^m$, donde \mathfrak{S} es una σ -álgebra en el espacio probabilístico, \mathfrak{S}^m es la σ -álgebra de los conjuntos borelianos en R^m .

El campo aleatorio $\xi(\vec{x})$ es **continuo estocástico** en el punto $\vec{x}_0 \in D$, si $\forall \varepsilon$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \mathbf{P} \{ |\xi(\vec{x}) - \xi(\vec{x}_0)| > \varepsilon \} = 0.$$

Teorema 1. Supongamos que D es un conjunto medible y el campo aleatorio $\xi(\vec{x})$ es continuo estocástico en D . En este caso existe un campo aleatorio medible $\xi'(\vec{x})$ que es estocásticamente equivalente a $\xi(\vec{x})$.

Sea $\mu(dx)$ una medida definida en los subconjuntos borelianos D . Para el campo medible $\xi'(\vec{x})$ se puede examinar la cuestión acerca de la existencia de la integral

$$\int_D \xi'(\vec{x}) \mu(d\vec{x}).$$

El conjunto de aquellos ω , para los cuales esta integral está definida (es decir, el conjunto de aquellos ω , para los cuales $\int_D |\xi' \times \bar{x}| \mu(d\bar{x}) < \infty$), es \mathcal{E} -medible y el propio valor de la integral es también \mathcal{E} -medible. El campo es integrable según la medida μ , si

$$P \left\{ \int_D |\xi'(\bar{x})| \mu(d\bar{x}) < \infty \right\} = 1.$$

De condición suficiente de la integrabilidad del campo según la medida μ sirve la expresión

$$\int_D M|\xi'(\bar{x})| \mu(d\bar{x}) < \infty. \quad (2.1)$$

Si (2.1) está cumplida, entonces (en virtud del teorema de Fubini),

$$M \int_D \xi'(\bar{x}) \mu(d\bar{x}) = \int_D M\xi'(\bar{x}) \mu(d\bar{x}). \quad (2.2)$$

Si $\xi'(\bar{x})$ es un campo aleatorio gaussiano y $\int_D \xi'(\bar{x}) \mu(d\bar{x})$ está definida, esta integral será también una magnitud aleatoria de Gauss. Además,

$$M \int_D \xi'(\bar{x}) \mu(d\bar{x}) = \int_D a(\bar{x}) \mu(d\bar{x}),$$

$$D \left[\int_D \xi'(\bar{x}) \mu(d\bar{x}) \right] = \int_D \int_D B(\bar{x}, \bar{y}) \mu(d\bar{x}) \mu(d\bar{y}), \quad (2.3)$$

donde $a(\bar{x})$ y $B(\bar{x}, \bar{y})$ son, respectivamente, el valor medio y la función de correlación del campo $\xi'(\bar{x})$. Ha de ser notado que la fórmula (2.3) es válida para cualesquiera campos, para los cuales queda cumplida (2.1) y la integral en el segundo miembro converge (absolutamente).

12.2.2. Campo aleatorio separable. Un campo $\xi(\bar{x})$ se llama separable respecto del conjunto $\Lambda \subset D$, si Λ es numerable y denso en D y existe tal conjunto $\Gamma \in \mathcal{E}$ que $P(\Gamma) = 1$, en tanto que para toda esfera $S \in R^m$

$$\{\omega : \sup_{\bar{x} \in \Lambda \cap S} \xi(\bar{x}) = \sup_{\bar{x} \in D \cap S} \xi(\bar{x})\} \subset \Omega \setminus \Gamma;$$

$$\{\omega : \inf_{\bar{x} \in \Lambda \cap S} \xi(\bar{x}) = \inf_{\bar{x} \in D \cap S} \xi(\bar{x})\} \subset \Omega \setminus \Gamma.$$

Teorema 2. Para todo campo aleatorio $\xi(\bar{x})$ existe el campo separable $\xi'(\bar{x})$ estocásticamente equivalente a $\xi(\bar{x})$.

Igual que para los procesos aleatorios es cómodo utilizar el concepto de separabilidad en la investigación de las propiedades de las funciones muestrales del campo aleatorio $\xi(\vec{x})$. Sea D compacto. Para que el campo aleatorio $\xi(\vec{x})$ sea continuo con la probabilidad 1 (es decir, para que casi todas sus funciones muestrales sean continuas), es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:

1) $\xi(\vec{x})$ es separable respecto de cierto conjunto $\Lambda \subset D$;

2) $\xi(\vec{x})$ es uniformemente continuo en Λ con la probabilidad 1.

Teorema de Chentsov. Este teorema es una generalización del teorema de Kolmogórov de la continuidad de un proceso aleatorio en los campos aleatorios. Supongamos que un campo aleatorio separable está definido en el rectángulo $\Pi_{\alpha}^{\vec{x}} = \{\vec{x}: 0 \leq x_i \leq a_i, i = 1, \dots, m\}$. Si es continuo en los lados $\Gamma_i = \Pi_{\alpha}^{\vec{x}} \cap \{\vec{x}: x_i = a_i\}$ y existen tales $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\gamma > 0$ que para todo rectángulo $\Pi \subset \Pi_{\alpha}^{\vec{x}}$

$$M|\Delta_{\Pi}\xi(\vec{x})|^{\alpha} \leq \gamma[\mu_{\Pi}(\Pi)]^{1+\beta}$$

(Δ_{Π} se determina en 12.1, μ_{Π} es la medida de Lebesgue en R^m), entonces el campo $\xi(\vec{x})$ es continuo con la probabilidad 1.

12.2.3. Continuidad de los campos gaussianos. Para los campos aleatorios gaussianos se pueden obtener las condiciones de continuidad del campo aleatorio en términos de su función de correlación.

Supongamos que $\xi(\vec{x})$ es un campo aleatorio de Gauss en el conjunto compacto D , $a(\vec{x})$ es el valor medio del campo, $B(\vec{x}, \vec{y})$ es la función de correlación. Sean cumplidas las condiciones: a) $\xi(\vec{x})$ es separable, b) $a(\vec{x})$ es una función continua, c) existen γ y $\delta > 0$ tales que para $\rho(\vec{x}, \vec{x}_0) < \frac{1}{2}$ (ρ es una distancia en R^m)

$$B(\vec{x}_0, \vec{x}_0) - B(\vec{x}, \vec{x}) - 2B(\vec{x}, \vec{x}_0) \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{\rho(\vec{x}, \vec{x}_0)} \right]^{-(1+\delta)}$$

En este caso el campo gaussiano $\xi(\vec{x})$ es continuo con la probabilidad 1.

12.2.4. Diferenciabilidad de los campos aleatorios. El campo $\xi(\vec{x})$ es diferenciable en el punto \vec{x}_0 (en media cuadrática), si existen las magnitudes aleatorias

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \xi(\vec{x}_0), \quad k=1, 2, \dots, m$$

tales que

$$\lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho(\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \Delta \vec{x})} \right)^2 M \left[\xi(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) - \xi(\vec{x}_0) - \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \xi(\vec{x}_0) \Delta x_k \right]^2 = 0.$$

Las magnitudes $\frac{\partial}{\partial x_j} \xi(\vec{x}_0)$ se determinan, en este caso, como límites medios cuadráticos

$$\lim \frac{\Delta_h \xi(\vec{x}_0)}{\Delta x_h},$$

donde $\Delta_h \xi(\vec{x}) = \xi(x_1, \dots, x_h + \Delta x_h, \dots, x_m) - \xi(x_1, \dots, x_h, \dots, x_m)$. Para que $\xi(\vec{x})$ sea diferenciable, es suficiente que sean diferenciables las funciones $a(\vec{x})$ y $B(\vec{x}, \vec{y})$ (respecto de cada variable). Si resulta que las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x_h} \xi(\vec{x})$ (que también son campos aleatorios) son continuas con la probabilidad 1, entonces las funciones muestrales del campo aleatorio $\xi(\vec{x})$ serán funciones derivables \vec{x} para casi todos los ω . Análogamente se determina la diferenciabilidad múltiple del campo aleatorio. La condición suficiente de la diferenciabilidad k -múltiple de un campo aleatorio $\xi(\vec{x})$ se reduce a que las funciones $a(\vec{x})$ y $B(\vec{x}, \vec{y})$ tengan k -ésima diferencial respecto de cada variable.

12.3. Campos aleatorios homogéneos

12.3.1. Definición del campo homogéneo. Un campo aleatorio $\xi(\vec{x})$, definido en $D \subset R^m$, se denomina homogéneo, si 1) D es un semigrupo por adición: si $\vec{x} \in D$, $\vec{y} \in D$, entonces $\vec{x} + \vec{y} \in D$; 2) $M\xi(\vec{x})$ es constante, $M\xi(\vec{x})\xi(\vec{y})$ sólo depende de $\vec{x} - \vec{y}$. Son de mayor uso los campos aleatorios para los cuales D es un grupo de todos los puntos de números enteros R^m y $D = R^m$. Llamaremos los primeros campos de argumento discreto. Análogamente se definen los campos aleatorios vectoriales.

12.3.2. Campos numéricos de argumento discreto. Sea $\xi(\vec{x})$ un campo de esta índole. Como que $M\xi(\vec{x}) = a$, donde a es constante, podemos examinar un campo nuevo $\xi'(\vec{x}) = \xi(\vec{x}) - a$. Este último también será homogéneo. Por esta razón, sin limitar la generalidad de razonamientos, podemos considerar que el valor medio del campo es 0. La función de correlación del campo $\vec{B}(\vec{x}, \vec{y})$ tiene la forma $B(\vec{x} - \vec{y})$, donde $B(\vec{z})$ es una función definida en D y que satisface la condición de definición positiva

$$\sum_{h, j=1}^n B(\vec{z}_h - \vec{z}_j) \alpha_h \bar{\alpha}_j \geq 0, \quad (3.4)$$

cualesquiera que sean n , $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n \in D$ y los números complejos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($\bar{\alpha}_j$ es un número complejo conjugado de α_j). De la con.

dicción (3.1) se deduce la siguiente representación espectral para $B(\vec{z})$:

$$B(\vec{z}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h} F(d\vec{\lambda}), \quad (3.2)$$

donde $F(d\vec{\lambda})$ es cierta medida finita en el rectángulo

$$[-\pi, \pi]^m = \{\vec{\lambda} : -\pi \leq \lambda_j \leq \pi, \quad j=1, \dots, m\},$$

$F(d\vec{\lambda})$ se denomina la **medida espectral** del campo aleatorio. Si esta medida es absolutamente continua respecto de la medida lebesguiana en $[-\pi, \pi]^m$ y

$$F(C) = \int_C f(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}$$

(f es la densidad de $F(d\vec{\lambda})$ respecto de la medida de Lebesgue), entonces $f(\vec{\lambda})$ se denominará **densidad espectral** del campo aleatorio. En este caso (3.2) toma la forma

$$B(\vec{z}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h} f(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda} \quad (3.3)$$

Bajo ciertas condiciones la densidad espectral puede expresarse en términos de la función de correlación

$$f(\vec{\lambda}) = (2\pi)^{-m} \sum_{\vec{z} \in D} e^{-i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h} B_{(\vec{z})} \quad (3.4)$$

(la serie en el segundo miembro converge en media cuadrática y

la igualdad (3.4) se verifica, si $\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda} < \infty$, o bien,

lo que es lo mismo, $\sum_{\vec{z} \in D} B^2(\vec{z}) < \infty$).

Existe una medida aleatoria de valores complejos con valores ortogonales de $\psi(d\vec{\lambda})$ en $[-\pi, \pi]^m$, para la cual

$$M\psi(A)\overline{\psi(B)} = F(A \cap B),$$

tal que para el campo aleatorio $\xi(\vec{x})$ resulta válida la representación

$$\xi(\vec{x}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \right\} \psi(d\vec{\lambda}). \quad (3.5)$$

Ley de los grandes números para un campo aleatorio. Sea $\xi(\vec{x})$ un campo homogéneo en R^m , para el cual $M\xi(\vec{x}) = 0$. Entonces existe un límite en media cuadrática:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} \right)^m \sum_{|x_i| \leq N, i=1, \dots, m} \xi(\vec{x}), \quad (3.6)$$

igual a $\psi(\{0\})$, donde $\{0\}$ es un conjunto en R^m compuesto por un punto $0 \in R^m$. Para que el límite (3.6) sea igual, con la probabilidad 1, a $0 = M\xi(\vec{x})$, es necesario y suficiente que $M|\psi(\{0\})|^2 = F(\{0\}) = 0$, lo que quedará cumplido, si

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|x_i| \leq N, i=1, \dots, m} \left(\prod_{k=1}^m \frac{\sin z_k \delta}{z_k} \right) B(\vec{z}) = 0. \quad (3.7)$$

12.3.3. Campos vectoriales de argumento discreto. Supongamos que $\xi(\vec{x})$ es un campo homogéneo en un retículo de números enteros R^m que toma los valores de R^l y $\xi^i(\vec{x}), \dots, \xi^l(\vec{x})$ son los componentes del campo. Supondremos también que $M\xi^i(\vec{x}) = 0$. Hagamos

$$M\xi^i(\vec{x}) \xi^j(\vec{y}) = b_{ij}(\vec{x} - \vec{y}),$$

y designemos la matriz $\|b_{ij}(\vec{x})\| = B(\vec{x})$. Para que la matriz $l \times l B(\vec{x})$ sea función matricial de correlación de un campo vectorial homogéneo de argumento discreto, es necesario y suficiente que para cualesquiera n y números complejos $\alpha_1^i, \dots, \alpha_l^i, \alpha_1^j, \dots, \alpha_l^j$ y los puntos $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n \in D$ se cumpla la desigualdad

$$\sum_{k, j=1}^n \sum_{p, q=1}^l b_{pq}(\vec{z}_k - \vec{z}_j) \alpha_k^p \alpha_j^{-q} \geq 0 \quad (3.8)$$

(ésta es la condición de definición positiva de la función matricial). La función matricial de correlación tiene la siguiente representación espectral: existen tales medidas de signo variable $F_{pq}(d\vec{\lambda})$, $p, q = 1, \dots, l$ en $[-\pi, \pi]^m$ que

$$b_{pq}(\vec{z}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^m z_k \lambda_k \right\} F_{pq}(d\vec{\lambda}), \quad (3.9)$$

y en este caso la matriz

$$\|F_{pq}(A)\|_{p, q=1, \dots, l} \quad (3.10)$$

está definida de una manera no negativa para todo conjunto boreliano A de $[-\pi, \pi]^m$. La matriz (3.10) se llama **medida espectral matricial** del campo vectorial. Si las funciones $F_{pq}(A)$ son absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue en $[-\pi, \pi]^m$, es decir, si

$$F_{pq}(A) = \int_A f_{pq}(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}, \quad (3.11)$$

entonces la matriz $\|f_{pq}(\vec{\lambda})\|_{p, \dots, q=1, \dots, l}$ recibe el nombre de **densidad matricial espectral** del campo vectorial. Su definición es también no negativa.

En caso de que exista la densidad matricial espectral, la fórmula (3.9) adquiere la forma

$$b_{pq}(\vec{z}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h \right\} f_{pq}(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}. \quad (3.12)$$

Si la densidad matricial espectral existe, puede ser definida con la ayuda de la siguiente fórmula

$$\|f_{pq}(\vec{\lambda})\| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-m} \sum_{z \in D} e^{-i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h} B(\vec{z}) (1 - \varepsilon)^{|z_1| + \dots + |z_m|}. \quad (3.13)$$

El propio campo vectorial aleatorio admite también una **representación espectral**. Existe un juego de medidas estocásticas de valores complejos $\Psi_p(d\vec{\lambda})$ en $[-\pi, \pi]^m$, que satisfacen las condiciones:

$$M\Psi_p(A) = 0; \quad M\Psi_p(A) \overline{\Psi_q(B)} = F_{pq}(A \cap B)$$

para cualesquiera conjuntos borelianos A y B de $[-\pi, \pi]^m$, siendo en este caso

$$\xi_p(\vec{z}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h \right\} \Psi_p(d\vec{\lambda}). \quad (3.14)$$

12.3.4. Campos numéricos de argumento continuo. Utilizaremos las mismas designaciones que se empleaban para los campos numéricos de argumento discreto. La condición de definición positiva será también del tipo (3.1), mas $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m$ son aquí unos puntos arbitrarios de R^m . La función de correlación admite una representación espectral

$$B(\vec{z}) = \int \dots \int \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m \lambda_h z_h \right\} F(d\vec{\lambda}), \quad (3.15)$$

donde $F(A)$ es una medida finita en R^m . Esta medida se denomina **espectral**. Si es absolutamente continua y su densidad respecto de la medida lebesguiana es $f(\vec{\lambda})$, entonces $f(\vec{\lambda})$ se llamará **densidad espectral**. En calidad de densidad espectral puedo intervenir cualquier

función no negativa que sea integrable en R^m . Una función de correlación que le corresponde se expresa mediante la fórmula

$$B(\vec{z}) = \int \dots \int \exp \left\{ i \sum_{k=1}^m \lambda_k z_k \right\} f(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}, \quad (3.16)$$

Si la densidad espectral existe, se expresará en términos de la función de correlación mediante la fórmula

$$f(\vec{\lambda}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \dots \int \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^m \lambda_k z_k - \varepsilon \sum_{k=1}^m z_k^2 \right\} B(\vec{z}) d\vec{z}. \quad (3.17)$$

El campo aleatorio también tiene representación espectral

$$\vec{\xi}(\vec{x}) = \int \dots \int \exp \left\{ i \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \right\} \psi(d\vec{\lambda}), \quad (3.18)$$

donde $\psi(d\vec{\lambda})$ es una medida estocástica de valor complejo en R^m , para la cual $M\psi(A) = 0$, $M\psi(A)\psi(B) = F(A \cap B)$ para todos los conjuntos borelianos A y $B \subset R^m$.

Ley de los grandes números. Existe un límite en media cuadrática

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \right)^m \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \vec{\xi}(\vec{x}) d\vec{x} = \psi(\{0\}). \quad (3.19)$$

Para que dicho límite sea nulo con la probabilidad 1, es necesario y suficiente que $F(\{0\}) = 0$. Lo último es equivalente a la condición

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \left(\prod_{k=1}^m \frac{\sin \delta z_k}{z_k} \right) B(\vec{z}) d\vec{z} = 0. \quad (3.20)$$

12.3.5. Campos vectoriales de argumento continuo. Supongamos que un campo homogéneo $\vec{\xi}(\vec{x})$ está definido en R^m y toma valores de R^l ; $\xi^1(\vec{x}), \dots, \xi^l(\vec{x})$ son sus componentes, $M\xi^j(\vec{x}) = 0$, $M\xi^p(\vec{x})\xi^q(\vec{y}) = b_{pq}(\vec{x} - \vec{y})$.

Designemos mediante $B(\vec{z}) = \| b_{pq}(\vec{z}) \|_{p, q=1, \dots, l}$ la función matricial de correlación del campo homogéneo. Al igual que en el caso de argumento discreto, la condición (3.8) es necesaria y suficiente para que la función continua $B(\vec{z})$ de valores matriciales sea función matricial de correlación de un campo vectorial homogéneo. Existen unas medidas con signos variables de una variación acotada en R^m — $F_{pq}(d\vec{\lambda})$ tales que resulta válida la representación espectral

$$b_{pq}(\vec{z}) = \int \dots \int \exp \left\{ i \sum_{k=1}^m z_k \lambda_k \right\} F_{pq}(d\vec{\lambda}), \quad (3.21)$$

con lo cual para todo conjunto boreliano $A \subset R^m$ la matriz $\|F_{pq}(A)\|_{p, q=1, \dots, l}$ queda definida de modo no negativo. La medida matricial $\|F_{pq}(\vec{d}\lambda)\|_{p, q=1, \dots, l}$ se llama medida espectral matricial del campo vectorial. Si esta medida es absolutamente continua respecto de la medida lebesguiana en R^m , la matriz

$$\|f_{pq}(\vec{\lambda})\|_{p, q=1, \dots, l},$$

compuesta de las densidades $f_{pq}(\vec{\lambda}) = \frac{F_{pq}(\vec{d}\lambda)}{d\vec{\lambda}}$, lleva el nombre

de densidad espectral matricial (esta función para todo $\vec{\lambda}$ es una matriz definida de modo no negativo). La función matricial $\|f_{pq}(\vec{\lambda})\|_{p, q=1, \dots, l}$ puede intervenir en calidad de densidad espectral, si para todo $\vec{\lambda}$ es simétrica según Hermite, no negativa y, además,

$$\int \dots \int |f_{pq}(\vec{\lambda})| d\vec{\lambda} < \infty \text{ para } p, q=1, \dots, l.$$

La representación espectral del campo vectorial tiene por expresión

$$\xi^p(\vec{x}) = \int \dots \int \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m \lambda_h x_h \right\} \psi_p(\vec{d}\lambda), \quad (3.22)$$

donde $\psi_1(\vec{d}\lambda), \dots, \psi_l(\vec{d}\lambda)$ son las medidas estocásticas de valores complejos en R^m , para las cuales

$$M\psi_p(A)\overline{\psi_q(B)} = F_{pq}(A \cap B).$$

12.3.6. Derivación de los campos homogéneos. Puesto que las componentes aisladas de un campo vectorial son campos numéricos, será suficiente sólo considerar la diferenciabilidad del campo numérico. Sean $\xi(\vec{x})$ un campo homogéneo numérico y $F(\vec{d}\lambda)$, su medida espectral. Para que exista la derivada parcial $\frac{\partial \xi(\vec{x})}{\partial x_h}$ en sentido de la convergencia en media cuadrática, es necesaria y suficiente la existencia de la derivada continua $\frac{\partial^2 B(\vec{x})}{\partial x_h^2}$ o que sea

$$\int \dots \int |\lambda_h|^2 dF(\vec{d}\lambda) < \infty.$$

Si estas condiciones se cumplen, $\frac{\partial \xi(\vec{x})}{\partial x_h}$ también será un campo homogéneo cuya función de correlación es $-\frac{\partial^2 B(\vec{x})}{\partial x_h^2}$, mientras

que la medida espectral tiene por expresión

$$F_1(A) = \int_A \dots \int |\lambda_h|^2 F(\vec{\lambda}).$$

Para hallar $\frac{\partial \xi(x)}{\partial x_h}$ se puede derivar la representación espectral (3.18):

$$\frac{\partial \xi(x)}{\partial x_h} = \int \dots \int (i\lambda_h) \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m \lambda_h x_h \right\} \psi(d\vec{\lambda}). \quad (3.23)$$

La condición de existencia de las derivadas parciales consiste en lo siguiente. Para que exista la derivada

$$\frac{\partial^n \xi(x)}{(\partial x_1)^{n_1} \dots (\partial x_m)^{n_m}} \quad (n = n_1 + \dots + n_m)$$

en sentido de la convergencia en media cuadrática y continua en el mismo sentido, es necesario y suficiente que se cumpla una de las condiciones a seguir:

a) existe $\frac{\partial^{2n} B(x)}{(\partial x_1)^{2n_1} \dots (\partial x_m)^{2n_m}}$ y esta derivada es continua;

b) $\int \dots \int |\lambda_1|^{2n_1} \dots |\lambda_m|^{2n_m} F(d\vec{\lambda}) < \infty$.

Si estas condiciones quedan cumplidas, entonces

$$\frac{\partial^n \xi(x)}{(\partial x_1)^{n_1} \dots (\partial x_m)^{n_m}}$$

también será un campo homogéneo cuya función de correlación es

$$(-1)^n \frac{\partial^{2n} B(x)}{(\partial x_1)^{2n_1} \dots (\partial x_m)^{2n_m}},$$

mientras que la medida espectral de dicho campo tiene por expresión

$$F_{n_1, \dots, n_m}(A) = \int \dots \int (\lambda_1)^{2n_1} \dots (\lambda_m)^{2n_m} F(d\vec{\lambda}). \quad (3.24)$$

La representación espectral del campo $\frac{\partial^n \xi(x)}{(\partial x_1)^{n_1} \dots (\partial x_m)^{n_m}}$ puede obtenerse por derivación de la fórmula (3.18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \xi(x)}{(\partial x_1)^{n_1} \dots (\partial x_m)^{n_m}} &= \\ &= \int \dots \int i^{n_1} \lambda_1^{n_1} \dots \lambda_m^{n_m} \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m \lambda_h x_h \right\} \psi(d\vec{\lambda}). \quad (3.25) \end{aligned}$$

12.3.7. Operadores diferenciales de coeficientes constantes. Sea $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ un operador diferencial de coeficientes constantes, aquí $L(t_1, \dots, t_m)$ es un polinomio de t_1, \dots, t_m de grado n .

Si el campo es tal que existen derivadas parciales hasta el orden n inclusivo y estas derivadas son continuas en media cuadrática, entonces se puede aplicar al campo $\xi(\vec{x})$ el operador diferencial $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$. Designaremos

$$\eta(\vec{x}) = L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \xi(\vec{x}). \quad (3.26)$$

Entonces $\eta(\vec{x})$ es también un campo aleatorio homogéneo con la función de correlación

$$B_1(\vec{x}) = L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) L\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial x_m}\right) B(\vec{x}) \quad (3.27)$$

y la medida espectral

$$F_1(A) = \int_A \dots \int |L(i\lambda_1, \dots, i\lambda_m)|^2 F(d\vec{\lambda}). \quad (3.28)$$

Si $\xi(\vec{x})$ posee la representación espectral (3.18), $\eta(\vec{x})$ tiene por expresión

$$\eta(\vec{x}) = \int L(i\lambda_1, \dots, i\lambda_m) \exp\left\{i \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right\} \psi(d\vec{\lambda}). \quad (3.29)$$

Consideraremos una ecuación diferencial

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \xi(\vec{x}) = \eta(\vec{x}), \quad (3.30)$$

donde $\eta(\vec{x})$ es cierto campo homogéneo. Supongamos que $\eta(\vec{x})$ tiene medida espectral $F_\eta(d\vec{\lambda})$ y la representación espectral del campo es

$$\eta(\vec{x}) = \int \dots \int \exp\left\{i \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right\} \psi_\eta(d\vec{\lambda})$$

En este caso (3.30) tiene una sola solución que es un campo homogéneo, cuando, y sólo cuando,

$$\int \dots \int \frac{1}{|L(i\lambda_1, \dots, i\lambda_m)|^2} F_\eta(d\vec{\lambda}) < \infty.$$

La solución de (3.30) tendrá la forma

$$\xi(\vec{x}) = \int \dots \int \frac{1}{L(i\lambda_1, \dots, i\lambda_m)} \exp\left\{i \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right\} \psi_\eta(d\vec{\lambda}), \quad (3.31)$$

y la medida espectral $P_{\xi}^{\vec{x}}(\cdot)$ del campo $\xi(\vec{x})$ será

$$F_{\xi}^{\vec{x}}(A) = \int_A \dots \int \frac{1}{|L(i\lambda_1, \dots, i\lambda_n)|^2} F_{\eta}^{\vec{x}}(d\vec{\lambda}). \quad (3.32)$$

12.3.8. Transformaciones integrales de los campos homogéneos numéricos. Sea $\xi(\vec{x})$ un campo numérico con la función de correlación $B(\vec{x})$ y la medida espectral $F_{\xi}^{\vec{x}}(d\vec{\lambda})$. La transformación integral general tiene la forma

$$\eta(\vec{x}) = \int \dots \int K(\vec{x}, \vec{y}) \xi(\vec{y}) d\vec{y},$$

donde $K(\vec{x}, \vec{y})$ es una función tal que para todos los \vec{x} existe

$$\int \dots \int K(\vec{x}, \vec{y}_1) K(\vec{x}, \vec{y}_2) B(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) d\vec{y}_1 d\vec{y}_2 < \infty.$$

Si $K(\vec{x}, \vec{y}) = K(\vec{x} - \vec{y})$ y $K(\vec{z})$ es una función integrable, entonces la función

$$\eta(\vec{x}) = \int \dots \int K(\vec{x} - \vec{y}) \xi(\vec{y}) d\vec{y} \quad (3.33)$$

también será un campo homogéneo. La función de correlación de este campo se da por la fórmula

$$B\eta(\vec{x}) = \int \dots \int K(\vec{y}_1) K(\vec{y}_2) B(\vec{x} - \vec{y}_1 + \vec{y}_2) d\vec{y}_1 d\vec{y}_2, \quad (3.34)$$

y la medida espectral del campo $\eta(\vec{x})$ tiene la forma

$$F_{\eta}^{\vec{x}}(A) = \int_A \dots \int |\hat{k}(\vec{\lambda})|^2 F_{\xi}^{\vec{x}}(d\vec{\lambda}), \quad (3.35)$$

donde

$$\hat{k}(\vec{\lambda}) = \int \dots \int e^{-i \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k} K(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (3.36)$$

Si para el campo $\xi(\vec{x})$ existe la densidad espectral $f_{\xi}^{\vec{x}}(\vec{\lambda})$, el campo $\eta(\vec{x})$ también tiene la densidad espectral

$$f_{\eta}^{\vec{x}}(\vec{\lambda}) = |\hat{k}(\vec{\lambda})|^2 f_{\xi}^{\vec{x}}(\vec{\lambda}). \quad (3.37)$$

12.3.9. Transformación integral del campo homogéneo vectorial. Supongamos que $\xi(\vec{x})$ es un campo homogéneo con valores en R^l , $B_{\xi}^{\vec{x}}(\vec{x})$ es la función matricial de correlación de $\xi(\vec{x})$ y $F_{\xi}^{\vec{x}}(d\vec{\lambda})$ la función espectral matricial del campo $\xi(\vec{x})$. Sea, ahora, $K(\vec{x})$ una función matricial que aplica R^l en R^p (es decir, una matriz de

orden $l \times p$). Si todos los elementos de esta matriz son absolutamente integrables en R^m , queda definida la integral

$$\vec{\eta}(\vec{x}) = \int \dots \int K(\vec{x} - \vec{y}) \vec{\xi}(\vec{y}) d\vec{y} \quad (3.38)$$

(el resultado de la aplicación de K a $\vec{\xi}$ es un vector de R^p), con lo cual $\vec{\eta}(\vec{x})$ es un campo vectorial homogéneo con sus valores en R^p . La función matricial de correlación $B_{\eta}(\vec{x})$ es de la forma

$$B_p(\vec{x}) = \int \dots \int K(\vec{y}_1) B(\vec{x} - \vec{y}_1 + \vec{y}_2) K^*(\vec{y}_2) d\vec{y}_1 d\vec{y}_2, \quad (3.39)$$

y la medida espectral matricial es

$$F_{\eta}(A) = \int_A \dots \int \tilde{K}(\vec{\lambda}) dF_{\xi}(\vec{\lambda}) \tilde{K}^*(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}, \quad (3.40)$$

donde K^* es una matriz conjugada de K ; \tilde{K} es una matriz con los elementos

$$\tilde{k}_{ij}(\vec{\lambda}) = \int \dots \int \exp\left\{-i \sum_{h=1}^m \lambda_h x_h\right\} k_{ij}(\vec{x}) d\vec{x},$$

donde k_{ij} son los elementos de la matriz K ; \tilde{K}^* es una matriz conjugada de \tilde{K} según Hermite. Si existe la densidad matricial espectral del campo $\vec{\xi}(\vec{x}) \parallel f_{\xi} \parallel(\vec{\lambda})$, entonces existe también la densidad matricial espectral para $\vec{\eta}(\vec{x})$:

$$\parallel f_{\eta} \parallel(\vec{\lambda}) = \tilde{K}(\vec{\lambda}) \parallel f_{\xi} \parallel(\vec{\lambda}) \tilde{K}^*(\vec{\lambda}) \quad (3.41)$$

($\parallel f_{\eta} \parallel(\vec{\lambda})$ es la matriz $l \times l$).

12.4. Campos aleatorios isótopos

12.4.1. Campos isótopos homogéneos. Un campo aleatorio $\vec{\xi}(\vec{x})$, definido en R^m con los valores en R^l , se denomina homogéneo e isótopo, si es homogéneo y su función matricial de correlación $B(\vec{x})$ depende sólo de $|\vec{x}|$, donde $|\vec{x}|$ es la norma del vector en R^m . Sea $B(|\vec{x}|)$ una función de correlación de un campo numérico homogéneo e isótopo. En este caso $B(r)$ admite la siguiente representación:

$$B(r) = 2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^{\infty} J_{\frac{m-2}{2}}(\lambda r) d\Phi(\lambda), \quad (4.1)$$

donde $J_k(\lambda)$ es una función de Bessel de la primera especie de orden k , y $\Phi(\lambda)$ es una función de variación acotada no decreciente en $[0, \infty)$.

Se expresa en términos de la función espectral de un campo homogéneo según la fórmula

$$\Phi(\lambda) = \int_{|\vec{v}| < \lambda} F(\vec{dv}). \quad (4.2)$$

$\Phi(\lambda)$ es también una función espectral del campo homogéneo isótropo. Se expresa a través de $B(r)$ del modo siguiente:

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\infty} J_{\frac{m}{2}}(\lambda r) (\lambda r)^{\frac{n}{2}} \frac{B(r)}{r} dr. \quad (4.3)$$

Ahora escribamos una representación espectral para el propio campo. Sean $(r, \theta_1, \dots, \theta_{m-2}, \varphi)$ las coordenadas esféricas de un punto en R^m ($r \in [0, \infty)$, $\theta_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$). Designaremos mediante

$$S_n^h(\theta_1, \dots, \theta_{m-2}, \varphi), \quad k=1, 2, \dots, h(n, m) = \frac{(2n+m-2)(n+m-3)!}{(m-2)! n!}$$

la sucesión ortonormada de armónicas esféricas de grado n . En este caso, si $M_{\xi}^{\vec{x}}(\vec{x}) = 0$, entonces

$$\xi^{\vec{x}}(\vec{x}) = c_n \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{h(n, m)} S_n^h(\theta_1, \dots, \theta_{m-2}, \varphi) \times \int_0^{\infty} J_{n+\frac{m-2}{2}}(\lambda r) (\lambda r)^{\frac{2-m}{2}} \psi_n^h(d\lambda), \quad (4.4)$$

donde $c_n^2 = 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \pi^{\frac{m}{2}}$, y $\psi_n^h(d\lambda)$, $n=0, 1, \dots$; $k=1, \dots, h(n, m)$, son medidas aleatorias de valores complejos con valores ortogonales en $[0, \infty)$, con la particularidad de que para cualesquiera conjuntos de Borel Λ_1 y Λ_2 en $[0, \infty)$

$$M\psi_n^h(\Lambda_1) \psi_p^j(\Lambda_2) = \delta_n^p \delta_h^j \int_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2} d\Phi(\lambda),$$

$$M\psi_n^h(\Lambda_1) = 0.$$

12.4.2. Campos isótropos homogéneos con valores en R^l . Sean $B(|z|)$ una función matricial de correlación de un campo isótropo homogéneo y $b_{ij}(r)$, los elementos de la matriz $B(r)$. En este caso

$$b_{ij}(r) = 2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^{\infty} J_{\frac{m-2}{2}}(\lambda r) d\Phi_{ij}(\lambda), \quad (4.5)$$

donde las funciones $\Phi_{lj}(\lambda)$ están definidas en $[0, \infty)$, siendo que para $\lambda_1 < \lambda_2$ la matriz

$$\|(\Phi_{lj}(\lambda_2) - \Phi_{lj}(\lambda_1))\|$$

queda definida de modo no negativo. La matriz $\|\Phi_{lj}(\lambda)\| = \Phi(\lambda)$ se denomina matriz espectral del campo isótropo homogéneo. En forma matricial la fórmula (4.5) puede escribirse así:

$$B(r) = 2 \frac{m-2}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^{\infty} J_{\frac{m-2}{2}}(\lambda r) d\Phi(\lambda). \quad (4.6)$$

La representación espectral de tal campo tiene la forma

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(x) = c_n \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{h(n,m)} S_n^h(\theta_1, \dots, \theta_{m-2}, \varphi) \times \\ \times \int_0^{\infty} J_{n+\frac{m-2}{2}}(\lambda r) (\lambda r)^{\frac{2-m}{2}} \vec{\psi}_n^h(d\lambda), \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde c_n y S_n^h son las mismas que en la fórmula (4.4), y $\vec{\psi}_n^h(d\lambda)$ son medidas ortogonales a pares con los valores en R^l , para las cuales

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} \vec{\psi}_n^h(\Lambda_1) \vec{\psi}_n^h(\Lambda_2) &= \int_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2} d\Phi_{ij}(\lambda); \\ M \vec{\psi}_n^h(\Lambda_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$(i_1 \vec{\psi}_n^h, \dots, i_k \vec{\psi}_n^h)$ son las coordenadas del vector $\vec{\psi}_n^h$.

12.4.3. Campos isótropos en la esfera. Un campo aleatorio $\vec{\xi}(x)$, que está dado en una esfera S del espacio R^m y que toma valores de R^l , se llama isótropo, si $M \vec{\xi}(x)$ es constante y la función matricial de correlación $B(x, y)$ sólo depende de la distancia angular entre los puntos de la esfera \vec{x}, \vec{y} .

Sea $\xi(x)$ un campo isótropo numérico en la esfera S . Su función de correlación tiene por expresión $B(\cos \theta)$, donde θ es la distancia angular entre los puntos en la esfera. Existen tales coeficientes no negativos b_n que

$$B(\cos \theta) = \frac{1}{\omega_m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos \theta)}{C_n^{\frac{m-2}{2}}(1)} h(n, m), \quad (4.9)$$

donde ω_m es el volumen $(m-1)$ -dimensional lebesguiano de una esfera unitaria en R^m , $C_n^h(\cdot)$ son los polinomios de Gegenbauer (en el libro de G. Szegő, "Polinomios ortogonales", M., Fizmatgiz, 1962, pág. 500) y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n h(n, m)$ converge.

Un campo aleatorio para $M_{\xi}^{\vec{x}}(x) = 0$ admite la siguiente representación:

$$\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, m) \sum_{h=1}^m \xi_n^h S_n^h(x), \quad (4.10)$$

donde ξ_n^h son unas magnitudes aleatorias para las cuales $M_{\xi_n^h}^{\vec{x}} = 0$, $M_{\xi_n^h \xi_p^j}^{\vec{x}} = b_n \delta_j^h \delta_p^n$.

Sea, ahora, $\xi(x)$ un campo isótropo vectorial en la esfera S . Su función material de correlación es de la forma

$$B(\cos \theta) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, m) \frac{C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos \theta)}{C_n^{\frac{m-2}{2}}(1)} B_n, \quad (4.11)$$

donde B_n es una sucesión de matrices simétricas no negativas $l \times l$, para las cuales la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n, m) B_n$$

converge. Si $M_{\xi}^{\vec{x}}(x) = 0$, el campo por sí mismo tiene la forma

$$\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, m) \sum_{h=1}^m \xi_n^h S_n^h(x), \quad (4.12)$$

donde ξ_n^h es una sucesión de vectores aleatorios incorrelacionados dos a dos, para los cuales

$$M_{\xi_n^h}^{\vec{x}} = 0, \quad M_{\xi_n^h \xi_n^j}^{\vec{x}} = b_n^{ij}$$

($i \xi_n^h, \dots, i \xi_n^h$ son las componentes del vector ξ_n^h , en tanto que $b_n^{i,j}$ son los elementos de la matriz B_n).

MARTINGALAS

13.1. Definiciones y ejemplos

Una clase importante de magnitudes aleatorias que tienen numerosas aplicaciones la constituyen las martingalas y las semimartingalas.

Sean $\{\Omega, \mathfrak{E}, \mathbf{P}\}$ un espacio probabilístico básico, T un conjunto ordenado arbitrario de números enteros (tiempo discreto) o de números reales (tiempo continuo) y $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$ un flujo de σ -álgebras, $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$, es decir, para $s \leq t$

$$\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t.$$

Definición 1. Una familia de magnitudes aleatorias $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t; t \in T\}$, en la que $\xi(t)$ para todo $t \in T$ son \mathfrak{F}_t -medibles y $\mathbf{M}|\xi(t)| < \infty$, se denomina **martingala**, si

$$\mathbf{M}[\xi(t)/\mathfrak{F}_s] = \xi(s), \quad s < t, \quad s, t \in T. \quad (1.1)$$

$\{\xi(t), \mathfrak{F}_t; t \in T\}$ se llama **submartingala**, si $\mathbf{M}\xi^+(t) < \infty$ y

$$\mathbf{M}[\xi(t)/\mathfrak{F}_s] \geq \xi(s), \quad s < t, \quad s, t \in T, \quad (1.2)$$

o bien **supermartingala**, si $\mathbf{M}\xi^-(t) < \infty$ y

$$\mathbf{M}[\xi(t)/\mathfrak{F}_s] \leq \xi(s), \quad s < t, \quad s, t \in T. \quad (1.3)$$

Las supermartingalas y las submartingalas se llaman también **semimartingalas**.

En el caso continuo, cuando T es un intervalo del eje numérico real, las martingalas y semimartingalas en consideración se suponen separables.

De la definición se deduce que \mathfrak{F}_t siempre contiene una σ -álgebra generada por las magnitudes aleatorias $\{\xi(s), s \leq t\}$.

En la definición de la martingala (semimartingala) tal σ -álgebra se toma con frecuencia por \mathfrak{F}_t .

En aquellos casos cuando el flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$ está fijado, en la definición de la martingala (semimartingala) a menudo se omite.

De la definición de la esperanza matemática condicional se desprende la siguiente anotación de las propiedades (1.1)—(1.3):

$$\int_A \xi(t) dP = \int_A \xi(s) dP, \quad A \in \mathfrak{F}_s; \quad (1.1')$$

$$\int_A \xi(t) dP \geq \int_A \xi(s) dP, \quad A \in \mathfrak{F}_s; \quad (1.2')$$

$$\int_A \xi(t) dP \leq \int_A \xi(s) dP, \quad A \in \mathfrak{F}_s. \quad (1.3')$$

De las correlaciones (1.1')—(1.3') se deduce que para cualquier magnitud aleatoria \mathfrak{F}_s -medible positiva η se verifican las siguientes correlaciones respectivas:

$$M[\xi_t \cdot \eta] = M[\xi_s \cdot \eta], \quad s < t, \quad s, t \in T; \quad (1.1'')$$

$$M[\xi_t \cdot \eta] \geq M[\xi_s \cdot \eta], \quad s < t, \quad s, t \in T; \quad (1.2'')$$

$$M[\xi_t \cdot \eta] \leq M[\xi_s \cdot \eta], \quad s < t, \quad s, t \in T. \quad (1.3'')$$

EJEMPLO 1. Supongamos que ξ es una magnitud aleatoria y está dado un flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$. La totalidad de las magnitudes aleatorias

$$\xi_t = M[\xi/\mathfrak{F}_t], \quad t \in T, \quad (1.4)$$

forma una martingala.

EJEMPLO 2. Sea $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ una sucesión de magnitudes aleatorias independientes con $M\zeta_n = 0$. Hagamos $\mathfrak{F}_n = \sigma\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$ y $\xi_n = \sum_{k=1}^n \zeta_k$. En este caso la sucesión $\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n; n \geq 1\}$ forma una martingala.

EJEMPLO 3. Sea $\{\zeta_k, k \geq 1\}$ una sucesión de magnitudes aleatorias cuya densidad conjunta de probabilidades $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para todo $n \geq 1$ es estrictamente positiva. Sean $q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ las densidades de las probabilidades. Las razones de verosimilitud

$$\xi_n = \frac{q_n(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)}{p_n(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)}, \quad n \geq 1, \quad (1.5)$$

forman una martingala respecto del flujo de σ -álgebras

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(\zeta_1, \dots, \zeta_n), \quad n \geq 1.$$

13.2. Propiedades de las martingalas y semimartingalas

1. Si $\xi(t)$ es una submartingala, entonces $-\xi(t)$ será una supermartingala (y viceversa). Por ello, las propiedades de las submartingalas se pueden enunciar con facilidad para las supermartingalas (y viceversa).

2. Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es una martingala, entonces $M\xi(t) = \text{const}$. Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es una submartingala, entonces $M\xi(t)$ será una función monótona no decreciente.

3. Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es una submartingala y $f(x)$ es una función convexa en T , continua y monótona no decreciente, mientras que $Mf(\xi(t)) < \infty$ para $t \in T$, entonces $\{f(\xi(t)), t \in T\}$ es también una submartingala.

4. Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es una martingala, mientras que $f(x)$ es una función convexa continua y $M|f(\xi(t))| < \infty$ para $t \in T$, entonces $\{f(\xi(t)), t \in T\}$ es una submartingala.

5. Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es una martingala, entonces $M|\xi(t)|$ no decrece en T de manera monótona.

6. Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es una submartingala, entonces $\{|\xi(t) - c|^p, t \in T\}$ es también una submartingala.

7. Desigualdades principales. Sea $\{\xi(t), t \in T\}$ una submartingala, entonces para toda constante positiva c

$$P(\sup_{t \in T} \xi^+(t) \geq c) \leq \frac{1}{c} \sup_{t \in T} M\xi^+(t). \quad (2.1)$$

Si, en este caso, $\sup_{t \in T} M|\xi^+(t)|^p < \infty$ para cierto $p > 1$, entonces

$$M[\sup_{t \in T} \xi^+(t)]^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t \in T} M|\xi^+(t)|^p. \quad (2.2)$$

Si $\{\xi(t), t \in T\}$ es una martingala con $\sup_{t \in T} M|\xi(t)|^p < \infty$, entonces

$$P(\sup_{t \in T} |\xi(t)| \geq c) \leq \frac{1}{c^p} \sup_{t \in T} M|\xi(t)|^p. \quad (2.3)$$

Si el conjunto T posee el elemento máximo $t_{\max} \geq t$ para cualquier $t \in T$, entonces las fronteras superiores exactas en los segundos miembros de las desigualdades (2.1)–(2.3) se alcanzan en el punto t_{\max} .

8. (Desigualdad de Doob). Introduzcamos $v[a, b]$ que significa el número de intersecciones hechas en el semintervalo $[a, b]$ por la submartingala $\{\xi(t), t \in T\}$ de arriba abajo; $v[a, b]$ es la frontera superior exacta de tales números s que existe una sucesión $\{t_i, i = 1, 2, \dots, 2s\}$, $t_i < t_{i+1}$, $t_i \in T$, para la cual

$$\xi(t_1) \geq b, \xi(t_2) < a, \xi(t_3) \geq b, \dots, \xi(t_{2s}) < a.$$

$v[a, b]$ es una magnitud aleatoria que satisface la desigualdad

$$Mv[a, b] \leq \frac{\sup_{t \in T} M[\xi(t) - b]^+}{b - a}. \quad (2.4)$$

13.3. Clausura, integrabilidad y existencia del límite

Definición 1. Una magnitud aleatoria ξ se llama *clausura* a la derecha de la submartingala $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$, si $M\xi^+ < \infty$ y ξ es medible respecto de la σ -álgebra $\mathfrak{F} = \sigma\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$ y para todo $t \in T$ se tiene

$$\xi(t) \leq M[\xi/\mathfrak{F}_t]. \quad (3.1)$$

Si el conjunto T dispone del elemento máximo $t_{\max} \geq t$ para todos los $t \in T$, entonces la submartingala $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ está cerrada a la derecha por la magnitud aleatoria $\bar{\xi} = \xi(t_{\max})$.

Teorema 1. Sea $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ una submartingala dada en el intervalo T . Las tres condiciones a seguir son equivalentes:

- $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ está cerrada a la derecha;
- la familia $\{\xi(t), t \in T\}$ es uniformemente integrable;
- existe un límite en sentido de la convergencia en \mathcal{L}_1 :

$$\lim_{t \uparrow t_{\max}} M |\xi(t) - \bar{\xi}| = 0.$$

Si se cumple siquiera una de dichas condiciones, el límite $\lim_{t \uparrow t_{\max}} \xi(t) = \bar{\xi}$ existe con la probabilidad 1 y $\bar{\xi}$ es la clausura de la submartingala a la derecha.

Observación. En la definición 1 y en el teorema 1 el término submartingala puede sustituirse por martingala, al sustituir el signo de desigualdad en (3.1) por el de igualdad.

Teorema 2. Sea $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ una martingala. Las tres condiciones a seguir son equivalentes:

- la familia $\{\xi_n, n \geq 1\}$ es uniformemente integrable;
- la martingala $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ tiene clausura a la derecha;
- $M |\xi_n - \xi_m| \rightarrow 0$, cuando $n, m \rightarrow \infty$.

Si una de estas condiciones queda cumplida, con la probabilidad 1 existe el $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \bar{\xi}$ y $\bar{\xi}$ es la clausura de la martingala a la derecha.

Además, si se cumple la condición

$$\sup_{n \geq 1} M \xi_n^* < \infty, \quad (3.2)$$

con la probabilidad 1 existe el $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \bar{\xi}$ y $\bar{\xi}$ es la clausura a la derecha de la submartingala (martingala).

En los teoremas posteriores del presente punto, T se considera como un intervalo de un eje numérico real (puede ser infinito).

Teorema 3. Una submartingala separable $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ no tiene en el intervalo T discontinuidades de segunda especie.

Introducimos \mathfrak{F}_{t+0} que es la intersección de todas las σ -álgebras \mathfrak{F}_s para $s > t$. En este caso $\xi(t+0)$ será una magnitud aleatoria \mathfrak{F}_{t+0} -medible.

Teorema 4. (Regularización de la submartingala a la derecha). Sea $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ una submartingala definida en el intervalo T . Entonces, $\{\xi(t=0), \mathfrak{F}_{t+0}, t \in T\}$ es también una submartingala cuyas funciones muestrales son continuas a la derecha con la probabilidad 1. En este caso $P(\xi(t) = \xi(t+0)) = 1$ en cada punto, donde $M \xi(t)$ es continuo y $\mathfrak{F}_{t+0} = \mathfrak{F}_t$.

Si T dispone del elemento máximo t_{\max} , entonces $\xi(t_{\max} + 0) = \xi(t_{\max})$.

13.4. Momentos de Márkov y sustitución aleatoria del tiempo

Sea T un conjunto de momentos de tiempo en los que se realizan ciertos experimentos y sea $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$ un flujo de σ -álgebras de los sucesos que se observan en los experimentos. Según los resultados de los experimentos realizados se determina la aparición del suceso A que tiene lugar en cierto momento aleatorio de tiempo τ .

El suceso $\{\tau \leq t\}$ significa que A sucedió antes o en el momento de tiempo t , por lo cual debe ser observable para la sucesión de experimentos que se ejecutan en los momentos de tiempo $s \leq t; s \in T$, es decir, el suceso $\{\tau \leq t\}$ debe ser \mathfrak{F}_t -medible: $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$. Las magnitudes aleatorias de este tipo τ llámanso momento aleatorio de tiempo no dependiente del futuro o momento de Márkov, o bien momento de paro.

La definición formal consiste en lo siguiente.

Definición 1. Se llama tiempo aleatorio (momento de Márkov en el flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$ dado en el espacio probabilístico básico $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ una magnitud aleatoria $\tau = \tau(\omega)$ con valores en T , definida en cierto subconjunto Ω_τ de un espacio de sucesos elementales Ω , tal que para todo $t \in T$ el suceso $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$.

El momento de Márkov se denomina también tiempo aleatorio no dependiente del futuro o momento de paro.

El conjunto Ω_τ corresponde al suceso: τ ha tenido lugar en uno de los momentos de tiempo T . Si en T está contenido el valor máximo t_{\max} , entonces $\Omega_\tau = \{\tau \leq t_{\max}\}$. Si en T no hay valor máximo, entonces $\Omega_\tau = \bigcup_h \{\tau \leq t_h\}$ para la sucesión $t_h \uparrow \sup \{t: t \in T\}$.

Hemos de notar que la condición $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ es equivalente al requisito: $\{\tau > t\} \in \mathfrak{F}_t$, o en el caso cuando T es numerable, $\{\tau = t\} \in \mathfrak{F}_t$ para cualquier $t \in T$.

El momento de Márkov τ define la σ -álgebra de los sucesos observados hasta el momento de tiempo τ .

Definición 2. Una σ -álgebra \mathfrak{F}_τ de todos los sucesos B , para los cuales $B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$, se denomina σ -álgebra generada por el tiempo aleatorio τ .

Propiedades de los momentos de Márkov.

1. Una constante $\tau = t_0 \in T$ es un momento de Márkov.
2. Si K es un conjunto boreliano en el eje real y $\{\sup x: x \in K\} \leq t$, entonces el suceso $\{\tau \in K\}$ es \mathfrak{F}_t -medible.
3. Si una función boreliana real $\theta(t)$ aplica el conjunto T en T y satisface la condición $\theta(t) \geq t$ para todo $t \in T$, entonces $\theta(\tau)$ es un momento de Márkov.
4. Si τ y ρ son momentos de Márkov, entonces $\max(\tau, \rho) = \tau \vee \rho$ y $\min(\tau, \rho) = \tau \wedge \rho$ son ambos momentos de Márkov.
5. Si los momentos de Márkov τ y ρ satisfacen la desigualdad $\tau \leq \rho$ con la probabilidad 1, entonces $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_\rho$.
6. Supongamos que T es un conjunto numerable o finito y sea $\{\xi(t), t \in T\}$ una totalidad de magnitudes aleatorias subordinadas al flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$, mientras que τ es un momento de Márkov con $\Omega_\tau = \Omega$. En este caso, la magnitud aleatoria $\xi(\tau)$ es \mathfrak{F}_τ -medible y está definida para todos los $\omega \in \Omega$.
7. Supongamos que $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ es una submartingala cerrada a la derecha (continua a la derecha, en el caso continuo) y los momentos de Márkov τ y ρ , definidos para todos los $\omega \in \Omega$,

satisfacon la desigualdad $\tau \ll \rho$. En este caso

$$M[\xi(\rho)/\mathfrak{F}_\tau] \geq \xi(\tau). \quad (4.1)$$

Si $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ es una martingala cerrada a la derecha, entonces (4.1) es justa con el signo de igualdad.

8. Supongamos que $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ es una submartingala cerrada a la derecha (continua a la derecha, en el caso continuo) y $\{\tau_s, s \in S\}$ es una familia creciente de los momentos de paro, definidos en Ω ($\tau_{s_1} \leq \tau_{s_2}$ para $s_1 \leq s_2$). En estas condiciones $\{\xi(\tau_s), \mathfrak{F}_{\tau_s}, s \in S\}$ es también una submartingala.

Un proceso aleatorio $\{\xi(\tau_s), \mathfrak{F}_{\tau_s}, s \in S\}$ se denomina transformación del proceso $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ con ayuda de la sustitución aleatoria del tiempo $\{\tau_s, s \in S\}$.

9. Supongamos que $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ es una martingala, τ es un momento de Márkov, $M|\xi_\tau| < \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{\tau > n\}} \xi_n dP = 0$. Entonces

$$M\xi_\tau = M\xi_1.$$

10. Si $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ es una martingala acotada: $|\xi_n| \leq c$ con la probabilidad 1 para todo $n \geq 1$, entonces $M\xi_\tau = M\xi_1$.

11. (Identidad de Wald). Sean $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ una sucesión de magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas con $M|\zeta_n| < \infty$ y τ , un momento de Márkov respecto del flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_n = \sigma\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}, n \geq 1\}$ con $M\tau < \infty$. En este caso

$$M \sum_{h=1}^{\tau} \zeta_h = M\zeta_1 M\tau. \quad (4.2)$$

12. Supongamos que τ es un momento de Márkov respecto del flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ y η es una magnitud aleatoria con esperanza matemática finita. En este caso tiene lugar la fórmula

$$M[\eta/\mathfrak{F}_\tau] = \sum_{n=1}^{\infty} M[\eta/\mathfrak{F}_n] \chi_{\{\tau \geq n\}} + M[\eta/\mathfrak{F}_\infty] \chi_{\{\tau = \infty\}}. \quad (4.3)$$

Aquí, $\mathfrak{F}_\infty = \sigma\{\mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$.

Ha de ser notado que se verifica la desigualdad

$$M[\eta \chi_{\{\tau \geq n\}}/\mathfrak{F}_\tau] = M[\eta \chi_{\{\tau \geq n\}}/\mathfrak{F}_n]. \quad (4.4)$$

13.5. Algunas aplicaciones

Las propiedades de las martingalas y semimartingalas, en particular, la existencia de los límites (véase el p. 13.3) desempeñan un papel importante en la teoría moderna de procesos aleatorios.

1. **Juegos probabilísticos.** Consideremos una sucesión de magnitudes aleatorias $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ en la cual ζ_n puede ser interpretada como una ganancia (positiva o negativa) en la n -ésima repetición del juego (partida). En este caso $\zeta_n = \sum_{h=1}^n \zeta_h$ representa la ganancia sumaria en n partidas. El juego se considera inofensivo, si queda cumplida

la condición: para todo $n \geq 1$

$$M\{\zeta_{n+1}/\zeta_1, \dots, \zeta_n\} = 0.$$

En este caso la sucesión $\{\xi_n, n \geq 1\}$ forma una martingala con $M\xi_n = 0$.

El juego se considera favorable, si está cumplida la condición: para todo $n \geq 0$:

$$M\{\zeta_{n+1}/\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \geq 0.$$

En este caso la sucesión $\{\xi_n, n \geq 1\}$ forma una submartingala.

La imposibilidad del sistema de un juego inofensivo, basado en un momento de Márkov de paro τ , fluye de la propiedad de los momentos de Márkov $M\xi_\tau = 0$. De suerte que mediante la elección de un momento de Márkov de paro resulta imposible aumentar la ganancia media.

2. Fluctuación de Bernoulli en un segmento. Sea $\{\zeta_k, k \geq 1\}$ una sucesión de magnitudes aleatorias de Bernoulli independientes:

$$P(\zeta_k = 1) = p, P(\zeta_k = -1) = q = 1 - p. \text{ Sea } s_n = \sum_{k=1}^n \zeta_k, n \geq 1.$$

En este caso la sucesión de magnitudes aleatorias $\{\xi_n = (q/p)^{s_n}, n \geq 1\}$ forma una martingala, o sea $M\xi_n = 1$. Introduzcamos el momento de la primera salida de una fluctuación de Bernoulli $\{s_n, n \geq 1\}$ del intervalo (a, b) y el momento de paro $\tau = \inf\{n: s_n \notin (a, b)\}$, donde a y b son unos números enteros, $a < 0 < b$.

Sea $P(s_\tau = a) = p_a, P(s_\tau = b) = 1 - p_a$. De la ecuación $M\xi_\tau = 1$ se determina $p_a = [1 - (q/p)^b] / [(q/p)^a - (q/p)^b]$ para $p > q$.

3. Ley de cero y de unidad. Sean $\{\tilde{x}_n, n \geq 1\}$ un flujo de σ -álgebras y $\tilde{\sigma} = \sigma\{\tilde{x}_n, n \geq 1\}$. Si es que $A \in \tilde{\sigma}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} M[\chi_A / \tilde{\sigma}_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A / \tilde{\sigma}_n) = \chi_A$ con la probabilidad 1. En particular, si $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\{\tilde{x}_{n+k}, k \geq 1\}$, entonces $M[\chi_A / \tilde{\sigma}_n] = P(A) = 1$ ó 0, cualquiera que sea n .

4. Convergencia de las series. Supongamos que la sucesión de sumas $\{\sum_{k=1}^n \zeta_k, \tilde{\sigma}_n; n \geq 1\}$ forma una martingala y los sumandos

son uniformemente acotados: $|\zeta_k| \leq c < \infty$. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ converge con la probabilidad 1 hacia una magnitud aleatoria finita cuando y sólo cuando hacia una magnitud aleatoria finita converge con la probabilidad 1 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M\{\zeta_n^2 / \tilde{\sigma}_{n-1}\}$.

En particular, para el caso de sumandos aleatorios independientes $\{\zeta_k, k \geq 1\}$ con $M\zeta_k = 0$, del carácter finito de la suma $\sum_{n=1}^{\infty} M\zeta_k^2$ se desprende la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$.

5. Ley reforzada de los grandes números. Supongamos que la sucesión de sumas $\left\{ \sum_{k=1}^n \xi_k, n \geq 1 \right\}$ forma una martingala. Si

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} M \xi_n^2 < \infty$, entonces, con la probabilidad 1, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

6. Continuidad absoluta de las medidas. Sea $\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P$ un espacio probabilístico y sea $q(A)$ una medida en $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ absolutamente continua respecto de P , con $q(\mathfrak{X}) < \infty$. Supongamos que la σ -álgebra \mathfrak{B} se genera por una sucesión numerable de conjuntos $\mathfrak{B} = \sigma \{B_1, B_2, \dots, B_n, \dots\}$. Entonces, en el espacio medible $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ existe una sucesión completa de particiones: $\{A_{nk}; n \geq 1, k \geq 1\}$ que satisface las condiciones: a) $A_{nk} \in \mathfrak{B}$, $A_{nk} \cap A_{nr} = \emptyset$, cuando $k \neq r$; $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk} = \mathfrak{B}$; b) la $(n+1)$ -ésima partición es la subpartición de la n -ésima partición, es decir, para cualquier $A_{n+1k} \subset \subset A_{nr}$ con cierto $r = r(k)$; c) la σ -álgebra mínima en la que están contenidas todas las A_{nk} , $n \geq 1, k \geq 1$ coincide con \mathfrak{B} .

