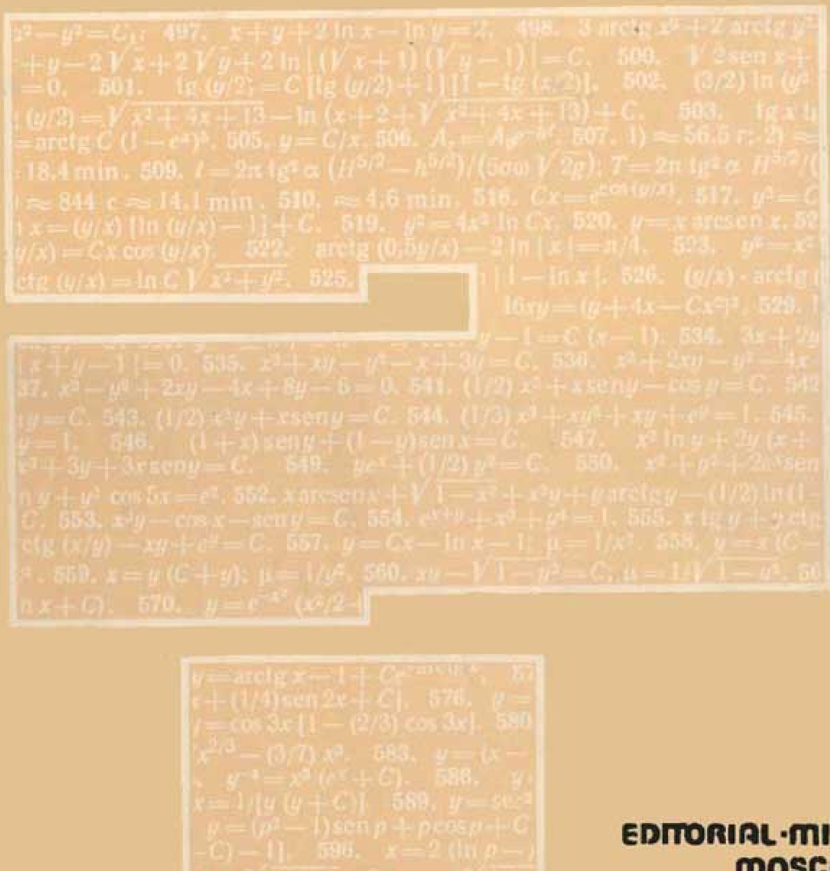
P. E. DANKÓ, A. G. POPOV, T. YA. KOZHÉVNIKOVA

MATEMÁTICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1 PARTE



EDITORIAL · MIR · MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

П. Е. Данко,
А. Г. Попов,
Т. Я. Кожевникова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

I

ЧАСТЬ

Издательство
«Высшая школа»
Москва

P. E. DANKÓ,
A. G. POPOV,
T. YA. KOZHÉVNIKOVA

MATEMATICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1 PARTE

EDITORIAL · MIR ·
MOSCU

Traducido del ruso por
A. I. Samojválov

Impreso en la URSS. 1983

На испанском языке

Índice

Prefacio a la edición española

En este libro hemos procurado desarrollar las nociones y teoremas principales de un curso moderno de Matemáticas Superiores para los centros de enseñanza superior, presentando ejercicios y problemas seleccionados sistemáticamente.

Cada párrafo es precedido por una breve introducción compuesta de las definiciones y los conceptos matemáticos principales del material dado. Para mejor asimilación, las cuestiones teóricas más difíciles van acompañadas de la explicación de sus conceptos (sin demostraciones).

El libro (partes I y II) ha sido editado tres veces en ruso y se utiliza ampliamente en las escuelas superiores técnicas de la URSS.

Este manual es la traducción de la tercera edición modificada por el aumento del número de problemas y el agregado del décimo capítulo a la segunda parte bajo el título de «Fundamentos del cálculo de variaciones».

Quedamos profundamente reconocidos al profesor, doctor en ciencias físico-matemáticas A. V. Efímov por sus observaciones útiles y la reseña favorable a este libro, y agredecemos al candidato a doctor en ciancias físico-matemáticas V. A. Bogachev por su participación en la escritura del capítulo X de la segunda parte.

Los autores

Capítulo I. Geometría analítica del plano

§ 1. Coordenadas rectangulares y polares

1. Coordenadas sobre una recta. División del segmento en una razón dada. Al punto M del eje de coordenadas Ox que tiene la abscisa x se lo suele designar por $M(x)$.

La distancia d comprendida entre puntos $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$ del eje, cualquiera que sea la posición de los puntos sobre el eje, se determina por la fórmula

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{1}$$

Sea dado sobre una recta arbitraria un segmento $[AB]$ (A, es el extremo inicial del segmento; B, su extremo final); entonces cualquier otro punto C de esta recta divide el segmento $[AB]$ en cierta razón λ, donde $\lambda = \pm |AC| : |CB|$. Si los segmentos $[AC]$ y $[CB]$ están orientados en un mismo sentido, entonces a λ se le atribuye el signo «+»; pero si los segmentos $[AC]$ y $[CB]$ están orientados en sentidos opuestos, a λ se le atribuye el signo «—». En otras palabras, λ es positiva si el punto C se halla entre los puntos A y B y es negativa si el punto C se encuentra sobre la recta fuera del segmento $[AB]$.

Si los puntos A y B se hallan sobre el eje Ox, entonces la coordenada x del punto $C(x)$ que divide en la razón λ el segmento comprendido entre los puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$ se determina por la fórmula

$$x = \frac{x_2 + \lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

En particular, si $\lambda = 1$ se obtiene la fórmula para la coordenada del punto medio del segmento:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{3}$$

1. Construir sobre la recta los puntos $A(3)$, $B(-2)$, $C(0)$, $D(\sqrt{2})$, $E(-3,5)$.

2. El segmento $[AB]$ está dividido por cuatro puntos en cinco partes congruentes. Determinar la coordenada del punto de división más próximo a A si $A(-3)$, $B(7)$.

Resolución. Sea $C(x)$ el punto buscado; entonces $\lambda = |AC| : |CB| = 1/4$. Por consiguiente, por la fórmula (2) encontramos

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-3 + (1/4)\,7}{1 + 1/4} = -1, \quad \text{o sea, } C(-1).$$

3. Se conocen los puntos A (1), B (5), que son los extremos del segmento $|AB|$; fuera de este segmento se halla un punto C cuya distancia al punto A es tres veces mayor que con respecto a B. Determinar la coordenada del punto C.

Resolución. Es fácil ver que $\lambda = -|AC|:|BC| = -3$ (recomendamos trazar el dibujo). De este modo,

$$\bar{x} = \frac{1-3\cdot 5}{1-3} = 7, \quad \text{o sea } C(7).$$

4. Determinar la distancia comprendida entre los puntos: 1) M (3) y N (−5); 2) P (−11/2) y Q (−5/2).

5. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento si son conocidos los extremos de éste: 1) A (−6) y B (7); 2) C (−5) y D (1/2).

6. Hallar el punto M simétrico al punto N (−3) con respecto al punto P (2).

7. Un segmento $[AB]$ está dividido por dos puntos en tres partes congruentes. Determinar las coordenadas de los puntos de la división si A (−1), B (5).

8. Se dan los puntos A (−7), B (−3). Fuera de un segmento $[AB]$ se hallan situados los puntos C y D, siendo $|CA| = |BD| = 0{,}5\,|AB|$. Determinar las coordenadas de los puntos C y D.

2. Coordenadas rectangulares sobre un plano. Problemas elementales. Si sobre un plano se da un sistema cartesiano de coordenadas xOy, entonces el punto M de este plano, que tiene las coordenadas x e y, se designa por $M(x;\ y)$.

La distancia d entre los puntos $M_1(x_1;\ y_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2)$ se determina por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1}$$

En particular, la distancia d entre el punto $M(x;\ y)$ y el origen de las coordenadas se determina por la fórmula

$$d = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Las coordenadas del punto $C(x;\ y)$ que divide en una razón dada λ (véase el punto 1) el segmento entre los puntos $A(x_1;\ y_1)$ y $B(x_2;\ y_2)$ se determinan por las fórmulas

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

En particular, si $\lambda = 1$, se obtienen las fórmulas para las coordenadas del punto medio del segmento:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}. \tag{4}$$

El área del triángulo que tiene por vértices los puntos $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$, se determina por la fórmula

$$S = \frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)| = \\ = \frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|. \tag{5}$$

La fórmula para el área del triángulo se puede escribir de la forma

$$S = \frac{1}{2}|\Delta|. \tag{6}$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

(la noción de determinante de tercer orden se da en el § 5 de este capítulo).

9. Construir sobre un plano de coordenadas los puntos A (4; 3), B (—2; 5), C (5; —2), D (—4; —3), E (—6; 0), F (0; 4).

10. Determinar la distancia entre los puntos A (3; 8) y B (—5; 14).

Resolución. Aplicando la fórmula (1) obtenemos

$$d = \sqrt{(-5-3)^2+(14-8)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

11. Mostrar que el triángulo que tiene por vértices los puntos A (—3; —3), B (—1; 3), C (11; —1) es rectangular.

Resolución. Hallamos las longitudes de los lados del triángulo:

$$|AB| = \sqrt{(-1+3)^2+(3+3)^2} = \sqrt{40},$$

$$|BC| = \sqrt{(11+1)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{160},$$

$$|AC| = \sqrt{(11+3)^2+(-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Como $|AB|^2 = 40$, $|BC|^2 = 160$, $|AC|^2 = 200$, entonces $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$. Ahora bien, la suma de los cuadrados de dos lados del triángulo es igual al cuadrado del tercero. De aquí se deduce que el triángulo ABC es rectángulo y el lado AC es su hipotenusa.

12. Son conocidos los puntos A (—2; 5), B (4; 17), o sea, los extremos del segmento $[AB]$. En este segmento se halla un punto C, cuya distancia a A es dos veces mayor que a B. Determinar las coordenadas del punto C.

Resolución. Como $|AC| = 2|CB|$, entonces $\lambda = |AC| : |CB| = 2$. Aquí $x_1 = -2$, $y_1 = 5$, $x_2 = 4$, $y_2 = 17$. Por lo tanto,

$$\bar{x} = \frac{-2+2\cdot 4}{1+2} = 2, \quad \bar{y} = \frac{5+2\cdot 17}{1+2} = 13, \quad \text{o sea } C\ (2;\ 13).$$

13. El punto C (2; 3) sirve de punto medio del segmento $[AB]$. Determinar las coordenadas del punto A si B (7; 5).

Resolución. Aquí $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 3$, $x_2 = 7$, $y_2 = 5$, de donde $2 = (x_1 + 7)/2$, $3 = (y_1 + 5)/2$. Por consiguiente, $x_1 = -3$; $y_1 = 1$, es decir, A (—3; 1).

14. Se dan los vértices del triángulo ABC: A $(x_1;\ y_1)$, B $(x_2;\ y_2)$, C $(x_3;\ y_3)$. Determinar las coordenadas del punto de intersección de las medianas del triángulo.

Resolución. Hallamos las coordenadas del punto D, o sea, del punto medio del segmento $[AB]$; tenemos

$$x_D = (x_1 + x_2)/2, \quad y_D = (y_1 + y_2)/2.$$

El punto M, en que se intersecan las medianas, divide el segmento $[CD]$ en la razón 2 : 1 contando a partir del punto C. Por lo tanto, las coordenadas del punto M se determinan por las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{x_3 + 2x_D}{1+2}, \quad \bar{y} = \frac{y_3 + 2y_D}{1+2},$$

o, sea

$$\bar{x}=\frac{x_3+2(x_1+x_2)/2}{3}, \quad \bar{y}=\frac{y_3+2(y_1+y_2)/2}{3}.$$

Finalmente obtenemos

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

15. *Determinar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos* $A(-2;\ -4)$, $B(2;\ 8)$ y $C(10;\ 2)$.

Resolución. Usando la fórmula (5), obtenemos

$$S=\frac{1}{2}\cdot|(2+2)(2+4)-(10+2)(8+4)|=\frac{1}{2}|24-144|=$$
$$=60 \text{ (unidades cuadradas).}$$

16. Determinar la distancia entre los puntos: 1) $A(2;\ 3)$ y $B(-10;\ -2)$; 2) $C(\sqrt{2};\ -\sqrt{7})$ y $D(2\sqrt{2};\ 0)$.

17. Mostrar que el triángulo que tiene por vértices los puntos $A(4;\ 3)$, $B(7;\ 6)$ y $C(2;\ 11)$, es rectángulo.

18. Mostrar que el triángulo que tiene por vértices los puntos $A(2;\ -1)$, $B(4;\ 2)$ y $C(5;\ 1)$, es isósceles.

19. Se dan los vértices del triángulo: $A(-1;\ -1)$, $B(0;\ -6)$ y $C(-10;\ -2)$. Hallar la longitud de la mediana trazada por el vértice A.

20. Se dan los extremos del segmento $[AB]$: $A(-3;\ 7)$ y $B(5,\ 11)$. Este segmento está dividido por tres puntos en cuatro partes congruentes. Determinar las coordenadas de los puntos de división.

21. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1;\ 5)$, $B(2;\ 7)$, $C(4;\ 11)$.

22. Se dan tres vértices sucesivos de un paralelogramo: $A(11;\ 4)$, $B(-1;\ -1)$, $C(5;\ 7)$. Determinar las coordenadas del cuarto vértice.

23. Se dan dos vértices del triángulo $A(3;\ 8)$ y $B(10;\ 2)$ y el punto de intersección de las medianas $M(1;\ 1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice del triángulo.

24. Se dan los vértices del triángulo: $A(7;\ 2)$, $B(1;\ 9)$ y $C(-8;\ -11)$. Hallar las distancias del punto de intersección de las medianas a los vértices del triángulo.

25. Los puntos $L(0;\ 0)$, $M(3;\ 0)$ *y* $N(0;\ 4)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo. Calcular el área del triángulo.

3. Coodenadas polares. En el sistema polar de coordenadas la posición del punto M sobre un plano se determina por su distancia $|OM|=\rho$ al polo O (ρ es el *radio vector polar* del punto) y por el ángulo θ que el segmento $[OM]$ forma con el eje polar Ox (θ es el *ángulo polar* del punto). El ángulo θ se considera positivo si se lee a partir del eje polar en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Si un punto M tiene las coordenadas polares $\rho>0$ y $\theta>0$, donde $0\leqslant\theta<2\pi$, entonces a él le corresponde también un conjunto innumerable de pares de coordenadas polares $(\rho;\ \theta+2k\pi)$ y $[-\rho;\ \theta+(2k+1)\pi]$ donde $k\in\mathbf{Z}$.

Si el origen del sistema cartesiano de coordenadas rectangulares se hace coincidir con el polo y el eje Ox con el eje polar, entonces las coordenadas rectangulares x e y del punto M y sus coordenadas polares ρ y θ están relacionadas por las fórmulas siguientes:

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho \operatorname{sen}\theta; \tag{1}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta=y/x. \tag{2}$$

26. Construir los puntos definidos por las coordenadas polares: $A\ (4;\ \pi/4)$, $B\ (2;\ 4\pi/3)$, $C\ (3;\ -\pi/6)$, $D\ (-3;\ \pi/3)$, $E\ (0;\ \alpha)$, $F\ (-1;\ -3\pi/4)$.

27. Hallar las coordenadas polares del punto $M\ (1;\ -\sqrt{3})$ si el polo coincide con el origen de las coordenadas y el eje polar, con el sentido positivo del eje de las abscisas.

Resolución. En virtud de las igualdades (2) hallamos

$$\rho=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2; \quad \operatorname{tg}\theta=-\sqrt{3}.$$

Es evidente que el punto M se halla en el IV cuadrante y, por lo tanto, $\theta=5\pi/3$. De este modo, $M\ (2;\ 5\pi/3)$.

28. Hallar las coordenadas rectangulares del punto $A\ (2\sqrt{2}; 3\pi/4)$ si el polo coincide con el origen de coordenadas y el eje polar, con el eje de las abscisas.

Resolución. Aplicando las fórmulas (1), tenemos

$$x=2\sqrt{2}\cos(3\pi/4)=-2, \quad y=2\sqrt{2}\operatorname{sen}(3\pi/4)=2.$$

De suerte que $A\ (-2;\ 2)$.

29. Hallar las coordenadas polares de los puntos: $A\,(2\sqrt{3};\ 2)$, $B\,(0;\ -3)$, $C\,(-4;4)$, $D\,(\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$, $E\,(-\sqrt{2};\ -\sqrt{6})$, $F\,(-7;0)$.

30. Hallar las coordenadas rectangulares de los puntos: $A\ (10;\ \pi/2)$, $B\ (2;\ 5\pi/4)$, $C\ (0;\ \pi/10)$, $D\ (1;\ -\pi/4)$, $E\ (-1;\ \pi/4)$, $F\ (-1;\ -\pi/4)$.

31. Determinar la distancia entre los puntos $M_1\ (\rho_1;\ \theta_1)$ y $M_2\ (\rho_2;\ \theta_2)$.

Indicación: aplicar al triángulo OM_1M_2 el teorema del coseno.

32. Determinar la distancia entre los puntos $M\ (3;\ \pi/4)$ y $N\ (4;\ 3\pi/4)$.

33. Hallar las coordenadas polares del punto simétrico al punto $M\ (\rho;\ \theta)$ con respecto al eje polar.

34. Hallar las coordenadas polares del punto simétrico al punto $M\ (\rho;\ \theta)$ con respecto al polo.

35. Hallar las coordenadas polares de los puntos simétricos a los puntos $(3;\ \pi/6)$, $(5;\ 2\pi/3)$ y $(2;\ -\pi/6)$: 1) con respecto al polo; 2) con respecto al eje polar.

36. Hallar las coordenadas polares del punto simétrico al punto $M\ (\rho;\ \theta)$ con respecto a la recta que pasa por el polo perpendicularmente al eje polar.

4. Ecuación de una línea. A toda línea sobre un plano xOy considerada como un conjunto de puntos, le corresponde cierta ecuación que relaciona las coordenadas de todo punto $M\ (x;\ y)$ («punto corriente») perteneciente a esta línea. Tal ecuación se llama *ecuación de la línea dada*.

Si en la ecuación de la línea dada se sustituyen las coordenadas de cualquier punto que está sobre esta línea, entonces la ecuación se convierte en identidad. Si, empero, en la ecuación de la línea se sustituyen las coordenadas de cualquier punto que no pertenece a esta línea, entonces la ecuación no se satisface.

37. Un extremo del segmento se desplaza sobre el eje de las abscisas, y el otro, sobre el eje de ordenadas. Hallar la ecuación de la línea descrita por el punto medio de este segmento si la longitud de este último es igual a c.

Resolución. Sea $M(x;\ y)$ el punto medio del segmento. La longitud del segmento $[OM]$ (longitud de la mediana) es igual a la mitad de la hipotenusa, o sea, $|OM| = c/2$. Por otro lado, $|OM| = \sqrt{x^2+y^2}$ (distancia del punto M al origen de coordenadas).

De este modo, llegamos a la ecuación

$$\sqrt{x^2+y^2}=c/2 \quad \text{ó} \quad x^2+y^2=c^2/4.$$

Esta es la ecuación de la línea buscada. Geométricamente es evidente que esta línea es la circunferencia de radio $c/2$ con el centro en el origen de coordenadas.

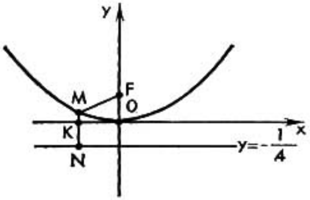


Fig. 1

38. Escribir la ecuación de una línea cuyo cada punto está alejado del punto $F(0;\ 1/4)$ a una distancia igual a la que separa este mismo punto de la recta $y=-1/4$.

Resolución. Tomemos sobre la línea buscada un punto arbitrario $M(x;\ y)$. La distancia del punto M al punto F se determina por la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$|MF| = \sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}.$$

La distancia del punto M a la recta $y=-1/4$ se halla a partir de consideraciones geométricas simples (fig. 1):

$$|MN| = |MK| + |KN| = y + \frac{1}{4}.$$

Puesto que, según el enunciado, la igualdad $|MF| = |MN|$ se cumple para todo punto M que pertenezca a la línea buscada, entonces la ecuación de esta línea se puede escribir de la forma

$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}=y+\frac{1}{4}, \quad \text{o bien} \quad x^2+y^2-\frac{1}{2}y+$$
$$+\frac{1}{16}=y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16},$$

o sea, $y=x^2$.

La línea determinada por la ecuación $y=x^2$ se llama *parábola*.

39. Escribir la ecuación de un conjunto de puntos tales, que el producto de sus distancias a los puntos $F_1(a;\ 0)$ y $F_2(-a;\ 0)$ sea una constante igual a a^2.

Resolución. Tomemos sobre la curva buscada un punto arbitrario $M(x;\ y)$. Sus distancias a los puntos $F_1(a_1;\ 0)$ y $F_2(-a;\ 0)$ son $r_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$,

$r_2 = \sqrt{(x+a)^2+y^2}$. De las condiciones del problema se deduce que $r_1r_2 = a^2$. De este modo, la curva buscada tiene la ecuación

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}=a^2.$$

Llevamos esta ecuación a la forma racional:

$$(x^2+a^2+y^2-2ax)(x^2+a^2+2ax)=a^4,$$

o sea,

$$(x^2+a^2+y^2)^2-4a^2x^2=a^4,$$

o, por fin,

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2).$$

La curva hallada se llama *lemniscata*.

40. Escribir la ecuación de la lemniscata en las coordenadas polares y construir la curva.

Resolución. En la ecuación $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (véase el problema precedente) pasamos a las coordenadas polares por las fórmulas $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$. Entonces obtendremos

$$(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta)^2=2a^2(\rho^2\cos^2\theta-$$
$$-\rho^2\operatorname{sen}^2\theta),\qquad \text{o bien } \rho^2=2a^2\cos 2\theta.$$

Esta es la ecuación de la lemniscata en coordenadas polares.

Construimos la curva. Despejando ρ en la ecuación hallamos $\rho=\pm a\sqrt{2\cos 2\theta}$. Debido a que en el segundo miembro de la igualdad está el signo doble «$\pm$», así como del hecho de que la ecuación no varía al sustituir θ por $-\theta$, deducimos de que la lemniscata se halla situada simétricamente con respecto a los ejes Ox y Oy. Investiguemos la forma de la lemniscata para el primer cuadrante o sea, para el caso cuando $\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<\pi/2$. Para estos valores de ρ y θ tenemos $\rho=a\sqrt{2}\cdot\sqrt{\cos 2\theta}$. No es difícil ver que θ puede variar sólo en el intervalo de 0 a $\pi/4$. Así pues, la parte respectiva de la curva está comprendida entre el eje polar y la semirrecta $\theta=\pi/4$. Si $\theta=0$, entonces $\rho=a\sqrt{2}$. Al crecer θ de 0 a $\pi/4$ la magnitud ρ decrecerá hasta el valor de $\rho=0$.

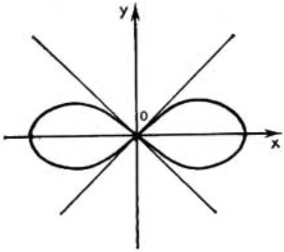


Fig. 2

Teniendo en cuenta las consideraciones de simetría, podemos construir la lemniscata (fig. 2).

41. Escribir la ecuación del conjunto de los puntos equidistantes de los puntos A (1; 1) y B (3; 3).

Resolución. Supongamos que el punto M pertenece al conjunto buscado; entonces $|MA|=|MB|$. Por la fórmula de la distancia entre dos puntos hallamos

$$|MA|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2},$$
$$|MB|=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

y la ecuación de la línea puede ser escrita de la forma

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la última igualdad, obtendremos

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-6y+9,$$

de donde, una vez reducidos los términos semejantes, llegamos finalmente a la ecuación

$$x + y - 4 = 0.$$

De este modo, el conjunto buscado es una recta que, como es sabido, sirve de perpendicular media al segmento $|AB|$.

42. Un punto M se desplaza uniformemente sobre una semirrecta que gira con movimiento uniforme en torno al polo. Escribir la ecuación de la línea descrita por el punto M si en el momento inicial la semirrecta en rotación coincide con el eje polar y el punto M, con el polo; al girar la semirrecta en el ángulo $\theta = 1$ (un radián) el punto M se ha alejado del polo en una distancia a.

Resolución. Puesto que en el momento inicial las magnitudes ρ y θ son iguales a cero y luego ambas crecen proporcionales en el tiempo, es fácil ver que ellas están relacionadas por la dependencia proporcional directa: $\rho/\theta = \text{const}$. Pero $\rho = a$ cuando $\theta = 1$; por consiguiente, $\rho/\theta = a/1$, o sea, $\rho = a\theta$. La curva $\rho = a\theta$ se llama *espiral de Arquímedes.*

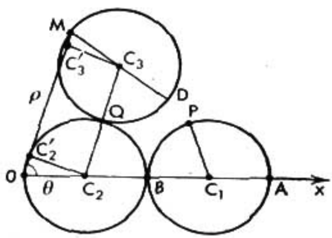


Fig. 3

43. La circunferencia de diámetro a rueda sin deslizar por el lado exterior de otra circunferencia de mismo diámetro. Escribir en las coordenadas polares la ecuación de la línea descrita por cierto punto fijo de la circunferencia rodante.

Resolución. En la fig. 3: C_1 es la posición inicial del centro de la circunferencia rodante; A, la posición inicial del punto que describe la línea buscada (el punto A es diametralmente opuesto al punto B donde, en el momento inicial, se encuentran en contacto las circunferencias); C_2 es el centro de la circunferencia fija; C_3 es el centro de la circunferencia rodante que está en una nueva posición; M, la nueva posición del punto A que describe la línea buscada. (Una vez desplazada la circunferencia C_1 a la posición C_3, el punto P ocupará la posición Q. El punto B ocupará la posición D, puesto que el rodamiento ocurre sin deslizar, $\breve{BQ} = \breve{DQ}$, $\widehat{QC_2B} = \widehat{QC_3D}$).

En el dibujo se muestra la posición del polo O y del eje polar Ox. Se exige escribir la ecuación a la cual satisfacen las coordenadas de cualquier punto M $(\rho; \theta)$ de la línea buscada.

No es difícil ver que $\widehat{MC_3Q} = \widehat{OC_2Q}$, en virtud de lo cual el cuadrilátero OC_2C_3M es un trapecio isósceles con la base menor $|C_2C_3| = a$; C_2C_2' y C_3C_3' son las perpendiculares a la recta OM que pasan por los puntos C_2 y C_3. De este modo,

$$|\rho| = |OC_2'| + |C_2'C_3'| + |C_3'M| =$$

$$= \frac{a}{2}\cos\theta + a + \frac{a}{2}\cos\theta = a(1 + \cos\theta).$$

Por esto, la ecuación de la línea buscada en las coordenadas polares tiene la forma $\rho = a(1 + \cos\theta)$; esta curva se llama *cardioide.*

Puesto que al sustituir θ por $-\theta$ la ecuación de la cardioide no varía, esta última está situada simétricamente con respecto al eje polar. Si θ varía de 0 a π, entonces ρ decrece de $2a$ a 0.

44. Hallar la ecuación del conjunto de puntos equidistantes de los puntos $A\ (2;\ 0)$ y $B\ (0;\ 1)$.

45. ¿Qué línea se define por la ecuación $x = y$?

46. ¿Qué línea se define por la ecuación $x = -y$?

47. Escribir la ecuación de un conjunto de puntos tales, que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A\ (2;\ 0)$ y $B\ (0;\ 2)$ sea igual al cuadrado de la distancia entre los puntos A y B.

48. Escribir la ecuación de un conjunto de puntos tales, que la suma de sus distancias a los puntos $A\ (1;\ 0)$ y $B\ (0;\ 1)$ sea igual a 2.

49. Escribir en el sistema polar de coordenadas la ecuación de una circunferencia con centro en el polo.

50. Escribir en el sistema polar de coordenadas la ecuación de una semirrecta que pasa por el polo y forma con el eje polar un ángulo α.

51. Escribir en el sistema polar de coordenadas la ecuación de una circunferencia de diámetro a si el polo está sobre la circunferencia y el eje polar pasa por el centro de la misma.

5. Ecuaciones paramétricas de una línea. Al buscar la ecuación de un conjunto de los puntos resulta, a veces, más cómodo expresar las coordenadas

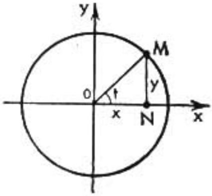


Fig. 4

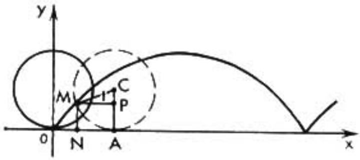


Fig. 5

x e y de un punto arbitrario de este conjunto por medio de cierta magnitud auxiliar t (llamada *parámetro*), o sea, examinar el sistema de ecuaciones

$$x = \varphi\ (t), \quad y = \psi\ (t).$$

Tal representación de la línea buscada se llama *paramétrica* y las ecuaciones del sistema han recibido el nombre de *ecuaciones paramétricas de la línea dada*.

La eliminación del parámetro t a partir del sistema (si ello es posible) lleva a una ecuación que relaciona x e y, o sea a una ecuación ordinaria de la línea que tiene la forma $f\ (x,\ y) = 0$.

52. Escribir las ecuaciones paramétricas de una circunferencia.

Resolución. Examinemos una circunferencia de radio a con centro en el origen de las coordenadas (fig. 4). Tomamos sobre esta circunferencia un punto arbitrario $M\ (x;\ y)$. Adoptamos el ángulo formado por el radio OM con el eje de abscisas como parámetro t. Del triángulo OMN se deduce que $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$. De este modo, las ecuaciones

$$x = a \cos t; \quad y = a \operatorname{sen} t$$

son las ecuaciones paramétricas de la circunferencia.

Eliminando de estas ecuaciones el parámetro t, obtendremos la ecuación ordinaria de una circunferencia. En el caso dado, para eliminar el parámetro basta elevar al cuadrado cada una de las ecuaciones y sumar

$$\begin{array}{r} x^2 = a^2 \cos^2 t \\ + \; y^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 t \\ \hline x^2 + y^2 = a^2. \end{array}$$

La última expresión es la ecuación de una circunferencia de radio a con centro en el origen de coordenadas.

53. Escribir las ecuaciones paramétricas de una curva escrita por un punto fijo de una circunferencia que rueda sin deslizar por una recta fija.

Resolución. Supongamos que una circunferencia de radio a rueda sin deslizar a la derecha por una recta horizontal (fig. 5). Tomamos esta recta como el eje Ox colocando el origen de coordenadas en cierto punto O del eje. Tomamos como punto fijo de la circunferencia (por el desplazamiento del cual se forma la curva buscada) aquel que coincide con el punto O al encontrarse la circunferencia en la posición respectiva. Tomamos como parámetro t el ángulo de giro del radio de la circunferencia que pasa por el punto fijo.

Supongamos que en cierto instante de tiempo la circunferencia es tangente al eje en el punto A. El punto fijo de la circunferencia ocupará la posición $M(x; y)$, correspondiente al ángulo t de giro del radio CM ($t = \widehat{ACM}$). Como el rodamiento ocurre sin deslizar, entonces $|OA| = \smile{MA} = at$. Usando esto, expresemos las coordenadas del punto M por t:

$$x = |ON| = |OA| - |NA| = \smile{MA} - |NA| = at - a \operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t),$$

$$y = |NM| = |AP| = |AC| - |PC| = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

De este modo, las ecuaciones paramétricas de la línea buscada tienen la forma

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Esta línea se llama *cicloide* y se muestra en la fig. 5.

54. ¿Qué línea se define por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^2$?

Resolución. Eliminando el parámetro t, llegamos a la ecuación $y = x$. Pero en virtud de las ecuaciones paramétricas $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas dadas definen la semirrecta-bisectriz del ángulo de las coordenadas del primer cuadrante.

55. ¿Qué línea se define por las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \cos^2 t$?

Resolución. Reemplazando al $\cos t$ por x en la segunda ecuación, obtenemos la ecuación de la parábola $y = x^2$. De las ecuaciones paramétricas se deduce que $|x| \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Ahora bien, las ecuaciones paramétricas definen el arco AOB de la parábola $y = x^2$, donde $A(-1; 1)$; $B(1; 1)$.

56. ¿Qué línea se define por las ecuaciones $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{cosec} t$?

Resolución. Puesto que $y = 1/\operatorname{sen} t$, entonces, eliminando t, obtenemos la ecuación $y = 1/x$ que expresa la dependencia inversamente proporcional de las magnitudes x e y. Teniendo en cuenta que $|x| \leqslant 1$, $|y| \geqslant 1$, deducimos que la línea definida por las ecuaciones paramétricas $x = \text{sen}\, t$, $y = \text{cosec}\, t$, tiene la forma representada en la fig. 6.