Hagamos

$$g_n(x) = \frac{q(A_{nk}(x))}{P(A_{nk}(x))}, \quad (5.1)$$

para $P(A_{nk}(x)) > 0$, donde $A_{nk}(x)$ es aquel conjunto de la partición $\{A_{nk}, k \geq 1\}$ que contiene el punto x . Si, en cambio, $P(A_{nk}(x)) = 0$, entonces hacemos $g_n(x) = 0$. En este caso la sucesión $\{g_n, \mathfrak{X}_n, n \geq 1\}$ forma una martingala para $\mathfrak{X} = \sigma \{A_{nk}, k \geq 1\}$. Existe el límite $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \pmod{P}$, no dependiente de la elección de la sucesión completa de particiones $\{A_{nk}; n \geq 1, k \geq 1\}$. Para $B \in \mathfrak{B}$ arbitrario tiene lugar la fórmula

$$q(B) = \int_B g(x) P(dx), \quad B \in \mathfrak{B}. \quad (5.2)$$

7. Medidas estocásticas. Sea $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ una martingala separable en un intervalo del eje numérico real T con $M|\xi(t)|^2 < \infty$. En el semianillo \mathfrak{R} de todos los semiintervalos $\Delta = (s, t] \subset T$ introduzcamos una familia de magnitudes aleatorias de Hilbert

$$\zeta(\Delta) = \xi(t) - \xi(s).$$

De la propiedad de la martingala $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ se deduce que $\{\zeta(\Delta), \Delta \in \mathfrak{R}\}$ es una medida estocástica ortogonal elemental con la función estructural $m(\Delta) = M|\zeta(\Delta)|^2$ que admite prolongación hasta una medida en T .

13.6. Descomposición de las semimartingalas

13.6.1. Tiempo discreto.

Definición 1. Una submartingala no negativa $\{\pi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ se llama potencial, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\pi_n = 0, \quad (6.1)$$

Observemos que para un potencial $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = 0$ con la probabilidad 1.

Teorema 1 (descomposición de Riesz). Si la supermartingala $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ mayor a cierta submartingala $\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$: $\xi_n \geq \zeta_n$ para todo $n \geq 1$, entonces existen una martingala $\{\mu_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ y un potencial $\{\pi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ tales que para cualquier $n \geq 1$ se verifica

$$\xi_n = \mu_n + \pi_n, \quad n \geq 1. \quad (6.2)$$

La descomposición (6.2) es única con la exactitud salvo la equivalencia estocástica.

Sea $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ una supermartingala. Definamos las magnitudes aleatorias μ_n y α_n del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \xi_0, & \alpha_0 &= 0, \\ \mu_1 &= \mu_0 + [\xi_1 - M[\xi_1/\mathfrak{F}_0]], & \alpha_1 &= \xi_0 - M[\xi_1/\mathfrak{F}_0], \\ & \dots & & \dots \\ \mu_n &= \mu_{n-1} + (\xi_n - M[\xi_n/\mathfrak{F}_{n-1}]), & \alpha_n &= \alpha_{n-1} + (\xi_{n-1} - M[\xi_n/\mathfrak{F}_{n-1}]). \end{aligned}$$

El proceso $\{\mu_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ es una martingala, mientras que $\{\alpha_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ es un proceso creciente: $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$, con la particularidad de que α_n es una magnitud aleatoria \mathfrak{F}_{n-1} -medible.

Tiene lugar la siguiente descomposición

$$\xi_n = \mu_n - \alpha_n, \quad n \geq 0.$$

Definición 2. Un proceso aleatorio $\{\alpha_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ se llama creciente, si $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n \pmod{P}$ para todo $n \geq 1$ y $\alpha_0 = 0$ y natural, si α_{n+1} son magnitudes aleatorias \mathfrak{F}_n -medibles ($n \geq 1$).

Teorema 2 (descomposición de Doob). Toda submartingala $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ admite una única descomposición (con la exactitud salvo la equivalencia estocástica)

$$\xi_n = \mu_n + \alpha_n, \quad n \geq 0, \quad (6.3)$$

en la cual $\{\mu_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ es una martingala; $\{\alpha_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$, un proceso natural creciente.

En particular, el potencial $\{\pi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ puede ser representado en la forma

$$\pi_n = M[\alpha_\infty/\mathfrak{F}_n] - \alpha_n, \quad (6.4)$$

donde $\{\alpha_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ es un proceso natural creciente.

13.6.2. Tiempo continuo.

Definición 3. Un proceso aleatorio continuo a la derecha $\{\alpha(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ se denomina creciente, si $\alpha(0) = 0$ y $\alpha(s) \leq \alpha(t)$, cuando $s \leq t \pmod{P}$ y natural, si para toda martingala acotada y no negativa con la probabilidad 1 $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ con límites a la izquierda se verifica la correlación

$$M \int_0^\infty \xi(t-0) d\alpha(t) = M \bar{\xi} \bar{\alpha}. \quad (6.5)$$

Aquí,

$$\bar{\xi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t), \quad \bar{\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t).$$

Un proceso creciente se llama integrable, si $\sup M\alpha(t) < \infty$.

Un proceso creciente integrable $\{\alpha(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ es natural cuando y sólo cuando, para toda martingala $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$, acotada, continua a la derecha y que tiene límites a la izquierda,

$$M \int_0^T \xi(t) d\alpha(t) = M \int_0^T \xi(t-0) d\alpha(t) \quad (6.6)$$

para cualquier $T > 0$.

Teorema 3 (descomposición de Doob—Meyer). Sea $\{\pi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ tal potencial continuo a la derecha que la familia de magnitudes aleatorias $\{\pi(\tau), \tau \in \mathfrak{Z}\}$, donde \mathfrak{Z} es una totalidad de momentos de Márkov τ con $P\{\tau < \infty\} = 1$, es uniformemente integrable. Entonces, existe tal proceso $\{\alpha(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$, natural creciente e integrable, que

$$\pi(t) = M[\bar{\alpha}; \mathfrak{F}_t] - \alpha(t), \quad t \geq 0 \pmod{P}, \quad (6.7)$$

donde $\bar{\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)$. La descomposición (6.7) es única con la exactitud salvo la equivalencia estocástica.

Corolario. Sea $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ una supermartingala continua a la derecha, para la cual la familia de magnitudes aleatorias $\{\xi(\tau), \tau \in \mathfrak{Z}\}$ es uniformemente integrable. En este caso existen una martingala continua a la derecha y uniformemente integrable $\{\mu(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ y un proceso natural creciente e integrable $\{\alpha(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ tales que

$$\xi(t) = \mu(t) - \alpha(t), \quad t \geq 0 \pmod{P}. \quad (6.8)$$

La descomposición (6.8) es única con la exactitud salvo la equivalencia estocástica.

Observación. La descomposición de Doob—Meyer (6.7) y (6.8) es válida también en el caso en que en lugar de una totalidad de momentos de Márkov finitos $\mathfrak{Z} = \{\tau: P(\tau < \infty) = 1\}$ se utiliza la totalidad de momentos de Márkov acotados $\mathfrak{Z}_a = \{\tau: P(\tau \leq a) = 1\}$. Sólo en este caso $M\bar{\alpha} < \infty$.

Definición 4. Un proceso aleatorio $\{\mu(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ se llama martingala local, si existe una sucesión creciente de momentos de Márkov $\{\tau_n, n \geq 1\}$ respecto del flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ tal que: a) $P(\tau_n \leq n) = 1$, $P(\lim \tau_n = \infty) = 1$; b) para todo $n \geq 1$ $\{\mu(t \wedge \tau_n), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ es una martingala uniformemente integrable.

Señalemos que toda martingala con trayectorias continuas a la derecha es local.

Teorema 4. Sea $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ una supermartingala continua a la derecha y no negativa. Existen una martingala local continua a la derecha $\{\mu(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ y un proceso natural creciente e integrable $\{\alpha(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ tales que

$$\xi(t) = \mu(t) - \alpha(t), \quad t \geq 0 \pmod{P}. \quad (6.9)$$

La descomposición (6.9) es única con la exactitud salvo la equivalencia estocástica.

13.7. Martingalas integrables de modo cuadrático

Definición 1. Una martingala continua a la derecha $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ se llama **integrable de modo cuadrático**, si

$$\sup_{t \in T} M_{\mathfrak{F}_t}^2(t) < \infty. \quad (7.1)$$

La descomposición de Doob—Meyer para la martingala integrable de modo cuadrático $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ tiene la forma

$$\xi^2(t) = \mu(t) + \langle \xi \rangle_t, \quad t \geq 0, \quad (7.2)$$

donde $\{\mu(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ es una martingala, $\alpha(t) = \langle \xi \rangle_t$ es un proceso natural creciente correspondiente a $\xi(t)$. El proceso $\langle \xi \rangle_t$ se denomina **característica** de la martingala integrable de modo cuadrático $\xi(t)$. En este caso, para $s \leq t$

$$M[(\xi(t) - \xi(s))^2 / \mathfrak{F}_s] = M[(\langle \xi \rangle_t - \langle \xi \rangle_s) / \mathfrak{F}_t]. \quad (7.3)$$

Para dos martingalas integrables de modo cuadrático: $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ y $\{\eta(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ la característica recíproca $\langle \xi \eta \rangle_t$ se determina mediante la correlación

$$\langle \xi \eta \rangle_t = \frac{1}{2} [\langle \xi + \eta \rangle_t - \langle \xi \rangle_t - \langle \eta \rangle_t]. \quad (7.4)$$

La utilidad de la introducción de la característica recíproca de dos martingalas está asociada con el hecho de que el proceso $\xi(t)\eta(t) - \langle \xi \eta \rangle_t$ es una martingala.

Definición 2. Dos martingalas integrables en cuadrado $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ y $\{\eta(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ se llaman **ortogonales**, si el proceso $\xi(t)\eta(t) - \langle \xi \eta \rangle_t$ es una martingala.

Si $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ y $\{\eta(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ son martingalas ortogonales integrables en cuadrado, entonces su característica recíproca es $\langle \xi \eta \rangle_t = 0 \pmod{P}$.

Unas martingalas integrables de modo cuadrático $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ y $\{\eta(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ son ortogonales cuando y sólo cuando queda cumplida la correlación

$$\langle \xi + \eta \rangle_t = \langle \xi \rangle_t + \langle \eta \rangle_t \pmod{P}.$$

EJEMPLO 1. El proceso de Wiener $\{W_t, \mathfrak{F}_t^W, 0 \leq t \leq T\}$ con $\mathfrak{F}_t^W = \sigma\{W_s, s \leq t\}$ es una martingala integrable en cuadrado con $\langle W \rangle_t = t$.

EJEMPLO 2. Supongamos que $a(t, \omega)$ es \mathfrak{F}_t^W -medible para todo t y $M \int_0^T a^2(t, \omega) dt < \infty$. Entonces, el proceso $\left\{ \int_0^t a(s, \omega) dW_s, \mathfrak{F}_t^W, 0 \leq t \leq T \right\}$ es una martingala integrable de modo cuadrático con

$$\left\langle \int_0^t a(s, \omega) dW_s \right\rangle_t = \int_0^t a^2(s, \omega) ds.$$

Teorema. Supongamos que $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ es una martingala integrable de modo cuadrático y $\{W_t, \mathfrak{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$, un proceso de Wiener. En este caso existen un proceso \mathfrak{F}_t -medible para todo t a (t, ω)

con $M \int_0^T a^2(t, \omega) dt < \infty$ y una martingala integrable de modo cuadrático $\{\zeta(t), \mathfrak{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ tales que

$$\xi(t) = \int_0^t a(s, \omega) dW_s + \zeta(t), \quad 0 \leq t \leq T \pmod{P}, \quad (7.5)$$

y

$$(\xi W)_t = \int_0^t a(s, \omega) ds, \quad 0 \leq t \leq T \pmod{P}, \quad (7.6)$$

siendo, con ello, ortogonales las martingalas $\left\{ \int_0^t a(s, \omega) dW_s, \mathfrak{F}_t, 0 \leq t \leq T \right\}$ y $\{\zeta(t), \mathfrak{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$.

PROCESOS DE MÁRKOV

14.1. Funciones aleatorias de Márkov

14.1.1. Propiedad de Márkov. En la base del concepto de proceso markoviano radica la idea de ciertos sistemas estocásticos que evolucionan en tiempo y poseen la propiedad de «ausencia del efecto posterior» («ausencia de memorias»). Los procesos de este género con tiempo discreto, llamados cadenas de Márkov, se han considerado en el capítulo 8. En el presente capítulo se consideran los procesos de Márkov con tiempo continuo. Supondremos que el tiempo varía dentro de cierto segmento (intervalo, semiintervalo) \mathcal{T} que está contenido en el conjunto de todos los números reales no negativos. En particular, es posible que $\mathcal{T} = [0, \infty)$.

Supongamos que se dan:

a) cierto espacio probabilístico $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$;
 b) un flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$, es decir, una familia de σ -álgebras \mathfrak{F}_t , $t \in \mathcal{T}$, tal que $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_s$ y $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$ para $s \leq t$, $s, t \in \mathcal{T}$;

c) una función de dos variables $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $t \in \mathcal{T}$, $\omega \in \Omega$ con valores en cierto espacio medible (X, \mathfrak{B}) tal que $\xi(t)$, con cada $t \in \mathcal{T}$, es la aplicación medible del espacio (Ω, \mathfrak{F}_t) en (X, \mathfrak{B}) .

De este modo queda definido el proceso aleatorio $\xi(t)$ subordinado al flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$. En particular, la σ -álgebra \mathfrak{F}_t puede coincidir con la σ -álgebra mínima de sucesos generada por todos los sucesos del tipo $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma\}$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, $s \in \mathcal{T}$, $s \leq t$. No obstante, en el caso general, es una σ -álgebra más amplia.

Definición 1. Decen que un proceso aleatorio $\xi(t)$, subordinado al flujo de σ -álgebras \mathfrak{F}_t , posee la propiedad de Márkov respecto de este flujo, si para cualesquiera $s \leq t$ ($s, t \in \mathcal{T}$), $\Gamma \in \mathfrak{B}$, se cumple con la probabilidad 1 la correlación

$$P\{\xi(t) \in \Gamma | \mathfrak{F}_s\} = P\{\xi(t) \in \Gamma | \xi(s)\}.$$

Tal proceso lo llamaremos **función aleatoria de Márkov**. El término «proceso de Márkov» lo reservaremos para otro concepto, más cómodo (desde el punto de vista del estudio de la propiedad de Márkov) y relacionado con toda una familia de funciones aleatorias de Márkov (véase también el cap. 8).

Al interpretar $\xi(t)$ como un estado (una posición) de cierto sistema (partícula) en el momento de tiempo t , la propiedad de Márkov significa que tal sistema posee la propiedad de ausencia del efecto posterior: en la pronosticación (en la media) del comportamiento del sistema en los momentos «futuros» de tiempo según las observaciones

del sistema en todos los momentos «pasados» de tiempo hasta el momento «presente» inclusive, lo esencial es conocer la posición del sistema en consideración sólo en el momento «presente» de tiempo.

Sea $\{\xi(t), t \in \mathcal{T}\}$ un proceso aleatorio con los valores en cierto espacio medible (X, \mathfrak{B}) , subordinado al flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$. Designaremos mediante \mathfrak{N}_t la σ -álgebra mínima de sucesos generada por los sucesos del tipo $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma\}, s \leq t (s, t \in \mathcal{T}), \Gamma \in \mathfrak{B}$, y mediante \mathfrak{N}_t^+ la σ -álgebra mínima de sucesos que contiene todos los sucesos del tipo $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma\}, s \geq t (s, t \in \mathcal{T}), \Gamma \in \mathfrak{B}$. Observemos que $\mathfrak{N}_t \subset \mathfrak{N}_t^+$ y, si $\xi(t)$ posee la propiedad de Márkov respecto del flujo $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$, entonces $\xi(t)$ posee la misma propiedad respecto del flujo $\{\mathfrak{N}_t, t \in \mathcal{T}\}$.

La propiedad de Márkov del proceso $\{\xi(t), t \in \mathcal{T}\}$ respecto del flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ es equivalente a cualquiera de las siguientes afirmaciones:

1) para toda función acotada \mathfrak{B} -medible $f(x), x \in X$, y cualesquiera $s \leq t (s, t \in \mathcal{T})$

$M\{f(\xi(t))/\mathfrak{N}_s\} = M\{f(\xi(t))/\xi(s)\}$ casi por cierto respecto a \mathbf{P} ;

2) para toda magnitud aleatoria acotada y \mathfrak{N}^t -medible η y cualesquiera $s \leq t (s, t \in \mathcal{T})$

$$M\{\eta/\mathfrak{N}_t\} = M\{\eta/\xi(s)\} \text{ casi por cierto respecto a } \mathbf{P}_t$$

3) para cualesquiera sucesos $A \in \mathfrak{N}^t$ y $B \in \mathfrak{N}_t^+$

$$\mathbf{P}\{A \cap B/\xi(t)\} = \mathbf{P}\{A/\xi(t)\} \mathbf{P}\{B/\xi(t)\} \text{ casi por cierto respecto a } \mathbf{P}.$$

La última propiedad significa que para un proceso que posee la propiedad de Márkov los sucesos del «futuro» y del «pasado», para el «presente» fijado, son condicionalmente independientes.

14.1.2. Probabilidad de paso. Sea $\{\xi(t), t \in \mathcal{T}\}$ una función aleatoria de Márkov con sus valores en (X, \mathfrak{B}) respecto del flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$. Como corolario de la propiedad de Márkov y de la fórmula de probabilidad total interviene la siguiente correlación

$$\mathbf{P}\{\xi(t_2) \in \Gamma/\xi(t_1)\} = M\{\mathbf{P}\{\xi(t_2) \in \Gamma/\xi(t_2)\}/\xi(t_1)\},$$

válida casi por cierto respecto a la medida \mathbf{P} para cualesquiera $\Gamma \in \mathfrak{B}$ y $t_1 \leq t_2 \leq t_3 (t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T})$. Esta correlación lleva el nombre de ecuación de Chapman—Kolmogórov.

Es de particular interés el caso en que para la probabilidad condicional $\mathbf{P}\{\xi(t) \in \Gamma/\xi(s)\}$ existe una probabilidad condicional regular, es decir, tal función $P(s, x, t, \Gamma), x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}, s < t (s, t \in \mathcal{T})$ que quedan cumplidas las condiciones:

a) para s, x, t fijados la función $P(s, x, t, \Gamma)$ es una medida probabilística en (X, \mathfrak{B}) ;

b) para s, t, Γ fijados la función $P(s, x, t, \Gamma)$ es \mathfrak{B} -medible;

c) con la probabilidad 1 para cualesquiera s, t, Γ se tiene

$$P(s, \xi(s), t, \Gamma) = \mathbf{P}\{\xi(t) \in \Gamma/\xi(s)\}.$$

Si, para una función aleatoria de Márkov dada, existe la función $P(s, x, t, \Gamma)$ que satisface las condiciones a)—c), ésta se denomina **probabilidad de paso**. Para suposiciones bastante amplias (por ejemplo, si X es un espacio separable métrico completo y \mathfrak{B} es una σ -álgebra de subconjuntos borelianos X) la existencia de la función $P(s, x, t, \Gamma)$ con las propiedades mencionadas se garantiza.

En términos de la probabilidad de paso, la ecuación de Chapman—Kolmogórov se escribirá en la forma

$$P(t_1, \xi(t_1), t_2, \Gamma) = \int_X P(t_2, y, t_2, \Gamma) P(t_1, \xi(t_1), t_2, dy)$$

casi por cierto respecto a P ,

donde $t_1 < t_2 < t_3$, $(t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T})$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$. Siempre supondremos cumplida una correlación más fuerte para la probabilidad de paso que también se llama ecuación de Chapman—Kolmogórov. "A saber, supondremos que para cualesquiera $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ y $t_1 < t_2 < t_3$, $(t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T})$

$$P(t_1, x, t_2, \Gamma) = \int_X P(t_2, y, t_2, \Gamma) P(t_1, x, t_2, dy).$$

14.1.3. Equivalencia estocástica. Las distribuciones de dimensiones finitas de una función aleatoria de Márkov no se definen solamente por la probabilidad de paso. Si en \mathcal{T} existe un elemento mínimo t_0 , entonces, conociendo la distribución inicial

$$\mu(\Gamma) = P(\xi(t_0) \in \Gamma), \Gamma \in \mathfrak{B},$$

y la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$ de la función aleatoria de Márkov, podemos determinar todas sus distribuciones de dimensiones finitas. En efecto, para $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$ tenemos

$$\begin{aligned} P(\xi(t_0) \in \Gamma_0, \xi(t_1) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n) = \\ = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(t_0, x_0, t_1, dx_1) \dots \int_{\Gamma_n} P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n), \end{aligned}$$

Así, pues, si para dos funciones aleatorias de Márkov, definidas, quizás, en diferentes espacios probabilísticos, las distribuciones iniciales y las probabilidades de paso coinciden, entonces coinciden también las distribuciones de dimensiones finitas de estas funciones. Esto significa que dichas dos funciones aleatorias de Márkov son equivalentes.

Si en \mathcal{T} existe un elemento mínimo t_0 y si están definidas la medida probabilística en (X, \mathfrak{B}) y la función $P(s, x, t, \Gamma)$, $t_0 \leq s < t$, $s, t \in \mathcal{T}$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, que satisface las condiciones a), b) del p. 14.1.2 y la ecuación de Chapman—Kolmogórov (véase la última correlación en el p. 14.1.2.), entonces en cierto espacio probabilístico siempre podemos construir una función aleatoria de Márkov, para la cual la medida μ sería la distribución inicial y la función $P(s, x, t, \Gamma)$, la probabilidad de paso.

Supongamos ahora que en \mathcal{T} no hay ningún elemento mínimo. Si $\{\xi(t), t \in \mathcal{T}\}$ es una función aleatoria de Márkov, hagamos

$$\mu_t(\Gamma) = P(\xi(t) \in \Gamma), t \in \mathcal{T}, \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

Para todo $t \in \mathcal{T}$, μ_t será una medida probabilística en (X, \mathfrak{B}) , llamada ley de entrada de la función aleatoria de Márkov en consideración. La ley de entrada está relacionada con la probabilidad de paso me-

diante la siguiente correlación:

$$\mu_t(\Gamma) = \int_X \mu_s(dx) P(s, x, t, \Gamma), \quad s < t (s, t \in \mathcal{T}), \quad \Gamma \in \mathfrak{B}. \quad (1.1)$$

Conociendo la ley de entrada y la probabilidad de paso de la función aleatoria de Márkov, se puede determinar todas sus distribuciones de dimensiones finitas

$$\begin{aligned} P(\xi(t_1) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n) &= \\ &= \int_{\Gamma_1} \mu_{t_1}(dx_1) \int_{\Gamma_2} P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \dots \int_{\Gamma_n} P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n), \end{aligned}$$

donde $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ($t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$), $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$.

De este modo, una función aleatoria de Márkov en el caso dado se define por medio de sus ley de entrada y probabilidad de paso únicamente con la exactitud salvo la equivalencia estocástica.

Y, viceversa, si están dadas una familia de medidas probabilísticas $\mu_t(\Gamma)$, $t \in \mathcal{T}$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ y una función $P(s, x, t, \Gamma)$, $s < t$ ($s, t \in \mathcal{T}$), $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, satisficente las condiciones a), b) del p. 14.1.2. y la ecuación de Chapman—Kolmogórov, tales que la correlación (1.1) queda cumplida, entonces en cierto espacio probabilístico existe una función aleatoria de Márkov, para la cual la ley de entrada coincide con μ_t , y la probabilidad de paso, con $P(s, x, t, \Gamma)$.

14.1.4. Funciones aleatorias de Márkov interrumpidas. En la práctica nos encontramos a veces con sistemas, para cuya descripción resulta insuficiente la definición de función aleatoria de Márkov citada arriba.

Supongamos, por ejemplo, que $\xi(t)$ significa el número de individuos en cierta población biológica en el momento de tiempo t . En este caso $\xi(t)$ es un proceso aleatorio y todos los números naturales constituyen su espacio fásico. Puede resultar que la intensidad de reproducción en dicha población es tan considerable que, transcurrido cierto tiempo finito (aleatorio, en el caso general), el número de individuos en la población en consideración se hace infinitamente grande. Así pues, aquí tropezamos con una situación en la cual el proceso $\xi(t)$ se define sólo en cierto intervalo aleatorio de tiempo al expirar el cual se produce la desaparición del proceso del espacio fásico (interrupción, explosión, destrucción). La definición de una función aleatoria de Márkov que viene abajo, toma en consideración tal posibilidad.

Convengamos en considerar que $\mathcal{T} = [t_0, \infty)$. Sean:

a) un espacio probabilístico $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$;

b) una magnitud aleatoria $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, que toma los valores en el intervalo ampliado $[t_0, \infty)$;

c) para todo $t \in \mathcal{T}$ la σ -álgebra \mathfrak{N}_t de subconjuntos del conjunto $\Omega_t = \{\omega: \xi(\omega) > t\}$, con la particularidad de que $\mathfrak{N}_s[\Omega_t] \subset \mathfrak{N}_t \subset \mathfrak{N}$ para $s < t$ ($s, t \in \mathcal{T}$), donde $\mathfrak{N}_s[\Omega_t]$ es la traza de la σ -álgebra \mathfrak{N}_s en el conjunto Ω_t , se decir, una totalidad de todos los conjuntos del tipo $A \cap \Omega_t$, $A \in \mathfrak{N}_s$;

d) una función de dos variables $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, \xi(\omega))$ con sus valores en cierto espacio medible (X, \mathfrak{B}) tal que

para cualesquiera $t \in \mathcal{T}$ y $\Gamma \in \mathfrak{B}$ queda cumplida la inclusión $\{\omega: \xi(t, \omega) \in \Gamma\} \in \mathfrak{F}_t$.

Definición 2. El sistema de objetos a)—d) determina una función aleatoria de Márkov interrumpida, si para cualesquiera $s \ll t$ ($s, t \in \mathcal{T}$), $\Gamma \in \mathfrak{B}$, se cumple la correlación

$$P \{ \xi(t) \in \Gamma | \mathfrak{F}_s \} = P \{ \xi(t) \in \Gamma | \xi(s) \}$$

casi por cierto respecto de la medida P en el conjunto Ω_s . (En otras palabras, esta correlación se cumple para casi todos los $\omega \in \Omega_s$ respecto de la medida P).

El momento de tiempo $\zeta(\omega)$ se llama **momento de interrupción** de la función aleatoria de Márkov, en tanto que la magnitud $\zeta(\omega) - t_0$, su tiempo de vida.

El segundo miembro de la igualdad en la definición 2 es la probabilidad condicional respecto de la σ -álgebra de subconjuntos del conjunto Ω_s generada por los conjuntos del tipo $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma\}$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$.

Supongamos que para $P \{ \xi(t) \in \Gamma | \xi(s) \}$ existe una probabilidad condicional regular, es decir, una función $P(s, x, t, \Gamma)$, $x \in X$, $s \ll t$ ($s, t \in \mathcal{T}$), $\Gamma \in \mathfrak{B}$, que satisface las condiciones:

- 1) para s, t, Γ fijados la función $P(s, x, t, \Gamma)$ es una función \mathfrak{B} -medible de x ;
- 2) para s, x, t fijados $P(s, x, t, \Gamma)$ es una medida en (X, \mathfrak{B}) (no forzosamente probabilística, puesto que $P(s, x, t, X) \leq 1$);
- 3) para cualesquiera $s \ll t$ ($s, t \in \mathcal{T}$) $\Gamma \in \mathfrak{B}$ se tiene

$$P \{ (t) \in \Gamma | \xi(s) \} = P(s, \xi(s), t, \Gamma)$$

casi por cierto respecto de P en el conjunto Ω_s (c.p.c. Ω_s, P).

En este caso la función $P(s, x, t, \Gamma)$ se llama **probabilidad de paso** de la función aleatoria de Márkov. Se interpreta como una probabilidad condicional del suceso $\{ \xi(t) \in \Gamma \}$ a condición de que $\xi(s) = x$. En particular, la magnitud $1 - P(s, x, t, X)$ es la probabilidad condicional de que para el momento de tiempo t la función aleatoria de Márkov ya se ha interrumpido (ha desaparecido del espacio fásico) a condición de que $\xi(s) = x$.

Observemos que si $\zeta(\omega) = +\infty$, la definición 2 se transforma en una definición para la función aleatoria de Márkov ininterrumpida definida en $\mathcal{T} = [t_0, \infty)$ (véase la definición 1).

Una función aleatoria de Márkov interrumpida siempre puede ser transformada en una función ininterrumpida. Con este fin extendemos el espacio X , añadiéndole cierto punto «impropios» a X : Hagamos $X^{(a)} = X \cup \{a\}$. Designaremos mediante \mathfrak{B} la σ -álgebra de subconjuntos del conjunto $X^{(a)}$, compuesta por los conjuntos $\Gamma \in \mathfrak{B}$ y los del tipo $\Gamma \cup \{a\}$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$.

Ahora, para $\omega \in \{ \zeta(\omega) < +\infty \}$ hagamos $\xi^{(a)}(t, \omega) = a$, cuando $t \geq \zeta$. Para $t \in [t_0, \zeta(\omega))$ hagamos $\xi^{(a)}(t, \omega) = \xi(t, \omega)$. Por fin, definamos la σ -álgebra $\mathfrak{F}_t^{(a)}$, $t_0 \leq t < \infty$, como una σ -álgebra mínima de los subconjuntos Ω en la que están contenidas todas las σ -álgebras \mathfrak{F}_s cuando $s \ll t$. En este caso las σ -álgebras $\mathfrak{F}_t^{(a)}$, $t \in \mathcal{T}$, forman un flujo y el proceso $\{ \xi^{(a)}(t), t \in \mathcal{T} \}$ está subordinado a este flujo. Es fácil de comprobar que $\{ \xi^{(a)}(t), t \in \mathcal{T} \}$ es una función aleatoria de Márkov respecto del flujo $\{ \mathfrak{F}_t^{(a)}, t \in \mathcal{T} \}$ en el sentido de la defini-

ción 1 (es decir, no interrumpida). La probabilidad de paso $\hat{P}(s, x, t, \Gamma)$ de esta función aleatoria es

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = & \\ = & \begin{cases} P(s, x, t, \Gamma \cap X) + \chi_{\Gamma}(a) [1 - P(s, x, t, X)] & \text{para } x \neq a; \\ \chi_{\Gamma}(a) & \text{para } x = a, \end{cases} \end{aligned}$$

donde $P(s, x, t, \Gamma)$ es la probabilidad de paso de la función aleatoria inicial (interrumpida). Para el proceso $\{\xi^{(a)}(t), t \in \mathcal{T}\}$ el estado a es absorbente. Esto significa que al alcanzar este estado, el proceso nunca saldrá de él. Por supuesto, éste no es el único procedimiento que tiene por objeto convertir una función aleatoria de Márkov interrumpida en una función ininterrumpida.

14.2. Procesos de Márkov. Definición y propiedades fundamentales

14.2.1. Definición. Como ya se ha indicado en el cap. 2, al estudiar la propiedad de Márkov de los procesos aleatorios resulta cómodo no fijar la distribución inicial del proceso (como también el momento inicial de tiempo), sino que considerar toda una familia de funciones aleatorias de Márkov que tienen comienzo en un momento de tiempo arbitrario en un punto arbitrario del espacio fásico. Desde el punto de vista de la teoría de probabilidades esto significa que en el espacio probabilístico ya se tiene no una sola medida probabilística fijada, sino una familia de las medidas P_{sx} que dependen de la variable de tiempo y la fásica y están entrelazadas por medio de la propiedad de Márkov. En este caso P_{sx} se interpreta como la probabilidad condicional de cierto suceso que puede efectuarse después del momento de tiempo s , a condición de que $\xi(s) = x$. Tal objeto ya se determina unívocamente (con la exactitud salvo la equivalencia estocástica) mediante la probabilidad de paso y, por consiguiente, es más cómodo en el estudio de la propiedad de Márkov que la noción de función aleatoria de Márkov. Pusemos a las definiciones precisas. Supondremos que $\mathcal{T} = [0, \infty)$ y al principio definiremos el proceso de Márkov ininterrumpido.

Supongamos que tenemos:

a) un espacio medible (Ω, \mathfrak{A}) , llamado espacio de sucesos elementales;

b) una familia de σ -álgebras \mathfrak{F}_t^s , $0 \leq s \leq t \leq \infty$, tal que $\mathfrak{F}_t^s \subset \mathfrak{F}_{t_1}^{s_1} \subset \mathfrak{A}$ para $0 \leq s_1 \leq s \leq t \leq t_1 \leq \infty$; convengamos en escribir \mathfrak{F}_t en lugar de \mathfrak{F}_t^0 y \mathfrak{F}_∞ en lugar de \mathfrak{F}_∞^s ;

c) una función de dos variables $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $t \in \mathcal{T}$, $\omega \in \Omega$, con valores en cierto espacio medible (X, \mathfrak{B}) tal que para cualesquiera $0 \leq s \leq t$ la aplicación $\xi(t, \cdot)$ del espacio (Ω, \mathfrak{F}_t) en el espacio (X, \mathfrak{B}) es medible; se supone que en la σ -álgebra \mathfrak{B} están contenidos todos los conjuntos de un solo punto;

d) una familia de medidas probabilísticas $\{P_{sx}, s \in \mathcal{T}, x \in X\}$ en la σ -álgebra \mathfrak{F}_∞ .

Definición 1. Un sistema de objetos a)—d) se llamará proceso de Márkov (ininterrumpido), si están cumplidas las condiciones:

1) para cualesquiera $0 \leq s \leq t$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, la función

$$P(s, x, t, \Gamma) = P_{sx}(\xi(t) \in \Gamma)$$

es una función de x \mathfrak{B} -medible, con la particularidad de que $P(s, x, s, \Gamma) = \chi_{\Gamma}(x)$, donde $\chi_{\Gamma}(x)$ es el indicador del conjunto Γ ;

2) para cualesquiera $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, con la P_{sx} -probabilidad 1, se cumple la correlación

$$P_{sx}(\xi(t_2) \in \Gamma / \mathfrak{F}_{t_1}^s) = P(t_1, \xi(t_1), t_2, \Gamma).$$

El proceso de Márkov se denota $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$. El espacio (X, \mathfrak{B}) se denomina espacio físico del proceso, la función $P(s, x, t, \Gamma)$ es la probabilidad de paso. Observemos que $P(s, x, t, X) = 1$ y, según se deduce de la condición 2),

$$P(s, x, t_2, \Gamma) = \int_X P(s, x, t_1, dy) P(t_1, y, t_2, \Gamma)$$

para cualesquiera $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, es decir, la probabilidad de paso satisface la ecuación de Chapman—Kolmogórov.

Sea $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$ un proceso de Márkov en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) . Designemos mediante \mathfrak{M}_t^s la σ -álgebra mínima de sucesos en la que están contenidos todos los sucesos del tipo $\{\xi(u) \in \Gamma\}$ para $u \in [s, t]$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, y mediante \mathfrak{N}^s , la σ -álgebra mínima de sucesos que contiene todas las σ -álgebras \mathfrak{M}_t^s para $t \geq s$; como siempre, en lugar de \mathfrak{M}_t^s escribiremos \mathfrak{M}_t . Es evidente que $\mathfrak{M}_t^s \subseteq \mathfrak{F}_t^s$, $\mathfrak{N}^s \subseteq \mathfrak{F}^s$ y el proceso $(\xi(t), \mathfrak{M}_t^s, P_{sx})$ es también de Márkov.

Las siguientes propiedades del proceso de Márkov constituyen sencillos corolarios de la definición 1:

1) para todo $A \in \mathfrak{N}^s$ la función $P_{sx}(A)$ es \mathfrak{B} -medible como función de x ;

2) para toda magnitud aleatoria η , acotada (no negativa) y \mathfrak{N}^s -medible, la función $M_{sx}\eta$ es \mathfrak{B} -medible como función de x ;

3) para todo $A \in \mathfrak{N}^t$ con la P_{sx} -probabilidad 1 se verifica

$$P_{sx}(A / \mathfrak{F}_t^s) = P_{\xi(t)}(A), \quad s \leq t;$$

4) para toda magnitud aleatoria acotada \mathfrak{N}^t -medible η con la P_{sx} -probabilidad 1 se verifica

$$M_{sx}(\eta / \mathfrak{F}_t^s) = M_{\xi(t)}\eta, \quad s \leq t;$$

5) Si $A \in \mathfrak{F}_t^s$, $B \in \mathfrak{N}^t$, entonces

$$P_{sx}(A \cap B) = \int_A P_{\xi(t)}(B) P_{sx}(d\omega), \quad s \leq t.$$

14.2.2. Dilatación de las σ -álgebras fundamentales. Sea $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$ un proceso de Márkov en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) . Resulta que es posible (y con frecuencia suele ser útil) cierta dilatación de las σ -álgebras fundamentales que figuran en la definición de un proceso quedando válidas las propiedades de Márkov. Tal dilatación

es conveniente a causa de que las σ -álgebras \mathfrak{R}_t^s , \mathfrak{R}^s están privadas de varios sucesos, importantes desde el punto de vista de la teoría de probabilidades. La dilatación mencionada consiste en la operación de completar las σ -álgebras según los sistemas de medidas.

Sea μ una medida finita en (X, \mathfrak{B}) . Designemos mediante \mathfrak{B}_μ la completación de la σ -álgebra \mathfrak{B} según la medida μ . Esto significa que $A \in \mathfrak{B}_\mu$, si existen los conjuntos $A_1, A_2 \in \mathfrak{B}$ tales que $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ y $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. Denotemos con \mathfrak{B}^* una σ -álgebra que es la intersección de las σ -álgebras \mathfrak{B}_μ según todas las medidas finitas μ prefijadas en \mathfrak{B} . Los conjuntos de \mathfrak{B}^* se llaman conjuntos medibles universales generados por la σ -álgebra \mathfrak{B} . Luego, completamos las σ -álgebras \mathfrak{B}^s según la familia de medidas $\{P_{ux}, u \leq s, x \in X\}$ y designemos esta completación por $\overline{\mathfrak{B}}^s$. Esto significa que $A \in \overline{\mathfrak{B}}^s$, si para cualesquiera $u \leq s, x \in X$, existen los conjuntos $A_1, A_2 \in \mathfrak{B}^s$ tales que $P_{ux}(A_1) = P_{ux}(A_2)$ y $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$. Supongamos que $\overline{\mathfrak{B}}_t^s$ simboliza una σ -álgebra en la cual están contenidos todos los sucesos $A \in \overline{\mathfrak{B}}^s$ tales que para cualesquiera $u \leq s, x \in X$ existe un suceso $A_1 \in \overline{\mathfrak{B}}_t^s$, para el cual $P_{ux}(A \Delta A_1) = 0$, donde $A \Delta A_1$ designa la diferencia simétrica de los conjuntos A y A_1 . Por analogía, sea $\overline{\mathfrak{B}}^s$ una completación de la σ -álgebra \mathfrak{R}^s según la familia de medidas $P_{u\mu}$, donde $u \leq s$ y μ es una medida probabilística arbitraria en (X, \mathfrak{B}) , mientras que $P_{u\mu}$ se determina por la fórmula

$$P_{u\mu}(A) = \int \mu(dx) P_{ux}(A), \quad A \in \mathfrak{R}^s.$$

Por fin, designemos mediante $\overline{\mathfrak{R}}_t^s$ la σ -álgebra de los sucesos $A \in \overline{\mathfrak{R}}^s$ tales que para cualesquiera $u \leq s$ y la medida probabilística μ en (X, \mathfrak{B}) existe un suceso $A_1 \in \overline{\mathfrak{R}}_t^s$, para el cual $P_{u\mu}(A \Delta A_1) = 0$.

Se puede demostrar que para toda función aleatoria acotada $\overline{\mathfrak{R}}^s$ -medible η la función $M_{sx}\eta$ es \mathfrak{B}^* -medible como función de x y que la aplicación $\xi(t, \cdot)$ del espacio $(\Omega, \overline{\mathfrak{B}}_t^s)$ (y, consecuentemente, del espacio $(\Omega, \overline{\mathfrak{B}}_t^s)$, dado que $\overline{\mathfrak{R}}_t^s \subset \overline{\mathfrak{B}}_t^s$) en el espacio (X, \mathfrak{B}^*) es medible para $s \leq t$ cualesquiera. Además, para cualesquiera $s \leq t$ y $A \in \overline{\mathfrak{R}}_t^s$ con la P_{sx} -probabilidad 1 queda cumplida la correlación

$$P_{sx}(A/\overline{\mathfrak{B}}_t^s) = P_{\xi(t)}(A).$$

Así pues, el proceso $(\xi(t), \overline{\mathfrak{B}}_t^s, P_{sx})$ es de Márkov en el espacio físico (X, \mathfrak{B}^*) . Por eso, siempre, cuando sea cómodo, podemos considerar que $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*$, $\overline{\mathfrak{B}}_t^s = \overline{\mathfrak{B}}_t^s$, $\overline{\mathfrak{R}}_t^s = \mathfrak{R}_t^s$.

14.2.3. Condiciones de regularidad. Sea $(\xi(t), \overline{\mathfrak{B}}_t^s, P_{sx})$ un proceso de Márkov en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) con el espacio de sucesos elementales (Ω, \mathfrak{R}) . Fijemos cierto $s_0 \geq 0$ y sea μ una medida probabilística en (X, \mathfrak{B}) . Consideremos una función aleatoria $\{\xi(t), t \geq s_0\}$ subordinada al flujo de σ -álgebras $(\mathfrak{R}_t^{s_0}, t \geq s_0)$ y definida en

el espacio probabilístico $(\Omega, \mathfrak{R}^{\otimes 0}, P_{s_0\mu})$, donde

$$P_{s_0\mu}(A) = \int_{\mathfrak{X}} P_{s_0x}(A) \mu(dx), \quad A \in \mathfrak{R}^{\otimes 0}.$$

Es fácil ver que esta función aleatoria es de Márkov, definida para $t \geq s_0$, con la distribución inicial μ y la probabilidad de paso $P(t_1, x, t_2, \Gamma)$ que coincide con la probabilidad de paso del proceso de Márkov $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$. De este modo, al disponer de un proceso de Márkov, podemos construir una infinidad de funciones aleatorias de Márkov escogiendo el origen de referencia del tiempo y prefijando la distribución inicial. Dos procesos de Márkov definidos en un mismo espacio físico (quizás, en espacios probabilísticos diferentes), se llamarán equivalentes, si las funciones aleatorias de Márkov, construidas según dichos procesos, con un mismo origen de referencia y una misma distribución inicial son equivalentes estocásticas (es decir, cuentan con iguales distribuciones de dimensiones finitas). De aquí se deduce que los procesos de Márkov son equivalentes, cuando y sólo cuando, sus probabilidades de paso coinciden. De este modo, el proceso de Márkov se determina unívocamente por su probabilidad de paso con la exactitud salvo la equivalencia.

Examinemos ahora la cuestión de si existe siempre un proceso de Márkov con la probabilidad de paso prefijada. La respuesta nos la da el teorema que sigue.

Teorema 1. Sean X un espacio separable métrico completo y \mathfrak{B} , la σ -álgebra de subconjuntos borelianos X , $\mathcal{F} = [0, \infty)$. Supongamos que está definida una función $P(s, x, t, \Gamma)$, $0 \leq s \leq t < \infty$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, que satisface las condiciones:

- 1) para s, t, Γ fijados $P(s, x, t, \Gamma)$ es \mathfrak{B} -medible;
- 2) para s, t, x fijados $P(s, x, t, \Gamma)$ es una medida probabilística en (X, \mathfrak{B}) ;
- 3) para todos los $x \in X$, $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2 < \infty$,

$$P(s, x, t_2, \Gamma) = \int_X P(s, x, t_1, dy) P(t_1, y, t_2, \Gamma).$$

En este caso existe un proceso de Márkov (ininterrumpido) en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) con la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$.

Está claro que tanto en la definición del proceso de Márkov, como en el teorema enunciado el conjunto \mathcal{F} puede ser un segmento finito o incluso cierto subconjunto del conjunto $[0, \infty)$.

Parece natural preguntar, ¿en qué condiciones para la probabilidad de paso existe, entre todos los procesos equivalentes de Márkov, un proceso cuyas funciones muestrales o las trayectorias del cual (es decir, las funciones $\xi(t, \omega)$ para ω fijado como función de t) posean una u otra propiedad de regularidad, digamos, sean continuas, tengan límites a la izquierda, etc.? Antes de dar la respuesta a esta pregunta aduzcamos algunas definiciones.

Definición 2. Un proceso de Márkov $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$ en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) (\mathfrak{B} es la σ -álgebra de los conjuntos borelianos) se llama continuo (continuo a la derecha), si para cualesquiera $s \geq 0$ y $x \in X$

sus trayectorias son continuas (continuas a la derecha) con la $P_{s,x}$ -probabilidad 1, cualquiera que sea $t \geq s$.

Definición 3. Se dice que el proceso de Márkov $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$ no tiene discontinuidades de segunda especie, si para cualesquiera $s \geq 0$ y $x \in X$ sus trayectorias no tienen discontinuidades de segunda especie con la $P_{s,x}$ -probabilidad 1, cualquiera que sea $t \geq s$.

Designemos mediante $U_\varepsilon(x)$ una bola en X de radio ε con el centro en el punto x y hagamos $\bar{U}_\varepsilon(x) = X \setminus U_\varepsilon(x)$.

Teorema 2. Supongamos que $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$ es un proceso de Márkov en el espacio fásico (X, \mathfrak{B}) , donde X es un espacio métrico separable, localmente compacto y completo. Sea \mathfrak{B} la σ -álgebra de conjuntos borelianos en X con la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$.

1) Si

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{0 \leq s \leq t \leq s + \delta} P(s, x, t, \bar{U}_\varepsilon(x)) = 0,$$

entonces el proceso $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$ será equivalente a un proceso de Márkov privado de las discontinuidades de segunda especie y continuo a la derecha.

2) Si

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \delta^{-1} \sup_{0 \leq s \leq t \leq s + \delta} P(s, x, t, \bar{U}_\varepsilon(x)) = 0,$$

el proceso $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$ será equivalente a un proceso de Márkov continuo.

14.2.4. Propiedad rigurosa de Márkov. Sea $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$ un proceso de Márkov en el espacio fásico (X, \mathfrak{B}) . Una magnitud aleatoria $\tau = \tau(\omega)$ con valores en $[s, \infty)$ se llamará momento de Márkov respecto del flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$ ($\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$, $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$), si para todo $t \geq s$ se cumple la condición $(\omega: \tau(\omega) < t) \in \mathfrak{F}_t^s$ ($(\omega: \tau(\omega) < t) \in \mathfrak{R}_t^s$, $(\omega: \tau(\omega) < t) \in \mathfrak{R}_t^s$). Los momentos de Márkov se llaman, a veces, magnitudes independientes del futuro, puesto que la condición $(\tau < t) \in \mathfrak{F}_t^s$ muestra de manera evidente que la aparición o no aparición del suceso $(\tau < t)$ sólo depende de los fenómenos que se observan durante el tiempo a partir del momento s hasta el momento t .

A todo momento de Márkov del tiempo τ respecto al flujo $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$ ($\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$, $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$) se le puede poner en correspondencia la σ -álgebra \mathfrak{R}_τ^s (\mathfrak{R}_τ^s , \mathfrak{R}_τ^s), determinada como una totalidad de todas aquellas $A \in \mathfrak{R}^s$ ($A \in \mathfrak{R}^s$, $A \in \mathfrak{R}^s$), para las cuales $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t^s$ con todo $t \in [s, \infty)$ ($A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{R}_t^s$, $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{R}_t^s$).

Es evidente que la magnitud τ es \mathfrak{R}_τ^s -medible y si τ_1 y τ_2 son dos momentos de Márkov respecto al flujo $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$, para los cuales $(\tau_1 \leq \tau_2)$, entonces $\mathfrak{R}_{\tau_1}^s \subset \mathfrak{R}_{\tau_2}^s$.

A menudo suele ser necesario considerar el valor de una función aleatoria $\xi(t)$ en el momento aleatorio de tiempo τ . Para que de

resulta se obtenga una magnitud aleatoria, hace falta que las funciones $\xi(t)$ (como funciones de t) sean medibles. Más aún, si nuestro deseo es que $\xi(\tau)$ sea \mathfrak{F}_τ^s -medible, se debe exigir que el proceso $\xi(t)$ posea la tal llamada medibilidad progresiva.

Definición 4. Un proceso de Markov $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$ en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) se llama progresivo medible, si para cualesquiera s, t ($0 \leq s < t < \infty$) la aplicación $\xi(u, \omega)$ del espacio $([s, t] \times \Omega, \mathfrak{F}_t^s \times \mathfrak{F}_s^s)$ en el espacio (X, \mathfrak{B}) es medible. Aquí, \mathfrak{F}_t^s es la σ -álgebra de subconjuntos borelianos del segmento $[s, t]$.

Observemos que si el proceso $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$ es continuo a la derecha, es progresivo medible. Si un proceso de Markov es progresivo medible y τ es un momento de Markov finito respecto del flujo $\{\mathfrak{F}_t^s, t \geq s\}$, entonces el elemento aleatorio $\xi(\tau) = \xi(\tau(\omega), \omega)$ con valores en (X, \mathfrak{B}) es \mathfrak{F}_τ^s -medible. Más aún, si $\{\tau_t, t \geq s\}$ es una familia de momentos de Markov finitos respecto del flujo $\{\mathfrak{F}_t^s, t \geq s\}$, mientras que τ_t , para ω fijado, representa en sí una función de t , monótona no decreciente y continua a la derecha, entonces el proceso aleatorio $\eta(t) = \xi(\tau_t(\omega), \omega)$ será progresivo medible respecto del flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t^s, t \geq s\}$.

He aquí la definición de un proceso rigurosamente de Markov.

Definición 5. Un proceso de Markov progresivo medible $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$ en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) se llama rigurosamente de Markov, si se cumplen las siguientes condiciones:

1) para $\Gamma \in \mathfrak{B}$ fijado la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$ del proceso es una función de $(s, x, t) \in \mathfrak{F}^0 \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{F}^0$ -medible en el conjunto $0 \leq s \leq t < \infty, x \in X$; aquí, \mathfrak{F}^0 es la σ -álgebra de los subconjuntos borelianos del semieje $[0, \infty)$;

2) para cualesquiera $s \geq 0, t \geq 0, x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}$ y un momento de Markov arbitrario τ respecto del flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_u^s, u \geq s\}$ se verifica la correlación

$$P_{sx}(\xi(t + \tau) \in \Gamma / \mathfrak{F}_\tau^s) = P(\tau, \xi(\tau), t + \tau, \Gamma)$$

casi por cierto en el conjunto $\Omega_\tau = \{\omega: \tau(\omega) < \infty\}$ respecto de la medida P_{sx} .

Hemos de notar que en el caso particular, cuando $\tau(\omega) \equiv t_0$, es decir, cuando $\tau(\omega)$ no es aleatorio, la condición 2) de la definición 5 coincide con la condición 2) de la definición 1. De este modo, el concepto de proceso rigurosamente de Markov destaca en la totalidad de todos los procesos de Markov aquellos que poseen la propiedad de Markov también en ciertos momentos aleatorios de tiempo, a saber, en los momentos de Markov.

Si $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$ es un proceso rigurosamente de Markov, y la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ es acotada, \mathfrak{B}^n -medible y real, entonces para todo momento de Markov τ y para cualesquiera t_1, t_2, \dots, t_n positivos queda cumplida la correlación

$$\begin{aligned} M_{sx} \{f(\xi(\tau + t_1), \xi(\tau + t_2), \dots, \xi(\tau + t_n)) / \mathfrak{F}_\tau^s\} = \\ = M_{\tau, \xi(\tau)} \{f(\xi(\tau + t_1), \xi(\tau + t_2), \dots, \xi(\tau + t_n))\} \end{aligned}$$

casi por cierto en el conjunto $\Omega_\tau = \{\tau < \infty\}$ respecto de la medida $P_{s,x}$. En este caso el segundo miembro se debe entender así: hagamos $h(s, x, t_1, t_2, \dots, t_n) = M_{s,x} f(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n))$, donde $x \in X$, $s \leq \min(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Entonces

$$M_{\tau, \xi(\tau)} f(\xi(\tau + t_1), \xi(\tau + t_2), \dots, \xi(\tau + t_n)) = h(\tau, \xi(\tau), \tau + t_1, \tau + t_2, \dots, \tau + t_n).$$

Formulemos ahora el criterio de la propiedad rigurosa del proceso de Márkov. Con este objeto definamos primeramente el operador R_λ , $\lambda > 0$, que actúa sobre la función acotada real medible $f(t, x)$, $t \in [0, \infty)$, $x \in X$, rigiéndonos por la fórmula

$$(R_\lambda f)(s, x) = M_{s,x} \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(s+t, \xi(s+t)) dt.$$

Se puede mostrar que si la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$ es, para Γ fijado, una función medible de las variables (s, x, t) , entonces la función $(R_\lambda f)(s, x)$ es medible según un par de variables s, x y, además, acotada, cualesquiera que sean $\lambda > 0$ y la función medible acotada $f(s, x)$.

Teorema 3. Sean X un espacio métrico y \mathfrak{A} , la σ -álgebra de los conjuntos medibles universales del espacio X . Supongamos que está dado un proceso de Márkov $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$ en el espacio físico (X, \mathfrak{A}) que satisface las siguientes condiciones:

a) para t y Γ fijados, la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$ es medible según un par de variables (s, x) ;

b) para cualesquiera $s \geq 0$, $x \in X$, las trayectorias del proceso (es decir, las funciones $\xi(t)$ como funciones de t , $t \geq s$) son continuas a la derecha casi por cierto respecto de $P_{s,x}$;

c) para cualesquiera $s \geq 0$, $x \in X$, y para toda función continua acotada $f(x)$, $x \in X$, casi por cierto respecto de la medida $P_{s,x}$, las trayectorias del proceso $(R_\lambda f)(t, \xi(t))$, $t \geq s$, son continuas a la derecha.

En este caso, el proceso $(\xi(t), \mathfrak{F}_{t+}^s, P_{s,x})$ es riguroso de Márkov. (Aquí, $\mathfrak{F}_{t+}^s = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathfrak{F}_{t+\epsilon}^s$).

14.2.5. Procesos estándar. La definición que sigue destaca una clase de procesos de Márkov que poseen toda una serie de buenas propiedades.

Definición 6. Un proceso de Márkov $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$ en el espacio físico (X, \mathfrak{A}) , donde X es un espacio métrico compacto local y \mathfrak{A} , la σ -álgebra de conjuntos borelianos del espacio X , se denomina estándar, si se cumplen las siguientes condiciones:

1) $\mathfrak{F}_t^s = \mathfrak{F}_{t+}^s = \mathfrak{F}_t^s$ para cualesquiera s, t , $(0 \leq s \leq t < \infty)$;

2) el proceso $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$ es continuo a la derecha y tiene límites a la izquierda (véase la definición 2);

3) el proceso $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$ es riguroso de Márkov;

4) el proceso $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$ es casi continuo a la izquierda, lo que significa que para cualesquiera $s \geq 0$, $x \in X$, y toda sucesión no decreciente de momentos de Márkov τ_n , $n = 1, 2, \dots$, respecto del flujo $(\mathfrak{F}_t^s, t \geq s)$ tiene lugar la correlación $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(\tau_n) = \xi(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n)$.

casi por cierto en el conjunto $\{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n < \infty\}$ respecto de la medida P_{sx} .

Ahora indiquemos las condiciones para la probabilidad de paso en las cuales se puede garantizar la existencia de un proceso estándar con la probabilidad de paso prefijada. Previamente demos a conocer la definición de la probabilidad de paso de Feller.

Sean X un espacio métrico separable localmente compacto y \mathfrak{A} , la σ -álgebra de subconjuntos borelianos de X , mientras que $P(s, x, t, \Gamma)$ es la probabilidad de paso en (X, \mathfrak{A}) , es decir, una función satisficente las condiciones del teorema 1. Designemos mediante $C_0(X)$ una totalidad de todas las funciones continuas reales que están definidas en X y que tienden a cero, cuando x sale de todos los compactos contenidos en X . Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K_\varepsilon \subset X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todos los $x \in X \setminus K_\varepsilon$. Ha de ser notado que si X es un compacto, entonces $C_0(X)$ coincide con el conjunto de todas las funciones continuas de valores reales definidas para $x \in X$.

Definición 7. Una probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$ es de Feller, si quedan cumplidas las siguientes condiciones:

1) para cualesquiera s, t ($0 \leq s < t < \infty$) y $f \in C_0(X)$ la función

$$(T_{st}f)(x) = \int_X f(y) P(s, x, t, dy)$$

es continua por la totalidad de variables (s, t, x) , $0 \leq s \leq t$, $x \in X$;

2) para toda función $f \in C_0(X)$

$$\lim_{t \downarrow s} \sup_{x \in X} |(T_{st}f)(x) - f(x)| = 0.$$

Teorema 4. Si $P(s, x, t, \Gamma)$ es la probabilidad de paso de Feller en un espacio métrico separable localmente compacto (X, \mathfrak{A}) , entonces existe un proceso de Márkov estándar con la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$.

14.2.6. Procesos interrumpidos. Aduzcamos, ahora, la definición del proceso de Márkov que se interrumpe. Sean:

a) un espacio medible (Ω, \mathfrak{A}) , llamado espacio de los sucesos elementales;

b) una magnitud aleatoria $\zeta(\omega)$ que toma valores en el segmento dilatado $[0, \infty)$;

c) para todos los s, t , $0 \leq s \leq t$, las σ -álgebras $\mathfrak{F}_t^s \subset \mathfrak{A}$ en el espacio $\Omega_t = \{\omega: \zeta(\omega) > t\}$ son tales que si $s \leq t \leq u$ y $A \in \mathfrak{F}_t^s$, entonces $A \cap \Omega_u \in \mathfrak{F}_u^s$;

d) una función de dos variables $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $t \in [0, \zeta(\omega))$, $\omega \in \Omega$, con valores en cierto espacio medible (X, \mathfrak{B}) , tal que para cualesquiera $0 \leq s \leq t$ la aplicación $\xi(t, \cdot)$ del espacio $(\Omega_t, \mathfrak{F}_t^s)$ en el espacio (X, \mathfrak{B}) es medible; se supone que la σ -álgebra \mathfrak{B} contiene todos los conjuntos de un solo punto;

e) para cada $s \geq 0$, $x \in X$ las medidas probabilísticas P_{sx} en la σ -álgebra $\mathfrak{F}_s^s = \mathfrak{F}_s^s$.

Definición 8. El sistema de objetos a) — e) se llamará proceso (que se interrumpe) de Márkov, siempre que están cumplidas las siguientes condiciones:

1) para cualesquiera $0 \leq s \leq t$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, la función

$$P(s, x, t, \Gamma) = P_{sx}(\xi(t) \in \Gamma)$$

es una función de $x \in \mathfrak{B}$ -medible, con la particularidad de que $P(s, x, s, X \setminus \{x\}) = 0$;

2) para cualesquiera $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ se verifica la correlación

$$P_{sx}(\xi(t_2) \in \Gamma / \mathfrak{B}_{t_1}^x) = P(t_1, \xi(t_1), t_2, \Gamma)$$

cast por cierto en el conjunto Ω_{t_1} respecto de la medida P_{sx} (c.p.c. Ω_{t_1}, P_{sx}).

El momento de tiempo ξ se denomina momento de interrupción. El proceso de Márkov que se interrumpe lo designaremos $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{B}_t^x, P_{sx})$. Es evidente que si $\xi(\omega) = +\infty$, entonces la definición 8 se transforma en la definición 1 para un proceso de Márkov que no se interrumpe.

La función $P(s, x, t, \Gamma)$, definida en la condición 1) de la definición 8, se llama probabilidad de paso del proceso de Márkov. De la condición 2) se deduce que esta función satisface la ecuación de Chapman — Kolmogórov. Se debe tener en cuenta que $P(s, x, t, X) \leq 1$ y la magnitud $1 - P(s, x, t, X)$ representa en sí la probabilidad de que, al salir del punto x en el momento de tiempo s , el proceso se interrumpe para el momento de tiempo t .

La probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$ se denomina normal, si para cualesquiera $s \geq 0$ y $x \in X$ se verifica $P(s, x, s+, X) = \lim_{t \downarrow s} P(s, x, t, X) = 1$. El hecho de que el límite citado exista, proviene de la desigualdad ($s \leq t_1 < t_2$)

$$P(s, x, t_2, X) = \int_X P(s, x, t_1, dy) P(t_1, y, t_2, X) \leq P(s, x, t_1, X),$$

que significa que $P(s, x, t, X)$ no crece de modo monótono como función de t , cuando $t \geq s$.

El proceso de Márkov con la probabilidad de paso normal se denomina normal.

Múltiples resultados obtenidos para los procesos de Márkov que no se interrumpen pueden ser aplicados con ciertas reservas a los procesos que se interrumpen. Por ejemplo, de análogo del teorema 1 sirve el

Teorema 1'. Sean X un espacio métrico completo y \mathfrak{B} , la σ -álgebra de los subconjuntos borelianos de X . Supongamos que la función $P(s, x, t, \Gamma)$, $0 \leq s \leq t < \infty$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, satisface las condiciones 1) y 3) del teorema 1 y la condición 2') para s, x, t fijados $P(s, x, t, \Gamma)$ es una medida (no forzosamente probabilística) en (X, \mathfrak{B}) , con la particularidad de que $P(s, x, t, \Gamma) \leq 1$ y $P(s, x, s+, X) = 1$.

En este caso, en el espacio fásico (X, \mathfrak{B}) existe un proceso de Márkov normal con la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$.

Los procesos que tienen una misma probabilidad de paso se denominan equivalentes. Si construimos, según los procesos equivalentes, unas funciones aleatorias de Márkov (que se interrumpen), igual que en el p. 14.2.3, éstas serán equivalentes estocásticas (es decir, tendrán distribuciones de iguales dimensiones finitas)

La definición del proceso riguroso de Márkov interrumpido coincide con la definición 5, con la única modificación consistente en que la correlación en la condición 2) debe cumplirse casi por cierto en el conjunto $\Omega_\tau = \{\omega: \tau(\omega) < \xi(\omega)\}$ respecto de la medida $P_{s,x}$.

La definición del proceso de Márkov interrumpido estándar es enteramente análoga a la definición 6. Conviene tener en cuenta que como las funciones $\xi(t)$ están definidas solamente en el intervalo semiabierto $[0, \xi)$, entonces la continuidad del proceso a la derecha, como también la existencia de límites a la izquierda, se refieren a los puntos $t \in [0, \xi)$.

Análogamente, en la definición deasicontinuidad a la izquierda la correlación $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(\tau_n) = \xi(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n)$ debe verificarse en el conjunto $\{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n < \xi(\omega)\}$ casi por cierto respecto de $P_{s,x}$.

El teorema que sigue ofrece las condiciones de existencia de un proceso estándar que se interrumpe.

Teorema 5. Sean X un espacio métrico separable completo y localmente compacto y \mathfrak{B} , la σ -álgebra de conjuntos borelianos de X , mientras que $P(s, x, t, \Gamma)$ es una probabilidad de paso normal (es decir, una función que satisface las condiciones del teorema 1'). Supongamos cumplidas las condiciones:

1) cualquiera que sea la función acotada continua $f(x)$, $x \in X$, con valores reales, la función

$$(T_{st}f)(x) = \int_X P(s, x, t, dy) f(y), \quad s \leq t, x \in X,$$

posee la siguiente propiedad de continuidad:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ s \downarrow s_0}} (T_{st}f)(x) = (T_{s_0 t}f)(x_0);$$

$$2) \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{0 \leq s \leq t \leq s + \delta \\ x \in X}} P(s, x, t, \bar{U}_\varepsilon(x)) = 0,$$

donde $\bar{U}_\varepsilon(x)$ es una bola en X con el centro en el punto x de radio ε , y $\bar{U}_\varepsilon(x) = X \setminus U_\varepsilon(x)$.

En este caso existe un proceso de Márkov estándar normal con la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$.

14.3. Funcionales multiplicativas de los procesos de Márkov

14.3.1. Definición y propiedades. Sea $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{B}_t^s, P_{s,x})$ un proceso de Márkov en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) .

Definición 1. Una familia de magnitudes aleatorias de valores reales $\alpha_t^s = \alpha_t^s(\omega)$, $0 \leq s \leq t$, $\omega \in \Omega_t$, se denomina funcional multiplicativa del proceso de Márkov, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) la magnitud aleatoria α_t^s es \mathfrak{B}_t^s -medible;

b) para cualesquiera $x \in X$, $0 \leq s \leq t \leq u$ casi por cierto en el conjunto Ω_u queda cumplida, respecto a la medida $P_{s,x}$, la igualdad

$$\alpha_t^s \alpha_u^t = \alpha_u^s;$$

c) $0 < \alpha_t^s \leq 1$ para cualesquiera $0 \leq s \leq t$, $\omega \in \Omega_t$.

Una funcional multiplicativa se llama continua a la derecha, si para cualesquiera $t \geq s \geq 0$, $x \in X$, casi por cierto en el conjunto Ω_t se verifica, respecto de $P_{sx} \lim_{t_n \downarrow t} \alpha_{t_n}^s = \alpha_t^s$.

Demos un ejemplo de una funcional multiplicativa. Supongamos que un proceso de Márkov es progresivo medible respecto de las σ -álgebras \mathfrak{R}_t^s (esto significa que en la definición 4 del p. 14.2 en lugar de la σ -álgebra \mathfrak{R}_t^s se debe poner la $\tilde{\mathfrak{R}}_t^s$ y en lugar de Ω , Ω_t). Sea $v(s, x)$ una función no negativa, medible según un par de variables $(s, x) \in [0, \infty) \times X$. Hagamos

$$\alpha_t^s = \exp \left\{ - \int_s^t v(u, \xi(u)) du \right\}, \quad 0 \leq s \leq t, \quad \omega \in \Omega_t.$$

Si la integral en esta fórmula es finita con cualesquiera $0 \leq s \leq t < \zeta(\omega)$, entonces α_t^s es una funcional multiplicativa del proceso $\xi(t)$. Se llama funcional multiplicativa de tipo integral. Indiquemos que tal funcional es continua para todo $t \geq s$, $\omega \in \Omega_t$.

Sean α_t^s y β_t^s dos funcionales multiplicativas del proceso de Márkov $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t^s, P_{sx})$. Se denominan estocásticas equivalentes, si para cualesquiera $s \geq 0$, $x \in X$, $t > s$, la medida $P_{sx}(\alpha_t^s \neq \beta_t^s) = 0$.

De la definición se deduce que si α_t^s es una funcional multiplicativa, entonces $\alpha_s^s = (\alpha_s^s)^2$, de suerte que α_s^s puede tomar solamente dos valores: 0 ó 1. Más aún, $P_{sx}(\alpha_s^s = 1) = 0$ ó 1, lo que se desprende de la siguiente ley de 0 ó 1.

Ley de 0 ó 1. Si es que $A \in \mathfrak{R}_s^s$, entonces $P_{sx}(A) = 0$ ó 1.

Para s dado designemos mediante X_α^s una totalidad de todos los $x \in X$, para los cuales $P_{sx}(\alpha_s^s = 1)$. Evidentemente, $X_\alpha^s \in \mathfrak{B}$. Hagamos

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = M_{sx} \chi_\Gamma(\xi(t)) \alpha_t^s,$$

donde $0 \leq s \leq t < \infty$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, $\chi_\Gamma(x)$ es el indicador del conjunto Γ . Es fácil ver que para s, x, t fijados la función $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$ es una medida en \mathfrak{B} y para s, t, Γ fijados esta función es \mathfrak{B} -medible. Además, $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$ satisface la condición de Chapman—Kolmogórov:

$$\tilde{P}(s, x, t_2, \Gamma) = \int_X \tilde{P}(s, x, t_1, dy) \tilde{P}(t_1, y, t_2, \Gamma),$$

$$0 \leq s \leq t_1 \leq t_2, \quad x \in X, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

En este caso

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) \leq P(s, x, t, \Gamma), \quad (3.1)$$

donde $P(s, x, t, \Gamma)$ es la probabilidad de paso del proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t^s, P_{sx})$. Si este proceso es normal, entonces

$$\tilde{P}(s, x, s, \Gamma) = \chi_{\Gamma \cap X_\alpha^s}(x).$$

Así pues, toda funcional multiplicativa del proceso de Márkov engendra una probabilidad de paso $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$ que satisface la desigualdad (3.1). Con ello, dos funcionales multiplicativas son estocásticas equivalentes, cuando y sólo cuando, engendran una misma probabilidad de paso.

El teorema que sigue muestra que bajo ciertas condiciones toda probabilidad de paso que satisfaca la desigualdad (3.1) es engendada por cierta funcional.

Teorema 1. *Supongamos que se dan un proceso de Márkov normal $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t^s, P_{sx})$ en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) con la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$ y una probabilidad de paso $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$ que satisface la desigualdad (3.1). Supongamos cumplidas las condiciones:*

1) *la σ -álgebra \mathfrak{B} se genera por cierta familia numerable de subconjuntos de X ;*

2) *en el semiteje $[0, \infty)$ existe un subconjunto numerable siempre denso J tal que las σ -álgebras \mathfrak{R}_t^s se generan por los sucesos del tipo $\{\xi(u) \in \Gamma\}$ para $u \in J \cap [s, t]$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$.*

En estas condiciones existe una funcional multiplicativa α_t^s del proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t^s, P_{sx})$ tal que

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = M_{sx} \chi_{\Gamma}(\xi(t)) \alpha_t^s.$$

Con ello, si el flujo de σ -álgebras $(\mathfrak{R}_t^s, t \geq s)$ es continuo a la derecha (lo que significa que $\mathfrak{R}_{t+}^s = \mathfrak{R}_t^s$) y la función $\tilde{P}(s, x, t, X)$ es también continua a la derecha respecto de t en el punto $t = s$ para todos los s y x , entonces la funcional multiplicativa α_t^s puede ser definida de tal modo que sea continua a la derecha.

Observación. Las condiciones 1) y 2) del teorema se consideran cumplidas, si X es un espacio métrico separable, \mathfrak{B} es la σ -álgebra de los conjuntos borelianos del espacio X , y el proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t^s, P_{sx})$ es continuo a la derecha.

Como conclusión de este punto demos a conocer una ecuación integral a la que satisface la probabilidad de paso $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$, si se genera por una funcional de tipo integral.

Sea $v(s, x)$ una función no negativa medible según un par de variables, definida para $s \geq 0$, $x \in X$. Supongamos que para $0 < s < t$, $\omega \in \Omega_t = \{\omega: \zeta(\omega) > t\}$

$$\alpha_t^s = \exp \left\{ - \int_s^t v(u, \xi(u)) du \right\}.$$

Supondremos que la integral en el segundo miembro es finita para cualesquiera $0 < s < t < \zeta(\omega)$. Si

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = M_{sx} \chi_{\Gamma}(\xi(t)) \alpha_t^s,$$

entonces la función $P(s, x, t, \Gamma)$ satisface la siguiente ecuación integral:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s, x, t, \Gamma) &= P(s, x, t, \Gamma) - \\ &- \int_s^t \int_X P(s, x, u, dy) \nu(u, y) \tilde{P}(u, y, t, \Gamma) du. \end{aligned}$$

14.3.2. Subprocesos. Sean dados dos procesos de Márkov: $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$ y $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi}, \tilde{P}_{xx})$ en el espacio fásico (X, \mathfrak{B}) con un mismo espacio de sucesos elementales Ω . Supongamos cumplidas las condiciones:

- $\tilde{\zeta}(\omega) \leq \zeta(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$;
- $\tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi} = \mathfrak{F}_t^{\xi}$ para $0 \leq t < \tilde{\zeta}(\omega)$;
- $\tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi} = \mathfrak{F}_t^{\xi}[\tilde{\Omega}_t]$, donde $\tilde{\Omega}_t = \{\omega: \tilde{\zeta}(\omega) > t\}$, y $\mathfrak{F}_t^{\xi}[\Omega_t]$ es la traza de la σ -álgebra \mathfrak{F}_t^{ξ} en el conjunto $\tilde{\Omega}_t$, es decir, una totalidad de sucesos del tipo $A \cap \tilde{\Omega}_t$, $A \in \mathfrak{F}_t^{\xi}$.

En este caso suele decirse que el proceso $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi}, \tilde{P}_{xx})$ se ha obtenido por reducción del tiempo de vida del proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$.

Definición 2. Un proceso de Márkov $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi}, \tilde{P}_{xx})$ se llamará subproceso del proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$, si el primero puede ser obtenido por reducción de la vida de cierto proceso equivalente al segundo.

Si $P(s, x, t, \Gamma)$ es una probabilidad de paso del proceso de Márkov $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$, en tanto que $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$ es la probabilidad de paso de su subproceso, entonces, evidentemente,

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) \leq P(s, x, t, \Gamma).$$

Por esta razón del teorema 1 se deduce el

Teorema 2. Si un proceso de Márkov $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$ satisface las condiciones del teorema 1, y el proceso $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi}, \tilde{P}_{xx})$ es su subproceso, entonces la probabilidad de paso $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$ del subproceso se genera por cierta funcional multiplicativa α_t^{ξ} del proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$ en el sentido que

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = M_{xx} \chi_{\Gamma}(\tilde{\xi}(t)) \alpha_t^{\xi}.$$

En cierto sentido es válida también la afirmación inversa.

Teorema 3. Sea α_t^{ξ} una funcional multiplicativa continua a la derecha del proceso de Márkov normal $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$. Si es así, existe la subproceso $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi}, \tilde{P}_{xx})$ de este proceso que su probabilidad de paso $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$ se genera por la funcional α_t^{ξ} , es decir,

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = \tilde{M}_{xx} \chi_{\Gamma}(\tilde{\xi}(t)) = M_{xx} \chi_{\Gamma}(\xi(t)) \alpha_t^{\xi}$$

para cualesquiera $0 \leq s \leq t$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$.

Si $P_{sx}(\alpha_t^s = 1) = 1$ para cualesquiera $s \geq 0$ y $x \in X$, entonces el subproceso mencionado es normal.

Examinemos ahora un subproceso $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^s, \tilde{P}_{sx})$ del proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$, el cual se genera por la funcional multiplicativa de tipo integral

$$\alpha_t^s = \exp \left\{ - \int_s^t v(u, \xi(u)) du \right\}$$

con la función acotada medible no negativa $v(u, x)$. Entonces,

$$\tilde{P}(s, x, t, X) = M_{sx} \alpha_t^s.$$

Hagamos $t = s + h$ y sea que $h \downarrow 0$. Con la exactitud salvo las magnitudes infinitamente pequeñas de orden superior tendremos

$$P(s, x, s+h, X) - \tilde{P}(s, x, s+h, X) \approx M_{sx} \int_s^{s+h} v(u, \xi(u)) du.$$

Supongamos que la función $v(u, \xi(u))$ es continua a la derecha y el proceso es normal. Entonces, para $h \downarrow 0$,

$$P(s, x, s+h, X) - \tilde{P}(s, x, s+h, X) \approx v(s, x) h$$

con la exactitud salvo las magnitudes infinitamente pequeñas de orden superior. Si el subproceso $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^s, \tilde{P}_{sx})$ se obtiene por reducción del tiempo de vida del proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$, entonces el primer miembro de la última correlación se escribirá en la forma

$$P_{sx} \{ \tilde{\zeta} \leq s + h < \zeta \},$$

lo que representa en sí la probabilidad de que el subproceso $\tilde{\xi}(t)$, al salir del estado x en el momento de tiempo s , se interrumpa hasta que llegue el momento $s + h$, mientras que el proceso $\xi(t)$ no se interrumpe hasta el momento de tiempo indicado.

PROCESOS DE MÁRKOV HOMOGÉNEOS

15.1. Definiciones y propiedades fundamentales

15.1.1. **Definición.** El proceso de Márkov homogéneo puede imaginarse intuitivamente como un proceso en el cual los pasos de un estado x a cierto conjunto de estados Γ durante el lapso desde s hasta $s+h$ ocurren con una probabilidad que no depende de s . Esto significa que la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$ de un proceso homogéneo debe poseer la propiedad de que la función $P(s, x, s+h, \Gamma)$ no depende de s . Si hacemos $P(h, x, \Gamma) = P(s, x, s+h, \Gamma)$, entonces para las distribuciones de dimensiones finitas del proceso tendremos

$$\begin{aligned} P_{sx} \{ \xi(t_1) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n \} &= \\ &= \int_{\Gamma_1} P(t_1-s, x, dy_1) \int_{\Gamma_2} P(t_2-t_1, y_1, dy_2) \dots \\ &\dots \int_{\Gamma_n} P(t_n-t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n) = \\ &= P_{sx} \{ \xi(t_1-s) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n-s) \in \Gamma_n \}, \\ &0 \leq s < t_1 < t_2 < \dots < t_n. \end{aligned}$$

De este modo, en lugar de la familia de medidas P_{sx} , dependientes de la variable de tiempo y de la espacial, en el caso homogéneo será suficiente examinar una familia de medidas $P_x = P_{sx}$ que sólo dependen de la variable espacial. En otras palabras, cada vez, cuando un proceso sale del estado x en el momento de tiempo s , realizamos un desplazamiento del tiempo de una manera tal que el punto s se haga inicial (nulo). Por supuesto, que debemos contar con la posibilidad de desplazar también todas las trayectorias del proceso, lo que significa que el espacio de sucesos elementales ha de ser suficientemente rico.

He aquí la definición exacta. Sean:

- a) un espacio de sucesos elementales (Ω, \mathfrak{A}) ;
- b) una magnitud aleatoria $\zeta(\omega)$ con valores en el segmento extendido $[0, \infty[$;
- c) para todo $t \geq 0$ la σ -álgebra \mathfrak{F}_t en el espacio $\Omega_t = \{ \omega: \zeta(\omega) > t \}$, con la particularidad de que si $s \leq t$, entonces $\mathfrak{F}_s[\Omega_t] \subseteq \mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{A}$, donde $\mathfrak{F}_s[\Omega_t]$ es una traza de la σ -álgebra \mathfrak{F}_s en el conjunto Ω_t , es decir, una totalidad de conjuntos del tipo $A \cap \Omega_t, A \in \mathfrak{F}_s$;
- d) una función de dos variables $\xi(t) = \xi(t, \omega), t \in [0, \zeta(\omega)), \omega \in \Omega$, que toma valores en cierto espacio medible (X, \mathfrak{B}) , tal que

para todo $t \geq 0$ la aplicación $\xi(t, \cdot)$ del espacio $(\Omega_t, \mathfrak{F}_t)$ en el espacio (X, \mathfrak{B}) es medible; se supone que la σ -álgebra \mathfrak{B} contiene todos los conjuntos de un solo punto;

e) para todo $x \in X$, la medida probabilística P_x en cierta σ -álgebra \mathfrak{F} en el espacio Ω que contiene todas las \mathfrak{F}_t , $t \geq 0$.

Definición 1. El sistema de objetos a) — e) forma un proceso de Márkov homogéneo, si se cumplen las condiciones:

1) para cualesquiera $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ la función

$$P(t, x, \Gamma) = P_x\{\xi(t) \in \Gamma\}$$

es \mathfrak{F}_t -medible como función de x , siendo $P(0, x, X \setminus \{x\}) = 0$;

2) para cualesquiera $s, t \geq 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ se tiene

$$P_x\{\xi(t+s) \in \Gamma | \mathfrak{F}_s\} = P(t, \xi(s), \Gamma)$$

casi por cierto respecto de la medida P_x en el conjunto Ω_s ;

3) para todo $\omega \in \Omega_t$ existe $\omega' \in \Omega$ tal que $\xi(\omega') = \xi(\omega) - y$ y $\xi(s, \omega') = \xi(s+t, \omega)$ para $0 \leq s < \xi(\omega')$.

La condición 2) reúne en sí la propiedad markoviana del proceso y la de su homogeneidad en el tiempo. La condición 3) significa, en términos generales, que junto con toda trayectoria del proceso un trozo arbitrario de ésta también es, pasado cierto momento de tiempo, una trayectoria posible. Al hacer extender, si es necesario, el espacio Ω , siempre podemos lograr que la condición 3) esté cumplida.

La función $P(t, x, \Gamma)$, definida en la condición 1), se denomina probabilidad de paso. De 2) se deduce que esta función satisface la ecuación de Chapman — Kolmogórov

$$P(s+t, x, \Gamma) = \int_X P(s, x, dy) P(t, y, \Gamma), \quad s, t \geq 0, \quad x \in X, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

Con ello, $P(s, x, X) \leq 1$. Si $P(+0, x, X) = \lim_{t \rightarrow 0} P(t, x, X) = 1$, entonces la probabilidad de paso se llama normal y el proceso correspondiente también es normal.

Un proceso de Márkov homogéneo se designará por $(\xi(t), \xi, \mathfrak{F}_t, P_x)$. Si $\xi = +\infty$, el proceso se denomina **ininterrumpido** y se denota por $(\xi(t), \mathfrak{F}_t, P_x)$. Para un proceso ininterrumpido $P(t, x, X) \equiv 1$.

Designemos mediante \mathfrak{B}^0 la σ -álgebra mínima de subconjuntos Ω , que contiene todos los conjuntos del tipo $\{\xi(t) \in \Gamma\}$ para $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, y mediante \mathfrak{R}_t , la σ -álgebra mínima de los subconjuntos Ω_t que contiene todos los conjuntos del tipo $\{\xi(s) \in \Gamma\} \cap \Omega_t$ para $s \in [0, t]$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$.

Supongamos que \mathfrak{B} designa una traza de la σ -álgebra \mathfrak{B}^0 en el conjunto $\Omega_0 = \{\xi > 0\}$. Es evidente que $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{B}^0 \subseteq \mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}_t \subseteq \mathfrak{F}_t$ y junto con el proceso $(\xi(t), \xi, \mathfrak{F}_t, P_x)$ el proceso $(\xi(t), \xi, \mathfrak{R}_t, P_x)$ también será homogéneo de Márkov.

Como se ha indicado en el p. 14.2, las σ -álgebras \mathfrak{R}_t pueden ser privadas de varios conjuntos importantes. Por ejemplo, el conjunto $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma \text{ con } s \in [u, t] \text{ cualquiera}\}$ puede no entrar en \mathfrak{R}_t , ya que es la intersección de un número innumerable de conjuntos cilíndricos. No obstante, con frecuencia los conjuntos de este tipo están contenidos en la intersección de las completaciones de la σ -álgebra \mathfrak{R}_t según el sistema de medidas P_x . Designaremos esta σ -álgebra con $\overline{\mathfrak{R}}_t$. En lo sucesivo consideraremos que $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{R}_t$ ó $\mathfrak{F}_t = \overline{\mathfrak{R}}_t$.

15.1.2. Procesos de Márkov equivalentes. Si se tienen un proceso de Márkov $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{N}_t, P_x)$ (el término «homogéneo» lo omitiremos con frecuencia, puesto que se trata aquí solamente de este tipo de procesos) y una medida probabilística μ en la σ -álgebra \mathfrak{B} , podemos construir una función aleatoria de Márkov (véase el p. 14.1) $\xi(t), t \in [0, \infty)$ que posea el tiempo de vida ζ , el flujo de σ -álgebras \mathfrak{N}_t y la medida $P_\mu(A), A \in \mathfrak{N}^0$, definida por la fórmula

$$P_\mu(A) = \int_X \mu(dx) P_x(A).$$

(Señalemos que de la condición 1) de la definición 1 se desprende que para todo $A \in \mathfrak{N}^0$ la función $P_x(A)$ es \mathfrak{B} -medible). Las distribuciones de dimensiones finitas de esta función aleatoria tienen por expresión

$$\begin{aligned} P_\mu(\xi(t_1) \in \Gamma_1, \xi(t_2) \in \Gamma_2, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n) = \\ = \int_X \mu(dx) \int_{\Gamma_1} P(t_1, x, dy_1) \int_{\Gamma_2} P(t_2 - t_1, y_1, dy_2) \dots \\ \dots \int_{\Gamma_n} P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n), \end{aligned}$$

donde $0 < t_1 < \dots < t_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$, y $P(t, x, \Gamma)$ es la probabilidad de paso del proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{N}_t, P_x)$. La medida μ recibe el nombre de distribución inicial de la función aleatoria construida. Si dos procesos de Márkov tienen una misma probabilidad de paso, las correspondientes funciones aleatorias de Márkov con una misma distribución inicial serán estocásticas equivalentes (es decir, tienen iguales distribuciones de dimensiones finitas). Los procesos de Márkov se llaman equivalentes, si tienen una misma probabilidad de paso. En conformidad con el teorema 1' del p. 14.2, según cualquier probabilidad de paso homogénea normal podemos construir un proceso de Márkov homogéneo. Con ello, por probabilidad de paso homogénea en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) entendemos la función $P(t, x, \Gamma), t \geq 0, x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}$, que sirve de medida por Γ con t, x fijados (a condición de que $P(t, x, X) \leq 1, P(0, x, X \setminus \{x\}) = 0$), que representa en sí una función de x \mathfrak{B} -medible para t, Γ fijados y que satisface la ecuación de Chapman — Kolmogórov.

15.1.3. Operadores de desplazamiento. Definamos una operación de desplazamiento $\theta_t, t \geq 0$, de los conjuntos de la σ -álgebra \mathfrak{N} . Para un conjunto del tipo $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma, s \geq 0, \Gamma \in \mathfrak{N}\}$, hagamos

$$\theta_t \{\xi(s) \in \Gamma\} = \{\xi(t+s) \in \Gamma\}.$$

Además, exigiremos que los operadores θ_t conserven todas las operaciones teóricas de multiplicación. De esta manera, la acción del operador θ_t en todo conjunto $A \in \mathfrak{N}$ se determina unívocamente. Por ejemplo, $\theta_t \Omega_s = \Omega_{s+t}$, mientras que los conjuntos cilíndricos

$$\{\xi(t_1) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n\}$$

bajo el efecto del operador θ_t se transforman en los conjuntos

$$\{\xi(t_1 + t) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n + t) \in \Gamma_n\}.$$

Los operadores θ_t pueden determinarse también en las funciones \mathfrak{B} -medibles de ω . A saber: suponemos que $(\theta_t \eta)(\omega) = \alpha$, si $\omega \in \theta_t \{\eta = \alpha\}$. Es evidente que $\theta_t \theta_s \eta = \theta_{t+s} \eta$, de modo que los operadores θ_t forman un semigrupo. En particular, $\theta_t \zeta = \zeta - t$ para $\omega \in \Omega_t$.

En términos de los operadores θ_t la condición 2) de la definición 1 puede ser escrita en la forma

$$P_x \{ \theta_s \{ \xi(t) \in \Gamma \} / \mathfrak{B}_s \} = P_{\xi(t)} \{ \xi(t) \in \Gamma \}$$

casi por cierto respecto de P_x en el conjunto Ω_x (c.p.c. Ω_x, P_x).

Las propiedades a seguir del proceso de Márkov $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ constituyen sencillos corolarios de la definición 1.

1) Si $A \in \mathfrak{R}$, entonces

$$P_x \{ \theta_t A / \mathfrak{R} \} = P_{\xi(t)} \{ A \} \text{ (c.p.c. } \Omega_t, P_x).$$

2) Si $A \in \mathfrak{R}_t, B \in \mathfrak{R}$, entonces

$$P_x (A \cap \theta_t B) = \int_A P_{\xi(t)} (B) P_x (d\omega).$$

3) Si η es una magnitud aleatoria acotada \mathfrak{R} -medible, entonces

$$M_x \{ \theta_t \eta / \mathfrak{R}_t \} = M_{\xi(t)} \text{ (c.p.c. } \Omega_t, P_x).$$

4) Si la magnitud \varkappa es acotada y \mathfrak{R}_t -medible, mientras que η es acotada y \mathfrak{R} -medible, entonces

$$M_x (\varkappa \theta_t \eta) = M_x (\varkappa M_{\xi(t)} \eta).$$

15.2. Semigrupos de los operadores relacionados con los procesos homogéneos de Márkov

15.2.1. Semigrupo de los operadores correspondiente a la probabilidad de paso. Sea $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso homogéneo de Márkov en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) con la probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$. Designemos con $B(X)$ un espacio de Banach de todas las funciones \mathfrak{B} -medibles acotadas reales en X , cuya norma es $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Examinamos en $B(X)$ una familia de operadores $T_t, t \geq 0$, que se definen mediante la fórmula

$$T_t f(x) = \int_X f(y) P(t, x, dy), \quad f \in B(X).$$

De las propiedades de la probabilidad de paso se deducen con facilidad las siguientes propiedades de la familia de operadores $T_t (t \geq 0)$:

- 1) para todo $t \geq 0$ T_t es un operador acotado lineal que aplica $B(X)$ en $B(X)$, con la particularidad de que $\|T_t\| \leq 1$;
- 2) para cualesquiera $s, t \geq 0$ $T_{t+s} = T_t T_s$;
- 3) si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, entonces $T_t f(x) \geq 0$ para cualesquiera $x \in X$, y $t \geq 0$;
- 4) si $f(x_0) = 0$, entonces $T_t f(x_0) = 0$;

5) si para todo $x \in X$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, donde $f_n \in B(X)$, siendo $\sup_n \|f_n\| < \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n f(x) = T f(x)$.

Una familia de operadores $\{T_t, t \geq 0\}$, satisfaciendo las condiciones 1) y 2) se llama semigrupo contrayente de operadores. La propiedad 3) significa que el operador T_t deja invariante el cono de funciones no negativas en $B(X)$.

De este modo, todo proceso de Márkov homogéneo en el espacio fásico (X, \mathfrak{B}) engendra un semigrupo contrayente de operadores $\{T_t, t \geq 0\}$, que satisface las condiciones 3)—5). Con ello, los procesos de Márkov equivalentes engendran un mismo semigrupo.

Se puede mostrar que todo semigrupo contrayente de operadores, que actúan en $B(X)$ y satisfacen las condiciones 3)—5), engendra una probabilidad de paso homogénea, con la particularidad de que $P(t, x, \Gamma) = T_t \chi_\Gamma(x)$.

Así pues, con el fin del estudio de los procesos de Márkov se puede emplear la teoría de semigrupos.

15.2.2. Operador infinitesimal. Sea (X, \mathfrak{B}) un espacio medible, y supongamos que $\{T_t, t \geq 0\}$ es un semigrupo contrayente de operadores que actúan en $B(X)$. Definamos el operador infinitesimal A del semigrupo T_t mediante la fórmula $Af = g$, si

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| g - \frac{T_t f - f}{t} \right\| = 0.$$

Su dominio de definición D_A consta de todas las funciones $f \in B(X)$, para las cuales el límite

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t}$$

existe uniformemente respecto de $x \in X$. Es evidente que $D_A \subset B_0(X) = \{f: f \in B(X), \lim_{t \downarrow 0} \|T_t f - f\| = 0\}$.

Indiquemos algunas propiedades del operador infinitesimal.

1) La clausura del conjunto D_A (en el sentido de convergencia según la norma) coincide con $B_0(X)$.

2) Si $f \in D_A$, entonces $Af \in B_0(X)$ y

$$T_t f - f = \int_0^t T_s A f ds.$$

3) Si $f \in D_A$, entonces la función $T_t f$ es fuertemente derivable respecto de t , $t \geq 0$ y

$$\frac{dT_t f}{dt} = A T_t f = T_t A f.$$

4) El operador A es cerrado.

Para los números positivos λ definamos los operadores R_λ en $B_0(X)$ mediante la fórmula

$$R_\lambda g(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t g(x) dt, \quad g \in B_0(X).$$

(Ha de ser notado que para g de esta índole $T_t g$ es una función acotada fuertemente continua, razón por la cual la integral que figura en la fórmula siempre existe para $\lambda > 0$ y determina cierta función de $B(X)$. La familia de los operadores R_λ se denomina **resolvente** del semigrupo T_t . Las propiedades de la resolvente:

1) para $\lambda, \mu > 0$ se verifica la ecuación de resolvente

$$R_\lambda R_\mu = \frac{1}{\lambda - \mu} [R_\mu - R_\lambda];$$

2) $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$;

3) la función $f = R_\lambda g$ es la única solución de la ecuación $\lambda f - Af = g$, $\lambda > 0$, $g \in B_0(X)$.

De este modo, $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$, donde I es un operador unidad y R_λ aplica biunívocamente $B_0(X)$ sobre D_A .

Hagamos $R_\lambda(x, \Gamma) = R_\lambda \chi_\Gamma(x)$, $\lambda > 0$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$. La función $R_\lambda(x, \Gamma)$ se llama núcleo de resolvente. Evidentemente,

$$R_\lambda g(x) = \int_X R_\lambda(x, dy) g(y), \quad g \in B_0(X).$$

15.2.3. Procesos continuos estocásticos en los espacios topológicos. Sea $P(t, x, \Gamma)$ una probabilidad de paso homogénea en el espacio (X, \mathfrak{B}) . De acuerdo con el p. 15.2.1 ella genera un semigrupo de operadores T_t que actúan en el espacio $B(X)$. El operador infinitesimal A de este semigrupo lo vamos a llamar operador infinitesimal de la probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$. De conformidad con el p. 15.2.2

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_X f(y) P(t, x, dy) - f(x)}{t},$$

con la particularidad de que $f \in D_A$, si este límite existe uniformemente respecto de $x \in X$.

Surge una pregunta: ¿en qué condiciones la probabilidad de paso se determina unívocamente por su operador infinitesimal?

Antes de enunciar el teorema que da la respuesta a la pregunta planteada introduzcamos la noción de probabilidad de paso continua estocástica.

Sea X un espacio topológico, mientras que \mathfrak{B} es la σ -álgebra de los subconjuntos borelianos de X . Una probabilidad de paso homogénea $P(t, x, \Gamma)$ se llamará continua estocástica, si para todo $x \in X$ y todo entorno U del punto x queda cumplida la correlación

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(t, x, U) = 1.$$

Designemos mediante $C(X)$ un espacio de funciones acotadas continuas reales definidas en X . Si $P(t, x, \Gamma)$ es la probabilidad de paso continua estocástica en el espacio (X, \mathfrak{B}) , y T_t es un semigrupo de operadores en $B(X)$ que corresponde a dicha probabilidad, entonces para toda $f \in C(X)$ se verifica

$$\lim_{t \rightarrow 0} T_t f(x) = f(x),$$

cualquiera que sea $x \in X$. Más aún, si cierto semigrupo T_t , engendrado por la probabilidad de paso de Feller $P(t, x, \Gamma)$, posee dicha propiedad, entonces $P(t, x, \Gamma)$ es continua estocástica.

Teorema 1. *Toda probabilidad de paso continua estocástica en el espacio físico topológico se define unívocamente por su operador infinitesimal.*

Observemos que la probabilidad de paso continua estocástica es normal. Por esta razón, si A es un operador infinitesimal de la probabilidad de paso continua estocástica, entonces define unívocamente (con la exactitud salvo la equivalencia) cierto proceso de Márkov. De este modo, el problema de descripción de todos los procesos continuos estocásticos en (X, \mathfrak{B}) se reduce a la descripción de todos los operadores de esta clase en $B(X)$ que son operadores infinitesimales de las probabilidades de paso continuas estocásticas.

Puede ocurrir que el semigrupo T_t , generado por cierta probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$, deje invariante cierto subespacio \tilde{B} del espacio $B(X)$. Al considerar el semigrupo T_t en el espacio \tilde{B} , podemos determinar su operador infinitesimal en \tilde{B} . Este se llama operador \tilde{B} -infinitesimal de la probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$. Si el subespacio \tilde{B} es suficientemente rico, se puede esperar que la probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$ se define unívocamente por su operador \tilde{B} -infinitesimal.

Sean X un espacio topológico y \mathfrak{B} , la σ -álgebra de sus subconjuntos borelianos. Se dice que la probabilidad de paso homogénea $P(t, x, \Gamma)$ en el espacio físico (X, \mathfrak{B}) lleva el nombre de Feller, si para cualesquiera $t > 0$ y $f \in C(X)$ se verifica

$$T_t f(x) = \int_X P(t, x, dy) f(y) \in C(X).$$

En otras palabras, una probabilidad de paso es de Feller, si el semigrupo que le corresponde deja invariante el espacio $C(X)$. Un proceso de Márkov que tiene probabilidad de paso de Feller también recibe el nombre de Feller. Un semigrupo engendrado por la probabilidad de paso de Feller, se puede considerar en el espacio $C(X)$. Su operador infinitesimal en este espacio se denomina operador C -infinitesimal de la probabilidad de paso correspondiente.

Teorema 2. *Si el espacio topológico X satisface el primer axioma de numerabilidad, entonces el operador C -infinitesimal de una probabilidad de paso continua y estocástica de Feller define unívocamente esta probabilidad de paso.*

15.2.4. Procesos en los compactos y semicompactos. Veamos ahora qué operadores pueden ser infinitesimales para cierta probabilidad de paso.

Supongamos primero que X es un compacto, \mathfrak{B} es la σ -álgebra de sus subconjuntos borelianos y $P(t, x, \Gamma)$, la probabilidad de paso de Feller en (X, \mathfrak{B}) , continua y estocástica. Se puede mostrar que en este caso $C(X) \stackrel{=}{{}} B_{\mathfrak{B}}(X)$ (véase en el p. 15.2.2 la definición del espacio $B_{\mathfrak{B}}(X)$). Esto significa que para toda $f \in C(X)$, $\|T_t f - f\| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow 0$.

Toda probabilidad de paso continua estocástica de Feller es, en el compacto (X, \mathfrak{B}) , uniformemente continua estocástica en el siguiente sentido. Supongamos que ρ es una métrica en el espacio X que en-

genera su topología, $U_\varepsilon(x)$ es una bola en X de radio ε y centro en el punto $x \in X$. La probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$ en (X, \mathfrak{B}) se llama uniformemente continua estocástica, si

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in X} (1 - P(t, x, U_\varepsilon(x))) = 0$$

para todo $\varepsilon > 0$.

De este modo, en concordancia con el teorema 5 del p. 14.2, entre los procesos de Márkov en un compacto, que son equivalentes entre sí y cuya probabilidad de paso es continua estocástica de Feller, existe un proceso que no tiene discontinuidades de segunda especie y que es continuo a la derecha. El teorema a seguir ofrece la descripción de los operadores infinitesimales de tales procesos.

Teorema 3. Sean X un compacto y A , un operador lineal en el espacio $C(X)$. Para que el operador A sea operador C -infinitesimal de cierta probabilidad de paso en (X, \mathfrak{B}) , continua estocástica de Feller, es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

- 1) el dominio de definición D_A del operador A es siempre denso en $C(X)$ (en el sentido de una métrica uniforme);
- 2) la ecuación

$$\lambda f - Af = g$$

tiene la solución $f \in D_A$ para cualesquiera $g \in C(X)$ y $\lambda > 0$;

- 3) si $f \in D_A$, $f(x_0) \geq 0$ y $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in X$, entonces $Af(x_0) \leq 0$.

Una probabilidad de paso se llama conservativa, si para todo $t \geq 0$ y todo $x \in X$ tenemos $P(t, x, X) = 1$. La probabilidad de paso será conservativa cuando y sólo cuando, su operador infinitesimal A posea la siguiente propiedad: $1 \in D_A$ y $A1 = 0$.

Si A es un operador infinitesimal de cierta propiedad de paso conservativa, se considera cumplida la siguiente propiedad:

- 3') si $f \in D_A$ y $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in X$, entonces $Af(x_0) \leq 0$.

Por ello, el operador lineal A en el espacio $C(X)$, donde X es un compacto, es un operador C -infinitesimal de cierta probabilidad de paso continua estocástica de Feller conservativa cuando y sólo cuando, quedan cumplidas las condiciones 1), 2), 3') y la condición: $1 \in D_A$ y $A1 = 0$.

Supongamos ahora que X es un semicompacto (es decir, un espacio de Hausdorff localmente compacto con base numerable). \mathfrak{B} es la σ -álgebra de sus subconjuntos borelianos. Designemos mediante $C_0(X)$ el espacio de todas las funciones continuas reales en X que tienden a cero cuando x sale de todos los compactos (esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X, |f(x)| > \varepsilon\}$ es un compacto en X). Sea $P(t, x, \Gamma)$ la probabilidad de paso en el espacio (X, \mathfrak{B}) . Diremos que ella satisface la condición C_0 , si $T_t f \in C_0(X)$ para cualesquiera $t > 0$ y $f \in C_0(X)$. El operador infinitesimal del semigrupo T_t en el espacio $C_0(X)$ se denomina operador C_0 -infinitesimal de la probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$.

Teorema 4. La probabilidad de paso continua estocástica en el semicompacto X que satisface la condición C_0 se determina unívocamente por su operador C_0 -infinitesimal.

Una probabilidad de paso que satisface las condiciones del teorema 4 posee las siguientes propiedades:

- a) es uniformemente continua estocástica en los compactos;

b) para dicha probabilidad $C_0(X) \subseteq B_0(X)$.

Por consiguiente, si la probabilidad de paso de un proceso de Márkov satisface las condiciones del teorema 4, también en este caso se puede elegir el proceso de un modo tal que sea continuo a la derecha y no tenga discontinuidades de segunda especie.

El teorema que sigue describe los operadores infinitesimales de tales procesos.

Teorema 5. Sean X un semicompacto y A , un operador lineal en el espacio $C_0(X)$. Para que A sea operador C_0 -infinitesimal de cierta probabilidad de paso en X , continua estocástica y satisficente la condición C_0 , es necesario y suficiente que dicho operador satisfaga las condiciones 1)—3) del teorema 3 (en las condiciones 1), 2) se debe sustituir $C(X)$ por $C_0(X)$).

15.3. Operadores característicos de los procesos rigurosos de Márkov

15.3.1. Procesos rigurosos de Márkov. Sea $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso de Márkov homogéneo en el espacio fásico (X, \mathfrak{B}) con un espacio de sucesos elementales Ω . Una función $\tau = \tau(\omega)$, $\omega \in \Omega$, de valores numéricos se llama momento de Márkov, si están cumplidas las siguientes condiciones:

- a) $0 \leq \tau(\omega) \leq \zeta(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$;
 b) para todo $t \geq 0$ $\{\tau(\omega) \leq t < \zeta(\omega)\} \in \mathfrak{R}_t$.

Designemos $\Omega_\tau = \{\omega: \tau(\omega) < \zeta(\omega)\}$. Para $\omega \in \Omega_\tau$ se tiene $\tau(\omega) = \zeta(\omega)$.

Es evidente que, al hacer $\tau(\omega) = t_0$ para $\bar{\omega} \in \Omega_{t_0}$ y $\tau(\omega) = \zeta(\omega)$ para $\omega \notin \Omega_{t_0}$, obtendremos un momento de Márkov (aquí, t_0 es un número no aleatorio).

Hagamos ahora

$$\tau_\Gamma(\omega) = \inf \{s: 0 \leq s < \zeta(\omega), \xi(s, \omega) \in \Gamma\}, \Gamma \in \mathfrak{B},$$

si el conjunto entre las llaves es no vacío; de lo contrario, hacemos $\tau_\Gamma(\omega) = \zeta(\omega)$. La magnitud τ_Γ se llama momento de la primera salida del conjunto Γ . Si X es un espacio topológico, el proceso es continuo a la derecha y el conjunto Γ es abierto o cerrado, entonces la magnitud τ_Γ es un momento de Márkov.

Sea, ahora, $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ un momento de Márkov progresivo medible (esto significa que la aplicación $\xi(s, \omega)$ del espacio $([0, t] \times \Omega_t, \mathcal{F}_t^0 \times \mathfrak{R}_t)$ en el espacio (X, \mathfrak{B}) es medible para todo t). Si τ es un momento de Márkov, entonces la aplicación $\xi(\tau(\omega), \omega)$ define una aplicación medible del espacio $(\Omega_\tau, \mathfrak{R}_\tau)$ en el espacio (X, \mathfrak{B}) . (Recordemos que \mathfrak{R}_τ es una totalidad de todos los $A \in \mathfrak{R}$ tales que $A \cap \{\tau \leq t < \zeta\} \in \mathfrak{R}_t$).

Definición. Un proceso de Márkov progresivo medible $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ se llama rigurosamente de Márkov, si para cualesquiera $t \geq 0$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ y para todo momento de Márkov τ se verifica la correlación

$$P_x \{\xi(t + \tau) \in \Gamma | \mathfrak{R}_\tau\} = P(t, \xi(\tau), \Gamma) \text{ (c.p.c. } \Omega_\tau, P_x).$$

El teorema que sigue proporciona una condición suficiente para que un proceso de Márkov sea riguroso.

Teorema 1. *Un proceso de Márkov de Feller continuo a la derecha es en el espacio fásico topológico rigurosamente de Márkov.*

Sea $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso riguroso de Márkov. Determinemos los operadores de desplazamiento θ_τ para $A \in \mathfrak{R}$ y el momento de Márkov τ , haciendo uso de la fórmula

$$\theta_\tau A = \bigcup_{t \geq 0} (\theta_t A) \cdot \{\tau - t\}.$$

Si η es una magnitud aleatoria \mathfrak{R} -medible, entonces hagamos

$$\theta_\tau \eta(\omega) = \theta_\tau \eta(\omega)$$

para $\omega \in \{\tau(\omega) - t < \zeta(\omega)\}$. La función $\theta_\tau \eta$ está definida solo en el conjunto Ω_τ .

Las siguientes propiedades del proceso riguroso de Márkov son sencillos corolarios de la definición. Si $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ es un proceso riguroso de Márkov y τ es un momento de Márkov, entonces:

- 1) $P_x\{\theta_\tau A \in \mathfrak{R}_\tau\} = P_{\xi(\tau)}(A)$ (c.p.c. Ω_τ, P_x) para todo $A \in \mathfrak{R}$;
- 2) para cualesquiera $A \in \mathfrak{R}_\tau$ y $B \in \mathfrak{R}$ tenemos

$$P_x\{A \cap \theta_\tau B\} = \int_A P_{\xi(\tau)}(B) P_x(d\omega),$$

- 2) para toda magnitud aleatoria acotada \mathfrak{R} -medible η se tiene

$$M_x\{\theta_\tau \eta \in \mathfrak{R}_\tau\} = M_{\xi(\tau)} \eta \text{ (c.p.c. } \Omega_\tau, P_x);$$

- 4) para toda magnitud aleatoria acotada \mathfrak{R}_τ -medible η y toda magnitud acotada \mathfrak{R} -medible κ se verifica

$$M_x\{\eta \theta_\tau \kappa\} = M_x\{\eta M_{\xi(\tau)} \kappa\}.$$

En conformidad con la definición 6 del p. 14.2, un proceso de Márkov homogéneo normal $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ en el espacio fásico (X, \mathfrak{B}) , donde X es un semicompacto y \mathfrak{B} , la σ -álgebra de sus subconjuntos borelianos, se llama estándar, siempre que estén cumplidas las condiciones:

- a) $\mathfrak{R}_t = \mathfrak{R}_{t+}, t \geq 0$;
- b) el proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ es continuo a la derecha y tiene límites a la izquierda;
- c) el proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ es rigurosamente de Márkov;
- d) el proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ es casi continuo a la izquierda.

Teorema 2. *Si $P(t, x, \Gamma)$ es una probabilidad de paso de Feller, estocástica continua en un compacto, o bien una probabilidad de paso estocástica continua en un semicompacto satisficente la condición C_0 , entonces existe un proceso de Márkov estándar con la probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$.*

Como conclusión de este punto daremos un ejemplo de un proceso de Márkov que no es rigurosamente de Márkov.

EJEMPLO. Sea $X = (-\infty, \infty)$ y \mathfrak{B} , una σ -álgebra de los conjuntos borelianos en X . Hagamos para $t > 0, x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}$

$$P(t, x, \Gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\Gamma} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\} dy, & \text{si } x \neq 0; \\ \chi_{\Gamma}(x), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que según esta probabilidad de paso se puede construir un proceso de Márkov $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ que sea homogéneo continuo y que no se interrumpa. Para este proceso la magnitud aleatoria (finita!) $\tau = \tau_{X \setminus \{0\}}$ que respresenta el momento de la primera salida del conjunto $X \setminus \{0\}$, es un momento de Márkov. Supongamos que el conjunto A consta de aquellos ω , para los cuales existe un t tal que con cualquier $s \geq t$ $\xi(s, \omega) = 0$. Entonces, $P_x(A) = 0$, cuando $x \neq 0$, y $P_0(A) = 1$. Luego, es evidente que $0_t A = A$, a consecuencia de lo cual la igualdad

$$P_x(0_t A) = M_x P_{\xi(t)}(A)$$

no puede cumplirse puesto que cuando $x \neq 0$, el primer miembro es nulo, mientras que el segundo miembro es igual a uno. Esto quiere decir que el proceso $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ no puede ser rigurosamente de Márkov.

15.3.2. Operador característico. Sea $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso en el semicompacto X , continuo a la derecha y de Feller (y, consecuentemente, rigurosamente de Márkov). Si A es un operador infinitesimal de este proceso y $f \in D_A$, se verifica la fórmula

$$M_x f(\xi(t)) - f(x) = M_x \int_0^t A f(\xi(s)) ds$$

para cualesquiera $t \geq 0$, $x \in X$ (véase el p. 15.2.2, propiedad 2) de operador infinitesimal).

Resulta pues, que en ciertos casos esta fórmula queda en vigor, cuando t se sustituye por el momento de Márkov τ . A saber, sea τ un momento de Márkov para el proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ y supongamos que $M_x \tau < \infty$. En este caso, si $f \in D_A$, se verifica

$$M_x f(\xi(\tau)) - f(x) = M_x \int_0^{\tau} A f(\xi(s)) ds. \quad (3.1)$$

El punto $x_0 \in X$ se llamará absorbente, si $P_{x_0} \{\xi(t) = x_0\} = 1$ para todo $t \geq 0$. Para cualquier punto absorbente x_0 se tiene que $T_j f(x_0) = f(x_0)$ para todo t y toda $j \in B(X)$. Si x es un punto no absorbente, siempre existe un entorno suyo U tal que $M_x \tau_U < \infty$. Aquí, τ_U representa el momento de la primera salida del conjunto abierto U .

Diremos que la sucesión de entornos U_n , $n = 1, 2, \dots$, del punto x converge hacia x ($U_n \downarrow x$), si para todo entorno U del punto x existe tal n_0 que para $n > n_0$ sea $U_n \subset U$.

Supongamos que $x \in X$ es un punto no absorbente del proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ y $U_n \downarrow x$. En este caso, de la fórmula (3.1) se desprende la correlación

$$A f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_x f(\xi(\tau_n)) - f(x)}{M_x \tau_n}, \quad (3.2)$$

donde $\tau_n = \tau_{U_n}$, siempre que $f \in D_A$ y la función $A f$ es continua en el punto x . Cuando x es un punto absorbente, $\tau_{U_n} = \infty$ para todo

entorno U del punto x . Por esta razón podemos considerar que el segundo miembro en la fórmula (3.2) se anula en un punto absorbente. Lo mismo sucede con el primer miembro.

De este modo, si A es un operador C -infinitesimal del proceso de Feller, continuo a la derecha, y $f \in D_A$, entonces el valor de la función Af , para todo $x \in X$, puede calcularse según (3.2).

Designemos mediante $D_{\mathfrak{A}}^x$ una totalidad de todas las funciones $f \in C(X)$, para las cuales con $x \in X$ dado existe el límite

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_x f(\xi(\tau_n)) - f(x)}{M_x \tau_n},$$

donde U_n es una sucesión arbitraria de entornos del punto x que converge hacia x , en tanto que $\tau_n = \tau_{U_n}$. Para $f \in \bigcap_{x \in X} D_{\mathfrak{A}}^x$ el límite

correspondiente existe con $x \in X$ cualquiera y define cierta función $\mathfrak{A}f(x)$. El operador \mathfrak{A} se llama **operador característico del proceso**. Su dominio de definición $D_{\mathfrak{A}} = \bigcap_{x \in X} D_{\mathfrak{A}}^x$ se compone de todas las funciones $f \in C(X)$, para las cuales el límite en el segundo miembro de la fórmula (3.2) existe siempre, cualquiera que sea $x \in X$. De lo anterior fluye que el operador característico de un proceso de Feller, continuo a la derecha, en el semicompacto X es la dilatación de su operador C -infinitesimal. Esto significa que $D_A \subseteq D_{\mathfrak{A}}$ y para $f \in D_A$ se verifica la igualdad: $Af(x) = \mathfrak{A}f(x)$.

Si U es un subconjunto abierto de X y $\tau = \tau_U$ es el momento de la primera salida de U , entonces hacemos

$$\pi_U(x, \Gamma) = P_x(\xi(\tau) \in \Gamma), \quad x \in X, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

La probabilidad $\pi_U(x, \Gamma)$ se denomina probabilidad de salida del conjunto U . En términos de las probabilidades de salida, el operador característico puede ser escrito en la forma

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int f(y) \pi_{U_n}(x, dy) - f(x)}{M_x \tau_{U_n}}, \quad f \in D_{\mathfrak{A}}, \quad U_n \downarrow x.$$

Así pues, todo operador característico se define por las probabilidades de salida y por el tiempo medio hasta la salida de los entornos del punto inicial, tan pequeños como se quiera. Si el proceso no se interrumpe y es continuo, entonces $\xi(\tau_U)$ pertenece a la frontera del conjunto U . Por eso, para los procesos continuos el operador característico es local.

Observemos que para los procesos equivalentes los operadores característicos coinciden. Sin embargo, si para dos procesos coinciden sus operadores característicos, esto todavía no significa que los procesos son equivalentes.

En ciertos casos resulta posible describir la relación existente entre los operadores infinitesimal y característico con mayor precisión.

Teorema 3. 1). *Supongamos que $(\xi(t), \mathfrak{M}_t, P_x)$ es un proceso de Feller en el compacto X , estocástico continuo e ininterrumpido. Sea A*

el operador C -infinitesimal de este proceso. Entonces

$$D_A = D_{\mathfrak{R}} \cap C(X) \cap \{f : \mathfrak{R}f \in C(X)\}.$$

2) Sea $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso en el compacto X , estocástico continuo e ininterrumpido, que satisface la condición C_0 , y sea A su operador C -infinitesimal. En este caso

$$D_A = D_{\mathfrak{R}} \cap C_0(X) \cap \{f : \mathfrak{R}f \in C_0(X)\}.$$

15.4. Procesos con un conjunto numerable de estados

15.4.1. Clasificación de los puntos. Sea $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso de Márkov en el espacio fásico (X, \mathfrak{R}) que satisface la condición (S): si $\xi(s, \omega) = x$ para todos los valores racionales de s en el intervalo (α, β) , entonces $\xi(s, \omega) = x$ también para todos los $s \in (\alpha, \beta)$. (Esta condición se considera cumplida, si el proceso en el espacio topológico es continuo a la derecha.)

Designemos mediante τ_x el momento de la primera salida del punto x . Entonces, τ_x es un momento de Márkov y

$$P_x\{\tau_x > t\} = e^{-a(x)t},$$

donde $a(x)$ es una función no negativa de x , igual, quizás, en ciertos puntos a $+\infty$.

Así pues, para todo punto $x \in X$ existen tres posibilidades:

- 1) $a(x) = 0$; en este caso $\tau_x = +\infty$ y el punto x se llama **absorbente** (véase el p. 15.3.2);
- 2) $a(x) = +\infty$; en este caso $\tau_x = 0$ y el punto x se denomina **de paso**;
- 3) $0 < a(x) < +\infty$; en este caso $0 < \tau_x < +\infty$ y x se llama **punto de retención**.

Si convenimos en considerar que $\frac{1}{0} = +\infty$ y $\frac{1}{+\infty} = 0$, entonces en cada uno de los tres casos, evidentemente, $a(x) = (M_x \tau_x)^{-1}$.

Un proceso de Márkov $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ se llama **irregular**, si para cualesquiera ω y $t \in [0, \zeta(\omega))$ existe un δ positivo (dependiente de t y ω) tal que para todo $h \in [0, \delta)$ se tiene $\xi(t) \neq \xi(t+h)$. El momento t_0 se llama momento de salto de la trayectoria $\xi(t, \omega)$, si existe una sucesión $t_n \uparrow t_0$ tal que $\xi(t_n, \omega) \neq \xi(t_0, \omega)$, $n = 1, 2, \dots$. El operador infinitesimal de un proceso irregular es, de hecho, la contracción de un operador que a la función $f \in B(X)$ le pone en correspondencia otra función, a saber,

$$-a(x)f(x) + a(x)M_x f(\xi(\tau_x)) = -a(x)f(x) + a(x) \int_X f(y) \pi(x, dy),$$

donde $a(x) = (M_x \tau_x)^{-1}$, $\pi(x, \Gamma) = P_x\{\xi(\tau_x) \in \Gamma\}$ (evidentemente, el proceso irregular está privado de puntos de paso, por lo cual $a(x) \neq \infty$ para $x \in X$).

Un proceso irregular se denomina **escalonado**, si para todo ω el conjunto de los momentos de salto no tiene puntos límites dentro del

intervalo $[0, \zeta(\omega))$. Si $P(t, x, \Gamma)$ es una probabilidad de paso en el espacio fásico (X, \mathfrak{B}) y si uniformemente respecto de $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(t, x, x) = 1,$$

entonces existe un proceso irregular con la probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$.

15.4.2. Diferenciabilidad de las probabilidades de paso y ecuaciones de Kolmogórov. Examinemos más detalladamente los procesos con un número numerable de estados. Sea X un conjunto numerable (o finito) y sea \mathfrak{B} la σ -álgebra de todos sus subconjuntos. En este caso resulta suficiente considerar la probabilidad de paso a los conjuntos de un punto $P(t, x, y) = P(t, x, \{y\})$, puesto que $P(t, x, \Gamma) = \sum_{y \in \Gamma} P(t, x, y)$. La función $P(t, x, y)$, $t \geq 0$, $x, y \in X$, satisface

las condiciones:

a) $P(t, x, y) \geq 0$;

b) $\sum_{y \in X} P(t, x, y) \leq 1$;

c) $P(s+t, x, y) = \sum_{z \in X} P(s, x, z) P(t, z, y)$, $s, t \geq 0$, $x, y \in X$.

La probabilidad de paso $P(t, x, y)$ se denomina estocástica continua, si se cumple la condición

d) para cualesquiera x, y $\lim_{t \rightarrow 0} P(t, x, y) = \delta(x, y)$, donde

$\delta(x, y) = 0$ para $x \neq y$ y $\delta(x, y) = 1$, para $x = y$.

Los números $P(t, x, y)$, $x, y \in X$, que satisfacen las condiciones a) — d), forman, para $t \geq 0$, una matriz $P(t)$, llamada semiestocástica. Si, en lugar de la condición b), queda cumplida la condición

$$\sum_{y \in X} P(t, x, y) = 1$$

para cualesquiera $t \geq 0$ y $x \in X$, la matriz $P(t)$ se llama estocástica. Es evidente que

$$P(t) P(s) = P(s) P(t) = P(s+t).$$

Teorema 1. Sean dadas las funciones $P(t, x, y)$, $t \geq 0$, $x, y \in X$, que satisfacen las condiciones a) — d). En este caso:

1) para todo $x \neq y$ existen límites finitos

$$a(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t, x, y)}{t};$$

2) para todo $x \in X$ existe un límite

$$a(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P(t, x, x)}{t},$$

igual, quizás, a $-\infty$;

3) para todo $x \in X$

$$\sum_{\substack{y \in X \\ y \neq x}} a(x, y) \leq a(x).$$

Si un proceso con la probabilidad de paso $P(t, x, y)$ satisface la condición (S) del p. 15.4.1 y τ_x es el momento de la primera salida del estado x , entonces

$$P_x\{\tau_x > t\} = e^{-\bar{a}(x)t},$$

donde $0 \leq \bar{a}(x) < +\infty$. Se puede mostrar que en el caso dado $a(x) = -\bar{a}(x)$, donde $a(x)$ está introducida en la afirmación 2) del teorema 1. De este modo, a base de la función $a(x)$ podemos clasificar todos los puntos del espacio X en los de paso ($a(x) = +\infty$), los absorbentes ($a(x) = 0$) y los de retención ($0 < a(x) < +\infty$).

Un punto x , que no es de paso, se llama regular, si

$$a(x) = \sum_{y \neq x} a(x, y).$$

Es evidente que los puntos absorbentes son regulares. Un proceso, todos los puntos del cual son regulares, se denomina local regular.

Si, para cierto $x \in X$, $a(x) < +\infty$, entonces para cualesquiera $y \in X$, $t \geq 0$ se verifican las desigualdades

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} \geq \sum_{z \in X} a(x, z) P(t, z, y); \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial P(t, y, x)}{\partial t} \geq \sum_{z \in X} P(t, y, z) a(z, x), \quad (4.2)$$

donde se ha puesto $a(x, x) = -a(x)$.

Teorema 2. Si para la función $P(t, x, y)$, $t \geq 0$, $x, y \in X$, que satisface las condiciones a) - d), todos los puntos son regulares, entonces queda cumplido el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = \sum_{z \in X} a(x, z) P(t, z, y), \quad t \geq 0, \quad y, x \in X. \quad (4.3)$$

El sistema de ecuaciones (4.3) lleva el nombre de primer sistema de ecuaciones de Kolmogórov. Su condición inicial es la correlación

$$\lim_{t \downarrow 0} P(t, x, y) = \delta(x, y), \quad x, y \in X.$$

Designemos mediante A una matriz con los elementos $a(x, y)$, $x, y \in X$. Las ecuaciones (4.3) en la forma matricial se representan como sigue

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = AP(t),$$

donde $\frac{\partial P(t)}{\partial t}$ es una matriz con los elementos $\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t}$, $x, y \in X$.

El sistema de ecuaciones (4.3) puede escribirse, además, en la forma siguiente:

$$P(t, x, y) = \delta(x, y) e^{-a(x)t} + \int_0^t e^{-a(x)s} \sum_{z \neq x} a(x, z) P(t-s, z, y) ds.$$

Cuando $y \neq x$ hagamos $\pi(x, y) = \frac{a(x, y)}{a(x)}$, si $0 < a(x) < +\infty$, y $\pi(x, y) = 0$ para $a(x) = 0$. En este caso el sistema precedente de ecuaciones integrales puede ser escrito en la forma

$$P(t, x, y) = \int_0^t a(x) e^{-a(x)s} \sum_{z \neq x} \pi(x, z) P(t-s, z, y) ds, \quad x \neq y \quad x, y \in X;$$

$$P(t, x, x) = e^{-a(x)t} + \int_0^t a(x) e^{-a(x)s} \sum_{z \neq x} \pi(x, z) \times \\ \times P(t-s, z, x) ds, \quad x \in X.$$

A estas igualdades se les atribuye con facilidad un significado probabilístico. Por ejemplo, la segunda de ellas puede ser interpretada así: al salir del estado x , el sistema puede encontrarse en el momento de tiempo t en el estado x , o bien sin salir de x durante todo este tiempo (la probabilidad de este suceso es igual a $e^{-a(x)t}$) o bien, al salir por primera vez del estado x en el momento de tiempo s (la probabilidad de este suceso es igual a $a(x) e^{-a(x)s} ds$), el sistema pasará al estado $z \neq x$ (la probabilidad de este suceso es $\pi(x, z)$) y, a continuación, durante el resto de tiempo $t-s$, pasará del estado z al estado x (la probabilidad de este suceso es igual a $P(t-s, z, x)$). En este caso hemos de sumar (integrar) el producto de las probabilidades mencionadas respecto a todos los momentos posibles de la primera salida del estado x (es decir, respecto a s , a partir de 0 hasta t) y respecto de todos los estados $z \neq x$. Por consiguiente, las magnitudes $\pi(x, y)$ introducidas se interpretan como las probabilidades de que en el momento de la primera salida del estado x el sistema se encontrará en el estado y .

Luego, al sustituir en (4.2) el signo de desigualdad por el de igualdad, obtenemos el segundo sistema de ecuaciones de Kolmogórov:

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = \sum_{z \in X} P(t, x, z) a(z, y), \quad x, y \in X. \quad (4.4)$$

No obstante, incluso en el caso cuando todos los puntos $x \in X$ son regulares, no se puede, en general, afirmar que las probabilidades $P(t, x, y)$ (es decir, las funciones que satisfacen las condiciones a) — d)) satisfacen el sistema de ecuaciones (4.4). La condición suficiente para que las probabilidades $P(t, x, y)$ satisfagan el sistema de ecuaciones (4.4) es contenida en la siguiente afirmación.