57. ¿Qué línea se define por las ecuaciones $x = 2t$, $y = 4t$?

58. La curva está representada por las ecuaciones paramétricas $x = a \cos t$, $y = b \,\text{sen}\, t$. Hallar su ecuación en el sistema rectangular de coordenadas.

Indicación: dividir la primera ecuación por a y la segunda por b; luego eliminar t.

59. La curva está representada por las ecuaciones paramétricas $x = a \sec t$, $y = b \,\text{tg}\, t$. Hallar su ecuación en el sistema rectangular de coordenadas.

60. ¿Qué línea se define por las ecuaciones $x = \cos^2 t$, $y = \text{sen}^2 t$?

61. La curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = a \cos^3 t$, $y = a\, \text{sen}^3 t$ se llama *astroide*. Eliminando t, hallar la ecuación de la astroide en el sistema rectangular de coordenadas.

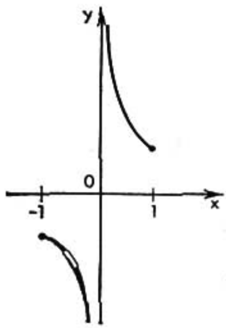


Fig. 6

62. El círculo de centro O y radio a lleva arrollado un hilo en el sentido de las agujas del reloj; supongamos que el extremo del hilo se encuentra en el punto A $(a;\ 0)$. Vamos a desenrollar el hilo (en el sentido contrario al de las agujas del reloj) quitándolo del círculo y siempre tensándolo al tirar de su extremo. Hallar las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por el extremo del hilo si como parámetro t se toma el ángulo entre el radio OA y el radio OB trazado al punto de tangencia de la curcunferencia con el hilo tenso, para una posición arbitraria de este último.

§ 2. La recta

1. Ecuación general de una recta. Toda ecuación de primer grado con respecto a x e y, es decir que tiene la forma

$$Ax + By + C = 0$$

(donde A, B y C son coeficientes constantes, además, $A^2 + B^2 \neq 0$) define sobre un plano cierta recta. Esta expresión se llama *ecuación general* de una recta.

Casos particulares. 1. $C = 0$; $A \neq 0$; $B \neq 0$. La recta definida por la ecuación $Ax + By = 0$ pasa por el origen de coordenadas.

2. $A = 0$; $B \neq 0$; $C \neq 0$. La recta definida por la ecuación, $By + C = 0$ (o $y = b$, donde $b = -C/B$), es paralela al eje Ox.

3. $B = 0$; $A \neq 0$; $C \neq 0$. La recta definida por la ecuación $Ax + C = 0$ (o $x = a$, donde $a = -C/A$), es paralela al eje Oy.

4. $B = C = 0$; $A \neq 0$. La recta definida por la ecuación $Ax = 0$ (o $x = 0$, dado que $A \neq 0$), coincide con el eje Oy.

5. $A = C = 0$; $B \neq 0$. La recta definida por la ecuación $By = 0$ (o $y = 0$, dado que $b \neq 0$), coincide con el eje Ox.

2. Ecuación de la recta con un coeficiente angular. Si en la ecuación general de una recta $B \neq 0$, entonces, despejando y, obtenemos la ecuación que tiene la forma

$$y = kx + b$$

(aquí $k = -A/B$, $b = -C/B$). Ella se llama *ecuación con coeficiente angular* o ecuación con pendiente, puesto que $k = \operatorname{tg} \alpha$, donde α es el ángulo formado por la recta con el sentido positivo del eje Ox. El término independiente de la ecuación b es igual a la ordenada del punto de intersección con el eje Oy.

3. **Ecuación segmentaria de una recta.** Si en la ecuación general de la recta $C \neq 0$, entonces, dividiendo todos sus terminos por $-C$, obtenemos la ecuación que tiene la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(aquí $a = -C/A$, $b = -C/B$). Ella se llama *ecuación segmentaria de una recta*; en la misma a es la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje Ox y b es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Oy. Por eso a y b se denominan segmentos de la recta sobre los ejes de las coordenadas.

4. **Ecuación normal de una recta.** Si ambos miembros de la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$ se multiplican por el número $\mu = 1/(\pm\sqrt{A^2+B^2})$ (llamado *factor normalizador*), además, de tal modo que el signo delante del radical se escoja para que se cumpla la condición $\mu \cdot C < 0$, entonces se obtiene la ecuación

$$x \cdot \cos \varphi + y \cdot \operatorname{sen} \varphi - p = 0.$$

Ella se denomina *ecuación normal* de una recta. Aquí p es la longitud de la perpendicular a la recta que pasa por el origen de las coordenadas y φ es el ángulo formado por esta perpendicular con el sentido positivo del eje Ox.

63. Escribir la ecuación de la recta que trunca sobre el eje de ordenadas el segmento $b = -3$ y forma con el sentido positivo del eje de abscisas el ángulo $\alpha = \pi/6$.

Resolución. Hallamos el coeficiente angular: $k = \operatorname{tg}(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$. Utilizando la ecuación de la recta con un coeficiente angular, obtenemos $y = (1/\sqrt{3})\,x - 3$; suprimiendo los denominadores y transponiendo todos los términos al primer miembro obtenemos la ecuación general de la recta $x - \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$.

64. Escribir la ecuación de la recta que corta sobre los ejes de coordenadas los segmentos $a = 2/5$, $b = -1/10$.

Resolución. Usando la ecuación segmentaria de una recta, tenemos

$$\frac{x}{2/5} + \frac{y}{(-1/10)} = 1.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma $(5/2)\,x - 10y = 1$, o bien $5x - 20y - 2 = 0$ (ecuación general de la recta).

65. Se da la ecuación general de la recta $12x - 5y - 65 = 0$. Ecribir: 1) la ecuación con coeficiente angular; 2) la ecuación segmentaria; 3) la ecuación normal.

Resolución. 1) Despejando y en la ecuación de la recta, obtenemos la ecuación con coeficiente angular:

$$y = (12/5)\,x - 13.$$

Aquí $k = 12/5$, $b = -13$.

2) Transponemos el término independiente de la ecuación general al segundo miembro y dividimos ambos miembros por 65; nos queda $(12/65)\,x - (5/65)\,y =$

$= 1$. Escribiendo la última ecuación en la forma

$$\frac{x}{65/12}+\frac{y}{(-65/5)}=1,$$

obtenemos la ecuación segmentaria de la recta dada. Aquí $a = 65/12$ $b = -65/5 = -13$.

3) Hallamos el factor normalizador $\mu = 1/\sqrt{12^2+(-5)^2} = 1/13$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación general por este factor, obtenemos la ecuación normal de la recta

$$(12/13)\,x - (5/13)\,y - 5 = 0.$$

Aquí $\cos\varphi = 12/13$, $\operatorname{sen}\varphi = -5/13$, $p = 5$.

66. Construir las rectas: 1) $x - 2y + 5 = 0$; 2) $2x + 3y = 0$; 3) $5x - 2 = 0$; 4) $2y + 7 = 0$.

Resolución. 1) Suponiendo que en la ecuación $x = 0$, obtenemos $y = 5/2$. Por consiguiente, la recta se interseca con el eje de ordenadas en el punto B (0; 5/2). Suponiendo que $y = 0$, obtenemos $x = -5$, o sea, la recta se interseca con el eje de abscisas en el punto A (−5; 0). Queda trazar la recta por los puntos A y B (fig. 7).

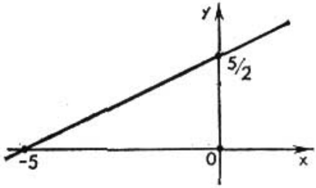


Fig. 7

2) La recta $2x + 3y = 0$ pasa por el origen de las coordenadas, ya que en su ecuación falta el término independiente. Asignamos a x en la ecuación de la recta un valor cualquiera. Supongamos, por ejemplo, que $x = 3$, entonces $6 + 3y = 0$, o sea, $y = -2$; obtendremos el punto M (3; −2). Queda trazar la recta por el origen de coordenadas y el punto M.

3) Despejando x en la ecuación de la recta, obtenemos $x = 2/5$. Esta recta es paralela al eje de las ordenadas y corta sobre el eje de abscisas un segmento igual a 2/5.

4) Obtenemos análogamente la ecuación $y = -7/2$; esta recta es paralela al eje de abscisas.

67. Se da la ecuación de la recta $(x + 2\sqrt{5})/4 + (y - 2\sqrt{5})/2 = 0$. Escribir: 1) la ecuación general de esta recta; 2) la ecuación con el coeficiente angular; 3) la ecuación segmentaria de la recta; 4) la ecuación normal.

68. ¿Qué ángulo forma la recta $2x + 2y - 5 = 0$ con el sentido positivo del eje de las abscisas?

69. Determinar el área del triángulo formado por la recta $4x + 3y - 36 = 0$ y los ejes de las coordenadas.

70. ¿Se puede escribir como segmentaria la ecuación de la recta $20x + 21y = 0$?

71. Construir las rectas: 1) $4x - 5y + 15 = 0$; 2) $2x - y = 0$; 3) $7x - 10 = 0$; 4) $2y + 3 = 0$.

72. Escribir la ecuación de la recta que corta sobre el eje de las ordenadas el segmento $b = 1$ y forma con el sentido positivo del eje de abscisas el ángulo $\alpha = 2\pi/3$.

73. La recta corta, sobre los ejes de las coordenadas, segmentos positivos congruentes. Escribir la ecuación de la recta si el área del triángulo formado por la recta y los ejes de las coordenadas es igual a 8 unidades cuadradas.

74. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el origen de las coordenadas y el punto A (—2; —3).

75. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2; 5) y corta, sobre el eje de las ordenadas, el segmento $b = 7$.

76. Escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto M (—3; —4) y son paralelas a los ejes de coordenadas.

77. Escribir la ecuación de la recta que corta segmentos congruentes sobre los ejes de las coordenadas, si la longitud del segmento de la recta comprendido entre los ejes de coordenadas es igual a $5\sqrt{2}$.

5. Angulo entre dos rectas. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. *El ángulo agudo entre las rectas* $y = k_1x + b_1$ e $y = k_2x + b_2$ se determina por la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|. \tag{1}$$

Condición de paralelismo de las rectas: $k_1 = k_2$.

Condición de perpendicularidad de las rectas: $k_1 = -1/k_2$.

La ecuación de la recta que tiene el coeficiente angular k y pasa por el punto $M(x_1; y_1)$ se escribe de la forma

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2}$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $M_1(x_1; y_1)$ y $M_2(x_2; y_2)$ se escribe en la forma

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{3}$$

y el coeficiente angular de esta recta se encuentra por la fórmula

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4}$$

Si $x_1 = x_2$, entonces la ecuación de la recta que pasa por los puntos M_1 y M_2 tiene la forma $x = x_1$.

Si $y_1 = y_2$, luego la ecuación de la recta que pasa por los puntos M_1 y M_2 tiene la forma $y = y_1$.

6. Intersección de rectas. Distancia de un punto a la recta. Haz de rectas. Si $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$, entonces las coordenadas del punto de intersección de las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ se hallan resolviendo conjuntamente las ecuaciones de estas rectas.

La distancia del punto $M(x_0; y_0)$ *a la recta* $Ax + By + C = 0$ se halla por la fórmula

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{1}$$

Las bisectrices de los ángulos entre las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tienen las ecuaciones

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0. \tag{2}$$

Si las rectas intersecadas están representadas por las ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, entonces la ecuación

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{3}$$

donde el factor numérico λ, determina una línea recta que pasa por el punto de intersección de las rectas representadas. Atribuyendo a λ diversos valores en la última ecuación, obtendremos diversas rectas pertenecientes a un *haz* de rectas cuyo centro es el punto de intersección de las rectas dadas.

78. Determinar el ángulo agudo entre las rectas $y = -3x + 7$ e $y = 2x + 1$.

Resolución. Haciendo $k_1 = -3$, $k_2 = 2$ en la fórmula (1) del apartado 5, obtenemos

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)\cdot 2}\right| = 1, \quad \text{o sea,} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

79. Mostrar que las rectas $4x - 6y + 7 = 0$ y $20x - 30y - 11 = 0$, son paralelas.

Resolución. Reduciendo la ecuación de cada recta a la forma con coeficiente angular, obtenemos

$$y = (2/3)\,x + 7/6 \quad \text{e} \quad y = (2/3)\,x - 11/30.$$

Los coeficientes angulares de estas rectas son iguales: $k_1 = k_2 = 2/3$, o sea, las rectas son paralelas.

80. *Mostrar que las rectas* $3x - 5y + 7 = 0$ y $10x + 6y - 3 = 0$ son perpendiculares.

Resolución. Una vez reducidas las ecuaciones a la forma con coeficiente angular, obtenemos

$$y = (3/5)\,x + 7/5 \quad \text{e} \quad y = (-5/3)\,x + 1/2.$$

Aquí $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$. Como $k_1 = -1/k_2$, las rectas son perpendiculares

81. Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $M(-1;\ 3)$ y $N(2;\ 5)$.

Resolución. Suponiendo que $x_1 = -1$, $y_1 = 3$, $x_2 = 2$, $y_2 = 5$ en la ecuación (3) del apartado 5, obtenemos

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x+1}{2+1}, \quad \text{o bien} \quad \frac{y-3}{2} = \frac{x+1}{3}.$$

Así, la ecuación tiene la forma $2x - 3y + 11 = 0$.

Es útil verificar que la ecuación está correctamente formulada. Para esto es suficiente mostrar que las coordenadas de los puntos M y N satisfacen la ecuación de la recta. En efecto, las igualdades $2(-1) - 3\cdot 3 + 11 = 0$, $2\cdot 2 - 3\cdot 5 + 11 = 0$ se cumplen idénticamente.

82. Componer la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2;\ 4)$ y $B(-2;\ -1)$.

Resolución. Como $x_1 = x_2 = -2$, entonces la recta tiene la ecuación $x = -2$ (es paralela al eje de las ordenadas).

83. Mostrar que las rectas $3x - 2y + 1 = 0$ y $2x + 5y - 12 = 0$ se intersecan y hallar las coordenadas de los puntos de intersección.

Resolución. Como $3/2 \neq (-2)/5$, las rectas se intersecan. Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x-2y+1=0, \\ 2x+5y-12=0, \end{cases}$$

hallamos $x = 1$, $y = 2$, o sea las rectas se intersecan en el punto $(1; 2)$.

84. Determinar la distancia del punto $M(x_0; y_0)$ a la recta $Ax + By + C = 0$, sin emplear la ecuación normal de la recta.

Resolución. El problema se reduce a la determinación de la distancia entre los puntos $M(x_0; y_0)$ y N, donde N es la base de la perpendicular a la recta dada y que pasa por el punto. Planteamos la ecuación de la recta (MN). Puesto que el coeficiente angular de la recta definida es igual a $-A/B$, el coeficiente angular de la recta (MN) es igual a B/A (según la condición de perpendicularidad) y la ecuación de esta última tiene la forma $y - y_0 = (B/A)(x - x_0)$. Esta ecuación se puede escribir de la forma $(x - x_0)/A = (y - y_0)/B$.

Para determinar las coordenadas del punto N, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad (x - x_0)/A = (y - y_0)/B.$$

Introducimos la incógnita auxiliar t:

$$(x - x_0)/A = (y - y_0)/B = t.$$

Entonces $x = x_0 + At$, $y = y_0 + Bt$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la recta dada, obtenemos $A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C = 0$, de donde

$$t = -(Ax_0 + By_0 + C)/(A^2 + B^2).$$

Sustituyendo ahora el valor de t en las ecuaciones $x = x_0 + At$ e $y = y_0 + Bt$, determinamos las coordenadas del punto N:

$$x = x_0 - A\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}, \quad y = y_0 - B\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+A^2}.$$

Sólo falta determinar la distancia entre los puntos M y N:

$$d = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(A\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}\right)^2+\left(B\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

85. Determinar la distancia del punto $M(1; 2)$ a la recta $20x - 21y - 58 = 0$.

Resolución. Tenemos

$$d = \frac{|20\cdot 1-21\cdot 2-58|}{\sqrt{400+441}} = \frac{|20-42-58|}{29} = \frac{|-80|}{29} = 2\frac{22}{29}.$$

86. Dada la recta l: $4x - 3y - 7 = 0$. ¿Cuáles de los puntos $A(5/2; 1)$, $B(3; 2)$, $C(1; -1)$, $D(0; -2)$; $E(4; 3)$, $F(5; 2)$ pertenecen a esta recta?

Resolución. Si el punto está sobre la recta, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la recta. Tenemos: $A \in l$, ya que $4\cdot 5/2 - 3\cdot 1 - 7 = 0$; $B \notin l$, ya que $4\cdot 3 - 3\cdot 2 - 7 \neq 0$; $C \in l$, ya que $4\cdot 1 - 3(-1) - 7 = 0$; $D \notin l$, ya que $4\cdot 0 - 3(-2) - 7 \neq 0$; $E \in l$, ya que $4\cdot 4 - 3\cdot 3 - 7 = 0$; $F \notin l$, ya que $4\cdot 5 - 3\cdot 2 - 7 \neq 0$.

87. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto M (—2; —5) y es paralela a la recta $3x + 4y + 2 = 0$.

Resolución. Despejando y en la última ecuación, obtenemos $y = -(3/4)\,x - 1/2$. Por consiguiente, en virtud de la condición de paralelismo, el coeficiente angular de la recta buscada es igual a —3/4. Aplicando la ecuación (2) del apartado 5, obtenemos

$$y-(-5)=-\frac{3}{4}[x-(-2)], \quad \text{o sea}, \quad 3x+4y+26=0.$$

88. Se dan los vértices de triángulo: A (2; 2), B (—2; —8) y C (—6; —2). Escribir las ecuaciones de las medianas del triángulo.

Resolución. Hallamos las coordenadas de los lados BC, AC y AB:

$$x'=\frac{-2-6}{2}=-4, \quad y'=\frac{-8-2}{2}=-5; \quad A_1\,(4;\ -5);$$

$$x''=\frac{2-6}{2}=-2; \quad y''=\frac{2-2}{2}=0, \quad B_1\,(-2;\ 0);$$

$$x'''=\frac{2-2}{2}=0, \quad y'''=\frac{2-8}{2}=-3; \quad C_1\,(0;\ =3).$$

Encontramos las ecuaciones de las medianas con ayuda de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados. La ecuación de la mediana AA_1 es

$$\frac{y-2}{-5-2}=\frac{x-2}{-4-2}, \quad \text{o bien} \quad \frac{y-2}{7}=\frac{x-2}{6}, \text{ es decir } 7x-6y-2=0.$$

Hallamos la ecuación de la mediana BB_1; puesto que los puntos B (—2; —8) y B_1 (—2; 0) tienen las abscisas iguales, la mediana BB_1 es paralela al eje de ordenadas. Su ecuación es $x + 2 = 0$.

La ecuación de la mediana CC_1 es:

$$\frac{y+2}{-3+2}=\frac{x+6}{0+6}, \quad \text{o bien} \quad x+6y+18=0.$$

89. Se dan los vértices del triángulo: A (0; 1); B (6; 5) y C (12; —1). Escribir la ecuación de la altura del triángulo, trazada por el vértice C.

Resolución. Por la fórmula (4) del apartado 5 hallamos el coeficiente angular del lado AB:

$$k=\frac{5-1}{6-0}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

En virtud de la condición de perpendicularidad, el coeficiente angular de la altura trazada por el vértice C es igual a —3/2. La ecuación de esta altura tiene la forma

$$y+1=-\frac{3}{2}(x-12), \quad \text{o bien} \quad 3x+2y-34=0.$$

90. Se dan los lados de un triángulo: $x + 3y - 7 = 0$ (AB), $4x - y - 2 = 0$ (BC), $6x + 8y - 35 = 0$ (AC). Hallar la longitud de la altura trazada por el vértice B.

Resolución. Determinemos las coordenadas del punto B. Resolviendo el sistema de ecuaciones $x + 3y - 7 = 0$ y $4x - y - 2 = 0$, obtendremos $x = 1$, $y = 2$, o sea, B (1; 2). Hallamos la longitud de la altura BB_1 como distancia del punto B a la recta AC:

$$|BB_1|=\frac{|6\cdot 1+8\cdot 2-35|}{\sqrt{6^2+8^2}}=1{,}3.$$

91. Determinar la distancia entre las rectas paralelas $3x+y-3\sqrt{10}=0$ y $6x+2y+5\sqrt{10}=0$.

Resolución. El problema se reduce a la determinación de la distancia entre un punto arbitrario de una recta y la otra recta. Suponiendo, por ejemplo, que en la ecuación de la primera recta $x=0$, obtenemos $y=3\sqrt{10}$. Ahora bien, $M(0;\ 3\sqrt{10})$ es el punto que está sobre la primera recta. Determinemos la distancia del punto M a la segunda recta

$$d=\frac{|6\cdot 0+2\cdot 3\sqrt{10}+5\sqrt{10}|}{\sqrt{36+4}}=\frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=5{,}5.$$

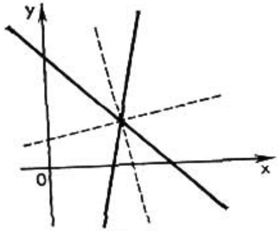


Fig. 8

92. Escribir las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos comprendidos entre las rectas $x+y-5=0$ y $7x-y-19=0$(fig. 8).

Resolución. Primeramente resolvamos este problema en la forma general.

Las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas son, como es sabido, el conjunto de los puntos equidistantes a estas rectas. Si las ecuaciones de las rectas dadas $A_1x+B_1y+C_1=0$ y $A_2x+B_2y+C_2=0$ $(A_1/A_2\neq B_1/B_2$ o sea, las rectas no son paralelas), entonces para todo punto $M(\bar{x};\ \bar{y})$ perteneciente a una de las bisectrices tenemos (utilizando la fórmula para determinar la distancia del punto a la recta):

$$\frac{|A_1\bar{x}+B_1\bar{y}+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2\bar{x}+B_2\bar{y}+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Puesto que $M(\bar{x};\ \bar{y})$ es un punto arbitrario de la bisectriz, se lo puede designar simplemente por $M(x;\ y)$. Teniendo en cuenta que las expresiones que están en la última igualdad bajo el signo de magnitud absoluta pueden tener diversos signos, obtenemos para una de las bisectrices la ecuación

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

y para la otra la ecuación

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

De este modo, las ecuaciones de ambas bisectrices se pueden escribir de la forma

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0.$$

Ahora vamos a resolver el problema concreto planteado. Sustituyendo A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 y C_2 por sus valores indicados en las ecuaciones de las rectas dadas, obtendremos

$$\frac{x+y-5}{\sqrt{1+1}}\pm\frac{7x-y-19}{\sqrt{49+1}}=0,\quad \text{o sea,}\quad 5(x+y-5)\pm(7x-y-19)=0.$$

La ecuación de una de las bisectrices se escribe de la forma

$$5(x+y-5)+(7x-y-19)=0, \quad \text{o sea,} \quad 3x+y-11=0,$$

y la ecuación de la otra, de la forma

$$5(x+y-5)-(7x-y-19)=0, \quad \text{o sea,} \quad x-3y+3=0.$$

93. Se dan los vértices del triángulo: $A(1;\ 1)$, $B(10;\ 13)$, $C(13;\ 6)$. Escribir la ecuación de la bisectriz del ángulo A.

Resolución. **Usamos otro modo (en comparación con la resolución del problema precedente) de plantear la ecuación de la bisectriz.**

Supongamos que D es el punto de intersección de la bisectriz con el lado BC. De la propiedad de la bisectriz del ángulo interior del triángulo se deduce que $|BD|:|DC|=|AB|:|AC|$. Pero

$$|AB|=\sqrt{(10-1)^2+(13-1)^2}=15, \quad |AC|=\sqrt{(13-1)^2+(6-1)^2}=13.$$

Por lo tanto, $\lambda=|BD|:|DC|=15/13$. Como es conocida la razón en que el punto D divide el segmento BC, las coordenadas del punto D se determinan por las igualdades:

$$x=\frac{10+15/13\cdot 13}{1+15/13}, \quad y=\frac{13+15/13\cdot 6}{1+15/13},$$

o bien $x=325/28$, $y=259/28$, es decir, $D(325/28;\ 259/28)$. El problema se reduce al planteamiento de la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y D:

$$\frac{y-1}{250/28-1}=\frac{x-1}{325/28-1}, \quad \text{o sea} \quad 7x-9y+2=0.$$

94. Se dan las ecuaciones de las alturas del triángulo ABC: $x+y-2=0$, $9x-3y-4=0$ y las coordenadas del vértice $A(2;\ 2)$. Escribir las ecuaciones de los lados del triángulo.

Resolución. **Es fácil cerciorarse de que el vértice A no está en ninguna de las alturas definidas: sus coordenadas no satisfacen las ecuaciones de estas alturas.**

Sean $9x-3y-4=0$ la ecuación de la altura BB_1, y $x+y-2=0$ la ecuación de la altura CC_1. Planteemos la ecuación del lado AC examinándolo como recta perpendicular a la altura BB_1, que pasa por el punto A. Como el coeficiente angular de la altura BB_1 es igual a 3, el coeficiente angular del lado AC es de $-1/3$, o sea, $k_{AC}=-1/3$. Aplicando la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene el coeficiente angular dado, obtendremos la ecuación del lado AC:

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-2), \quad \text{o bien,} \quad x+3y-8=0.$$

Análogamente obtenemos $k_{CC_1}=-1$, $k_{AB}=1$ y la ecuación del lado AB tiene la forma

$$y-2=x-2, \quad \text{o sea,} \quad y=x.$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones de las rectas AB y BB_1, así como de las rectas AC y CC_1, hallamos las coordenadas de los vértices del triángulo: $B(2/3;\ 2/3)$ y $C(-1;\ 3)$. Queda sólo por formular la ecuación del lado BC:

$$\frac{y-2/3}{3-2/3}=\frac{x-2/3}{-1-2/3}, \quad \text{es decir,} \quad 7x+5y-8=0.$$

95. Escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $M(5;\ 1)$ y forman con la recta $2x+y-4=0$ el ángulo $\pi/4$ (fig. 9).

Resolución. Supongamos que el coeficiente angular de una de las rectas buscadas es igual a k. El coeficiente angular de la recta dada vale -2. Como el ángulo comprendido entre estas rectas es igual a $\pi/4$, entonces

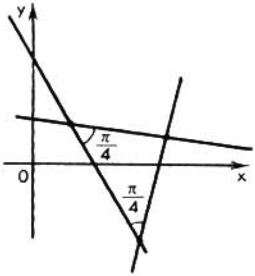


Fig. 9

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|,\quad \text{o sea,}\quad 1=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|,$$

de donde

$$\frac{k+2}{1-2k}=1 \quad \text{y} \quad \frac{k+2}{1-2k}=-1.$$

Resolviendo cada una de las ecuaciones obtenidas, hallamos $k=-1/3$ y $k=3$. De este modo, la ecuación de una de las rectas buscadas se escribe de la forma

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-5),\quad \text{o sea,}\quad x+3y-8=0,$$

y la ecuación de la otra recta resulta

$$y-1=3(x-5),\quad \text{o sea,}\quad 3x-y-14=0.$$

96. Hallar la recta que pertenece al haz $2x+3y+5+\lambda(x+8y+6)=0$ y pasa por el punto $M(1;\ 1)$.

Resolución. Las coordenadas del punto M deben satisfacer la ecuación de la recta buscada, por eso para determinar λ obtenemos la ecuación

$$2\cdot 1+3\cdot 1+5+\lambda(1+8\cdot 1+6)=0,\quad \text{o bien,}\quad 10+15\lambda=0,$$
$$\text{o sea,}\quad \lambda=-2/3.$$

Sustituyendo el valor de λ en la ecuación del haz, obtenemos la de la recta buscada:

$$2x+3y+5-\frac{2}{3}(x+8y+6)=0,\quad \text{o bien,}\quad 4x-7y+3=0.$$

97. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x-4y+7=0$ y $5x+2y+3=0$, y es paralela al eje de las ordenadas.

Resolución. La recta pertenece al haz

$$3x-4y+7+\lambda(5x+2y+3)=0,\ \text{o sea,}\ (3+5\lambda)x+(-4+2\lambda)y+$$
$$+(7+3\lambda)=0.$$

Como la recta buscada es paralela al eje de las ordenadas, el coeficiente de y debe ser igual a cero: $-4+2\lambda=0$, o sea, $\lambda=2$.

Queda sólo sustituir el valor hallado de λ en la ecuación del haz, de donde obtenemos la ecuación buscada $x+1=0$.

98. Se dan los lados del triángulo: $x+2y+5=0$ (AB), $3x+y+1=0$ (BC) y $x+y+7=0$ (AC). Escribir la ecuación de la altura del triángulo bajada al lado AC.

Resolución. La altura pertenece al haz

$$x + 2y + 5 + \lambda (3x + y + 1) = 0, \quad \text{o sea,}$$

$$(1 + 3\lambda) x + (2 + \lambda) y + (5 + \lambda) = 0.$$

El coeficiente angular de la recta del haz es igual a $-(1 + 3\lambda)/(2 + \lambda)$; puesto que el coeficiente angular de la recta AC vale -1, entonces el coeficiente angular de la altura buscada es igual a 1 y para determinar λ obtenemos la ecuación $-(1 + 3\lambda)/(2 + \lambda) = 1$. De aquí $1 + 3\lambda + 2 + \lambda = 0$, o sea, $\lambda = -3/4$. Sustituyendo el valor hallado de λ en la ecuación del haz, obtendremos la ecuación buscada de la altura:

$$\left(1-\frac{9}{4}\right) x+\left(2-\frac{3}{4}\right) y+\left(5-\frac{3}{4}\right)=0, \quad \text{o sea,} \quad 5x-5y-17=0.$$

99. Se dan los vértices del triángulo ABC: A (0; 2), B (7; 3) y C (1; 6). Determinar $\widehat{BAC} = \alpha$.

100. Se dan los lados del triángulo: $x + y - 6 = 0$, $3x - 5y + 14 = 0$ y $5x - 3y - 14 = 0$. Escribir las ecuaciones de sus alturas.

101. Escribir las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos comprendidos entre las rectas $3x + 4y - 20 = 0$ y $8x + 6y - 5=0$.

102. Se dan los vértices del triángulo: A (0; 0), B (—1; —3) y C (—5; —1). Escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por los vértices del triángulo y son paralelas a sus lados.

103. Escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto M (2; 7) y forman con la recta AB, donde A (—1; 7) y B (8; —2), los ángulos de 45°.

104. Determinar la distancia del punto M (2; —1) a la recta que corta en los ejes de las coordenadas los segmentos $a = 8$, $b = 6$.

105. En el triángulo que tiene por vértices los puntos A (3/2; 1), B (1; 5/3) y C (3; 3) hallar la longitud de la altura trazada por el vértice C.

106. ¿Para qué valor de m las rectas $7x - 2y - 5 = 0$, $x + 7y - 8 = 0$ y $mx + my - 8 = 0$ se intersecan en un mismo punto?

107. Se dan los puntos medios de los lados del triángulo: A_1 (—1; —1), B_1 (1; 9) y C (9; 1). Escribir las ecuaciones de las perpendiculares medianas bajadas a los lados del triángulo.

108. Hallar el ángulo agudo formado por la recta que pasa por los puntos A $(2; \sqrt{3})$ y B $(3; 2\sqrt{3})$ con el eje de las ordenadas.

109. Los puntos A (1; 2) y C (3; 6) son los vértices opuestos de un cuadrado. Determinar las coordenadas de los otros dos vértices del cuadrado.

110. Hallar sobre el eje de abscisas un punto cuya distancia a la recta $8x + 15y + 10 = 0$ sea igual a 1.

111. Se dan los vértices de un triángulo: A (1; 1), B (4; 5) y C (13; —4). Escribir la ecuación de la mediana trazada por el vértice B y de la altura bajada del vértice C. Calcular el área del triángulo.

112. Hallar las rectas que pertenecen al haz $2x + 3y + 6 + \lambda(x - 5y - 6) = 0$ y son perpendiculares a las rectas básicas del haz.

113. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + 6y + 5 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$ y por el punto $M(-4/5;\ 1)$.

114. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ y es paralela a la recta $5x + 8y = 0$.

115. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - y - 1 = 0$, $x + 3y + 1 = 0$, y es paralela al eje de abscisas.

116. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $5x + 3y + 10 = 0$, $x + y - 15 = 0$ y por el origen de las coordenadas.