Teorema 3. *Supongamos que los números $P(t, x, y)$, $t \geq 0$, $x, y \in X$, forman una matriz estocástica para la cual $\sup a(x) < \infty$. Entonces, todos los puntos $x \in X$ son regulares y las probabilidades $P(t, x, y)$ satisfacen el segundo sistema de ecuaciones de Kolmogórov.*

Podemos mostrar que el carácter acotado de la función $a(x)$ es equivalente a la condición

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in X} (1 - P(t, x, x)) = 0.$$

En este caso, como se deduce del p. 15.4.1, el proceso con la probabilidad de paso $P(t, x, y)$ es equivalente a un proceso escalonado.

Si X es finito y $P(t)$, una matriz estocástica, entonces la función $a(x)$ es acotada, todos los puntos $x \in X$ son regulares y el segundo sistema de ecuaciones de Kolmogórov queda cumplido.

15.4.3. Solución mínima. Hasta ahora la probabilidad de paso $P(t, x, y)$, $t \geq 0$, $x, y \in X$, se ha considerado dada y según ella se construya la matriz $A = \|a(x, y)\|$, $x, y \in X$. Examinemos ahora el problema inverso. Sea dada la matriz $A = \|a(x, y)\|$, $x, y \in X$, que satisface la condición

$$A) \text{ para } x \neq y, a(x, y) \geq 0, y -\infty < \sum_{y \in X} a(x, y) \leq 0$$

cualquiera que sea $x \in X$.

¿Existen una probabilidad de paso $P(t, x, y)$ para la cual se verifique $\frac{\partial P(0, x, y)}{\partial t} = a(x, y)$ con cualesquiera $x, y \in X$?

Para responder a esta pregunta es natural examinar dos sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x, y) = \sum_{z \in X} a(x, z) Q(t, z, y), \quad x, y \in X; \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x, y) = \sum_{z \in X} Q(t, x, z) a(z, y), \quad x, y \in X \quad (4.6)$$

con la condición inicial $\lim_{t \rightarrow 0} Q(t, x, y) = \delta(x, y)$.

Hagamos

$$P^0(t, x, y) = \delta(x, y) e^{-a(x)t};$$

$$P^{(n+1)}(t, x, y) = \sum_{z \in X} \int_0^t e^{-a(x)(t-s)} a(x, z) P^{(n)}(s, z, y) ds, \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Se puede mostrar que las funciones $P^{(n)}(t, x, y)$ pueden ser definidas también mediante el siguiente sistema de igualdades:

$$P^{(n+1)}(t, x, y) = \sum_{z \neq y} \int_0^t e^{-a(y)(t-s)} a(z, y) P^{(n)}(s, x, z) ds,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Sea

$$\bar{P}(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(t, x, y).$$

Teorema 4. Para cualquier matriz A , que satisfaga la condición A), la función construida arriba $\bar{P}(t, x, y)$, $t \geq 0$, $x, y \in X$, es la solución de los sistemas de ecuaciones (4.5) y (4.6) que satisface las condiciones a) — d).

Podemos mostrar que si $P(t, x, y)$, $t \geq 0$, $x, y \in X$, es una función arbitraria satisfaciendo las condiciones a) - d) y la correlación

$$\frac{\partial P}{\partial t}(0, x, y) = a(x, y), \quad x, y \in X,$$

con la matriz dada A , entonces $P(t, x, y) \geq \bar{P}(t, x, y)$, donde $\bar{P}(t, x, y)$ es una función construida arriba según la misma matriz A . Por esta razón, $\bar{P}(t, x, y)$ se llama solución mínima correspondiente a la matriz A .

Si para la matriz dada A , satisfaciendo la condición A), la solución mínima $\bar{P}(t, x, y)$ posee la propiedad de que $\sum_{y \in X} \bar{P}(t, x, y) = 1$ (es decir, la matriz $\bar{P}(t)$ es estocástica), entonces toda función $P(t, x, y)$, que satisface las condiciones a) - d) y la condición $\frac{\partial P}{\partial t}(0, x, y) = a(x, y)$, $x, y \in X$, coincide con $\bar{P}(t, x, y)$. En particular, en este caso $\bar{P}(t, x, y)$ es la única solución de los sistemas de ecuaciones (4.5) y (4.6), con la particularidad de que la matriz A ha de satisfacer la condición $\sum_{y \in X} a(x, y) = 0$ en lugar de la correspondiente desigualdad en la condición A).

15.4.4. Procesos regulares. Supongamos que $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ es un proceso local regular ininterrumpido que satisface la condición (S) y sea $P(t, x, y)$ su probabilidad de paso. Hagamos $\tau_1 = \inf\{t: \xi(t) \neq \xi(0)\}$ y, si $\xi(t) = \xi(0)$ para todo t , suponemos $\tau_1 = +\infty$. El momento τ_1 se llama momento del primer salto. Determinemos ahora la sucesión de momentos τ_n por la fórmula

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{\tau_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

con la particularidad de que si $\tau_n(\omega) = +\infty$, consideramos $\tau_j(\omega) = +\infty$ para todo $j \geq n$. Es evidente que τ_n es el momento del n -ésimo salto. Hagamos $\tau_0 = 0$ y $\zeta_n = \xi(\tau_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Con ello, si $\tau_n(\omega) = +\infty$, entonces consideramos $\zeta_n(\omega) = \zeta_{n-1}(\omega)$. En este caso la sucesión $\{\zeta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ forma una cadena de Márkov homogénea. Su probabilidad de paso por un paso se determina mediante las correlaciones:

$$\pi(x, y) = \frac{a(x, y)}{a(x)}, \quad \text{si } x \neq y, a(x) > 0;$$

$$\pi(x, x) = 0, \quad \text{si } a(x) > 0;$$

$$\pi(x, y) = \delta(x, y), \quad \text{si } a(x) = 0$$

Llamemos el proceso $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ regular, si para todo $x \in X$

$$P_x(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty) = 1.$$

Un proceso regular tiene sólo un número finito de saltos en cada intervalo de tiempo finito. Se puede mostrar que el proceso es regular,

cuando y sólo cuando, para todo $x \in X$

$$P_x \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a(\xi_k)} = +\infty \right\} = 1$$

(considerando, en tal caso que la suma es infinita, si aunque sólo para uno de los k se tiene que $a(\xi_k) = 0$). De aquí se desprenden dos condiciones suficientes de regularidad de un proceso:

1) para que un proceso sea regular, es suficiente que la función $a(x)$ sea acotada;

2) para que un proceso sea regular, es suficiente que la cadena de Márkov $(\xi_n, n = 0, 1, \dots)$ sea reversible.

Ahora, sea $\frac{\partial P}{\partial t}(0, x, y) = a(x, y)$, $x, y \in X$. Como el proceso $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ es local regular, entonces $\sum_{y \in X} a(x, y) = 0$. Por ello, la función $(P(t, x, y))$ satisface la ecuación de Kolmogórov. Según la matriz $A = \|a(x, y)\|$ definamos las funciones $P^{(n)}(t, x, y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, y $\bar{P}(t, x, y)$ de modo igual al empleado más arriba. En este caso

$$P^{(0)}(t, x, y) = P_x\{\tau_1 > t, \xi(t) = y\};$$

$$P^{(n)}(t, x, y) = P_x\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}, \xi(t) = y\}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\bar{P}(t, x, y) = P_x\{\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n > t, \xi(t) = y\}.$$

Por consiguiente, si un proceso es regular, entonces $P(t, x, y) = \bar{P}(t, x, y)$ y, por lo tanto, $P(t, x, y)$ es la única solución del primer sistema de ecuaciones de Kolmogórov. Es válida también la afirmación inversa: si el primer sistema de ecuaciones de Kolmogórov tiene una solución única, el proceso es regular. Además, la probabilidad de paso de un proceso regular satisface el segundo sistema de ecuaciones de Kolmogórov.

Sea $B(X)$ un espacio de todas las funciones reales acotadas en X . Si en X introducimos una topología discreta, obtendremos que $B(X) = C(X)$, donde $C(X)$ será un espacio de funciones continuas de valores reales acotadas en X . Para un proceso local regular (separable) se ha determinado el operador característico

$$\mathfrak{A}f(x) = \frac{M_x f(\xi(\tau_1)) - f(x)}{M_x \tau_1} = \sum_{y \in X} a(x, y) f(y),$$

donde $f \in B(X)$. De este modo, la acción del operador \mathfrak{A} sobre la función f se reduce a la multiplicación de la matriz A por el vector columna $f(y)$, $y \in X$. La función $\mathfrak{A}f(x)$, en este caso, puede resultar no acotada. Designemos $D_{\mathfrak{A}} = \{f: f \in B(X), \mathfrak{A}f \in B(X)\}$. Hemos visto que según la matriz A se regenera unívocamente el proceso hasta la primera acumulación de saltos, es decir, hasta el momento $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$. Por eso, el operador característico determina unívocamente el proceso (con la exactitud salvo la equivalencia) por lo menos en dos casos: 1) cuando el proceso es regular; 2) cuando el proceso es

interrumpe en el momento de tiempo η . En el primer caso la probabilidad de paso es la única solución del primer sistema de ecuaciones de Kolmogórov (y también del segundo). En el segundo caso la probabilidad de paso es la solución mínima de los sistemas mencionados de ecuaciones. (Por supuesto, si $\eta = +\infty$, entonces ambos casos coinciden). Hemos de notar, refiriéndonos al segundo caso, que si $\eta(\omega) < +\infty$, entonces $\xi(t, \omega)$ sale de todos los compactos cuando $t \uparrow \eta(\omega)$. Todos los conjuntos compuestos de un número finito de puntos son compactos de X .

Para construir un proceso de Márkov ininterrumpido según el operador característico dado \mathfrak{A} (es decir, según la matriz dada A que satisface la condición A) con una igualdad introducida en lugar de la desigualdad correspondiente), se deben fijar las distribuciones del proceso en los momentos de acumulación de los saltos. Evidentemente, esto podemos hacerlo de una manera no unívoca. Las cuestiones relacionadas con la construcción de los procesos de Márkov para los cuales el operador dado \mathfrak{A} es característico, constituyen la llamada teoría de fronteras para los procesos de Márkov.

15.4.5. Ejemplos. 1) Proceso de crecimiento puro. Supongamos que X se compone de números enteros no negativos y sea dada una sucesión numérica $a(x)$, $x = 0, 1, 2, \dots$, tal que $0 < a(x) < \infty$. Hagamos $a(x, x+1) = a(x)$, $x = 0, 1, 2, \dots$, $a(x, x) = -a(x)$ y, por fin, $a(x, y) = 0$, si $y \neq x+1$, $y \neq x$. De este modo, queda definida la matriz A que satisface la condición A), con la particularidad de que $\sum_{y \in X} a(x, y) = a(x, x) + a(x, x+1) = 0$.

El primer sistema de ecuaciones de Kolmogórov tiene por expresión

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = -a(x)P(t, x, y) + a(x)P(t, x+1, y),$$

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

Escribamos el segundo sistema:

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = -a(y)P(t, x, y) + a(y-1)P(t, x, y-1),$$

$$y = 1, 2, \dots$$

Pasando a la transformación de Laplace, es fácil de obtener

$$\varphi_p(x, y) = \left(\prod_{k=x}^{y-1} a(k) \right) \prod_{k=x}^y \frac{1}{p + a(k)},$$

donde $\varphi_p(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-pt} P(t, x, y) dt$, $x, y \in X$, $x \leq y$, $p > 0$. Si entre los números $a(k)$ no hay iguales, entonces $P(t, x, y) = 0$, si

$y < x$, $P(t, x, y) = 1 - e^{-a(x)t}$ y, cuando $y > x$,

$$P(t, x, y) = \left(\prod_{h=x}^{y-1} a(h) \right) \sum_{h=x}^y \frac{e^{-a(h)t}}{b(h)},$$

donde $b(k) = \prod_{\substack{r=x \\ r \neq k}}^y (a(r) - a(k))$. Esta es una solución mínima.

El momento de la primera acumulación de saltos $\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ representa en sí una suma de magnitudes aleatorias independientes τ_i , $i = 1, 2, \dots$, distribuidas según una ley exponencial, con la particularidad de que $P_x(\tau_i > t) = e^{-a(x+i-1)t}$. Por eso, para todo $x \in X$, $P_x(\zeta = +\infty) = 1$, si, y sólo si, la serie $\sum_{x \in X} [a(x)]^{-1}$ diverge.

Un proceso se llama proceso de crecimiento lineal, si $a(x) = x\lambda$, $x = 1, 2, \dots$, λ es un número entero. Es evidente que el proceso de crecimiento lineal es regular y sus probabilidades de paso coinciden con la solución mínima de la ecuación de Kolmogórov.

2. Procesos de reproducción y pérdida. Hagamos

$$a(x, y) = \begin{cases} -(\lambda_x + \mu_x), & \text{si } y = x, x = 0, 1, 2, \dots; \\ \lambda_x, & \text{si } y = x + 1, x = 0, 1, 2, \dots; \\ \mu_x, & \text{si } y = x - 1, x = 1, 2, \dots; \\ 0, & \text{si } |y - x| > 1. \end{cases}$$

Las ecuaciones de Kolmogórov tienen la forma

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = -(\lambda_x + \mu_x) P(t, x, y) + \mu_x P(t, x-1, y) + \lambda_x P(t, x+1, y), \quad x = 0, 1, 2, \dots (\mu_0 = 0);$$

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = -(\lambda_y + \mu_y) P(t, x, y) + \lambda_{y-1} P(t, x, y-1) + \mu_{y+1} P(t, x, y+1), \quad y = 0, 1, 2, \dots (\mu_0 = \lambda_{-1} = 0),$$

respectivamente, el primero y el segundo sistemas.

En los problemas de aplicación práctica un papel importante lo desempeñan las llamadas probabilidades estacionarias, es decir, los números $p(x)$, $x \in X$, que satisfacen las condiciones $p(x) \geq 0$, $\sum_{x \in X} p(x) = 1$ y $p(y) = \sum_{x \in X} p(x) P(t, x, y)$ para cualesquiera $y \in X$, y $t \geq 0$. Se puede mostrar que si $\mu_x > 0$ para $x = 1, 2, \dots$, entonces la condición necesaria y suficiente para que exista la distribución estacionaria consiste en la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}.$$

Si esta serie converge, entonces

$$p(x) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{x-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_x} p(0), \quad x = 1, 2, \dots;$$

$$p(0) = \left(1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{h-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_h} \right)^{-1}.$$

Si las probabilidades estacionarias existen, entonces $p(y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t, x, y)$, $y \in X$, cualquiera que sea $x \in X$.

15.5. Funcionales de los procesos de Márkov

15.5.1. Funcionales multiplicativas. Sea $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso de Márkov en el espacio fásico (X, \mathfrak{S}) . Una familia de funciones reales $\alpha_t = \alpha_t(\omega)$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$, se denomina funcional multiplicativa homogénea, si están cumplidas las condiciones:

M1) α_t es una magnitud aleatoria $\overline{\mathfrak{R}}_t$ -medible para todo $t \geq 0$;
 M2) para cualesquiera $t \geq 0$ y $h > 0$, casi por cierto respecto de la medida P_x , queda cumplida la correlación

$$\alpha_{t+h} = \alpha_h \theta_h \alpha_t,$$

cualquiera que sea $x \in X$.

En el p. 14.3. hemos considerado las funcionales multiplicativas que satisfacen una condición complementaria:

M3) para cualesquiera $t \geq 0$ y $x \in X$, casi por cierto respecto a P_x , se verifica

$$0 \leq \alpha_t \leq 1.$$

Si X es un espacio topológico y el proceso es continuo a la derecha, entonces de ejemplo de funcional multiplicativa puede servir una familia de magnitudes

$$\alpha_t = \exp \left\{ \int_0^t v(\xi(s)) ds \right\},$$

donde $v(x)$, $x \in X$, es una función continua acotada de valores reales. Si para todo $x \in X$, se verifica $v(x) \leq 0$, entonces α_t satisfacen también la condición M3).

15.5.2. Funcionales aditivas. Una familia de magnitudes aleatorias $\varphi_t = \varphi_t(\omega)$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$, se llama funcional aditiva homogénea del proceso $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$, si

A1) para todo $t \geq 0$ la magnitud aleatoria φ_t es $\overline{\mathfrak{R}}_t$ -medible;
 A2) para todo $t \geq 0$ y todo $h > 0$, casi por cierto respecto de P_x , se verifica la correlación

$$\varphi_{t+h} = \varphi_h + \theta_h \varphi_t,$$

sea cual fuese $x \in X$.

Como ejemplo de funcional aditiva sirve la integral

$$\varphi_t = \int_0^t v(\xi(s)) ds, \quad t \geq 0,$$

si $v(x)$ es una función acotada continua en X y el proceso $\xi(s)$ es continuo a la derecha.

Una funcional aditiva φ_t (omitimos aquí el término «homogénea») se llama no negativa, si para cualesquiera $t \geq 0$ y $x \in X$ se verifica $P_x(\varphi_t \geq 0) = 1$.

Dos funcionales φ_t y $\tilde{\varphi}_t$ se denominan equivalentes, si para cualesquiera $x \in X$ $t \geq 0$, se verifica $P_x(\varphi_t = \tilde{\varphi}_t) = 1$. Una funcional φ_t , $t \geq 0$, se llama continua, si para todo $x \in X$, casi por cierto respecto de P_x , las funciones $\varphi_t(\omega)$ son continuas como funciones de t con ω fijado. Para las funcionales aditivas homogéneas continuas con $x \in X$ cualquiera se tiene

$$P_x\{\partial_h \varphi_t = \varphi_{t+h} - \varphi_t \text{ para cualesquiera } t \geq 0 \text{ y } h > 0\} = 1.$$

Teorema 1. Sea φ_t una funcional aditiva homogénea continua no negativa del proceso continuo a la derecha $(\xi(t), \mathfrak{A}_t, P_x)$. Hagamos $g(t, x) = M_x e^{-\varphi_t}$. Entonces, para cualesquiera $x \in X$ y $t > 0$

$$\varphi_t = \lim_{h \downarrow 0} \int_0^t \frac{1 - g(h, \xi(s))}{h} ds,$$

donde el límite se entiende en el sentido de convergencia en probabilidad P_x .

Supongamos que $(\xi(t), \mathfrak{A}_t, P_x)$ es un proceso de Márkov continuo a la derecha en el espacio fásico topológico (X, \mathfrak{B}) , donde \mathfrak{B} es la σ -álgebra de los conjuntos borelianos en X y sea φ_t una funcional de este proceso, aditiva continua homogénea y no negativa. Si $f(x)$, $x \in X$, es una función boreliana no negativa, entonces, al hacer

$$I_t(f, \varphi) = \int_0^t f(\xi(s)) d\varphi_s,$$

obtendremos una nueva funcional del mismo tipo que φ_t . Observemos que la integral aquí se entiende en el sentido de Lebesgue — Stieltjes. Si la función $f(x)$ es acotada y continua, entonces

$$I_t(f, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi(s_{k+1})) [\varphi(s_{k+1}) - \varphi(s_k)],$$

donde $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t$, $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$.

15.5.3. Funcionales W . Una funcional aditiva homogénea no negativa y continua φ_t se llama funcional W , si para todo $t \geq 0$

$$\sup_{x \in X} M_x \varphi_t < \infty.$$

Si φ_t es una funcional W , entonces para cualesquiera n y $t \geq 0$ naturales se tiene

$$\sup_{x \in X} M_x (\varphi_t)^n \leq n! (\sup_{x \in X} M_x \varphi_t)^n.$$

Una función

$$f_t(x) = M_x \varphi_t, \quad t \geq 0, x \in X,$$

se llama característica de la funcional W . Se puede mostrar que la funcional W se determina por su característica unívocamente, siendo

$$\varphi_t = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_{\Delta s_k}(\xi(s_k)),$$

donde $0 = s_0 < s_1 \dots < s_n = t$, $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$, mientras que el límite se entiende en el sentido de convergencia en media cuadrática en la medida P_x , cualquiera que sea $x \in X$.

La característica de la funcional W satisface las condiciones:

W1) $f_t(x)$ es, para $t \geq 0$ fijado, una función \mathfrak{B} -medible de x y, para $x \in X$ fijado, es continua respecto de t y no decrece monótonamente; además,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = 0, \quad \sup_{x \in X} f_t(x) < \infty.$$

W2) para cualesquiera $t > 0$, $s > 0$ y $x \in X$ se tiene

$$f_{t+s}(x) = f_t(x) + M_x f_s(\xi(t)).$$

Toda función $f_t(x)$, que satisficase las condiciones W1) y W2), se llama función W .

El teorema que sigue contiene una condición necesaria y suficiente para que a una función W le corresponda una funcional W .

Teorema 2. Supongamos que X es un espacio separable métrico completo, $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$, un proceso continuo a la derecha y que la función $f_t(x)$ satisface las condiciones W1) y W2). Para que exista una funcional $W\varphi_t$, para la cual

$$f_t(x) = M_x \varphi_t,$$

es necesario y suficiente que para cualesquiera $x \in X$ y $t \geq 0$ sea

$$\lim_{h \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0} M_x \frac{1}{h} \int_0^t f_h(\xi(s)) f_\lambda(\xi(s)) ds = 0.$$

Una condición sencilla suficiente nos da el

Teorema 3. Supongamos que el proceso $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ satisface las condiciones del teorema antecedente y la función $W f_t(x)$ satisface la condición

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in X} f_t(x) = 0.$$

En este caso existe una funcional $W \varphi_t$ tal que $f_t(x) = M_x \varphi_t$, siendo

$$\varphi_t = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t \frac{f_h(\xi(s))}{h} ds,$$

donde el límite se entiende en el sentido de convergencia media cuadrática en la medida P_x , cualquiera que sea $x \in X$.

Sea, ahora, $f_t(x)$ una función W arbitraria. Siempre existe un límite $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(x)$, igual, quizás, al infinito. Si $f(x) < \infty$ para $x \in X$, entonces $f(x)$ satisface las condiciones:

E1) $T_t f(x) \leq f(x)$ para cualesquiera $x \in X$, $t \geq 0$; $f(x) \geq 0$;

E2) $\lim_{t \downarrow 0} T_t f(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Toda función satisfaciendo a las condiciones E1) y E2) se denomina excesiva. Si una función excesiva finita $f(x)$ sirve de límite, para $t \uparrow +\infty$, de la característica $f_t(x)$ de cierta funcional $W\varphi_t$, entonces existe el límite

$$\varphi_\infty = \lim_{t \uparrow +\infty} \varphi_t.$$

En este caso

$$f(x) = M_x \varphi_\infty.$$

Según $f(x)$ podemos restablecer con facilidad la característica de la funcional $W\varphi_t$. A saber,

$$f_t(x) = f(x) - T_t f(x).$$

De este modo, si para la funcional $W\varphi_t(x)$ existe φ_∞ y $f(x) = M_x \varphi_\infty < \infty$, entonces la funcional φ_t se define unívocamente por la función $f(x)$. Del teorema 3 se deduce que la función excesiva $f(x)$ define la funcional W , siempre que

$$\limsup_{t \downarrow 0} \sup_{x \in X} [f(x) - T_t f(x)] = 0.$$

15.5.4. Ejemplos. Examinemos algunos ejemplos de funcionales W del proceso de Wiener. Sea $X = R^m$, donde R^m es un espacio euclídeo m -dimensional y sea \mathfrak{B} la σ -álgebra de subconjuntos borelianos en R^m . Un proceso de Márkov homogéneo continuo con la probabilidad de paso

$$P(t, x, \Gamma) = (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} \int_{\Gamma} \exp \left\{ -\frac{|y-x|^2}{2t} \right\} dy, \quad t > 0, \quad x \in R^m,$$

es un proceso de Wiener.

1. Sea, primero, $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso de Wiener unidimensional. Hagamos

$$f_t(x) = \int_0^t (2\pi s)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{(x_0 - x)^2}{2s} \right\} ds, \quad t > 0, \quad x \in R^1,$$

donde x_0 es un punto fijado de R^1 . Es fácil de comprobar que $f_t(x)$ es una función W . Puesto que $f_t(x) \leq \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$, entonces, de acuerdo al teorema 3, existe una funcional $W\varphi_t$, para la cual

$$f_t(x) = M_x \varphi_t, \quad t \geq 0, \quad x \in R^1.$$

Luego, como $f_t(x) t^{-1} \rightarrow \delta(x - x_0)$ para $t \downarrow 0$, donde $\delta(x - x_0)$ es una función δ de Dirac (es decir, una función, para la cual

$$\int_{R^1} \delta(x - x_0) h(x) dx = h(x_0)$$

para todo $h \in C(R^1)$, entonces la funcional φ_t puede escribirse simbólicamente en la forma

$$\varphi_t = \int_0^t \delta(\xi(s) - x_0) ds.$$

Esta funcional se denomina tiempo local en el punto x_0 . No es difícil hallar la distribución de la funcional φ_t . Se expresa así:

$$P_x\{\varphi_t < a\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(a + |x - x_0|)/\sqrt{2t}} e^{-u^2} du, \quad 0 < a < \infty, \\ x \in R^1, \quad t \geq 0.$$

Cuando $a \leq 0$, $P_x\{\varphi_t < a\} = 0$.

El tiempo local queda incrementado solamente en aquellos momentos de tiempo, cuando el proceso $\xi(t)$ cae en el punto x_0 . Se puede mostrar que

$$\varphi_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \chi_\varepsilon(|\xi(t) - x_0|) ds,$$

donde $\chi_\varepsilon(x)$ es el indicador del intervalo $[0, \varepsilon]$.

2. Supongamos, ahora, que $m \geq 1$ y $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ es un proceso de Wiener en R^m . Hagamos $S = \{x: x \in R^m, (x, v) = 0\}$, donde v es un vector fijado de R^m con $|v| \neq 0$, mientras que (x, v) es un producto escalar en R^m . Designemos mediante $r(x)$ la distancia entre x y el hiperplano S . Es fácil comprobar que la función

$$f_t(x) = \int_0^t (2\pi s)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{r^2(x)}{2s}\right\} ds, \quad t \geq 0, \quad x \in R^m,$$

satisface las condiciones del teorema 3 y, por lo tanto, existe una funcional $W\varphi_t$ con la característica $f_t(x)$. Esta funcional se llama tiempo local en el hiperplano S . Como que $\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} f_t(x) = \delta_S(x)$,

donde $\delta_S(x)$ se determina por la correlación

$$\int_{R^m} \delta_S(x) h(x) dx = \int_S h(x) d\sigma \quad (5.1)$$

(aquí, h es una función terminal continua arbitraria, y la integral a la derecha es de superficie), entonces la funcional φ_t se escribe, natural-

mente, en la forma

$$\varphi_t = \int_0^t \delta_S(\xi(\tau)) d\lambda.$$

Su distribución se define por la fórmula

$$P_x(\varphi_t < a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(a+r(x))/\sqrt{2t}} e^{-u^2} du, \quad a > 0, \quad x \in R^m, \quad t \geq 0.$$

3. De modo análogo podemos determinar la funcional W

$$\varphi_t = \int_0^t \delta_S(\xi(\tau)) d\tau$$

del proceso de Wiener m -dimensional para una esfera S de radio R y con centro en el origen de coordenadas. Esta será una funcional W de característica

$$M_x \varphi_t = \int_0^t d\tau \int_S (2\pi\tau)^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2\tau}\right\} d\sigma_y.$$

Aquí, la segunda integral es de superficie. La función $\delta_S(x)$ se define por la correlación (5.1), donde la integral del segundo miembro se calcula por la superficie de la esfera S . La funcional φ_t se llama tiempo local en la esfera S . Si $m \geq 3$, existe $\varphi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t$. La función de distribución de la magnitud aleatoria φ_∞ tiene por expresión

$$P_x(\varphi_\infty < a) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{m-2}{2R}a}, & \text{si } |x| \leq R; \\ 1 - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2} + \left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2} (1 - e^{-\frac{m-2}{2R}a}), & \text{si } |x| > R, \end{cases}$$

donde $x \in R^m$, $0 \leq a < \infty$. Cuando $a < 0$, $P_x(\varphi_\infty < a) = 0$. Hemos de notar también la fórmula

$$M_x \varphi_\infty = \begin{cases} \frac{2R}{m-2}, & \text{si } |x| \leq R; \\ \frac{2R^{m-1}}{(m-2)|x|^{m-2}}, & \text{si } |x| > R. \end{cases}$$

15.6. Transformaciones de los procesos de Márkov

15.6.1. Sustitución aleatoria del tiempo. Examinemos ciertas transformaciones de los procesos de Márkov. Un tipo de transformaciones ya se ha considerado en el p. 14.3. Estuvo relacionado con las

funcionales multiplicativas del proceso. Con la ayuda de una funcional multiplicativa el proceso pudo ser transformado en cierto subproceso. Con las funcionales aditivas de un proceso está asociada otra transformación del proceso de Márkov la cual se llama sustitución aleatoria del tiempo. Describamos brevemente esta transformación.

Sea $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso riguroso de Márkov en el espacio topológico (X, \mathfrak{B}) . Supongamos que este proceso es continuo a la derecha y \mathfrak{B} es la σ -álgebra de los subconjuntos borelianos de X . Supongamos, además, que está dada una funcional continua homogénea aditiva φ_t del proceso mencionado y que esta funcional satisface la condición

$$P_x \{ \varphi_t > 0 \} = 1$$

para cualesquiera $t > 0$ y $x \in X$. En este caso podemos distinguir cierto conjunto $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ tal que $P_x(\tilde{\Omega}) = 1$ para todo $x \in X$ y para $\omega \in \tilde{\Omega}$ la función $\varphi_t(\omega)$ será continua y monótona creciente. Conveniamos en considerar que $\Omega = \tilde{\Omega}$.

Examinemos ahora una familia de momentos de Márkov τ_t , $t \geq 0$, la que se determina por la correlación:

$$\tau_t(\omega) = \inf \{ s: \varphi_s(\omega) \geq t \}$$

para $t \in [0, \tilde{\zeta}(\omega))$, donde $\tilde{\zeta}(\omega) = \varphi_\infty(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(\omega)$. Hagamos

$\eta(t) = \eta(t, \omega) = \xi(\tau_t(\omega), \omega)$ para $t \in [0, \tilde{\zeta}(\omega))$. Se puede mostrar que el juego de objetos $(\eta(t), \tilde{\zeta}, \mathfrak{R}_{\tau_t}, P_x)$ forma un proceso de Márkov en el espacio fásico (X, \mathfrak{B}) y con un espacio de sucesos elementales Ω . Dicen que el proceso $(\eta(t), \tilde{\zeta}, \mathfrak{R}_{\tau_t}, P_x)$ se ha obtenido del proceso $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ por sustitución aleatoria del tiempo correspondiente a la funcional φ_t . Se puede mostrar que si el proceso de partida era estándar, el transformado también lo será.

Supongamos ahora que el proceso de partida es de Feller y, además, estocástico continuo. Señalemos cómo se puede hallar la resolvente del proceso transformado, si la sustitución del tiempo se ha realizado con la ayuda de una funcional aditiva

$$\varphi_t = \int_0^t v(\xi(s)) ds, \quad (6.1)$$

donde $v(x)$, $x \in X$, es una función positiva boreliana. Es evidente que para $f \in C(X)$ se tiene ($\lambda > 0$)

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\lambda^{(v)} f(x) &= M_x \int_0^{\tilde{\zeta}(\omega)} e^{-\lambda s} f(\eta(s)) ds = \\ &= M_x \int_0^\infty e^{-\lambda \varphi_t} f(\xi(t)) d\varphi_t = \\ &= M_x \int_0^\infty \exp \left\{ -\lambda \int_0^t v(\xi(s)) ds \right\} f(\xi(t)) v(\xi(t)) dt. \end{aligned}$$

Para $f, g \in B(X)$ hagamos

$$Q_\lambda(t, x, f, g) = M_x f(\xi(t)) \exp \left\{ -\lambda \int_0^t g(\xi(s)) ds \right\},$$

donde $t \geq 0$, $x \in X$, λ es un número positivo. La función $Q_\lambda(t, x, f, g)$ es la única solución de la ecuación

$$Q_\lambda(t, x, f, g) = \int_X f(y) P(t, x, dy) - \\ - \lambda \int_0^t ds \int_X Q_\lambda(t-s, y, f, g) g(y) P(s, x, dy).$$

Por esto

$$\tilde{R}_\lambda^{(v)} f(x) = \int_0^\infty Q_\lambda(t, x, f v, v) dt.$$

Indiquemos la relación existente entre los operadores característicos del proceso de partida y del transformado. Supongamos que el proceso $(\eta(t), \xi, \mathfrak{R}_t, P_x)$ se ha obtenido del proceso $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ por sustitución aleatoria del tiempo correspondiente a la funcional φ_t . Supongamos también que la funcional φ_t está definida por la fórmula (6.1) con la función continua positiva $v(x)$, $x \in X$. Designemos mediante \mathfrak{U} y $\tilde{\mathfrak{U}}$ los operadores característicos de los procesos de partida y transformado, respectivamente. Entonces, en cada punto $x \in X$ tenemos $D_{\mathfrak{U}}^x = D_{\tilde{\mathfrak{U}}}^x$ y $\tilde{\mathfrak{U}}f(x) = [v(x)]^{-1} \mathfrak{U}f(x)$.

15.6.2. Transformación del espacio fásico. Consideremos las transformaciones de los procesos de Márkov ligadas a la transformación de un espacio fásico. Sea $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso de Márkov en el espacio fásico (X, \mathfrak{B}) con la probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$. Supongamos que γ es una aplicación medible del espacio (X, \mathfrak{B}) en el espacio medible $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{B}})$ tal que $\gamma X = \tilde{X}$ y la imagen del conjunto medible en la aplicación γ es medible. Supongamos además que para todo $\tilde{\Gamma} \in \tilde{\mathfrak{B}}$ es válida la igualdad

$$P(t, x, \gamma^{-1}\tilde{\Gamma}) = P(t, y, \gamma^{-1}\tilde{\Gamma}), \quad t \geq 0$$

cualesquiera que sean $x, y \in X$, para los cuales $\gamma x = \gamma y$.

Hagamos $\tilde{\xi}(t) = \gamma \xi(t)$ y designemos mediante $\tilde{\mathfrak{R}}_t$ la σ -álgebra mínima de sucesos generada por los sucesos del tipo $(\xi(s) \in \Gamma)$ para $s \leq t$, $\tilde{\Gamma} \in \tilde{\mathfrak{B}}$. Para $A \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\infty$ definamos las medidas $\tilde{P}_{\gamma x}(A) = P_x(A)$. En este caso un juego de objetos $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\mathfrak{R}}_t, \tilde{P}_x)$ forma un proceso de Márkov cuya probabilidad de paso es $\tilde{P}(t, \tilde{x}, \tilde{\Gamma}) = P(t, x, \gamma^{-1}\tilde{\Gamma})$, donde x es un punto arbitrario del conjunto $\gamma^{-1}\tilde{x}$,

$t \geq 0$, $\tilde{\Gamma} \in \mathfrak{B}$. Diremos que este proceso se ha obtenido del proceso $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, \mathbf{P}_x)$ por transformación del espacio fásico γ .

La transformación γ induce una aplicación γ^* del espacio $B(\tilde{X})$ en el espacio $B(X)$, determinada por la fórmula

$$\gamma^*f(x) = f(\gamma x), \quad f \in B(\tilde{X}), \quad x \in X.$$

Si T_t y \tilde{T}_t son semigrupos de los operadores correspondientes al proceso de partida y al transformado, respectivamente, y si A y \tilde{A} son sus operadores infinitesimales respectivos, entonces se verifican las igualdades:

$$\gamma^*\tilde{T}_t = T_t\gamma^*, \quad \gamma^*\tilde{A} = A\gamma^*,$$

con la particularidad de que $f \in D_{\tilde{A}}$ cuando, y sólo cuando, $\gamma^*f \in D_A$.

Si X es un espacio topológico y la transformación γ es continua y abierta (es decir, una imagen del conjunto abierto es un conjunto abierto), entonces los procesos de Feller pasan, al realizarse la transformación γ , a los de Feller.

EJEMPLO. Supongamos que $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, \mathbf{P}_x)$ es un proceso de Wiener unidimensional y la transformación γ actúa de acuerdo con la fórmula $\gamma x = |x|$, $x \in R^1$. Entonces, $\tilde{X} = [0, \infty)$. No es difícil de comprobar que todas las exigencias impuestas en la transformación γ y la probabilidad de paso se cumplen, y como resultado de la transformación se obtiene el proceso $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\mathfrak{R}}_t, \mathbf{P}_x)$ en $[0, \infty)$ que se llama proceso de Wiener con reflejo en cero. Su probabilidad de paso se determina por la fórmula

$$P(t, x, \Gamma) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\Gamma} \left[\exp \left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(y+x)^2}{2t} \right\} \right] dy,$$

donde $t > 0$, $x \in [0, \infty)$, Γ es un subconjunto boreliano en el semieje $[0, \infty)$.

15.6.3. Procesos invariantes. Supongamos que una transformación γ aplica biunívocamente X en X . En este caso la probabilidad de paso $\tilde{P}(t, x, \Gamma)$ del proceso transformado está asociada con la probabilidad de paso del proceso de partida $P(t, x, \Gamma)$ mediante una correlación $\tilde{P}(t, x, \Gamma) = P(t, \gamma^{-1}x, \gamma^{-1}\Gamma)$. Un proceso de Márkov con la probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$ se llama invariante respecto de la transformación γ , si están cumplidas las condiciones:

- a) para todo $\omega \in \Omega$ existe tal $\omega' \in \Omega$ que $\gamma\xi(s, \omega) = \xi(s, \omega')$ con $s \geq 0$ cualquiera;
- b) para cualesquiera $t > 0$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ se tiene

$$P(t, x, \Gamma) = P(t, \gamma^{-1}x, \gamma^{-1}\Gamma).$$

Determinemos el operador θ_γ que aplica la σ -álgebra \mathfrak{R}_∞ en \mathfrak{R}_∞ , haciendo $\theta_\gamma \{ \xi(t) \in \Gamma \} = \{ \gamma\xi(t) \in \Gamma \} = \{ \xi(t) \in \gamma^{-1}\Gamma \}$ y exigiendo que θ_γ conserve todas las operaciones teóricas de multiplicación. Se puede mostrar que si $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, \mathbf{P}_x)$ es un proceso de Márkov invariante respecto de la transformación γ , entonces para cualesquiera $A \in \mathfrak{R}$

y $x \in X$ se tiene

$$P_{V^{-1}x}(\theta_V A) = P_x(A).$$

Es fácil ver que el proceso de Wiener m -dimensional es invariante respecto de todos los movimientos del espacio euclídeo R^m .

Sea $U_R(x_0)$ una bola en R^m de radio R con el centro en el punto x_0 . Designemos mediante τ_R el momento de la primera salida del proceso de Wiener de la bola $U_R(x_0)$. Entonces, de la invariancia de un proceso de Wiener, respecto de todos los movimientos, resulta fácil deducir que $\xi(\tau_R)$ en la medida P_{x_0} tiene distribución uniforme en la esfera que limita la bola $U_R(x_0)$. Por ello,

$$M_{x_0} f(\xi(\tau_R)) = \frac{1}{\sigma_R^{(m)}} \int_{S_R(x_0)} f(y) d\sigma,$$

donde $S_R(x_0) = \{y : y \in R^m, |y - x_0| = R\}$, $\sigma_R^{(m)} = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} R^{m-1}$ es el

área de la esfera $S_R(x_0)$, en tanto que la integral es de superficie, extendida por la esfera $S_R(x_0)$. En otras palabras, $M_{x_0} f(\xi(\tau_R))$ es la media de la función $f(y)$ por la esfera $S_R(x_0)$. Luego, no es difícil hallar

$$M_x \tau_R = \frac{1}{m} (R^2 - |x - x_0|^2), \quad x \in U_R(x_0).$$

Así pues, si \mathfrak{A} es un operador característico del proceso de Wiener m -dimensional y $f \in D_{\mathfrak{A}}$, entonces

$$\mathfrak{A}f(x_0) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{m}{R^2} \frac{1}{\sigma_R^{(m)}} \int_{S_R(x_0)} [f(y) - f(x_0)] d\sigma.$$

El operador en el segundo miembro de esta igualdad se denomina operador de Blaschke — Priválov.

15.7. Procesos homogéneos de difusión en los espacios euclídeos

15.7.1. Definición. Supongamos que R^m es un espacio euclídeo m -dimensional y \mathfrak{B} es la σ -álgebra de sus subconjuntos borelianos. Para $x \in R^m$ designemos mediante $D_{\mathfrak{A}}^x$ una totalidad de todas las funciones reales, cada una de las cuales está definida y es dos veces continuamente derivable en cierto entorno del punto x . Un proceso continuo rigurosamente de Márkov $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ en el espacio fásico (R^m, \mathfrak{B}) se llama de difusión, si para todo $x \in R^m$ tiene lugar la inclusión: $D_{\mathfrak{A}}^x \subset D_{\mathfrak{A}}$, donde \mathfrak{A} es el operador característico del proceso.

En otras palabras, el operador característico de un proceso de difusión está definido en toda función dos veces continuamente derivable en el entorno del punto $x \in R^m$.

Supongamos que en R^m está elegida una base y sean x^1, x^2, \dots, x^m las coordenadas del punto $x \in R^m$ en esta base. Hagamos, para $x_0 \in R^m$, $\Delta^{ij}(x) = (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)$, $\Delta^i(x) = x^i - x_0^i$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, donde $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m$ son las coordenadas del punto x_0 en la base elegida. Las funciones $\Delta_0(x) \equiv 1$, $\Delta^i(x)$, $\Delta^{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, son dos veces continuamente derivables en el entorno del punto x_0 . Por esto, si \mathfrak{A} es un operador característico del proceso de difusión $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ quedan definidas las funciones

$$\begin{aligned} b^{ij}(x_0) &= \mathfrak{A}\Delta^{ij}(x_0), \quad i, j = 1, 2, \dots, m; \\ a^i(x_0) &= \mathfrak{A}\Delta^i(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ c(x_0) &= -\mathfrak{A}\Delta_0(x_0) = -\mathfrak{A}1(x_0). \end{aligned}$$

De aquí se deduce con facilidad que si $f \in D_2^0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}f(x_0) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m b^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j} + \\ &+ \sum_{i=1}^m a^i(x_0) \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} - c(x_0) f(x_0). \end{aligned}$$

Con ello, $c(x_0) \geq 0$ y la matriz $b(x_0)$ con los coeficientes $b^{ij}(x_0)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, está definida de modo no negativo en el sentido que $(b(x_0)\theta, \theta) \geq 0$ para todo $\theta \in R^m$.

No es difícil de advertir, luego, que al pasar a otra base, el operador \mathfrak{A} tendrá la misma forma. Sólo variarán los coeficientes $b^{ij}(x_0)$ y $a^i(x_0)$.

De este modo, si un proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ en (R^m, \mathfrak{B}) es de difusión, existen una función matricial $b(x)$, una función vectorial $a(x)$ y una función numérica no negativa $c(x)$ tales que la contracción del operador \mathfrak{A} en las funciones dos veces continuamente derivables será un operador diferencial elíptico de segundo orden del tipo citado arriba. La función $c(x)$ se llama coeficiente de interrupción, el vector $a(x)$ es el coeficiente de traslado, mientras que la matriz $b(x)$, matriz de difusión.

El teorema que sigue contiene las condiciones que son suficientes para que, si se cumplen, el proceso sea de difusión.

Teorema 1. Sea $(\xi^*(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso continuo en (R^m, \mathfrak{B}) . Supongamos que para todo punto $x \in R^m$ quedan cumplidas las condiciones:

- 1) existe tal entorno U_0 del punto x que $M_x \tau_{U_0} < \infty$, donde τ_{U_0} es el momento de la primera salida de U_0 ;
- 2) en cierto sistema de coordenadas existen los límites

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} [1 - P(t, x, R^m)] = c(x);$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{R^m} (y^i - x^i) P(t, x, dy) = a^i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{R^m} (y^i - x^i)(y^j - x^j) P(t, x, dy) = b^{ij}(x), \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

con la particularidad de que las razones bajo el signo de los límites son uniformemente acotadas para $x \in R^m$, $t \geq 0$, y las funciones $c(x)$, $a^i(x)$ y $b(x)$ son continuas en el punto x .

En este caso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ es un proceso de difusión y para él $c(x)$ es el coeficiente de interrupción, $a(x) = (a^1(x), \dots, a^m(x))$, el vector de traslado, $b(x) = \|b^{ij}(x)\|$, la matriz de difusión.

15.7.2. Construcción de los procesos de difusión. Sean dadas las funciones $c(x) \geq 0$, $a(x) = (a^1(x), \dots, a^m(x))$ y la matriz $b(x) = \|b^{ij}(x)\|$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, $x \in R^m$.

Supongamos que están cumplidas las condiciones:

A) las funciones $a^i(x)$, $b^{ij}(x)$ y $c(x)$ son acotadas y satisfacen la condición de Hölder en R^m (la función $f(x)$ satisface la condición de Hölder en R^m , si existen las constantes positivas K y α tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^\alpha, \quad x, y \in R^m;$$

B) existe tal constante $\rho > 0$ que para cualesquiera $x \in R^m$ y $\theta \in R^m$

$$(b(x)\theta, \theta) = \sum_{i,j=1}^m b^{ij}(x) \theta^i \theta^j \geq \rho |\theta|^2;$$

C) para todo $x \in R^m$, $c(x) \geq 0$.

Teorema 2. Supongamos que en R^m están dadas las funciones $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ que satisfacen las condiciones A) - C). En este caso, existe en el espacio fásico (R^m, \mathfrak{B}) un proceso de difusión $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ para el cual

$$\mathfrak{A}f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m b^{ij} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^m a^i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} - c(x) f(x),$$

donde $f \in D_{\mathfrak{A}}^2$ y \mathfrak{A} es un operador característico del proceso $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$. Un semigrupo que corresponde al proceso deja invariante el espacio $C_0(R^m)$ ($C_0(R^m)$ es un espacio de funciones continuas en R^m que tienden a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$). Para toda función acotada dos veces continuamente derivable $f(x)$, $x \in R^m$, la función

$$u(t, x) = M_x f(\xi(t)) = T_t f(x)$$

es dos veces continuamente derivable respecto de x , diferenciable respecto de t y satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{A}u, \quad t > 0, \quad x \in R^m$$

con la condición inicial $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = f(x)$. Para la probabilidad de paso $P(t, x, \Gamma)$ del proceso existe una densidad $G(t, x, y)$, $t > 0$, $x, y \in R^m$, respecto de la medida lebesgueana en R^m , con la particularidad de que $G(t, x, y)$ sirve de solución fundamental para la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{A}u.$$

La demostración de este teorema está basada en las propiedades de las soluciones fundamentales de las ecuaciones parabólicas. En el

capítulo 19 consideraremos también otros métodos de construcción de los procesos de difusión.

15.7.3. Ejemplo que muestra la existencia de procesos continuos de Márkov que no son los de difusión.

Definamos la familia de operadores T_t , $t > 0$, que actúan en el espacio $B(R^1)$, rigiéndonos por la fórmula

$$T_t f(x) = \int_{R^1} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} f(y) dy + \\ + \frac{c}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(y+|x|)^2}{2t}} [f(y) - f(-y)] dy, \quad x \in R^1; \quad f \in B(R^1),$$

donde c es un número real, $|c| < 1$. Se puede mostrar que la familia de operadores $\{T_t, t > 0\}$ forma un semigrupo de operadores al cual corresponde en el espacio (R^1, \mathfrak{B}) un proceso de Márkov continuo $(\xi(t), \mathfrak{B}_t, P_x)$. Cuando $c = 0$, este proceso será de Wiener. Si $c = 1$, entonces hasta que llegue el momento de la primera caída en el semieje $(0, \infty)$ este proceso se porta como de Wiener, en tanto que después de dicho momento, como un proceso de Wiener con reflexión en cero. Una descripción análoga es también válida para $c = -1$. Para $0 < |c| < 1$ obtenemos ciertos procesos «intermedios».

No es difícil mostrar que si la función $f(x)$ es dos veces continuamente derivable en el entorno del punto $x_0 \neq 0$, entonces $f \in D_{\mathfrak{A}}^{x_0}$ y

$$\mathfrak{A}f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0), \quad \text{donde } \mathfrak{A} \text{ es el operador característico del proceso.}$$

Si $f(x)$ es dos veces continuamente derivable en el entorno del punto $x = 0$, entonces, para $c \neq 0$, $f \in D_{\mathfrak{A}}$ sólo en aquel caso cuando $f'(0) =$

$= 0$, siendo $\mathfrak{A}f(0) = \frac{1}{2} f''(0)$. De este modo, el proceso en consideración no pertenece a los de difusión cuando $c \neq 0$. El carácter de difusión del movimiento se perturba en el punto $x = 0$.

El proceso examinado es un proceso de difusión generalizado en el siguiente sentido. Hagamos

$$a(t, x) = \frac{1}{t} M_x(\xi(t) - x) = \frac{1}{t} \int_{R^1} (y-x) P(t, x, dy);$$

$$b(t, x) = \frac{1}{t} M_x(\xi(t) - x)^2 = \frac{1}{t} \int_{R^1} (y-x)^2 P(t, x, dy), \quad t > 0, \quad x \in R^1$$

Entonces, para toda función terminal continua $\varphi(x)$, $x \in R^1$,

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{R^1} \varphi(x) a(t, x) dx = c\varphi(0).$$

Para la función $b(t, x)$ se tiene la siguiente correlación

$$\lim_{t \downarrow 0} b(t, x) = 1$$

para todo $x \in R^1$, con la particularidad de que $|b(t, x)| \ll K$ para cualesquiera $x \in R^1$ y $t > 0$, donde K es una constante. La primera de estas correlaciones significa que el «coeficiente de traslado» del proceso en consideración es igual a $c\delta(x)$, donde $\delta(x)$ es una función δ de Dirac. La segunda correlación dice que el coeficiente de difusión es igual a uno.

15.8. Procesos continuos en una recta

15.8.1. Puntos regulares. El hecho de que una recta R^1 es un conjunto ordenado permite describir todos los procesos continuos y rigurosos de Márkov con valores en R^1 .

Sea $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ un proceso riguroso de Márkov, continuo en cierto intervalo $\Delta \subset R^1$. Un punto $y \in \Delta$ se llama accesible desde el punto $x \in \Delta$, si $P_x\{\tau_y < \infty\} > 0$, donde τ_y es el momento de la primera obtención del punto y (éste es un momento de Márkov). Designemos con Δ_x la totalidad de todos aquellos $y \in \Delta$ que son accesibles desde x . En este caso Δ_x es un intervalo (cerrado, abierto o semiabierto, finito o infinito). Llamemos el punto $x \in \Delta$ regular, si están cumplidas las siguientes condiciones:

- 1) x es un punto interior del intervalo Δ_x ;
- 2) existen $x_1, x_2 \in \Delta_x$ tales que $x_1 < x < x_2$, y el punto x es accesible desde los puntos x_1 y x_2 .

Sobre el comportamiento del proceso en un punto regular se puede juzgar según el siguiente teorema.

Teorema 1. Si x es un punto regular, para todo $\delta > 0$ se tiene:

$$P_x\left\{\sup_{0 \leq s \leq \delta} \xi(s) > x\right\} = 1, \quad P_x\left\{\inf_{0 \leq s \leq \delta} \xi(s) < x\right\} = 1.$$

15.8.2. Procesos en un intervalo cerrado. Describamos todos los procesos de Márkov, continuos y rigurosos en el intervalo (α, β) , suponiendo que todos los puntos de dicho intervalo son regulares, los puntos α y β son accesibles desde el interior y el punto arbitrario $x \in (\alpha, \beta)$ es accesible desde los puntos α y β . Designemos mediante ξ el momento de la primera salida del conjunto (α, β) . Entonces, o $\xi(\xi) = \alpha$, o bien $\xi(\xi) = \beta$. Hagamos $m(x) = P_x\{\xi(\xi) = \beta\}$.

Teorema 2. La función $m(x)$ es continua, crece de manera estrictamente monótona y $m(\alpha) = 0$, $m(\beta) = 1$. El proceso $\{m(\xi(t \wedge \xi)) - m(\xi, (0)), \mathfrak{R}_t, P_x\}$ es una martingala continua de cuadrado integrable cuya característica representa en sí una funcional W del proceso $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$.

De este teorema se deduce que al realizar la transformación del espacio fásico con ayuda de la función $m(x)$, obtendremos en el segmento $[0, 1]$ un proceso, para el cual $m(x) = x$.

Convengamos en considerar que tal sustitución ya se ha efectuado y, por consiguiente, en el segmento $[0, 1]$ se examina un proceso para el cual

$$P_x\{\xi(\xi) = 1\} = x; \quad P_x\{\xi(\xi) = 0\} = 1 - x.$$

Consideremos una función $n(x) = M_x \xi^k$. Se puede mostrar que para todo $k = 1, 2, \dots$ la función $M_x \xi^k$ es acotada en $[0, 1]$. No es difícil de comprobar que $n(x)$ es una función cuya convexidad está dirigida estrictamente hacia las y positivas y que si τ es el momento de la primera salida del intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \delta)$ ($0 < x_0 - \varepsilon <$

$\langle x_0 + \delta < 1, \varepsilon, \delta > 0 \rangle$, entonces

$$M_x \tau = n(x_0) - n(x_0 - \varepsilon) \frac{\delta}{\varepsilon + \delta} - n(x_0 - \delta) \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \delta}.$$

Puesto que

$$M_{x_0} f(\xi(\tau)) = f(x_0 - \varepsilon) \frac{\delta}{\delta + \varepsilon} + f(x_0 + \delta) \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \delta},$$

para el operador característico en el punto $x_0 \in (0, 1)$ tenemos la correlación

$$\mathfrak{A}f(x_0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0, \delta \downarrow 0} \frac{\varepsilon^{-1} [f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0)] + \delta^{-1} [f(x_0 + \delta) - f(x_0)]}{\delta^{-1} [n(x_0) - n(x_0 + \delta)] - \varepsilon^{-1} [n(x_0 - \varepsilon) - n(x_0)]}.$$

Observemos que existe una derivada $n'(x)$ que representa en sí una función decreciente de x . Más adelante se puede mostrar que si la función $f(x)$ es absolutamente continua y para ella existe una función continua $g(t)$ tal que

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x g(t) dn'(t) \quad (8.1)$$

entonces, para todo $x \in (0, 1)$ se verifica

$$\mathfrak{A}f(x) = -g(x).$$

La función $g(t)$, satisfaciendo a la correlación (8.1), es la derivada $\frac{df'(x)}{dn'(x)}$. Por ello, para $x \in (0, 1)$

$$\mathfrak{A}f(x) = -\frac{df'(x)}{dn'(x)},$$

con la particularidad de que el operador característico está definido en todas aquellas funciones $f(x)$ que son absolutamente continuas y tienen derivada continua $\frac{df'}{dn'}$. Por fin, hemos de notar que si el proceso se interrumpe en el momento de la primera salida del intervalo $(0, 1)$, su operador infinitesimal A queda definido en todas las funciones absolutamente continuas f , para las cuales $\frac{df'(x)}{dn'(x)}$ es continua en $[0, 1]$, mientras que $f(0) = f(1) = 0$. Con ello, $Af = \mathfrak{A}f$.

15.8.3. Procesos en el intervalo de regularidad. Sea $\{\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x\}$ un proceso continuo y riguroso de Márkov en el intervalo $\Delta \subset R^1$. Supongamos que $x \in \Delta$ es un punto regular de este proceso. Hagamos

$$\alpha = \inf \{y: y \in \Delta_x, P_y \{\tau_x < \infty\} > 0\};$$

$$\beta = \sup \{y: y \in \Delta_x, P_y \{\tau_x < \infty\} > 0\}.$$

Como x es un punto regular, el intervalo (α, β) no es vacío y contiene x . Este se llama intervalo de regularidad del proceso que contiene el punto x .

Examinemos el comportamiento del proceso en el intervalo de regularidad (α, β) suponiendo que los puntos α y β son irregulares. Para la frontera α del intervalo (α, β) son posibles cuatro casos:

1) el punto α es accesible desde el interior del intervalo y todo punto $x \in (\alpha, \beta)$ es accesible desde el punto α ; en este caso el punto α se llama frontera regular;

2) el punto α es accesible desde el interior, pero desde α los puntos del intervalo no son accesibles; en este caso α se denomina frontera cautivadora;

3) el punto α no es accesible desde el interior, pero desde α resultan accesibles los puntos del intervalo; tal punto lleva el nombre de frontera de escape;

4) el punto α no es accesible desde el interior y desde el mismo punto no son accesibles los puntos del intervalo; tal punto se llama frontera natural.

Las mismas posibilidades tiene también el punto de frontera β .

Sea α una frontera regular. Ya que el punto α no es regular (en el sentido de la definición citada arriba), para él o bien $P_y \{\tau_\alpha < \infty\} = 0$, o bien $P_\alpha \{\tau_y < \infty\} = 0$, cualquiera que sea $y < \alpha$, $y \in \Delta$. En el primer caso α se llama inaccesible por la izquierda; en el segundo caso, impenetrable a la izquierda. Un punto regular de frontera α , impenetrable a la izquierda, se llama frontera de reflexión. El teorema que sigue muestra un tipo del operador infinitesimal de un proceso con dos fronteras de reflexión.

Teorema 3. Si $(\tilde{X}_t, \tilde{M}_t, \tilde{P}_x)$ es un proceso en $[0, 1]$, para el cual $m(x) = x$ y los puntos 0 y 1 son fronteras de reflexión del intervalo de regularidad $(0, 1)$, entonces en todos puntos $x \in (0, 1)$

$$Af(x) = -\frac{dj'(x)}{dn'(x)},$$

y en los puntos de frontera

$$Af(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(\varepsilon) - f(0)}{M_\varepsilon \tau_\varepsilon}, \quad Af(1) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(1-\varepsilon) - f(1)}{M_{1-\varepsilon} \tau_{1-\varepsilon}}.$$

Con ello, D_A coincide con el conjunto de funciones para las cuales Af es continuo.

Luogo, si las fronteras del intervalo $(0, 1)$ son cautivadoras, será natural considerar que el proceso se interrumpe en el momento de la primera salida a la frontera, razón por la cual el operador generador de tal proceso tendrá por expresión

$$Af(x) = -\frac{df'(x)}{dn'(x)},$$

con la particularidad de que $f \in D_A$, si $f(0) = f(1) = 0$, $f(x)$ es absolutamente continua y $\frac{df'(x)}{dn'(x)}$ es continua en $[0, 1]$.

Admitamos que las fronteras son inaccesibles. En este caso, el proceso siempre queda dentro del intervalo de regularidad. Se puede mostrar que existe una función armónica continua estrictamente creciente $M(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$, tal que cualquier otra función armónica $g(x)$ se define mediante la igualdad $g(x) = c_1 M(x) + c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes (la función $f(x)$ se llama armónica para el proceso

$(\xi_t, \mathfrak{B}_t, P_x)$, si el proceso $(f(\xi_t), \mathfrak{B}_t, P_x)$ es una martingala, es decir, si $T_t f(x) = f(x)$. La transformación del espacio fásico $y = M(x)$ convierte al proceso de partida en un nuevo proceso definido en el intervalo (finito o infinito), para el cual $M(x) = x$. Convenamos en considerar que tal transformación ya se ha realizado.

Ahora, existe una función $N(x)$, con su convexidad hacia las y positivas, tal que para $\alpha < x - \varepsilon < x < x + \delta < \beta$

$$M_x \tau = N(x) - \frac{\delta}{\varepsilon + \delta} N(x - \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \delta} N(x + \delta),$$

donde τ es el momento de la primera salida del intervalo $(x - \varepsilon, x + \delta)$. Ahora, el operador característico del proceso en el intervalo (α, β) con fronteras inaccesibles α y β (para el cual $M(x) = x$) puede ser escrito en la forma

$$\mathfrak{U}f(x) = - \frac{df'(x)}{dN'(x)}$$

para todos los puntos $x \in (\alpha, \beta)$. Como el intervalo (α, β) es un espacio compacto local, entonces el operador infinitesimal del proceso puede ser definido al aplicar el teorema 3 del p. 15.3.

Una frontera inaccesible α se denomina atractiva, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que con cualquier $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ se tiene $P_x \{ \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = \alpha \} > 1 - \varepsilon$. Una frontera inaccesible α se llama repelente, si para todos los $\alpha < x_1 < x$ se tiene $P_x \{ \tau_x < \infty \} = 1$.

Teorema 4. La frontera α es inaccesible, si $N(+\alpha) = \infty$. Si, en este caso, $M(+\alpha) > -\infty$, entonces α es una frontera atractiva; si, en cambio, $M(+\alpha) = -\infty$, α será una frontera repelente.

15.8.4. Puntos irregulares. Consideraremos el comportamiento del proceso en los puntos irregulares. Si x es un punto irregular, debe cumplirse por lo menos una de las siguientes condiciones:

(I) para todo $y < x$, $P_x \{ \tau_y < \infty \} = 0$ (el punto x es inaccesible a la izquierda);

(II) para todo $y > x$, $P_x \{ \tau_y < \infty \} = 0$ (el punto x es impenetrable a la derecha);

(III) para todo $y < x$, $P_y \{ \tau_x < \infty \} = 0$ (el punto x es inaccesible por la izquierda);

(IV) para todo $y > x$, $P_y \{ \tau_x < \infty \} = 0$ (el punto x es inaccesible por la derecha).

Si el punto x es impenetrable a la izquierda o a la derecha, será absorbente y para él $\mathfrak{U}f(x) = Af(x) = 0$.

Supongamos que la condición (II) se cumple y la (III), no (es decir, el punto x es impenetrable a la izquierda, pero es penetrable a la derecha). En este caso, si τ^ε es el momento de la primera salida del intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, entonces $\tau^\varepsilon = \tau_{x+\varepsilon}$ casi por cierto (c.p.c.) respecto de P_x . Existe una función monótona $g(y)$ tal que $M_x \tau^\varepsilon = g(x) - g(x + \varepsilon)$. Por esta razón, en este caso,

$$\mathfrak{U}f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{g(x) - g(x + \varepsilon)}.$$

Por analogía, si se cumple (II) y no se cumple (I), entonces

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x-\varepsilon) - f(x)}{g(x) - g(x-\varepsilon)},$$

es decir, en ambos casos el cálculo del operador característico se reduce al cálculo de una derivada unilateral de la función $f(x)$ respecto a cierta función monótona.

Supongamos que las condiciones (I) y (II) no se cumplen. Si está cumplida (III), mientras que (IV), no, x será la frontera izquierda del intervalo de regularidad. El comportamiento del proceso en este caso ya se ha considerado más arriba. Si, en cambio, está cumplida (IV), pero no se cumple (III), x será la frontera derecha del intervalo de regularidad.

Supongamos ahora que están cumplidas las condiciones (III) y (IV), pero no se cumplen (I) y (II). En este caso, si x no es un punto de retención, el proceso, al salir de x , siempre estará a la izquierda del punto x , o a la derecha de él. Hagamos

$$p = P_x \{ \xi(t) > x \text{ para todo } t > 0 \};$$

$$q = P_x \{ \xi(t) < x \text{ para todo } t > 0 \}.$$

Para cierto $\rho > 0$ definamos las funciones

$$g_1(y) = \frac{1}{p} M_y \tau^\rho \chi_{(y, \infty)}(\xi(\tau^\rho));$$

$$g_2(y) = \frac{1}{q} M_y \tau^\rho \chi_{(-\infty, y]}(\xi(\tau^\rho)).$$

La función $g_1(y)$ decrece en el intervalo $[x, x + \rho]$, mientras que $g_2(y)$ crece en el intervalo $[x - \rho, x]$. El operador característico en el punto x tiene la forma

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{\delta \downarrow 0, \varepsilon \downarrow 0} \frac{p [f(x + \delta) - f(x)] + q [f(x - \varepsilon) - f(x)]}{p [g_1(x) - g_1(x + \delta)] + q [g_2(x) - g_2(x - \varepsilon)]}.$$

PROCESOS CON INCREMENTOS INDEPENDIENTES

16.1. Definición y propiedades fundamentales

16.1.1. Definición. Ejemplos. Examinemos los procesos $\xi(t)$ con valores en R^m , definidos en cierto intervalo T , finito o infinito. Un proceso se llama proceso con incrementos independientes, si para cualesquiera $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ de T las magnitudes aleatorias

$$\xi(t_0), \xi(t_1) - \xi(t_0), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

son independientes. Las distribuciones de dimensiones finitas del proceso $\xi(t)$ se determinan por completo con las distribuciones de las magnitudes $\xi(t)$, $t \in T$, y $\xi(t_2) - \xi(t_1)$, $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in T$.

Si $F(t, A) = P\{\xi(t) \in A\}$, $G(t_1, t_2, A) = P\{\xi(t_2) - \xi(t_1) \in A\}$, $t_1 < t_2$, entonces, para $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$F_{t_1, \dots, t_n}(A_1, \dots, A_n) = P\{\xi(t_1) \in A_1, \dots, \xi(t_n) \in A_n\} =$$

$$= \int \dots \int \chi_{A_1}(x_1) \chi_{A_2}(x_1 + x_2) \dots \chi_{A_n}(x_1 + \dots + x_n) F_{t_1}(dx_1) \times \\ \times G(t_1, t_2, dx_2) \dots G(t_{n-1}, t_n, dx_n).$$

Designemos con $\varphi_t(z) = M \exp\{i(z, \xi(t))\}$, $\psi_{t_1, t_2}(z) = M \times \exp\{i(z, \xi(t_2) - \xi(t_1))\}$, $z \in R^m$ las funciones características del valor del proceso y de su incremento. Entonces, la función característica conjunta de las magnitudes $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ se define por la fórmula

$$M \exp\left\{i \sum_{h=1}^n (\xi(t_h), z_h)\right\} = \varphi_{t_1}(z_1 + \dots + z_n) \times \\ \times \psi_{t_1, t_2}(z_2 + \dots + z_n) \dots \psi_{t_{n-1}, t_n}(z_n).$$

Las funciones $\varphi_t(z)$ y $\psi_{t_1, t_2}(z)$ están ligadas mediante las siguientes ecuaciones:

1) cuando $t_1 < t_2$,

$$\varphi_{t_1}(z) \psi_{t_1, t_2}(z) = \varphi_{t_2}(z);$$

2) cuando $t_1 < t_2 < t_3$,

$$\psi_{t_1, t_2}(z) \psi_{t_2, t_3}(z) = \psi_{t_1, t_3}(z).$$

El ejemplo más simple de un proceso con incrementos independientes es una función no aleatoria arbitraria.

Indiquemos otro ejemplo de importancia. Sean $\{\xi_k^+\}$ y $\{\xi_k^-\}$ tales sucesiones de vectores aleatorios de R^m , independientes en totalidad, que las series

$$\sum \xi_k^\pm$$

convergen para cualquier sucesión de diferentes números naturales n_k (véase p. 3.2), mientras que t_i es una sucesión arbitraria de números reales. Hagámos

$$\xi(t) = \sum_{t_i < t} \xi_i^+ + \sum_{t_i \leq t} \xi_i^- \quad (1.1)$$

Este proceso posee las siguientes propiedades: 1) tiene incrementos independientes; 2) para $t \in \{t_1, t_2, \dots\}$ es estocástico continuo; 3) para cualesquiera t_i existen los límites en probabilidad de $\xi(t_i - 0)$ y $\xi(t_i + 0)$ y

$$\left. \begin{aligned} P\{\xi(t_i) - \xi(t_i - 0) = \xi_i^-\} &= 1; \\ P\{\xi(t_i + 0) - \xi(t_i) = \xi_i^+\} &= 1; \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

4) si $\xi(t)$ es un proceso separable (dado que la correlación (1.1) define el proceso con la exactitud salvo la equivalencia estocástica, esto siempre se puede suponer), entonces con la probabilidad 1 las funciones muestrales $\xi(t)$ son continuas en todos los puntos, a excepción de los puntos t_i ; en los puntos t_i existen límites de $\xi(t_i - 0)$ y $\xi(t_i + 0)$, y para dichos límites también se cumple (1.2).

Los procesos del tipo (1.1) se llaman procesos discretos con incrementos independientes.

16.1.2. Descomposición de Lévi. Para todo proceso con incrementos independientes $\xi(t)$ existe tal función no aleatoria $a(t)$ (que está definida en T y toma valores de R^m) que el proceso $\xi_1(t) = \xi(t) - a(t)$ posee las siguientes propiedades: 1) con la probabilidad 1 no tiene en el interior de T discontinuidades de segunda especie; 2) en todo punto tiene límites en probabilidad por la derecha y por la izquierda; 3) tiene a lo sumo un número numerable de puntos de discontinuidad estocástica.

Una función $a(t)$, portadora de las propiedades indicadas, se denomina función centradora para un proceso con incrementos independientes. Su definición no es unívoca: cualesquiera dos funciones centradoras se diferencian en una función que no tiene discontinuidades de segunda especie en el interior de T .

Si $\xi(t)$ es un proceso simétrico, la función centradora puede elegirse igual a cero idéntico.

Supongamos que $a(t)$ es una función centradora para el proceso $\xi(t)$ y que $\xi_1(t) = \xi(t) - a(t)$. Designemos mediante $\{t_1, t_2, \dots\}$ un conjunto de puntos de la discontinuidad estocástica $\xi_1(t)$, $\xi_k^+ = \xi_1(t_k + 0) - \xi_1(t_k)$, $\xi_k^- = \xi_1(t_k) - \xi_1(t_k - 0)$. Entonces, las magnitudes $\{\xi_k^+, \xi_k^-, k = 1, 2, \dots\}$ son independientes en totalidad y

$$\xi_2(t) = \sum_{t_k < t} \xi_k^+ + \sum_{t_k \leq t} \xi_k^-$$

será un proceso discreto con incrementos independientes. El proceso $\xi_3(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t)$, en este caso, no depende del proceso $\xi_2(t)$, y, además, $\xi_3(t)$ es estocástico continuo. De este modo, para todo proceso con incrementos independientes $\xi(t)$ pueden indicarse una función no aleatoria $a(t)$, un proceso discreto con incrementos independientes $\xi_d(t)$ y un proceso estocástico continuo con incrementos independientes $\xi_c(t)$ tales que

$$\xi(t) = a(t) + \xi_d(t) + \xi_c(t), \quad (1.3)$$

siendo los procesos $\xi_d(t)$ y $\xi_c(t)$ independientes. La representación (1.3) lleva el nombre de descomposición de Lévi para un proceso con incrementos independientes. Si está elegida la función contradora $a(t)$, los demás componentes de la descomposición se definen unívocamente.

16.1.3. Algunas desigualdades. Sea $\xi(t)$ un proceso con incrementos independientes, para el cual $M(\xi(t), z)^2 < \infty$ para todo $t \in T$ y $a(t) = M\xi(t)$. La función $a(t)$ es contradora. Designemos con $B(t)$ el operador simétrico en R^m , para el cual

$$(B(t)z, z) = M(\xi(t) - a(t), z)^2.$$

Entonces, $B(t)$ es no negativo y en calidad de función de t no decrece. Por ello, $B(t)$, es acotado en todo intervalo cerrado por la derecha que se encuentra en T .

Generalización de la desigualdad de Kolmogórov para los procesos con incrementos independientes. 1). Si $\xi(t)$ es un proceso separable con incrementos independientes y $[a, b] \in T$, entonces

$$P\left\{\sup_{t \in [a, b]} |\xi(t) - a(t)| > c\right\} \leq \frac{\text{Sp } B(b)}{c^2}, \quad (1.4)$$

donde $\text{Sp } B$ es una traza del operador B : $\text{Sp } B = \sum_{k=1}^m (Be_k, e_k)$, donde $\{e_k, k=1, \dots, m\}$ es la base en R^m . La desigualdad (1.4) puede ser extendida a T :

$$P\left\{\sup_{t \in T} |\xi(t) - \xi(a)| > c\right\} \leq \frac{1}{c^2} \sup_{t \in T} B(t).$$

Para los procesos separables con incrementos independientes son aplicables también otras desigualdades, conocidas para las sumas de las magnitudes aleatorias independientes.

2) Si $\xi(t)$ es un proceso separable simétrico, entonces

$$P\left\{\sup_{t \in [a, b]} |\xi(t)| > c\right\} \leq 2P\{|\xi(b)| > c\}.$$

3) Si para cierto $\alpha < 1$ con $t \in [a, b]$

$$P\{|\xi(b) - \xi(t)| > c\} \leq \alpha,$$

entonces para todo $x > 0$ se tiene

$$P\left\{\sup_{t \in [a, b]} |\xi(t)| > c+x\right\} \leq \frac{1}{1-\alpha} P\{|\xi(b)| > x\}.$$

4) Si $\xi(t)$ no tiene discontinuidades de segunda especie y si $P\{\sup |\xi(t+0) - \xi(t-0)| < c\} = 1$, entonces para cualesquiera l y a se cumple la desigualdad

$$Me^{z\xi(t)} \leq \frac{e^{zl}}{P\{\xi(t) \leq l\}} \frac{1}{1 - \frac{(a+c)z}{1 - 4P\{|\xi(t)| > a\}}}$$

siempre que $P\{|\xi(t)| > a\} < \frac{1}{4}$ y $|z| < \frac{1 - 4P\{|\xi(t)| > a\}}{a+c}$.

16.2. Procesos estocásticos continuos con incrementos independientes

16.2.1. Propiedades de las funciones muestrales. I. Un proceso estocástico continuo separable con la probabilidad 1 no tiene discontinuidades de segunda especie.

II. Para que un proceso separable con incrementos independientes $\xi(t)$, definido en $[a, b]$, sea con la probabilidad 1 continuo, es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ se cumpla la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^{n-1} P\{|\xi(t_{nh}) - \xi(t_{n(h-1)})| > \varepsilon\} = 0,$$

donde $t_{n0} < t_{n1} < \dots < t_{nn} = b$, y $\max_h (t_{nh} - t_{n(h-1)}) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

III. Si $\xi(t)$ es un proceso separable con incrementos independientes en $[a, b]$, para el cual $P\{\xi(b) = \xi(a)\} > 0$, entonces $\xi(t)$ es, con la probabilidad 1, una función escalonada, es decir, el segmento $[a, b]$ puede dividirse en un número finito (aleatorio) de intervalos aleatorios en cada uno de los cuales $\xi(t)$ sea constante. Y, viceversa, si $\xi(t)$ es, con la probabilidad 1, una función escalonada en $[a, b]$, entonces $P\{\xi(b) = \xi(a)\} > 0$.

IV. Para que un proceso separable numérico con incrementos independientes $\xi(t)$ sea, con la probabilidad 1, no decreciente en $[a, b]$, es necesario y suficiente que $P\{\xi(b) > \xi(a)\} = 1$.

16.2.2. Fórmula de Lévi — Ginchin. Sea $\xi(t)$ un proceso estocástico continuo con incrementos independientes definido en $[a, b]$, con valores en R^m . En tal caso, para este proceso existen: 1) una función continua $a(t)$, $t \in [a, b]$, con valores en R^m ; 2) una función continua $B(t)$, $t \in [a, b]$ cuyos valores son los operadores no negativos simétricos en R^m ; una función $\Pi(t, A)$, $t \in [a, b]$, definida para todos los conjuntos borelianos A de R^m , ubicados a una distancia positiva del punto 0, y que posee las siguientes propiedades: a) $\Pi(t, A)$ es una función de t , continua no decreciente; b) para $t \in [a, b]$ fijados es numérica aditiva en A ; c) una integral extendida por $R^m \int \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \times \times \Pi(t, dz)$, con el punto 0 excluido, es finita. La función característica del incremento del proceso es divisible infinitamente (véase el p. 5.2.2)

y se expresa mediante la fórmula: para $a \leq t < s \leq b$

$$\begin{aligned} M \exp \{t(z, \xi(s) - \xi(t))\} = \exp \left\{ t(z, a(s) - a(t)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} ((B(s) - B(t))z, z) + \int \left(e^{t(z, x) - 1 - \frac{t(z, x)}{1 + |x|^2}} \right) \times \right. \\ \left. \times (\Pi(x, dx) - \Pi(t, dx)) \right\}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

la que precisamente lleva el nombre de Levi — Ginchin. Las funciones $a(t)$, $B(t)$ y $\Pi(t, A)$ que figuran en la fórmula de Levi — Ginchin se definen unívocamente.

16.2.3. Estructura del proceso estocástico continuo con incrementos independientes. Supongamos que el proceso $\xi(t)$ es separable. En este caso el proceso no tiene discontinuidades de segunda especie y, por lo tanto, el número de saltos del proceso que superan a ε en módulo es finito en todo el intervalo finito cerrado t . Designemos mediante $\nu(t, A)$ (donde A es cierto conjunto boreliano en R^m ubicado a una distancia positiva del punto 0) el número de saltos del proceso $\xi(s)$ (se llama salto en el punto s una magnitud $\xi(s+0) - \xi(s-0)$) que han ocurrido hasta el momento t y que han caído en el conjunto A . $\nu(t, A)$, en calidad de función de t , es un proceso de Poisson, es decir, $\nu(t, A)$ representa un proceso estocástico continuo con incrementos independientes que para todo t tiene distribución de Poisson. Cuando t es fijado, $\nu(t, A)$ es una medida de Poisson con valores independientes. Esto significa que están cumplidas las siguientes condiciones: 1) $\nu(t, \bigcup_k A_k) = \sum_k \nu(t, A_k)$, si A_k son conjuntos disjuntos dos a dos y $\bigcup_k A_k$ se encuentra a una distancia positiva del punto 0; 2) si A_1, A_2, \dots, A_k son conjuntos borelianos disjuntos dos a dos, los procesos $\nu(t, A_1), \dots, \nu(t, A_k)$ son independientes en totalidad.

$\Pi(t, A) = M\nu(t, A)$ es aquella función que figura en la fórmula de Levi — Ginchin. Definamos las integrales $\int_{|x|>1} x\nu(t, dx)$, $\int_{0<|x|\leq 1} x \times$
 $\times x[\nu(t, dx) - \Pi(t, dx)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| \leq 1} x[\nu(t, dx) - \Pi(t, dx)]$ (el límite en el sentido de convergencia cuadrática). Entonces, el proceso

$$\xi_0(t) = \xi(t) - \int_{|x|>1} x\nu(t, dx) - \int_{0<|x|\leq 1} x[\nu(t, dx) - \Pi(t, dx)],$$

con la probabilidad 1, es continuo y no depende de $\nu(t, A)$.

Sea $\xi_0(t)$ un proceso continuo con la probabilidad 1 que tiene incrementos independientes. En este caso $\xi_0(t)$ tiene incrementos gaussianos, es decir, $\xi_0(t_2) - \xi_0(t_1)$ posee distribución normal. La función característica del incremento del proceso $\xi_0(t)$ se expresa así:

$$\begin{aligned} M \exp \{t(z, \xi_0(t_2) - \xi_0(t_1))\} = \\ = \exp \left\{ t(z, a(t_2) - a(t_1)) - \frac{1}{2} ((B(t_2) - B(t_1))z, z) \right\}, \end{aligned}$$

(2.2)

donde $a(t) = M(\xi_0(t_1) - \xi_0(t_0))$, $(B(t, z) = M(\xi_0(t) - \xi_0(t_0), z)^2)$, y t_0 es el punto mínimo en T .

Así pues, para un proceso estocástico continuo con incrementos independientes $\xi(t)$ resulta válida la siguiente representación:

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \int_{|x| \leq 1} x \nu(t, dx) - \Pi(t, dx) + \int_{|x| > 1} x \nu(t, dx), \quad (2.3)$$

donde $\nu(t, A)$ es una medida de Poisson con valores independientes en A y un proceso de Poisson respecto de t , $\Pi(t, A) = M\nu(t, A)$, y $\xi_0(t)$ es un proceso continuo con incrementos de Gauss independientes cuya función característica se determina según la fórmula (2.2).

Indiquemos algunos lazos que existen entre las propiedades de las funciones que figuran en el segundo miembro de la fórmula de Lévi — Ginchin y las de las funciones muestrales del proceso.

I. El proceso $\xi(t)$ es continuo cuando y sólo cuando, $\Pi(t, A) = 0$ para todos los $t \in T$ y los conjuntos borelianos $A \subset R^m$.

II. Sea $\Pi(t, R^m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi(t, R^m/S_\varepsilon)$, donde S_ε es una esfera en R^m de radio ε y centro en el punto 0. Este límite puede ser también infinito. El proceso $\xi(t)$ será escalonado cuando y sólo cuando: a) $a(t)$ es constante; b) $B(t) = 0$ para todo $t \in T$; c) $\Pi(t, R^m) < \infty$ para todo $t \in T$.

III. El proceso $\xi(t)$ tiene, con la probabilidad 1, una variación acotada en el segmento $[t_0, t_1]$ cuando y sólo cuando: a) $a(t)$ tiene variación acotada en $[t_0, t_1]$; b) $B(t_1) - B(t_0) = 0$; c) $\int_{|x| \leq 1} |x| (\Pi(t_1, dx) - \Pi(t_0, dx)) < \infty$.

Si $\zeta(t)$ es una variación $\xi(t)$ en el segmento $[t_0, t]$, entonces $\zeta(t)$ será también un proceso estocástico continuo con incrementos independientes cuya función característica tiene por expresión

$$M e^{i\lambda \zeta(t)} = \exp \left\{ i\lambda \gamma(t) + \int (e^{i\lambda |x|} - 1) (\Pi(t, dx) - \Pi(t_0, dx)) \right\},$$

donde $\gamma(t) = \text{var } a(s) + \int_{[t_0, t]} |x| \Pi(t, dx) - \Pi(t_0, dx)$ y el primer sumando en el segundo miembro es la variación $a(\cdot)$ en el segmento $[t_0, t]$.

IV. Sea K un cono en R^m con su centro en el punto 0. Para que, con la probabilidad 1, $\xi(t) \in K$, $t \in T$, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones: a) $a(t) \in K$ para $t \in T$; b) $B(t) = 0$ para $t \in T$; c) si $A \cap K$ está vacío, entonces $\Pi(t, A) = 0$ para todo $t \in T$.

V. Sea $\xi(t)$ un proceso con valores en R^1 . Para que $\xi(t)$, con la probabilidad 1, sea una función no decreciente, es necesario y suficiente que: a) $a(t)$ sea una función no decreciente; b) $B(t) = 0$ para todo t ; c) $\Pi(t, (-\infty, 0)) = 0$ para t cualquiera.

16.3. Procesos homogéneos. Propiedades asintóticas

16.3.1. Función característica del proceso homogéneo. Un proceso con incrementos independientes $\xi(t)$ se llama homogéneo, si está definido en $[0, \infty)$, $\xi(0) = 0$ y la distribución $\xi(t+h) - \xi(t)$ coin-

cide con la distribución $\xi(h)$ para cualesquiera $t > 0$ y $h > 0$. Todo proceso homogéneo con incrementos independientes $\xi(t)$ puede ser representado en la forma

$$\xi(t) = a(t) + \xi_1(t),$$

donde $\xi_1(t)$ es un proceso estocástico continuo con incrementos independientes; $a(t)$, una función no aleatoria que satisface la condición: para cualesquiera $h > 0$, $t > 0$ se verifica $a(t+h) = a(t) + a(h)$.

Si $\xi(t)$ es un proceso estocástico continuo con incrementos independientes en R^m , su función característica tiene por expresión

$$\begin{aligned} \text{Me}^{i(z, \xi(t))} = \exp \left\{ t \left[l(z, a) - \frac{1}{2} (Bz, z) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{|x| \leq 1} (e^{i(z, x)} - 1 - (z, x)) \Pi(dx) + \int_{|x| > 1} (e^{i(z, x)} - 1) \Pi(dx) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $a \in R^m$; B es un operador no negativo simétrico en R^m ; Π es una medida en R^m , para la cual

$$\int \frac{(x, x)}{1 + (x, x)} \Pi(dx) < \infty \text{ y } \Pi(\{0\}) = 0.$$

A causa de la homogeneidad del proceso el segundo miembro en (3.1) es también una función característica del incremento $\xi(t+h) - \xi(t)$ para todo $h > 0$. Como se ve de la fórmula (3.1), la magnitud

$$K(z) = \frac{1}{t} \ln \text{Me}^{i(z, \xi(t))}$$

no depende de t . Esta se llama **cumulante** del proceso homogéneo con incrementos independientes. La cumulante de un proceso determina todas sus distribuciones de dimensiones finitas.

16.3.2. Propiedades locales de los procesos homogéneos. En este punto se supone que $\xi(t)$ es un proceso homogéneo en R^1 . La función característica del proceso tiene por expresión

$$\begin{aligned} \text{Me}^{i\lambda \xi(t)} = \exp \left\{ t \left[i a \lambda - \frac{b \lambda^2}{2} + \int_{|x| \leq 1} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Pi(dx) + \int_{|x| > 1} (e^{i\lambda x} - 1) \Pi(dx) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Examinemos el comportamiento de $\xi(t)$ cuando $t \downarrow 0$.

I. Si, por lo menos una de las magnitudes

$$\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \xi(t), \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \xi(t)$$

es finita con probabilidad positiva, entonces $\xi(t)$ tiene, con la probabilidad 1, variación acotada en todo segmento finito y, por consiguiente (véase p. 16.2.3, III), $b = 0$ y $\int_{|x| \leq 1} |x| \Pi(dx) < \infty$. En este

caso

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \xi(t) = a - \int_{-1}^1 x \Pi(dx) \right\} = 1.$$

II. Si está cumplida una de las condiciones: 1) $b > 0$; 2) $\int_{-1}^1 x \times$

$\times |x| \Pi(dx) = +\infty$, entonces

$$P \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \xi(t) = +\infty \right\} = P \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \xi(t) = -\infty \right\} = 1.$$

III. $P \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} \xi(t) = \sqrt{b} \right\} = P \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} \times$

$\times \xi(t) = -\sqrt{b} \right\} = 1$ (ley local del logaritmo reiterado).

IV. Sean: $\xi(t)$ un proceso no decreciente con una cumulante

$$K(z) = \int_0^{\infty} (e^{tz} - 1) \Pi(dx)$$

y $g(x)$, una función no decreciente que está definida para $x \geq 0$ y satisface las condiciones: 1) $g(0) = 0$; 2) $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ (la función g es semiaditiva). En este caso

a) si $\int_0^{\infty} g(x) \Pi(dx) < \infty$, entonces $P \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\xi(t))}{t} = 0 \right\} = 1$;

b) si $\int_0^1 g(x) \Pi(dx) = +\infty$, entonces $P \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{g(\xi(t))}{t} = +\infty \right\} = 1$.

V. Supongamos que $\varphi(t)$ crece en $[0, 1]$ y

$$\limsup_{u \downarrow t} \left| \frac{\varphi(ut)}{\varphi(t)} - 1 \right| = 0.$$

Supongamos que $\xi(t)$ es tal proceso homogéneo con incrementos independientes que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} P \{ \xi(t) < -\varepsilon \varphi(t) \} < 1.$$

Entonces

1) si $\int_0^1 \frac{1}{t} P \{ \xi(t) > \varphi(t) \} dt < \infty$, entonces

$$P \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} \leq 1 \right\} = 1;$$

2) si $\int_0^t \frac{1}{t} P \{ \xi(t) > \varphi(t) \} dt = +\infty$, entonces

$$P \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} \geq 1 \right\} = 1.$$

VI. Sea $\xi(t)$ un proceso estable con una cumulante

$$K(z) = -c|z|^\alpha \left(1 - \frac{iz}{|z|} \omega(z, \alpha) \right),$$

donde $\omega(z, \alpha) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha$ con $\alpha \in (1, 2)$, $\omega(z, \alpha) = \frac{2}{\pi} \ln|z|$ con $\alpha = 1$. Este proceso tiene solamente saltos negativos. Hagamos

$$\varphi(t) = \alpha \left(\frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\left| \cos \frac{\pi}{2} \alpha \right|} \right)^{1/\alpha} t^{1/\alpha} \left[\ln \ln \frac{1}{t} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \text{ con } \alpha \in (1, 2);$$

$$\varphi(t) = \frac{2ct}{\pi} \ln \frac{1}{t} \text{ con } \alpha = 1.$$

Entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} = 1 \right\} = 1.$$

VII. Sea $\xi(t)$ un proceso monótono estable con una cumulante

$$K(z) = -c|z|^\alpha \left(1 - \frac{iz}{|z|} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha \right), \quad 0 < \alpha < 1.$$

En este caso

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \xi(t) / \left(t^{1/\alpha} \left[\ln \ln \frac{1}{t} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right) > 0 \right\} = 1.$$

16.3.3. Comportamiento de los procesos unidimensionales cuando $t \rightarrow \infty$. Aquí se emplean las designaciones del punto antecedente.

I. Ley reforzada de los grandes números. 1) Si existe $M\xi(t) = \gamma t$, entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{t} = \gamma \right\} = 1 \left(\gamma = a + \int_{-\infty}^{-1} x\Pi(dx) + \int_1^{\infty} x\Pi(dx) \right).$$

2) Sea $\int_{-\infty}^{-1} x\Pi(dx) > -\infty$, $\int_1^{\infty} x\Pi(dx) = +\infty$. Entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \xi(t) = +\infty \right\} = 1.$$

3) Sea $\int_{-\infty}^{-1} x \Pi(dx) = -\infty$, $\int_1^{\infty} x \Pi(dx) < +\infty$. Entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \xi(t) = -\infty \right\} = 1.$$

II. Condiciones para que un proceso sea notado en $[0, \infty)$.

1) Si $M \xi(t) < 0$, entonces $P \left\{ \sup_t \xi(t) < \infty \right\} = 1$,

$$P \left\{ \inf_t \xi(t) = -\infty \right\} = 1.$$

2) Si $M \xi(t) > 0$, entonces $P \left\{ \sup_t \xi(t) = +\infty \right\} = 1$,

$$P \left\{ \inf_t \xi(t) > -\infty \right\} = 1.$$

3) Si $M \xi(t) = 0$ y $\xi(t) \neq 0$ idénticamente, entonces

$$P \left\{ \sup_t \xi(t) = +\infty \right\} = P \left\{ \inf_t \xi(t) = -\infty \right\} = 1.$$

4) Para que $P \left\{ \sup_t \xi(t) < +\infty \right\} = 1$, es necesario y suficiente que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t} P \{ \xi(t) > 0 \} dt < \infty.$$

5) Para que $P \left\{ \inf_t \xi(t) > -\infty \right\} = 1$, es necesario y suficiente que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t} P \{ \xi(t) < 0 \} dt < \infty.$$

III. Sea $\xi(t)$ un proceso no decreciente con una cumulante

$$K(x) = \int_0^{\infty} (e^{tx} - 1) \Pi(dx)$$

y supongamos que $g(x)$ es una función no decreciente para la cual $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$, cuando $x > 0$, $y > 0$.

1) Si $\int_1^{\infty} g(x) \Pi(dx) < \infty$, entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} g(\xi(t)) = 0 \right\} = 1.$$

2) Si $\int_1^{\infty} g(x) \Pi(dx) = +\infty$, entonces

$$P \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} g(\xi(t)) = +\infty \right\} = 1.$$

IV. Ley del logaritmo reiterado. Supongamos que $M\xi(t) = 0$ y $D\xi(t) < \infty$. Entonces $D\xi(t) = tc$, donde $c = b + \int x^2 \Pi(dx)$ y

$$P \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2ct \ln \ln t}} = 1 \right\} = P \left\{ \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2ct \ln \ln t}} = -1 \right\} = 1.$$

16.4. Funcionales de los procesos con incrementos independientes

16.4.1. Ecuación diferencial integral del proceso. Sea $\xi(t)$ un proceso con incrementos independientes en $[t_0, t_1]$ con valores en R^m , cuya función característica se expresa así:

$$M \exp(i(z, \xi(t))) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t [i(\hat{a}(s), z) - \frac{1}{2}(\hat{B}(s)z, z) + \int_{|x| \leq 1} (e^{i(z, x)} - 1 - i(z, x)) \hat{\Pi}(s, dx) + \int_{|x| > 1} (e^{i(z, x)} - 1) \hat{\Pi}(s, dx)] ds \right\}, \quad (4.1)$$

donde $\hat{a}(s) \in R^m$, $\hat{B}(s)$ es un operador no negativo simétrico en R^m , $\hat{\Pi}(s, A)$ es una medida en R^m , para la cual $\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \hat{\Pi}(t, dx) < \infty$ cuando $s \in [t_0, t_1]$.

La función característica del proceso puede ser escrita en la forma (4.1), si las funciones $\hat{a}(t)$, $\hat{B}(t)$, $\hat{\Pi}(t, A)$, que figuran en la fórmula (2.1), son absolutamente continuas respecto de t . Supongamos que $\hat{a}(t)$, $\hat{B}(t)$, $\hat{\Pi}(t, A)$ y $\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \hat{\Pi}(t, dx)$ son continuas respecto de t .

En este caso la función

$$Mf(x + \xi(t)) = u(t, x)$$

satisface la siguiente ecuación diferencial integral, cuando $t \in [t_0, t_1]$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + L_t u(t, x) = 0 \quad (4.2)$$

y la condición de frontera $\lim_{t \rightarrow t_1} u(t, x) = f(x)$, cualquiera que sea la función f dos veces continuamente derivable con derivadas acotadas;

aquí

$$L_t u(t, x) = \sum_{i=1}^m \hat{a}^i(t) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m \hat{b}^{ij}(t) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^i \partial x^j} + \int_{|y| \leq 1} [f(x+y) - f(x) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x)}{\partial x^j} y^j] \hat{\Pi}(t, dx) + \int_{|y| > 1} [f(x+y) - f(x)] \hat{\Pi}(t, dx); \quad (4.3)$$

\hat{a}^i, x^i son las coordenadas de los vectores \hat{a} y x , \hat{b}^{ij} son los elementos de la matriz del operador \hat{B} en cierta base ortonormada en R^m .

El operador L_t puede emplearse también para calcular las distribuciones de las funcionales de tipo integral. Sea

$$\varphi(t, x) = \int_t^{t_1} g(s, \xi(s) - \xi(t) + x) ds, \quad (4.4)$$

donde $g(s, x)$ es una función continua acotada, dos veces continuamente derivable respecto a x , con derivadas acotadas

$$v_\lambda(t, x) = M e^{\lambda \varphi(t, x)}.$$

Entonces, $v_\lambda(t, x)$ satisface la ecuación diferencial integral

$$\frac{\partial}{\partial t} v_\lambda(t, x) + L_t v_\lambda(t, x) + \lambda g(t, x) v_\lambda(t, x) = 0 \quad (4.5)$$

y la condición de frontera $\lim_{t \uparrow t_1} v_\lambda(t, x) = 1$.

Si la función $v_\lambda(t, x)$ se conoce, entonces

$$M \exp \left\{ \lambda \int_{t_0}^{t_1} g(s, \xi(s)) ds \right\} = v_\lambda(t_1, 0).$$

16.4.2. Procesos homogéneos unidimensionales con saltos negativos.

Sea $\xi(t)$ un proceso homogéneo unidimensional con una cumulante

$$K(z) = t\gamma z - \frac{bz^2}{2} \int_{-\infty}^{-1} (e^{tzz} - 1) \Pi(dx) + \int_{-1}^0 (e^{tzz} - 1 - tzz) \Pi(dx), \quad (4.6)$$

es decir, $\xi(t)$ puede tener solamente saltos negativos. Si $\gamma + \int_{-\infty}^{-1} \times$

$\times x \Pi(dx) \geq 0$, entonces $P(\sup_t \xi(t) = +\infty) = 1$. Esto significa que el proceso no está acotado por arriba y la magnitud

$$\tau_a = \inf \{t: \xi(t) > a\}$$

es finita con la probabilidad 1. Como no hay saltos positivos, $\xi(\tau_a) = a$. La magnitud τ_a se llama momento de la primera obtención del nivel a (momento del primer paso por el nivel a), τ_a es un momento de Márkov para el proceso $\xi(t)$ (véase p. 14.2.4). Demos a conocer algunas propiedades de τ_a .

1) τ_a , como función de a , es un proceso homogéneo con incrementos independientes. Este proceso con la probabilidad 1 no decrece.

2) Designemos

$$K_+(z) = \gamma z + \frac{bz^2}{2} + \int_{-\infty}^{-1} (e^{tz} - 1) \Pi(dx) + \int_{-1}^0 (e^{tz} - 1 - sz) \Pi(dx), \quad (4.7)$$

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{a} \ln M e^{-\lambda \tau_a}, \quad \lambda > 0.$$

Entonces, $\psi(\lambda)$ es una única raíz de la ecuación

$$K_+(-\psi(\lambda)) = \lambda.$$

Indiquemos que para $\operatorname{Re} z > 0$ existe $M e^{z \xi(t)}$. Esta función es analítica y

$$M e^{z \xi(t)} = e^{t K_+(z)}.$$

La función $\psi(\lambda)$ es analítica para $\operatorname{Re} \lambda > 0$ y

$$M e^{i \lambda \tau_a} = e^{a \psi(-i \lambda)}.$$

3) Indiquemos, por fin, la relación existente entre las distribuciones del proceso $\xi(t)$ y de la magnitud τ_a :

$$\frac{d}{ds} \int_0^x P\{\tau_y < s\} dy = \frac{1}{s} \int_0^x y dy P\{\xi(s) < y\}.$$

Supongamos que la densidad de distribución de $\xi(s)$ es $f_\xi(s, x) = \frac{d}{dx} P\{\xi(s) < x\}$. Entonces, la densidad de la magnitud τ_a será

$$f_\tau(a, s) = \frac{d}{ds} P\{\tau_a \leq s\} \text{ y } f_\tau(a, s) = \frac{a}{s} f_\xi(s, a).$$

4) Conociendo la distribución de τ_a , podemos hallar la distribución del máximo del proceso

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \xi(t) < a\right\} = P\{\tau_a > T\}.$$

16.4.3. Distribución del máximo y del mínimo del proceso homogéneo. Supongamos que $\xi(t)$ es un proceso homogéneo unidimensional

y $F(t, x)$ es la función de distribución de $\xi(t)$. Designemos

$$Q_+(t, x) = P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \xi(s) < x \right\};$$

$$q_+(\lambda, x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q_+(t, x) dt;$$

$$\tilde{q}_+(\lambda, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t z x} d_x q_+(\lambda, x).$$

Entonces,

$$\tilde{q}_+(\lambda, z) = \exp \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t} \int_0^{\infty} (e^{t z x} - 1) d_x F(t, x) dt \right\}.$$

Denotemos ahora:

$$Q_-(t, x) = P \left\{ \inf_{0 \leq s \leq t} \xi(s) < x \right\};$$

$$q_-(\lambda, x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q_-(t, x) dt;$$

$$\tilde{q}_-(\lambda, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t z x} d_x q_-(\lambda, x).$$

Entonces,

$$\tilde{q}_-(\lambda, z) = \exp \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{t z x} - 1) d_x F_-(t, x) dt \right\}.$$

16.4.4. Distribución del momento y de la magnitud de un anticipo. Introduzcamos las siguientes magnitudes: cuando $a > 0$,

$$\tau_a = \inf \{t: \xi(t) \geq a\}; \quad \gamma_a = \xi(\tau_a + 0) - a,$$

la magnitud τ_a se llama momento del primer anticipo con relación al nivel a , γ_a es la magnitud del anticipo, si $\sup \xi(t) \leq a$; consideramos $\tau_a = +\infty$, γ_a en este caso no está definida. Hagamos $M(x) = \int_{\mathbb{R}} \Pi(dy)$, $x > 0$, donde Π es la medida que figura en la función característica del proceso $\xi(t)$ (véase la fórmula (3.1)). Entonces, la transformación conjunta de Laplace de las magnitudes τ y γ se determi-

na por la correlación

$$M e^{-\lambda \tau_a - \mu \gamma_a} = 1 - q_+ (\lambda, a) -$$

$$- \frac{\mu}{\lambda} \int_0^a \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[\int_0^{\infty} e^{-\mu y} M (a + y - u - v) dy \right] dq_+ (\lambda, u) \right\} dq_+ (\lambda, v),$$

($q_{\pm} (\lambda, x)$) se han determinado en 16.4.3).

La distribución conjunta de las magnitudes τ_a y γ_a se da mediante la fórmula: cuando $y > 0$,

$$P (\tau_a < t, \gamma_a > y) = \int_0^a M (a + y - u) d_u Q_+ (t, u) + \\ + \int_0^a \int_{-\infty}^0 M (a + y - z - u) d_z \int_0^t d_u Q_+ (t - s, u) d_s Q_- (s, z).$$

Si es que $a < 0$, $\tau_a = \inf \{t: \xi(t) < a\}$, $\gamma_a = \xi(\tau_a + 0) - a$, entonces la transformación conjunta de Laplace de las magnitudes τ_a y γ_a se determina por la fórmula

$$M e^{-\lambda \tau_a + \mu \gamma_a} = q_- (\lambda, a) -$$

$$- \frac{\mu}{\lambda} \int_a^0 \left[\int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^0 e^{\mu y} N (a + y - u - v) dy \right] dq_+ (\lambda, u) \right] dq_- (\lambda, v),$$

donde $N(z) = \int_{-\infty}^z 11(dz)$ para $z < 0$.

La distribución conjunta de estas magnitudes puede ser escrita de la forma siguiente: para $y < 0$

$$P (\tau_a < t, \gamma_a < y) = \int_a^0 N (a + y - u) d_u Q_- (t + u) + \\ + \int_a^0 \int_0^{\infty} N (a + y - z - u) d_z \int_0^t d_u Q_- (t - s, u) d_s Q_- (s, z).$$

16.4.5. Distribución conjunta del supremo, ínfimo y del valor de un proceso. Hagamos para $a < 0 < b$, $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$

$$Q(t; a, b; \alpha, \beta) = P \{ \inf_{s \leq t} \xi(s) \geq a, \sup_{s \leq t} \xi(s) \leq b, \xi(t) \in (\alpha, \beta) \};$$

$$\Gamma(x, dt, dy) = P \{ \tau_x \in dt, \gamma_x \in dy \},$$

cuando $x > 0$ esta medida según dy está concentrada en $[0, \infty]$, para $x < 0$, en $(-\infty, 0)$.

Examinemos también las transformaciones de Laplace de estas funciones respecto de t :

$$\Gamma^{(\lambda)}(x, A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \Gamma(x, dt, A);$$

$$q(\lambda; a, b; \alpha, \beta) = \int_0^{\infty} Q(t; a, b; \alpha, \beta) e^{-\lambda t} dt.$$

Sea, ahora,

$$r_{\lambda}(A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} P\{\xi(t) \in A\} dt.$$

Hemos de hacer notar que la función $\Gamma^{(\lambda)}(x, A)$ puede ser definida haciendo uso de los resultados del punto antecedente. Para $x > 0$

$$\Gamma^{(\lambda)}(x, (y, \infty)) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x \int_{-\infty}^0 M(x+y-u-v) dq_-(\lambda, u) dq_+(\lambda, v)$$

y, cuando $x < 0$,

$$\Gamma^{(\lambda)}(x, (-\infty, y)) = \frac{1}{\lambda} \int_x^0 \int_0^{\infty} N(x+y-u-v) dq_+(\lambda, u) dq_-(\lambda, v).$$

Para $x \in [b, \infty]$ hagamos

$$G^{(\lambda)}(x, A) = \int \Gamma^{(\lambda)}(a-b-x, dy) \Gamma^{(\lambda)}(b-a-y, A_{-b}),$$

donde $A_{-b} = \{x: x + b \in A\}$. Para $x \in (-\infty, a)$ hagamos

$$G^{(\lambda)}(x, A) = \int \Gamma^{(\lambda)}(b-a-x, dy) \Gamma^{(\lambda)}(a-b-y, A_{+a}).$$

$A_{+a} = A_{-|a|}$. Por fin, para $a < x < b$ suponemos $G^{(\lambda)}(x, A) = 0$.
Sea ahora

$$H^{(\lambda)}(\mu, x, A) = \chi_A(x) + \sum_{h=1}^{\infty} \mu^h \int \dots \int G^{(\lambda)}(x, dx_1) \dots G^{(\lambda)}(x_{h-1}, A).$$

En este caso

$$\begin{aligned} q(\lambda; a, b; \alpha, \beta) = & r_{\lambda} \left((\alpha, \beta) - \int \int \Gamma^{(\lambda)}(a, dy) + \Gamma^{(\lambda)}(b, dy) \right) \times \\ & \times H^{(\lambda)}(1, y, dx) r_{\lambda}((\alpha-x, \beta-x)) + \\ & + \int \int \int [\Gamma^{(\lambda)}(b, dy) H^{(\lambda)}(1, y, dz) \Gamma^{(\lambda)}(a-b-z, dx) + \\ & + \Gamma^{(\lambda)}(a, dy) H^{(\lambda)}(1, y, dz) \Gamma^{(\lambda)}(b-a-z, dx)] r_{\lambda}((\alpha-x, \beta-x)). \end{aligned}$$

Consideremos también la distribución conjunta del valor del proceso y de su supremo. Si $0 < x \leq a$, entonces

$$P \left\{ \sup_{s \leq t} \xi(s) < a, \xi(t) < x \right\} = P \left\{ \xi(t) < x \right\} + \\ + \int_0^t \int_0^\infty \Gamma(a, ds, dy) P \left\{ \xi(t-s) < x - a - y \right\};$$

si, en cambio, $0 < a < x$, entonces

$$P \left\{ \sup_{s \leq t} \xi(s) < a, \xi(t) < x \right\} = Q_+(t, a).$$

16.4.6. Distribución del supremo de un proceso en el intervalo infinito. Supongamos que $\int_0^\infty \frac{1}{t} P \left\{ \xi(t) > 0 \right\} dt < \infty$ y, por tanto (véanse los pp. 3.3 y 3.4), $P \left\{ \sup_t \xi(t) < \infty \right\}$. En este caso

$$\int_0^\infty e^{tx} dx P \left\{ \sup_t \xi(t) < x \right\} = \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_0^\infty (e^{tx} - 1) d_x F(t, x) dt \right\},$$

donde $F(t, x) = P \left\{ \xi(t) < x \right\}$.

Examinemos el caso cuando la cumulante del proceso tiene la forma (4.6), es decir, el proceso tiene solamente saltos negativos. Entonces,

$$P \left\{ \sup_t \xi(t) < x \right\} = 1 - e^{-kx},$$

donde k es una raíz positiva de la ecuación $K_+(k) = 0$, $K_+(x)$ se da mediante la igualdad (4.7).

16.5. Proceso de Poisson

16.5.1. Definición del proceso homogéneo de Poisson. Un proceso homogéneo con incrementos independientes $\xi(t)$ se llama proceso homogéneo de Poisson, si $\xi(t)$ tiene la distribución de Poisson. En este caso existe tal $a > 0$ que para todo $k \geq 0$ se tiene

$$P \left\{ \xi(h) = k \right\} = P \left\{ \xi(t+h) - \xi(t) = k \right\} = \frac{(ah)^k}{k!} e^{-ah}. \quad (5.1)$$

La función característica del proceso de Poisson tiene por expresión

$$\varphi(t, z) = M e^{iz\xi(t)} = \exp(at[e^{iz} - 1]).$$

Demos a conocer una situación general, en la que los fenómenos se describen con la ayuda del proceso de Poisson.

Supongamos que en un experimento se observan las apariciones de ciertos sucesos. Si: 1) el número de sucesos ocurridos durante el lapso $[t, t+h]$ no depende del número y momentos de aparición de los sucesos en el lapso $[0, t]$; 2) la probabilidad de que en el intervalo de tiempo

$[t, t+h]$ aparezca 1 suceso es igual a $ah + o(h)$; ξ) la probabilidad de que en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ aparezca más de un suceso es igual a $o(h)$, entonces la magnitud $\xi(t)$, igual al número de sucesos ocurridos en el intervalo $[0, t]$ será, como función de t , un proceso de Poisson.

Cada proceso homogéneo escalonado con incrementos independientes, todos los saltos del cual son iguales a 1, es un proceso de Poisson.

16.5.2. Algunas propiedades del proceso de Poisson. Consideraremos algunas propiedades del proceso $\xi_\gamma(t) = \gamma t + \xi(t)$, donde $\xi(t)$ es un proceso de Poisson cuyas distribuciones se dan por la fórmula (5.1).

I. Si $\gamma + a > 0$, entonces

$$P(\sup_t \xi_\gamma(t) = +\infty) = P(\inf_t \xi_\gamma(t) > -\infty) = 1;$$

si $\gamma + a < 0$, entonces

$$P(\sup_t \xi_\gamma(t) < +\infty) = P(\inf_t \xi_\gamma(t) = -\infty) = 1;$$

si $\gamma + a = 0$, entonces

$$P(\sup_t \xi_\gamma(t) = +\infty) = P(\inf_t \xi_\gamma(t) = -\infty) = 1.$$

II. Sea: $\gamma < 0$, $\gamma + a > 0$. En este caso, para $x < 0$

$$P(\inf_t \xi_\gamma(t) < x) = e^{kx}, \quad (5.2)$$

donde k es la raíz positiva de la ecuación

$$a(e^{-k} - 1) - k\gamma = 0. \quad (5.3)$$

III. Sea: $\gamma < 0$, $\gamma + a < 0$. En este caso, para todo $x > 0$

$$P(\sup_t \xi_\gamma(t) > x) = 1 - \left(1 + \frac{a}{\gamma}\right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{[x]} \frac{(x-k)^k}{k!} \left(\frac{a}{\gamma}\right)^k e^{-\frac{a}{\gamma}(x-k)}, \quad (5.4)$$

donde $[x]$ es la parte entera de x .

IV. Supongamos $c < 0 < d$. Designemos mediante $p(c, d)$ la probabilidad de que el proceso $\xi_\gamma(t)$ alcance el nivel c antes de caer en el intervalo (d, ∞) . En este caso, para $\gamma < 0$, se tiene

$$p(c, d) = \frac{\sum_{k=0}^{[d]} \left(\frac{a}{\gamma}\right)^k \frac{1}{k!} e^{ka/\gamma} (d-k)^k}{e^{\frac{a}{\gamma}c} \sum_{k=0}^{[d-c]} \left(\frac{a}{\gamma}\right)^k \frac{1}{k!} e^{ka/\gamma} (d-c-k)^k} \quad (5.5)$$

donde $[x]$ es la parte entera de x .

16.5.3. Proceso de Poisson no homogéneo. Esto es un proceso estocástico continuo con incrementos independientes $\xi(t)$, para el cual los incrementos $\xi(t+h) - \xi(t)$ tienen distribuciones de Poisson.

Para este proceso existe una función no decreciente $a(t)$ tal que

$$P\{\xi(t+h) - \xi(t) = k\} = \frac{[a(t+h) - a(t)]^k}{k!} e^{-[a(t+h) - a(t)]}. \quad (5.6)$$

El proceso de Poisson describe el número de apariciones de ciertos sucesos aleatorios, si están cumplidas las condiciones: 1) en cada intervalo finito ocurre, con la probabilidad 1, un número finito de sucesos; 2) los números de apariciones de los sucesos en los intervalos disjuntos no dependen uno del otro; 3) la probabilidad de aparición de al menos un suceso en cierto intervalo tiende a cero, si la longitud del intervalo tiende a cero; 4) la probabilidad de aparición simultánea de dos y más sucesos es nula. Si estas condiciones están cumplidas y $\xi(t)$ significa el número de sucesos ocurridos en el intervalo $[t_0, t]$, entonces $\xi(t)$ es el proceso de Poisson.

Si la función $a(t)$, que figura en la fórmula (5.6), es estrictamente monótona, recurriendo a una transformación sencilla podemos convertir el proceso en uno homogéneo. Supongamos que $\xi(t)$ está definido en $[t_0, \infty)$ y $a(t_0) = 0$. Designemos mediante $\lambda(t)$ una función inversa con relación a $a(t)$: $a(\lambda(t)) = t$. La función $\lambda(t)$ está definida en el intervalo $[0, a(+\infty))$. Sea $\xi_1(t) = \xi(\lambda(t))$. Entonces, para $0 \leq t < t+h < a(+\infty)$ se tiene

$$\begin{aligned} P\{\xi_1(t+h) - \xi_1(t) = k\} &= P\{\xi(\lambda(t+h)) - \xi(\lambda(t)) = k\} = \\ &= \frac{[a(\lambda(t+h)) - a(\lambda(t))]^k}{k!} \exp\{-[a(\lambda(t+h)) - a(\lambda(t))]\} = \frac{h^k}{k!} e^{-h}. \end{aligned}$$

De este modo, $\xi_1(t)$ es un proceso homogéneo de Poisson de parámetro 1. La transformación mencionada permite reducir la resolución de varios problemas para el proceso general de Poisson a la resolución de problemas para un proceso homogéneo.

16.6. Proceso de Wiener

16.6.1. Definición y algunas propiedades. Se llama proceso de Wiener en R^m un proceso homogéneo con incrementos independientes para el cual $\xi(t)$ tiene distribución gaussiana con la densidad

$$p_t(x) = (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{(x, x)}{2t}\right\}. \quad (6.1)$$

Este proceso se denomina también proceso de Wiener m -dimensional. La función característica del proceso tiene por expresión

$$\varphi_t(x) = M \exp\{i(x, \xi(t))\} = e^{-\frac{t(x, x)}{2}}. \quad (6.2)$$

He aquí algunas propiedades del proceso de Wiener multidimensional.

- I. Un proceso de Wiener separable es continuo con la probabilidad 1.
- II. Ley local del logaritmo reiterado.

$$P\left\{\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2t \ln \ln 1/t}} = 1\right\} = P\left\{\underline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2t \ln \ln 1/t}} = -1\right\} = 1.$$

III. Ley del logaritmo reiterado

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right\} = P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1 \right\} = 1.$$

IV. Si la dimensión del espacio $m \geq 3$, entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} |\xi(t)| = +\infty \right\} = 1,$$

con ello, para todo $\lambda > 1$,

$$P \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(\ln T)^{\lambda/m - 1/2}}{\sqrt{T}} \inf_{t > T} |\xi(t)| = +\infty \right\} = 1.$$

V. Si $z \in R^m$ y $|z| = 1$, entonces el proceso $(z, \xi(t)) = \xi_z(t)$ es un proceso de Wiener unidimensional. Sea, ahora, $\{e_1, \dots, e_m\}$ una base ortonormada en R^m . En este caso los procesos $\xi_{e_1}(t), \dots, \xi_{e_m}(t)$ son procesos de Wiener unidimensionales independientes entre sí.

VI. Sean: $a \in R^m$, C un operador lineal en R^m y $\xi(t)$, un proceso de Wiener m -dimensional. Entonces,

$$\xi_1(t) = ta + C\xi(t) \quad (6.3)$$

es un proceso de Gauss homogéneo con incrementos independientes. Su función característica es de la forma

$$M_e^{i(z, \xi_1(t))} = e^{i(z, a) - \frac{t}{2} (Bz, z)}, \quad (6.4)$$

donde $B = CC^*$ (C^* es un operador conjugado de C). Todo proceso de Gauss homogéneo con incrementos independientes (su función característica tiene forzosamente por expresión (6.4)) puede ser representado en la forma (6.3); a título de C podemos tomar el operador $B^{1/2}$ (la raíz cuadrada positiva de un operador no negativo). Por esta razón, para todo proceso de Gauss homogéneo con incrementos independientes $\xi_1(t)$ existen unos vectores a, e_1, e_2, \dots, e_m , unos procesos de Wiener homogéneos independientes $w_1(t), \dots, w_m(t)$ y, además, unos números β_1, \dots, β_m tales que

$$\xi_1(t) = ta + \sum_{h=1}^m \beta_h w_h(t) e_h. \quad (6.5)$$

A título de vectores e_h se pueden tomar los vectores propios del operador B , $\beta_h = \sqrt{(Be_h, e_h)}$.

16.6.2. Método de ecuaciones diferenciales. Sea $\xi(t)$ un proceso de Wiener m -dimensional. Designemos mediante Δ el operador de Laplace en R^m :

$$\Delta u = \sum_{h=1}^m \frac{\partial^2 u}{(\partial x^h)^2},$$

donde x^1, \dots, x^m son las coordenadas del punto x en la base ortonormada fijada en R^m .

I. La función $Mf(x + \xi(t)) = u(t, x)$ donde f es una función acotada continua, satisface la ecuación

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(t, x)$$

con la condición inicial

$$\lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = f(x).$$

II. Sea también $g(x)$ una función continua acotada. Entonces

$$Mf(x + \xi(t)) \exp \left\{ \int_0^t g(x + \xi(s)) ds \right\} = v(t, x)$$

satisface la ecuación y la condición inicial

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta v(t, x) + g(x) v(t, x),$$

$$\lim_{t \downarrow 0} v(t, x) = f(x).$$

Observación. Las afirmaciones I y II quedan válidas, si en lugar del requisito de que sean acotadas f y g se exige el cumplimiento de la condición

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + |f(x)|) + \varepsilon(x)}{|x|^2} = 0.$$

III. Sea $G \subset R^m$ un dominio conexo con la frontera suave Γ . Designemos con τ_x el momento en que el proceso $x + \xi(t)$ ($x \in G$) llega por primera vez a la frontera Γ :

$$\tau_x = \inf \{t: x + \xi(t) \in \Gamma\}.$$

La magnitud τ_x puede tomar el valor de $+\infty$. Supongamos seguidamente que $\varphi(x)$ es una función continua arbitraria en Γ . Entonces:

a) la función

$$u(x) = M\varphi(x + \xi(\tau_x)) \chi_{\{\tau_x < \infty\}}$$

$$(\chi_{\{\tau_x < \infty\}} = 1, \text{ si } \tau_x < \infty \text{ y } \chi_{\{\tau_x < \infty\}} = 0, \text{ si } \tau_x = +\infty)$$

satisface la ecuación y la condición de frontera

$$\Delta u(x) = 0 \text{ y } u(x) = \varphi(x) \text{ para } x \in \Gamma,$$

es decir, $u(x)$ es una función armónica en G con el valor de frontera φ dado;

b) la función

$$v(x) = M \int_0^{\tau_x} g(x + \xi(s)) ds,$$

donde $g(x)$ es continua y acotada en G , satisface la ecuación y la condición de frontera

$$\Delta v(x) = -2g(x), \quad v(x) = 0, \quad x \in \Gamma;$$

c) la función

$$w(x) = M\varphi(x + \xi(\tau_x)) \exp \left\{ \int_0^{\tau_x} g(x + \xi(s)) ds \right\}$$

satisface la ecuación y la condición de frontera

$$\frac{1}{2} \Delta w(x) + g(x) w(x) = 0, \quad w(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma;$$

d) la función

$$u(t, x) = Mf(x + \xi(t)) \exp \left\{ \int_0^t g(x + \xi(s)) ds \right\} \chi_{\{\tau_x > t\}},$$

donde $\chi_{\{\tau_x > t\}} = 1$, cuando $\tau_x > t$ y $\chi_{\{\tau_x > t\}} = 0$ cuando $\tau_x \leq t$, satisface la ecuación y las condiciones de frontera:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + g(x) u(t, x), \quad x \in G; \quad u(0, x) = f(x), \\ x \in G, \quad u(t, x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0.$$

Las funciones f y g son continuas en la clausura de G ; cuando G es no acotado, estas funciones deben satisfacer la condición enunciada en la observación.

16.6.3. Proceso de Wiener unidimensional. Consideremos las distribuciones de ciertas funcionales del proceso de Wiener unidimensional $w(t)$.

I. Distribución del máximo. Para $x > 0$

$$P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} w(s) < x \right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^x e^{-u^2/2t} du; \\ P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} w(s) > x \right\} = 2P(w(t) > x).$$

II. Distribución del tiempo del primer paso. Sea $x > 0$, $\tau_x = \inf \{t: w(t) > x\}$. En este caso la magnitud τ_x tiene la siguiente densidad de distribución: cuando $s > 0$,

$$\frac{d}{ds} P(\tau_x < s) = \frac{x}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-x^2/2s}.$$

III. Distribución conjunta del máximo y del valor de un proceso. Cuando $x < a$, $a > 0$,

$$P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} w(s) < a, w(t) < x \right\} = P(w(t) < x) - P(w(t) > 2a - x) = \\ = P(w(t) < x) - P(\tilde{w}(t) < x - 2a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{x-2a}^x e^{-u^2/2t} du.$$

IV. Distribución del máximo de un módulo.

$$P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |w(s)| < a \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{h=-\infty}^{\infty} (-1)^h \int_{-a}^a \exp \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{2t} (u - 2ka)^2 \right\} du.$$

V. Distribución conjunta del máximo de un módulo y del valor de un proceso. Para $[c, d] \subset [-a, a]$ se tiene

$$P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |w(s)| < a, w(t) \in [c, d] \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{h=-\infty}^{\infty} (-1)^h \int_c^d \exp \left\{ -\frac{1}{2t} (u + 2ka)^2 \right\} du.$$

VI. Distribución conjunta del máximo, mínimo y del valor de un proceso. Sea $a < 0 < b$, $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Entonces

$$P \left\{ \min_{0 \leq s \leq t} w(s) > a, \max_{0 \leq s \leq t} w(s) < b, w(t) \in (\alpha, \beta) \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2t} (x + 2k(b-a))^2 \right\} - \right. \\ \left. - \exp \left\{ -\frac{1}{2t} (x - 2a + 2k(b-a))^2 \right\} \right] dx.$$

VII. Designemos mediante τ el momento en que ocurre la primera salida del proceso del segmento $[a, b]$; $a < 0 < b$:

$$\tau = \min \{t: w(t) \notin [a, b]\}.$$

En este caso,

$$P\{w(\tau) = b\} = \frac{-a}{b-a}; \quad P\{w(\tau) = a\} = \frac{b}{b-a};$$

$$P\{\tau < t, w(\tau) = a\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-b}^b \sum_{h=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} (x + (2k+1)(b-a))^2 \right\} dx.$$

VIII. Ley de arco seno. Supongamos que $v(x) = 1$ para $x > 0$, $v(x) = 0$ para $x \leq 0$. Entonces

$$P \left\{ \int_0^t v(w(s)) ds < x \right\} = \frac{2}{\pi} \arcsen \sqrt{\frac{x}{t}}.$$

16.6.4. Proceso de Wiener homogéneo con desplazamiento. Supongamos que $\xi(t) = at + w(t)$; a es cierto número y $w(t)$, un proceso de Wiener unidimensional. Examinemos algunas funcionales del proceso.