117. Hallar la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ y forma el ángulo de 135° con el eje de las abscisas.

118. Escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $M(a;\ b)$ y forman con la recta $x + y + c = 0$ un ángulo de 45°.

119. Se dan los lados del triángulo: $x - y = 0$ (AB), $x + y - 2 = 0$ (BC), $y = 0$ (AC). Escribir las ecuaciones de la mediana que pasa por el vértice B y de la altura que pasa por el vértice A.

120. Mostrar que el triángulo cuyos lados son $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$, $x\sqrt{3} + y + 1 = 0$ y $x - y - 10 = 0$ es isósceles. Hallar el ángulo de su vértice.

121. Se dan los vértices sucesivos de un paralelogramo: $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 3)$, $C(7;\ 1)$. Hallar el ángulo comprendido entre sus diagonales y mostrar que este paralelogramo es un rectángulo.

122. Se dan los lados de un triángulo: $x - y + 2 = 0$ (AB), $x = 2$ (BC), $x + y - 2 = 0$ (AC). Escribir la ecuación de la recta que pasa por el vértice B y por el punto que está sobre el lado AC y divide este último (contando a partir del vértice A) en la razón 1:3.

123. Mostrar que el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 1 + \sqrt{3})$, $C(3;\ 1)$ es isósceles, y calcular su área.

124. Mostrar que un triángulo cuyos lados se definen por las ecuaciones con coeficientes enteros no puede ser equilátero.

125. Se da un vértice de un triángulo $A(3;\ 9)$ y las ecuaciones de las medianas: $y - 6 = 0$ y $3x - 4y + 9 = 0$. Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

126. Escribir la ecuación de la hipotenusa de un triángulo rectángulo que pasa por el punto $M(2;\ 3)$ si los catetos del mismo se hallan situados sobre los ejes de las coordenadas y el área del triángulo es igual a 12 unidades cuadradas.

127. Escribir las ecuaciones de tres lados de un cuadrado si es conocido que de cuarto lado sirve el segmento de la recta $4x + 3y - 12 = 0$, cuyos extremos coinciden con los ejes de las coordenadas.

§ 3. Curvas de segundo orden

1. Circunferencia. *La circunferencia* es un conjunto de puntos equidistantes *del punto dado (centro). Si r es su radio y el punto C $(a;\ b)$ su centro, la ecuación* de la circunferencia tiene la forma

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1}$$

En particular, si el centro de una circunferencia coincide con el origen de las coordenadas, la última ecuación tendrá el aspecto

$$x^2+y^2=r^2.$$

Si en el primer miembro de la ecuación (1) se suprimen los paréntesis, se obtendrá la ecuación que tiene la forma

$$x^2+y^2+lx+my+n=0, \tag{2}$$

donde $l=-2a,\ m=-2b,\ n=a^2+b^2-r^2$.

En el caso general la ecuación (2) define la circunferencia si $l^2+m^2-4n>0$.

Si $l^2+m^2-4n=0$, la ecuación indicada define el punto $(-l/2;\ -m/2)$ y si $l^2+m^2-4n<0$, ella carece de sentido geométrico. En este caso se dice que la ecuación define una circunferencia imaginaria.

Es útil recordar que la ecuación de una circunferencia contiene los términos de mayor grado x^2 e y^2 con coeficientes iguales y en ella está ausente el término con el producto de x por y.

La situación recíproca del punto M $(x_1;\ y_1)$ y de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ se determina por las condiciones siguientes: si $x_1^2+y_1^2=r^2$, el punto M pertenece a la circunferencia; si $x_1^2+y_1^2>r^2$, el punto M está fuera de la misma, y si $x_1^2+y_1^2<r^2$, el punto M está dentro de la circunferencia.

128. Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$.

Resolución. Dividiendo la ecuación por 2 y agrupando los términos de la misma obtendremos $x^2-4x+y^2+\frac{5}{2}y=2$. Completamos los cuadrados de las expresiones x^2-4x e $y^2+\frac{5}{2}y$ sumando al primer binomio 4 y al segundo $(5/4)^2$ (simultáneamente al segundo miembro se adiciona la suma de estos números):

$$(x^2-4x+4)+\left(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}\right)=2+4+\frac{25}{16}, \quad \text{o bien,}$$

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}.$$

De este modo, las coordenadas del centro son $a=2,\ b=-5/4$ y el radio de la circunferencia es $r=11/4$.

129. Escribir la ecuación de la circunferencia que circunscribe al triángulo cuyos lados están definidos por las ecuaciones $9x-2y-41=0,\ 7x+4y+7=0,\ x-3y+1=0$.

Resolución. Hallamos las coordenadas de los vértices del triángulo resolviendo conjuntamente tres sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases}9x-2y-41=0,\\7x+4y+7=0;\end{cases}\quad \begin{cases}9x-2y-41=0,\\x-3y+1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}7x+4y+7=0,\\x-3y+1=0,\end{cases}$$

Como resultado obtendremos A $(3;\ -7)$, B $(5;\ 2)$, C $(-1;\ 0)$.

Supongamos que la ecuación buscada de la circunferencia tiene la forma $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Para hallar a, b y r escribimos tres igualdades, sustituyendo las coordenadas de los puntos A, B y C en la ecuación buscada en lugar de las coordenadas corrientes, así:

$$(3-a)^2+(-7-b)^2=r^2; \quad (5-a)^2+(2-b)^2=r^2;$$
$$(-1-a)^2+b^2=r^2.$$

Eliminando r^2, llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}(3-a)^2+(-7-b)^2=(5-a)^2+(2-b)^2,\\(3-a)^2+(-7-b)^2=(-1-a)^2+b^2,\end{cases} \text{ o bien } \begin{cases}4a+18b=-29,\\8a-14b=57.\end{cases}$$

De aquí $a=3{,}1$, $b=-2{,}3$. El valor de r^2 se encuentra de la ecuación $(-1-a)^2+b^2=r^2$, o sea, $r^2=22{,}1$. Por lo tanto, la ecuación buscada se escribe de la forma

$$(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1.$$

130. Escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (5; 0) y B (1; 4) si su centro pertenece a la recta $x+y-3=0$.

Resolución. Hallemos las coordenadas de M, punto medio de la cuerda AB; tenemos $x_M=(5+1)/2=3$, $y_M=(4+0)/2=2$, o sea, M (3; 2). El centro de la circunferencia está en la mitad de la perpendicular al segmento $[AB]$. La ecuación de la recta (AB) tiene la forma

$$(y-0)/(4-0)=(x-5)/(1-5), \quad \text{o sea,} \quad x+y-5=0.$$

Como el coeficiente angular de esta recta es -1, el coeficiente angular de la perpendicular bajada a ella es igual a 1 y la ecuación de esta perpendicular

$$y-2=1\cdot(x-3), \quad \text{es decir,} \quad x-y-1=0.$$

Es evidente que el centro de la circunferencia C es el punto de intersección de la recta (AB) con la perpendicular indicada, o sea, las coordenadas del centro se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones $x+y-5=0$, $x-y-1=0$. Por lo tanto, $x=2$, $y=1$, o sea, C (2; 1). El radio de la circunferencia es igual a la longitud del segmento $[CA]$, es decir, $r=\sqrt{5-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$. De modo que la ecuación buscada tiene la forma

$$(x-2)^2+(y-1)^2=10.$$

131. Escribir la ecuación de la cuerda de la circunferencia $x^2+y^2=49$, que se divide por la mitad en el punto A (1; 2).

Resolución. Planteamos la ecuación del diámetro de la circunferencia, el cual pasa por el punto A (1; 2). Esta ecuación tiene la forma $y=2x$. La cuerda buscada es perpendicular al diámetro y pasa por el punto A, o sea, su ecuación es

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1), \text{ o bien, } x+2y-5=0.$$

132. Hallar la ecuación de una circunferencia simétrica a la circunferencia $x^2+y^2=2x+4y-4$ con respecto a la recta $x-y-3=0$.

Resolución. Reducimos la ecuación de la circunferencia dada a la forma canónica $(x-1)^2+(y-3)^2=1$; el centro de la circunferencia está en el punto C (1; 2) y su radio es igual a 1. Hallamos las coordenadas del centro C_1 $(x_1; y_1)$ de la circunferencia simétrica, para lo cual trazamos por el punto C (1; 2) una recta perpendicular a la recta $x-y-3=0$. Su ecuación es $y-2=$

$= k(x-1)$, donde $k = -1/1 = -1$, de donde

$$y - 2 = -x + 1, \quad \text{o bien,} \quad x + y - 3 = 0.$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones $x - y - 3 = 0$ y $x + y - 3 = 0$, obtendremos $x = 3$, $y = 0$, o sea, la proyección del punto C (1; 2) sobre la recta dada es el punto P (3; 0). Las coordenadas del punto simétrico se obtienen por las fórmulas de las coordenadas del punto medio del segmento: $3 = (1 + x_1)/2$, $0 = (2 + y_1)/2$; de este modo, $x_1 = 5$, $y_1 = -2$. Por consiguiente, el punto C_1 (5; -2) es el centro de la circunferencia simétrica y la ecuación de esta circunferencia tiene la forma

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 1.$$

133. Hallar el conjunto de los puntos medios de la cuerdas de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4(y+1)$, que pasan por el origen de las coordenadas.

Resolución. La ecuación del conjunto de las cuerdas tiene la forma $y = kx$. Expresamos con k las coordenadas del punto de intersección de las cuerdas con la circunferencia, para lo cual resolvemos el sistema de ecuaciones $y = kx$ y $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$. Obtenemos la ecuación cuadrática $x^2(k^2+1) - 4kx - 4 = 0$. Aquí $x_1 + x_2 = 4k/(1+k^2)$. Pero la semisuma de estas abscisas da la abscisa del punto medio de la cuerda, o sea, $x = 2k/(1+k^2)$ y la ordenada del punto medio de la cuerda $y = 2k^2/(1+k^2)$. Las dos últimas igualdades son las ecuaciones paramétricas del conjunto buscado de los puntos.

Eliminando k de estas igualdades (para lo cual es suficiente hacer $k = y/x$ en la relación $x = 2k/(1+k^2)$) obtenemos $x^2 + y^2 - 2y = 0$. De esta manera, el conjunto buscado es también una circunferencia.

134. Determinar las coordenadas de los centros y de los radios de las circunferencias: 1) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$; 3) $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 54 = 0$.

135. Hallar el ángulo comprendido entre los radios de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$, trazados en el punto de su intersección con el eje Oy.

136. Escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (1; 2), B (0; -1) y C (-3; 0).

137. Escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (7; 7) y B (-2; 4) si su centro está sobre la recta $2x - y - 2 = 0$.

138. Escribir la ecuación de la cuerda común de las circunferencias $x^2 + y^2 = 16$ y $(x-5)^2 + y^2 = 9$.

139. Escribir las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, trazadas en los puntos de intersección de la circunferencia con la recta $x - y + 2 = 0$.

140. Se da la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Desde el punto A (-2; 0) se traza la cuerda AB, a una distancia $|BM| = |AB|$. Hallar el conjunto de los puntos M.

2. Elipse. Se llama *elipse* al conjunto de los puntos, cuyas distancias sumadas a dos puntos dados, denominados *focos*, es una magnitud constante (designada por $2a$); además, esta constante es mayor que la distancia entre los focos.

Si los ejes de coordenadas están situados con respecto a la elipse de modo indicado en la fig. 10 y los focos de la elipse se encuentran sobre el eje Ox, en los puntos F_1 (c; 0) y F_2 ($-c$; 0) equidistantes del origen de las coordenadas, entonces se obtiene la ***ecuación elemental*** *(canónica) de la elipse*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Aquí a es el semieje mayor de la elipse y b, el semieje menor; con ello a, b y c (c es la mitad de la distancia entre los focos) están ligados por la relación $a^2 = b^2 + c^2$.

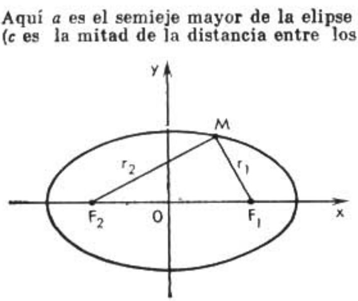


Fig. 10

La forma de una elipse (medida de su contracción) se caracteriza por su *excentricidad* $e = c/a$ (puesto que $c < a$, entonces $e < 1$).

Las distancias de cierto punto de la elipse M a sus focos se llaman *radios vectores focales* de este punto. Ellos suelen designarse por r_1 y r_2 (en virtud de la definición de la elipse para todo punto suyo $r_1 + r_2 = 2a$).

En el caso particular cuando $a = b$ ($c = 0$, $e = 0$, los dos focos coinciden en un mismo punto, en el centro), la elipse se convierte en circunferencia (con la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$).

La situación recíproca del punto $M(x_1;\ y_1)$ y de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se determina por las siguientes condiciones: si $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$, el punto M pertenece a la elipse; si $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$, el punto M se encuentra fuera de la elipse; si $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$, el punto M se halla dentro de la elipse.

Los radios vectores focales se expresan por la abscisa del punto de la elipse por las fórmulas $r_1 = a - ex$ (radio vector focal derecho) y $r_2 = a + ex$ (radio vector focal izquierdo).

141. Escribir la ecuación canónica de la elipse que pasa por los puntos $M(5/2;\ \sqrt{6}/4)$ y $N(-2;\ \sqrt{15}/5)$.

Resolución. Sea $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ la ecuación buscada de la elipse. Las coordenadas de los puntos dados deben satisfacer esta ecuación. Por consiguiente,

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1, \qquad \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1.$$

De aquí hallamos $a^2 = 10$, $b^2 = 1$. Así que la ecuación de la elipse tiene la forma

$$\frac{x^2}{10}+y^2=1.$$

142. Sobre la elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$ hallar el punto cuya diferencia de los radios vectores focales es igual a 6,4.

143. Hallar la longitud de la perpendicular levantada desde el foco de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ al eje mayor hasta intersecarse con la elipse.

144. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el foco izquierdo y el vértice inferior de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$.

145. Una elipse relacionada con los ejes pasa por el punto M (1; 1) y tiene una excentricidad $e = 3/5$. Escribir su ecuación.

146. ¿Cómo se sitúan con respecto a la elipse $x^2/50 + y^2/32 = 1$ los puntos M (7; 1), N (—5; —4), P (4; 5)?

147. Hallar la excentricidad de una elipse si el segmento focal se ve desde el vértice superior bajo un ángulo α.

148. Hallar sobre la recta $x + 5 = 0$ un punto que sea equidistante del foco izquierdo y del vértice superior de la elipse $x^2/20 + y^2/4 = 1$.

149. Valiéndose de la definición de elipse, escribir su ecuación si se sabe que los puntos F_1 (0; 0) y F_2 (1; 1) son los focos de la elipse y la longitud del eje mayor es igual a 2.

150. Escribir la ecuación del conjunto de los puntos cuyas distancias al punto A (0; 1) son dos veces menor que la distancia a la recta $y - 4 = 0$.

151. Los extremos de un segmento AB de longitud constante a se deslizan por los lados de un ángulo recto. Hallar la ecuación de una curva que sea descrita por el punto M que divide este segmento en la razón 1 : 2.

3. Hipérbola. Se llama *hipérbola* al conjunto de los puntos en los que el valor absoluto de sus distancias a dos puntos dados, denominados *focos*, es una constante (designada por $2a$); además, esta constante es menor que la distancia entre los focos. Si los focos se sitúan en los puntos F_1 (c; 0) y F_2 ($-c$;0), se obtiene la *ecuación canónica de la hipérbola*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

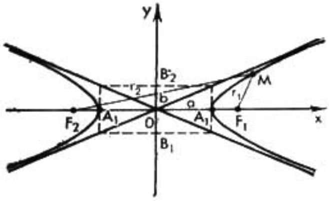


Fig. 11

donde $b^2 = c^2 - a^2$. La hipérbola consta de dos ramas y está situada simétricamente con respecto a los ejes de las coordenadas. Los puntos A_1 (a; 0) y A_2 ($-a$; 0) se llaman *vértices* de la hipérbola. El segmento $|A_1A_2| = 2a$ recibe el nombre de *eje real* de la hipérbola y el segmento $|B_1B_2| = 2b$ se denomina *eje imaginario* (fig. 11).

Una recta se llama *asíntota* a la hipérbola si la distancia de un punto M (x; y) de la hipérbola a esta recta tiende a cero para $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$. La hipérbola tiene dos asíntotas cuyas ecuaciones son $y = \pm(b/a)\,x$.

Para trazar las asíntotas de una hipérbola se construye el rectángulo axial de la misma con los lados $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$. Las rectas que pasan por los vértices opuestos de este rectángulo son las asíntotas de la hipérbola. En la fig. 11 se muestra la situación recíproca de la hipérbola y sus asíntotas. La relación $e = c/a > 1$ se denomina *excentricidad de la hipérbola*.

Los radios vectores focales de la rama derecha de la hipérbola: $r_1 = ex - a$ (radio vector focal derecho), $r_2 = ex + a$ (radio vector focal izquierdo).

Los radios vectores focales de la rama izquierda de la hipérbola: $r_1 = -ex + a$ (radio vector focal derecho), $r_2 = -ex - a$ (radio vector focal izquierdo).

Si $a = b$, la ecuación de la hipérbola toma la forma

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Esa hipérbola se llama *equilátera*. Sus asíntotas forman un ángulo recto. Si como ejes de las coordenadas se toman las asíntotas de una hipérbola equilátera, su ecuación toma el aspecto $xy = m$ ($m = \pm a^2/2$; cuando $m > 0$ la hipérbola está situada en los cuadrantes I y III y cuando $m < 0$, en los cuadrantes II y IV). Como la ecuación $xy = m$ se puede escribir de la forma $y = m/x$, la hipérbola equilátera es el gráfico de dependencia inversamente proporcional entre las magnitudes x e y.

La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ \left(\text{ó } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\right) \tag{2}$$

es también la ecuación de una hipérbola, pero de eje real de la misma sirve el segmento del eje Oy de longitud igual a $2b$.

Dos hipérbolas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ tienen los mismos semiejes y las mismas asíntotas, pero el eje real de una de ellas sirve de eje imaginario de la otra y viceversa. Tales hipérbolas se denominan *conjugadas*.

152. Sobre la rama derecha de la hipérbola $x^2/16 - y^2/9 = 1$ hallar el punto cuya distancia al foco derecho es dos veces menor que su distancia al foco izquierdo.

Resolución. Para la rama derecha de la hipérbola los radios vectores focales se determinan por las fórmulas $r_1 = ex - a$ y $r_2 = ex + a$. Por consiguiente, tenemos la ecuación $ex + a = 2(ex - a)$ de donde $x = 3a/e$; aquí $a = 4$, $e = c/a = \sqrt{a^2 + b^2}/a = \sqrt{16 + 9}/4 = 5/4$, o sea, $x = 9{,}6$.

Hallamos la ordenada valiéndonos de la ecuación de la hipérbola:

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}=\pm\frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2-16}=\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}.$$

Ahora bien, al enunciado del problema lo satisfacen dos puntos: M_1 ($9{,}6$; $0{,}6\sqrt{119}$) y M_2 ($9{,}6$; $-0{,}6\sqrt{119}$).

153. Se dan los puntos A (-1; 0) y B (2; 0). El punto M se mueve de modo que en el triángulo AMB el ángulo $\hat{B}$ permanece dos veces mayor que el ángulo $\hat{A}$. Hallar la ecuación de la curva que describe el punto M.

Resolución. Tomando el punto M con las coordenadas x e y, expresamos a las $\operatorname{tg}\hat{B}$ y $\operatorname{tg}\hat{A}$ por las coordenadas de los puntos A, B y M:

$$\operatorname{tg}\hat{B}=-\frac{y}{x-2}=\frac{y}{2-x}, \quad \operatorname{tg}\hat{A}=\frac{y}{x+1}.$$

Según el enunciado, obtenemos la ecuación $\operatorname{tg}\hat{B} = \operatorname{tg} 2\hat{A}$, o sea, $\operatorname{tg}\hat{B} = 2\operatorname{tg}\hat{A}/(1 - \operatorname{tg}^2\hat{A})$. Sustituyendo en esta igualdad las expresiones halladas para $\operatorname{tg}\hat{B}$ y $\operatorname{tg}\hat{A}$, llegamos a la ecuación

$$\frac{y}{2-x}=\frac{2y/(x+1)}{1-y^2/(1+x)^2};$$

después de dividir por y ($y \neq 0$) y simplificar, obtenemos $x^2 - y^2/3 = 1$. La curva buscada es una hipérbola.

154. La excentricidad de una hipérbola es igual a $\sqrt{2}$. Escribir la ecuación elemental de la hipérbola que pasa por el punto M ($\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$).

Resolución. Según la definición de la excentricidad tenemos $c/a = \sqrt{2}$, o bien $c^2 = 2a^2$. Pero $c^2 = a^2 + b^2$, por lo tanto, $a^2 + b^2 = 2a^2$, o bien, $a^2 = b^2$, es decir, la hipérbola es equilátera.

La otra igualdad la obtenemos a partir de los datos que indican la posición del punto M en la hipérbola, o sea, $(\sqrt{3})^2/a^2 - (\sqrt{2})^2/b^2 = 1$, o bien $3/a^2 - 2/b^2 = 1$. Puesto que $a^2 = b$, obtenemos $3/a^2 - 2/a^2 = 1$, o sea, $a^2 = 1$.

De suerte que la ecuación de la hipérbola buscada tiene la forma $x^2 - y^2 = 1$.

155. Escribir la ecuación de una hipérbola que pasa por el punto M (9; 8) si las asíntotas de la hipérbola tienen las ecuaciones $y = \pm (2\sqrt{2/3})\,x$.

156. Hallar la ecuación de una hipérbola, cuyos vértices y focos se encuentran en los respectivos focos y vértices de la elipse $x^2/8 + y^2/5 = 1$.

157. Por el punto M (0; -1) y el vértice derecho de la hipérbola $3x^2 - 4y^2 = 12$ pasa una recta. Hallar el segundo punto de intersección de la recta con la hipérbola.

158. Se da la hipérbola $x^2 - y^2 = 8$. Hallar la elipse cofocal que pasa por el punto M (4; 6).

159. Se da la elipse $9x^2 + 25y^2 = 1$. Escribir la ecuación de la hipérbola equilátera cofocal.

160. El ángulo comprendido entre las asíntotas de una hipérbola es igual a 60°. Calcular la excentricidad de la hipérbola.

161. Sobre la rama izquierda de la hipérbola $x^2/64 - y^2/36 = 1$ hallar un punto cuyo radio vector focal derecho sea igual a 18.

162. Escribir la ecuación de la hipérbola cuya excentricidad es igual a 2 y los focos coinciden con los focos de la elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$.

163. Hallar los radios vectores focales de la hipérbola $x^2/16 - y^2/9 = 1$, en los puntos de intersección de esta última con la circunferencia $x^2 + y^2 = 91$.

164. Demostrar que la longitud de la perpendicular bajada del foco a una de las asíntotas de una hipérbola es igual al semieje imaginario.

165. Demostrar que el producto de las distancias de todo punto de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ a sus asíntotas es una constante.

166. Hallar la ecuación del conjunto de los puntos equidistantes a la circunferencia $x^2 + 4x + y^2 = 0$ y al punto M (2; 0).

4. Parábola. Se llama *parábola* al conjunto de los puntos que equidistan de un punto dado, llamado *foco*, y de una recta dada que ha recibido el nombre de *directriz*. Si la directriz de una parábola es la recta $x = -p/2$ y su foco es el punto F ($p/2$; 0), entonces la ecuación de la parábola tiene la forma

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Esta parábola está situada simétricamente con respecto al eje de las abscisas (fig. 12, donde $p > 0$).

La expresión

$$x^2 = 2py \tag{2}$$

es la ecuación de una parábola simétrica con respecto al eje de las ordenadas. Si $p > 0$, las parábolas (1) y (2) están vueltas hacia el sentido positivo del respectivo eje y si $p < 0$, hacia el negativo.

La longitud del radio vector focal de la parábola $y^2 = 2px$ se determina por las fórmulas $r = x + p/2$ $(p > 0)$.

167. Escribir la ecuación de una parábola simétrica al eje Ox, con el vértice en el origen de coordenadas, si la longitud de cierta cuerda de esta parábola, perpendicular al eje Ox, es igual a 16 y la distancia de esta cuerda al vértice es 6.

Resolución. Como son dadas la longitud de la cuerda y su distancia al vértice, entonces se conocen las coordenadas del extremo de esta cuerda, o sea, del punto M que pertenece a la parábola. La ecuación de la parábola tiene la forma $y^2 = 2px$; suponiendo que en esta ecuación $x = 6$, $y = 8$, hallamos $8^2 = 2p \cdot 6$, de donde $2p = 32/3$. De suerte que la ecuación de la parábola buscada es $y^2 = 32x/3$.

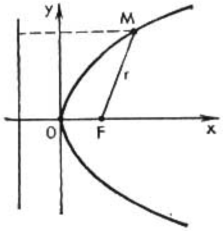


Fig. 12

168. Escribir la ecuación de una parábola, con el vértice en el origen de las coordenadas, que sea simétrica con respecto al eje Oy y corte sobre la bisectriz de los ángulos de las coordenadas I y III una cuerda de $8\sqrt{2}$ de longitud.

Resolución. La ecuación buscada de la parábola es $x^2 = 2py$, la ecuación de la bisectriz es $y = x$. De este modo, obtenemos los puntos de intersección de la parábola con la bisectriz: O (0; 0) y M ($2p$; $2p$). La longitud de la cuerda se determina como distancia entre dos puntos: $8\sqrt{2} = \sqrt{4p^2 + 4p^2}$, de donde $2p = 8$. Por consiguiente, la ecuación buscada tiene la forma $x^2 = 8y$.

169. Escribir la ecuación elemental de una parábola si se conoce que su foco se encuentra en el punto de intersección de la recta $4x - 3y - 4 = 0$ con el eje Ox.

170. Hallar en la parábola $y^2 = 8x$ un punto cuya distancia a la directriz sea igual a 4.

171. Escribir la ecuación de una parábola, con el vértice en el origen de coordenadas, que sea simétrica con respecto al eje Ox y corte sobre la recta $y = x$ una cuerda de longitud igual a $4\sqrt{2}$.

172. La parábola $y^2 = 2x$ corta sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas una cuerda cuya longitud es igual a $3/4$. Escribir la ecuación de esta recta.

173. Escribir la ecuación elemental de una parábola si la longitud de la cuerda que es perpendicular al eje de simetría y divide por la mitad la distancia comprendida entre el foco y el vértice, es igual a 1.

174. Hallar sobre la parábola $y^2 = 32x$ un punto cuya distancia a la recta $4x + 3y + 10 = 0$ sea igual a 2.

175. Escribir la ecuación de una parábola, con el vértice en el origen de coordenadas, que sea simétrica con respecto al eje Ox y pase por el punto M (4; 2); determinar el ángulo α comprendido entre el radio vector focal de este punto y el eje Ox.

§ 4. Transformación de coordenadas y simplificación de ecuaciones de las curvas de segundo orden

1. Transformación de coordenadas. Al pasar de un sistema de coordenadas xOy a un sistema nuevo $x'O_1y'$ (el sentido de los ejes de coordenadas es el anterior y como nuevo punto de origen de las coordenadas se toma O_1 $(a;\ b)$; fig. 13) la relación existente entre las viejas y nuevas coordenadas de cierto punto M del plano se determina por las fórmulas siguientes:

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b; \tag{1}$$

$$x' = x - a, \qquad y' = y - b. \tag{2}$$

Con ayuda de las fórmulas (1) las viejas coordenadas se expresan en función de las nuevas y con ayuda de las fórmulas (2), las nuevas coordenadas se expresan mediante las viejas.

Al girar los ejes de las coordenadas en un ángulo α (el origen es el anterior, además α se lee en el sentido contrario al de las agujas del reloj; fig. 14) la

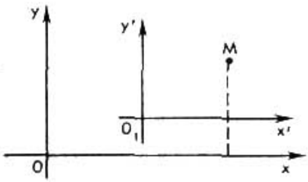


Fig. 13

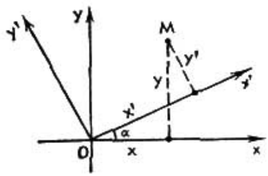


Fig. 14

dependencia entre las viejas coordenadas x, y y las nuevas x', y', se determina por las fórmulas siguientes:

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha, \qquad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha; \tag{3}$$

$$x' = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha, \qquad y' = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha. \tag{4}$$

176. Se ha efectuado un traslado paralelo de los ejes de las coordenadas, con ello el nuevo origen de las coordenadas se encuentra en el punto O_1 $(3;\ -4)$. Se conocen las viejas coordenadas del punto M $(7;\ 8)$. Determinar las nuevas coordenadas de este mismo punto.

Resolución. Aquí $a = 3$, $b = -4$, $x = 7$, $y = 8$. Por las fórmulas (2) hallamos $x' = 7 - 3 = 4$, $y' = 8 - (-4) = 12$.

177. *Sobre un plano xOy se da el punto M $(4;\ 3)$. El sistema de coordenadas se gira alrededor del origen de las coordenadas de modo que el nuevo eje pase por el punto M. Determinar las viejas coordenadas del punto A, si se conocen sus nuevas coordenadas $x' = 5$, $y' = 5$.*

Resolución. Como $|OM| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, entonces $\operatorname{sen}\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$; en este caso las fórmulas (3) de transformación de las coordenadas para el problema en cuestión tomarán la forma

$$x = (4/5)\,x' - (3/5)\,y', \quad y = (3/5)\,x' + (4/5)\,y'.$$

Suponiendo $x' = y' = 5$, hallamos $x = 1$, $y = 7$.

178. El sistema de coordenadas se ha girado en un ángulo $\alpha = \pi/6$. Determinar las nuevas coordenadas del punto $M(\sqrt{3};\ 3)$.

Resolución. Usando las fórmulas (4), obtenemos

$$x' = \sqrt{3}\cos(\pi/6) + 3\,\text{sen}\,(\pi/6) = 3/2 + 3/2 = 3,$$

$$y' = -\sqrt{3}\,\text{sen}\,(\pi/6) + 3\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2 + 3\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}.$$

179. Se da el punto $M(9/2;\ 11/2)$. Como nuevos ejes de las coordenadas se toman las rectas $2x - 1 = 0$ (eje O_1y'), $2y - 5 = 0$ (eje O_1x'). Hallar las coordenadas del punto M en el nuevo sistema de coordenadas.

180. Se da el punto $M(4\sqrt{5};\ 2\sqrt{5})$. Como nuevo eje de las abscisas se toma la recta $y = 2x$ y como nuevo eje de las ordenadas, la recta $y = -0{,}5x$, además los nuevos ejes de las coordenadas forman ángulos agudos con los ejes viejos correspondientes. Hallar las coordenadas del punto M en el nuevo sistema.

2. Parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ e hipérbola $y = (kx + l)/(px + q)$. La ecuación que tiene la forma

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

debido a la transformación de las coordenadas con el traslado paralelo de los ejes, o sea, por las fórmulas $x = x' + a$, $y = y' + b$ (a y b son las coordenadas del nuevo origen, x' e y' son las nuevas coordenadas), se reduce a la forma canónica de la ecuación de la parábola.

La parábola definida por la ecuación $y = Ax^2 + Bx + C$ tiene el eje de simetría paralelo al eje Oy (análogamente, la ecuación $x = Ay^2 + By + C$ define una parábola con el eje de simetría paralelo al eje Ox).

La función lineal fraccional

$$y = (kx + l)/(px + q)$$

determina una hipérbola equilátera si $kq - pl \neq 0$, $p \neq 0$; transformando las coordenadas con la traslación paralela de los ejes de coordenadas, esta ecuación se reduce a la forma cánonica de una hipérbola equilátera $xy = m$, o sea, a la ecuación de una hipérbola equilátera en la cual los ejes de coordenadas son asíntotas. Cuando $m > 0$ las ramas de la hipérbola están en los cuadrantes I y III y cuando $m < 0$, en los cuadrantes II y IV.

181. Reducir a la forma canónica la ecuación de la parábola $y = 9x^2 - 6x + 2$.

Resolución. Sustituimos x por $x' + a$ e y por $y' + b$:

$$y' + b = 9\,(x' + a)^2 - 6\,(x' + a) + 2, \quad \text{o bien,} \quad y' = 9x'^2 + 6x'\,(3a - 1) + (9a^2 - 6a + 2 - b).$$

Hallamos tales valores de a y b con los que el coeficiente de x' y el término independiente se anulen: $3a - 1 = 0$; $9a^2 - 6a + 2 - b = 0$, o sea, $a = 1/3$, $b = 1$. Por consiguiente, la ecuación canónica de la parábola tiene la forma $x'^2 = (1/9)\,y'$. El vértice de la parábola está en el punto $O_1(1/3;\ 1)$ y $p = 1/18$.

Otro procedimiento de resolución de tales problemas consiste en que la ecuación dada que tiene la forma $y = Ax^2 + Bx + C$ (o bien $x = Ay^2 + By +$

$+ C)$ se reduce a la forma $(x - a)^2 = 2p(y - b)$ [$(y - b)^2 = 2p(x - a)$, respectivamente]. Entonces el punto O_1 $(a;\ b)$ sirve de vértice de la parábola y el signo del parámetro p determinará en qué sentido, positivo o negativo, del eje respectivo (Oy ó Ox) quede orientada la parábola.

Así, la ecuación $y = 9x^2 - 6x + 2$ se transforma del modo siguiente:

$$y = 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 1 + 1; \quad y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2; \quad \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(y - 1).$$

De aquí volvemos a obtener que el vértice de la parábola está en el punto O_1 $(1/3;\ 1)$, que el parámetro $p = 1/18$, y que la rama de la parábola queda orientada en el sentido positivo del eje Oy.

182. Reducir la ecuación de la hipérbola $y = (4x + 5)/(2x - 1)$ a la forma $x'y' = k$. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola con respecto al sistema inicial de coordenadas.

Resolución. Mediante una traslación paralela de los ejes de coordenadas transformamos la ecuación dada en otra que tiene la forma

$$(y' + b)(2x' + 2a - 1) = 4x' + 4a + 5,$$

o bien,

$$2x'y' + (2b - 4)x' + (2a - 1)y' = 4a + b - 2ab + 5.$$

Hallemos a y b de las condiciones $2b - 4 = 0$ y $2a - 1 = 0$, o sea, $a = 0{,}5$, $b = 2$. Entonces la ecuación de la hipérbola en el nuevo sistema de coordenadas tendrá el aspecto $x'y' = 3{,}5$. De asíntotas de la hipérbola sirven los nuevos ejes de las coordenadas y por eso sus ecuaciones son: $x' = 0{,}5$, $y' = 2$.

Otro procedimiento de resolución de tales problemas consiste en que la ecuación $y = (kx + l)/(px + q)$ se reduce a la forma $(x - a)(y - b) = m$; el centro de la hipérbola está en el punto O_1 $(a;\ b)$; de asíntotas de la misma sirven las rectas $x = a$ e $y = b$, el signo m determina, como antes, en que ángulos entre las asíntotas se encuentran las ramas de la hipérbola.

Así, la ecuación $y = (4x + 5)/(2x - 1)$ se transforma del modo siguiente:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)y - 4\left(x - \frac{1}{2} + \frac{7}{4}\right) = 0; \quad (2x - 1)y - (4x + 5) = 0;$$

$$2(x - 0{,}5)(y - 2) = 7.$$

De suerte que la ecuación de la hipérbola se ha reducido a la forma $(x - 0{,}5)(y - 2) = 3{,}5$; el centro de la hipérbola se encuentra en el punto O_1 $(0{,}5;\ 2)$, las ramas de la misma están situadas en los cuadrantes I y III entre sus asíntotas $x - 0{,}5 = 0$, $y - 2 = 0$.

183. Reducir a la forma canónica las ecuaciones de las parábolas: 1) $y = 4x - 2x^2$; 2) $y = -x^2 + 2x + 2$; 3) $x = -4y^2 + y$; 4) $x = y^2 + 4y + 5$.

184. Reducir a la forma $x'y' = m$ las ecuaciones de las hipérbolas: 1) $y = 2x/(4x - 1)$; 2) $y = (2x + 3)/(3x - 2)$; 3) $y = (10x + 2)/(5x + 4)$; 4) $y = (4x + 3)/(2x + 1)$.

3. Ecuación de cinco términos de una curva de segundo orden. La ecuación de segundo grado que tiene la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(no contiene el término xy con el producto de las coordenadas) se llama *ecuación de cinco términos de una curva de segundo orden.* Esta ecuación determina sobre un plano xOy una elipse, hipérbola o parábola (con casos posibles de descomposición y degeneración de estas curvas) que tienen los ejes de simetría paralelos a los ejes de coordenadas, según el signo del producto de los coeficientes A y C.

1. Sea $AC > 0$; entonces la curva definida por esta ecuación es una elipse.

(real, imaginaria o degenerada en punto); cuando $A = C$ la elipse se convierte en circunferencia.

2. Sea $AC < 0$; entonces la curva respectiva es una hipérbola que puede degenerarse en dos rectas intersecadas si el primer miembro de la ecuación se descompone en producto de dos factores lineales;

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2).$$

3. Sea $AC = 0$ (es decir, bien sea $A = 0$, $C \neq 0$, bien sea $C = 0$, $A \neq 0$); entonces la ecuación determina una parábola que puede degenerar en dos rectas paralelas (reales diferentes, reales coincididas o imaginarias) si el primer miembro de la ecuación no contiene x o y (es decir si la ecuación tiene la forma $Ax^2 + 2Dx + F = 0$ o bien $Cy^2 + 2Ey + F = 0$).

El tipo de curva y su disposición en el plano se determinan fácilmente reduciendo la ecuación a la forma $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = f$ (en caso de $AC > 0$ ó $AC < 0$); por la forma de la ecuación obtenida se revelan también los casos de descomposición o degeneración de la elipse y la hipérbola.

Si las curvas no están degeneradas, entonces, trasladando el origen de las coordenadas al punto $O_1(x_0;\ y_0)$, la ecuación obtenida de la elipse o la hipérbola se puede reducir a la forma canónica.

El caso en que $AC = 0$ ha sido examinado detalladamente en el párrafo precedente, puesto que la ecuación de una parábola no degenerada se puede escribir aquí en forma de $y = a_1x^2 + b_1x + c$, o bien, $x = a_1y^2 + b_1y + c_1$.

185. ¿Qué línea define la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$?

Resolución. Transformemos la ecuación dada del modo siguiente:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4; \quad 4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = -4;$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = -4 + 4 + 36; \quad 4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36.$$

Efectuamos la traslación paralela de los ejes de las coordenadas tomando como nuevo origen de las mismas el punto $O'(1;\ 2)$. Aplicamos las fórmulas de transformación de las coordenadas: $x = x' + 1$, $y = y' + 2$. Con respecto a los nuevos ejes, la ecuación de la curva tomará la forma

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36, \text{ o bien, } \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Así, pues, la curva definida es una elipse.

186. ¿Qué línea define la ecuación $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$?

Resolución. Transformamos la ecuación dada así:

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) - 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 44;$$

$$(x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 44 + 1 - 36, \quad (x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 9.$$

Efectuamos la traslación paralela de los ejes de las coordenadas tomando como nuevo origen el punto $O'(-1;\ 2)$. Las fórmulas de transformación de las coordenadas tienen la forma $x = x' - 1$, $y = y' + 2$. Después de transformar las coordenadas obtendremos la ecuación

$$x'^2 - 9y'^2 = 9, \quad \text{o bien,} \quad \frac{x'^2}{9} - y'^2 = 1$$

La curva es una hipérbola. De asíntotas de esta hipérbola con respecto a los nuevos ejes sirven las rectas $y' = (\pm 1/3)\, x'$.

Determinar qué curvas se definen por las ecuaciones siguientes. Construir los dibujos.

187. $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0.$
188. $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0.$
189. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0.$
190. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0.$
191. $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0.$
192. $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0.$
193. $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0.$
194. $x^2 - 6x + 8 = 0.$
195. $x^2 + 2x + 5 = 0.$

4. Reducción de la ecuación general de una curva de segundo orden a la forma canónica. Si la curva de segundo orden está definida por la ecuación

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

entonces, aplicando la transformación de un giro de los ejes de coordenadas con la utilización de las fórmulas $x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha$, $y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha$, conviene, seleccionada debidamente α, suprimir en la ecuación el término que contiene el producto de las coordenadas.

Las transformaciones ulteriores han sido examinadas en el apartado precedente.

El caso de descomposición de una curva de segundo orden en dos rectas se puede determinar fácilmente por la ecuación inicial procediendo del modo siguiente: examinando la ecuación como cuadrática con respecto a y (suponiendo que el coeficiente de y^2 se distingue del cero), se despeja y en la misma; con ello si el radicando es un cuadrado exacto de cierto binomio $ax + b$, la raíz se extraerá y para y se obtendrán dos valores: $y_1 = k_1x + b_1$; $y_2 = k_2x + b_2$. Esto es lo que muestra que la curva se descompone en dos rectas.

La ecuación dada también puede ser resuelta con respecto a x. Si en la ecuación general de una curva de segundo orden $A = C = 0$ (naturalmente $B \neq 0$), entonces la ecuación indicada define un par de rectas si, y sólo si, $B/D = 2E/F$. En este caso el miembro izquierdo de la ecuación se descompone en sus factores lineales.

196. Mostrar que la ecuación $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 25 = 0$ define un conjunto de dos rectas.

Resolución. Escribimos la ecuación de la forma $(3x + 4y)^2 - 25 = 0$. Descomponiendo en factores el primer miembro, obtenemos $(3x + 4y + 5) \times (3x + 4y - 5) = 0$. De este modo, la ecuación dada define las rectas $3x + 4y + 5 = 0$ y $3x + 4y - 5 = 0$.

197. Mostrar que la ecuación $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 14x - 2y + 8 = 0$ define un conjunto de dos rectas.

Resolución. Escribimos la ecuación de la forma

$$3y^2 - 2(4x - 1)y - (3x^2 - 14x + 8) = 0.$$

Despejamos y en la ecuación:

$$y = \frac{4x - 1 \pm \sqrt{(4x-1)^2 + (9x^2 - 42x + 24)}}{3}, \quad \text{o bien,} \quad y = \frac{4y - 1 \pm (5x - 5)}{3}.$$

Obtenemos las ecuaciones de las rectas $y = 3x - 2$ e $y = (-x + 4)/3$. Estas ecuaciones se pueden escribir de la forma $3x - y - 2 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$.

198. ¿Qué línea se define por la ecuación $xy + 2x - 4y - 8 = 0$?

Resolución. Escribimos la ecuación de la forma $x(y+2)-4(y+2)=0$, o bien, $(x-4)(y+2)=0$. De este modo la ecuación determina dos rectas $x-4=0$ e $y+2=0$ una de las cuales es paralela al eje Ox y la otra lo es al eje Oy.

199. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0.$$

Resolución. 1. Transformamos esta ecuación valiéndonos de las fórmulas (3) de giro de los ejes de las coordenadas. Tenemos

$$5(x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha)^2+4(x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha)(x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha)+$$
$$+8(x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha)^2+8(x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha)+$$
$$+14(x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha)+5=0,\quad \text{o bien,}$$
$$(5\cos^2\alpha+4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+8\operatorname{sen}^2\alpha)x'^2+(5\operatorname{sen}^2\alpha-4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+$$
$$+8\cos^2\alpha)y'^2+[6\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)]x'y'+$$
$$+(8\cos\alpha+14\operatorname{sen}\alpha)x'+(14\cos\alpha-8\operatorname{sen}\alpha)y'+5=0.$$

Hallamos α a partir de la condición $4(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)+6\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=0$, o sea, igualamos a cero el coeficiente de $x'y'$. Obtenemos la ecuación $2\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha-2=0$. De aquí, $\operatorname{tg}\alpha_1=2$, $\operatorname{tg}\alpha_2=-1/2$.

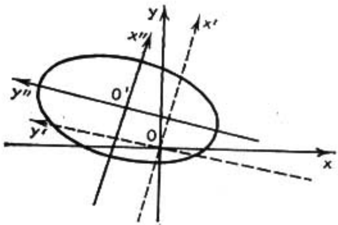


Fig. 15

Observemos que estos valores de la $\operatorname{tg}\alpha$ corresponden a dos sentidos perpendiculares recíprocamente. Por eso, tomando $\operatorname{tg}\alpha=2$ en vez de $\operatorname{tg}\alpha=-1/2$, sólo cambiamos de papel los ejes x' e y' (fig. 15).

Sea que la $\operatorname{tg}\alpha=2$, entonces $\operatorname{sen}\alpha=\pm2/\sqrt{5}$, $\cos\alpha=\pm1/\sqrt{5}$; tomamos los valores positivos de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Entonces la ecuación tomará el aspecto

$$9x'^2+4y'^2+\frac{36}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'+5=0,$$

o bien,

$$9\left(x'^2+\frac{4}{\sqrt{5}}x'\right)+4\left(y'^2-\frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right)=-5.$$

2. Completemos los cuadrados de las expresiones entre paréntesis:

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{36}{5}+\frac{1}{20}-5,$$

o bien,

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

Tomando como nuevo origen de las coordenadas el punto O' $(-2/\sqrt{5};\ 1/(4\sqrt{5})$, apliquemos las fórmulas de transformación de las coordenadas $x' = x'' - 2/\sqrt{5}$, $y' = y'' + 1/(4\sqrt{5})$; obtendremos

$$9x''^2+4y''^2=\frac{9}{4}, \quad \text{o bien,} \quad \frac{x''^2}{1/4}+\frac{y''^2}{9/16}=1$$

(ecuación de la elipse).

200. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Resolución. 1. Trasformemos esta ecuación valiéndonos de las fórmulas (3) de giro de los ejes de coordenadas:

$$6(x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha)(x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha) + 8(x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha)^2 -$$
$$- 12(x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha) - 26(x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha) + 11 = 0,$$

o bien

$$(6 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + 8 \operatorname{sen}^2\alpha)\, x'^2 + (8\cos^2\alpha - 6 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)\, y'^2 +$$
$$+ [16 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 6(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)]\, x'y' -$$
$$- (12\cos\alpha + 26 \operatorname{sen}\alpha)\, x' - (26\cos\alpha - 12\operatorname{sen}\alpha)\, y' + 11 = 0.$$

Igualando a cero el coeficiente de $x'y'$, tenemos

$16 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 6(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0$, o bien $3\operatorname{tg}^2\alpha - 8\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$.

De aquí $\operatorname{tg}\alpha_1 = 3$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = -1/3$; tomemos $\operatorname{tg}\alpha = 3$, entonces $\operatorname{sen}\alpha = \pm 3/\sqrt{10}$, $\cos\alpha = \pm 1/\sqrt{10}$; tomemos los valores positivos de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Entonces la ecuación revestirá el aspecto

$$9x'^2 - y'^2 - 9\sqrt{10}\,x' + \sqrt{10}\,y' + 11 = 0, \text{ o bien } 9(x'^2 -$$
$$- \sqrt{10}x') - (y'^2 - \sqrt{10}y') = -11.$$

2. Completemos los cuadrados de las expresiones entre paréntesis:

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{45}{2} - \frac{5}{2} - 11,$$

o bien

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 9.$$

Tomando como nuevo origen el punto O' $(\sqrt{10}/2;\ \sqrt{10}/2)$, aplicamos las fórmulas de transformación de las coordenadas $x' = x'' + \sqrt{10}/2$, $y' = y'' + \sqrt{10}/2$; obtenemos

$$9x''^2 - y''^2 = 9, \text{ o bien, } x''^2 - \frac{y''^2}{9} = 1$$

(ecuación de la hipérbola).

201. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

Resolución. 1. Transformemos la ecuación con ayuda de las fórmulas de giro de los ejes:

$$(x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha)^2 - 2(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$+ (x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha)^2 - 10(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha) -$$
$$- 6(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha) + 25 = 0,$$

o bien,

$$(\cos^2\alpha - 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \text{sen}^2\alpha)\,x'^2 + (\text{sen}^2\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)\,y'^2 + \\ + 2\,(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)\,x'y' - (10\cos\alpha + 6\,\text{sen}\,\alpha)\,x' + \\ + (10\,\text{sen}\,\alpha - 6\cos\alpha)\,y' + 25 = 0.$$

Igualamos a cero el coeficiente del producto $x'y'$; tenemos $2\,(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha) = 0$, de donde $\text{tg}^2\alpha = 1$, o sea, $\text{tg}\,\alpha_1 = 1$, $\text{tg}\,\alpha_2 = -1$. Tomamos $\text{tg}\,\alpha = 1$, de donde $\alpha = \pi/4$ y $\text{sen}\,\alpha = 1/\sqrt{2}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$. Entonces, la ecuación tomará el aspecto

$$2y'^2 - 8\sqrt{2}\,x' + 2\sqrt{2}\,y' + 25 = 0, \text{ o bien, } 2\,(y'^2 + \sqrt{2}\,y') - 8\sqrt{2}\,x' + 25 = 0.$$

2. Completamos el cuadrado de la expresión entre paréntesis:

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}\,x' - 24, \text{ o bien, } \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Tomando como nuevo origen el punto $O'(3/\sqrt{2};\ -\sqrt{2}/2)$, aplicamos las fórmulas de transformación de las coordenadas $x' = x'' - 3/\sqrt{2}$, $y' = y'' + \sqrt{2}/2$; obtendremos

$$y''^2 = 4\sqrt{2}\,x''$$

(ecuación de la parábola).

Mostrar que las ecuaciones siguientes definen las curvas que se descomponen en un par de rectas y hallar las ecuaciones de estas rectas:

202. $25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0.$

203. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$

204. $8x^2 - 18xy + 9y^2 + 2x - 1 = 0.$

Reducir a la forma canónica las ecuaciones de las curvas siguientes:

205. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0.$

206. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$

207. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$

§ 5. Determinantes de segundo y tercero órdenes y de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas

1. Determinantes de segundo orden y de un sistema de ecuaciones lineales. *Un determinante de segundo orden* correspondiente a la tabla de elementos $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ se define por la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

si su determinante $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, tiene una solución única que se halla por las fórmulas

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{1}$$

(*fórmulas de Cramer*).

Si el determinante $D = 0$, entonces el sistema es incompatible (cuando $D_x \neq 0$ y $D_y \neq 0$), o bien es indeterminado (cuando $D_x = D_y = 0$). En este último caso el sistema se reduce a una sola ecuación (por ejemplo, a la primera), mientras que la segunda es consecuencia de la primera.

La condición de incompatibilidad de un sistema se puede escribir de la forma $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$, y la condición de indeterminación de forma $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$.

Una ecuación lineal se llama *homogénea* si el término independiente de la misma es igual a cero.

Examinemos un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas con tres incógnitas.

$$\begin{cases} a_1y+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{cases}$$

1. Si $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$, entonces el sistema se reduce a una sola ecuación (por ejemplo, a la primera) en la cual una de las incógnitas se expresa por otras dos cuyos valores resultan arbitrarios.

2. Si la condición $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ no se cumple, las soluciones del sistema se hallan por las fórmulas

$$x=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot t, \quad y=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot t, \quad z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot t, \tag{2}$$

donde t puede tomar cualesquiera valores. Estas soluciones también se pueden escribir como una proporción:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=t.$$

Sin embargo, escribiendo de este modo las soluciones, hay que tener presente que si uno de los denominadores se anula también conviene igualar a cero el numerador respectivo.

208. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a+b)\,x-(a-b)\,y=4ab, \\ (a-b)\,x+(a+b)\,y=2\,(a^2-b^2). \end{cases}$$

Resolución. Hallamos el determinante D del sistema y los determinantes D_x y D_y que forman parte de los numeradores de las fórmulas (1):

$$D=\begin{vmatrix} a+b & -(a-b) \\ a-b & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2+(a-b)^2=2\,(a^2+b^2),$$

$$Dx=\begin{vmatrix} 4ab & -(a-b) \\ 2\,(a^2-b^2) & a+b \end{vmatrix}=4a^2b+4ab^2+2a^3-2a^2b-$$
$$-2ab^2+2b^3=2\,(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=2\,(a^2+b^2)\,(a+b),$$

$$Dy=\begin{vmatrix} a+b & 4ab \\ a-b & 2\,(a^2-b^2) \end{vmatrix}=2a^3+2a^2b-2ab^2-2b^3-4a^2b+4ab^2=$$
$$=2\,(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=2\,(a^2+b^2)\,(a-b).$$

De aquí, $x = D_x/D = a + b$, $y = D_y/D = a - b$.

209. Resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} 3x+4y+5z=0, \\ x+2y-3z=0. \end{cases}$$

Resolución. Utilizando las fórmulas (2), hallamos

$$x=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\cdot t=-22t, \quad y=-\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\cdot t=14t, \quad z=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot t=2t,$$

donde t puede tomar cualesquiera valores.

Resolver los sistemas de ecuaciones:

210. $\begin{cases} 5x-3y=1, \\ x+11y=6. \end{cases}$ **211.** $\begin{cases} 2x+y=1/5, \\ 4x+2y=1/3. \end{cases}$

212. $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2, \\ bx+ay=a^2+b^2. \end{cases}$ **213.** $\begin{cases} 3x+2y=1/6. \\ 9x+6y=1/2. \end{cases}$

214. $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 3x-5y+2z=0. \end{cases}$ **215.** $\begin{cases} x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha=\cos 2\alpha, \\ x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha=\operatorname{sen} 2\alpha. \end{cases}$

216. $\begin{cases} a^2x-2(a^2+b^2)y+b^2z=0, \\ 2x+2y-3z=0. \end{cases}$

2. Determinantes de tercer orden y de un sistema de ecuaciones lineales. *El determinante de tercer orden* correspondiente a la tabla de elementos $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ se define por la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Se llama *menor* del elemento dado de un determinante de tercer orden al determinante de segundo orden que se obtiene si en el determinante inicial se borra la fila y la columna que contienen el elemento dado. Se denomina *complemento algebraico* del elemento dado a su menor multiplicado por $(-1)^k$, donde k es la suma de los números de la fila y la columna que contienen el elemento dado.

De este modo, el signo que en este caso se asigna al menor del elemento respectivo del determinante se obtiene de la tabla siguiente:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

En la igualdad citada anteriormente que expresa el determinante de tercer orden, en el segundo miembro se tiene la suma de los productos de los elementos de la primera fila del determinante por sus complementos algebraicos.

Es justo el *teorema* general: *el determinante de tercer orden es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier fila o columna de aquél por los complementos algebraicos de estos últimos.* Este teorema permite calcular el valor del determinante desarrollándolo por los elementos de su fila o columna cualesquiera.

Señalemos que también es justo el *teorema* siguiente: *la suma de los productos de cualquier fila (columna) del determinante por los complementos algebraicos de los elementos de una otra fila (columna) es igual a cero.*

Propiedades del determinante

1ª. *El determinante no varía si sus filas se sustituyen por las columnas y las columnas, por las filas respectivas.*

2ª. *El factor común de los elementos de cualquier fila (o columna) puede ser sacado del signo del determinante.*

3ª. *Si los elementos de una fila (columna) del determinante son respectivamente iguales a los elementos de otra fila (columna), el determinante es igual a cero.*

4ª. *Al permutar dos filas (columnas) el determinante cambia de signo.*

5ª. *El determinante no varía si a los elementos de una fila (columna) se adicionan los elementos respectivos de otra fila (columna) multiplicados por un mismo número (teorema sobre la combinación lineal de las series paralelas del determinante).*

La solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

se halla por las fórmulas de Cramer

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad z=\frac{D_z}{D}, \tag{1}$$

donde

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Con ello se supone que $D \neq 0$ (si $D = 0$, el sistema inicial es indeterminado o incompatible).

Si el sistema es homogéneo, o sea, tiene el aspecto

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{cases}$$

y su determinante es distinto de cero, entonces él tiene una solución única, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Si el determinante de un sistema homogéneo es igual a cero, entonces el sistema se reduce a dos ecuaciones independientes (la tercera es su consecuencia), o bien a una sola ecuación (las dos otras son su consecuencia). El primer caso tiene lugar cuando entre los menores del determinante de un sistema homogéneo hay por lo menos uno, distinto de cero, el segundo caso tiene lugar cuando todos los menores de este determinante son iguales a cero.

En ambos casos, (véase el punto 1) el sistema homogéneo tiene un conjunto infinito de soluciones.

217. Calcular el determinante de tercer orden

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Resolución. Desarrollando el determinante por los elementos de la primera fila, obtendremos

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 3(-34) + 2(-17) = 68.$$

218. Calcular el mismo determinante basándose en el teorema sobre la combinación lineal de los elementos de las filas (columnas).

Resolución. A los elementos de la primera fila les adicionamos los elementos respectivos de la segunda fila multiplicados por 5 y a los elementos de la tercera fila les sumamos los elementos respectivos de la segunda fila multiplicados por 7

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el determinante por los elementos de la primera columna obtenemos

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 13\cdot 34 - 17\cdot 22 = 68.$$

219. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

Resolución. Por las fórmulas (1) hallamos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{14}{14} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1\cdot\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{28}{14} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{42}{14} = 3.$$

220. Resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} 4x+y+z=0, \\ x+3y+z=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$$

Resolución. Aquí $D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Para calcular este determinante adicionamos a los elementos de la primera fila los de la tercera fila multiplicados por -4 y a los elementos de la segunda fila les sumamos los de la tercera fila, multiplicados por -1.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=17.$$

Como $D\neq 0$, el sistema sólo tiene la solución nula $x=y=z=0$.

221. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ x+2y+9z=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$$

Resolución. Tenemos

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-15+14+1=0.$$

Por consiguiente, el sistema tiene soluciones distintas de la nula. Resolvemos el sistema de dos primeras ecuaciones (la tercera es consecuencia de ellas):

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ x+2y+9z=0. \end{cases}$$

De aquí por las fórmulas (2) del punto 1 obtenemos

$$x=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}\cdot t=20t,\quad y=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}\cdot t=-28t,\quad z=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot t=4t.$$

222. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix},$$

desarrollándolo por los elementos de la tercera fila.

223. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix},$$

utilizando el teorema sobre la combinación lineal de las filas (columnas).

224. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}.$$

Resolver los sistemas de ecuaciones:

225. $\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$

226. $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12, \\ 3x + 2y + 5z = -10, \\ 2x + 5y - 3z = 6. \end{cases}$

227. $\begin{cases} -5x + y + z = 0, \\ x - 6y + z = 0, \\ x + y - 7z = 0. \end{cases}$

228. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + 6y + 5z = 0, \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$

229. $\begin{cases} ax + by + cz = a - b, \\ bx + cy + az = b - c, \\ cx + ay + bz = c - a, \end{cases}$ si $a + b + c \neq 0$.

230. $\begin{cases} ax + by + (a+b)z = 0, \\ bx + ay + (a+b)z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$

Capítulo II. Elementos de álgebra vectorial

§ 1. Coordenadas rectangulares en el espacio

Si en el espacio se da el sistema cartesiano rectangular $Oxyz$, entonces un punto M del espacio que tiene las coordenadas x (abscisa), y (ordenada) y z (z-coordenada) se designa por M $(x;\ y;\ z)$.

La distancia comprendida entre dos puntos A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ se determina por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1}$$

En particular, la distancia del punto M $(x;\ y;\ z)$ al origen de coordenadas O se determina por la fórmula

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2}$$

Si un segmento, de cuyos extremos sirven los puntos A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, está dividido por el punto C $(x;\ y;\ z)$ en la razón λ (véase el capítulo I, § 1), entonces las coordenadas del punto M se determinan por las fórmulas

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

En particular, las coordenadas del punto medio del segmento se determinan por las fórmulas

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{4}$$

231. Se dan los puntos M_1 $(2;\ 4;\ -2)$ y M_2 $(-2;\ 4;\ 2)$. Hallar sobre la recta M_1M_2 el punto M que divide el segmento M_1M_2 en la razón $\lambda = 3$.

Resolución. Utilizamos las fórmulas de división de un segmento en la razón dada

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{2 + 3(-2)}{1+3} = -1, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{4 + 3\cdot 4}{1+3} = 4,$$

$$z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{-2 + 3\cdot 2}{1+3} = 1.$$

Por consiguiente, el punto buscado M: $(-1;\ 4;\ 1)$.

232. Dado el triángulo: A (1; 1; 1), B (5; 1; —2), C (7; 9; 1). **Hallar** las coordenadas del punto D de intersección de la bisectriz del ángulo A con el lado CB.

Resolución. Hallamos las longitudes de los lados del triángulo que forman el ángulo A:

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2 + (1-1)^2} = 10;$$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = 5.$$

Por lo tanto, $|CD| : |DB| = 10 : 5 = 2$, puesto que la bisectriz divide el lado CB en partes proporcionales a los lados adyacentes. De este modo,

$$x_D = \frac{x_C + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{7+2\cdot 5}{1+2} = \frac{17}{3},$$

$$y_D = \frac{y_C + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{9+2\cdot 1}{1+2} = \frac{11}{3},$$

$$z_D = \frac{z_C + \lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{1+2(-2)}{1+2} = -1;$$

el punto buscado es D (17/3; 11/3; —1).

233. Hallar sobre el eje Ox un punto equidistante de los puntos A (2; —4; 5) y B (—3; 2; 7).

Resolución. Sea M el punto buscado. El mismo debe cumplir la igualdad $|AM| = |MB|$. Como el punto buscado está sobre el eje Ox, sus coordenadas son $(x;\ 0;\ 0)$ y por eso tenemos

$$|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + (-4)^2 + 5^2},$$

$$|MB| = \sqrt{(x+3)^2 + 2^2 + 7^2}.$$

De aquí, una vez efectuada la elevación al cuadrado, obtenemos $(x-2)^2 + 41 = (x+3)^2 + 53$, o bien, $10x = -17$, es decir, $x = -1{,}7$. De este modo, el punto buscado es M: (—1,7; 0; 0).

234. Se dan los puntos A (3; 3; 3) y B (—1; 5; 7). Hallar las coordenadas de los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes congruentes.

235. Se da un triángulo: A (1; 2; 3), B (7; 10; 3), C (—1; 3; 1). **Mostrar** que el ángulo A es obtuso.

236. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de un triángulo que tiene por vértices los puntos A (2; 3; 4), B (3; 1; 2) y C (4; —1; 3).

237. ¿En qué razón el punto M que equidista de los puntos A (3; 1; 4) y B (—4; 5; 3) dividirá el segmento del eje Oy comprendido entre el origen de las coordenadas y el punto C (0; 6; 0)?

238. Hallar sobre el eje Oz el punto que equidiste de los puntos M_1 (2; 4; 1) y M_2 (—3; 2; 5).

239. Hallar sobre el plano xOy el punto que equidiste de los puntos A (1; —1; 5), B (3; 4; 4) y C (4; 6; 1).

§ 2. Vectores y operaciones elementales sobre ellos

Un vector libre **a** (o sea, tal vector que sin cambiar de longitud y sentido puede ser trasladado a un punto cualquiera del espacio) definido en el espacio de coordenadas $Oxyz$, se puede representar de la forma

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Tal representación del vector **a** se llama *descomposición por los ejes de coordenadas* o *descomposición por los versores*.

Aquí a_x, a_y, a_z son las proyecciones del vector **a** sobre los ejes respectivos de coordenadas (se denominan *coordenadas* del vector **a**), **i**, **j**, **k** son los versores de estos ejes (vectores unitarios el sentido de cada uno de los cuales coincide con el sentido positivo del eje respectivo).

Los vectores $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$ y $a_z\mathbf{k}$ cuya suma representa el vector **a** han recibido el nombre de *componentes* del vector **a** por los ejes de coordenadas.

La longitud (módulo) del vector **a** se designa por a o $|\mathbf{a}|$ y se determina por la fórmula

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

La dirección del vector **a** se determina por los ángulos α, β, y γ formados por el mismo con los ejes de coordenadas Ox, Oy y Oz. Los cosenos de estos ángulos (llamados *cosenos directores del vector*) se determinan por las fórmulas:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Los cosenos directores de un vector están ligados por la relación

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Si los vectores **a** y **b** están representados por sus descomposiciones en versores, su suma y diferencia se determinan por las fórmulas

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\,\mathbf{i} + (a_y + b_y)\,\mathbf{j} + (a_z + b_z)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x)\,\mathbf{i} + (a_y - b_y)\,\mathbf{j} + (a_z - b_z)\,\mathbf{k}.$$

Recordemos que la *suma* de dos vectores **a** y **b** cuyos orígenes coinciden se representan por el vector de mismo origen que coincide con una diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores **a** y **b**. La *diferencia* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ de estos vectores se representa por el vector que coincide con la segunda diagonal del mismo paralelogramo, con ello el origen de este vector está en el extremo del vector **b** y su extremo, en el extremo del vector **a** (fig. 16).

La suma de un número cualquiera de vectores se puede hallar por la regla del polígono (fig. 17).

El producto del vector **a** por un factor escalar m se determina por la fórmula

$$m\mathbf{a} = ma_x\mathbf{i} + ma_y\mathbf{j} + ma_z\mathbf{k}.$$

Recordemos que los vectores **a** y m**a** son paralelos (colineales) y están orientados en el mismo sentido si $m > 0$ y en sentidos opuestos si $m < 0$.