I. Sea $x > 0$, mientras que τ_x es el momento de la primera caída en el punto x . En este caso, cuando $a \geq 0$, tenemos

$$M e^{-\lambda \tau_x} = \exp \{ -x (\sqrt{a^2 + 2\lambda} - a) \} \quad (\lambda > 0).$$

Si $a < 0$, se tiene

$$P(\tau_x = +\infty) = P(\sup_t \xi(t) < x) = 1 - e^{2ax}.$$

II. Supongamos que $c < 0 < d$, $(\alpha, \beta) \subset (c, d)$,

$$Q(t; c, d; \alpha, \beta) = P(\min_{s \leq t} \xi(s) > c,$$

$$\max_{s \leq t} \xi(s) < d, \quad \xi(t) \in (\alpha, \beta)),$$

$$q(\lambda; c, d; \alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q(t; c, d; \alpha, \beta) dt.$$

Entonces,

$$q(\lambda; c, d; \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2\lambda}} \left[\int_{\alpha}^{\beta} e^{ay - \sqrt{a^2 + 2\lambda}|y|} dy - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{a^2 + 2\lambda} c}{\operatorname{sh} \sqrt{a^2 + 2\lambda} (d - c)} \int_{\alpha}^{\beta} e^{ay - \sqrt{a^2 + 2\lambda}(d - y)} dy - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{a^2 + 2\lambda} d}{\operatorname{sh} \sqrt{a^2 + 2\lambda} (d - c)} \int_{\alpha}^{\beta} e^{ay - \sqrt{a^2 + 2\lambda}(y - c)} dy \right].$$

III. Supongamos que $c < 0 < d$ y τ es el momento de la primera salida de $[c, d]$:

$$\tau = \inf \{ t : \xi(t) \notin [c, d] \}$$

En este caso

$$P\{\xi(\tau) = c\} = \frac{1 - e^{-2ad}}{e^{-2ac} - e^{-2ad}}.$$

PROCESOS RAMIFICADOS

17.1. Procesos ramificados con un mismo tipo de partículas
(tiempo discreto)

17.1.1. Definición. Los procesos ramificados sirven de modelo para múltiples fenómenos reales de multiplicación, pérdida y transformación de partículas en biología, física, técnica, demografía, etc.

Definición 1. Una cadena de Márkov homogénea $\xi(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$, con valores de números enteros no negativos se denomina proceso ramificado con un mismo tipo de partículas o proceso de Galton - Watson, si sus probabilidades de paso $p_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}$ durante el tiempo t satisfacen las condiciones

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \delta_{0j}, & t=0; \\ \sum_{j_1 + \dots + j_i = j} p_{1j_1}(t) p_{1j_2}(t) \dots p_{1j_i}(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Se ha aceptado la siguiente terminología. Un modelo que se describe por un proceso ramificado se llama a menudo población. El valor de un proceso ramificado $\xi(t)$ en el momento t lo llaman número de partículas o individuos en la población en la generación de número t . Suele decirse también que $\xi(t)$ es el número general de descendientes de las partículas $\xi(0)$ de generación nula en la generación de número t .

La primera igualdad en (1.1) significa la ausencia de la auto-generación de la población, desaparecidas todas las partículas, o bien ausencia de la inmigración (aflujo de las partículas del exterior).

La segunda igualdad en (1.1), que significa que $p_{ij}(t)$ es, para $t \geq 1$, la convolución i -múltiple de la distribución $p_{1j}(t)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, con sí misma, es equivalente a la suposición de que cada una de las i partículas originales evoluciona (se pierde, se convierte en nuevas partículas del mismo tipo) independientemente de las otras. La segunda igualdad en (1.1) se denomina condición de ramificación.

Un proceso ramificado puede ser descrito en términos de la adición de magnitudes aleatorias independientes, igualmente distribuidas, no negativas de valores enteros.

Sean ξ_k , $k = 1, 2, \dots$, magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas que se interpretan como un número de descendientes proporcionados por cualquiera de las partículas en el momento de la transformación, es decir, $P\{\xi_k = j\} = p_{1j}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. El número de partículas $\xi(t+1)$ en la $(t+1)$ -ésima generación se expresa en términos del número de partículas $\xi(t)$

en la generación t como

$$\xi(t+1) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\xi(t)} \zeta_k, & \text{si } \xi(0) = 1; \\ \sum_{l=1}^t \sum_{k=1}^{\xi(l)} \zeta_{k,l}, & \text{si } \xi(0) = t. \end{cases} \quad (1.2)$$

17.1.2. Ejemplos. 1. El caso de apellido sobreviviente. El apellido lo heredan solamente los hijos varones. Supongamos que cada individuo tiene con la probabilidad p_j j descendientes de sexo masculino. Cada individuo engendra la primera generación de los descendientes los cuales, a su vez, la segunda generación, etc. El número general de descendientes en la t -ésima generación es $\xi(t)$.

Un interés determinado representa la investigación del número de descendientes en la t -ésima generación, es decir, la distribución de $\xi(t)$, como también el modo de determinar la probabilidad de generación del apellido $q = P\{\xi(t) = 0 \text{ para cierto } t/\xi(0) > 0\}$.

2. Un multiplicador electrónico es un dispositivo para amplificar un débil flujo electrónico. En el camino del flujo electrónico emanado por una fuente (el número $\xi(0)$ de tales electrones es la generación nula) se pone sucesivamente una serie de placas. Cada electrón, al chocar con la primera placa, genera un número aleatorio de nuevos electrones (la primera generación) los cuales, a su vez, golpean contra la siguiente placa. El proceso $\xi(t)$, es decir, el número de electrones emitidos de la t -ésima placa es, pues, un proceso ramificado.

3. Una reacción en cadena de neutrones. Al interactuar con el neutrón, un núcleo se desintegra omitiendo un número aleatorio de nuevos neutrones. Cada uno de estos neutrones secundarios puede bombardear otros núcleos produciendo un número aleatorio de nuevos neutrones, etc. Si el número originario de neutrones era igual a 1 (generación nula), la primera generación de neutrones generados por el neutrón de partida es una magnitud aleatoria $\xi(1)$. La dimensión de la t -ésima generación de $\xi(t)$ se forma por el número aleatorio de neutrones generados por $\xi(t-1)$ neutrones de la $(t-1)$ -ésima generación.

17.1.3. Ecuaciones para las funciones generadas. Los valores de números enteros de los procesos ramificados y, en particular, las igualdades (1.1) y (1.2), que determinan dichos procesos, llevan a que el aparato de funciones generadoras (véase el cap. 3) sea fundamental en la investigación de estos procesos.

Observación. Para los procesos de ramificación $\xi(t)$ se supone corrientemente (y esto, como regla, se hace en lo sucesivo) que $\xi(0) = 1$, lo que, sin embargo, no restringe la generalidad, pues, en virtud de la definición 1, cuando $\xi(0) > 1$, hacemos frente a $\xi(0)$ procesos que se desarrollan independientemente y que provienen de cada una de las $\xi(0)$ partículas originarias.

Supongamos que $p_j = P\{\xi(1) = j/\xi(0) = 1\}$, $p_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j/\xi(0) = i\}$ y sean $\Phi(s) = M[s^{\xi(1)}/\xi(0) = 1]$ y $\Phi_t(s) = M[s^{\xi(t)}/\xi(0) = 1]$ las funciones generadoras de estas distribuciones,

es decir,

$$\Phi_t(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1j}(t) s^j, \quad \Phi(s) = \Phi_1(s). \quad (1.3)$$

La función $\Phi_t(s)$ se denomina *función generadora del proceso ramificado* $\xi(t)$, $t = 0, 1, \dots$.

Teorema 1. Para $t, \tau \geq 0$ cualesquiera la función generadora $\Phi_t(s)$ satisface la ecuación funcional principal

$$\Phi_{t+\tau}(s) = \Phi_t(\Phi_\tau(s)) \quad (1.4)$$

y la condición inicial

$$\Phi_0(s) = s. \quad (1.5)$$

De este modo, $\Phi_t(s)$ es una iteración t -múltiple de la función generadora $\Phi(s)$: $\Phi_1(s) = \Phi(s)$, $\Phi_2(s) = \Phi(\Phi(s))$, $\Phi_3(s) = \Phi(\Phi_2(s)) = \Phi_2(s)(\Phi(s)) = \Phi(\Phi(\Phi(s)))$, ... y, en general,

$$\Phi_t(s) = \Phi(\Phi(\dots \Phi(\Phi(s)) \dots)). \quad (1.6)$$

Si $\Phi^{(t)}(s_1, s_2, \dots, s_t) = M[s_1^{\xi(1)} \dots s_t^{\xi(t)} / \xi(0) = 1]$ es una función generadora conjunta de las magnitudes aleatorias $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(t)$, entonces

$$\Phi^{(t)}(s_1, \dots, s_t) = \Phi(s_1 \Phi(s_2 \Phi(\dots s_{t-1} \Phi(s_t)) \dots)).$$

Supongamos que $F_t(s)$ es una función generadora de la suma $\xi(0) + \dots + \xi(t)$ del número general de partículas en una población durante el tiempo $[0, t]$, $t = 0, 1, \dots$, y $F(s)$ es una función generadora de la suma $\xi(0) + \xi(1) + \dots$, es decir, del número general de partículas en la población. Entonces,

$$\left. \begin{aligned} F_{t+1}(s) &= s \Phi(F_t(s)); \\ F(s) &= s \Phi(F(s)). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

17. 1.4. Ejemplos. 1. Procesos de pérdida. Sea $\xi(0) = 1$, $p_0 = P\{\xi(1) = 0 / \xi(0) = 1\} = 1 - p$, $p_1 = P\{\xi(1) = 1 / \xi(0) = 1\} = p$, $0 < p < 1$, $p_k = 0$, $k > 1$. En este caso $\Phi(s) = 1 - p + sp$, $\Phi_t(s) = 1 - p + sp$, de donde $p_{10}(t) = 1 - p^t$, $p_{11}(t) = p^t$, $p_{1k}(t) = 0$, $k > 1$.

2. Funciones generadoras lineales fraccionales. Sea $p_0 = \frac{1-(b+c)}{1-c}$, $p_k = bc^{k-1}$, $b, c > 0$, $b+c < 1$. Entonces, $\Phi(s) = \frac{1-(b+c)}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}$.

$\Phi(s)$ es una función lineal fraccional del tipo $\frac{\alpha + \beta s}{\gamma + \delta s}$.

$$\text{Sea } m = \Phi'(1) = \frac{b}{(1-c)^2} \text{ y}$$

$$q = \begin{cases} 1, & \text{si } m \leq 1; \\ p_0/c, & \text{si } m > 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\Phi_t(s) = \begin{cases} 1 - m^t \left[\frac{1-q}{m^t - q} + m^t \frac{\left[\frac{1-q}{m^t - q} \right]^2 s}{1 - \left[\frac{m^t - 1}{m^t - q} \right] s} \right], & \text{si } m \neq 1; \\ \frac{tc - [(t+1)c - 1]s}{1 + (t-1)c - tcs}, & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

De aquí, por ejemplo,

$$P_{10}(t) = \begin{cases} 1 - m^t \left[\frac{1-q}{m^t - q} \right], & \text{si } m \neq 1; \\ \frac{tc}{1 + (t-1)c}, & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

17.1.5. Momentos y clasificación. Supongamos que $\xi(0) = 1$, $m(t) = M\xi(t)$, $m = m(1)$, $\sigma(t) = D\xi(t)$, $\sigma^2 = \sigma(1)$.

De corolario inmediato de la ecuación funcional principal (1.4) para la función generadora de un proceso ramificado sirven las siguientes expresiones para $m(t)$ y $\sigma(t)$:

$$m(t) = m^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.8)$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma^2 m^{t-1} \frac{m^t - 1}{m - 1}, & \text{si } m \neq 1; \\ \sigma^2 t, & \text{si } m = 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

Definición 2. Un proceso ramificado con un mismo tipo de partículas se llama subcrítico, si $m < 1$; crítico, si $m = 1$, $\Phi'(1) > 0$; supercrítico, si $m > 1$.

La condición $\Phi'(1) > 0$ en la definición 2 expresa la no singularidad, es decir, la regularidad subcrítica del proceso correspondiente.

De este modo, para los procesos subcríticos $m(t)$ va decreciendo de forma exponencial, para los procesos críticos $m(t)$ es constante y para los procesos supercríticos, $m(t)$ crece según una ley exponencial.

17.1.6. Propiedades asintóticas y teoremas del límite. Si en un proceso ramificado $\xi(t)$, para cierto $t_0 > 0$, $\xi(t_0) = 0$, suele decirse que el proceso $\xi(t)$ ha degenerado para el momento de tiempo t_0 . La magnitud $q = P(\xi(t) = 0 \text{ para cierto } t > 0 / \xi(0) = 1)$ se denomina probabilidad de degeneración.

Si $q = 1$, el proceso $\xi(t)$ se llama degenerativo.

Teorema 2. Para que un proceso ramificado sea degenerativo, es necesario y suficiente que sea subcrítico o crítico.

Teorema 3. La probabilidad de degeneración q es la mínima raíz no negativa de la ecuación

$$\Phi(s) = s. \quad (1.10)$$

La probabilidad de degeneración q puede ser determinada como uno de los siguientes límites:

$$q = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} P_{10}(t); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(s), \quad |s| < 1, \end{cases} \quad (1.11)$$

con la particularidad de que en el último caso la convergencia es uniforme respecto de toda $|s| \leq r$, $r < 1$.

El comportamiento asintótico de las probabilidades $p_{10}(t)$ para $t \rightarrow \infty$ se describe del modo siguiente:

Teorema 4. a) Para un proceso subcrítico en el cual $M\xi(1) \ln \xi(1) < \infty$,

$$m^{-t} (1 - p_{10}(t)) = c + o(1), \quad (1.12)$$

donde

$$c = \prod_{n=0}^{\infty} h(\Phi_n(0)), \quad h(s) = \frac{1 - \Phi(s)}{m(1-s)}, \quad (1.13)$$

siendo $c > 0$, cuando y sólo cuando, $M\xi(1) \ln \xi(1) < \infty$.

b) Para un proceso crítico en el cual $\Phi''(1) < \infty$

$$p_{10}(t) = 1 - \frac{2}{t\Phi''(1)}(1 + o(1)). \quad (1.14)$$

c) Para un proceso supercrítico

$$p_{10}(t) = q - d[\Phi'(q)]^t + o([\Phi'(q)]^{2t}), \quad (1.15)$$

donde $0 < \Phi'(q) < 1$, d es una constante positiva.

Un proceso ramificado converge hacia cero o bien hacia el infinito y la convergencia en consideración es extremadamente inestable en el sentido de que si $m = M\xi(1) < \infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{1j}(t) = 0$,

$j = 1, 2, \dots$, y para todo $n \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) \geq n/\xi(0) = 1\} = 1 - q.$$

Para los procesos subcríticos existen los límites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p_{1j}(t)}{1 - p_{10}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = j/\xi(0) > 0, \xi(0) = 1\} = Q_j, \quad (1.16)$$

$$j \geq 1,$$

y las probabilidades Q_1, Q_2, \dots forman una distribución de probabilidades, es decir,

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q_j = 1.$$

Teorema 5. Una función generadora $Q(s) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j s^j$ satisface la ecuación funcional

La esperanza matemática de la distribución Q_1, Q_2, \dots es igual a $1/c$, donde c se determina por la igualdad (1.13).

Para los procesos críticos con el segundo momento finito es válido el teorema del límite.

Teorema 6. Si $\xi(t)$ es un proceso ramificado crítico cuyo segundo momento es finito, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\xi(t)}{M[\xi(t)/\xi(t) > 0, \xi(0) = 1]} > x/\xi(t) > 0, \xi(0) = 1 \right\} = e^{-x}. \quad (1.18)$$

Si $m < \infty$, el proceso $\eta(t) = m^{-t}\xi(t)$ es una martingala, es decir,
 $M[\eta(t + \tau)/\eta(t)] = \eta(t), \tau \geq 0.$

Sea $\xi(t)$ un proceso supercrítico. Del teorema sobre la convergencia de las martingalas se deduce que, con la probabilidad 1, el proceso $\eta(t)$ converge hacia cierta magnitud aleatoria η .

Teorema 7. La función característica $\varphi(s) = M e^{s\eta}$ de una magnitud aleatoria límite η satisface la ecuación funcional

$$\varphi(ms) = \Phi(\varphi(s)), \quad (1.19)$$

que tiene una única solución en la clase de funciones características cuyo primer momento es igual a 1.

Si $0 < \sigma^2 < \infty$, la función de distribución $K(x) = P\{\eta < x\}$ experimenta un salto en cero: $P\{\eta = 0\} = q$. La función de distribución condicional

$$P\{\eta < x/\eta > 0\} = \frac{K(x) - q}{1 - q}$$

es absolutamente continua, mientras que la varianza condicional $D[\eta/\eta > 0]$ es positiva.

17.2. Procesos ramificados con un mismo tipo de partículas [tiempo continuo]

17.2.1. Definiciones. Las teorías de procesos ramificados con tiempo continuo y tiempo discreto tienen mucho de común.

Definición 1. Una cadena homogénea de Márkov $\xi(t), t \in [0, \infty)$, con valores no negativos de números enteros se llama proceso ramificado con un mismo tipo de partículas, si sus probabilidades de paso $p_{IJ}(t) = P\{\xi(t) = j/\xi(0) = i\}$ satisfacen las condiciones:

$$1) \quad p_{IJ}(t) = \begin{cases} \delta_{0j}, & t = 0; \\ \sum_{j_1 + \dots + j_{t-1} = i} p_{1j_1}(t) p_{1j_2}(t) \dots p_{1j_{t-1}}(t), & t \neq 0; \end{cases} \quad (2.1)$$

$$2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_{IJ}(t) = \delta_{IJ}. \quad (2.2)$$

Supongamos que $\xi(0) = 1$ y las probabilidades de paso $p_{IJ}(t)$, para los valores de t próximos a cero, satisfacen la condición

$$\left. \begin{aligned} p_{11}(t) &= 1 + q_1 t + o(t), & q_1 < 0; \\ p_{1j}(t) &= q_j(t) + o(t), & j \neq 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Es evidente que $q_j \geq 0$ para $j \neq 1$ (q_j , en este caso, se llaman densidades de paso).

Introduzcamos las funciones generadoras

$$\Phi_t(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1j}(t) s^j = M \{s^{\xi(t)} / \xi(0) = 1\}, \quad f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j.$$

La función $f(s)$ la denominan función infinitesimal o función generadora diferencial del proceso ramificado. La evolución del dado proceso ramificado con tiempo continuo se describe del modo siguiente: cada partícula vive durante un tiempo aleatorio distribuido según una ley exponencial de parámetro $\lambda = \sum_{j \neq 1} q_j$. Al expirar el tiempo de vida, la partícula engendra un número aleatorio de partículas del mismo tipo con la distribución

$$P\{\xi = j\} = \frac{q_j}{\sum_{j \neq 1} q_j}, \quad j = 0, 2, 3, \dots$$

De ejemplo más simple de un proceso ramificado con tiempo continuo sirve el proceso de pérdida y multiplicación para el cual

$$q_0 = \alpha, \quad q_2 = \beta, \quad q_1 = -(\alpha + \beta), \quad q_j = 0, \quad j = 3, 4, \dots$$

Definición 2. Un proceso ramificado $\xi(t)$ se llama regular, si

$$\lim_{s \uparrow 1} \Phi_t(s) = 1. \quad (2.4)$$

Teorema 1. Para que el proceso $\xi(t)$ sea regular, es necesario y suficiente que la integral

$$\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{du}{f(u)}$$

diverja para $\varepsilon > 0$ cualquiera.

Observación. Si $\Phi_t(s)$ es una función generadora del proceso ramificado regular con tiempo continuo, entonces, al suponer $\Phi(s) = \Phi_1(s)$ y contando por los momentos de tiempo $t = 0, 1, 2, \dots$ obtenemos la función generadora de un proceso ramificado con tiempo discreto.

Si se cumplen las condiciones (2.3) y (2.4), la función generadora $\Phi_t(s)$ del proceso ramificado satisface, uniformemente respecto de $|s| < 1$, la correlación asintótica

$$\Phi_t(s) = s + t f(s) + o(t), \quad t \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

El siguiente teorema, que ofrece un análogo de la ecuación funcional principal para los procesos con tiempo discreto, es corolario de (2.5).

Teorema 2. Una función generadora $\Phi_t(s)$ de un proceso ramificado con tiempo continuo satisface para $|s| < 1$:

a) la ecuación diferencial ordinaria (no lineal)

$$\frac{d\Phi_t(s)}{dt} = f(\Phi_t(s)) \quad (2.6)$$

con la condición inicial

$$\Phi_0(s) = s; \quad (2.7)$$

b) la ecuación lineal en derivadas parciales

$$\frac{\partial \Phi_t(s)}{\partial t} = f(s) \frac{\partial \Phi_t(s)}{\partial s} \quad (2.8)$$

con la misma condición inicial (2.7);

c) la ecuación integral no lineal

$$\Phi_t(s) = \int_0^t h(\Phi_{t-u}^{-1}(s)) dG(u) + s(1-G(t)), \quad (2.9)$$

donde

$$G(t) = \begin{cases} 1 - e^{-q_1 t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

y

$$h(s) = \frac{f(s) - q_1 s}{-q_1} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{q_1} s^j.$$

En (2.9) $G(t)$ se interpreta como una función de distribución del tiempo de vida de una partícula, es decir, del tiempo que ha pasado desde su nacimiento hasta la primera transformación en 0, 2, 3, ... partículas, y $h(s)$ es la función generadora de las probabilidades condicionales $\left\{ -\frac{q_j}{q_1} \right\}$, $j = 0, 2, 3, \dots$, de que la partícula se transforme en j partículas a condición de que tal transformación se había realizado.

La solución de las ecuaciones (2.6), (2.8), (2.9) existe para $|s| < 1$ cualquiera y representa en sí una función analítica en el círculo $|s| < 1$, con la particularidad de que los coeficientes del desarrollo de esta función en una serie de potencias de s son no negativos.

Para los procesos regulares la solución de las ecuaciones citadas es única.

17.2.2. Ejemplos. 1. Sea $f(s) = q_0 + s q_1 + s^2 q_2$, es decir,

$$f(s) = a(s-1) + \frac{b}{2}(s-1)^2,$$

donde $a = f'(1)$, $b = f''(1)$.

La ecuación (2.6) tiene la forma

$$\frac{d\Phi_t(s)}{dt} = a[\Phi_t(s) - 1] + \frac{b}{2}[\Phi_t(s) - 1]^2.$$

La solución de esta ecuación:

$$\Phi_t(s) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{at}(1-s)}{\frac{b}{2a}(e^{at}-1)(1-s)+1}, & \text{si } a \neq 0; \\ 1 - \frac{1-s}{\frac{bt}{2}(1-s)+1}, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

de donde, desarrollando $\Phi_t(s)$ en una serie de potencias de s , se puede hallar

$$P_{10}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{at}}{\frac{b}{2a}(e^{at}-1)+1}, & \text{si } a \neq 0; \\ 1 - \frac{1}{\frac{bt}{2}+1}, & \text{si } a = 0, \end{cases}$$

y, para $f \neq 0$,

$$P_{1j}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{b}{2a}(e^{at}-1)+1\right)^2} \left[\frac{\frac{b}{2a}(e^{at}-1)}{\frac{b}{2a}(e^{at}-1)+1} \right]^{j-1}, & \text{si } a \neq 0; \\ \left(\frac{2}{bt+2}\right)^2 \left(\frac{bt}{bt+2}\right)^{j-1}, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

2. Sea $f(s) = a(s-1) + \lambda(1-s)^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda > \max\{\alpha, 0\}$; Aquí, el segundo momento del proceso es infinito y

$$\Phi_t(s) = \begin{cases} 1 - \left[\frac{\lambda}{a}(1-e^{-\alpha at}) + e^{-\alpha at}(1-s)^{-\alpha} \right]^{-1/\alpha}, & \text{si } a \neq 0, \\ 1 - [\alpha \lambda t + (1-s)^{-\alpha}]^{-1/\alpha}, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

3. Sea $f(s) = \lambda(s-s^{k+1})$, $\lambda > 0$, k es un número entero positivo. Aquí,

$$\Phi_t(s) = s [e^{\lambda kt} - (e^{\lambda kt} - 1) s^k]^{-1/k}.$$

4. Sea $f(s) = \lambda [1-s][1+\ln(1-s)]$. Aquí,

$$\Phi_t(s) = 1 - \exp\{e^{-\lambda t} - 1 + e^{-\lambda t} \ln(1-s)\}.$$

5. Sea $f(s) = \lambda [1-s - (1-s)^\alpha]$, donde $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$. Aquí,

$$\Phi_t(s) = 1 - [1 - e^{-(1-\alpha)\lambda t} + e^{-(1-\alpha)\lambda t} (1-s)^{1-\alpha}]^{1/(1-\alpha)}.$$

Este es un ejemplo de un proceso no regular, pues

$$\lim_{s \rightarrow 1} \Phi_t(s) = 1 - (1 - e^{-(1-\alpha)\lambda t})^{1/(1-\alpha)} < 1.$$

17.2.3. Momentos y clasificación. El carácter finito de los momentos $M[\xi(t)]^k$ para un proceso ramificado $\xi(t)$, $\xi(0) = 1$, con tiempo continuo proviene de que es finita la k -ésima derivada de $f(s)$ en la unidad.

Hagamos $a = f'(1)$ y $b = f''(1)$ y sea $m(t) = M\xi(t)$, $\sigma^2(t) = D\xi(t)$.

Al derivar (2.9) respecto de s y al hacer $s = 1$, se pueden obtener las siguientes ecuaciones diferenciales para $m(t)$ y $\sigma^2(t)$:

$$\frac{d}{dt} m(t) = am(t) \tag{2.10}$$

con la condición inicial $m(0) = 1$;

$$\frac{d}{dt} \sigma^2(t) = \begin{cases} a\sigma^2(t) + (b-a)m^2(t), & \text{si } a \neq 0, \\ b, & \text{si } a = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

con la condición inicial $\sigma^2(0) = 0$,

De aquí, $m(t) = e^{at}$ y

$$\sigma^2(t) = \begin{cases} \left(\frac{b}{a} - 1\right) e^{at} (e^{at} - 1), & \text{si } a \neq 0, \\ bt, & \text{si } a = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Definición 3. Un proceso de ramificación con tiempo continuo se denomina: a) subcrítico, si $a < 0$; b) crítico, si $a = 0$, $b > 0$; c) supercrítico, si $a > 0$.

De (2.10), en particular, se deduce que $m(t)$: a) decrece según una ley exponencial para los procesos subcríticos; b) es constante para los procesos críticos; c) crece según una ley exponencial para los procesos supercríticos.

17.2.4. Propiedades asintóticas y teoremas del límite. Sea $q = P\{\xi(t) = 0 \text{ para cierto } t > 0 / \xi(0) = 1\}$ una probabilidad de degeneración del proceso $\xi(t)$.

Las condiciones con las cuales $q = 1$ para los procesos ramificados con tiempo continuo son las mismas que para los procesos con tiempo discreto (véase el p. 17.1.6.).

Teorema 3. La probabilidad de degeneración q es la mínima raíz no negativa de la ecuación

$$f(s) = 0. \quad (2.13)$$

La probabilidad de degeneración q puede ser determinada como uno de los siguientes límites:

$$q = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} p_{10}(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(s), \quad |s| < 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

con la particularidad de que en el último caso la convergencia es uniforme respecto de todos los s , $|s| \leq r$, $v < 1$.

El comportamiento asintótico de las probabilidades $p_{10}(t)$ para $t \rightarrow \infty$ se describe del modo siguiente.

Teorema 4. a) Para los procesos subcríticos

$$p_{10}(t) = 1 - ce^{at} (1 + o(1)), \quad (2.15)$$

si converge la integral $\int_0^1 \frac{au + f(1-u)}{uf(1-u)} du = -\ln c$.

b) Para los procesos críticos

$$p_{10}(t) = 1 - \frac{2}{bt} (1 + o(1)). \quad (2.16)$$

Para los procesos subcríticos con tiempo continuo existen los límites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_{1j}(t)}{1 - p_{10}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = j / \xi(t) > 0, \xi(0) = 1\} = Q_j \leq 1, j \geq 1.$$

Las probabilidades Q_1, Q_2, \dots forman una distribución de probabilidades $\sum_{j=1}^{\infty} Q_j = 1$, y la función generadora $Q(s) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j s^j$ tiene la forma

$$Q(s) = 1 - \exp \left\{ a \int_0^s \frac{du}{f(u)} \right\}. \quad (2.17)$$

Si la integral $\int_0^1 \frac{au + f(1-u)}{uf(1-u)} du = -\ln c$ converge, entonces la distribución con una función generadora $Q(s)$ tiene por esperanza matemática $1/c$. Para las distribuciones condicionales

$$P \left\{ \frac{\xi(t)}{M[\xi(t)]/\xi(0)} > x, \xi(t) > 0, \xi(0) = 1 \right\}$$

tiene lugar el teorema del límite análogo al teorema del límite del p. 17.1.6.

Sea $m = M\xi(1) < \infty$ y $\eta(t) = e^{at}\xi(t)$, donde $a = f'(1)$. El proceso $\eta(t)$ será una martingala con tiempo continuo.

Supongamos que $\xi(t)$ es un proceso supercrítico. Del teorema de convergencia de las martingalas se deduce que el proceso $\eta(t)$, con la probabilidad 1, converge, para $t \rightarrow \infty$, hacia cierta magnitud aleatoria η .

Teorema 5. La función característica $\varphi(s) = M e^{is\eta}$ de una magnitud aleatoria límite η satisface la ecuación diferencial (no lineal)

$$\frac{d}{ds} \varphi(s) = \frac{f(\varphi(s))}{ds}, \quad \varphi(0) = 1,$$

o es equivalente a la ecuación integral

$$1 - \varphi(s) = -is \exp \left\{ \int_1^{\varphi(s)} \frac{f(u) - a(u-1)}{f(u)(u-1)} du \right\}.$$

Cuando $b = f''(1) > 0$, la función de distribución $K(x) = P(\eta \leq x)$ experimenta un salto en cero: $q = P\{\eta = 0\}$.

La función de distribución condicional

$$P\{\eta \leq x/\eta > 0\} = \frac{K(x) - q}{1 - q}$$

es absolutamente continua y cuenta con una densidad que es continua para $x > 0$.

17.3. Procesos ramificados con un número finito de tipos de partículas [tiempo discreto]

17.3.1. Definición. Un proceso ramificado con m ($m \geq 1$) tipos de partículas describe una población de partículas o individuos en la cual las partículas de cada tipo pueden engendrar descendientes de cada uno de los m tipos independientemente de otras partículas.

El espacio fásico de un proceso ramificado que simula una población de m tipos de partículas lo constituye el conjunto de vectores $j = (j_1, j_2, \dots, j_m)'$, interpretados como vectores columnas, donde j_k son unos números enteros no negativos correspondientes al número de partículas de k -ésimo tipo (el símbolo 'significa la transposición).

Sea e_t la designación de un vector columna cuya t -ésima componente es igual a uno, mientras que las restantes componentes son nulas.

Definición 1. Una cadena homogénea de Márkov $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t))'$, $t = 0, 1, 2, \dots$, cuyos valores son los vectores m -dimensionales con componentes de números enteros no negativos, se denomina proceso ramificado con m tipos de partículas, si sus probabilidades de paso $p^{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}$ (donde $\xi(t) = j$ significa $\xi_k(t) = j_k$, $k = \overline{1, m}$) satisfacen las condiciones

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \delta_{0j}, & i=0 \text{ (} 0=(0, \dots, 0) \text{ es el vector nulo);} \\ [p_{e_1j}(t)]^{i_1^*} * [p_{e_2j}(t)]^{i_2^*} * \dots * [p_{e_mj}(t)]^{i_m^*}, & i \neq 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $[p_{e_kj}(t)]^{i_k^*}$ significa la convolución i_k -múltiple de la distribución $p_{e_kj}(t)$ con sí misma.

Un proceso ramificado con m tipos de partículas admite una descripción sencilla en términos de las sumas de magnitudes aleatorias. Sean $\zeta_r = \{\zeta_r^{kl}, k, l = \overline{1, m}\}$, $r = 1, 2, \dots$ unas matrices aleatorias independientes igualmente distribuidas con elementos no negativos de valores enteros. Para todo r las magnitudes aleatorias ζ_r^{kl} se interpretan como un número de partículas de l -ésimo tipo engendradas por una partícula de k -ésimo tipo en el momento de transformación. Supongamos que la distribución de la k -ésima línea de la matriz ζ_r tiene por expresión

$$P\{\zeta_r^{k1} = j_1, \dots, \zeta_r^{km} = j_m\} = p_{e_kj}(t),$$

donde $j = (j_1, j_2, \dots, j_m)'$. Tienen lugar las siguientes correlaciones: si $\xi_k(t+1)$ es el k -ésimo componente del vector $\xi(t+1) = (\xi_1(t+1), \xi_2(t+1), \dots, \xi_m(t+1))$, donde $\xi(t)$ es un proceso de ramificación con m tipos de partículas, entonces

$$\xi_k(t+1) = \sum_{r=1}^{\xi_1(t)} \zeta_r^{1k} + \sum_{r=1}^{\xi_2(t)} \zeta_r^{2k} + \dots + \sum_{r=1}^{\xi_m(t)} \zeta_r^{mk}. \quad (3.2)$$

En particular, si $m = 2$ y $\xi(0) = (1, 0)'$, es decir, si la población consiste de dos tipos de partículas y en el momento inicial se tiene una sola partícula del primer tipo, entonces $\xi(1) = (\zeta^{11}, \zeta^{12})'$ (la primera generación de partículas se compone de ζ^{11} partículas del primer tipo y ζ^{12} partículas del segundo tipo, engendradas por una partícula del primer tipo),

$$\xi(2) = \left(\sum_{r=1}^{\zeta^{11}} \zeta_r^{11} + \sum_{r=1}^{\zeta^{12}} \zeta_r^{21}, \sum_{r=1}^{\zeta^{11}} \zeta_r^{12} + \sum_{r=1}^{\zeta^{12}} \zeta_r^{22} \right)'$$

(la segunda generación se compone de $\sum_{r=1}^{\xi_1^1} \xi_r^{11} + \sum_{r=1}^{\xi_1^2} \xi_r^{21}$ partículas del primer tipo y $\sum_{r=1}^{\xi_2^1} \xi_r^{12} + \sum_{r=1}^{\xi_2^2} \xi_r^{22}$ partículas del segundo tipo, etc.).

17.3.2. Ecuaciones para las funciones generadoras. Sea $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$. La función generadora de las probabilidades de paso $p_{ij}(t)$ de un proceso ramificado $\xi(t)$ con m tipos de partículas se define por la igualdad

$$\Phi_t(i, s) = \sum_{j \geq 0} P_{ij}(t) s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_m^{j_m} = \\ = M [s_1^{\xi_1(t)} s_2^{\xi_2(t)} \dots s_m^{\xi_m(t)} / \xi(0) = i],$$

donde $\sum_{j \geq 0}$ significa $\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_m=0}^{\infty}$.

Para t fijado la función $\Phi_t(i, s)$ es una función escalar de argumentos vectoriales $i = (i_1, i_2, \dots, i_m)'$ y $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$. $\Phi_t(i, s)$ y $\Phi_t(e_h, s)$, $h=1, m$ están ligadas por medio de la correlación

$$\Phi_t(i, s) = \prod_{h=1}^m [\Phi_t(e_h, s)]^{i_h}. \quad (3.4)$$

Supongamos que $\Phi_0(s) = \sum_{i \geq 0} P(\xi(0) = i) s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_m^{i_m}$ es una función generadora de la distribución inicial $p_0(i) = P(\xi(0) = i)$; $\Phi_t(s) = \sum_{j \geq 0} P(\xi(t) = j) s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_m^{j_m}$, una función generadora de los valores del proceso $\xi(t)$ en el momento t y sea

$$\Phi_t(s) = (\Phi_t(e_1, s), \Phi_t(e_2, s), \dots, \Phi_t(e_m, s))'. \quad (3.5)$$

$\Phi_t(s)$ se llama función generadora vectorial del proceso $\xi(t)$. Se verifica la igualdad

$$\Phi_t(s) = \Phi_0(\Phi_t(s)). \quad (3.6)$$

Teorema 1. Las funciones generadoras $\Phi_t(s)$ y $\Phi_t(s)$ satisfacen las siguientes ecuaciones funcionales principales:

$$\Phi_{t+\tau}(s) = \Phi_t(\Phi_\tau(s)); \quad (3.7)$$

$$\Phi_{t+\tau}(s) = \Phi_t(\Phi_\tau(s)). \quad (3.8)$$

Sea $F(e_i, s)$ (es posible que sea $F(e_i, 1) < 1$) una función generadora del número general de los diferentes tipos de partículas en todas las generaciones, si el proceso $\xi(t)$ comenzó de una partícula del i -ésimo tipo, $F(s) = (F(e_1, s), \dots, F(e_m, s))'$. En este caso $F(e_i, s) = s_i \Phi(e_i, F(s))$.

17.3.3. Momentos y clasificación. Designemos mediante $M(t) = (m_{ij}(t), i, j = \overline{1, m})$ la matriz de los primeros momentos $m_{ij}(t) =$

$= M [\xi_i(t)/\xi_j(0) = e_{ij}]$ de un proceso ramificado y mediante $B_h(t) = (b_{ij}^{(h)}(t), i, j = \overline{1, m})$, la matriz de los segundos momentos $b_{ij}^{(h)}(t) = M [\xi_i(t) \xi_j(t) / \xi_j(0) = e_{ij}]$, y sean Me_h y $D_h = B_h - Me_h e_h' M'$, donde $M = M(1)$, $B_h = B_h(1)$, respectivamente, un vector del número medio de partículas y una matriz de covariación del número de partículas del k -ésimo tipo, $t = 1$.

De la definición de $\Phi_t(s)$ proviene

$$\left. \begin{aligned} m_{ij}(t) &= \lim_{s \uparrow 1} \frac{\partial \Phi_t(e_j, s)}{\partial s_i}; \\ b_{ij}^{(h)}(t) &= \lim_{s \uparrow 1} \frac{\partial^2 \Phi_t(e_k, s)}{\partial s_i \partial s_j} + \delta_{ij} m_{jh}(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

donde $s \uparrow$ significa que todas las componentes del vector s tienden, creciendo, a la unidad.

Las matrices de los momentos $M(t)$ y $B_h(t)$ satisfacen las ecuaciones en diferencias

$$\left. \begin{aligned} M(t+1) &= MM(t), \quad M(0) = I; \\ B_h(t+1) &= MB_h(t) M' + \sum_{i=1}^m (e_i, Me_h') D_i, \\ B_h(0) &= e_h e_h', \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

donde (...) significa un producto escalar, de donde

$$\left. \begin{aligned} M(t) &= M^t; \\ B_h(t) &= M^t e_h e_h' M'^t + \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{l=1}^m (e_l, M^l e_h) \times \\ &\quad \times M^{t-1-l} D_l M'^{t-1-l}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Supongamos que todos los momentos m_{ij} de la matriz M son finitos y no todos ellos son nulos. Por ser $m_{ij} \geq 0$, en virtud del conocido teorema de Perron-Frobenius para las matrices no negativas, entre los números propios μ_j , $j = \overline{1, m}$ de la matriz M existe un número propio no negativo $\mu = \mu_{i_0}$ tal que $\mu > \text{Re } \mu_j$, $j \neq i_0$, llamado raíz de Perron de la matriz M .

Definición 2. Un proceso ramificado $\xi(t)$ se llama **indescomponible**, si la multiplicidad de la raíz de Perron μ de la matriz M es igual a la unidad y se llama **descomponible** en el caso contrario.

Definición 3. Un proceso ramificado $\xi(t)$ se denomina **positivo regular**, si existe un momento de tiempo t_0 tal que $m_{ij}(t_0) > 0$ para cualesquiera $i, j = \overline{1, m}$.

Un proceso positivo regular es indescomponible.

Supongamos que $\xi(t)$ es un proceso ramificado indescomponible y μ , una raíz de Perron de la matriz M , mientras que u y v son los vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de la matriz M , correspondientes a la raíz de Perron μ (los cuales, según el mismo teorema de Perron-Frobenius, tienen componentes no negativas)

y normados por la condición

$$(v, u) = \sum_{i=1}^m v_i u_i = 1.$$

Definición 4. Un proceso ramificado indescomponible $\xi(t)$ se llama a) subcrítico, si la raíz de Perron $\mu < 1$; b) crítico, si la raíz de Perron $\mu = 1$ y $b = \sum_{i, j, k=1}^m u_k b_{ij}^{(k)} v_i v_j > 0$; c) supercrítico, si la raíz de Perron $\mu > 1$.

La condición $b = \sum_{i, j, k=1}^m u_k b_{ij}^{(k)} v_i v_j > 0$ asegura el carácter no singular del proceso $\xi(t)$, es decir, que no todas las componentes $\Phi(e_k, s)$ de la función generadora vectorial $\Phi(s)$ son lineales respecto de s_1, s_2, \dots, s_m y tienen términos independientes nulos y, consecuentemente, el número de partículas varía con el tiempo.

Suele decirse que un proceso ramificado es periódico de periodo d , si el máximo común divisor de todos aquellos t , para los cuales $m_{it}(t) > 0$, es igual a d . Si $d = 1$, el proceso se denomina aperiódico.

El proceso regular positivo es aperiódico.

17.3.4. Propiedades asintóticas. Supongamos que $\xi(t)$ es un proceso aperiódico indescomponible, μ es la raíz de Perron de la matriz de los primeros momentos M y u, v , los vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de la matriz M , correspondientes a la raíz de Perron μ . Para la matriz de los primeros momentos $M(t)$ tiene lugar una representación asintótica, cuando $t \rightarrow \infty$:

$$M(t) = \mu^t u v' + o(\hat{\mu}^t),$$

donde $u v' = (u_i v_j, i, j = \overline{1, m})$, $|\hat{\mu}| < \mu$, $o(\hat{\mu}^t)$ tiene sentido por elementos.

Supongamos que $q_t = P\{\xi(t) = 0 \text{ para cierto } t > 0 / \xi(0) = e_i\}$ es la probabilidad de degeneración del proceso $\xi(t)$ cuya generación nula consta de una sola partícula de i -ésimo tipo y sea $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)'$ un vector de las probabilidades de degeneración.

Teorema 2. Si un proceso positivo regular $\xi(t)$ es subcrítico o crítico, entonces

$$q = 1 = (1, 1, 1, \dots, 1)'$$

Sea $s = (s_1, \dots, s_m)$ y $|s| = \max_{1 \leq h \leq m} |s_h|$. Se dice que el vector s es no negativo, si todos los $s_h \geq 0$.

Teorema 3. Sea $\xi(t)$ un proceso positivo regular. El vector de las probabilidades de degeneración q es la solución no negativa y mínima según la norma $|\cdot|$ de la ecuación

$$\Phi(s) = s. \quad (3.12)$$

Sea q^1 un vector no negativo arbitrario tal que $|q^1| \leq 1$ y $q^1 \neq 1$. Las probabilidades de degeneración pueden ser determinadas como

uno de los siguientes límites:

$$q_i = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} P_i^t(\xi(t) = 0 / \xi(0) = e_i); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(e_i, q'). \end{cases}$$

De aquí se deduce que en la clase de vectores no negativos s , $|s| \leq 1$, la ecuación (3.12) tiene sólo dos soluciones: q y 1 .

El comportamiento asintótico de las probabilidades $p_{e_i 0}(t)$, para $t \rightarrow \infty$, se describe del modo siguiente.

Sean: $\xi(t)$ un proceso positivo regular, M la matriz de las esperanzas matemáticas $m_{ij} = M\{\xi_j(t) / \xi(0) = e_j\}$, μ la raíz de Perron de la matriz M , $u = (u_1, \dots, u_m)'$ y $v = (v_1, \dots, v_m)$, respectivamente, los vectores propios derecho e izquierdo de la matriz M , correspondientes a la raíz de Perron μ .

Teorema 4. a) Si $\xi(t)$ es un proceso subcrítico, entonces

$$\left. \begin{aligned} p_{e_i 0}(t) &= 1 - c v_i \mu^t (1 + o(1)); \\ P\{\xi(t) \neq 0 / \xi(0) = i\} &= (v, i) [c \mu^t (1 + o(1))], \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

donde $c = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \Phi_t(e_i, 0)}{v_i \mu^t}$, con la particularidad de que para que

$0 < c < \infty$, es necesario y suficiente que sea

$$M\{\xi_j(t) \ln \xi_j(t) / \xi(0) = e_i\} < \infty,$$

para cualesquiera $i, j = \overline{1, m}$.

b) Si $\xi(t)$ es un proceso crítico, entonces

$$\left. \begin{aligned} p_{e_i 0}(t) &= 1 - \frac{2v_i}{ib} (1 + o(1)); \\ P\{\xi(t) \neq 0 / \xi(0) = i\} &= \frac{2(v, i)}{ib} (1 + o(1)), \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

donde $b = \sum_{i, j, h=1}^m u_h b_{ij}^{(h)} v_i v_j$.

17.3.5. Teoremas del límite. Sea $\xi(t)$ un proceso positivo regular.

Teorema 5. Si $\xi(t)$ es un proceso subcrítico, entonces para $t \rightarrow \infty$ las distribuciones condicionales

$$P\{\xi(t) = j / \xi(t) \neq 0, \xi(0) = i\}, \quad i \neq 0$$

convergen hacia la distribución límite Q_j , $j \neq 0$, $\sum_{j \neq 0} Q_j = 1$, cuya función

generadora $Q(s) = \sum_{j \neq 0} Q_j s_1^{j_1} \dots s_m^{j_m}$ satisface la ecuación

$$1 - Q(\Phi(s)) = \mu(1 - Q(s)),$$

y la distribución límite no depende del vector de los estados iniciales $i \neq 0$.

Una distribución con la función generadora $Q(s)$ tiene esperanzas matemáticas finitas

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\partial Q(s)}{\partial s_i} = \frac{u_i}{c}, \quad \text{si } c > 0,$$

donde c está definido en la correlación (3.13).

Teorema 6. Si $\xi(t)$ es proceso positivo regular crítico, $\xi(0) = e_1$ y $\xi^{(e_i)}(t) = (\xi_1^{(e_i)}(t), \dots, \xi_m^{(e_i)}(t))$, donde

$$\xi_h^{(e_i)}(t) = \frac{2\xi_{ih}(t)}{u_h b t},$$

entonces la distribución condicional del proceso $\xi^{(e_i)}(t)$ a condición de que $\xi^{(e_i)}(t) \neq 0$, converge para $t \rightarrow \infty$ hacia la distribución del vector aleatorio $\xi_1 = \xi(1, 1, \dots, 1)$, que no depende de e_i , donde ξ es una magnitud aleatoria escalar con la distribución exponencial

$$P\{\xi > x\} = e^{-x}.$$

Teorema 7. Si $\xi(t)$ es un proceso positivo regular supercrítico, cuyos segundos momentos $b_{ij}^{(k)}$, $i, j, k = 1, m$, y si μ es una raíz de Perron de la matriz M , entonces el vector aleatorio $\eta(t) = \mu^{-t} \xi(t)$ converge en media cuadrática, cuando $t \rightarrow \infty$, hacia cierto vector aleatorio límite η , y, con la probabilidad 1, la dirección del vector η , para $\eta \neq 0$, coincide con la dirección del vector propio derecho u de la matriz M , correspondiente a la raíz de Perron μ , es decir, $\eta = \zeta u$, donde ζ es una magnitud aleatoria escalar.

Si $b = \sum_{i,j,h} u_h b_{ij}^{(h)} v_i v_j > 0$, entonces $q_h = P\{\eta = 0 / \xi(0) = e_h\}$.

La función característica (condicional) $\varphi(e_h, s) = M[e^{t(e, \eta)} / \xi(0) = e_h]$ del vector aleatorio η satisface las ecuaciones funcionales

$$\varphi(e_h, \mu s) = \Phi(e_h, \varphi(s)),$$

donde $\varphi(s) = (\varphi(e_1, s), \varphi(e_2, s), \dots, \varphi(e_m, s))$.

17.4. Procesos ramificados con número finito de tipos de partículas [tempo continuo]

17.4.1. Definición. Una cadena homogénea de Márkov $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t))'$, $t \in [0, \infty)$, con valores en el conjunto de vectores m -dimensionales de componentes no negativas de números enteros se denomina proceso ramificado con m tipos de partículas, si sus probabilidades de paso $p_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j / \xi(0) = i\}$ satisfacen las condiciones (3.1) y la condición

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}.$$

El proceso ramificado $\xi(t)$ cuyo estado inicial es e_i , es decir, la generación nula de partículas se compone de una sola partícula de i -ésimo tipo, evoluciona de la manera siguiente: transcurrido el tiempo

aleatorio τ_i , la partícula de i -ésimo tipo se transforma en un número aleatorio ζ^{ij} de partículas de j -ésimo tipo, $j = \overline{1, m}$, cada una de las cuales independientemente de las otras vive el tiempo aleatorio τ_j y se convierte en el número aleatorio ζ^{jk} de partículas de k -ésimo tipo, $k = \overline{1, m}$, etc.

17.4.2. Ecuaciones para las funciones generadoras. Supongamos que $\xi(0) = e_i$ y que las probabilidades de paso del proceso ramificado $\xi(t)$ satisfacen las condiciones

$$\left. \begin{aligned} p_{e_i e_i}(t) &= 1 + q_{e_i e_i}(t) + o(t); \\ p_{e_i e_j}(t) &= q_{e_i e_j}(t) + o(t), \quad e_i \neq j, \quad t \rightarrow 0; \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\sum_{j \geq 0} q_{e_i e_j} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.2)$$

Es obvio que $q_{e_i e_j} \geq 0$, $e_i \neq j$ (en este caso $q_{e_i e_j}$ se llama densidad de la probabilidad de paso desde e_i en j). Sea

$$f(e_i, s) = \sum_{j \geq 0} q_{e_i e_j} s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_m^{j_m};$$

$$f(s) = (f(e_1, s), \dots, f(e_m, s))';$$

$$\Phi_t(e_i, s) = \sum_{j \geq 0} p_{e_i e_j}(t) s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_m^{j_m} =$$

$$= M \{s_1^{\xi_1(t)} \dots s_m^{\xi_m(t)} / \xi(0) = e_i\};$$

$$\Phi_t(s) = (\Phi_t(e_1, s), \dots, \Phi_t(e_m, s))'.$$

La función $f(s)$ se llama *infinitesimal (vectorial) o función generadora diferencial*.

La función generadora $\Phi_t(s)$ es continua respecto de $t \in [0, \infty)$ uniformemente según s , $|s| \leq 1$ y $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi_t(s) = s$. Si se cumplen las condiciones (4.1), (4.2), tiene lugar, uniformemente según s , $|s| \leq 1$, la representación asintótica

$$\Phi_t(s) = s + tf(s) + o(t), \quad t \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

De corolario de (4.3) sirve el siguiente teorema que ofrece un análogo de la ecuación funcional principal para los procesos con tiempo continuo.

Teorema 1. *La función generadora $\Phi_t(s)$ para $|s| \leq 1$ satisface los siguientes sistemas de ecuaciones funcionales.*

a) *Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (no lineales)*

$$\frac{d\Phi_t(s)}{dt} = f(\Phi_t(s)) \quad (4.4)$$

con las condiciones iniciales

$$\Phi_0(s) = s. \quad (4.5)$$

b) Un sistema de ecuaciones (lineales) en derivadas parciales

$$\frac{\partial \Phi_t(s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^m f(e_i, s) \frac{\partial \Phi_t(s)}{\partial s_i} \quad (4.6)$$

con las condiciones iniciales (4.5).

c) Un sistema de ecuaciones integrales (no lineales)

$$\Phi_t(e_i, s) = \int_0^t h_i(\Phi_{t-u}(s)) dG_i(u) + s_i(1 - G_i(t)), \quad (4.7)$$

donde

$$h_i(s) = \frac{f(e_i, s) - q_{e_i, e_i} s_i}{-q_{e_i, e_i}}, \quad i = \overline{1, m};$$

$$G_i(t) = \begin{cases} 1 - e^{-q_{e_i, e_i} t}, & t \geq 0. \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Las soluciones de estas ecuaciones existen, son funciones analíticas respecto de s , $|s| < 1$, pero $\Phi_t(e_i, s)$, en el caso general, no han de ser obligatoriamente funciones generadoras de las distribuciones probabilísticas, es decir, en el caso general, sólo podemos afirmar que

$$\lim_{s \uparrow 1} \Phi_t(e_i, s) \leq 1.$$

Si todas las derivadas $\frac{\partial f(e_i, s)}{\partial s_j}$, $i, j = \overline{1, m}$, en el punto $s = 1$ son finitas, entonces la solución de dichos sistemas de ecuaciones es única cuando $|s| < 1$ y $\lim_{s \uparrow 1} \Phi_t(e_i, s) = 1$, $i = \overline{1, m}$.

$G_i(t)$ en (4.7) se interpreta como una función de distribución del tiempo de vida de la partícula de i -ésimo tipo, mientras que $h_i(s)$ se interpreta como una función generadora de las densidades de transformación de la partícula de i -ésimo tipo.

17.4.3. Momentos y clasificación. Sea $f(s) = (f(e_1, s), f(e_2, s), \dots, f(e_m, s))$ una función generadora diferencial del proceso ramificado $\xi(t)$. Bajo el supuesto de que existen los límites correspondientes, designaremos

$$a_{ij} = \lim_{s \uparrow 1} \frac{\partial f(e_j, s)}{\partial s_i}, \quad c_{ij}^{(h)} = \lim_{s \uparrow 1} \frac{\partial^2 f(e_h, s)}{\partial s_i \partial s_j},$$

$$A = \{a_{ij}, i, j = \overline{1, m}\}, \quad C_h = \{c_{ij}^{(h)}, i, j = \overline{1, m}\}.$$

Sea, además, $M(t) = (m_{ij}(t), i, j = \overline{1, m})$, donde $m_{ij}(t) = M[\xi_i(t)/\xi_i(0) = e_j]$, $C_h(t) = (c_{ij}^{(h)}(t), i, j = \overline{1, m})$, donde $c_{ij}^{(h)}(t) = M[\xi_j(t) \xi_i \times \xi_i(0) = e_h] - \delta_{ij} m_{jh}(t)$. Las matrices de los momentos $M(t)$,

y $C_h(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} M(t) &= M(t) A, \quad M(0) = I; \\ \frac{d}{dt} C_h(t) &= \sum (e_h, A e_j) C_j(t) + M(t) C_h M'(t), \\ C_h(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

De aquí

$$M(t) = e^{At},$$

$$C_h(t) = \int_0^t M(u) \left[\sum_{j=1}^m (e_h, M(t-u) e_j) C_j \right] M'(u) du. \quad (4.9)$$

Todos los elementos no diagonales de la matriz A son no negativos (en particular, positivos). Las matrices que poseen esta propiedad, se llaman casi no negativas (correspondientemente, casi positivas). Las propiedades espectrales de tales matrices son semejantes a las propiedades espectrales de las matrices no negativas (correspondientemente, positivas). Por ejemplo, entre todos los números propios α_i , $i = \overline{1, m}$, de la matriz A hay un número propio real $\alpha = \alpha_{i_0}$ tal que $\alpha > \operatorname{Re} \alpha_j$, $j \neq i_0$, llamado raíz de Perron de la matriz A . Los vectores propios correspondientes a la raíz de Perron α tienen componentes no negativas.

Definición 1. Un proceso ramificado $\xi(t)$ se llama **indescomponible**, si la multiplicidad de la raíz de Perron α de la matriz A es igual a uno, y se llama **descomponible** en el caso contrario.

Definición 2. Un proceso ramificado $\xi(t)$ se llama **regular**, si $a_{ii} < 0$ para todo $i = \overline{1, m}$.

Supongamos que $\xi(t)$ es un proceso indescomponible; $u = (u_1, \dots, u_m)'$, y $v = (v_1, \dots, v_m)$ son los vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de la matriz A , correspondientes a la raíz de Perron α y normados por la condición $(u, v) = \sum_{i=1}^m u_i v_i = 1$.

Definición 3. Un proceso ramificado indescomponible $\xi(t)$ se denomina **subcrítico**, si $\alpha < 0$; **crítico**, si $\alpha = 0$; $b = \sum_{i,j,h=1}^m u_h c_{ij}^{(h)} \times v_i v_j > 0$; **supercrítico**, si $\alpha > 0$.

La condición $b = \sum_{i,j,h=1}^m u_h c_{ij}^{(h)} v_i v_j > 0$ asegura que el proceso $\xi(t)$ no sea singular. Lo último significa que el número de partículas no queda invariable con el tiempo.

17.4.4. Propiedades asintóticas. Supongamos que $\xi(t)$ es un proceso ramificado indescomponible, α es la raíz de Perron de la matriz A , u y v son los vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de la matriz A , correspondientes a la raíz de Perron α y normados por la condición $(u, v) = 1$. Para la matriz $M(t)$ de los primeros momentos

tiene lugar una representación asintótica para t grandes

$$M(t) = e^{\alpha t} uv' + o(e^{\hat{\alpha}t}),$$

donde $uv' = \{u_i v_j, i, j = \overline{1, m}\}$, $\hat{\alpha} < \alpha$, $o(e^{\hat{\alpha}t})$ se entiende por elementos.

Supongamos que q_i es la probabilidad de degeneración del proceso $\xi(t)$ en el cual $\xi(0) = e_i$ y $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)'$ es el vector de las probabilidades de degeneración.

Teorema 2. Si un proceso ramificado regular $\xi(t)$ es subcrítico o crítico, entonces

$$q = 1 = (1, 1, \dots, 1)'$$

Teorema 3. Sea $\xi(t)$ un proceso indescomponible. El vector de las probabilidades de degeneración q es la solución no negativa más próxima a 0, de la ecuación

$$f(s) = 0, \quad s \geq 0, \quad |s| = \max_{1 \leq i \leq m} |s_i| \leq 1.$$

El comportamiento asintótico de $p_{ij}(t)$, para $t \rightarrow \infty$, se describe del modo siguiente.

Teorema 4. a) Si un proceso indescomponible $\xi(t)$ es subcrítico, entonces

$$e^{-\alpha t} (1 - p_{e_i 0}(t)) = cv_i + o(1),$$

$$e^{-\alpha t} P\{\xi(t) \neq 0 / \xi(0) = i\} = (v, i) c + o(1),$$

donde $c \geq 0$ es una constante distinta de cero cuando y sólo cuando, $M\{\xi_j(t) \ln \xi_j(t) / \xi_j(0) = e_i\} < \infty$ para cualesquiera $i, j = \overline{1, m}$.

b) Si un proceso indescomponible $\xi(t)$ es crítico y $c_{ij}^{(h)}$ son finitas, entonces

$$p_{e_i 0}(t) = 1 - \frac{2v_i}{bt} (1 + o(1));$$

$$P\{\xi(t) \neq 0 / \xi(0) = i\} = \frac{2(v, i)}{bt} (1 + o(1)),$$

donde $b = \sum_{i, j, h=1}^m u_h c_{ij}^{(h)} v_i v_j$.

17.5. Procesos ramificados generales de Márkov

17.5.1. Definiciones. 1. El modelo general de un proceso ramificado de Márkov toma en consideración, a la par con el número de partículas de la población simulada, tales características como la posición de las partículas en el espacio, la dimensión de éstas, la masa, la energía, la edad, etc.

Es importante subrayar que muchos procesos ramificados no de Márkov, que describen el número de partículas en una población, pueden ser estudiados dentro de los marcos de procesos ramificados gene-

rales de Márkov, si se atrae una información adicional sobre las partículas del género indicado arriba.

Supongamos que una población se caracteriza por el número de partículas y cierto parámetro aleatorio generalizado η , que se interpreta como la posición de la partícula en cierto espacio medible $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$, llamado espacio físico de las partículas.

Supongamos además, que la generación nula de una población se compone de una sola partícula y la posición de ésta en \mathfrak{X} (por ejemplo, la masa o la energía) es igual a η_0 . Al expirar el tiempo aleatorio τ , la partícula se transforma (por ejemplo, se fracciona o bien engendra otras nuevas partículas comunicándoles su energía) en un número aleatorio ζ de partículas de la primera generación, cuyas posiciones en \mathfrak{X} son iguales a $\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_\zeta$, respectivamente, donde $\eta'_k \in \mathfrak{X}$, $k = \overline{1, \zeta}$, son las magnitudes aleatorias igualmente distribuidas que no dependen una de la otra ni tampoco de ζ . Cada partícula de la primera generación se porta, independientemente de las otras, como una partícula de la generación nula, etc. El espacio físico de un proceso ramificado que simula el esquema descrito debe, evidentemente, tomar en consideración tanto el número de partículas en la población en un momento arbitrario, como la posición de las partículas en el espacio físico $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$.

Supongamos que en cierto momento de tiempo una población contiene n partículas y sus posiciones en \mathfrak{X} son iguales a x_1, x_2, \dots, x_n , respectivamente. El estado del proceso ramificado puede ser descrito mediante un juego (x_1, x_2, \dots, x_n) en el que el orden de disposición no tiene importancia, lo que corresponde a la indistinguibilidad de las partículas en la población.

Si \mathfrak{X}^n es un producto de Descartes (recto) de n ejemplares del espacio \mathfrak{X} , designaremos mediante $\tilde{\mathfrak{X}}_n$ un espacio obtenido de \mathfrak{X}^n por identificación de todos los puntos $x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, los cuales se pueden obtener por conmutación de las coordenadas y mediante $\tilde{\mathfrak{U}}_n$, la imagen de la σ -álgebra \mathfrak{U}^n en tal aplicación.

Sea $\tilde{\mathfrak{X}}_0$ la designación del espacio que consiste de un solo punto denotado por el mismo símbolo \tilde{x}_0 . Hagamos $\tilde{\mathfrak{X}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathfrak{X}}_n$ y sea $\tilde{\mathfrak{U}}$ la mínima σ -álgebra que contiene $\tilde{\mathfrak{X}}_0$ y todas las σ -álgebras $\tilde{\mathfrak{U}}_n$.