En particular, si $m = 1/a$, el vector $\mathbf{a}/a$ tiene una longitud igual a la unidad *y el sentido coincidente con el del vector* **a**. *Este vector se denomina vector unitario* del vector **a** y se designa por $\mathbf{a}_0$.

De este modo, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}/a$, o bien, $\mathbf{a} = a\mathbf{a}_0$.

El vector $\overline{OM}$ cuyo origen está en el origen de coordenadas y su extremo se encuentra en el punto $M\,(x;\ y;\ z)$ se llama *radio vector* del punto M y se designa por $\mathbf{r}\,(M)$ o simplemente por **r**. Como sus coordenadas coinciden con las del punto M, su descomposición en versores tiene la forma

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

El vector $\overline{AB}$ que tiene por origen el punto A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y por extremo el punto B $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ se puede escribir de la forma $\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, donde $\mathbf{r}_2$ es

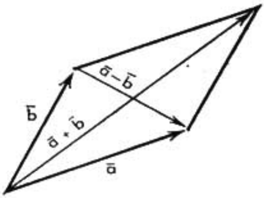


Fig. 16

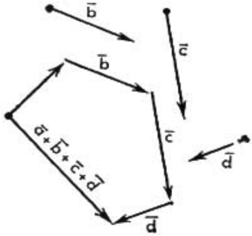


Fig. 17

el radio vector del punto B y $\mathbf{r}_1$, el radio vector del punto A. Por eso la descomposición del vector $\overline{AB}$ en versores tiene la forma

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}.$$

Su longitud coincide con la distancia entre los puntos A y B.

$$|\,\overline{AB}\,| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

En virtud de las fórmulas citadas anteriormente el sentido del vector $\overline{AB}$ se determina por los cosenos directores:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \qquad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \qquad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

240. En el triángulo ABC el lado AB está dividido por los puntos M y N en tres partes congruentes: $|\,AM\,| = |\,MN\,| = |\,NB\,|$. Hallar el vector $\overline{CM}$ si $\overline{CA} = \mathbf{a}$, $\overline{CB} = \mathbf{b}$.

Resolución. Tenemos $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Por consiguiente, $\overline{AM} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/3$. Como $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, entonces

$$\overline{CM} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{3} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}.$$

241. En el triángulo ABC la recta AM es la bisectriz del ángulo BAC, además, el punto M pertenece al lado BC. Hallar $\overline{AM}$ si $\overline{AB} = \mathbf{b}$, $\overline{AC} = \mathbf{c}$.

Resolución. Tenemos $\overline{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. De la propiedad de la bisectriz del ángulo interior del triángulo se deduce que $|\,BM\,| : |\,MC\,| = b : c$, o sea, $|\,BM\,| : |\,BC\,| = b : (b + c)$. De aquí obtenemos $BM = \frac{b}{b+c}(\mathbf{c} - \mathbf{b})$. Como $\overline{AM} =$

$= \overline{AB} + \overline{BM}$, entonces

$$\overline{AM} = \mathbf{b} + \frac{b}{b+c}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \frac{b\mathbf{c} + c\mathbf{b}}{b+c}.$$

242. Los radios vectores de los vértices del triángulo ABC son $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$. Hallar el radio vector del punto de intersección de las medianas del triángulo.

Resolución. Tenemos $\overline{BC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$; $\overline{BD} = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)/2$ (D es el punto medio del lado BC); $\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$; $\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)/2 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1)/2$; $\overline{AM} = (2/3)\,\overline{AD}$ (M es el punto de intersección de las medianas), por eso $\overline{AM} = (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1)/3$. De suerte que

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = \mathbf{r}_1 + \overline{AM} = (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1)/3 + \mathbf{r}_1, \text{ o bien, } \mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/3.$$

243. Hallar la longitud del vector $\mathbf{a} = 20\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 60\mathbf{k}$ y sus cosenos directores.

Resolución. Tenemos

$$a = \sqrt{20^2 + 30^2 + 60^2} = 70; \quad \cos\alpha = 20/70 = 2/7; \quad \cos\beta = 30/70 = 3/7;$$
$$\cos\gamma = -60/70 = -6/7.$$

244. Hallar el vector $\mathbf{a} = \overline{AB}$ si $A\,(1;\ 3;\ 2)$ y $B\,(5;\ 8;\ -1)$.

Resolución. Las proyecciones del vector $\overline{AB}$ sobre el eje de coordenadas son las diferencias de las coordenadas respectivas de los puntos B y A: $a_x = 5 - 1 = 4$, $a_y = 8 - 3 = 5$, $a_z = -1 - 2 = -3$. Por consiguiente, $\overline{AB} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

245. Se da el triángulo ABC. Sobre el lado BC está el punto M de modo que $|BM| : |MC| = \lambda$. Hallar $\overline{AM}$ si $\overline{AB} = \mathbf{b}$, $\overline{AC} = \mathbf{c}$.

246. Se da $\overline{AB} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overline{BC} = -4\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overline{CD} = -5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$. Demostrar que $ABCD$ es un trapecio.

247. Hallar las proyecciones del vector $\mathbf{a}$ sobre el eje de coordenadas si $\mathbf{a} = \overline{AB} + \overline{CD}$, $A\,(0;\ 0;\ 1)$, $B\,(3;\ 2;\ 1)$, $C\,(4;\ 6;\ 5)$ y $D\,(1;\ 6;\ 3)$.

248. Hallar la longitud del vector $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + (m+1)\,\mathbf{j} + m\,(m+1)\,\mathbf{k}$.

249. Se dan los radios vectores de los vértices del triángulo ABC: $\mathbf{r}_A = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_B = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_C = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Mostrar que el triángulo ABC es isósceles.

250. Calcular el módulo del vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} - (1/5) \times (4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ y hallar sus cosenos directores.

251. Se dan los puntos $M_1\,(1;\ 2;\ 3)$ y $M_2\,(3;\ -4;\ 6)$. Hallar la longitud y el sentido del vector $\overline{M_1M_2}$.

252. Se da el vector $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Hallar el vector $\mathbf{b}$ si $b = a$, $b_y = a_y$ y $\mathbf{b}_x = 0$.

253. El radio vector del punto M forma con el eje Oy un ángulo de $60°$ y con el eje Oz un ángulo de $45°$; su longitud $z = 8$. Hallar las coordenadas del punto M si su abscisa es negativa.

§ 3. Productos escalar y vectorial. Producto mixto

1. Producto escalar. Se llama *producto escalar* de dos vectores **a** y **b** a un número que es igual al producto de las longitudes de estos vectores por el coseno del ángulo φ entre ellos:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi.$$

Propiedades de un producto escalar

1ª. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$, o bien, $\mathbf{a}^2 = a^2$.
2ª. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, si $\mathbf{a} = 0$, ó $\mathbf{b} = 0$, ó $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
3ª. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (ley conmutativa).
4ª. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ (ley distributiva).
5ª. $(m\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ (ley asociativa con respecto a un factor escalar).

Los productos escalares de los versores de los ejes de coordenadas:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0.$$

Supongamos que los vectores **a** y **b** están definidos por sus coordenadas: $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$. Entonces el producto escalar de estos vectores se encuentra por la fórmula

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

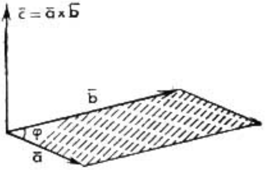


Fig. 18

2. Producto vectorial. Se llama *producto vectorial* del vector **a** por el vector **b**, a un tercer vector **c** que se determina del modo siguiente (fig. 18):

1) el módulo del vector **c** es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores **a** y **b** ($c = ab\,\mathrm{sen}\,\varphi$, donde φ es el ángulo entre los vectores **a** y **b**);

2) el vector **c** es perpendicular a los vectores **a** y **b**;

3) los vectores **a**, **b** y **c**, después de reducidos a un origen común, están orientados unos con respecto a otros, como versores **i**, **j**, **k** (en el sistema derecho de coordenadas forman el llamado triplete *derecho* de los vectores).

El producto vectorial de **a** por **b** se designa $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Propiedades del producto vectorial

1ª. $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, o sea, el producto vectorial no posee la propiedad conmutativa.
2ª. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$, si $\mathbf{a} = 0$, ó $\mathbf{b} = 0$ o bien $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.
3ª. $(m\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (propiedad conmutativa con respecto a un factor escalar).
4ª. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (propiedad distributiva).

Los productos vectoriales de los versores de coordenadas **i**, **j** y **k**:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0,$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = -\mathbf{j}\times\mathbf{i} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = -\mathbf{k}\times\mathbf{j} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = -\mathbf{i}\times\mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

El producto vectorial de los vectores $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ se encuentra más cómodamente por la fórmula

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

3. **Producto mixto.** Se llama *producto mixto* de los vectores **a**, **b** y **c** al producto escalar del vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ por el vector **c**, o sea, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

El producto mixto de tres vectores **a**, **b**, **c** es igual en módulo al volumen del paralelepípedo construido sobre estos vectores.

Propiedades del producto mixto

1ª. El producto mixto de tres vectores es igual a cero si:
a) uno o más de los vectores multiplicados, es igual a cero;
b) dos de los vectores multiplicados son paralelos (colineales);
c) todos los tres vectores son paralelos a un mismo plano (coplanares)

2ª. El producto mixto no varía si en él cambian de lugar los signos de multiplicación vectorial ($\times$) y escalar ($\cdot$), o sea $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. En virtud de esta propiedad el producto mixto de los vectores **a**, **b** y **c** convenimos escribirlo de forma **abc**.

3ª. *El producto mixto no cambia si los vectores se transponen en el orden circular:*

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}.$$

4ª. Al transponer dos vectores cualesquiera el producto mixto cambia sólo en el signo:

$$\mathbf{bac} = -\mathbf{abc}; \quad \mathbf{cba} = -\mathbf{abc}; \quad \mathbf{acb} = -\mathbf{abc}.$$

Sean los vectores definidos por sus descomposiciones en versores: $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$; $\mathbf{c} = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

De las propiedades del producto mixto de tres vectores se deduce lo siguiente:

de condición necesaria y suficiente del carácter coplanar de tres vectores sirve la condición $\mathbf{abc} = 0$;

el volumen V_1 del paralelepípedo construido sobre los vectores **a**, **b** y **c** y el volumen V_2 de la pirámide triangular se encuentran por las fórmulas:

$$V_1 = |\,\mathbf{abc}\,|; \quad V_2 = \frac{1}{6} V_1 = \frac{1}{6} |\,\mathbf{abc}\,|.$$

254. Hallar el producto escalar de los vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Resolución. Hallamos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 2 + 4(-5) + 7 \cdot 2 = 0$. Como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

255. Se dan los vectores $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + m\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$. ¿Para qué valor de m estos vectores son perpendiculares?

Resolución. Hallamos el producto escalar de estos vectores: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4m + 3m - 28$; como, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. De aquí $7m - 28 = 0$, o sea, $m = 4$.

256. Hallar $(5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$ si $a = 2$, $b = 3$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Resolución. Tenemos

$$(5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 10\mathbf{a}^2 - 5\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 6\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 3\mathbf{b}^2 = 10a^2 - 3b^2 = 40 - 27 = 13$$

257. Determinar el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Resolución. Como $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi$, entonces $\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{ab}$. Tenemos

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3(-2) = 8, \quad a = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14},$$

$$b = \sqrt{36+16+4} = 2\sqrt{14}.$$

Por consiguiente $\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}} = \frac{2}{7}$ y $\varphi = \arccos\frac{2}{7}$.

258. Hallar el vector unitario que tiene el mismo sentido que el vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Resolución. Hallamos la longitud del vector dado: $|\mathbf{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Puesto que $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, $\mathbf{a}_0 = (1/3)\,\mathbf{i} + (2/3)\,\mathbf{j} + (2/3)\,\mathbf{k}$.

259. Hallar el producto vectorial de los vectores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Resolución. Tenemos

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

o sea, $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

260. Calcular el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

Resolución. Encontramos el producto vectorial de **a** por **b**:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 14\mathbf{i} - 42\mathbf{j} - 21\mathbf{k}.$$

Puesto que el módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo construido sobre ellos, entonces

$$S = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{14^2+42^2+21^2} = 49 \text{ (unidades cuadradas).}$$

261. Calcular el área del triángulo que tiene por vértices los puntos $A\,(1;\ 1;\ 1)$, $B\,(2;\ 3;\ 4)$, $C\,(4;\ 3;\ 2)$.

Resolución. Hallamos los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (2-1)\,\mathbf{i} + (3-1)\,\mathbf{j} + (4-1)\,\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

$$\overline{AC} = (4-1)\,\mathbf{i} + (3-1)\,\mathbf{j} + (2-1)\,\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

El área del triángulo ABC es igual a la mitad del área del paralelogramo construido sobre los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, por eso hallamos el producto vectorial de estos vectores:

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Por consiguiente,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\mid \overline{AB}\times\overline{AC}\mid=\frac{1}{2}\sqrt{16+64+16}=\sqrt{24} \text{ (unidades cuadradas).}$$

262. Calcular el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ y $3\mathbf{a}+\mathbf{b}$ si $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$, $(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=30°$.

Resolución. Tenemos

$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}+\mathbf{b})=3\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}+9\mathbf{b}\times\mathbf{a}+3\mathbf{b}\times\mathbf{b}=$$
$$=3\cdot 0+\mathbf{a}\times\mathbf{b}-9\mathbf{a}\times\mathbf{b}+3\cdot 0=-8\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

(puesto que $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{b}=0$, $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$). De suerte que

$$S=8\,|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=8\cdot 1\cdot 1\cdot \operatorname{sen} 30°=4 \text{ (unidades cuadradas).}$$

263. Hallar el producto mixto de los vectores $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

Resolución. Tenemos

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&3&-1\\1&1&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&-1\\1&4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\1&4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}=26+5+2=33.$$

264. Mostrar que los vectores $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ son coplanares.

Resolución. Hallamos el producto mixto de los vectores:

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}2&5&7\\1&1&-1\\1&2&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-1\\2&2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1&-1\\1&3\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=8-15+7=0.$$

Como $\mathbf{abc}=0$, los vectores dados son coplanares.

265. Hallar el volumen de una pirámide triangular que tiene por vértices los puntos A (2; 2; 2), B (4; 3; 3), C (4; 5; 4) y D (5; 5; 6).

Resolución. Hallamos los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ que coinciden con las aristas de la pirámide convergentes en el vértice A:

$$\overline{AB}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k},\quad \overline{AC}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k},\quad \overline{AD}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}.$$

Encontramos el producto mixto de estos vectores:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&2\\3&4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2&3\\3&3\end{vmatrix}=2\cdot 6-1\cdot 2-1\cdot 3=7.$$

Puesto que el volumen de la pirámide es igual a 1/6 parte del volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, entonces $V=7/6$ (unidades cúbicas).

266. Calcular $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{c}-\mathbf{a})$.

Resolución. Como $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$, estos vectores son coplanares (fig. 19). Por lo tanto, su producto mixto es igual a cero, o sea $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$.

267. Hallar el producto escalar de los vectores $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ y $5\mathbf{a} - 6\mathbf{b}$, si $a = 4$, $b = 6$ y el ángulo comprendido entre los vectores **a** y **b** es igual a $\pi/3$.

268. Determinar el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

269. ¿Para qué valor de m los vectores $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ son perpendiculares?

270. Hallar el producto escalar de los vectores $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$ y $5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$ si $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ y $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{c})} = \widehat{(\mathbf{b}, \mathbf{c})} = \pi/3$.

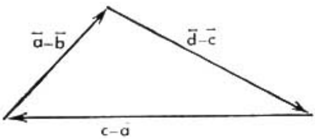


Fig. 19

271. Hallar el trabajo realizado por la fuerza **F** al efectuar el desplazamiento **s** si $F = 2$, $s = 5$, $\varphi = \widehat{(\mathbf{F}, \mathbf{s})} = \pi/6$.

272. Hallar el vector unitario perpendicular a los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

273. Los vectores **a**, **b**, **c** son de igual longitud y forman de dos en dos ángulos congruentes. Hallar el vector **c** si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

274. Se dan los vectores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Hallar $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ y $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

275. Se dan los radios vectores de tres vértices sucesivos del paralelogramo $ABCD$: $\mathbf{r}_A = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_B = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_C = 7\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$. Determinar el radio vector del cuarto vértice D.

276. Mostrar que los vectores **a** y **b** no pueden ser perpendiculares si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i} > 0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j} > 0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{k} > 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{i} < 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{j} < 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{k} < 0$.

277. Mostrar que los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + m\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + (m + 1)\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + m\mathbf{k}$, no pueden ser coplanares para ningún valor de m.

278. ¿Pueden los números x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 ser distintos de cero y satisfacer las ecuaciones que se dan a continuación:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{aligned} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 &= 0, \\ x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 &= 0, \\ x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 &= 0? \end{aligned}$$

279. Hallar el producto vectorial de los vectores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

280. Calcular el área de un triángulo que tiene por vértices los puntos $A\,(2;\ 2;\ 2)$, $B\,(4;\ 0;\ 3)$ y $C\,(0;\ 1;\ 0)$.

281. Hallar el producto mixto de los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

282. Mostrar que los vectores $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, son coplanares.

283. Calcular el volumen de una pirámide triangular que tiene por vértices A (0; 0; 1), B (2; 3; 5), C (6; 2; 3) y D (3; 7; 2).

284. En el problema precedente hallar la longitud de la altura de la pirámide, bajada a la cara BCD.

285. Mostrar que los puntos A (5; 7; −2), B (3; 1; −1), C (9; 4; −4) y D (1; 5; 0) pertenecen a un plano.

Capítulo III. Geometría analítica del espacio

§ 1. El plano y la recta

1. El plano. 1) *La ecuación de un plano en forma vectorial*, tiene el aspecto

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p.$$

Aquí $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es el radio vector de un punto corriente del plano $M(x;\ y;\ z)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$, es el vector unitario que tiene el sentido de la perpendicular bajada sobre el plano a partir del origen de las coordenadas; α, β, γ, son los ángulos formados por esta perpendicular con los ejes de las coordenadas Ox, Oy, Oz, y p es la longitud de esta perpendicular.

Al pasar a las coordenadas esta ecuación adquiere el aspecto

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{1}$$

(*ecuación normal de un plano*).

2) La ecuación de todo plano se puede escribir también en la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

si $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (*ecuación general*). Aquí A, B, C, se pueden considerar como coordenadas de cierto vector $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ perpendicular al plano (*vector normal* del plano). Para reducir la ecuación general del plano a la forma normal es necesario multiplicar todos los términos de la ecuación por el factor normalizador

$$\mu = \pm 1/N = \pm 1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}, \tag{3}$$

donde el signo delante del radical es contrario al del término independiente D en la ecuación general del plano.

3) Casos particulares de la situación de un plano definido por la ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$:

$A = 0$; es paralelo al eje Ox;
$B = 0$; es paralelo al eje Oy;
$C = 0$; es paralelo al eje Oz;
$D = 0$; pasa por el origen de las coordenadas;
$A = B = 0$; es perpendicular al eje Oz (paralelo al plano xOy);
$A = C = 0$; es perpendicular al eje Oy (paralelo al plano xOz);
$B = C = 0$; es perpendicular al eje Ox (paralelo al plano yOz);
$A = D = 0$; pasa por el eje Ox;
$B = D = 0$; pasa por el eje Oy;
$C = D = 0$; pasa por el eje Oz;
$A = B = D = 0$; coincide con el plano xOy ($z = 0$);
$A = C = D = 0$; coincide con el plano xOz ($y = 0$);
$B = C = D = 0$; coincide con el plano yOz ($x = 0$).

Si en la ecuación general de un plano el coeficiente $D \neq 0$, entonces, dividiendo todos los términos de la ecuación por $-D$, ésta se puede llevar a la forma

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{4}$$

(aquí $a = -D/A$; $b = -D/B$, $c = -D/C$). Esta ecuación del plano se llama *ecuación segmentaria*; en ella a, b y c son, respectivamente, la abscisa, la ordenada y la z-coordenada de los puntos de intersección del plano con los ejes Ox, Oy y Oz.

4) *El ángulo* φ *entre los planos* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ se determina por la fórmula

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{5}$$

La condición de paralelismo de dos planos es:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2. \tag{6}$$

La condición de perpendicularidad de dos planos es:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{7}$$

5) *La distancia del punto* M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *al plano* definido por la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ se obtiene por la fórmula

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{8}$$

Ella es igual, en valor absoluto, al resultado obtenido por la sustitución de las coordenadas del punto en la ecuación normal del plano; el signo del resultado de esta sustitución caracteriza la posición recíproca del punto y del origen de las coordenadas con respecto al plano dado: «+» si el punto M_0 y el origen de las coordenadas están situados a diferentes lados del plano y «—» si ellos están situados a un mismo lado del plano.

6) *La ecuación de un plano que pasa por el punto* M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *y la perpendicular al vector* $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, tiene la forma

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \tag{9}$$

Para los valores arbitrarios de A, B y C esta última ecuación define cierto plano perteneciente a un fajo de planos que pasan por el punto M_0. Por eso se llama con frecuencia *ecuación de un fajo de planos*.

7) La ecuación

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{10}$$

para un valor arbitrario de λ define cierto plano que pasa por la recta de intersección de los planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \text{(I)} \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \text{(II)}$$

o sea, cierto plano perteneciente a un haz de los planos que pasan por esta recta (en virtud de lo cual tal ecuación se denomina frecuentemente *ecuación de un haz de planos*). Si los planos definidos por las ecuaciones (I) y (II) son paralelos, el haz de planos se convierte en conjunto de planos paralelos a aquéllos.

8) *La ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados* $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$, $M_3(\mathbf{r}_3)$ (aquí $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$) se encuentra con más facilidad a partir de la condición de coplanarcidad de los vectores $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, es el radio vector de un punto corriente M del plano buscado:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1) = 0,$$

o, escribiendo en la forma de coordenadas:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (11)$$

286. Reducir a la forma normal la ecuación del plano $2x+3y-6z+21=0$.

Resolución. Hallamos el factor normalizador (cuyo signo es «−», puesto que $D=21>0$):

$$\mu=-1/\sqrt{2^2+3^2+6^2}=-1/7.$$

De suerte que la ecuación normal del plano dado tiene la forma

$$-(2/7)\,x-(3/7)\,y+(6/7)\,z-3=0.$$

287. Determinar la distancia del punto $M_0\,(3;\ 5;\ -8)$ al plano $6x-3y+2z-28=0$.

Resolución. Utilizando la fórmula (8) de la distancia de un punto a un plano, hallamos

$$d=\frac{|6\cdot3-3\cdot5+2\cdot(-8)-28|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{41}{7}.$$

Puesto que el resultado de sustitución de las coordenadas del punto M_0 en la ecuación normal del plano es negativo, el punto M_0 y el origen de coordenadas están a un lado del plano dado.

288. Escribir la ecuación de un plano que pasa por el punto $M\,(2;\ 3;\ 5)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{N}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

Resolución. Basta con aplicar la ecuación (9) del plano que pasa por un punto dado y es perpendicular a un vector dado:

$4\,(x-2)+3\,(y-3)+2\,(z-5)=0,\quad$ o sea, $\quad 4x+3y+2z-27=0.$

289. Hallar la ecuación de un plano que pase por el punto $M\,(2;\ 3;\ -1)$ y es paralelo al plano $5x-3y+2z-10=0$.

Resolución. Escribimos la ecuación (9) de un fajo de planos que pasan por el punto dado:

$$A\,(x-2)+B\,(y-3)+C\,(z+1)=0.$$

El vector normal al plano buscado coincide con el vector normal $\mathbf{n}=\{5;\ -3;\ 2\}$ al plano dado; por consiguiente, $A=5$, $B=-3$, $C=2$ y la ecuación del plano buscado tendrá el aspecto

$5\,(x-2)-3\,(y-3)+2\,(z+1)=0,\quad$ o bien $\quad 5x-3y+2z+1=0.$

290. Desde el punto $P\,(2;\ 3;\ -5)$ se trazan las perpendiculares a los ejes de las coordenadas. Escribir la ecuación del plano que pasa por sus bases.

Resolución. De bases de las perpendiculares trazadas a los planos de coordenadas sirven los puntos siguientes: $M_1\,(2;\ 3;\ 0)$, $M_2\,(2;\ 0;\ -5)$, $M_3\,(0;\ 3;\ -5)$. Utilizando la relación (11), escribamos la ecuación del plano que pasa por los puntos M_1, M_2, M_3:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0,\ \text{o bien}\ 15x+10y-6z-60=0.$$

291. Escribir la ecuación de un plano que pase por el punto A (5; 4; 3) y corte segmentos congruentes sobre los ejes de coordenadas.

Resolución. Aplicamos la ecuación segmentaria (4) del plano, en la cual $a = b = c$;

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1.$$

Las coordenadas del punto A satisfacen la ecuación del plano buscado, por eso se cumple la igualdad $5/a + 4/a + 3/a = 1$, de donde $a = 12$. Así, obtenemos la ecuación $x + y + z - 12 = 0$.

292. Escribir la ecuación de un plano que pase por la línea de intersección de los planos $x + y + 5z - 1 = 0$, $2x + 3y - z + 2 = 0$ y por el punto M (3; 2; 1).

Resolución. Utilizamos la ecuación (10) de un haz de planos:

$$x + y + 5z - 1 + \lambda (2x + 3y - z + 2) = 0.$$

Determinamos el valor de λ a partir de la condición de que las coordenadas del punto M satisfagan esta ecuación:

$$3 + 2 + 5 - 1 + \lambda (6 + 6 - 1 + 2) = 9 + 13\lambda = 0,$$

de donde $\lambda = -9/13$. De este modo, la ecuación buscada tiene la forma

$$x + y + 5z - 1 - \frac{9}{13}(2x + 3y - z + 2) = 0, \quad \text{o bien,} \quad 5x + 14y - 74z + 31 = 0.$$

293. Escribir la ecuación del plano que pase por la línea de intersección de los planos $x + 3y + 5z - 4 = 0$ y $x - y - 2z + 7 = 0$ y es paralelo al eje Oy.

Resolución. Utilicemos la ecuación de un haz de planos:

$$x + 3y + 5z - 4 + \lambda (x - y - 2z + 7) = 0;$$

$$(1 + \lambda) x + (3 - \lambda) y + (5 - 2\lambda) z + (7\lambda - 4) = 0.$$

Como el plano buscado es paralelo al eje de las ordenadas, el coeficiente de y debe ser igual a cero: $3 - \lambda = 0$, o sea, $\lambda = 3$. Sustituyend oel valor hallado λ en la ecuación del haz, obtenemos $4x - z + 17 = 0$.

294. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A (2; —1; 4) y B (3; 2; —1) perpendicularmente al plano $x + y + 2z - 3 = 0$.

Resolución. En calidad de vector normal $\mathbf{N}$ del plano buscado se puede tomar un vector que sea perpendicular al vector $\overline{AB} = \{1; 3; -5\}$ y al vector normal $\mathbf{n} = \{1; 1; 2\}$ del plano dado. Por eso tomamos como $\mathbf{N}$ el producto vectorial de $\overline{AB}$ por $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{N} = \overline{AB} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Queda por aplicar la ecuación del plano que pasa por un punto dado (por ejemplo, A) perpendicularmente al vector definido $\mathbf{N} = \{11; -7; -2\}$;

$$11 (x - 2) - 7 (y + 1) - 2 (z - 4) = 0, \quad \text{o bien,} \quad 11x - 7y - 2z - 21 = 0.$$

295. Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto M (3; -1; -5) y es perpendicular a los planos $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ y $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Resolución. Es evidente que en calidad de vector normal $\mathbf{N}$ del plano buscado se puede tomar el producto vectorial de los vectores $\mathbf{n}_1 = \{3; -2; 2\}$ y $\mathbf{n}_2 = \{5; -4; 3\}$ de los planos dados:

$$\mathbf{N} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Ahora, utilizando la ecuación del plano que pasa por el punto dado M (3; -1; -5) perpendicularmente al vector $\mathbf{N} = \{2; 1; -2\}$, obtenemos

$$2(x-3) + (y+1) - 2(z+5) = 0, \text{ o bien } 2x + y - 2z - 15 = 0.$$

296. Reducir a la forma normal las ecuaciones de los planos siguientes: 1) $x + y - z - 2 = 0$; 2) $3x + 5y - 4z + 7 = 0$.

297. Hallar la distancia del punto M_0 (1; 3; -2) al plano $2x - 3y - 4z + 12 = 0$. ¿Cómo está situado el punto M_0 con respecto al plano?

298. Hallar la longitud de la perpendicular bajada del punto M_0 (2; 3; -5) al plano $4x - 2y + 5z - 12 = 0$.

299. Hallar la ecuación del plano que pasa: 1) por el punto M (-2; 3; 4) si este plano corta sobre los ejes de las coordenadas segmentos congruentes; 2) por el punto N (2; -1; 4) si este plano corta sobre el eje Oz un segmento dos veces mayor que sobre los ejes Ox y Oy.

300. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos P (2; 0; -1) y Q (1; -1; 3) y sea perpendicular al plano $3x + 2y - z + 5 = 0$.

301. Hallar sobre el plano $2x - 5y + 2z + 5 = 0$ un punto M tal, que la recta OM forme ángulos congruentes con los ejes de coordenadas.

302. Hallar la ecuación de un plano conociendo que el punto P (4; -3; 12) sirve de base a la perpendicular bajada del origen de las coordenadas a este plano.

303. Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por los ejes de coordenadas perpendicularmente al plano $3x - 4y + 5z - 12 = 0$.

304. Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de los puntos P (1; -4; 2) y Q (7; 1; -5).

305. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos P (0; 2; 0) y Q (2; 0; 0) y forma un ángulo de 60° con el plano $x = 0$.

306. Calcular el ángulo comprendido entre dos planos que pasan por el punto M (1; -1; -1) uno de los cuales contiene el eje Ox y el otro, el eje Oz.

307. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de las coordenadas y por los puntos P (4; -2; 1) y Q (2; 4; -3).

308. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de los planos $2x + 2y + z - 7 = 0$, $2x - y + 3z + 3 =$

$= 0$, $4x + 5y - 2z - 12 = 0$ y por los puntos $M(0; 3; 0)$ y $N(1; 1; 1)$.

309. Escribir la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos $x + 5y + 9z - 13 = 0$, $3x - y - 5z + 1 = 0$ y por el punto $M(0; 2; 1)$.

310. Escribir la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos $x + 2y + 3z - 5 = 0$ y $3x - 2y - z + 1 = 0$ y corte segmentos congruentes sobre los ejes Ox y Oz.

311. Escribir la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos $(1 + \sqrt{2})x + 2y + 2z - 4 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$ y forme con el plano de las coordenadas xOy un ángulo de $60°$.

312. Escribir la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos $2x - y - 12z - 3 = 0$ y $3x + y - 7z - 2 = 0$ y es perpendicular al plano $x + 2y + 5z - 1 = 0$.

313. Escribir la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ y por el origen de las coordenadas.

314. Escribir la ecuación del plano que pasa por el punto $M(0; 2; 1)$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

315. ¿Qué ángulo forma con el plano $x + y + 2z - 4 = 0$ el vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$?

2. La recta. 1) Una recta puede ser definida por las *ecuaciones de dos planos*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

que se intersecan por esta recta.

2) Eliminando sucesivamente x e y de las ecuaciones precedentes, obtendremos las ecuaciones $x = az + c$, $y = bz + d$. Aquí la recta está determinada por *dos planos que la proyectan sobre los planos xOz e yOz.*

3) *Las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ y $M_2(x_2; y_2; z_2)$ tienen la forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{1}$$

4) Las llamadas *ecuaciones canónicas*

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \tag{2}$$

definen una recta que pasa por el punto $M(x_1; y_1; z_1)$ y es paralela al vector $\mathbf{s} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$. En particular, estas ecuaciones se pueden escribir de la forma

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma},$$

donde α, β y γ, son los ángulos formados por la recta con los ejes de las coordenadas. Los cosenos directores de la recta se encuentran por las fórmulas

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l_2 + m^2 + n^2}}. \tag{3}$$

5) Introduciendo el parámetro t no es difícil pasar de las ecuaciones canónicas a *las paramétricas*:

$$\begin{cases} x = lt + x_1, \\ y = mt + y_1, \\ z = nt + z_1. \end{cases} \tag{4}$$

6) *El ángulo entre dos rectas* definidas por sus ecuaciones canónicas $(x - x_1)/l_1 = (y - y_1)/m_1 = (z - z_1)/n_1$ y $(x - x_2)/l_2 = (y - y_2)/m_2 = (z - z_2)/n_2$ se determina por la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\,\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}; \tag{5}$$

la condición de paralelismo de dos rectas es:

$$l_1/l_2 = m_1/m_2 = n_1/n_2; \tag{6}$$

la condición de perpendicularidad de dos rectas es:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \tag{7}$$

7) La condición necesaria y suficiente para que dos rectas definidas por sus ecuaciones canónicas estén situadas en un mismo plano (*condición de carácter coplanar* de dos rectas) es:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Si las magnitudes l_1, m_1, n_1 no son respectivamente proporcionales a l_2, m_2, n_2, la relación indicada es la condición necesaria y suficiente de intersección de dos rectas en el espacio.

8) *El ángulo entre la recta* $(x - x_1)/l = (y - y_1)/m = (z - z_1)/n$ *y el plano* $Ax + By + Cz + D = 0$ se determina por la fórmula

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \tag{9}$$

la condición de paralelismo de una recta y un plano es:

$$Al + Bm + Cn = 0; \tag{10}$$

la condición de perpendicularidad de una recta y un plano es:

$$A/l = B/m = C/n. \tag{11}$$

9) Para determinar *el punto de intersección de la recta* $(x - x_0)/l = (y - y_0)/m = (z - z_0)/n$ *con el plano* $Ax + By + Cz + D = 0$ hay que resolver conjuntamente sus ecuaciones para lo cual conviene utilizar las ecuaciones paramétricas de la recta $x = lt + x_0$, $y = mt + y_0$, $z = nt + z_0$:

a) si $Al + Bm + Cn \neq 0$, la recta corta al plano;

b) si $Al + Bm + Cn = 0$ y $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, la recta es paralela al plano;

c) si $Al + Bm + Cn = 0$ y $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, la recta pertenece al plano.

316. Reducir a la forma canónica las ecuaciones de las rectas $2x - y + 3z - 1 = 0$ y $5x + 4y - z - 7 = 0$.

Resolución. Primer procedimiento. Eliminando y primeramente y luego z, tenemos

$$13x + 11z - 11 = 0 \quad \text{y} \quad 17x - 11y - 22 = 0.$$

Si en cada una de las ecuaciones se despeja x, se obtiene

$$x=\frac{11\,(y-2)}{-17}=\frac{11\,(z-1)}{-13},\quad \text{o sea,}\quad \frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

Segundo procedimiento. Hallemos un vector $\mathbf{s}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$ que sea paralelo a la recta buscada. Como este vector debe ser perpendicular a los vectores normales $\mathbf{N}_1=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ y $\mathbf{N}_2=5\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$ de los planos dados, se puede tomar como $\mathbf{s}$ el producto vectorial de los vectores $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$:

$$\mathbf{s}=\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}=-11\mathbf{i}+17\mathbf{j}+13\mathbf{k}.$$

De este modo, $l=-11$; $m=17$; $n=13$.

En calidad de punto $M_1\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ por el cual pasa la recta buscada se puede tomar el punto de intersección de la misma con cualquiera de los planos de coordenadas, por ejemplo con el plano yOz. Como en este caso $x_1=0$, las coordenadas y_1 y z_1 de este punto se determinarán por el sistema de ecuaciones de los planos dados, haciendo en ellas $x=0$:

$$\begin{cases}-y+3z-1=0,\\ 4y-z-7=0.\end{cases}$$

Al resolver este sistema, hallamos $y_1=2$, $z_1=1$. De suerte que la recta buscada se define por las ecuaciones $x/(-11)=(y-2)/17=(z-1)/13$.

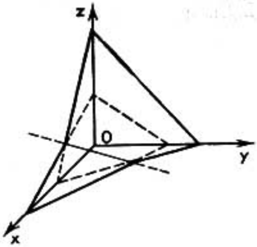


Fig. 20

317. Construir la recta

$$\begin{cases}2x+3y+3z-9=0,\\ 4x+2y+\ z-8=0.\end{cases}$$

Resolución. La recta buscada se puede construir como la línea de intersección de los planos. Para esto escribimos las ecuaciones segmentarias de estos planos sobre los ejes:

$$\frac{x}{4{,}5}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1,\qquad \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1.$$

Al construir los planos dados, obtenemos la recta buscada (fig. 20).

318. Bajar la perpendicular desde el origen de las coordenadas a la recta $(x-2)/2=(y-1)/3=(z-3)/1$.

Resolución. Utilizando la condición (11) de perpendicularidad de una recta y un plano, y suponiendo $A=l$, $B=m$, $C=n$, $D=0$, determinamos la ecuación del plano que pasa por el origen de las coordenadas y es perpendicular a la recta dada. Esta ecuación tiene la forma $2x+3y+z=0$.

Hallamos el punto de intersección de este plano y la recta dada. Las ecuaciones paramétricas de la recta se escribirán así: $x=2t+2$, $y=3t+1$, $z=t+3$. Para determinar t tenemos la ecuación

$$2\,(2t+2)+3\,(3t+1)+t+3=0,$$

de donde $t=-5/7$. Las coordenadas del punto de intersección son: $x=4/7$, $y=-8/7$, $z=16/7$, o sea, $M\,(4/7;\ -8/7;\ 16/7)$.

Queda por determinar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de las coordenadas y por el punto M; utilizando las relaciones (1), obtendremos

$$x/(4/7)=y/(-8/7)=z/(16/7),\quad \text{o bien,}\quad x/1=y/(-2)=z/4.$$

319. En las ecuaciones de la recta $x/2 = y/(-3) = z/n$ determinar el parámetro n de modo tal que esta recta se corte con la recta $(x+1)/3 = (y+5)/2 = z/1$, y hallar el punto de intersección.

Resolución. Para encontrar el parámetro n utilizamos la condición (8) de intersección de dos rectas, haciendo $x_1 = -1$, $y_1 = -5$, $z_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$, $l_1 = 3$, $m_1 = 2$, $n_1 = 1$, $l_2 = 2$, $m_2 = -3$, $n_2 = n$, obtendremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & n \end{vmatrix} = 0, \text{ o bien, } 2n+10+3-15n=0, \text{ o sea, } n=1.$$

Para hallar las coordenadas del punto de intersección de las rectas $x/2 = y/(-3) = z/1$ y $(x+1)/3 = (y+5)/2 = z/1$, expresamos en las primeras ecuaciones x e y por medio de z: $x = 2z$, $y = -3z$. Sustituyendo estos valores en la igualdad $(x+1)/3 = (y+5)/2$, tenemos $(2z+1)/3 = (-3z+5)/2$, de donde $z = 1$. Conociendo z, encontramos $x = 2z = 2$, $y = -3z = -3$. Por consiguiente, $M(2; -3; 1)$.

320. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto $M(3; 2; -1)$ y corta el eje Ox en ángulo recto.

Resolución. Como la recta es perpendicular al eje Ox y lo corta, ella pasa por el punto $N(3; 0; 0)$. Al determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos M y N, obtenemos $(x-3)/0 = (y-2)/(-2) = (z+1)/1$.

321. Dado el plano $x + y - 2z - 6 = 0$ y el punto $M(1; 1; 1)$ fuera del mismo. Hallar un punto N que sea simétrico del punto M con respecto a este plano.

Resolución. Escribamos la ecuación de una recta cualquiera que pase por el punto M: $(x-1)/l = (y-1)/m = (z-1)/n$. Las coordenadas $\{l; m; n\}$ del vector director de la recta perpendicular al plano, se pueden sustituir por las coordenadas del vector normal $\mathbf{n} = \{1; 1; -2\}$ del plano dado. Entonces las ecuaciones de esta recta se escribirán de la forma

$$(x-1)/1 = (y-1)/1 = (z-1)/(-2).$$

Encontramos la proyección del punto M sobre el plano dado resolviendo conjuntamente las ecuaciones

$$x + y - 2z - 6 = 0, \quad (x-1)/1 = (y-1)/1 = (z-1)/(-2).$$

Escribimos las ecuaciones de la recta de la forma $x = t+1$, $y = t+1$ $z = -2t+1$. Sustituyendo estas expresiones para x, y y z en la ecuación del plano, hallamos $t = 1$, de donde $x = 2$, $y = 2$, $z = -1$.

Las coordenadas del punto simétrico se hallan por las fórmulas

$$\bar{x} = (x_M + x_N)/2, \quad \bar{y} = (y_M + y_N)/2, \quad \bar{z} = (z_M + z_N)/2,$$

o sea,

$$2 = (1 + x_N)/2, \quad 2 = (1 + y_N)/2, \quad -1 = (1 + z_N)/2,$$

de donde $x_N = 3$, $y_N = 3$, $z_N = -3$. Por lo tanto, $N(3; 3; -3)$.

322. Dada la recta $(x-1)/2 = y/3 = (z+1)/(-1)$ y el punto $M(1; 1; 1)$ fuera de ella, hallar el punto N, simétrico del punto M respecto a la recta dada.

Resolución. La ecuación del plano que proyecta el punto M sobre la recta dada tiene la forma

$$A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0.$$

Las coordenadas del vector normal $\{A; B; C\}$ del plano perpendicular a la recta las sustituimos por las del vector director $\{2; 3; -1\}$ de la recta dada; entonces obtendremos

$$2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0, \quad \text{o bien,} \quad 2x+3y-z-4=0.$$

Hallamos la proyección del punto M sobre la recta para lo cual resolvemos conjuntamente el sistema de ecuaciones

$$2x+3y-z-4=0, \qquad (x-1)/2=y/3=(z+1)/(-1).$$

Las ecuaciones paramétricas de esta recta tienen la forma $x=2t+1$, $y=3t$, $z=-t-1$. Sustituyendo x, y y z en la ecuación del plano, encontramos $t = 1/14$. De aquí $x=8/7$, $y=3/14$, $z=-15/14$.

Entonces las coordenadas del punto simétrico pueden ser halladas utilizando las fórmulas para las coordenadas del punto medio del segmento, o sea,

$$8/7=(1+x_N)/2, \quad 3/14=(1+y_N)/2, \quad -15/14=(1+z_N)/2,$$

de donde $x_N=9/7$, $y_N=-4/7$, $z_N=-22/7$. Por consiguiente, $N\,(9/7; -4/7; -22/7)$.

323. Trazar por la recta $(x+1)/2=(y-1)/(-1)=(z-2)/3$ un plano que sea paralelo a la recta $x/(-1)=(y+2)/2=(z-3)/(-3)$.

Resolución. Escribimos las ecuaciones de la primera de las rectas dadas con ayuda de las ecuaciones de dos planos que la proyectan sobre los planos xOy e yOz, respectivamente:

$$(x+1)/2=(y-1)/(-1), \quad \text{o bien,} \quad x+2y-1=0;$$
$$(y-1)/(-1)=(z-2)/3, \quad \text{o bien,} \quad 3y+z-5=0.$$

La ecuación del haz de los planos que pasan por esta recta tiene la forma

$$x+2y-1+\lambda(3y+z-5)=0, \quad \text{o bien,} \quad x+(2+3\lambda)y+ \\ +\lambda z-(1+5\lambda)=0.$$

Utilizando la condición de paralelismo de una recta y un plano, determinamos λ de modo tal, que el plano respectivo del haz sea paralelo a la segunda de las rectas dadas. Tenemos $-1\cdot 1+2(2+3\lambda)-3\lambda=0$, o bien, $3\lambda+3=0$, de donde $\lambda=-1$, De este modo, el plano buscado se define por la ecuación $x-y-z+4=0$.

324. Hallar la ecuación de la proyección de la recta $(x-1)/1=(y+1)/2=z/3$ sobre el plano $x+y+2z-5=0$.

Resolución. Escribamos las ecuaciones de la recta dada en forma de las ecuaciones de dos planos que la proyectan sobre los planos xOy y xOz, respectivamente:

$$(x-1)/1=(y+1)/2, \quad \text{o bien,} \quad 2x-y-3=0;$$
$$(x-1)/1=z/3, \quad \text{o bien} \quad 3x-z-3=0.$$

La ecuación del haz de los planos que pasan por la recta dada se escribe de la forma

$$2x-y-3+\lambda(3x-z-3)=0, \quad \text{o bien,} \quad (2+3\lambda)x-y- \\ -\lambda z-3(1+\lambda)=0.$$

Utilizando la condición de perpendicularidad de los planos, escojamos en este haz el plano que proyecta la recta dada sobre el plano dado. Tenemos $1\cdot(2+3\lambda)+1(-1)+2(-\lambda)=0$, o bien, $\lambda+1=0$, de donde $\lambda=-1$.

De suerte que la ecuación del plano proyectante tiene la forma

$$2x - y - 3 + (-1)\cdot(3x - z - 3) = 0, \quad \text{o bien,} \quad x + y - z = 0.$$

La proyección buscada se puede determinar como línea de intersección de dos planos, o sea, del dado y el proyectante:

$$\begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Reduciendo estas ecuaciones de la recta a la forma canónica, obtendremos finalmente

$$x/1 = (y - 5/3)/(-1) = (z - 5/3)/0.$$

325. Escribir las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $M\ (5;\ 3;\ 4)$ y sea paralela al vector $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$.

Resolución. Utilizamos las ecuaciones canónicas de la recta. Suponiendo que en las ecuaciones (2) $l = 2$, $m = 5$, $n = 8$, $x_1 = 5$, $y_1 = 3$, $z_1 = 4$, obtenemos

$$(x - 5)/2 = (y - 3)/5 = (z - 4)/(-8).$$

326. Escribir las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $M\ (1;\ 1;\ 1)$ y es perpendicular a los vectores $\mathbf{s}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{s}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Resolución. La recta es paralela al vector $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, por eso ella es definida por las ecuaciones

$$(x - 1)/5 = (y - 1)/(-1) = (z - 1)/(-7).$$

327. Hallar las ecuaciones de las proyecciones de la recta

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 26 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$$

sobre los planos de las coordenadas.

328. Reducir a la forma canónica las ecuaciones de la recta con los ejes de coordenadas.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0, \\ 3x + y - 17z = 0. \end{cases}$$

329. Calcular los ángulos formados por la recta

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0, \\ x - 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

330. Hallar las ecuaciones de la recta que pase por el punto $M\ (1;\ -2;\ 3)$ y que forme con los ejes Ox y Oy ángulos de 45° y 60°, respectivamente.

331. Hallar las ecuaciones de la recta que pase por el punto $N\ (5;\ -1;\ -3)$ y es paralela a la recta

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

332. Hallar el punto de intersección de las rectas $(x-1)/(-1) = (y-2)/5 = (z+4)/2$ y $(x-2)/2 = (y-5)/(-2) = (z-1)/3$.

333. Dados tres vértices sucesivos de un paralelogramo: $A(3;\ 0;\ -1)$, $B(1;\ 2;\ -4)$ y $C(0;\ 7;\ -2)$, hallar las ecuaciones de los lados AD y CD.

334. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $M(2;\ -5;\ 1)$ y $N(-1;\ 1;\ 2)$.

335. Calcular la distancia entre las rectas paralelas $x/1 = (y-3)/2 = (z-2)/1$ y $(x-3)/1 = (y+1)/2 = (z-2)/1$.

336. Se dan los puntos $A(-1;\ 2;\ 3)$ y $B(2;\ -3;\ 1)$. Escribir las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $M(3;\ -1;\ 2)$ y es paralela al vector $\overline{AB}$.

337. Hallar el ángulo comprendido entre las rectas

$$\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$$

338. Hallar en el plano yOz la recta que pasa por el origen de las coordenadas y es perpendicular a la recta $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ y + 2z = -2. \end{cases}$

339. Se dan dos vértices del paralelogramo $ABCD$: $C(-2;\ 3;\ -5)$ y $D(0;\ 4;\ -7)$ y el punto de intersección de las diagonales $M(1;\ 2;\ -3;\ 5)$. Hallar las ecuaciones del lado AB.

340. El triángulo ABC está formado por la intersección del plano $x+2y+4z-8=0$ con los ejes de las coordenadas. Hallar las ecuaciones de la línea media del triángulo, paralela al plano xOy.

341. Se dan los puntos $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 3)$ y $C(3;\ 3;\ 2)$. Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto A y es perpendicular a los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

342. Escribir las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $M(0;\ 2;\ 1)$ y forma los ángulos congruentes con los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{k}$.

343. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $(x+1)/3 = (y-2)/(-1) = z/4$ y es perpendicular al plano $3x+y-z+2=0$.

344. Hallar las ecuaciones de la proyección de la recta $x/2 = (y+3)/1 = (z-2)/(-2)$ sobre el plano $2x+3y-z-5=0$.

§ 2. Superficies de segundo orden

1. Esfera. En el sistema cartesiano de coordenadas una esfera con centro en el punto $C(a;\ b;\ c)$ y radio r se define por la ecuación

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \qquad (1)$$

Si el centro de la esfera está en el origen de coordenadas su ecuación tiene la forma

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \qquad (2)$$

345. Hallar las coordenadas del centro y del radio de una esfera definida por la ecuación $x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0$.

Resolución. Reducimos la ecuación de la esfera a la forma canónica (1) para lo cual completamos los cuadrados de los términos que contienen x, y, z, o sea, escribimos la ecuación de la forma siguiente:

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+(y^2+2y+1)-1+z^2+1=0,$$

o bien,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

Por consiguiente, el centro de la esfera es el punto C (1/2; —1; 0) y su radio $r=1/2$.

346. Escribir la ecuación de la esfera que pasa por los puntos A (1; 2; —4), B (1; —3; 1) y C (2; 2; 3) si su centro se encuentra en el plano xOy.

Resolución. Como los puntos A, B y C pertenecen a la esfera $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ cuyo centro se encuentra en el plano xOy (de donde $c=0$), las coordenadas de estos puntos deben convertir la ecuación buscada en identidad; por eso obtenemos las ecuaciones

$$(1-a)^2+(2-b)^2+(-4)^2=r^2,\qquad (1-a)^2+(-3-b)^2+1^2=r^2,$$
$$(2-a)^2+(2-b)^2+3^2=r^2.$$

De donde,

$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(1-a)^2+(-3-b)^2+1,$$
$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(2-a)^2+(2-b)^2+9,$$

o bien,

$$(2-b)^2-(-3-b)^2=-15,\quad \text{o sea,}\quad 10b=10;$$
$$(1-a)^2-(2-a)^2=-7,\quad \text{o sea,}\quad 2a=-4.$$

De suerte que $a=-2$, $b=1$. Por consiguiente, el centro de la esfera es el punto C (—2; 1; 0). Luego hallamos $r^2=(1-a)^2+(2-b)^2+16=(1+2)^2+(2-1)^2+16=26$. De este modo, la ecuación buscada tiene la forma

$$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26.$$

347. Hallar las coordenadas del centro y del radio de la circunferencia

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100,\\ 2x-2y-z+9=0.\end{cases}$$

Resolución. Desde el centro de la esfera C (3; —2; 1) bajamos al plano $2x-2y-z+9=0$ la perpendicular cuya ecuación se puede escribir de la forma

$$(x-3)/2=(y+2)/(-2)=(z-1)/(-1) \qquad (*)$$

(en calidad de vector director de esta perpendicular se puede tomar el vector normal del plano dado).

Ahora encontremos las coordenadas del punto de intersección de la recta (*) con el plano $2x-2y-z+9=0$. Este punto es precisamente el centro de la circunferencia que resulta de la sección de la esfera por el plano dado.

Escribiendo las ecuaciones de la recta en la forma paramétrica: $x=2t+3$; $y=-2t-2$, $z=-t+1$ y sustituyendo x, y, z en la ecuación del plano obtenemos

$$2(2t+3)-2(-2t-2)-(-t+1)+9=0,\quad \text{o sea,}\quad t=-2.$$

Por lo tanto, $x = 2(-2) + 3 = -1$, $y = -2(-2) - 2 = 2$, $z = -(-2) + 1 = 3$, o sea, el centro de la circunferencia se encuentra en el punto $C_1(-1;\ 2;\ 3)$.

Hallamos ahora la distancia d del centro de la esfera $C(3;\ -2;\ 1)$ al plano $2x - 2y - z + 9 = 0$:

$$d = \frac{2\cdot 3 + 2\cdot 2 - 1 + 9}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = 6.$$

El radio de la circunferencia r se determina por la igualdad $r^2 = R^2 - d^2$, donde R es el radio de la esfera. Así, pues, $r^2 = 100 - 36 = 64$, o sea, $r = 8$.

348. Hallar las coordenadas de los centros y los radios de las esferas *definidas por las ecuaciones:* 1) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 25$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$; 3) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4y - 3z + 2 = 0$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$; 5) $x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 3$.

349. ¿Cómo está situado el punto $M(1;\ -1;\ 3)$ respecto a las esferas que se dan a continuación? 1) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 19$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$; 3) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y - 2z = 0$?

350. Escribir la ecuación de una esfera si los puntos $M(4;\ -1;\ -3)$ y $N(0;\ 3;\ -1)$ son los extremos de uno de sus diámetros.

351. Escribir la ecuación de la circunferencia que se forma en la sección de la esfera $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$ por el plano de ordenadas $z = 0$.

352. Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, $2x + 2y - z = 18$.

Superficies cilíndricas y cono de segundo orden. La ecuación que tiene la forma $F(x,\ y) = 0$ define en el espacio una superficie cilíndrica en la cual las generatrices son paralelas al eje Oz. Análogamente, la ecuación $F(x,\ z) = 0$ determina una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Oy y $F(y,\ z) = 0$, una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Ox.

Las ecuaciones canónicas de los cilindros de segundo orden son:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \textit{para el cilindro elíptico},$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \textit{para el cilindro hiperbólico},$$

$$y^2 = 2px, \quad \textit{para el cilindro parabólico}.$$

Las generatrices de los tres cilindros definidos por estas ecuaciones son paralelas al eje Oz y de directriz sirve la respectiva curva de segundo orden (elipse, hipérbola, parábola) que está en el plano xOy.

Hay que recordar que una curva puede ser representada en el espacio paramétricamente, *o bien en forma de la línea de intersección de dos superficies.* Por ejemplo, las ecuaciones de la elipse en el plano xOy tienen la forma

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

La ecuación de un *cono de segundo orden* que tiene por vértice el origen de las coordenadas y de cuyo eje sirve el eje Oz se escribe de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Análogamente,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

son ecuaciones de segundo orden que tienen por vértice el origen de las coordenadas y de cuyos ejes sirven los ejes Oy y Ox, respectivamente.

353. ¿Qué superficie se define en el espacio por las ecuaciones 1) $x^2=4y$; 2) $z^2=xz$?

Resolución. 1) La ecuación $x^2=4y$ define un cilindro parabólico cuyas generatrices son paralelas al eje Oz. De directriz de la superficie cilíndrica sirve la parábola $x^2=4y$, $z=0$.

2) La ecuación $z^2=xz$ puede ser representada de la forma $z(z-x)=0$ y se descompone en dos ecuaciones: $z=0$ y $z=x$, o sea, define dos planos: el plano xOy y el plano bisector $z=x$ que pasa por el eje Oy.

354. ¿En qué línea se interseca el cono $x^2+y^2-2z^2=0$ con el plano $y=2$?

Resolución. Eliminando y a partir del sistema de ecuaciones, obtenemos

$$x^2+4-2z^2=0, \quad \text{o bien} \quad z^2/2-x^2/4=1.$$

Por consiguiente, la línea buscada de intersección es una hipérbola que está en el plano $y=2$; su eje real es paralelo al eje Oz y el eje imaginario es paralelo al Ox.

355. Escribir la ecuación de una superficie cónica de cuyo vértice sirve el punto $M(0;\ 0;\ 1)$ y de directriz, la elipse $x^2/25\times y^2/9=1$, $z=3$.

Resolución. Escribimos la ecuación de la generatriz AM, donde $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ es un punto que pertenece a la elipse. Las ecuaciones de esta generatriz tienen la forma $x/x_0=y/y_0=(z-1)/(z_0-1)$. Como el punto A pertenece a elipse, sus coordenadas satisfacen las ecuaciones de la elipse, o sea, $x_0^2/25+y_0^2/9=1$, $z_0=3$.

Eliminando ahora x_0, y_0 y z_0 a partir del sistema

$$x/x_0=(z-1)/(z_0-1), \quad y/y_0=(z-1)/(z_0-1),$$
$$x_0^2/25+y_0^2/9=1, \quad z_0=3,$$

obtenemos la ecuación del cono buscado

$$x^2/25+y^2/9-(z-1)^2/4=0.$$

356. Hallar y construir las superficies definidas por las ecuaciones: 1) $x^2+y^2=4$; 2) $x^2/25+y^2/16=1$; 3) $x^2-y^2=1$; 4) $y^2=2x$; 5) $z^2=y$; 6) $z+x^2=0$; 7) $x^2+y^2=2y$; 8) $x^2+y^2=0$; 9) $x^2-z^2=0$; 10) $y^2=xy$.

357. Escribir las ecuaciones de las líneas de intersección del cono $x^2-y^2+z^2=0$ con los planos: 1) $y=3$; 2) $z=1$; 3) $x=0$.

358. Escribir la ecuación de un cono que tiene por vértice el origen de las coordenadas y cuyas directrices están definidas por las ecuaciones: 1) $x=a$, $y^2+z^2=b^2$; 2) $y=b$, $x^2+z^2=a^2$; 3) $z=c$, $x^2/a^2+y^2b^2=1$.

β. Superficies de revolución. Superficies de segundo orden. Si la curva $(F\ y, z) = 0$, $x = 0$ que está en el plano yOz gira alrededor del eje Oz, la ecuación de la superficie de revolución engendrada por ella tiene la forma

$$F(\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0.$$

Análogamente, la ecuación $F(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0$ define la superficie engendrada por la revolución de la curva $F(x, y) = 0$, $z = 0$ en torno al eje Ox, y la ecuación $F(\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$ determina la superficie engendrada por la revolución de la misma curva alrededor del eje Oy.

Citamos a continuación las ecuaciones de superficies de revolución de segundo orden engendradas por la rotación de una elipse, una hipérbola y una parábola en torno a sus ejes de simetría.

Elipsoide de revolución:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

de eje de revolución sirve el eje Oz; el elipsoide se halla aplastado cuando $a > c$ y alargado cuando $a < c$ (cuando $a = c$, se convierte en esfera).

En el hiperboloide de revolución de una hoja:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

de eje de revolución sirve el eje Oz (que es el eje imaginario de la hipérbola por cuya revolución está engendrada esta superficie).

En el hiperboloide de revolución de dos hojas:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

de eje de revolución sirve el eje Oz (que es el eje real de la hipérbola por cuya revolución está engendrada esta superficie).

En el paraboloide de revolución

$$x^2+y^2=2pz;$$

de eje de revolución sirve el eje Oz.

Las superficies de revolución de segundo orden son un caso particular de las superficies de segundo orden de forma general cuyas ecuaciones canónicas son las siguientes:

Elipsoide (de tres ejes):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Hiperboloide de dos hojas:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Paraboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\ (p>0,\ q>0).$$

Además de estas cuatro superficies, de los tres cilindros (elíptico, hiperbólico y parabólico) y un cono, existe una superficie más de segundo orden llamada *paraboloide hiperbólico* cuya ecuación canónica tiene la forma

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \ (p>0, \ q>0).$$

Así, pues, en total existen nueve superficies diferentes de segundo orden.

359. Hallar la ecuación de la superficie obtenida por la revolución de la recta $x+2y=4$, $z=0$ alrededor del eje Ox.

Resolución. La superficie de revolución es un cono que tiene por vértice el punto M (4; 0; 0). Supongamos que un punto arbitrario A de la superficie buscada tiene las coordenadas X, Y, Z; a él le corresponde en la recta dada un punto B $(x, y; 0)$. Los puntos A y B están en un mismo plano que es perpendicular al eje de revolución Ox. Entonces $X=x$, $Y^2+Z^2=y^2$.

Sustituyendo las expresiones para x e y en la ecuación de la recta dada, obtenemos las ecuaciones de la superficie de revolución buscada:

$$X+2\sqrt{Y^2+Z^2}=4, \text{ o sea, } 4(Y^2+Z^2)-(X-4)^2=0,$$

o bien, $4Y^2+4Z^2-(X-4)^2=0$.

360. ¿Qué superficie define la ecuación $x^2=yz$?

Resolución. Efectuamos el giro de los ejes de las coordenadas alrededor del eje Ox en un ángulo $\alpha=45°$ (del eje Oy al eje Oz en el sentido contrario al de las agujas del reloj). Las fórmulas de transformación de las coordenadas son: $x=x'$, $y=y'\cos\alpha-z'\operatorname{sen}\alpha$, $z=y'\operatorname{sen}\alpha+z'\cos\alpha$. Como $\operatorname{sen}\alpha=$ $=\cos\alpha=\sqrt{2}/2$, entonces $x=x'$, $y=(\sqrt{2}/3)(y'-z')$, $z=(\sqrt{2}/2)(y'+z')$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la superficie, obtenemos

$$x'^2=y'^2/2-z'^2/2, \quad \text{o bien}, \quad x'^2-y'^2/2+z'^2/2=0$$

(es un cono que tiene por vértice el origen de las coordenadas y cuyo eje es el eje de ordenadas).

361. Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la revolución de la recta $2y+z-2=0$, $x=0$ alrededor del eje Oz.

362. Hallar las ecuaciones de las líneas de intersección de la superficie $z=x^2-y^2$ por los planos $z=1$, $y=1$, $x=1$, $z=-1$.

363. ¿Qué superficies se definen por las ecuaciones: 1) $z=xy$, 2) $z^2=xy$?

Indicación: efectuar el giro en torno al eje Oz en un ángulo de 45°.

364. Hallar la ecuación de un paraboloide elíptico que tiene por vértice el origen de las coordenadas y cuyo eje es el eje Oz, si sobre su superficie se dan dos puntos M (—1; —2; 2) y N (1; 1; 1).

365. Escribir la ecuación de un elipsoide de cuyos ejes de simetría sirven los ejes de las coordenadas, si sobre su superficie se dan los tres puntos A (3; 0; 0), B (—2; 5/3; 0) y C (0; —1; $2/\sqrt{5}$).

366. Hallar las ecuaciones de la línea de intersección de las superficies $z=2-x^2-y^2$ y $z=x^2+y^2$.

367. Investigar qué superficies define la ecuación $z^2+x^2=$ $=m(z^2+y^2)$ cuando: 1) $m=0$, 2) $0<m<1$; 3) $m>1$; 4) 4) $m<0$; 5) $m=1$.

4. Ecuación general de una superficie de segundo orden. La ecuación general de segundo grado con respecto a x, y, z, tiene la forma

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0$$

Esta ecuación puede definir las siguientes superficies: esfera, elipsoide, hiperboloide de una o dos hojas, paraboloide elíptico o hiperbólico, superficie cilíndrica o cónica de segundo orden. Puede también determinar un conjunto de dos planos, un punto, una recta o incluso no tener sentido geométrico (definir una superficie «imaginaria»).

Cuando $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, la ecuación general adquiere el aspecto

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

En este caso la ecuación se simplifica fácilmente con ayuda de una traslación paralela de los ejes de coordenadas lo que permite determinar de inmediato su sentido geométrico.

368. ¿Cuál es el sentido geométrico de la ecuación

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6xz + 4xy - 4x - 8y - 12z + 3 = 0?$$

Resolución. La ecuación dada se puede escribir de la forma

$$(x + 2y + 3z)^2 - 4(x + 2y + 3z) + 3 = 0.$$

Descomponemos en sus factores el primer miembro de la ecuación:

$$(x + 2y + 3z - 1)(x + 2y + 3z - 3) = 0.$$

Ahora bien, la ecuación define un conjunto de dos planos

$$x + 2y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y + 3z - 3 = 0.$$

369. ¿Cuál es el sentido geométrico de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz + xy = 0?$$

Resolución. Multiplicando por 2, reescribimos la ecuación de la forma

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2xz - 2xy = 0,$$

o bien,

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 = 0.$$

Esta ecuación es satisfecha sólo por las coordenadas de los puntos para los cuales se cumplen las igualdades $x = y$, $y = z$, $x = z$. De este modo, la ecuación define la recta $x = y = z$.

370. ¿Cuál es el sentido geométrico de la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 8z + 5 = 0?$$

Resolución. Reescribimos la ecuación de la forma

$$(x - y)^2 + 4(z - 1)^2 = -1.$$

Esta ecuación no tiene ningún sentido geométrico, ya que su primer miembro no puede ser una magnitud negativa para ningunos valores reales de x, y, z.

371. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$$

Resolución. Agrupamos los términos que tienen las mismas coordenadas:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 2y) + 36(z^2 - 2z) = -13.$$

Completando los cuadrados de las expresiones entre paréntesis, obtenemos

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 2y + 1) + 36(z^2 - 2z + 1) = -13 + 4 + 9 + 36$$

o bien,

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2 + 36(z - 1)^2 = 36.$$

Efectuemos una traslación paralela de los ejes de coordenadas tomando como nuevo origen de las mismas el punto O' (1; 1; 1). Las fórmulas de transformación de las coordenadas tienen la forma $x = x' + 1$, $y = y' + 1$, $z = z' + 1$. Entonces la ecuación de la superficie se escribirá de la forma

$$4x'^2 + 9y'^2 + 36z'^2 = 36, \quad \text{o bien,} \quad x'^2/9 + y'^2/4 + z'^2 = 1.$$

Esta ecuación define un elipsoide; su centro se encuentra en el nuevo origen de coordenades y sus semiejes son iguales a 3, 2 y 1, respectivamente.

372. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0.$$

Resolución. Agrupamos los términos que contienen x e y:

$$(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) = 2z.$$

Completamos los cuadrados de las expresiones entre paréntesis:

$$(x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 8y + 16) = 2z + 4 - 16, \quad \text{o bien,}$$

$$(x - 2)^2 - (y - 4)^2 = 2\,(z - 6).$$

Efectuemos una traslación paralela de los ejes de coordenadas tomando como nuevo origen el punto O' (2; 4; 6). Entonces $x = x' + 2$; $y = y' + 4$, $z = z' + 6$. Como resultado obtenemos la ecuación $x'^2 - y'^2 = 2z'$, que define un paraboloide hiperbólico.

373. ¿Qué superficie determina la ecuación

$$4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 8z + 4 = 0?$$

Resolución. Efectuando las transformaciones respectivas, obtenemos:

$$4\,(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 4\,(z^2 + 2z) = -4;$$

$$4\,(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) + 4\,(z^2 + 2z + 1) = -4 + 4 - 4 + 4;$$

$$4\,(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 4\,(z + 1)^2 = 0.$$

Efectuamos una traslación paralela de los ejes de coordenadas tomando como nuevo origen el punto O' (1; 2; —1). Las fórmulas de transformación de las coordenadas son $x = x' + 1$, $y = y' + 2$, $z = z' - 1$. Entonces la ecuación dada toma el aspecto

$$4x'^2 - y'^2 + 4z'^2 = 0, \quad \text{o bien,} \quad x'^2 - y'^2/4 + z'^2 = 0.$$

Esta es la ecuación de una superficie cónica.

Encontrar qué superficies definen las ecuaciones siguientes:

374. $x^2 - xy - xz + yz = 0$.

375. $x^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$.

376. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = 0$.

377. $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$.

378. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y + 4z + 4 = 0$.

379. $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$.

380. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$.

381. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$.

382. $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$.

Capítulo VI. Determinantes y matrices

§ 1. Concepto de determinante de n-ésimo orden

Un determinante de cuarto orden correspondiente a la tabla de elementos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$ se define por la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Con ayuda de los determinantes de cuarto orden se puede introducir análogamente el concepto de determinante de quinto orden, etc.

Para determinantes de cualesquiera órdenes siguen vigentes las definiciones de menor y complemento algebraico de cierto elemento, así como los dos teoremas sobre los complementos algebraicos, enunciados para los determinantes de tercer orden.

De este modo, designando por M_{jk} el menor y por A_{jk} el complemento algebraico del elemento a_{jk} del determinante de n-ésimo orden (o sea, del elemento que se encuentra en la j-ésima fila y en la k-ésima columna de este determinante), tenemos

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}.$$

Sea D un determinante de n-ésimo orden. Desarrollándolo primeramente por los elementos de la j-ésima fila y luego por los elementos de la k-ésima columna, en virtud del primer teorema de los componentes algebraicos obtenemos

$$D = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \ldots + a_{jn}A_{jn};$$
$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}.$$

Por otro lado, cuando $j \neq i$ y $k \neq l$, en virtud del segundo teorema de los complementos algebraicos tenemos

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \ldots + a_{jn}A_{in} = 0,$$
$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \ldots + a_{nk}A_{nl} = 0.$$

Las propiedades de los determinantes de segundo y tercer orden formuladas en la pág. 43 son también válidas para los determinantes de cualquier orden.

La solución de un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

cuyo determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

se halla por las fórmulas

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad \ldots; \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

En estas fórmulas D es el determinante del sistema y D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ es un determinante que se obtiene a partir del determinante del sistema sustituyendo la k-ésima columna (o sea, la columna de los coeficientes de la incógnita buscada) por la columna de los términos independientes:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,\,k-1} & b_1 & a_{1,\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,k-1} & b_2 & a_{2,\,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,\,k-1} & b_n & a_{n,\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

383. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Resolución. **Efectuamos las operaciones siguientes: 1) de los elementos de la primera fila restamos los triplos de los elementos de la segunda fila; 2) a los elementos de la tercera fila les sumemos los duplos de los elementos de la segunda fila; 3) de los elementos de la cuarta fila restamos los elementos de la segunda fila. Entonces el determinante inicial se transforma en otro que tiene la forma**

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrallemos este determinante **por** los elementos de la primera columna

$$D=-\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Adicionando a los elementos de la primera fila los de la tercera fila y sustrayendo de los elementos de la segunda fila los de la tercera fila, obtenemos

$$D=-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante **por** los elementos de la primera columna

$$D=-\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}=70.$$

384. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Resolución. Sacamos del determinante los factores comunes de las columnas segunda, cuarta y quinta

$$D=2\cdot 2\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Restamos de los elementos de la segunda columna los de la primera:

$$D=20\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera fila:

$$D=20.\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sumemos a los elementos de la segunda fila los de la primera y sacamos -2 (factor común de los elementos de la primera columna) fuera del determinante:

$$D=-40\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna

$$D=-40\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sustraemos los elementos de la tercera fila de los de la segunda y sacamos 2 (factor común de los elementos de la primera fila) fuera del determinante:

$$D=-80\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por los elementos de la tercera columna:

$$D=-80\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=640.$$

385. Hallar y a partir del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+2y+3z=14, \\ y+2z+3t=20, \\ z+2t+3x=14, \\ t+2x+3y=12. \end{cases}$$

Resolución. Escribimos el sistema en la forma

$$\begin{cases} x+2y+3z+0\cdot t=14, \\ 0\cdot x+y+2z+3t=20, \\ 3x+0\cdot y+z+2t=14, \\ 2x+3y+0\cdot z+t=12. \end{cases}$$

Hallamos

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

De los elementos de la segunda columna restamos los duplos de los elementos de la primera columna; y de los elementos de la tercera columna restemos los elementos triplicados de la primera.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -8 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

De los elementos de la segunda columna extraemos los duplos de los elementos de la primera; de los elementos de la tercera columna restamos los triplos de los elementos de la primera:

$$D=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & -10\\ 1 & 4 & -4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-2 & -10\\ 4 & -4\end{vmatrix}=2\,(8+40)=96.$$

Hallamos

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 14 & 3 & 0\\ 0 & 20 & 2 & 3\\ 3 & 14 & 1 & 2\\ 2 & 12 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & 7 & 3 & 0\\ 0 & 10 & 2 & 3\\ 3 & 7 & 1 & 2\\ 2 & 6 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

De los elementos de la tercera fila restemos los triples de los elementos de la primera; de los elementos de la cuarta fila restemos los duplos de los elementos de la primera fila:

$$D_y=2\begin{vmatrix}1 & 7 & 3 & 0\\ 0 & 10 & 2 & 3\\ 0 & -14 & -8 & 2\\ 0 & -8 & -6 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}10 & 2 & 3\\ -14 & -8 & 2\\ -8 & -6 & 1\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot2\begin{vmatrix}5 & 1 & 3\\ -7 & -4 & 2\\ -4 & -3 & 1\end{vmatrix}.$$

De los elementos de la primera fila sustraemos los triplos de los elementos de la tercera fila; de los elementos de la segunda fila restamos los duplos de los elementos de la tercera fila:

$$D_y=8\begin{vmatrix}17 & 10 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -4 & -3 & 1\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}17 & 10\\ 1 & 2\end{vmatrix}=192.$$

De aquí

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{192}{96}=2.$$

386. Calcular el determinante

$$V=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{vmatrix}.$$

Resolución. Sustraemos de la segunda fila la primera multiplicada por a; de la tercera fila la segunda multiplicada por a; y de la cuarta fila la tercera también multiplicada por a.

$$V=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad\\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2\end{vmatrix}=(b-a)\,(c-a)\,(d-a)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix}$$

Restamos de la segunda fila la primera multiplicada por b y de la tercera fila la segunda multiplicada por b:

$$V=(b-a)(c-a)(d-a)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & c-b & d-b\\ 0 & c^2-bc & d^2-db\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ c & d\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

No es difícil ver que el determinante examinado es igual a cero si, y sólo si, entre los números a, b, c, d los hay iguales.

Calcular los determinantes:

387. $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & -4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 2 & -1\end{vmatrix}$. **388.** $\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -2 & -4 & -8\\ -1 & -3 & -9 & -27\\ -1 & -4 & -16 & -64\end{vmatrix}$.

389. $\begin{vmatrix}10 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 12 & 10 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10\end{vmatrix}$.

390. $\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}$.

Resolver los sistemas de ecuaciones

391. $\begin{cases} y-3z+4t=-5,\\ x-2z+3t=-4,\\ 3x+2y-5t=12,\\ 4x+3y-5z=5.\end{cases}$ **392.** $\begin{cases} x-3y+5z-7t=12,\\ 3x-5y+7z-t=0,\\ 5x-7y+z-3t=4,\\ 7x-y+3z-5t=16,\end{cases}$

393. $\begin{cases} x+2y=5,\\ 3y+4z=18,\\ 5z+6u=39,\\ 7u+8v=68,\\ 9v+10x=55.\end{cases}$

§ 2. Transofrmaciones lineales y matrices

Con ayuda de las igualdades

$$x = a_{11}x' + a_{12}y',$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y'$$

los valores de las variables x e y se pueden expresar linealmente mediante los valores de las variables x' e y'. Estas igualdades suelen llamarse transformación lineal de las variables x' e y'. Ellas pueden también ser consideradas como transformación lineal de las coordenadas del punto (o del vector) sobre un plano.

La tabla

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz* de la *transformación lineal* en cuestión y el determinante

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

se denomina *determinante de la transformación lineal*. En adelante supondremos que $D_A \neq 0$.

Se puede también examinar la transformación lineal de tres variables (o sea, para el espacio) *

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{13}z',$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z',$$
$$z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z',$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

son respectivamente, la matriz y el determinante de esta transformación.

Una matriz A se llama *regular* (no degenerada) si $D_A \neq 0$. Si $D_A = 0$, la matriz A es singular (degenerada).

Las matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se denominan *matrices cuadradas de segundo y tercer orden*, respectivamente.

Para mayor generalidad varias definiciones se darán para las matrices de tercer orden; su aplicación a las matrices de segundo orden no representa dificultades.

---

* Con frecuencia se llama transformación lineal a las igualdades de una forma más general

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + b_1,$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b_2,$$
$$z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + b_3.$$

Aquí se examina una transformación lineal para la cual $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. En el análisis funcional esta transformación lineal se denomina *operador lineal*.

Si los elementos de una matriz cuadrada satisfacen la condición $a_{mn} = a_{nm}$, la matriz se llama *simétrica*.

Dos matrices

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

se consideran *iguales* ($A = B$) si, y sólo si, son iguales sus elementos correspondientes, o sea, cuando $a_{mn} = b_{mn}$ $(m, n = 1, 2, 3)$.

Se denomina *suma* de dos matrices A y B a la matriz definida por la igualdad

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Se llama producto de un número m por una matriz A a la matriz definida por la igualdad

$$m\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}.$$

El producto de dos matrices A y B se designa por el símbolo AB y se define por la igualdad

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix},$$

o sea, *el elemento del producto matricial que está en la i-ésima fila y k-ésima columna es igual a la suma de los productos de los elementos correspondientes de la i-ésima fila de la matriz A por la k-ésima columna de la matriz B.*

Hablando en general, la ley conmutativa no se cumple con respecto al producto de dos matrices: $AB \neq BA$.

El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de estas matrices.

Se llama *matriz nula* a la que tiene todos los elementos iguales a cero.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Si a esta matriz se le suma cualquier otra matriz A se obtiene: $A + 0 = A$.

Se denomina *matriz unidad* a la matriz

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar esta matriz, tanto por la izquierda como por la derecha, por la matriz A, se obtiene la matriz A: $EA = AE = A$. A una matriz unidad le corresponde la transformación lineal idéntica:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

Toda matriz cuadrada A que sea regular ($D_A \neq 0$) tiene la denominada matriz inversa.

Una matriz B se dice *inversa* respecto a la matriz A si el producto AB es igual a la matriz unidad: $AB = E$.

Para la matriz inversa de A se adopta la connotación A^{-1}.

La matriz inversa se encuentra por la fórmula

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/D_A & A_{21}/D_A & A_{31}/D_A \\ A_{12}/D_A & A_{22}/D_A & A_{32}/D_A \\ A_{13}/D_A & A_{23}/D_A & A_{33}/D_A \end{pmatrix},$$

donde A_{mn} es el *complemento algebraico* del elemento de la matriz a_{mn} en su determinante, o sea, el producto del menor de segundo orden, obtenido por el tachado de la m-ésima fila y n-ésima columna en el determinante de la matriz A, por $(-1)^{m+n}$.

Al multiplicar las matrices A y A^{-1} se cumple la ley conmutativa, o sea, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Se llama *matriz columna* a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

El producto AX se define por la igualdad

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

se puede escribir en la forma $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema tiene la forma $X = A^{-1}B$ (si $D_A \neq 0$).

Se denomina *ecuación característica* de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Las raíces de esta ecuación $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se llaman *números característicos* de la matriz; son siempre reales si la matriz inicial es simétrica.

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3=0, \\ a_{21}\xi_1+(a_{22}-\lambda)\xi_2+a_{23}\xi_3=0, \\ a_{31}\xi_1+a_{32}\xi_2+(a_{33}-\lambda)\xi_3=0, \end{cases}$$

en el cual λ adopta uno de los valores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y cuyo determinante, en virtud de esto, es igual a cero, define el triplete de números $(\xi_1;\ \xi_2;\ \xi_3)$ correspondiente a este número característico.

Este conjunto de tres números $(\xi_1;\ \xi_2;\ \xi_3)$ determina al vector $r=\xi_1 i+\xi_2 j+\xi_3 k$ llamado *vector propio* de una matriz.

394. Hallar la suma de dos matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolución. Tenemos

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

395. Hallar la matriz $2A+5B$ si

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Resolución. Tenemos

$$2A=\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5B=\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, \quad 2A+5B=\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$$

396. Hallar los productos de las matrices AB y BA si

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolución. Tenemos

$$AB=\begin{pmatrix} 1\cdot2+3\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot1+3(-1)+1\cdot2 & 1\cdot0+3\cdot2+1\cdot1 \\ 2\cdot2+0\cdot1+4\cdot3 & 2\cdot1+0(-1)+4\cdot2 & 2\cdot0+0\cdot2+4\cdot1 \\ 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+2(-1)+3\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot0+0\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot4+0\cdot3 \\ 1\cdot1-1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot3-1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot1-1\cdot4+2\cdot3 \\ 3\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot3+2\cdot0+1\cdot2 & 3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

397. Hallar A^3 si $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Resolución. Hacemos

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+2 & 6+8\\ 3+4 & 2+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33+14 & 22+56\\ 21+18 & 14+72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}.$$

398. Dada la transformación lineal $x=x'+y'+z'$, $y=$ $=x'+y'$, $z=x'$, y los puntos en el sistema de coordenadas x', y', z': $(1;\ -1;\ 1)$, $(3;\ -2;\ -1)$, $(-1;\ -2;\ 3)$. Determinar las coordenadas de estos puntos en el sistema x, y, z.

Resolución. Sustituyendo las coordenadas de los puntos en las igualdades que definen la transformación lineal dada, obtenemos: si $x'=1$, $y'=-1$, $z'=1$, entonces $x=1$, $y=0$, $z=1$, o sea, $(1;\ 0;\ 1)$; si $x'=3$, $y'=-2$, $z'=-1$, entonces $x=0$, $y=1$, $z=3$, o sea, $(0;\ 1;\ 3)$; si $x'=-1$, $y'=-2$, $z=-3$ entonces $x=-6$, $y=-3$, $z=-1$, o sea, $(-6,\ -3;\ -1)$.

399. Escribir la transformación lineal del problema precedente para pasar de las coordenadas x, y, z a las coordenadas x', y', z'.

Resolución. Tenemos $x'=z$ (de la tercera igualdad); $y'=y-z$ (restamos de la segunda igualdad la tercera); $z'=x-y$ (restamos de la primera igualdad la segunda).

400. Dada la transformación lineal $x=x'+2y'$, $y=3x'+$ $+4y'$. ¿En qué puntos ella no cambia sus coordenadas?

Resolución. Hay que encontrar x e y, si $x=x'$, $y=y'$, o sea, $x=x+2y$, $y=3x+4y$. Por consiguiente, $x=x'=0$, $y=y'=0$.

401. ¿En qué puntos la transformación lineal $x=3x'-2y'$, $y=5x'-4y'$ no cambia sus coordenadas?

Resolución. Tenemos $x=3x-2y$, $y=5x-4y$. Por consiguiente, $x=$ $=y=x'=y'$, o sea, la transformación lineal no cambia sus coordenadas en los puntos $(t;\ t)$ con iguales coordenadas.

402. Hallar el valor del polinomio matricial $2A^2+3A+5E$ para

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ si E es la matriz unidad de tercer orden.

Resolución. Tenemos

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 6 & 5\\ 8 & 11 & 6\\ 9 & 8 & 10\end{pmatrix},\quad 2A^2=\begin{pmatrix}20 & 12 & 10\\ 16 & 22 & 12\\ 18 & 16 & 20\end{pmatrix},$$

$$3A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\ 3 & 9 & 3\\ 12 & 3 & 3\end{pmatrix},\quad 5E=5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix},$$

$$2A^2+3A+5E=\begin{pmatrix}28 & 15 & 16\\ 19 & 36 & 15\\ 30 & 19 & 28\end{pmatrix}.$$

403. Se dan dos transformaciones lineales $x = a_{11}x' + a_{12}y'$, $y = a_{21}x' + a_{22}y'$ y $x' = b_{11}x'' + b_{12}y''$, $y' = b_{21}x'' + b_{22}y''$. Sustituyendo x' e y' de la segunda transformación en la primera, obtendremos una otra transformación lineal que expresa x e y por medio de x'' e y''. Mostrar que la matriz de la transformación obtenida es igual al producto de las matrices de la primera y segunda transformaciones.

Resolución. Tenemos

$$x = a_{11}(b_{11}x'' + b_{12}y'') + a_{12}(b_{21}x'' + b_{22}y'') =$$
$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})\,x'' + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})\,y'',$$
$$y = a_{21}(b_{11}x'' + b_{12}y'') + a_{22}(b_{21}x'' + b_{22}y'') =$$
$$= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})\,x'' + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})\,y''.$$

La matriz de la transformación lineal obtenida tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

o sea, es el producto de las matrices $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

404. Se da la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar su número característico y los vectores propios.

Resolución. Escribimos la ecuación característica

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, o bien $(5-\lambda)(3-\lambda)-8=0$, o sea, $\lambda^2-8\lambda+7=0$;

los números característicos son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$. Hallamos el vector propio, correspondiente al primer número característico, del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)\,\xi_1' + 2\xi_2' = 0, \\ 4\xi_1' + (3-\lambda_1)\,\xi_2' = 0; \end{cases}$$

como $\lambda_1 = 1$, entonces ξ_1' y ξ_2' están vinculados por la relación $2\xi_1' + \xi_2' = 0$.

Haciendo $\xi_1 = \alpha$ (α es un número arbitrario), obtenemos $\xi_2' = -2\alpha$ y el vector propio correspondiente al número característico $\lambda_1 = 1$, es $\mathbf{r}_1 = \alpha\mathbf{i} - 2\alpha\mathbf{j}$.

Hallamos el segundo vector propio. Temenos

$$\begin{cases} (5-\lambda_2)\,\xi_1'' + 2\xi_2'' = 0, \\ 4\xi_1'' + (3-\lambda_2)\,\xi_2'' = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo el vector de $\lambda_2 = 7$, llegamos a la relación $\xi_1'' - \xi_2'' = 0$, o sea, $\xi_1'' = \xi_2'' = \beta$. De vector propio correspondiente al segundo número característico sirve $\mathbf{r}_2 = \beta\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$.

405. Hallar los números característicos y los vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Resolución. Escribimos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 8,$$

o sea,

$$(3-\lambda)\,[(5-\lambda)(3-\lambda)-1]+(-3+\lambda+1)+(1-5+\lambda)=0.$$

Después de efectuadas las transformaciones elementales, la ecuación se reduce a la forma $(3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)=0$, de donde $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$.

Hallamos el vector propio correspondiente al número característico $\lambda_1=2$. Del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \xi_1'-\xi_2'+\xi_3'=0, \\ -\xi_1'+3\xi_2'-\xi_3'=0, \\ \xi_1'-\xi_2'+\xi_3'=0 \end{cases}$$

(una de las ecuaciones de este sistema es la consecuencia de las otras dos y puede ser eliminada) hallamos $\xi_2'=0$, $\xi_3'=-\xi_1'$. Suponiendo $\xi_1'=\alpha$, entonces $\xi_2'=0$, $\xi_3'=-\alpha$ y $\mathbf{r}_1'=\alpha\mathbf{i}-\alpha\mathbf{k}$.

Hallamos el vector propio correspondiente al valor $\lambda_2=3$. Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\xi_2''+\xi_3''=0, \\ -\xi_1''+2\xi_2''-\xi_3''=0, \\ \xi_1''-\xi_2''=0 \end{cases}$$

(una de estas ecuaciones es la consecuencia de las otras dos). De aquí $\xi_1''=\xi_2''=\xi_3''=\beta$ y $\mathbf{r}_2=\beta\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\beta\mathbf{k}$.

Hallamos el vector propio correspondiente al valor de $\lambda_3=0$. Conformamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -3\xi_1'''-\xi_2'''+\xi_3'''=0, \\ -\xi_1'''-\xi_2'''-\xi_3'''=0, \\ \xi_1'''-\xi_2'''-3\xi_3'''=0 \end{cases}$$

(de nuevo una de las ecuaciones es la consecuencia de las otras dos). Resolviendo este sistema, hallamos $\xi_1'''=\gamma$, $\xi_2'''=-2\gamma$, $\xi_3'''=\gamma$ y $\mathbf{r}_3=\gamma\mathbf{i}-2\gamma\mathbf{i}+\gamma\mathbf{k}$.

De este modo los vectores propios de la matriz dada tienen la forma $\mathbf{r}_1=\alpha(\mathbf{i}-\mathbf{k})$; $\mathbf{r}_2=\beta(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$; $\mathbf{r}_3=\gamma(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k})$, donde α, β, γ son números arbitrarios distintos de cero.

406. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, hallar la matriz inversa.

Resolución. Calculemos el determinante de la matriz A:

$$D_A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}=27+2-24=5.$$

Hallamos los complementos algebraicos de los elementos de este determinante:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=9, \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2, \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=1 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=2, \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-12, \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=1, \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7.$$

Por consiguiente,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

407. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9, \\ x+2y-3z=14, \\ 3x+4y+z=16, \end{cases}$$

representándolo en forma de ecuación matricial.

Resolución. Escribimos el sistema en la forma $AX=B$, donde

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

La solución de la ecuación matricial tiene la forma $X=A^{-1}B$. Hallemos A^{-1}. Tenemos

$$D_A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=28-30-4=-6.$$

Calculamos los complementos algebraicos de los elementos de este determinante:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=14, \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=5, \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-13,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-10, \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4, \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2, \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1, \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

De este modo,

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde

$$X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ -10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}126+70-208\\ -90-56+128\\ 18+14+16\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-12\\ -18\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -2\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $x=2$, $y=3$, $z=-2$.

408. Normalizar el vector $\mathbf{x}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+12\mathbf{k}$.

Resolución. Normalizar el vector $\mathbf{x}=\xi_1\mathbf{i}+\xi_2\mathbf{j}+\xi_3\mathbf{k}$ significa hallar el vector unitario del mismo sentido. Tal vector es

$$\mathbf{x}_0=(\xi_1\mathbf{i}+\xi_2\mathbf{j}+\xi_3\mathbf{k})/\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}.$$

En el caso dado $\mathbf{x}_0=(3/13)\,\mathbf{i}+(4/13)\,\mathbf{j}+(12/13)\,\mathbf{k}$.

§ 3. Reducción de las ecuaciones generales de las curvas y superficies de segundo orden a la forma canónica

Las expresiones que tienen la forma

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

y

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$

se llaman *formas cuadráticas* de dos o tres variables, respectivamente.

Las matrices simétricas

$$A_2^{(2)}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ \text{donde } a_{21}=a_{12},$$

y

$$A_3^{(3)}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\ \text{donde } a_{21}=a_{12},\ a_{31}=a_{13} \text{ y } a_{32}=a_{23},$$

se denominan *matrices* de estas *formas*.

Con ayuda de la transformación lineal de variables las formas cuadráticas pueden ser transformadas en formas que no contienen los productos de nuevas variables (reducidas, como se dice, a la suma algebraica de los cuadrados); en otras palabras, la forma cuadrática de dos variables puede reducirse a la forma $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2$, y la forma cuadrática de tres variables, a la forma $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2$. En este caso los coeficientes λ_1, λ_2, λ_3 son los números característicos de las matrices de las formas respectivas.

La correspondiente transformación lineal de variables se puede hallar del modo siguiente: se determina un triplete (para la forma cuadrática de dos variables, un par) de los vectores propios ortogonales normalizados de dos en dos que corresponden a los números característicos λ_1, λ_2, λ_3:

$$\mathbf{e}_1=\alpha_1\mathbf{i}+\beta_1\mathbf{j}+\gamma_1\mathbf{k},$$
$$\mathbf{c}_1=\alpha_2\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\gamma_2\mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_3=\alpha_3\mathbf{i}+\beta_3\mathbf{j}+\gamma_3\mathbf{k}.$$

En virtud de la normalidad y ortogonalidad de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ deben cumplirse las identidades:

$$\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2=1; \quad i=1,\ 2,\ 3; \quad \alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j+\gamma_i\gamma_j=0,$$
$$i,\ j=1,\ 2,\ 3, \quad i\neq j.$$

Entonces la matriz de la transformación de variables tiene la forma

$$S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix};$$

con otras palabras, hay que poner

$$x=\alpha_1x'+\alpha_2y'+\alpha_3z',$$
$$y=\beta_1x'+\beta_2y'+\beta_3z',$$
$$z=\gamma_1x'+\gamma_2y'+\gamma_3z'$$

(para el caso de dos variables todas las fórmulas se simplifican respectivamente.) Tal transformación de variables ha recibido el nombre de *transformación ortogonal lineal*: en este caso el determinante de la matriz S es igual a ±1 : $D_S=\pm1$.

La transformación ortogonal lineal se utiliza para reducir a la forma canónica la ecuación general, de una curva o superficie de segundo orden; en este caso, si se quiere mantener la orientación mutua de nuevos ejes de coordenadas, se impone sobre la matriz de la transformación S una condición adicional: $D_S=1$.

La reducción de la ecuación de una curva o superficie de segundo orden a la forma canónica se efectúa del modo siguiente:

a) se encuentra aquella transformación ortogonal lineal de coordenadas que reduzca la forma cuadrática de los términos de mayor grado de la ecuación de la curva o superficie a la suma de los cuadrados y se realiza en la ecuación la sustitución correspondiente. Como resultado de esta transformación se eliminan de la ecuación los términos que contienen los productos de las coordenadas;

b) efectuando luego una traslación paralela de nuevos ejes de coordenadas (en el espacio a veces hay que llevar a cabo, además, un giro adicional de dos ejes en uno de los planos de coordenadas), se reduce la ecuación a la forma canónica requerida.

409. Reducir a la forma canónica la ecuación de la curva

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$$

Resolución. En el caso dado la matriz de los términos de grado superior tiene la forma $A=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{vmatrix}$.

Escribimos la ecuación característica de la matriz:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix}=0, \quad \text{sea,} \quad \lambda^2-13\lambda+36=0.$$

Hallamos los números característicos $\lambda_1=4$, $\lambda_2=9$. Haciendo $\lambda_1=4$, para determinar el vector propio respectivo obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\xi_1+2\xi_2=0,\\ 2\xi_1+4\xi_2=0.\end{cases}$$

De aquí $\xi_1=-2\xi_2$; haciendo $\xi_2=-\alpha$, hallamos $\xi_1=2\alpha$ y $\mathbf{r}_1=\alpha\,(2\mathbf{i}-\mathbf{j})$. Normalizamos el vector $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{e}_1=(2/\sqrt{5})\,\mathbf{i}-(1/\sqrt{5})\,\mathbf{j}.$$

Suponiendo $\lambda_2 = 9$, para determinar el segundo vector propio obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -4\eta_1+2\eta_2=0, \\ 2\eta_1-\eta_2=0, \end{cases}$$

De aquí $\eta_2 = 2\eta_1$ y $\mathbf{r}_2 = \beta\,(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$. Normalizando, determinamos

$$\mathbf{e}_2=(1/\sqrt{5})\,\mathbf{i}+(2/\sqrt{5})\,\mathbf{j}.$$

Los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son ortogonales: $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 0$.

Utilizamos los vectores propios ortogonales normalizados para la construcción de la matriz de la transformación de las coordenadas

$$S=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}; \quad D_S=1$$

De aquí

$$x=(2/\sqrt{5})\,x'+(1/\sqrt{5})\,y', \qquad y=(-1/\sqrt{5})\,x'+(2/\sqrt{5})\,y'.$$

Con las expresionas halladas para x e y sustituimos en la ecuación de la curva

$$5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{1}{\sqrt{5}}\,y'\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{1}{\sqrt{5}}\,y'\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\,y'\right)+$$
$$+8\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\,y'\right)^2-32\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{1}{\sqrt{5}}\,y'\right)-$$
$$-56\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\,y'\right)+80=0,$$

de donde, una vez suprimidos los paréntesis y reducidos los términos semejantes, obtenemos

$$4x'^2+9y'^2-\frac{8}{\sqrt{5}}\,x'-\frac{144}{\sqrt{5}}\,y'+80=0.$$

Notemos que en la ecuación transformada los coeficientes de x'^2 y y'^2 son (como era de esperar) los números característicos λ_1 y λ_2. Volvemos a escribir la ecuación de la forma

$$4\left(x'^2-\frac{2}{\sqrt{5}}\,x'\right)+9\left(y'^2-\frac{16}{\sqrt{5}}\,y'\right)+80=0.$$

Completamos los cuadrados de las expresiones entre paréntesis:

$$4\left(x'^2-\frac{2}{\sqrt{5}}\,x'+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)+9\left(y'^2-\frac{16}{\sqrt{5}}\,y'+\frac{64}{5}-\frac{64}{5}\right)+80=0,$$

o bien,

$$4\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{4}{5}+9\left(y'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{576}{5}+80=0,$$

o finalmente,

$$4\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=36.$$

Efectuamos una traslación paralela de los ejes de coordenadas haciendo $x'' = x' - 1/\sqrt{5}$, $y'' = y' - 8/\sqrt{5}$; obtenemos

$$4x''^2 + 9y''^2 = 36, \quad \text{o bien,} \quad x''^2/9 + y''^2/4 = 1$$

(es la ecuación canónica de una elipse).

410. Reducir a la forma canónica la ecuación de la curva

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 225 = 0.$$

Resolución. La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o bien,} \quad \lambda^2 - 25\lambda = 0,$$

o sea, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25$.

Si $\lambda = 0$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 9\xi_1 + 12\xi_2 = 0, \\ 12\xi_1 + 16\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Cada una de estas ecuaciones se reduce a la ecuación $\xi_1/4 = \xi_2/(-3)$. Por consiguiente, de vector propio de la matriz sirve $\mathbf{r} = \alpha\,(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$, y cuando $\alpha = 1/5$ hallamos el vector propio normalizado $\mathbf{e}_1 = (4/5)\,\mathbf{i} - (3/5)\,\mathbf{j}$.

Si $\lambda = 25$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -16\eta_1 + 12\eta_2 = 0, \\ 12\eta_1 - 9\eta_2 = 0. \end{cases}$$

De un modo análogo encontramos de este sistema el segundo vector propio normalizado $\mathbf{e}_2 = (3/5)\,\mathbf{i} + (4/5)\,\mathbf{j}$ $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = 0)$.