2. Se denomina proceso ramificado general de Márkov con el espacio físico de partículas $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ un proceso de Márkov homogéneo $\xi(t)$, $t \in T$ ($T = [0, \infty)$, ó $T = 0, 1, 2, \dots$) en el espacio físico $(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{U}})$ cuyas probabilidades de paso

$$P_t(x^n, \tilde{A}) = P\{\xi(t) \in \tilde{A} / \xi(0) = x^n\} \quad (x^n \in \tilde{\mathfrak{X}}_n, \tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{U}})$$

satisfacen la siguiente ecuación de Kolmogórov:

$$P_{t+s}(x, \tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\tilde{\mathfrak{X}}_n} P_t^{(n)}(x^n, dy^n) P_s(y^n, \tilde{A}), \quad (5.1)$$

donde $P_t^{(n)}(x^n, \cdot)$ es la contracción de la medida de $P_t(x^n, \cdot)$ sobre la σ -álgebra $\tilde{\mathfrak{A}}_n$ y

$$P_0(x^n, \tilde{A}) = \chi_{\tilde{A}}(x^n) = \begin{cases} 1, & x^n \in \tilde{A}; \\ 0, & x^n \in \tilde{A}^c. \end{cases} \quad (5.2)$$

$P_t^{(n)}(x^n, \tilde{\mathfrak{A}}_n)$ es la probabilidad de que en el momento t la población tendrá exactamente n partículas, a condición de que en el momento inicial había k partículas y sus posiciones en \mathfrak{X} eran x_1, x_2, \dots, x_n .

17.5.2. Ejemplos. 1. Supongamos que \mathfrak{X} es un conjunto finito y $x \in \mathfrak{X}$ se interpreta como un tipo de partículas. Un proceso ramificado correspondiente es un proceso ramificado, ordinario con un número finito de tipos de partículas.

2. Supongamos que $\mathfrak{X} = [0, \infty)$ y que $x \in \mathfrak{X}$ significa la edad de una partícula que varía de un modo tal que $\Delta x = \Delta t$. El tiempo de vida de la partícula se define por cierta función de distribución $G(x)$. Cada partícula, independientemente de las otras, engendra un número aleatorio de partículas de la edad nula. Los procesos ramificados que corresponden a este modelo y que dependen de la edad describen algunas fases de la evolución de las colonias de bacterias o de otros organismos.

3. Modelo unidimensional de un reactor nuclear. Supongamos que en el segmento $[a, b]$ (sección activa del reactor) pueden moverse en ambas direcciones los neutrones que, al alcanzar los extremos del segmento, desaparecen (se van de la sección activa).

Hagamos $\mathfrak{X} = [a, b]$ y sea $x \in \mathfrak{X}$ la posición de un neutrón en el momento de su nacimiento. El neutrón nacido en el punto x con la probabilidad $1/2$ se mueve a la derecha o a la izquierda. En cualquier intervalo de longitud dx de \mathfrak{X} el neutrón se transforma con la probabilidad αdx en cierto número de nuevos neutrones, cada uno de los cuales, independientemente de los otros, con la probabilidad $1/2$ se mueve a la derecha o a la izquierda.

Este modelo se describe por los procesos ramificados generales y, a la par con sus análogos bi- y tridimensionales, sirve de modelo de partida en la teoría matemática de los reactores nucleares.

17.5.3. Ecuaciones para las funcionales generadoras. Con el proceso ramificado $\xi(t)$, $t \in T$, están ligadas las siguientes medidas aleatorias $\xi_x n(t, \cdot)$ y $\eta_x(\cdot)$ en $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ con valores no negativos de números enteros: $\xi_x n(t, A)$ que representa el número de partículas del proceso $\xi(t)$ que en el momento t se encontraban en el conjunto $A \in \mathfrak{A}$ a condición de que en el momento inicial habían n partículas y sus posiciones en \mathfrak{X} se determinaban por el punto $x^n \in \tilde{\mathfrak{X}}_n$; $\eta_x(A)$ es el número de partículas-descendientes en el conjunto $A \in \mathfrak{A}$ en el momento de transformación, siempre que la partícula-predecesor se encontraba en el momento de transformación en el punto $x \in \mathfrak{X}$.

Sea $s(x)$, $x \in \mathfrak{X}$, una función \mathfrak{A} -medible tal que

$$\sup_{x \in \mathfrak{X}} |s(x)| \leq t; \\ \Phi_t(x^n s(\cdot)) = M \exp \left\{ \int_{\mathfrak{X}} \ln s(y) \xi_x n(t, dy) \right\} \quad (5.3)$$

es la funcional generadora de la medida aleatoria $\xi_{x^n}(t, \cdot)$:

$$h(x, s(\cdot)) = M \exp \left\{ \int_{\mathbb{X}} \ln s(y) \eta_x(dy) \right\} \quad (5.4)$$

es la funcional generadora de la medida aleatoria $\eta_x(\cdot)$.

Si $x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces

$$\Phi_t(x^n, s(\cdot)) = \prod_{h=1}^n \Phi_t(x_h, s(\cdot)). \quad (5.5)$$

Supongamos que $q_t(x, A)$ es la probabilidad de que una partícula que empezó a fluctuar desde el punto $x \in \mathbb{X}$, no experimenta transformaciones durante el tiempo $[0, t]$ y en el momento t se encontrará en el conjunto $A \in \mathfrak{A}$; $K_x(t, A)$ es la probabilidad condicional de que el tiempo de vida de una partícula, que en el momento inicial se encontraba en el punto x , no supera t , en tanto que el punto, en que se encuentra la partícula dada en el momento de transformación, está contenido en $A \in \mathfrak{A}$.

Teorema 1. La funcional generadora $\Phi_t(x, s(\cdot))$ ($x = x^1$) satisface las siguientes ecuaciones funcionales:

$$\Phi_{t+\tau}(x, s(\cdot)) = \Phi_t(x, \Phi_\tau(\cdot, s(\cdot)));$$

$$\Phi_{t+\tau}(x, s(\cdot)) = \Phi_t(x, h(\cdot, s(\cdot)));$$

$$\Phi_t(x, s(\cdot)) = \int_{\mathbb{X}} s(y) \eta_x(t, dy) + \int_0^t K_x(du, dy) h(y, \Phi_{t-u}(\cdot, s(\cdot))).$$

Sea $M(t, x^n, A) = M \xi_{x^n}(t, A)$ un número medio de partículas que en el momento t se encontraban en el conjunto $A \in \mathfrak{A}$, a condición de que $\xi(0) = x^n$. $M(t, x^n, A)$ satisface la ecuación

$$M(t+\tau, x^n, A) = \int_{\mathbb{X}} M(t, y, A) M(\tau, x^n, dy). \quad (5.6)$$

EJEMPLO Sea $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, un proceso ramificado cuyas partículas no alteran su posición entre las transformaciones (el proceso ramificado se realiza a saltos), con la particularidad de que

$$q_t(x, \mathbb{X}) = e^{-qt}, \quad q > 0.$$

El parámetro q se denomina intensidad de saltos de las partículas.

La funcional generadora $\Phi_t(x, s(\cdot))$ de tal proceso satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(x, s(\cdot)) + q \Phi_t(x, s(\cdot)) = q h(x, \Phi_t(\cdot, s(\cdot))),$$

y la esperanza matemática $M(t, x, A)$ tiene por expresión

$$M(t, x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(qt)^n}{n!} e^{-qt} L^{(n)}(x, A),$$

donde

$$L^{(0)}(x, A) = \begin{cases} 1, & x \notin A; \\ 0, & x \in A, \end{cases}$$

$$L^{(1)}(x, A) = M\eta_x(A);$$

$$L^{(n)}(x, A) = \int_{\mathfrak{X}} L^{(1)}(x, dy) L^{(n-1)}(y, A).$$

17.5.4. Probabilidad de degeneración. Para un proceso ramificado general $\xi(t)$, $\xi(0) = x$, la probabilidad de degeneración $q(x)$ se determina como cualquiera de los límites:

$$q(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} P_t^{(0)}(x, \mathfrak{X}); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x, 0). \end{cases}$$

$q(x)$ satisface la ecuación funcional

$$q(x) = h(x, q(\cdot)). \quad (5.7)$$

Si la función $s_0(\cdot)$ es tal que $0 \leq s_0(x) \leq 1$, $x \in \mathfrak{X}$, satisface la condición $h(x, s_0(\cdot)) \leq s_0(x)$ para todo $x \in \mathfrak{X}$, entonces $q(x) \leq s_0(x)$.

Sea $t = 0, 1, 2, \dots$ $M(x) = M_{\xi_x}^t(1, \mathfrak{X})$, $B(x) = M_{\xi_x}^t(1, \mathfrak{X}) - M(x) = M_{\xi_x}^t(1, \mathfrak{X}) [\xi_x(1, \mathfrak{X}) - 1]$.

Teorema 2. 1) Si $\sup_{x \in \mathfrak{X}} M(x) < 1$, entonces $q(x) = 1$.

2) Si $\inf_{x \in \mathfrak{X}} M(x) > 1$ y $\sup_{x \in \mathfrak{X}} B(x) < \infty$, entonces $\sup_{x \in \mathfrak{X}} q(x) < 1$.

**TEOREMAS DEL LÍMITE
PARA LOS PROCESOS ALEATORIOS**

**18.1. Convergencia débil de las medidas
en los espacios métricos**

18.1.1. Convergencia en los conjuntos de continuidad de una medida límite. Sea $(\mathcal{X}, \mathfrak{B}, \rho)$ un espacio métrico con σ -álgebra boroliana \mathfrak{B} y métrica $\rho(x, y)$; $\mathcal{T}(\mathcal{X})$, un espacio de todas las funciones reales continuas acotadas definidas en \mathcal{X} con la norma $\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{X}} |f(x)|$.

Definición. Una sucesión de medidas μ_n definidas en \mathfrak{B} , se llama débilmente convergente hacia la medida μ (se denota: $\mu_n \Rightarrow \mu$), si se cumple la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu_n(dx) = \int f(x) \mu(dx) \quad (1.1)$$

para todo $f \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$.

Como que los valores de las integrales $\int f(x) \mu(dx)$ definen unívocamente la medida μ para todo $f \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$, entonces de la convergencia débil $\mu_n \Rightarrow \mu$ y $\mu_n \Rightarrow \nu$ se deduce que $\mu = \nu$.

De la definición de convergencia débil de las medidas se desprende que de la convergencia en probabilidad de los elementos aleatorios ξ_n con valores en \mathcal{X} hacia un elemento aleatorio ξ fluye la convergencia débil de las distribuciones P_n de elementos aleatorios ξ_n hacia la distribución P del elemento aleatorio límite ξ . La afirmación recíproca no es cierta, a excepción del caso en que la distribución límite P está concentrada en un punto.

Introduzcamos las designaciones: $\text{Int } A$ es un conjunto de puntos interiores de A ; $[A]$ es la clausura del conjunto A ; A' es un conjunto de puntos de frontera de A .

Lema. Si $\mu_n \Rightarrow \mu$, para todo $A \in \mathfrak{B}$ se verifican las desigualdades

$$\mu(\text{Int } A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \leq \mu([A]). \quad (1.2)$$

El conjunto A se llama conjunto de continuidad de la medida μ , si $\mu(A') = 0$.

Designemos mediante \mathfrak{A}_μ la totalidad de todos los conjuntos de continuidad de la medida μ .

* Las medidas μ_n , en el caso general, no están normadas hasta la probabilidad.

Teorema 1. Para que una sucesión de medidas μ_n converja débilmente hacia la medida μ , es necesario y suficiente que para todo conjunto A de continuidad de la medida μ se cumpla la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A) \quad \text{para todo } A \in \mathfrak{A}_\mu. \quad (1.3)$$

18.1.2. Condición de la compacidad débil de una familia de medidas.

Definición. Un conjunto M de medidas definidas en \mathfrak{B} se llama débilmente compacto, si de toda sucesión de medidas μ_n , pertenecientes a M , se puede distinguir una sucesión débilmente convergente.

Teorema 2. Sea \mathcal{X} un espacio métrico separable completo. Para que un conjunto M de medidas definidas en \mathfrak{B} sea débilmente compacto, es necesario y suficiente que se cumplan las dos siguientes condiciones:

a) $\sup_{\mu \in M} \mu(\mathcal{X}) < \infty$;

b) para $\varepsilon > 0$ existe un compacto K_ε tal que

$$\sup_{\mu \in M} \mu(\mathcal{X} \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon \quad (1.5)$$

Observación. La completitud del espacio \mathcal{X} se emplea sólo en la demostración de la necesidad de las condiciones a) y b) del teorema 2.

Al demostrar la convergencia débil de la sucesión de medidas μ_n establece la compacidad débil de la sucesión de medidas y unicidad de la medida límite.

Corolario. Si una sucesión de medidas μ_n definidas en \mathfrak{B} , que es la σ -álgebra de los conjuntos borelianos del espacio métrico separable completo \mathcal{X} , es tal que para todo $f \in \mathfrak{T}(\mathcal{X})$ existe el límite

$$L(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu_n(dx), \quad (1.6)$$

entonces existe una medida μ tal que

$$L(f) = \int f(x) \mu(dx),$$

es decir, la sucesión de medidas μ_n converge débilmente hacia μ .

18.1.3. Condiciones de convergencia débil de una sucesión de medidas. Una sucesión de funciones $f_n \in \mathfrak{T}(\mathcal{X})$ converge débilmente hacia f , si las funciones f_n están acotadas en totalidad y para todo $x \in \mathcal{X}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Un conjunto de funciones $F \subset \mathfrak{T}(\mathcal{X})$ se llama débilmente cerrado, si el límite de toda sucesión de funciones de F débilmente convergente pertenece a F .

Teorema 3. Una sucesión de medidas μ_n converge débilmente hacia la medida μ cuando, y sólo cuando, es débilmente compacta y para cierto conjunto de funciones $F_0 \subset \mathfrak{T}(\mathcal{X})$, cuya clausura débil coincide con todo $\mathfrak{T}(\mathcal{X})$, se verifica la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu_n(dx) = \int f(x) \mu(dx) \quad \text{para todo } f \in F_0. \quad (1.7)$$

En la demostración de los teoremas del límite para los procesos aleatorios es cómodo emplear las condiciones de convergencia de distribuciones parciales.

Teorema 4. Sea \mathfrak{A}_0 una clase de conjuntos abiertos en \mathcal{X} que, junto con dos conjuntos contiene, además, la suma de éstos y su intersección y que satisface las condiciones: 1) la σ -clausura de \mathfrak{A}_0 contiene todos los conjuntos abiertos; 2) todos los conjuntos de \mathfrak{A}_0 son conjuntos de continuidad de la medida dada μ .

Si para una sucesión de medidas débilmente compacta μ_n se cumple la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A) \quad \text{para todo } A \in \mathfrak{A}_0, \quad (1.8)$$

entonces μ_n converge débilmente hacia μ .

Observación. En distintos espacios funcionales a título de clase \mathfrak{A}_0 se considera corrientemente la clase de todos los conjuntos cilíndricos abiertos de continuidad de la medida límite, y, por lo tanto, se emplean las condiciones de convergencia de las distribuciones de dimensiones finitas.

Para la convergencia débil de las medidas tiene lugar también la convergencia de las integrales para ciertas funciones discontinuas. En este caso se hace uso de una circunstancia consistente en que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función \mathfrak{B} -medible es conjunto \mathfrak{B} -medible.

Lema. Si una sucesión de medidas μ_n converge débilmente hacia μ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu_n(dx) = \int f(x) \mu(dx) \quad (1.9)$$

para toda función f \mathfrak{B} -medible μ -casi siempre continua y acotada.

18.1.4. Convergencia de las medidas en espacios normados lineales. En los espacios normados lineales las condiciones para la convergencia débil de las medidas puede formularse en forma de las condiciones de convergencia para las funcionales características.

Supongamos que $(\mathcal{X}, \mathfrak{B})$ es un espacio separable de Banach y L es un conjunto lineal de funcionales lineales en \mathcal{X} tal que la σ -álgebra mínima respecto de la cual resultan medibles todas las funcionales $l \in L$ coincide con \mathfrak{B} .

Teorema 5. Una sucesión de medidas μ_n en $(\mathcal{X}, \mathfrak{B})$ converge débilmente hacia la medida μ , cuando, y sólo cuando, es débilmente compacta y se verifica la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{il(x)} \mu_n(dx) = \int e^{il(x)} \mu(dx) \quad \text{para todo } l \in L. \quad (1.10)$$

18.2. Convergencia débil de las medidas en un espacio de Hilbert

18.2.1. Condiciones para las funcionales características. Aquí \mathcal{X} es un espacio separable de Hilbert, \mathfrak{B} es la σ -álgebra de los conjuntos borelianos de \mathcal{X} . Introduzcamos las designaciones para ciertas totalidades de operadores lineales en \mathcal{X} : T_C es un conjunto de todos los

operadores simétricos no negativos totalmente continuos, S es un conjunto de todos los operadores nucleares, S_a es un subconjunto del conjunto S compuesto de los operadores cuya traza no es mayor que a .

Con la ayuda de los operadores de T_C se da un criterio cómodo de compacidad de los conjuntos de \mathcal{X} .

Lema. Para todo operador $A \in T_C$ el conjunto $\{x : |A^{-1}x| \leq 1\}$ es compacto. Para todo compacto $K \subset \mathcal{X}$ existe un operador $A \in T_C$ tal que $K \subset \{x : |A^{-1}x| \leq 1\}$.

La compacidad débil de una familia de medidas en el espacio de Hilbert es equivalente a la continuidad (en cierto sentido) de una familia de funcionales características de las medidas.

Teorema 1. Sea M una familia de medidas finitas en $\mathfrak{B} \cdot \chi_\mu(z)$, $z \in \mathcal{X}$, es la funcional característica de la medida $\mu \in M$. Para que el conjunto M sea débilmente compacto es necesario y suficiente que: a) $\chi_\mu(0)$ sean acotadas en totalidad para todo $\mu \in M$; b) para todo $\varepsilon > 0$ y para toda medida $\mu \in M$ se puedan indicar un operador $B \in T_C$ y un operador $A_\mu \in S_1$ respectivamente, tales que $\operatorname{Re} [\chi_\mu(0) - \chi_\mu(z)] \leq \varepsilon$, cuando $(BA_\mu Bz, z) \leq 1$.

Observación. Existe un ejemplo en el cual para la totalidad débilmente compacta de medidas no puede indicarse un operador $A \in S$ (común para todas las medidas) tal que sea $\operatorname{Re} [\chi_\mu(0) - \chi_\mu(z)] \leq \varepsilon$, cuando $(Az, z) \leq 1$.

En la condición b) del teorema 1 se construyen los operadores $C_\mu \in S$, que pueden ser representados en la forma $C_\mu = BA_\mu B$, donde $B \in T_C$, $A_\mu \in S_1$. Abajo se dan a conocer las condiciones en que tal representación es posible.

Lema 2. Para que una familia de operadores $C_\mu \in S$ pueda ser representada en la forma $C_\mu = BA_\mu B$, donde $B \in T_C$, $A_\mu \in S_1$, es necesario que en cada base ortonormada $\{e_k\}$ la serie

$$\operatorname{Sp} C_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (C_\mu e_k, e_k)$$

converja uniformemente respecto de μ y suficiente que dicha serie converja por lo menos en una sola base.

Designemos mediante $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$ un espacio de Hilbert de operadores lineales de Hilbert-Schmidt (para los cuales $\operatorname{Sp} AA^* < \infty$) en \mathcal{X} con el producto escalar $(A, B) = \operatorname{Sp} AB^*$.

Lema 3. Si $B \in T_C$, $A_\mu \in T_C$, $A_\mu^2 \in S_1$, entonces el conjunto de operadores BA_μ es compacto en $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$. Para todo conjunto de operadores C_μ , compacto en $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$, existe un operador $B \in T_C$ tal que $B^{-1}C_\mu^2 B^{-1} \in S_1$.

18.2.2. Condiciones de compacidad de una familia de operadores. La condición más eficaz de compacidad de una familia de medidas se enuncia en términos de la compacidad de los operadores.

Teorema 2. Para que una familia \mathfrak{M} de medidas finitas μ en \mathfrak{B} sea débilmente compacta, es necesario y suficiente que:

a) para todo $\varepsilon > 0$ exista tal C que

$$\mu \{x : |x| > C\} < \varepsilon \text{ para toda } \mu \in \mathfrak{M};$$

b) para todo $C > 0$ la familia de operadores \mathfrak{B}_μ^C definidos por la correlación

$$\int_{|x| \leq C} (z, x)^2 \mu(dx) = (\mathfrak{B}_\mu^C z, \mathfrak{B}_\mu^C z),$$

sea un conjunto compacto en $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$.

La condición b) se puede sustituir por la condición b'): en alguna base $\{e_k\}$ en \mathcal{X} (y, consecuentemente, en cualquier base) la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathfrak{B}_\mu^C e_k|^2$$

converge uniformemente respecto de μ para todo $C > 0$.

Corolario 1. Supongamos que para las medidas $\mu \in \mathfrak{M}$ existen unos operadores de correlación

$$(A_\mu z, z) = \int (z, x)^2 \mu(dx)$$

y $A_\mu^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$. En este caso, para la compacidad débil de una familia

de medidas μ es suficiente que el conjunto de operadores $\{A_\mu^{\frac{1}{2}}\}$ sea compacto en $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$. Si, para cierto $C > 0$, se tiene que $\mu\{x : |x| > C\} = 0$ con $\mu \in \mathfrak{M}$ cualquiera, entonces la compacidad de $\{A_\mu^{\frac{1}{2}}\}$ en $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$ es la condición necesaria para que la familia de medidas \mathfrak{M} sea débilmente compacta.

Corolario 2. Supongamos que los operadores \mathfrak{B}_μ se definen mediante la correlación

$$(\mathfrak{B}_\mu x, z) = \int \frac{(z, x)^2}{1 + |x|^2} \mu(dx).$$

En este caso, para que la familia \mathfrak{M} sea débilmente compacta, es necesario y suficiente que: a) el conjunto de operadores $\{\mathfrak{B}_\mu^{\frac{1}{2}}\}$ sea compacto en $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$ y b) el $\lim_{C \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in \mathfrak{M}} \mu\{x : |x| > C\} = 0$.

Este corolario permite formular las condiciones para la convergencia débil de medidas.

Teorema 3. Para que una sucesión de medidas μ_n converja débilmente hacia la medida μ , es necesario y suficiente que: a) el conjunto de operadores $\{\mathfrak{B}_{\mu_n}\}$ sea compacto en $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$; b) las funcionales características $\chi_n(z) = \int e^{i(z, x)} \mu_n(dx)$ de las medidas μ_n converjan hacia la funcional característica $\chi_\mu(z)$ de la medida μ para todos los $z \in \mathcal{X}$.

18.3. Teoremas del límite para los procesos aleatorios continuos

18.3.1. Condiciones generales de convergencia de las distribuciones de funcionales. En este párrafo se consideran los procesos aleatorios continuos con la probabilidad 1.

Sea $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ un conjunto de funciones continuas $x(t)$ definidas en el segmento $[a, b]$ que toman valores en el espacio métrico separable completo \mathcal{X} .

Introduzcamos en el espacio $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ una métrica:

$$r(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} \rho(x(t), y(t)), \quad (3.1)$$

donde $\rho(x, y)$ es una distancia en \mathcal{X} . La métrica (3.1) transforma $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ en un espacio métrico separable completo.

Designemos mediante $\mathfrak{B}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ la σ -álgebra de todos los conjuntos borelianos en $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$. Dicha σ -álgebra coincide con la σ -álgebra mínima en la que están contenidos todos los conjuntos cilíndricos de $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$.

Sea $\xi(t)$ un proceso aleatorio definido para $t \in [a, b]$ con los valores en \mathcal{X} y continuo con la probabilidad 1. En este caso, la medida probabilística μ , correspondiente al proceso aleatorio $\xi(t)$, está concentrada en el espacio medible $\{\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X}), \mathfrak{B}_{[a, b]}(\mathcal{X})\}$. Con ello, los valores de la medida μ en los conjuntos cilíndricos de $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ se dan mediante las distribuciones de dimensiones finitas del proceso $\xi(t)$.

En los teoremas del límite para procesos aleatorios se supone, como regla, la convergencia de distribuciones de dimensiones finitas, es decir, la convergencia de las medidas $\mu_n(A)$ hacia la medida $\mu(A)$ para todos los conjuntos cilíndricos A que son conjuntos de discontinuidad de la medida límite μ .

Si la medida límite μ está concentrada en el espacio de funciones continuas $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$, entonces la clase \mathfrak{A}_0 de conjuntos abiertos cilíndricos de discontinuidad de la medida μ satisface las condiciones del teorema 4, p. 18.1. Por esta razón, para demostrar la convergencia débil de las medidas μ_n hacia la medida μ se requiere establecer las condiciones de compacidad débil de las medidas μ_n , $n \geq 0$, para lo cual es suficiente indicar la forma general del compacto en el espacio $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ (véase el teorema 2 en el p. 18.1).

Sea λ_δ una función continua monótona positiva definida para $\delta > 0$ y que satisface la condición $\lambda_{+\infty} = 0$. Sea X_0 un compacto en \mathcal{X} .

Lema 1. Un conjunto de funciones $K^\delta(X_0, \lambda_\delta)$ que satisfacen las condiciones: a) $x(t) \in X_0$, $a \leq t \leq b$; b) $\rho(x(t_1), x(t_2)) < \lambda_\delta$, $|t_1 - t_2| < \delta$, $\forall \delta > 0$, es compacto en $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$.

Para todo compacto K_0 en $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ se pueden indicar un compacto X_0 en \mathcal{X} y una función λ_δ monótona positiva continua cuando $\delta > 0$, con $\lambda_{+\infty} = 0$ tales que $K_0 \subset K(X_0, \lambda_\delta)$.

Supongamos que $\xi_n(t)$, $n \geq 0$, es una sucesión de procesos aleatorios cuyas funciones muestrales pertenecen al espacio $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ con la probabilidad 1 y μ_n son las medidas probabilísticas correspondientes a los procesos $\xi_n(t)$.

Lema 2. La convergencia débil de las medidas $\mu_n \Rightarrow \mu_0$ para $n \rightarrow \infty$, es equivalente a la convergencia de las distribuciones $f(\xi_n(\cdot))$ hacia la distribución $f(\xi_0(\cdot))$ para toda funcional $f(x) \mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathcal{X})$ -medible y μ -casi siempre continua.

Las condiciones (3.2), (3.3) y (3.4) que vienen abajo determinan la compacidad débil de una sucesión de medidas μ_n , correspondientes a los procesos aleatorios $\xi_n(t)$.

Teorema 1. Supongamos que las distribuciones de dimensiones finitas de los procesos $\xi_n(t)$ convergen a las distribuciones de dimensiones finitas del proceso $\xi_0(t)$. Con el fin de conseguir que para todas las funcionales f , continuas en $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathcal{X})$, las distribuciones $f(\xi_n(\cdot))$ converjan a la distribución $f(\xi_0(\cdot))$, es necesario y suficiente que para todo $\lambda > 0$ se cumpla la correlación

$$\limsup_n P \left\{ \sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) > \lambda \right\} = 0. \quad (3.2)$$

Observación 1. Para cualquier $\lambda > 0$, en lugar de la condición (3.2) es suficiente que se verifique

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{|t_1 - t_2| < \delta} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) > \lambda \right\} = 0. \quad (3.3)$$

Observación 2. En lugar de la condición (3.2) resulta suficiente que se cumpla la siguiente condición: existen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $H > 0$ tales que para cualesquiera $t_1, t_2 \in [a, b]$ y todo n

$$M[\rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2))]^\alpha \leq H |t_1 - t_2|^{1+\beta}. \quad (3.4)$$

Para diferentes tipos de procesos aleatorios continuos las condiciones de convergencia de las funcionales se concretizan.

18.3.2. Procesos con incrementos independientes. Para los procesos continuos con incrementos independientes $\xi_n(t)$, $n \geq 0$, definidos en el segmento $[a, b]$ con valores en un espacio de Banach \mathcal{X} , las condiciones de convergencia de las funcionales se establecen tomando en consideración las siguientes propiedades de las funciones muestrales:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{h=0}^{n-1} P(|\xi(t_{h+1}) - \xi(t_h)| > \varepsilon) = 0, \quad (3.5)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Aquí, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $\delta = \max(t_{h+1} - t_h)$.

Teorema 2. Con objeto de que para toda función $\varphi(x)$, continua en $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathcal{X})$, las distribuciones de magnitudes aleatorias $\varphi(\xi_n(\cdot))$ converjan hacia la distribución de la magnitud $\varphi(\xi_0(\cdot))$, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:

1) las distribuciones parciales de los procesos $\xi_n(t)$ convergen hacia las distribuciones parciales del proceso $\xi_0(t)$;

2) para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t_2 - t_1| \leq \delta} P(|\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)| > \varepsilon) = 0. \quad (3.6)$$

18.3.3. Procesos de Márkov. Para los procesos continuos de Márkov $\xi_n(t)$, $n \geq 0$, definidos en el segmento $[a, b]$ con valores en el

espacio métrico completo \mathcal{X} dotado de la métrica ρ y las probabilidades de paso $P_n(t, x, s, A)$, introduzcamos

$$\alpha_n(h, \varepsilon) = \sup P_n \{ (t_1, x, t_2, V_\varepsilon(x)); x \in \mathcal{X}, |t_2 - t_1| \leq h \}, \quad (3.7)$$

donde $V_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) > \varepsilon\}$.

Teorema 3. Supongamos que las distribuciones parciales de los procesos $\xi_n(t)$, $n \geq 1$, convergen, para $n \rightarrow \infty$, hacia las distribuciones parciales del proceso $\xi_0(t)$ y se cumplen para todo $\varepsilon > 0$ las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \sup_n \alpha_n(h, \varepsilon) &= 0; \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{h=0}^{n-1} P \{ \rho(\xi(t_{k+1}), \xi(t_k)) > \varepsilon \} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $\delta = \max_k (t_{k+1} - t_k)$.

Entonces, para toda función φ , continua en $\mathcal{D}_{[a,b]}(\mathcal{X})$, las distribuciones $\varphi(\xi_n(\cdot))$ convergen hacia la distribución $\varphi(\xi_0(\cdot))$.

18.3.4. Procesos continuos contruidos según las sumas de magnitudes aleatorias independientes. Sea $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}, \dots$ una sucesión de series de unas magnitudes aleatorias numéricas (independientes en cada serie) que satisfacen las condiciones

$$\left. \begin{aligned} M\xi_{nt} &= 0, \quad t = \overline{1, k_n}; \\ D\xi_{nt} &= b_{nt}, \quad \sum_{t=1}^{k_n} b_{nt} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Determinemos las funciones aleatorias $\xi_n(t)$ para $t \in [0, 1]$ mediante las correlaciones

$$\left. \begin{aligned} S_{nh} &= \sum_{t=1}^h \xi_{nt}, \quad t_{nh} = \sum_{t=1}^h b_{nt}; \\ \xi_n(t) &= S_{nh} + \frac{t - t_{nh}}{t_{nk+1} - t_{nh}} [S_{nk+1} - S_{nh}], \quad t \in [t_{nh}, t_{nk+1}]. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

En este caso, $S_{n0} = 0$, $t_{n0} = 0$. Entonces, $\xi_n(t)$ es una quebrada aleatoria que une los puntos de un plano con coordenadas (t_{nk}, S_{nh}) , $k = 0, 1, \dots, k_n$.

Aduzcamos las condiciones con las cuales las distribuciones parciales de los procesos $\xi_n(t)$ y las de funcionales de dichos procesos convergen hacia las distribuciones parciales y hacia las de funcionales correspondientes del proceso de Wiener $w(t)$.

Teorema 4. Supongamos que las magnitudes aleatorias independientes ξ_{nt} con funciones de distribución $F_{nt}(x)$ satisfacen la condición (3.9) y la condición de Lindeberg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nt}(x) = 0 \quad (3.11)$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Entonces, las distribuciones de dimensiones finitas de los procesos $\xi_n(t)$ determinados por la correlación (3.10), convergen hacia las distribuciones de dimensiones finitas del proceso de Wiener $w(t)$ y las distribuciones $f(\xi_n(\cdot))$ convergen hacia la distribución $f(w(\cdot))$ para toda funcional f continua en $\mathfrak{X}_{[0,1]}(R)$.

Para las sumas $S_h = \sum_{i=1}^h \xi_i$ de magnitudes aleatorias independientes e igualmente distribuidas ξ_i con $M\xi_i = 0$ y $D\xi_i = 1$, designemos mediante $\zeta_n(t)$ una quebrada aleatoria cuyos vértices se encuentran en los puntos $(\frac{k}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}} S_h)$.

Teorema 5. Para toda funcional f , definida y continua en $\mathfrak{X}_{[0,1]}(R)$ casi siempre según la medida μ_w , correspondiente al proceso de Wiener $w(t)$, las distribuciones $f(\xi_n(\cdot))$ convergen hacia la distribución $f(w(\cdot))$. En particular, se verifican las siguientes correlaciones límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \max_{1 \leq h \leq n} |S_h| < a \sqrt{n} \right\} = P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |w(t)| < a \right\} \quad (3.12)$$

para casi todo a . Para la función $\varphi(x)$, integrable según Riemann en cada intervalo finito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_k \right) < a \right\} = P \left\{ \int_0^1 \varphi(w(t)) dt < a \right\} \quad (3.13)$$

cualquiera que sea a , para las que

$$P \left\{ \int_0^1 \varphi(w(t)) dt = a \right\} = 0.$$

18.4. Teoremas del límite para los procesos sin discontinuidades de segunda especie

18.4.1. Métrica en el espacio de funciones sin discontinuidades de segunda especie. Sea $D_{[0,1]}(\mathcal{X})$ un conjunto de funciones $x(t)$, definidas en el segmento $[0, 1]$ y que toman los valores de un espacio métrico separable completo \mathcal{X} con métrica ρ , y que tienen los valores límites $x(t+0)$ para $0 \leq t < 1$ y $x(t-0)$ para $0 < t \leq 1$.

Como las funciones coincidentes en todos los puntos de discontinuidad no se diferencian, parece natural fijar los valores de las funciones en los puntos de discontinuidad:

$$x(t) = x(t+0), \quad x(0) = x(+0), \quad x(1) = x(1-0).$$

La magnitud $\rho(x(t-0), x(t))$ se denomina valor del salto de la función $x(t)$ en el punto t .

Designemos mediante Λ una totalidad de todas las funciones continuas numéricas monótonas crecientes en el segmento $[0, 1]$ con $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$, es decir, la aplicación continua y unívoca de $[0, 1]$ sobre $[0, 1]$.

La métrica $r_0(x, y)$ en el espacio $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ se determina por la correlación

$$r_D(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} [\sup_{0 \leq t \leq 1} \rho(x(t), y(\lambda(t))) + \sup_{0 \leq t \leq 1} |t - \lambda(t)|]. \quad (4.1)$$

La métrica $r_D(x, y)$ transforma $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ en un espacio métrico separable completo.

La forma general de los conjuntos compactos en $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ se determina recurriendo al criterio de ausencia de discontinuidades de segunda especie. Hallemos para toda $x(t) \in D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$, la magnitud ($C > 0$):

$$\begin{aligned} \Delta_C(x) = & \sup \{ \min [\rho(x(t'), x(t)), \rho(x(t), x(t'))] : \\ & t - C < t' < t < t' + C, t', t, t' \in [0, C] \} + \\ & + \sup \{ \rho(x(0), x(t)); 0 < t < C \} + \\ & + \sup \{ \rho(x(t), x(1)); 1 - C < t < 1 \}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sean X_0 un compacto en \mathcal{X} , y λ_C , una función continua monótona positiva definida para $C > 0$ y que satisface la condición $\lambda_{+0} = 0$.

Teorema 1. Un conjunto de funciones $K_D(X_0, \lambda_0)$ que satisface las condiciones:

- 1) $x(t) \in X_0, 0 \leq t \leq 1$;
- 2) $\Delta_C(x) \leq \lambda_C, \forall C > 0$,

es compacto en $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$.

Para todo compacto K_0 en $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ se pueden indicar un compacto $X_0 \subset \mathcal{X}$ y una función λ_C , positiva monótona y continua para $C > 0$, con $\lambda_{+0} = 0$ tales que $K_0 \subset K_D(X_0, \lambda_C)$.

18.4.2. Teorema del límite principal para los procesos sin discontinuidades de segunda especie.

Teorema 2. Supongamos que las distribuciones parciales de los procesos $\xi_n(t), 0 \leq t \leq 1, n \geq 0$, cuyas funciones muestrales pertenecen a $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ con la probabilidad 1, convergen, para $n \rightarrow \infty$, hacia las distribuciones parciales del proceso $\xi_0(t)$ sin discontinuidades de segunda especie. Para que con toda funcional f , definida en $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ y continua en la métrica r_D , las distribuciones $f(\xi_n(\cdot))$ convergen hacia la distribución $f(\xi_0(\cdot))$, es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Delta_C(\xi_n(\cdot)) > \varepsilon) = 0, \quad (4.3)$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$.

Observación. En lugar de la condición (4.3) es suficiente que se cumpla la siguiente: existen $\alpha > 0, \beta > 0$ y $H > 0$ tales que para todo $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 1$ y para todo $n \geq 1$ se verifica la desigualdad

$$M [\rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) \rho(\xi_n(t_2), \xi_n(t_3))]^\alpha \leq H (t_3 - t_1)^{1+\beta}. \quad (4.4)$$

18.4.3. Teorema del límite para los procesos de Márkov. Sea $\xi_n(t), 0 \leq t \leq n, n \geq 0$, una sucesión de procesos de Márkov definidos en el segmento $[0, 1]$ cuyas funciones muestrales pertenecen al espacio $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ con la probabilidad 1. Designaremos mediante $P_n(t, x, s, A)$ las probabilidades de paso para el proceso $\xi_n(t)$ e introduzcamos $V_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) > \varepsilon\}$ para $\varepsilon > 0$.

Teorema 3. Supongamos que las distribuciones parciales de los procesos de M \acute{a} rkov $\xi_n(t)$ convergen, para $n \rightarrow \infty$, hacia las distribuciones parciales de $\xi_0(t)$ y para todo $\varepsilon > 0$ se cumple la condici3n

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup \{P_n(t, x, s, V_n(x)); x \in \mathcal{X}, 0 \leq s - t \leq h\} = 0. \quad (4.5)$$

Entonces, para toda funcional f , continua en $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$, las distribuciones $f(\xi_n(\cdot))$ convergen hacia la distribuci3n $f(\xi_0(\cdot))$.

Los procesos con incrementos independientes en un espacio normado lineal completo \mathcal{X} son un caso particular de los procesos de M \acute{a} rkov. En calidad de corolario del teorema 3 se enuncia el

Teorema 4. Sea $\xi_n(t)$, $n \geq 0$, una sucesi3n de procesos con incrementos independientes definidos en $[0, 1]$ cuyas funciones muestrales pertenecen a $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ con la probabilidad 1. Si las distribuciones parciales del proceso $\xi_n(t)$ convergen hacia las distribuciones parciales del proceso $\xi_0(t)$ y para todo $\varepsilon > 0$ se cumple la condici3n

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t-s| \leq h} P\{|\xi_n(t) - \xi_n(s)| > \varepsilon\} = 0, \quad (4.6)$$

entonces, para toda funcional f , continua en $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$, las distribuciones $f(\xi_n(\cdot))$ convergen hacia la distribuci3n $f(\xi_0(\cdot))$.

Observaci3n. En los teoremas 2-4 es suficiente exigir que la funcional f sea medible y μ_0 -casi siempre continua, siendo μ_0 la medida que corresponde al proceso aleatorio $\xi_0(t)$.

ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

19.1. Procesos de difusión

19.1.1. **Definición.** La definición de un proceso homogéneo de difusión basada en el concepto de operador característico se ha dado en el p. 15.1. Demos a conocer otra definición que es útil para el caso de un proceso de difusión no homogéneo y que sólo emplea la noción de probabilidad de paso.

Sea \mathfrak{B} la σ -álgebra de subconjuntos borelianos de un espacio euclídeo m -dimensional R^m . La función $P(s, x, t, \Gamma)$, $0 \leq s < t \leq T$, $x \in R^m$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, se denomina probabilidad de paso, si están cumplidas las condiciones:

- $P(s, x, t, \Gamma)$ es una función \mathfrak{B} -medible respecto de x con s, t, Γ fijados;
- $P(s, x, t, \Gamma)$ es una medida probabilística en \mathfrak{B} para s, x, t fijados (de suerte que $P(s, x, t, R^m) = 1$);
- para cualesquiera $0 \leq s < t_1 < t_2$, $x \in R^m$ y $\Gamma \in \mathfrak{B}$ queda cumplida la correlación

$$P(s, x, t_2, \Gamma) = \int_{R^m} P(s, x, t_1, dy) P(t_1, y, t_2, \Gamma),$$

llamada ecuación de Chapman—Kolmogórov.

Diremos que se ha dado un proceso de Márkov en amplio sentido con valores en R^m , si está definida la probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$.

Definición 1. Un proceso de Márkov en amplio sentido con valores en R^m en el intervalo de tiempo $[0, T]$ lleva el nombre de proceso de difusión, si se cumplen las siguientes condiciones:

- para todo $\varepsilon > 0$ y cualesquiera $t \in [0, T]$ y $x \in R^m$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| > \varepsilon} P(t, x, t + \Delta t, dy) = 0;$$

- existen una función $a(s, x)$ con valores en R^m y un operador lineal simétrico definido de modo no negativo $b(s, x)$, que aplica R^m en R^m , tales que para cualesquiera $\varepsilon > 0$, $x \in R^m$ y $t \in [0, T]$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x) P(t, x, t + \Delta t, dy) = a(t, x);$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x, \theta)^2 P(t, x, t + \Delta t, dy) = (b(t, x) \theta, \theta),$$

cualquiera que sea $\theta \in R^m$. Aquí, (θ, y) es un producto escalar en R^m .

Es fácil ver, que si está cumplida la condición 1) y en la condición 2) los límites existen para cierto $\varepsilon > 0$, existen también para todos los $\varepsilon > 0$ y, además, no dependen de ε .

La denominación «procesos de difusión» se debe a que ellos describen con suficiente exactitud el fenómeno de difusión. Si en el momento t una partícula en difusión se encontraba en el punto x , su desplazamiento durante el tiempo de t hasta $t + \Delta t$ puede escribirse en forma de la suma $a(t, x) \Delta t + \delta(t, t + \Delta t, x)$, donde $a(t, x) \Delta t$ es un desplazamiento no aleatorio ligado con el movimiento macroscópico del medio en el cual se realiza la difusión, en tanto que $\delta(t, t + \Delta t, x)$ es un vector aleatorio ligado con movimiento térmico caótico de las moléculas del medio en consideración. En este caso, consideramos que la esperanza matemática del vector $\delta(t, t + \Delta t, x)$ es nula, y la media del cuadrado de su proyección en una dirección arbitraria $\theta \in R^m$ tiene por expresión: $|\theta|^2 \times \times (b(t, x) \theta, \theta) \Delta t$. El vector $a(t, x)$ lleva el nombre de vector de traslado y el operador $b(t, x)$, operador de difusión. En el caso unidimensional éstos se llaman coeficientes de traslado y difusión, respectivamente.

19.1.2. Ecuaciones de Kolmogórov. Los dos teoremas que siguen muestran que los procesos de difusión están íntimamente ligados con las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del tipo parabólico.

Supongamos que en R^m está elegida una base. Designemos mediante $a^i(s, x)$ las coordenadas del vector $a(s, x)$ mientras que mediante $b^{ij}(s, x)$, los elementos de la matriz $b(s, x)$ en esta base.

Teorema 1. Sea dado un proceso de difusión para el cual las funciones $a(s, x)$ y $b(s, x)$ son continuas y la función continua acotada $f(x)$ de valores reales es tal que la función

$$u(s, x) = \int_{R^m} P(s, x, t, dy) f(y)$$

es dos veces continuamente derivable respecto de x . En este caso, la función $u(s, x)$ es derivable respecto de s y satisface la ecuación

$$-\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m b^{ij}(s, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^m a^i(s, x) \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad x \in R^m,$$

$$0 \leq s < t,$$

la condición inicial

$$\lim_{s \rightarrow t} u(s, x) = f(x).$$

Esta ecuación se llama ecuación inversa de Kolmogórov.

En muchos casos la probabilidad de paso tiene la densidad $G(s, x, t, \Gamma)$ respecto de la medida lebesguiana. Esto significa que para cualesquiera $0 \leq s < t$, $x \in R^m$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$

$$P(s, x, t, \Gamma) = \int_{\Gamma} G(s, x, t, y) dy.$$

Si la función $G(s, x, t, y)$ es suficientemente suave, como función de (t, y) , entonces satisface la ecuación normal de Kolmogórov, llamada también ecuación de Fokker-Planck.

Teorema 2. Si para un proceso de difusión los correlaciones límites en la definición 1 se cumplen uniformemente respecto de $x \in R^m$ y existen las derivadas continuas

$$\frac{\partial G(s, x, t, y)}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y^i} (a^i(t, y) G(s, x, t, y)), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} (b^{ij}(t, y) G(s, x, t, y)),$$

entonces la función $G(s, x, t, y)$ para todos los $(t, y) \in (s, T) \times R^m$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial G(s, x, t, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} (b^{ij}(t, y) G(s, x, t, y)) - \\ - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial y^i} (a^i(t, y) G(s, x, t, y)).$$

Los teoremas 1 y 2 muestran que al construir los procesos de difusión y al estudiar sus propiedades, se puede emplear la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del tipo parabólico. No obstante, existe también otro método para construir procesos de difusión basado en la construcción inmediata de las trayectorias de tales procesos en calidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Con el fin de comprender qué forma han de tener estas ecuaciones, examinemos un proceso de difusión $\xi(t)$. Su incremento $\xi(t + \Delta t) - \xi(t)$ tendrá los mismos momentos marginados condicionales (para $\xi(t)$ fijado) de dos primeros órdenes como el vector

$$a(t, \xi(t)) \Delta t + \sigma(t, \xi(t)) (w(t + \Delta t) - w(t)),$$

donde el operador $\sigma(t, x)$ es tal que $\sigma^2(t, x) = b(t, x)$, y $w(t)$ es un proceso de Wiener m -dimensional. Con la exactitud hasta $o(\Delta t)$ podemos escribir una igualdad aproximada (teniendo en cuenta la coincidencia de las distribuciones condicionales en los miembros primero y segundo)

$$\xi(t + \Delta t) - \xi(t) \approx a(t, \xi(t)) \Delta t + \sigma(t, \xi(t)) (w(t + \Delta t) - w(t)).$$

Es natural esperar que al pasar a las diferenciales obtendremos la coincidencia exacta de las distribuciones. La propia ecuación tiene que poseer la forma

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + \sigma(t, \xi(t)) d w(t).$$

Con el objeto de dar sentido a esta ecuación, escribámosla en forma integral

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s)) d w(s).$$

Ahora, el problema consiste en dar sentido a la segunda integral en el segundo miembro de esta ecuación. Las integrales de este tipo, llamadas integrales estocásticas, se han considerado en el p. 19.2. Hemos de hacer notar que un proceso de Wiener tiene, con la probabilidad 1, una variación no acotada en cualquier intervalo, por lo cual dicha integral no puede entenderse en el sentido de Stieltjes.

Como conclusión, demos a conocer las condiciones suficientes cuyo cumplimiento hace que un proceso sea de difusión.

Para que un proceso de Márkov (en amplio sentido) sea proceso de difusión, es suficiente que la probabilidad de paso del proceso $P(s, x, t, l')$ satisfaga las condiciones:

1) para cierto $\delta > 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{R^m} |y-x|^{2+\delta} P(t, x, t+\Delta t, dy) = 0, \quad x \in R^m, \quad t \in [0, T];$$

2) existe un vector función $a(t, x) \in R^m$ y una función operacional $b(t, x)$ que representa en sí, para todos los t y x , un operador simétrico definido de modo no negativo y que actúa en R^m , tales que para cualesquiera t y x quedan cumplidas las correlaciones ($x \in R^m$, $t \in [0, T]$)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{R^m} (y-x) P(t, x, t+\Delta t, dy) = a(t, x);$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{R^m} (y-x, \theta)^2 P(t, x, t+\Delta t, dy) = (b(t, x) \theta, \theta), \quad \theta \in R^m.$$

19.2. Integrales estocásticas extendidas al proceso de Wiener

19.2.1. Definición de la integral estocástica extendida a un proceso de Wiener unidimensional. Definamos primero la integral estocástica

$$\int_0^T f(t) dw(t)$$

para el caso en que $w(t)$ es un proceso de Wiener unidimensional. Supongamos que en un espacio probabilístico $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ está dado el flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ (es decir, la familia de σ -álgebras subordinada a la condición: cuando $t_1 < t_2$, se tiene que $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2} \subset \mathfrak{F}$) y el proceso de Wiener $w(t)$, $t \in [0, T]$, con valores en R^1 , es tal que $w(0) = 0$, $w(t)$ es \mathfrak{F}_t -medible para todo $t \in [0, T]$, en tanto que los incrementos $w(t+s) - w(t)$ no dependen de la σ -álgebra \mathfrak{F}_t cuando $s > 0$.

Designemos mediante $H_2[0, T]$ un espacio de las funciones aleatorias $f(t) = f(t, \omega)$ con valores en R^1 , definidas en $[0, T]$ y de tal índole, que para todo $t \in [0, T]$ la magnitud aleatoria $f(t)$ es \mathfrak{F}_t -medible (en este caso diremos que el proceso $f(t)$ está subordinado al flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$) y, con la probabilidad 1, es finita

la integral

$$\int_0^T f^2(t) dt.$$

Teorema 1. A todo proceso $\{f(t), t \in [0, T]\}$ del espacio $H_2[0, T]$ se le puede poner en correspondencia una magnitud aleatoria $I_T^0(f)$, que está definida en el espacio (Ω, \mathfrak{F}) y posee las siguientes propiedades:

1) si $f_1, f_2 \in H_2[0, T]$, y α_1 y α_2 son unas constantes arbitrarias, entonces

$$I_T^0(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 I_T^0(f_1) + \alpha_2 I_T^0(f_2);$$

2) si $\chi_{[t_1, t_2]}(t)$ es el indicador del segmento $[t_1, t_2]$, entonces

$$I_T^0(\chi_{[t_1, t_2]}) = w(t_2) - w(t_1);$$

3) si $f \in H_2[0, T]$ y $M \int_0^T f^2(t) dt < \infty$, entonces

$$M I_T^0(f) = 0, M (I_T^0(f))^2 = M \int_0^T f^2(t) dt,$$

4) cualesquiera que sean $f \in H_2[0, T]$ y las constantes $C > 0$ y $N > 0$, tiene lugar la igualdad

$$P(|I_T^0(f)| > C) \leq P\left\{\int_0^T f^2(t) dt > N\right\} + \frac{N}{C^2}.$$

Definición 1. La magnitud aleatoria $I_T^0(f)$ se denomina integral estocástica de la función $f(t)$ extendida a un proceso de Wiener y se designa

$$I_T^0(f) = \int_0^T f(t) dw(t).$$

Llamemos la función $f \in H_2[0, T]$ escalonada, si existe tal partición del segmento $[0, T]$ por medio de los puntos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, que $f(t) = f(t_k)$ para $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Es evidente que para las funciones escalonadas

$$\int_0^T f(t) dw(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) [w(t_{k+1}) - w(t_k)].$$

Si $\{f_n(t), t \in [0, T]\}$, $n = 1, 2, \dots$, es una sucesión de funciones escalonadas para las cuales con cualquier $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt > \varepsilon\right\} = 0,$$

donde $f(t)$ es una función de $H_2[0, T]$, entonces, de acuerdo con la condición 4)

$$P \left\{ \left| \int_0^T f_n(t) d\omega(t) - \int_0^T f_r(t) d\omega(t) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ \leq \rho + P \left\{ \int_0^T |f_n(t) - f_r(t)|^2 dt > \rho \varepsilon^2 \right\},$$

de donde se deduce que la sucesión de magnitudes aleatorias

$$\int_0^T f_n(t) d\omega(t)$$

es fundamental en el sentido de convergencia en probabilidad. El límite de esta sucesión es precisamente la integral $\int_0^T f(t) d\omega(t)$.

En el caso en que $f \in H_2[0, T]$ y $M \int_0^T f^2(t) dt < \infty$, existe una sucesión de funciones escalonadas $f_n(t) \in H_2[0, T]$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0.$$

De la propiedad 3) se desprende la igualdad

$$M \left[\int_0^T f_n(t) d\omega(t) - \int_0^T f_r(t) d\omega(t) \right]^2 = M \int_0^T |f_n(t) - f_r(t)|^2 dt,$$

la cual significa que la sucesión de magnitudes aleatorias $\int_0^T f_n(t) d\omega(t)$ es fundamental en el sentido de convergencia en media cuadrática y, consecuentemente, en este caso

$$\int_0^T f(t) d\omega(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f_n(t) d\omega(t).$$

Si el proceso $f \in H_2[0, T]$ es continuo con la probabilidad 1, entonces

$$\int_0^T f(t) d\omega(t) = \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{h=0}^{n-1} f(t_h) [\omega(t_{h+1}) - \omega(t_h)],$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

19.2.2. Estimaciones para los momentos. Para estimar los momentos de las integrales estocásticas resulta útil el siguiente teorema.
Teorema 2. Si $f \in H_2 [0, T]$ y para cierto $p > 0$

$$M \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{p/2} < \infty,$$

se verifican las desigualdades:

$$M \left| \int_0^T f(t) dw(t) \right|^p \geq A_p M \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{p/2},$$

si $p > 4$, y

$$M \left| \int_0^T f(t) dw(t) \right|^p \leq B_p M \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{p/2},$$

si $p > 0$. Aquí, A_p y B_p son constantes que sólo dependen de p .

Cuando $p = 2$, ambas desigualdades se transforman, evidentemente, en igualdades, con la particularidad de que $A_2 = B_2 = 1$.

He aquí una igualdad más para las integrales estocásticas que fácilmente se deduce de la definición: si $f_1, f_2 \in H_2 [0, T]$ y

$$M \int_0^T f_1^2(t) dt < \infty, M \int_0^T f_2^2(t) dt < \infty, \text{ entonces}$$

$$M \int_0^T f_1(t) dw(t) \int_0^T f_2(t) dw(t) = M \int_0^T f_1(t) f_2(t) dt.$$

19.2.3. Integral estocástica como función del límite superior. Para $f \in H_2 [0, T]$ y $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ hagamos

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dw(t) = \int_0^T \chi_{[t_1, t_2]}(t) f(t) dw(t),$$

donde $\chi_{[t_1, t_2]}(t)$ es el indicador del segmento $[t_1, t_2]$.

Se puede mostrar que si $f \in H_2 [0, T]$ y $M \int_0^T f^2(t) dt < \infty$, entonces

$$M \left\{ \int_{t_1}^{t_2} f(t) dw(t) / \sqrt{\mathfrak{V}_{t_1}} \right\} = 0;$$

$$M \left\{ \left(\int_{t_1}^{t_2} f(t) dw(t) \right)^2 / \mathfrak{V}_{t_1} \right\} = \int_{t_1}^{t_2} M \{ f^2(t) / \mathfrak{V}_{t_1} \} dt,$$

donde $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$.

Examinemos el proceso

$$I_t(f) = \int_0^t f(s) d\omega(s), \quad t \in [0, T],$$

donde $f \in H_2[0, T]$. Con todo t este proceso está definido sólo para casi todos los ω , es decir, con la exactitud salvo la equivalencia estocástica. Consideraremos, que entre todos los procesos estocásticos equivalentes, a título de $I_t(f)$ está elegido el proceso separable. En este caso, podemos demostrar que el proceso $\{I_t(f), t \in [0, T]\}$ es continuo con la probabilidad 1 y tiene lugar la desigualdad

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s) d\omega(s) \right| > C \right\} \leq \frac{N}{C^2} + P \left\{ \int_0^T f^2(s) ds > N \right\}.$$

Si $f \in H_2[0, T]$ y $M \int_0^T f^2(t) dt < \infty$, entonces el proceso $(I_t(f), \mathfrak{F}_t)$, $t \in [0, T]$, representa en sí una martingala continua con cuadrado integrable, cuya característica se determina por la fórmula

$$\langle I(f) \rangle_t = \int_0^t f^2(s) ds.$$

En este caso quedan cumplidas las desigualdades:

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s) d\omega(s) \right| > C \right\} \leq \frac{1}{C^2} M \int_0^T f^2(s) ds;$$

$$M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s) d\omega(s) \right|^2 \leq 4M \int_0^T f^2(s) ds.$$

19.2.4. Fórmula de Ito. Supongamos que un proceso $\{\zeta(t), t \in [0, T]\}$ subordinado al flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ puede ser representado para cualesquiera $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ en la forma

$$\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t) d\omega(t),$$

donde $b \in H_2[0, T]$, y el proceso $a(t)$, subordinado al flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$, es tal que

$$P \left\{ \int_0^T |a(t)| dt < \infty \right\} = 1.$$

En este caso suele decirse que el proceso $\zeta(t)$ tiene una diferencial estocástica en $[0, T]$:

$$d\zeta(t) = a(t) dt + b(t) d\omega(t).$$

Es evidente que si $\zeta_1(t)$ y $\zeta_2(t)$ son dos procesos con diferenciales estocásticas, y α_1 y α_2 son constantes arbitrarias, entonces

$$d(\alpha_1 \zeta_1(t) + \alpha_2 \zeta_2(t)) = \alpha_1 d\zeta_1(t) + \alpha_2 d\zeta_2(t),$$

es decir, la operación de derivación es lineal. Demos a conocer ahora la fórmula de derivación de un producto de dos procesos y también la de derivación de una función compuesta.

Teorema 3. Si los procesos $\zeta_1(t)$ y $\zeta_2(t)$ tienen las diferenciales estocásticas

$$d\zeta_1(t) = \alpha_1(t) dt + b_1(t) dw(t);$$

$$d\zeta_2(t) = \alpha_2(t) dt + b_2(t) dw(t),$$

el proceso $\zeta_1(t) \zeta_2(t)$ también tiene diferencial estocástica y

$$d(\zeta_1(t) \zeta_2(t)) = \zeta_1(t) d\zeta_2(t) + \zeta_2(t) d\zeta_1(t) + b_1(t) b_2(t) dt.$$

Teorema 4. Si el proceso $\xi(t)$ tiene la diferencial estocástica

$$d\xi(t) = a(t) dt + b(t) dw(t),$$

y la función continua de valores reales $f(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in R^1$, tiene derivadas continuas $f'_t(t, x)$, $f'_x(t, x)$ y $f''_{xx}(t, x)$. entonces el proceso $f(t, \xi(t))$ también tiene diferencial estocástica y

$$df(t, \xi(t)) = \left[f'_t(t, \xi(t)) + f'_x(t, \xi(t)) a(t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, \xi(t)) b^2(t) \right] dt + f'_x(t, \xi(t)) dw(t).$$

La última fórmula lleva el nombre de **fórmula de Ito**. Supongamos ahora que los procesos $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, ..., $\xi_l(t)$ tienen diferenciales estocásticas

$$d\xi_i(t) = a_i(t) dt + b_i(t) dw(t), \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

y la función continua real $f(t, x_1, \dots, x_l)$, $t \in [0, T]$, $x_1, \dots, x_l \in R^1$, tiene derivadas parciales continuas

$$f'_t, f'_{x_i}, f''_{x_i x_k}, \quad k, i = 1, \dots, l.$$

En este caso, el proceso $f(t, \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_l(t))$ también tiene diferencial estocástica, con la particularidad de que

$$df(t, \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_l(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, \xi_1(t), \dots, \xi_l(t)) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^l f'_{x_i}(t, \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_l(t)) a_i(t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l f''_{x_i x_j}(t, \xi_1(t), \dots, \xi_l(t)) b_i(t) b_j(t) \right] dt + \\ \left. + \sum_{i=1}^l f'_{x_i}(t, \xi_1(t), \dots, \xi_l(t)) b_i(t) dw(t) \right]$$

Esta fórmula también lleva el nombre de Ito.

EJEMPLO. Haciendo $f(x) = x^2$, de la fórmula de Ito obtenemos la correlación

$$\int_{t_1}^{t_2} w(t) dw(t) = \frac{1}{2} (w(t_2))^2 - \frac{1}{2} (w(t_1))^2 - \frac{1}{2} (t_2 - t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2.$$

19.2.5. Identidades de momento. Definamos las funciones $G_n(t, x) = t^{n/2} \text{He}_n(t^{-1/2}x)$, $t \geq 0$, $x \in R^1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, donde $\text{He}_n(z)$ son polinomios de Hermite:

$$\text{He}_n(z) = (-1)^n \exp\left(\frac{z^2}{2}\right) \frac{d^n}{dz^n} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}.$$

Escribamos, como ejemplo, las cinco primeras funciones $G_k(t, x)$:

$$G_0(t, x) = 1, \quad G_1(t, x) = x, \quad G_2(t, x) = x^2 - t,$$

$$G_3(t, x) = x^3 - 3tx, \quad G_4(t, x) = x^4 - 6x^2t + 3t^2.$$

La afirmación que sigue es un corolario de la fórmula de Ito.

Teorema 5. Si $f \in H_2[0, T]$ y para cierto n natural se cumple la condición

$$M \left(\int_0^T f^2(t) dt \right)^{n/2} < \infty,$$

entonces, para cualesquiera α y β reales, el proceso

$$\left\{ G_n \left(\alpha + \int_0^t f^2(s) ds, \beta + \int_0^t f(s) dw(s) \right), \mathfrak{F}_t \right\}, \quad t \in [0, T],$$

es una martingala y, en particular,

$$MG_n \left(\alpha + \int_0^T f^2(s) ds, \beta + \int_0^T f(s) dw(s) \right) = G_n(\alpha, \beta).$$

De este teorema se deduce (cuando $n = 1$) que a condición de que

$$M \left(\int_0^T f^2(t) dt \right)^{1/2} < \infty$$

el proceso

$$\left(\int_0^t f(s) dw(s), \mathfrak{F}_t \right), \quad t \in [0, T]$$

es una martingala (quizás, sin el segundo momento) y, en particular, con esta condición se verifica

$$M \int_0^T f(s) dw(s) = 0.$$

Como corolario de esta afirmación se obtiene, sin dificultad alguna, la siguiente propiedad del proceso de Wiener.

Si τ es un momento de Márkov respecto del proceso de Wiener $\{w(t), t \geq 0\}$, entonces, a condición de que $M\tau^{1/2} < \infty$, se verifica la igualdad $Mw(\tau) = 0$. Que esto no es siempre así, nos lo muestra el ejemplo de un momento de Márkov $\tau_1 = \inf\{t : w(t) \geq 1\}$, para el cual $w(\tau_1) = 1$ y, por ello, $Mw(\tau_1) = 1$. Observemos que $M\tau_1^{1/2} = \infty$, aunque para todo $\varepsilon \in (0, 1/2)$ se tiene $M\tau_1^{1/2-\varepsilon} < \infty$.

19.2.6. Integrales estocásticas extendidas al proceso de Wiener multidimensional. Sean dados en cierto espacio probabilístico un flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ y m procesos de Wiener unidimensionales e independientes entre sí $w^1(t), w^2(t), \dots, w^m(t)$ tales que $w^k(0) = 0$ y todos ellos están subordinados al flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$, mientras que los incrementos $w^k(t+s) - w^k(t)$, $s \geq 0, k = 1, \dots, m$, no dependen de la σ -álgebra \mathfrak{F}_t . Designemos mediante $w(t)$ el proceso de Wiener m -dimensional $(w^1(t), w^2(t), \dots, w^m(t))$.

Supongamos ahora que $f(t), t \in [0, T]$, es un proceso aleatorio de valores matriciales. Los elementos de la matriz $f(t)$ se designarán $f^{ij}(t), i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, m$. Supongamos que para cualesquiera i y j $f^{ij} \in H_2[0, T]$. Esto significa que los procesos $f^{ij}(t)$ están subordinados al flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ y

$$P\left\{\int_0^T (f^{ij}(t))^2 dt < \infty\right\} = 1, \quad i = 1, \dots, l; \quad j = 1, \dots, m.$$

Dejamos intacta la designación $H_2[0, T]$ para la totalidad de matrices $f(t)$, cuyos elementos satisfacen las condiciones mencionadas. Si $f(t)$ es una matriz de orden $l \times m$, entonces con $f^*(t)$ se designa la matriz transpuesta. Esta es una matriz de orden $m \times l$, en la que el lugar perteneciente a la i -ésima línea y j -ésima columna lo ocupa el elemento $f^{ij}(t)$. Para la traza de la matriz $f(t) \times f^*(t)$ tenemos la siguiente fórmula

$$\text{Sp}(f(t)f^*(t)) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (f^{ij}(t))^2.$$

En particular, si $l = 1$ entonces $f(t)$ es un vector de coordenadas $(f^1(t), \dots, f^m(t))$. En este caso

$$\text{Sp}(f(t)f^*(t)) = \sum_{j=1}^m (f^j(t))^2 = |f(t)|^2.$$

Definamos ahora, para $f \in H_2[0, T]$, la integral estocástica

$$\int_0^T f(t) dw(t)$$

como un vector aleatorio de coordenadas

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T f^{ij}(t) dw^j(t), \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Si $l = 1$, esto será una magnitud aleatoria escalar

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T f^j(t) d\omega^j(t),$$

la que designaremos también

$$\int_0^T (f(t), d\omega(t)).$$

Aquí, $f^j(t)$, $j = 1, 2, \dots, m$ son las coordenadas del vector $f(t)$.
Indiquemos las siguientes propiedades de las integrales estocásticas extendidas a un proceso de Wiener multidimensional.

1) La integral estocástica representa en sí una función lineal del proceso $f(t)$.

2) Si $f \in H_2[0, T]$ y $M \int_0^T \text{Sp}(f(t) f^*(t)) dt < \infty$, entonces

$$M \int_0^T f(t) d\omega(t) = 0, \quad M \left| \int_0^T f(t) d\omega(t) \right|^2 = M \int_0^T \text{Sp}(f(t) f^*(t)) dt.$$

3) Si $f(t)$ y $g(t)$ son dos procesos matriciales de orden $l \times m$ del espacio $H_2[0, T]$, para los cuales

$$M \int_0^T \text{Sp}(f(t) g^*(t)) dt < \infty,$$

entonces

$$M \left(\int_0^T f(t) d\omega(t), \int_0^T g(t) d\omega(t) \right) = M \int_0^T \text{Sp}(f(t) g^*(t)) dt.$$

En particular, cuando $l = 1$,

$$M \left[\int_0^T (f(t), d\omega(t)) \int_0^T (g(t), d\omega(t)) \right] = M \int_0^T (f(t), g(t)) dt,$$

siempre que la magnitud en el segundo miembro de esta igualdad es finita. Cuando $f = g$, de aquí se obtiene la igualdad

$$M \left[\int_0^T (f(t), d\omega(t)) \right]^2 = M \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

4) La modificación separable del proceso

$$\int_0^t f(s) d\omega(s), \quad t \in [0, T],$$

representa en sí un proceso l -dimensional continuo, cualquiera que sea $f \in H_2[0, T]$. Si θ es un elemento arbitrario (no aleatorio) del espacio R^l , entonces, al hacer

$$\xi_\theta(t) = \left(\theta, \int_0^t f(s) d\omega(s) \right),$$

tendremos la desigualdad

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_\theta(t)| > C \right\} \leq \frac{N}{C^2} + P \left\{ \int_0^T (f(t) \cdot f^*(t) \theta, \theta) dt > N \right\},$$

donde N y C son constantes positivas arbitrarias.

Si $l = 1$, de aquí obtenemos

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (f(s), d\omega(s)) \right| > C \right\} \leq \frac{N^2}{C} + P \left\{ \int_0^T |f(t)|^2 dt > N \right\}.$$

5) Si $f \in H_2[0, T]$ y $M \int_0^T \text{Sp}(f(t) f^*(t)) dt < \infty$, el proceso

$$\left(\int_0^t f(s) d\omega(s), \mathfrak{Y}_t \right), \quad t \in [0, T],$$

será una martingala continua l -dimensional con cuadrado integrable. Su característica, que representa en sí un proceso de valores matriciales de orden $l \times l$, se determina por la integral

$$\int_0^t f(s) f^*(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Además, para $\theta \in R^l$ arbitrario se cumplen las desigualdades

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_\theta(t)| > C \right\} \leq \frac{1}{C^2} M \int_0^T (f(t) f^*(t) \theta, \theta) dt;$$

$$M \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_\theta(t)|^2 \leq 4M \int_0^T (f(t) f^*(t) \theta, \theta) dt,$$

donde $\xi_\theta(t)$ está definido en la propiedad 4).

En particular, cuando $l = 1$, la característica de la martingala

$$\int_0^t (f(s), d\omega(s)), \quad t \in [0, T],$$

es igual a

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds, \quad t \in [0, T].$$

6) Si $f \in H_2[0, T]$ y para cierto $p > 0$

$$M \left[\int_0^T \text{Sp} (f(t) f^*(t)) dt \right]^{p/2} < \infty,$$

entonces se verifican las desigualdades:

$$M \left| \int_0^T f(t) d\omega(t) \right|^p \geq A_p M \left(\int_0^T \text{Sp} (f(t) f^*(t)) dt \right)^{p/2},$$

si $p > 1$, y

$$M \left| \int_0^T f(t) d\omega(t) \right|^p \leq B_p M \left(\int_0^T \text{Sp} (f(t) f^*(t)) dt \right)^{p/2},$$

si $p > 0$. Aquí, A_p y B_p son constantes que sólo dependen de p .

7) Supongamos que para cierto proceso l -dimensional $\zeta(t)$ con cualesquiera $0 \leq t_1 < t_2 = T$ tiene lugar la representación

$$\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} b(s) d\omega(s),$$

donde $b(t)$ es un proceso de valores matriciales de orden $l \times m$ del espacio $H_2[0, T]$, en tanto que el proceso vectorial $a(t)$ es tal que todas sus coordenadas están subordinadas al flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ y son integrables con la probabilidad 1 en el segmento $[0, T]$. En este caso diremos que el proceso $\zeta(t)$ tiene diferencial estocástica

$$d\zeta(t) = a(t) dt + b(t) d\omega(t).$$

Si el proceso $\zeta(t)$ tiene la diferencial estocástica citada y la función real continua $f(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in R^l$, tiene derivadas parciales continuas

$$f'_i(t, x), \quad f''_{x^i}(t, x), \quad f''_{x^i x^j}(t, x), \quad i, j = 1, \dots, l,$$

entonces el proceso $f(t, \zeta(t))$, $t \in [0, T]$ también tiene diferencial estocástica y

$$df(t, \zeta(t)) = \left[f'_t(t, \zeta(t)) + (a(t), f'_x(t, \zeta(t))) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \text{Sp}(b(t) b^*(t) f''_{xx}(t, \zeta(t))) \right] dt + (f'_x(t, \zeta(t)), b(t) dw(t)),$$

donde f'_x es un vector de coordenadas $f'_{x^1}, f'_{x^2}, \dots, f'_{x^m}$, mientras que f''_{xx} es una matriz con elementos $f''_{x^i x^j}$, $i, j = 1, \dots, m$.

La fórmula citada también se llama fórmula de Ito. En forma desarrollada se escribe así:

$$df(t, \zeta(t)) = \left[f'_t(t, \zeta(t)) + \sum_{i=1}^l a^i(t) f'_{x^i}(t, \zeta(t)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{h,i=1}^l \sum_{j=1}^m b^{ij}(t) b^{hj}(t) f''_{x^i x^h}(t, \zeta(t)) \right] dt + \\ + \sum_{h=1}^l \sum_{j=1}^m f'_{x^h}(t, \zeta(t)) b^{hj}(t) dw^j(t).$$

19.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas para los procesos continuos

19.3.1. Teorema de existencia y unicidad de la solución. Sean dados:

1) un espacio probabilístico $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ con el flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$;

2) un proceso de Wiener m -dimensional $w(t) = \{w^1(t), \dots, w^m(t)\}$ concordado con el flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ (lo que significa que $w(0) = 0$ para todo $t \in [0, T]$, $w(t)$ es \mathfrak{F}_t -medible y los incrementos $w(t+s) - w(t)$ no dependen de la σ -álgebra \mathfrak{F}_t , cuando $s \geq 0$);

3) un vector aleatorio \mathfrak{F}_0 -medible ξ_0 (observemos que en virtud de 2) la σ -álgebra \mathfrak{F}_0 y, por lo tanto, el vector ξ_0 no dependen del proceso $\{w(t), t \in [0, T]\}$);

4) las funciones $a(t, x)$ y $\sigma(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in R^m$, que toman valores en R^m y $L(R^m)$, respectivamente, donde $L(R^m)$ es una totalidad de todos los operadores lineales que actúan desde R^m en R^m ; se supone que $a(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ son medibles en totalidad de las variables.

Se examinará la ecuación diferencial estocástica

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + \sigma(t, \xi(t)) dw(t) \quad (3.1)$$

con la condición inicial

$$\xi(0) = \xi_0.$$

Esta ecuación puede ser escrita en la forma integral

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s)) d\omega(s), \quad t \in [0, T].$$

Aquí, $\xi(t)$ es el proceso buscado. Demos a conocer la definición exacta de lo que se entenderá por solución de la ecuación (3.1).

Definición 1. Se llama solución de la ecuación (3.1) con la condición inicial $\xi(0) = \xi_0$ un proceso m -dimensional $\{\xi(t), t \in [0, T]\}$ tal que:

- a) para todo $t \in [0, T]$ $\xi(t)$ es \mathfrak{F}_t -medible;
- b) todas las coordenadas del proceso vectorial $\{a(t, \xi(t)), t \in [0, T]\}$ son absolutamente integrable en el segmento $[0, T]$ con la probabilidad 1;
- c) todos los elementos del proceso matricial $\{\sigma(t, \xi(t)), t \in [0, T]\}$ son de cuadrado integrable en el segmento $[0, T]$ con la probabilidad 1;
- d) el proceso $\xi(t)$ tiene diferencial estocástica, con la particularidad de que $d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + \sigma(t, \xi(t)) d\omega(t)$ y $\xi(0) = \xi_0$.

Ha de ser notado que en el caso en que $\sigma(t, x) = 0$, la ecuación (3.1) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria con condición inicial aleatoria. Tal ecuación se puede resolver para todo ω mediante los medios corrientes.

Definición 2. Se dice que la ecuación (3.1) tiene una sola solución, si para cualesquiera dos de sus soluciones $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ queda cumplida la condición

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| > 0\right\} = 0.$$

Abajo viene el teorema de existencia y unicidad de la solución de la ecuación (3.1).

Teorema 1. Supongamos que los coeficientes de la ecuación (3.1) satisfacen las condiciones:

A) para cualesquiera $t \in [0, T]$, $x \in R^m$, se cumple la desigualdad

$$|a(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2),$$

donde K es una constante, $|\sigma(t, x)|^2 = \sum_{j, h=1}^m (\sigma^{jh}(t, x))^2$,

$\sigma^{jh}(t, x)$ son los elementos de la matriz $\sigma(t, x)$;

B) para todo $R > 0$ existe una constante C_R tal que con $|x| \leq R$, $|y| \leq R$ y $t \in [0, T]$ se cumple la desigualdad

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq C_R |x - y|^2.$$

En este caso existe una única solución continua $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, de la ecuación (3.1).

Observación 1. Sean dadas las funciones $a_i(t, x)$, $\sigma_i(t, x)$, $i = 1, 2$, que satisfacen las condiciones del teorema 1 y son tales que para cierto $N > 0$, siendo $|x| \leq N$ y $t \in [0, T]$, se verifican las igualdades $a_1(t, x) = a_2(t, x)$ y $\sigma_1(t, x) = \sigma_2(t, x)$. Designemos mediante $\xi_i(t)$, $i = 1, 2$, la solución de la ecuación

$$d\xi_i(t) = a_i(t, \xi_i(t)) dt + \sigma_i(t, \xi_i(t)) d\omega(t)$$

con una misma condición inicial $\xi_i(0) = \xi_0$, $i = 1, 2$, Hagamos a continuación

$$\tau_i = \inf \{t : |\xi_i(t)| \geq N\}, \quad i = 1, 2,$$

con la particularidad de que, si el conjunto dentro de las llaves es vacío, suponemos $\tau_i = T$. En este caso se puede mostrar que $P(\tau_1 = \tau_2) = 1$ y

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \tau_i} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| > 0\right\} = 0.$$

Esta propiedad de las soluciones de la ecuación (3.1) caracteriza la llamada dependencia local en que se encuentran la solución y los coeficientes de la ecuación.

Observación 2. En las condiciones del teorema 1 la solución $\xi(t)$ de la ecuación (3.1) es medible para todo $t \in [0, T]$ respecto de la σ -álgebra mínima de los sucesos, engendrada por el vector aleatorio ξ_0 y por los valores del proceso $w(s)$ cuando $s \leq t$. Esto se deduce de que la solución de la ecuación (3.1) puede ser obtenida por el método de las aproximaciones sucesivas.

En lo sucesivo veremos que existen soluciones de la ecuación (3.1) que no poseen esta propiedad.

Observación 3. Si están cumplidas las condiciones del teorema 1 y para cierto p entero, $M|\xi_0|^{2p} < \infty$, entonces la solución de la ecuación (3.1) con la condición inicial ξ_0 satisface las condiciones:

$$M|\xi(t)|^{2p} \leq K_p(1 + M|\xi_0|^{2p}), \quad t \in [0, T];$$

$$M|\xi(t) - \xi_0|^{2p} \leq K'_p(1 + M|\xi_0|^{2p})t^p, \quad t \in [0, T],$$

donde K_p, K'_p son constantes que sólo dependen de p, K y T .

19.3.2. Solución como un proceso de difusión. En las condiciones del teorema 1 la solución $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, de la ecuación (3.1) posee la propiedad de Márkov respecto del flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$. Esto significa que para cualesquiera $0 \leq s \leq t \leq T$ y $\Gamma \in \mathfrak{B}$, donde \mathfrak{B} es la σ -álgebra de subconjuntos borelianos del espacio R^m , con la probabilidad 1 se cumple la correlación

$$P\{\xi(t) \in \Gamma / \mathfrak{F}_s\} = P\{\xi(t) \in \Gamma / \xi(s)\}.$$

De este modo, el proceso $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ es una función aleatoria de Márkov con la distribución inicial

$$\mu(\Gamma) = P\{\xi_0 \in \Gamma\}, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

La probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$ de la función aleatoria de Márkov $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, se determina por la fórmula

$$P(s, x, t, \Gamma) = P\{\xi_{sx}(t) \in \Gamma\}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad x \in R^m, \quad \Gamma \in \mathfrak{B},$$

donde $\xi_{sx}(t)$ es la solución de la ecuación

$$\xi_{sx}(t) = x + \int_s^t a(\tau, \xi_{sx}(\tau)) d\tau + \int_s^t \sigma(\tau, \xi_{sx}(\tau)) dw(\tau). \quad (3.2)$$

Aquí, x es un vector no aleatorio de R^m , $t \in [s, T]$.

El teorema que sigue muestra que la solución de la ecuación (3.1) representa en sí, bajo ciertas condiciones, un proceso de difusión.

Teorema 2. *Supongamos que las funciones $a(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ satisfacen las condiciones del teorema 1 y que, además, son continuas en totalidad de las variables. En este caso, el proceso $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, que es la solución de la ecuación (3.1), es un proceso de difusión con el vector de traslado $a(t, x)$ y la matriz de difusión $b(t, x) = \sigma(t, x) [\sigma(t, x)]^*$.*

Así pues, la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas ofrece la oportunidad de construir los procesos de difusión haciendo suposiciones bastante amplias respecto de los coeficientes $a(t, x)$ y $b(t, x)$. Más aún, al exigir la suavidad adicional de las funciones $a(t, x)$ y $\sigma(t, x)$, se puede demostrar la existencia de dos derivadas continuas de la función

$$u(s, x) = Mf(\xi_{sx}(t)), \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x \in R^m,$$

respecto de x y, de este modo, obtener una ecuación inversa de Kolmogórov. Para mayor precisión es válido el

Teorema 3. *Supongamos que las funciones $a(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ satisfacen las condiciones del teorema 1, son continuas y dos veces continuamente derivables respecto de x . Supóngase, además, que para ciertos $p > 0$ y $K > 0$ queda cumplida la desigualdad*

$$\begin{aligned} & \sum_{i, h=1}^m \left| \frac{\partial a^i(t, x)}{\partial x^h} \right| + \sum_{i, j, h=1}^m \left| \frac{\partial^2 a^i(t, x)}{\partial x^j \partial x^h} \right| + \\ & + \sum_{j, i, h=1}^m \left| \frac{\partial \sigma^{ij}(t, x)}{\partial x^h} \right| + \sum_{i, j, h, l=1}^m \left| \frac{\partial^2 \sigma^{ij}(t, x)}{\partial x^h \partial x^l} \right| \leq K(1 + |x|^p). \end{aligned}$$

En este caso, si $f(x)$, $x \in R^m$, es una función de valores reales dos veces continuamente derivable, para la cual

$$|f(x)| + \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \right| + \sum_{i, h=1}^m \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^h} \right| \leq K(1 + |x|^p) \quad (p > 1),$$

entonces la función

$$u(s, x) = Mf(\xi_{sx}(t)), \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x \in R^m,$$

donde $\xi_{sx}(t)$ es la solución de la ecuación (3.2), satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(s, x)}{\partial s} + \sum_{i=1}^m a^i(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x^i} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i, h=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma^{ij}(s, x) \sigma^{hj}(s, x) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^i \partial x^h} = 0 \end{aligned}$$

en el dominio $s \in (0, t)$, $x \in R^m$ y la condición de frontera

$$\lim_{s \uparrow t} u(s, x) = f(x).$$

Como corolario de este teorema interviene el siguiente teorema de existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy para las ecuaciones en derivadas parciales del tipo parabólico.

Teorema 4. Sea dado en el dominio $0 \leq s < T$, $x \in R^m$, un operador diferencial

$$\mathcal{L}u(s, x) = \frac{\partial u}{\partial s}(s, x) + \sum_{i=1}^m a_i(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^m b^{ij}(s, x) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^i \partial x^j}$$

del tipo parabólico (esto significa que para todo $s \in [0, T]$, $x \in R^m$, queda cumplida la desigualdad $\sum_{i,j=1}^m b^{ij}(s, x) \theta^i \theta^j \geq 0$, cualesquiera que sean los números reales $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m$). Si la matriz $b(t, x)$ con elementos $b^{ij}(t, x)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, es tal que $b(t, x) = \sigma(t, x)(\sigma(t, x))^*$, y las funciones $a(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ satisfacen las condiciones del teorema 3, entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(s, x) = 0; \\ \lim_{s \uparrow T} u(s, x) = f(x) \end{cases}$$

tiene una sola solución para cualquier función dos veces continuamente derivable $f(x)$ tal que la propia función y todas sus derivadas parciales hasta el segundo orden inclusive crecen en el infinito no más rápido que cierta potencia de $|x|$. En este caso, la solución $u(s, x)$ del problema de Cauchy citado puede ser escrita en la forma

$$u(s, x) = Mf(\xi_{sx}(T)), \quad 0 \leq s < T, \quad x \in R^m,$$

donde $\xi_{sx}(t)$, $t \in [s, T]$, es la solución de la ecuación (3.2).

El teorema enunciado señala que al estudiar las ecuaciones en derivadas parciales del tipo parabólico puede emplearse con éxito la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas. Una observación especial merece el hecho de que en el teorema 4 no se presupone la regularidad de la matriz $b(t, x)$, lo que constituye una ventaja esencial de los métodos basados en la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas.

19.3.3. Ecuaciones para las funciones características de funcionales. Sea $\{\xi(t), t \in [0, T]\}$ la solución de la ecuación (3.1). Consideremos las funcionales

$$\int_0^T g(s, \xi(s)) ds, \quad \int_0^T h(s, \xi(s)) dw(s),$$

donde $g(s, x)$, $s \in [0, T]$, $x \in R^m$, es una función con valores en R^l , en tanto que $h(s, x)$, $s \in [0, T]$, $x \in R^m$, es una función de valores matriciales de orden $l \times m$. Las distribuciones de las funcionales

mencionadas quedarán determinadas, si hallamos la función

$$u(s, x) = Mf(\xi_{sx}(T)) \exp \left\{ i \left(\lambda, \int_s^T g(\tau, \xi_{sx}(\tau)) d\tau \right) + \right. \\ \left. + i \left(0, \int_s^T h(\tau, \xi_{sx}(\tau)) d\omega(\tau) \right) \right\},$$

donde $0 \leq s < T$, $x \in R^m$, $\lambda, 0 \in R^l$, $\xi_{sx}(t)$ es la solución de la ecuación (3.2), y $f(x)$, $x \in R^m$, cierta función real.

Se puede mostrar que si los coeficientes de la ecuación (3.1) y la función $f(x)$ satisfacen las condiciones del teorema 3, mientras que las funciones $g(t, x)$ y $h(t, y)$ son dos veces continuamente derivables respecto de x , con la particularidad de que para ciertos $p > 0$ y $K > 0$ se tiene

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l \left| \frac{\partial g^k(t, x)}{\partial x^j} \right| + \sum_{h, j=1}^m \sum_{r=1}^l \left| \frac{\partial^2 g^r(t, x)}{\partial x^h \partial x^j} \right| + \\ + \sum_{r, h, j=1}^m \sum_{i=1}^l \left| \frac{\partial^2 h^{ir}(t, x)}{\partial x^h \partial x^j} \right| + \sum_{r, h=1}^m \sum_{i=1}^l \left| \frac{\partial h^{ir}(t, x)}{\partial x^h} \right| \leq K(1 + |x|^p),$$

entonces, la función $u(s, x)$ en el dominio $0 \leq s < T$, $x \in R^m$, satisface la ecuación

$$\frac{\partial u(s, x)}{\partial s} + \sum_{k=1}^m a^k(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{j, h=1}^m b^{jh}(s, x) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^j \partial x^h} + \\ + i \sum_{j=1}^m \frac{\partial u(s, x)}{\partial x^j} \sum_{h=1}^l d^{jh}(s, x) \theta^h + \\ + u(s, x) \left[i \sum_{h=1}^l \lambda^h g^h(s, x) - \frac{1}{2} \sum_{j, h}^l \theta^j \theta^h c^{jh}(s, x) \right] = 0,$$

donde

$$b^{jk}(s, x) = \sum_{r=1}^m \sigma^{jr}(s, x) \sigma^{kr}(s, x), \quad j, k = 1, 2, \dots, m;$$

$$c^{jk}(s, x) = \sum_{r=1}^m h^{jr}(s, x) h^{kr}(s, x), \quad j, k = 1, 2, \dots, l;$$

$$d^{jh}(s, x) = \sum_{r=1}^m \sigma^{jr}(s, x) h^{hr}(s, x), \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad h = 1, 2, \dots, l.$$

A esta ecuación se le puede añadir la condición inicial

$$\lim_{s \uparrow T} u(s, x) = f(x).$$

La ecuación para la función $u(s, x)$ puede ser escrita de forma más breve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} + (a(s, x), u'_x(s, x)) + \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma(s, x) \sigma^*(s, x) u''_{xx}(s, x)) + \\ + (l(s, x) h^*(s, x) \theta, u'_x(s, x)) + u(s, x) \times \\ \times \left[l(g(s, x) \lambda) - \frac{1}{2} |h^*(s, x) \theta|^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

donde u'_x es un vector de coordenadas $\frac{\partial u}{\partial x^k}$, $k=1, 2, \dots, m$, u''_{xx} es una matriz de coordenadas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k}$, $j, k=1, \dots, m$.

19.3.4. Planteamiento del problema desde el punto de vista de las martingalas. La condición de Lipschitz en el teorema 1 es demasiado rigurosa. Muchos problemas llevan a la necesidad de considerar ecuaciones diferenciales estocásticas cuyos coeficientes no satisfacen dicha condición. Con este motivo resulta más cómodo ampliar algo la propia noción de solución de una ecuación diferencial estocástica, a saber, se pueden considerar dados solamente los coeficientes de la ecuación. Se requiere construir un espacio probabilístico y definir en éste un proceso de Wiener $w(t)$ y un proceso $\xi(t)$ de una manera tal que estos dos procesos sean entrelazados por la ecuación (3.1) con los coeficientes dados. Por supuesto, en este caso es necesario que la σ -álgebra mínima generada por los valores del proceso $\xi(s)$ para $s \leq t$ y los incrementos $w(t + \tau) - w(t)$ para $\tau \geq 0$ sean independientes.

Ahora, si $\xi(t)$ es una solución de la ecuación (3.1) con la condición inicial ξ_0 , entonces, evidentemente, el proceso

$$\xi(t) - \xi_0 - \int_0^t a(s, \xi(s)) ds$$

será una martingala continua con cuadrado integrable cuya característica es

$$\int_0^t b(s, \xi(s)) ds,$$

donde $b(s, x) = \sigma(s, x) c^*(s, x)$. Y, viceversa, si el proceso $\xi(t)$ posee estas propiedades, entonces, al ampliar algo (si esto es necesario) el espacio probabilístico, se puede construir el proceso de Wiener $w(t)$ de un modo tal que los procesos $\xi(t)$ y $w(t)$ estén ligados mediante la ecuación (3.1).

Así pues, podemos formular el problema del modo siguiente: para cualesquiera $s \in [0, T]$ y $x \in R^m$ se han dado un vector $a(s, x) \in R^m$ y una matriz simétrica definida de un modo no negativo $b(s, x)$

de orden $m \times m$; se requiere construir en cierto espacio probabilístico un proceso $\xi(t)$ de una manera tal que el proceso

$$\xi(t) - \xi(0) - \int_0^t a(s, \xi(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

sea una martingala continua con cuadrado integrable y característica

$$\int_0^t b(s, \xi(s)) ds.$$

Más aún, puesto que el proceso buscado $\xi(t)$ es continuo, podemos considerar que el espacio probabilístico básico coincide con el espacio de todas las funciones continuas $x(t)$ que están definidas en $[0, T]$ y toman valores en R^m . Convenimos en considerar también que $\xi(t) = x(t)$ y el problema consiste en construir tal medida en el espacio de las funciones continuas que $x(t)$ satisfaga las condiciones mencionadas. Enunciamos el problema en forma más precisa.

Problema. Sean dadas: a) una función medible $a(s, x)$, $s \in [0, T]$, $x \in R^m$, con valores en R^m ; b) una función medible $b(s, x)$, $s \in [0, T]$, $x \in R^m$, de cuyos valores sirven unos operadores simétricos lineales que están definidos de modo no negativo y actúan desde R^m en R^m .

Designemos mediante Ω el espacio de todas las funciones continuas definidas en $[0, T]$ con valores en R^m y sea \mathfrak{F}_t^x la σ -álgebra mínima de subconjuntos de Ω en la que están contenidos todos los conjuntos del tipo $\{x(\tau) \in \Gamma\}$, $\tau \in [s, t]$, donde $0 \leq s \leq t \leq T$, Γ es un subconjunto boreliano del espacio R^m .

Para $s \in [0, T]$ y $x \in R^m$ prefijados se requiere construir en el espacio medible $(\Omega, \mathfrak{F}_t^x)$ una medida probabilística P_{sx} de un modo tal que sea:

- 1) $P_{sx}\{x(s) = x\} = 1$;
- 2) el proceso

$$x(t) - x(s) - \int_s^t a(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in [s, T],$$

es una martingala respecto de $(\mathfrak{F}_t^x, P_{sx})$ con cuadrado integrable cuya característica se determina mediante la fórmula

$$\int_s^t b(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Las condiciones suficientemente amplias de existencia y unicidad de tal medida se dan en el teorema siguiente.

Teorema 5. Si en el problema enunciado arriba las funciones $a(t, x)$ y $b(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in R^m$, satisfacen las condiciones:

A) $b(t, x)$ es continua en totalidad de las variables y para una constante $C > 0$ se cumple la desigualdad

$$|b(t, x)\theta, \theta| \leq C|\theta|^2$$

siendo $t \in [0, T]$, $x, \theta \in R^m$ cualesquiera;

B) para cualesquiera $t \in [0, T]$ y $x \in R^m$ la matriz $b(t, x)$ está positivamente definida, es decir, $(b(t, x)\theta, \theta) > 0$, cualesquiera que sean $\theta \in R^m$ y $\theta \neq 0$;

C) $a(t, x)$ es medible y acotada, entonces, cualesquiera que sean $s \in [0, T]$ y $x \in R^m$, existe una única medida probabilística $P_{sx}^{a, b}$ en el espacio $(\Omega, \mathfrak{F}_T^x)$ que satisface las condiciones 1) y 2). En este caso, el proceso $(x(t), \mathfrak{F}_t^x, P_{sx}^{a, b})$ es de M \acute{a} rkov.

De conformidad con este teorema, el proceso

$$\xi(t) = x(t) - x(s) - \int_s^t a(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in [s, T],$$

representa en sí una martingala con cuadrado integrable respecto del flujo de σ -álgebras \mathfrak{F}_t^x , $t \in [s, T]$, y la medida $P_{sx}^{a, b}$. Si $\eta(t)$, $t \in [s, T]$, es un proceso de valores matriciales (de orden $l \times m$) que está subordinado al flujo de σ -álgebras \mathfrak{F}_t^x , $t \in [s, T]$ y que satisface la condición

$$P_{sx}^{a, b} \left\{ \int_s^T \text{Sp}(\eta(t) b(t, x(t)) \eta^*(t)) dt < \infty \right\} = 1,$$

entonces, por analogía con el método usado para hallar las integrales estocásticas extendidas a un proceso de Wiener, podemos determinar la integral estocástica

$$\int_s^T \eta(t) d\xi(t).$$

Si, además,

$$M_{sx}^{a, b} \int_s^T \text{Sp}(\eta(t) b(t, x(t)) \eta^*(t)) dt < \infty,$$

el proceso separable

$$\int_s^t \eta(\tau) d\xi(\tau), \quad t \in [s, T],$$

será una martingala continua con cuadrado integrable respecto de $(\mathfrak{F}_t^x, P_{sx}^{a, b})$ de característica

$$\int_s^t \eta(\tau) b(\tau, x(\tau)) \eta^*(\tau) d\tau.$$

En particular, al suponer $\eta(t) = b^{-1/2}(t, x(t))$, donde $b^{-1/2}(t, x)$ es una raíz positiva simétrica del operador positivo $b^{-1}(t, x)$, obtendremos que el proceso

$$w(t) = \int_s^t b^{-1/2}(\tau, x(\tau)) d\tilde{w}_0(\tau), \quad t \in [s, T],$$

es un proceso de Wiener respecto de $(\tilde{\mathfrak{F}}_t^0, P_{ax}^{a, b})$, con la particularidad de que

$$\xi(t) = \int_s^t b^{1/2}(\tau, x(\tau)) dw(\tau), \quad t \geq s,$$

donde $b^{1/2}(t, x)$ es la raíz positiva del operador $b(t, x)$.

Así pues, en las condiciones del teorema 5 para cualesquiera $s \in [0, T]$ y $x \in R^m$ existe un proceso m -dimensional $w(t)$, $t \geq s$, prefijado en Ω , tal que el proceso $(w(t), \tilde{\mathfrak{F}}_t^0, P_{ax}^{a, b})$ es de Wiener y $P_{ax}^{a, b}$ -casi por cierto para todo $t \in [s, T]$ se verifica

$$x(t) = x + \int_s^t a(\tau, x(\tau)) d\tau + \int_s^t b^{1/2}(\tau, x(\tau)) dw(\tau).$$

Ahora, designemos mediante $\tilde{\mathfrak{F}}_t^0$ la σ -álgebra mínima de los subconjuntos Ω , que contiene todos los conjuntos del tipo $\{w(\tau) \in \Gamma\}$, donde $\tau \in [s, t]$, Γ es un subconjunto boreliano del espacio R^m . Es evidente que $\tilde{\mathfrak{F}}_t^0 \subset \tilde{\mathfrak{F}}_t^0$. Según se deduce de la observación 2 al teorema 1, si los coeficientes $a(t, x)$ y $b^{1/2}(t, x)$ son suficientemente suaves, entonces $\tilde{\mathfrak{F}}_t^0 \subset \tilde{\mathfrak{F}}_t^0$. Esto significa que en el caso dado la solución de la ecuación diferencial estocástica puede ser construida partiendo sólo del proceso de Wiener $w(t)$ y de los coeficientes de la ecuación. No obstante, en el caso general esto no es así, como lo demuestra el ejemplo que sigue.

EJEMPLO. Sea $m = 1$. Designemos mediante Q una medida de Wiener en el espacio $(\Omega, \tilde{\mathfrak{F}}_T^0)$, de suerte que el proceso $(x(t), \tilde{\mathfrak{F}}_t^0, Q)$ es de Wiener, siendo $x(0) = 0$, Q -casi por cierto. Hagamos

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0; \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Definamos el proceso $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, haciendo

$$\xi(t) = \int_0^t \sigma(x(s)) dx(s).$$

Es fácil ver que el proceso $(\xi(t), \tilde{\mathfrak{F}}_t^0, Q)$ es otra vez de Wiener, de lo cual proviene la correlación

$$x(t) = \int_0^t \sigma(x(s)) d\xi(s)$$

que es justa para todo $t \in [0, T]$ Q-casi por cierto. Quiere decir, que el proceso $x(t)$ es la solución de la ecuación

$$dx(t) = \sigma(x(t)) d\xi(t)$$

con la condición inicial $x(0) = 0$.

Luego, se puede mostrar que

$$\xi(t) = |x(t)| - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \chi_{[0, \varepsilon]}(|x(s)|) ds,$$

donde $\chi_{[0, \varepsilon]}(x)$ es el indicador del intervalo $[0, \varepsilon]$. De esta fórmula se desprende que $\xi(t)$ es medible respecto de la σ -álgebra mínima de subconjuntos Ω generada por los conjuntos del tipo $\{x(\cdot) : |x(s)| \in \Gamma\}$, donde $s \in [0, t]$. Γ es un conjunto boreliano en la semirrecta $[0, \infty)$.

De este modo, la σ -álgebra \mathfrak{F}_t^0 es mucho más rica que la σ -álgebra mínima generada por los valores del proceso $\xi(s)$ para $s \leq t$. Por consiguiente, la solución de la ecuación considerada no puede ser construida partiendo sólo del proceso de Wiener $\xi(t)$. Hemos de notar también que la ecuación en el ejemplo que acabamos de citar no es única: a la par con $x(t)$ el proceso $-x(t)$ es también una solución.

Como conclusión de este punto aduzcamos un teorema que generaliza en cierto grado el teorema 5.

Teorema 6. *Supongamos que la función $b(t, x)$ es la misma que en el teorema 5, mientras que la función $a(t, x)$ satisface, para cierto $p > m + 2$, la condición B')*

$$\int_0^T \int_{R^m} |a(t, x)|^p dt dx < \infty.$$

En este caso, para cualesquiera $s \in [0, T]$ y $x \in R^m$ en el espacio $(\Omega, \mathfrak{F}_T^x)$ existe la medida probabilística $P_{sx}^{a,b}$ que satisface las condiciones 1) y 2) citadas arriba. Con ello, el proceso $(x(t), \mathfrak{F}_t^x, P_{sx}^{a,b})$ es de Márkov.

19.3.5. **Diferenciabilidad de las medidas correspondientes a las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas.** El teorema que muestra que la solución de una ecuación diferencial estocástica, con coeficiente de traslado no nulo, en muchos casos puede ser obtenida de la solución de la correspondiente ecuación con coeficiente de traslado nulo mediante una sustitución absolutamente continua de la medida.

Teorema 7. *En las condiciones del teorema 5 las medidas $P_{sx}^{a,b}$ y $P_{sx}^{0,b}$ son equivalentes, con la particularidad de que*

$$\frac{dP_{sx}^{a,b}}{dP_{sx}^{0,b}} = \exp \left\{ \int_s^T (b^{-1}(t, x(t)) a(t, x(t)), dx(t)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_s^T (b^{-1}(t, x(t)) a(t, x(t)), a(t, x(t)) dt \right\}$$

Observemos que la primera integral en el segundo miembro de la última fórmula representa en sí una integral estocástica por la martingala.

Enunciemos un teorema del cual se deduce, en particular, que una afirmación análoga a la del teorema 7 no siempre tiene lugar.

Teorema 8. Sean dadas las funciones $a(x)$ y $b(x)$ con valores en R^m y $L^+(R^m)$, respectivamente, donde $L^+(R^m)$ es una totalidad de todos los operadores positivos simétricos lineales que actúan en R^m . Supongamos cumplidas las condiciones;

1) existen tales constantes positivas C_1 y C_2 que para cualesquiera $x, \theta \in R^m$

$$C_1 |\theta|^2 \leq (b(x)\theta, \theta) \leq C_2 |\theta|^2;$$

2) para cualesquiera $x, y \in R^m$

$$\|b(x) - b(y)\| \leq K |x - y|^\alpha,$$

donde K y α son unas constantes positivas, $\alpha \leq 1$, $\|\cdot\|$ es la norma del operador y $|\cdot|$, norma del vector;

3) para cierto $p > m$

$$\int_{R^m} |a(x)|^p dx < \infty.$$

En este caso, para todo $x \in R^m$ en el espacio (Ω, \mathfrak{F}) (aquí, Ω es una totalidad de todas las funciones continuas definidas en $[0, \infty)$ con valores en R^m , mientras que \mathfrak{F} es la σ -álgebra mínima de los subconjuntos de Ω que contiene todas las σ -álgebras \mathfrak{F}_T^0 para $T < \infty$) existe una medida probabilística $P_x^{a,b}$ tal que

a) $P_x^{a,b}(x(0) = x) = 1$;

b) el proceso

$$x(t) - x(0) - \int_0^t a(x(s)) ds, \quad t > 0,$$

es una martingala con cuadrado integrable respecto de $(\mathfrak{F}_t^0, P_x^{a,b})$ cuya característica se determina según la fórmula

$$\int_0^t b(x(s)) ds.$$

El proceso $(x(t), \mathfrak{F}_t^0, P_x^{a,b})$ es un proceso homogéneo de Márkov. En el caso en que $m \geq 2$ y $p > m$, y también cuando $m = 1$ y $p \geq 2$, las contracciones de las medidas $P_x^{a,b}$ y $P_x^{0,b}$ en las σ -álgebras \mathfrak{F}_T^0 son equivalentes, siendo $T > 0$ cualquiera. Si, en cambio, $m = 1$ y $1 < p < 2$, entonces, en el caso general, las contracciones de las medidas $P_x^{a,b}$ y $P_x^{0,b}$ en las σ -álgebras \mathfrak{F}_T^0 no son equivalentes, cualquiera que sea $T > 0$.

Observemos, que el caso cuando las contracciones de las medidas $P_x^{a, b}$ y $P_x^{0, b}$ en la σ -álgebra \mathfrak{F}_T^0 son equivalentes, la densidad $\frac{dP_x^{a, b}}{dP_x^{0, b}}$ se determina por la fórmula

$$\frac{dP_x^{a, b}}{dP_x^{0, b}} = \exp \left\{ \int_0^T (b^{-1}(x(s)) a(x(s)), dx(s)) - \frac{1}{2} \int_0^T (b^{-1}(x(t)) a(x(t)), a(x(t))) dt \right\}.$$

19.4. Integrales estocásticas extendidas por las medidas de Poisson

19.4.1. Definición de la integral estocástica extendida por la medida ν . Sea R^l un espacio euclídeo l -dimensional. Designemos mediante \mathfrak{B}_ε , $\varepsilon > 0$, la σ -álgebra de subconjuntos borelianos de R^l contenidos en el conjunto $\{x : x \in R^l, \varepsilon \leq |x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$, y sea \mathfrak{F}_0 la designación de la unión de σ -álgebras \mathfrak{B}_ε según todos los $\varepsilon \in (0, 1]$.

Supongamos, además, que en cierto espacio probabilístico $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ está dado un flujo de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$, $\mathfrak{F}_t \in \mathfrak{F}$. Diremos que en el espacio $[0, T] \times R^l$ está definida una medida de Poisson, si a cada conjunto boreliano $\Delta \in [0, T]$ y cada conjunto $A \subset \mathfrak{F}_0$ se les ha puesto en correspondencia una magnitud aleatoria $\nu(\Delta, A)$, definida en $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, tal que quedan cumplidas las condiciones:

1) para cualesquiera $A \subset \mathfrak{B}_0$ y $t \in [0, T]$ la magnitud $\nu([0, t], A)$ es \mathfrak{F}_t -medible, mientras que la magnitud $\nu((t, t+h], A)$ con todo $h > 0$ no depende de la σ -álgebra \mathfrak{F}_t ;

2) si los conjuntos borelianos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ de $[0, T]$ y los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n de \mathfrak{B}_0 son de tal índole que los conjuntos $\Delta_1 \times A_1, \Delta_2 \times A_2, \dots, \Delta_n \times A_n$ son disjuntos dos a dos, entonces las magnitudes aleatorias $\nu(\Delta_1, A_1), \dots, \nu(\Delta_n, A_n)$ son independientes entre sí.

3) si los conjuntos borelianos $\Delta_k, k = 1, 2, \dots$, de $[0, T]$ y los conjuntos $A_k, k = 1, 2, \dots$, de \mathfrak{B}_ε son para cierto $\varepsilon > 0$ de tal índole que los conjuntos $\Delta_j \times A_k, j, k = 1, 2, \dots$, son disjuntos dos a dos, entonces, con la probabilidad 1,

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{j, k=1}^{\infty} \nu(\Delta_j, A_k);$$

4) la magnitud aleatoria $\nu(\Delta, A)$ tiene distribución de Poisson para la cual

$$M\nu(\Delta, A) = |\Delta| \Pi(A),$$

donde $|\Delta|$ es una medida de Lebesgue del conjunto boreliano $\Delta \in [0, T]$ y $\Pi(A)$, una función numérica en \mathfrak{B}_0 , con la particularidad de que $0 \leq \Pi(A) < \infty$ para $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$.

De la definición se desprende que si $A_n \in \mathfrak{B}_\varepsilon$, $n = 1, 2, \dots$, para cierto $\varepsilon > 0$ y los conjuntos A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\Pi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi(A_n).$$

Así pues, $\Pi(A)$ es una medida en la σ -álgebra de los conjuntos borelianos del espacio R^l . Con ello, para todo $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ se tiene que $\Pi(A) < \infty$, pero, en el caso general,

$$\Pi(\{|x| < \varepsilon\}) = \infty, \quad \Pi(\{|x| > \varepsilon\}) = \infty.$$

Hagamos $\tilde{\nu}(\Delta, A) = \nu(\Delta, A) - |\Delta| \cdot \Pi(A)$ para $\Delta \subset [0, T]$, $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$.

Serán consideradas las integrales estocásticas por la medida $\tilde{\nu}$. Designemos mediante $H_2(\Pi)$ la totalidad de todas las funciones aleatorias $\varphi(t, x) = \varphi(t, x, \omega)$, $t \in [0, T]$, $x \in R^l$, $\omega \in \Omega$, con valores reales, medibles según la totalidad de variables, para cualesquiera $t \in [0, T]$ y $x \in R^l$ fijados, la magnitud aleatoria $\varphi(t, x)$ es \mathfrak{F}_t -medible y

$$P \left\{ \int_0^T \int_{R^l} \varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) < \infty \right\} = 1.$$

Teorema 1. *A toda función aleatoria $\varphi \in H_2(\Pi)$ se le puede poner en correspondencia una magnitud aleatoria $J_T^0(\varphi)$ de modo tal que se cumplan las condiciones:*

a) si $\varphi_1, \varphi_2 \in H_2(\Pi)$ y α_1, α_2 son constantes arbitrarias, entonces

$$J_T^0(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 J_T^0(\varphi_1) + \alpha_2 J_T^0(\varphi_2);$$

b) si $\chi_{\Delta \times A}(t, x)$ es el indicador del conjunto $\Delta \times A$, entonces

$$J_T^0(\chi_{\Delta \times A}) = \tilde{\nu}(\Delta, A);$$

c) si $\varphi \in H_2(\Pi)$ y $\int_0^T \int_{R^l} M\varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) < \infty$,

entonces

$$MJ_T^0(\varphi) = 0, \quad M(J_T^0(\varphi))^2 = \int_0^T \int_{R^l} M\varphi^2(t, x) dt \Pi(dx);$$

d) si $\varphi \in H_2(\Pi)$, entonces para cualesquiera $N > 0$ y $C > 0$

$$P\{|J_T^0(\varphi)| > C\} \leq \frac{N}{C^2} + P\left\{\int_0^T \int_{R^l} \varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) > N\right\}.$$

Definición. Una magnitud aleatoria $J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi)$ se llama integral estocástica de la función φ extendida por la medida de Poisson $\tilde{\nu}$ y se designa

$$J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi) = \int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) \tilde{\nu}(dt, dx).$$

Una función $\varphi \in H_2(\Pi)$ se denomina escalonada, si el segmento $0, T]$ puede ser dividido en intervalos mediante los puntos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, mientras que el espacio R^l resulta representable en forma de una suma de los conjuntos borelianos disjuntos dos a dos A_1, A_2, \dots, A_n de un modo tal que $\varphi(t, x)$ sea constante en los conjuntos del tipo $[t_k, t_{k+1}] \times A_j$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Para la función escalonada φ se verifica, evidentemente,

$$J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n C_{kj} \tilde{\nu}([t_k, t_{k+1}], A_j),$$

donde C_{kj} es un valor de la función φ en el conjunto $[t_k, t_{k+1}] \times A_j$.

Si φ es una función arbitraria de $H_2(\Pi)$ y φ_n , $n = 1, 2, \dots$, una sucesión de las funciones escalonadas de $H_2(\Pi)$ para la cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \int_0^T \int_{R^l} |\varphi_n(t, x) - \varphi(t, x)|^2 dt \Pi(dx) > \varepsilon \right\} = 0$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, entonces de la condición d) se deduce que la sucesión de magnitudes aleatorias $J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi_n)$ converge en probabilidad hacia cierta magnitud aleatoria. Esta magnitud es precisamente la integral $J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi)$. Cuando $\varphi \in H_2(\Pi)$ y

$$\int_0^t \int_{R^l} M \varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) < \infty,$$

puede indicarse tal sucesión de funciones escalonadas $\varphi_n \in H_2(\Pi)$ para la cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{R^l} M |\varphi_n(t, x) - \varphi(t, x)|^2 dt \Pi(dx) = 0$$

y, consiguientemente, en este caso la sucesión de magnitudes aleatorias $J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi_n)$ converge en media cuadrática hacia una magnitud aleatoria que es la integral estocástica $J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi)$.

Luego, si $\varphi \in H_2(\Pi)$, entonces la modificación separable del proceso

$$\int_0^t \int_{R^l} \varphi(s, x) \tilde{\nu}(ds, dx)$$

representa en sí un proceso sin discontinuidades de segunda especie. Con ello,

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_{R^1} \varphi(s, x) \tilde{v}(ds, dx) \right| > C \right\} \leq \frac{N}{C^2} + \\ + P \left\{ \int_0^T \int_{R^1} \varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) > N \right\}.$$

Si, además,

$$\int_0^T \int_{R^1} M\varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) < \infty,$$

entonces, el proceso

$$\int_0^t \int_{R^1} \varphi(s, x) \tilde{v}(ds, dx)$$

es una martingala con cuadrado integrable (sin discontinuidades de segunda especie), cuya característica es

$$\int_0^t \int_{R^1} \varphi^2(s, x) ds \Pi(dx).$$

En este caso,

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_{R^1} \varphi(s, x) \tilde{v}(ds, dx) \right| > C \right\} \leq \\ \leq \frac{1}{C^2} \int_0^T \int_{R^1} M\varphi^2(s, x) ds \Pi(dx);$$

$$M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_{R^1} \varphi(s, x) \tilde{v}(ds, dx) \right|^2 \leq 4 \int_0^T \int_{R^1} M\varphi^2(s, x) ds \Pi(dx).$$

19.4.2. Integrales estocásticas extendidas a la medida ν . Demos la definición de la integral estocástica extendida a la medida de Poisson ν . Introduzcamos en la consideración una clase $H_1(\Pi)$ de funciones aleatorias $\varphi(t, x) = \varphi(t, x, \omega)$, medibles según una totalidad de variables, \mathfrak{F}_t -medibles para todo t y de tal índole que

$$P \left\{ \int_0^T \int_{R^1} |\varphi(t, x)| dt \Pi(dx) < \infty \right\} = 1,$$

Para $\varphi \in H_1(\Pi) \cap H_2(\Pi)$ hagamos

$$\int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) v(dt, dx) = \int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) \tilde{v}(dt, dx) + \int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) dt \Pi(dx).$$

De aquí, con la ayuda de paso al límite, la integral

$$\int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) v(dt, dx)$$

puede ser determinada para todas las funciones $\varphi \in H_1(\Pi)$. Con ello, si

$$\int_0^T \int_{R^l} M\varphi(t, x) dt \Pi(dx) < \infty,$$

entonces

$$M \left| \int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) v(dt, dx) \right| \leq \int_0^T \int_{R^l} M|\varphi(t, x)| dt \Pi(dx).$$

Indiquemos también que la modificación separable del proceso

$$\int_0^t \int_{R^l} \varphi(s, x) v(ds, dx)$$

representa en sí un proceso sin discontinuidades de segunda especie.

19.4.3. *Fórmula generalizada de Ito.* Supongamos que en cierto espacio probabilístico $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ está dado un flujo de σ -álgebras $\mathfrak{F}_t, t \in [0, T], \mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$. Sean $w(t) = (w^1(t), \dots, w^r(t))$ un proceso de Wiener r -dimensional concordado con el flujo $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ y $v(dt, dx)$, una medida de Poisson concordada (en el sentido del p. 19.4.1) con el mismo flujo, prefijada en $[0, T] \times R^l$ y que no depende del proceso de Wiener $w(t)$, $Mv(dt, dx) = dt \Pi(dx)$.

Si cierto proceso m -dimensional $\xi(t), t \in [0, T]$ admite la representación

$$\begin{aligned} \xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dw(s) + \\ + \int_0^t \int_{R^l} c(s, y) \tilde{v}(ds, dy), \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

donde $a(t)$ es un proceso m -dimensional subordinado al flujo \mathfrak{F}_t y $b(t)$, un proceso de valores matriciales de orden $m \times r$, todos los elementos del cual pertenecen al espacio $H_2[0, T]$ (véase el p. 19.2), mientras que $c(t, x) = c(t, x, \omega)$ es un proceso vectorial de coordena-

das $c^k(t, x)$, $k = 1, 2, \dots, m$, perteneciente al espacio $H_2(\Pi)$, entonces diremos que el proceso $\xi(t)$ admite la diferencial estocástica:

$$d\xi(t) = a(t) dt + b(t) d\omega(t) + \int_{R^l} c(t, y) \tilde{v}(dt, dy). \quad (4.1)$$

Es obvio que la operación de derivación estocástica es lineal. Aduzcamos, ahora, la fórmula para diferenciar fórmulas complejas.

Teorema 2. Si un proceso m -dimensional $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, tiene la diferencial estocástica (4.1) y $f(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in R^m$, es tal función real, dos veces continuamente derivable respecto a x y continuamente derivable respecto a t , que, con la probabilidad 1, se verifica

$$\int_0^T \int_{R^l} \left| f(t, \xi(t) + c(t, y)) - f(t, \xi(t)) - \sum_{h=1}^m c^h(t, y) \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x^h} \right| dt \Pi(dy) < \infty,$$

entonces, el proceso $f(t, \xi(t))$, $t \in [0, T]$, también admite una diferencial estocástica y

$$\begin{aligned} df(t, \xi(t)) = & \left[\frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial t} + \sum_{h=1}^m a^h(t) \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x^h} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i, h=1}^m \sum_{j=1}^r b^{ij}(t) b^{hj}(t) \frac{\partial^2 f(t, \xi(t))}{\partial x^i \partial x^h} + \\ & + \int_{R^l} \left\{ f(t, \xi(t) + c(t, y)) - f(t, \xi(t)) - \right. \\ & \left. - \sum_{h=1}^m c^h(t, y) \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x^h} \right\} \Pi(dy) \Big] dt + \\ & + \sum_{h=1}^m \sum_{j=1}^r \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x^h} b^{hj}(t) d\omega^j(t) + \\ & + \int_{R^l} (f(t, \xi(t) + c(t, y)) - f(t, \xi(t))) \tilde{v}(dt, dy). \end{aligned}$$

Esta es la fórmula generalizada de Ito. Como corolario de la fórmula generalizada de Ito aduzcamos una fórmula para derivar el producto de dos procesos.

Supongamos que los procesos (unidimensionales) $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$ admiten las diferenciales estocásticas

$$d\xi_i(t) = a_i(t) dt + b_i(t) dw(t) + \int_{R^l} c_i(t, y) \tilde{v}(dt, dy), \quad i=1, 2.$$

Entonces, $(c_i \in H_2(\Pi) \cap H_4(\Pi))$

$$d(\xi_1(t) \xi_2(t)) = \xi_1(t) d\xi_2(t) + \xi_2(t) d\xi_1(t) + b_1(t) b_2(t) dt + \int_{R^l} c_1(t, y) c_2(t, y) v(dt, dy).$$

19.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas para los procesos con discontinuidades

19.5.1. Teorema de existencia y ecuación de Kolmogórov. Sean:

a) un espacio probabilístico $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ con el flujo de σ -álgebras \mathfrak{F}_t , $t \in [0, T]$, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$;

b) un proceso de Wiener m -dimensional $w(t) = (w^1(t), \dots, w^m(t))$ concordado con el flujo de σ -álgebras \mathfrak{F}_t ;

c) una medida de Poisson $v(dt, dx)$ definida en $[0, T] \times R^m$ para la cual $Mv(dt, dx) = dt \Pi(dx)$ y que no depende del proceso de Wiener $w(t)$ y está concordada con el flujo de σ -álgebras \mathfrak{F}_t ;

d) un vector aleatorio \mathfrak{F} -medible $\xi_0 \in R^m$;

e) unas funciones $a(t, x)$, $\sigma(t, x)$ y $c(t, x, y)$; $t \in [0, T]$, $x, y \in R^m$, que toman los valores en R^m , $L(R^m)$ y R^m , respectivamente, donde $L(R^m)$ es la totalidad de todos los operadores lineales que actúan de R^m en R^m ; se supone que todas estas funciones son medibles en totalidad de las variables.

Examinemos una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + \sigma(t, \xi(t)) dw(t) + \int_{R^m} c(t, \xi(t), y) \tilde{v}(dt, dy) \quad (5.1)$$

con la condición inicial

$$\xi(0) = \xi_0.$$

En la forma integral la ecuación (5.1) puede ser escrita así:

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s)) dw(s) + \int_0^t \int_{R^l} c(s, \xi(s), y) \tilde{v}(ds, dy).$$

Aquí, $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, es el proceso buscado.

Definición. Se denomina solución de la ecuación (5.1) un proceso m -dimensional $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, subordinado al flujo de σ -álgebras \mathfrak{F}_t , $t \in [0, T]$, tal que:

- 1) con la probabilidad 1 todas las coordenadas del proceso vectorial $a(t, \xi(t))$ son absolutamente integrables en $[0, T]$;
 2) todos los elementos del proceso matricial $\sigma(t, \xi(t))$ con la probabilidad 1 son de cuadrado integrable en $[0, T]$;
 3) con la probabilidad 1

$$\int_0^T \int_{R^m} |c(s, \xi(s), y)|^2 ds \Pi(dy) < \infty;$$

4) el proceso $\xi(t)$ tiene la diferencial estocástica (5.1).

Enunciamos el teorema de existencia y unicidad de la solución de la ecuación (5.1).

Teorema 1. Supongamos que los coeficientes de la ecuación y la medida Π satisfacen las condiciones:

A) existe una constante K tal que para cualesquiera $t \in [0, T]$, $x \in R^m$ queda cumplida la desigualdad

$$|a(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 + \int_{R^m} |c(t, x, y)|^2 \Pi(dy) \leq K(1 + |x|^2),$$

donde $|\sigma(t, x)|^2 = \sum_{j, k=1}^m (\sigma^{jk}(t, x))^2$;

B) para todo $R > 0$ existe una constante $C_R > 0$ tal que con $|x| \leq R$, $|y| \leq R$ y $t \in [0, T]$ queda cumplida la desigualdad

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 + \int_{R^m} |c(t, x, z) - c(t, y, z)|^2 \Pi(dz) \leq C_R |x - y|^2.$$

En este caso, existe una única solución continua a la derecha de la ecuación (5.1) que no tiene discontinuidades de segunda especie y que satisface la condición inicial $\xi(0) = \xi_0$.

Señalemos que para $c(t, x, y) \equiv 0$ este teorema se convierte en el teorema 1 del p. 19.3.

Luego, se puede mostrar que en las condiciones del teorema 1 la solución de la ecuación (5.2) posee la propiedad de Márkov, es decir, representa en sí una función aleatoria de Márkov. Su probabilidad de paso $P(s, x, t, \Gamma)$ se determina por la fórmula

$$P(s, x, t, \Gamma) = \mathbf{P}\{\xi_{sx}(t) \in \Gamma\}, \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x \in R^m, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}$$

donde \mathfrak{B} es la σ -álgebra de los conjuntos borelianos en R^m y $\xi_{sx}(t)$, $t \in [s, T]$, la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} \xi_{sx}(t) = x + \int_s^t a(\tau, \xi_{sx}(\tau)) d\tau + \int_s^t \sigma(\tau, \xi_{sx}(\tau)) dw(\tau) + \\ + \int_s^t \int_{R^m} c(\tau, \xi_{sx}(\tau), y) \tilde{v}(d\tau, dy). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Enunciemos, por fin, un teorema que muestra que con ciertas suposiciones adicionales sobre los coeficientes de la ecuación (5.1) la función

$$v(s, x) = Mf(\xi_{sx}(T))$$

satisface cierta ecuación diferencial integral.

Teorema 2. Supongamos cumplidas las condiciones del teorema 1 y también las condiciones a seguir:

1) las funciones $a^i(t, x)$, $\sigma^{ij}(t, x, y)$ y $c^i(t, x, y)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, $t \in [0, T]$ son dos veces continuamente derivables respecto de x ;

2) las derivadas parciales respecto de x de las funciones $a^i(t, x)$ y $\sigma^{ij}(t, x)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$ de primero y segundo órdenes son uniformemente acotadas;

3) existe una constante $L > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^m \int_{R^m} \left[\sum_{h=1}^m \left(\frac{\partial c^i(t, x, y)}{\partial x^h} \right)^2 + \sum_{h=1}^m \left(\frac{\partial c^i(t, x, y)}{\partial x^h} \right)^4 + \sum_{i, j=1}^m \left(\frac{\partial^2 \sigma^{ij}(t, x, y)}{\partial x^i \partial x^j} \right)^2 \right] \Pi(dy) \leq L;$$

4) la función $f(x)$ es dos veces continuamente derivable respecto de x y es acotada junto con sus derivadas parciales de primero y segundo órdenes.

En este caso la función

$$v(s, x) = Mf(\xi_{sx}(T)), \quad 0 \leq s \leq T, \quad x \in R^m,$$

donde $\xi_{sx}(t)$, que es la solución de la ecuación (5.2) en el segmento $[s, T]$, es también la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(s, x)}{\partial s} + \sum_{h=1}^m a^h(s, x) \frac{\partial v(s, x)}{\partial x^h} + \frac{1}{2} \sum_{h, j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma^{hij}(s, x) \sigma^{ijl}(s, x) \times \\ \times \frac{\partial^2 v(s, x)}{\partial x^h \partial x^j} + \int_{R^m} \left[v(s, x + c(s, x, y)) - v(s, x) - \right. \\ \left. - \sum_{h=1}^m c^h(s, x, y) \frac{\partial v(s, x)}{\partial x^h} \right] \Pi(dy) = 0 \end{aligned}$$

en el dominio $s \in [0, T]$, $x \in R^m$, con la condición inicial

$$\lim_{s \uparrow T} v(s, x) = f(x).$$