La matriz de la transformación de las coordenadas tiene la forma

$$S = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \quad (D_S = 1);$$

las fórmulas de transformación son $x = (4/5)\,x' + (3/5)\,y'$, $y = (-3/5)\,x' + (4/5)\,y'$.

Al reescribir la ecuación de la curva de la forma

$$(3x + 4y)^2 - 230x + 110y - 225 = 0,$$

pasamos a las nuevas coordenadas:

$$25y'^2 - 230\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + 110\left(-\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right) - 225 = 0.$$

Después de reducir los términos semejantes y simplificar dividiendo por 25 llegamos a la ecuación

$$y'^2 - 10x' - 2y' - 9 = 0.$$

La última ecuación puede ser reescrita de la forma $(y' - 1)^2 = 10\,(x' + 1)$. Efectuando una traslación paralela de los ejes, tomamos como nuevo origen de coordenadas el punto O' $(-1;\ 1)$. Finalmente llegamos a la ecuación canónica de la curva dada $y''^2 = 10x''$ (una parábola).

411. Reducir a la forma canónica la ecuación de la superficie $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 12x - 10 = 0$.

Resolución. Aquí la matriz de los términos de grado superior de la ecuación de la superficie tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

los números característicos de la matriz se encuentran a partir de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

que se reduce a la forma $(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$; de aquí hallamos $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Para $\lambda = 2$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = 0, \\ -u_1 + 3u_2 - u_3 = 0, \\ u_1 - u_2 + u_3 = 0. \end{cases}$$

Al valor indicado de λ le corresponde el vector propio $(\alpha;\ 0;\ -\alpha)$. Después de efectuar la normalización llegamos al vector $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{2})\,\mathbf{i} - (1/\sqrt{2})\,\mathbf{k}$.

Para $\lambda = 3$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -v_2 + v_3 = 0, \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 = 0, \\ v_1 - v_2 \qquad = 0. \end{cases}$$

De aquí hallamos el segundo vector propio normalizado $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{3})\,\mathbf{i} + (1/\sqrt{3})\,\mathbf{j} + (1/\sqrt{3})\,\mathbf{k}$. Los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son ortogonales: $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$.

Para $\lambda = 6$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -3w_1 - w_2 + w_3 = 0, \\ -w_1 - w_2 - w_3 = 0, \\ w_1 - w_2 - 3w_3 = 0. \end{cases}$$

De vector propio normalizado correspondiente (tercero) sirve $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{6})\,\mathbf{i} - (2/\sqrt{6})\,\mathbf{j} + (1/\sqrt{6})\,\mathbf{k}$, ortogonal a los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$: $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. Hallamos la matriz de la transformación de las coordenadas:

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos las fórmulas de transformación de las coordenadas:

$$x = (1/\sqrt{2})\,x' + (1/\sqrt{3})\,y' + (1/\sqrt{6})\,z', \quad y = (1/\sqrt{3})\,y' - (2/\sqrt{6})\,z',$$

$$z = (-1/\sqrt{2})\,x' + (1/\sqrt{3})\,y' + (1/\sqrt{6})\,z'.$$

Sustituyendo las expresiones para x, y, z en la ecuación de la superficie, después de simplificar obtenemos

$$2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 - 6\sqrt{2}\,x' - 4\sqrt{3}\,y' - 2\sqrt{6}\,z' - 10 = 0.$$

Los coeficientes de x'^2, y'^2, z'^2 son, como era de esperar, los números λ_1, λ_2, λ_3. Escribimos la ecuación de la forma

$$2\left(x'^2-\frac{6}{\sqrt{2}}x'\right)+3\left(y'^2-\frac{4}{\sqrt{3}}y'\right)+6\left(z'^2-\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)=10.$$

lo que, una vez completados los cuadrados de las expresiones entre paréntesis, resulta

$$2\left(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(y'-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+6\left(z'-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=24.$$

Efectuando una traslación paralela de los ejes de las coordenadas por las fórmulas $x'=x''+3/\sqrt{2}$, $y'=y''+2/\sqrt{3}$, $z'=z''+1\sqrt{6}$ y dividiendo la ecuación por 24, llegamos a la ecuación canónica del elipsoide $x''^2/12+$ $+y''^2/8+z''^2/4=1$.

412. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}5&8&4\\3&2&5\\7&6&0\end{pmatrix}$. ¿Qué matriz B hace falta adicionarle para obtener la matriz unidad?

413. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, hallar la suma de las matrices A^2+A+E.

414. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}10&20&-30\\0&10&20\\0&0&10\end{pmatrix}$, hallar la matriz inversa.

415. Se dan las dos transformaciones lineales

$$x=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z',\ y=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z',$$
$$z=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z';$$
$$x'=b_{11}x''+b_{12}y''+b_{13}z'',\ y'=b_{21}x''+b_{22}y''+b_{23}z'',$$
$$z'=b_{31}x''+b_{32}y''+b_{33}z''.$$

Sustituyendo x', y', z' de la segunda transformación en la primera obtendremos la transformación lineal que expresa x, y, z por x'', y'', z''. Mostrar que la matriz de la transformación obtenida es igual al producto de las matrices de la primera y segunda transformaciones.

416. Hallar los números característicos y los vectores normalizados propios de la matriz $\begin{pmatrix}7&4\\5&6\end{pmatrix}$.

417. Hallar los números característicos y los vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$.

418. Reducir a la forma canónica la ecuación de la curva $5x^2+$ $+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$.

419. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+4y=11, \\ 5y+6z=28, \\ x+2z=\ \ 7, \end{cases}$$

representándolo en la forma de ecuación matricial.

420. Reducir a la forma canónica la ecuación de la curva $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$.

421. Reducir a la forma canónica la ecuación de la curva $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$.

422. Reducir a la forma canónica la ecuación de la superficie $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 6 = 0$.

Indicación: las fórmulas de transformación de las coordenadas son:

$$x=(1/\sqrt{3})\,x'+(1/\sqrt{6})\,y'+(1/\sqrt{2})\,z', \qquad y=-(1/\sqrt{3})\,x'+(2/\sqrt{6})\,y',$$
$$z=(1/\sqrt{3})\,x'+(1/\sqrt{6})\,y'-(1/\sqrt{2})\,z'.$$

423. Reducir a la forma canónica la ecuación de la superficie $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$.

Indicación: las fórmulas de transformación de las coordenadas son:

$$x=-(1/\sqrt{6})\,x'-(1/\sqrt{2})\,y'+(1/\sqrt{3})\,z', \qquad x'=x'';$$
$$y=-(2/\sqrt{6})\,x'-(1/\sqrt{3})\,z', \qquad y'=y''+1/\sqrt{2};$$
$$z=-(1/\sqrt{6})\,x'+(1/\sqrt{2})\,y'+(1/\sqrt{3})\,z', \qquad z'=z''+1/\sqrt{3}.$$

424. Dada la transformación lineal $x = 6x' + y' - 2z'$, $y = -18x' + 2y' + 6z'$, $z = 2x' + 2y'$. ¿De qué puntos son las coordenadas que se duplican como resultado de esta transformación?

425. Se dan dos transformaciones lineales:

$$x = x' + y' + 2z', \qquad y = x' + 2y' + 6z, \qquad z = 2x' + 3y';$$
$$x = 2x' + 2z', \qquad y = x' + 3y' + 4z', \qquad z = x' + 3y' + 2z'.$$

Hallar los puntos para los cuales cada una de estas transformaciones da el mismo resultado.

426. Hallar los puntos cuyas coordenadas no cambian al emplear la transformación lineal $x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha$, $y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha$.

427. Hallar un conjunto de los puntos cuyas coordenadas cambian de lugar al emplear la transformación lineal $x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha$, $y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha$.

§ 4. Rango de una matriz. Matrices equivalentes

Se da la matriz rectangular

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Escojamos en esta matriz k filas arbitrarias y k columnas arbitrarias ($k \leqslant m$, $k \leqslant n$). El determinante de k-ésimo orden compuesto por los elementos de la matriz A situados en la intersección de las filas y columnas escogidas se llama *menor* de k-ésimo orden de la matriz A. La matriz A tiene $C_m^k \cdot C_n^k$ menores de k-ésimo orden.

Examinemos todos los menores de la matriz A distintos de cero. Se denomina *rango* de la matriz A el orden mayor del menor de esta matriz, distinto de cero. Si todos los elementos de la matriz son iguales a cero, el rango de esta matriz se toma igual a cero.

Todo menor de una matriz, distinto de cero, cuyo orden es igual al rango de esta matriz recibe el nombre de *menor básico* de la matriz.

El rango de la matriz A lo designamos por $r(A)$. Si $r(A) = r(B)$, las matrices A y B se dicen *equivalentes*. En este caso se escribe $A \sim B$.

Es útil tener en cuenta que el rango de una matriz no cambia al efectuar las *transformaciones elementales*. Por transformaciones elementales se entienden:

1) la sustitución de las filas por las columnas y la sustitución de las columnas por las filas respectivas;

2) la permutación de las filas de la matriz;

3) la eliminación de una fila con todos los elementos iguales a cero;

4) la multiplicación de cualquier fila por un número distinto de cero;

5) la adición de los elementos de una fila a los elementos correspondientes de otra.

428. Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Resolución. Todos los menores de segundo y tercer orden de la matriz dada son iguales a cero, ya que los elementos, de las filas de estos menores son proporcionales. Al mismo tiempo, los menores de primer orden (los mismos elementos de la matriz) son distintos de cero. Por consiguiente, el rango de la matriz es igual a 1.

429. Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Resolución. Tachando en esta matriz la segunda fila y luego las columnas segunda, tercera y cuarta obtenemos la matriz $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}$ equivalente a la dada. Como $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango de esta matriz es igual a 2.

430. Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Resolución. Sumamos los elementos correspondientes de las filas primera y tercera:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dividimos por 4 los elementos de la primera fila:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

De los elementos de la primera fila restemos los elementos correspondientes de la segunda fila:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tachamos la primera fila

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de la última matriz es igual a 2, puesto que, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Por consiguiente, el rango de la matriz dada también es igual a 2.

431. Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Resolución. De los elementos de la cuarta columna sustraigamos los de la tercera columna:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Borramos la cuarta columna

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, el rango de la matriz es igual a 3.

432. Determinar el rango y hallar los menores básicos de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolución. Tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \; r(A) = 2.$$

Los menores básicos son los de segundo orden de esta matriz, distintos de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Así, pues, la matriz A tiene 8 menores básicos.

433. ¿Cuántos menores de segundo orden tiene la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}?$$

Escribirlos a todos.

Resolución. La matriz tiene $C_3^2 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ menores de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

434. Determinar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$.

435. Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

436. Determinar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y hallar sus menores básicos.

437. Determinar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y hallar sus menores básicos.

§ 5. Investigación de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Se da un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Se llama *solución* de este sistema a un conjunto de n números $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \ldots; \bar{x}_n)$ los cuales, una vez sustituidos en lugar de las incógnitas en las ecuaciones, convierten en identidades estas últimas. Un sistema de ecuaciones se llama *compatible* si tiene, por lo menos, una solución $(\overline{x}_1; \overline{x}_2; \ldots; \overline{x}_n)$. Si un sistema no tiene ninguna solución, se denomina *incompatible*.

Un sistema compatible se dice *determinado* si tiene una sola solución e *indeterminado* si tiene más de una solución.

Las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

han recibido, respectivamente, los nombres de *matriz* y de *matriz ampliada del sistema* (1).

***Para la compatibilidad del sistema* (1) *es necesario y suficiente que el rango de la matriz del mismo sea igual al rango de su matriz ampliada (teorema de Kronecker — Capelli)*.** De este modo, el sistema (1) es compatible si, y sólo si, $r(A) = r(A_1) = r$. En este caso el número r se llama *rango del sistema* (1).

Si $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, el sistema de ecuaciones lineales (1) se denomina *homogéneo*. Un sistema homogéneo de ecuaciones es siempre compatible.

Si el rango de un sistema compatible es igual al número de incógnitas (o sea, $r = n$), el sistema es determinado.

Pero si el rango de un sistema compatible es menor que el número de incógnitas, el sistema es indeterminado. Detengámonos en el último caso. Supongamos que el sistema (1) es compatible y $r < n$. Examinemos un menor básico cualquiera de la matriz A. Escojemos en este menor una fila arbitraria. Los elementos de esta fila son los coeficientes de r incógnitas en una de las ecuaciones del sistema (1). A estas r incógnitas las llamamos *incógnitas básicas* del sistema de ecuaciones dado. Las demás $n - r$ incógnitas del sistema (1) las denominaremos *incógnitas independientes*.

Escogemos en el sistema (1) un sistema de r ecuaciones entre cuyos coeficientes se contienen los elementos del menor básico. Dejemos las incógnitas básicas del sistema escogido en los primeros miembros de las ecuaciones y transponemos a los segundos miembros los términos que contienen incógnitas independientes. En el sistema de ecuaciones obtenido expresemos las incógnitas básicas por medio de las independientes (por ejemplo, por las fórmulas de Cramer).

Ahora bien, asignando a las incógnitas independientes valores arbitrarios se pueden hallar los respectivos valores de las incógnitas básicas. Por lo tanto (de esto ya hemos hablado anteriormente) el sistema (1) tiene un conjunto innumerable de soluciones.

438. Investigar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Resolución. Determinemos los rangos de la matriz y de la matriz ampliada del sistema. Escribimos la matriz ampliada

$$A_1 = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Con la raya vertical hemos separado los elementos de la matriz del sistema (de la matriz A) de los términos independientes del sistema.

Adicionamos a los elementos de la segunda fila los elementos correspondientes de la tercera fila:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Dividimos todos los elementos de la segunda fila por 3:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right).$$

Restamos de los elementos de la segunda fila los elementos correspondientes de la primera fila:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right);$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

No es difícil ver que $r(A) = 2$, $r(A_1) = 3$, o sea, $r(A) \neq r(A_1)$; por consiguiente, el sistema es incompatible.

439. Investigar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Resolución. La matriz ampliada del sistema tiene la forma

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Adicionamos los elementos de la segunda fila a los elementos correspondientes de las filas primera y cuarta;

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Dividamos los elementos **de la primera fila por 4** y los de la cuarta fila por 5:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Restamos de los elementos de la tercera fila los elementos correspondientes de la primera fila y de los elementos de la quinta fila los de la cuarta:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Borramos las filas tercera y quinta:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right); \qquad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallamos el determinante de la última matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} -1 \neq 0.$$

Por consiguiente, $r(A) = 3$. El rango de la matriz ampliada también es igual a 3, ya que el determinante hallado es menor de la matriz A_1.

De este modo, el sistema es compatible. Para su resolución tomemos, por ejemplo, la primera, tercera y quinta ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 \qquad = 3. \end{cases}$$

De aquí hallamos fácilmente que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ $x_3 = 3$.

440. Investigar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Resolución. Tenemos

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Restamos de la tercera fila la primera:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Dividimos los elementos de la tercera fila por 2 y restamos luego de ella la segunda fila:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Borramos la tercera fila:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

No es difícil ver que $r(A) = r(A_1) = 2$. Por consiguiente, el sistema es compatible.

Tomamos la primera y segunda ecuaciones del sistema dado:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Adoptamos como básicas las incógnitas x_1 y x_2. Esto se puede hacer, puesto que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ formado por los coeficientes de estas incógnitas es distinto de cero. De incógnitas independientes sirven x_3 y x_4. Excribiendo el sistema de la forma

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4, \end{cases}$$

expresamos x_1 y x_2 por medio de x_3 y x_4:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ -2x_3 + x_4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{8}{11}x_4 - \frac{1}{11},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 2 & -2x_3 + x_4 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}x_3 + \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Haciendo $x_3 = u$, $x_4 = v$, obtenemos la solución del sistema de la forma

$$x_1 = -\frac{6}{11}u + \frac{8}{11}v - \frac{1}{11}, \quad x_2 = -\frac{6}{11}u + \frac{7}{11}v + \frac{2}{11}, \qquad x_3 = u, \ x_4 = v.$$

Asignando a u y v diferentes valores númericos obtendremos distintas soluciones del sistema de ecuaciones dado.

Investigar los sistemas de ecuaciones:

441. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 8, \\ 3x_1 - 16x_2 = -5. \end{cases}$$

$$
442. \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5. \end{cases}
$$

$$
443. \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}
$$

§ 6. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss

La solución numérica de las ecuaciones algebraicas lineales con ayuda del determinante es cómoda para un sistema de dos y tres ecuaciones. Sin embargo, en caso de un número mayor de ecuaciones es mucho más ventajoso utilizar el *método de Gauss* que consiste en la eliminación consecutiva de las incógnitas. Aclaremos la esencia de este método tomando a título de ejemplo un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$
\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u = a_{15}, & \text{(a)} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}u = a_{25}, & \text{(b)} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}u = a_{35}, & \text{(c)} \\ a_{41}x + a_{32}y + a_{43}z + a_{44}u = a_{45}, & \text{(d)} \end{cases}
$$

Supongamos que $a_{11} \neq 0$ (si $a_{11} = 0$, cambiamos el orden de ecuaciones eligiendo como primera ecuación una en la cual el coeficiente de x no sea igual a cero).

Primer paso: dividimos la ecuación (a) por a_{11}, multiplicamos la ecuación obtenida por a_{21} y la restamos de (b); luego multiplicamos por a_{31} y restamos de (c); por último, multiplicamos por a_{41} y restamos de (d). Como resultado del primer paso llegamos al sistema

$$
\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15}, & \text{(e)} \\ \qquad b_{22}y + b_{23}z + b_{24}u = b_{25}, & \text{(f)} \\ \qquad b_{32}y + b_{33}z + b_{34}u = b_{35}, & \text{(g)} \\ \qquad b_{42}y + b_{43}z + b_{44}u_4 = b_{45}, & \text{(h)} \end{cases}
$$

Con ello b_{ij} se obtiene a partir de a_{ij} por las fórmulas siguientes:

$$
b_{1j} = a_{1j}/a_{11} \quad (j = 2,\ 3,\ 4,\ 5);
$$

$$
b_{ij} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \quad (i = 2,\ 3,\ 4; \quad j = 2,\ 3,\ 4,\ 5).
$$

Segundo paso: procedemos con las ecuaciones (f), (g), (h) del mismo modo que con las ecuaciones (a), (b), (c), (d), etc. En resumidas cuentas el sistema inicial se transforma reduciéndose a la llamada forma «escalonada»:

$$
\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15}, \\ \qquad y + c_{23}z + c_{24}u = c_{25}, \\ \qquad\qquad z + d_{34}u = d_{35}, \\ \qquad\qquad\qquad u = e_{45}. \end{cases}
$$

A partir del sistema transformado todas las incógnitas se determinan sucesivamente sin dificultad.

444. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 36,47x + 5,28y + 6,34z = 12,26, & \text{(a)} \\ 7,33x + 28,74y + 5,86z = 15,15, & \text{(b)} \\ 4,63x + 6,31y + 26,17z = 25,22. & \text{(c)} \end{cases}$$

Resolución. Dividiendo la ecuación (a) por 36,47, obtendremos

$$x + 0,1447y + 0,1738z = 0,3361. \qquad (*)$$

Multiplicamos la ecuación (*) por 7,33 y el resultado lo restamos de (b); obtenemos

$$27,6793y + 4,586z = 12,6864;$$

ahora multiplicamos la ecuación (*) por 4,63 y el resultado lo restamos de (c): obtenemos

$$5,64y + 25,3653z = 23,6639.$$

Así, pues, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 27,6793y + 4,586z = 12,6864, & \text{(d)} \\ 5,64y + 25,3653z = 23,6639. & \text{(e)} \end{cases}$$

Dividiendo la ecuación (d) por 27,68, tenemos

$$y + 0,1657z = 0,4583. \qquad (**)$$

Multiplicando la ecuación (**) por 5,64 y restando de (e), obtenemos $24,4308z = 21,0791$. Por lo tanto, $z = 0,8628$. Entonces

$$y = 0,4583 - 0,1657 \cdot 0,8628 = 0,3153,$$

$$x = 0,3361 - 0,1447 \cdot 0,3153 - 0,1738 \cdot 0,8628 = 0,1405.$$

De este modo, $x = 0,1405$, $y = 0,3153$, $z = 0,8628$.

Prácticamente es más cómodo reducir a la forma escalonada, no el mismo sistema de ecuaciones sino la matriz compuesta por los coeficientes de las incógnitas y por los términos independientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 \end{array}\right).$$

Introduzcamos una quinta columna o sea, la llamada *columna de control*, cada elemento de la cual es la suma de los cuatro elementos de la fila dada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26 & 60,35 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33 \end{array}\right).$$

Al efectuar las transformaciones lineales de los elementos de la matriz, *también deben someterse a la misma transformación* los elementos de la columna de control. No es difícil ver que cada elemento de la columna de control de la matriz transformada es igual a la suma de los elementos de la fila correspondiente. El paso de una matriz a la otra lo escribimos con ayuda del signo de equivalencia:

$$\begin{pmatrix} 36,47 & 5,28 & 6,34 & 12,26 & 60,35 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 7,33 & 28,74 & 5,86 & 15,15 & 57,08 \\ 4,63 & 6,31 & 26,17 & 25,22 & 62,33 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 27,6793 & 4,586 & 12,6864 & 44,9516 \\ 0 & 5,64 & 25,3653 & 23,6639 & 54,6688 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 5,64 & 25,3653 & 23,6639 & 54,6688 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 0 & 24,4308 & 21,0791 & 45,5094 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0,1447 & 0,1738 & 0,3361 & 1,6547 \\ 0 & 1 & 0,1657 & 0,4583 & 1,6240 \\ 0 & 0 & 1 & 0,8628 & 1,8629 \end{pmatrix}.$$

Según la matriz obtenida escribimos el sistema transformado y hallamos la solución:

$$z = 0,8628,$$
$$y = 0,4583 - 0,1657 \cdot 0,8628 = 0,3153,$$
$$x = 0,3361 - 0,1738 \cdot 0,8628 - 0,1447 \cdot 0,3153 = 0,1405.$$

Si un sistema tiene solución única, la forma escalonada del sistema de ecuaciones se reducirá a la triangular, es decir que la última ecuación del sistema contiene una sola incógnita. En caso de un sistema indefinido, o sea, cuando el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones linealmente independientes, y admite por eso un conjunto innumerable de soluciones, la forma triangular del sistema no se obtiene, puesto que la última ecuación contiene más de una incógnita.

Cuando un sistema de ecuaciones es incompatible, una vez reducido a la forma escalonada, él contiene al menos una ecuación en forma de $0 = 1$, o sea, una ecuación en que todas las incógnitas tienen coeficientes nulos y el segundo miembro es distinto de cero. Un sistema así no tiene solución.

445. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Resolución. Transformamos la matriz en matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

(para simplificar los cálculos hemos permutado las dos primeras ecuaciones).
Restamos de las otras dos filas la primera multiplicada por 3 y por 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 9 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Cambiando los signos en la segunda fila y multiplicándola por 5, adicionamos el resultado a la tercera fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -22 & -33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(hemos dividido por -11 la última fila)
El sistema de ecuaciones se ha reducido a la forma triangular:

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ \quad y-4z=-5, \\ \qquad z=2. \end{cases}$$

El mismo tiene solución única. De la última ecuación tenemos $z = 2$; sustituyendo este valor en la segunda ecuación, obtenemos $y = 3$ y, por último, en la primera ecuación hallamos $x = -1$.

Resolver los sistemas de ecuaciones:

446. $$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ x_1-2x_2+2x_3=-5, \\ 7x_1+x_2-x_3=10. \end{cases}$$

447. $$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=4, \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1, \\ x_1-x_3+2x_4=6, \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

448. $$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3+2x_5=18, \\ 2x_1-5x_2+x_4+x_5=-7, \\ x_1-x_4+2x_5=8, \\ 2x_2+x_3+x_4-x_5=10, \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=1. \end{cases}$$

449. $$\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1+8x_2-x_3=8, \\ 9x_1+x_2+8x_3=0. \end{cases}$$

450. $$\begin{cases} 0{,}04x-0{,}08y+4z=20, \\ 4x+0{,}24y-0{,}08z=8, \\ 0{,}09x+3y-0{,}15z=9. \end{cases}$$

451. $$\begin{cases} 3{,}21x+0{,}71y+0{,}34z=6{,}12, \\ 0{,}43x+4{,}11y+0{,}22z=5{,}71, \\ 0{,}17x+0{,}16y+4{,}73z=7{,}06. \end{cases}$$

§ 7. Aplicación del método de Jordan—Gauss a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales con ayuda del método de Gauss ha sido examinado el método matricial con la columna de control, merced a lo cual el sistema de ecuaciones dado se reducía a la forma triangular (véase las págs. 112, 113). Para la exposición ulterior es importante familiarizarse con el *método modificado de Jordan — Gauss* que permite encontrar directamente los valores de las incógnitas.

Sea dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{array}\right. \tag{1}$$

En la matriz A de este sistema escogemos un elemento a_{qp} distinto de cero. Este elemento se llama *elemento resolutivo*, la p-ésima columna de la matriz A se denomina *columna resolutiva* y la q-ésima fila, *fila resolutiva*.

Examinamos el nuevo sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\ldots+a'_{1n}x_n=b'_1, \\ a'_{21}x_1+a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m1}x_1+a'_{m2}x_2+\ldots+a'_{mn}x_n=b'_m \end{array}\right. \tag{2}$$

con la matriz A' cuyos coeficientes y términos independientes se determinan por las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} a'_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{ip}\cdot a_{qi}}{a_{qp}} \\ b'_i=b_i-\dfrac{a_{ip}\cdot b_q}{a_{qp}} \end{array}\right\}, \quad \text{si} \quad i\neq q.$$

En particular, $a_{ip}=0$ si $i\neq q$. Si $i=q$, tomamos $a_{qj}=a'_{qj}$, $b'_q=b_q$. Pues bien, las q-ésimas ecuaciones en los sistemas (1) y (2) son iguales y los coeficientes de x_p en todas las ecuaciones del sistema (2), excepto en la q-ésima, son iguales a cero.

Hay que tener en cuenta que los sistemas (1) y (2) son simultáneamente compatibles o incompatibles. En caso de compatibilidad estos sistemas son equivalentes (sus soluciones coinciden).

Para determinar el elemento a'_{ij} de la matriz A' es útil tener en cuenta la llamada «regla del rectángulo».

Examinemos 4 elementos de la matriz A: a_{ij} (elemento que se somete a la transformación), a_{qp} (elemento resolutivo) y los elementos a_{ip} y a_{qj}. Para hallar el elemento a'_i se necesita restar del elemento a_{ij} el producto de los elementos a_{ip} y a_{qj}, situados en los vértices opuestos del rectángulo, dividido por el elemento resolutivo a_{qp}:

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \text{------} & a_{ip} \\ \vert & & \vert \\ a_{qi} & \text{------} & a_{qp} \end{array}$$

De un modo análogo se puede transformar el sistema (2) tomando como elemento resolutivo de la matriz A' el elemento $a'_{sr}\neq 0$, ademas, $s\neq q$, $r\neq p$. Después de esta transformación todos los coeficientes de x_r, excepto a_{sr}, se anularán. El sistema obtenido puede ser nuevamente transformado, etc. Si

$r=n$ (el rango del sistema es igual al número de incógnitas), entonces, efectuada una serie de transformaciones, llegaremos al sistema de ecuaciones que tiene la forma

$$k_1x_1 = l_1,$$
$$k_2x_2 = l_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$k_nx_n = l_n,$$

a partir del cual se encuentran los valores de las incógnitas. El método descrito de resolución fundado en la eliminación sucesiva de las incógnitas se llama método de Jordan — Gauss.

452. Se da la matriz de un sistema de ecuaciones lineales

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Al resolver este sistema con ayuda del método de Jordan—Gauss como elemento resolutivo se ha tomado $a_{23}=3$. Hallar los elementos a'_{24}, a'_{13}, a'_{44} de la matriz transformada.

Resolución. Como a_{24} es un elemento de la fila resolutiva, $a'_{24}=a_{24}=2$. El elemento a_{13} pertenece a la columna resolutiva; por eso $a'_{13}=0$. El elemento a'_{44} se determina por la regla del rectángulo:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & \boxed{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$b'_{44}=a_{44}-\frac{a_{24}\cdot a_{43}}{a_{23}}=-4-\frac{2\cdot 5}{3}=-7\frac{1}{3}.$$

453. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2-3x_3+2x_4=6, \\ x_1-2x_2 \qquad\quad -\ x_4=-6, \\ \qquad\ \ x_2+\ \ x_3+3x_4=16, \\ 2x_1-3x_2+2x_3 \qquad\quad =6. \end{cases}$$

Resolución. Escribimos los coeficientes, los términos independientes y las sumas de los coeficientes y de los términos independientes ($\sum$ es la columna de control) en la tabla siguiente:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
$\boxed{1}$	1	—3	2	6	7
1	—2	0	—1	—6	—8
0	1	1	3		21
2	—3	2	0	6	7

Hemos tomado como elemento resolutivo el coeficiente de x_1 en la primera ecuación. Escribamos sin cambios la fila de la tabla que contiene este elemento (fila resolutiva) y a todos los elementos de la primera columna, excepto lo resolutivo, los sustituimos por ceros:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	—3	2	6	7
0					
0					
0					

Aplicando la regla del rectángulo, llenamos las casillas vacías de la tabla (la misma regla la aplicamos también a la columna $\sum$):

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	—3	2	6	7
0	—3	3	—3	—12	—15
0	1	1	3	16	21
0	—5	8	—4	—6	—7

Prestemos la atención a que en la columna de control se obtienen las sumas de los elementos de las filas respectivas. Dividiendo por —3 los elementos de la segunda fila obtenemos la tabla:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	1	—3	2	6	7
0	$\boxed{1}$	—1	1	4	5
0	1	1	3	16	21
0	—5	8	—4	—6	—7

Tomamos como resolutivo el segundo elemento de la segunda fila. Escribimos sin cambios la primera columna; los elementos de la segunda columna excepto el resolutivo, los sustituimos por ceros; escribimos sin cambios la segunda fila (resolutiva); transformamos los elementos de las demás casillas de la tabla por la regla del rectángulo:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	—2	1	2	2
0	1	—1	1	4	5
0	0	2	2	12	16
0	0	3	1	14	18

Dividimos los elementos de la tercera columna por 2:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	—2	1	2	2
0	1	—1	1	4	5
0	0	$\boxed{1}$	1	6	8
0	0	3	1	14	18

Transformamos la tabla tomando como resolutivo el tercer elemento de la tercera columna:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	0	3	1	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	—2	—4	—6

Dividimos los elementos de la cuarta fila por —2:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	$\boxed{1}$	2	3

Transformamos la tabla tomando como resolutivo el cuarto elemento de la cuarta fila:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	0	0	0	8	8
0	1	0	0	6	7
0	0	1	0	4	5
0	0	0	1	2	3

Finalmente obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=8, \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=6, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3+0\cdot x_4=4, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+1\cdot x_4=2, \end{cases}$$

o sea, $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$.

454. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2-2x_3+x_4=1, \\ x_1-3x_2+\ \ x_3+x_4=0, \\ 4x_1-\ \ x_2-\ \ x_3-x_4=1, \\ 4x_1+3x_2-4x_3-x_4=2. \end{cases}$$

Resolución. Componemos la tabla:

$\boxed{1}$	1	−2	1	1	2
1	−3	1	1	0	0
4	−1	−1	−1	1	2
4	3	−4	−1	2	4

Al primer elemento de la primera columna lo tomamos como resolutivo:

1	1	−2	1	1	2
0	−4	3	0	−1	−2
0	−5	7	−5	−3	−6
0	−1	5	−5	−2	−4

Cambiamos los signos en la cuarta fila:

1	1	−2	1	1	2
0	−4	3	0	−1	−2
0	−5	7	−5	−3	−6
0	$\boxed{1}$	−4	5	2	4

El cuarto elemento de la segunda columna es resolutivo:

1	0	2	−4	−1	−2
0	0	−13	20	7	14
0	0	−13	20	7	14
0	1	−4	5	2	4

Restemos de la tercera fila la segunda:

1	0	2	−4	−1	−2
0	0	−13	20	7	14
0	0	0	0	0	0
0	1	−4	5	2	4

Se puede tachar la tercera fila:

1	0	2	−4	−1	−2
0	0	−13	$\boxed{20}$	7	14
0	1	−4	5	2	4

El cuarto elemento de la segunda fila es resolutivo:

1	0	$-0,6$	0	0,4	0,8
0	0	-13	20	7	14
0	1	$-0,75$	0	0,25	0,5

La matriz tiene rango igual a 3, por consiguiente, el sistema contiene tres incógnitas básicas x_1, x_2 y x_4 y una incógnita independiente x_3. Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+0\cdot x_2-0,6x_3+0\cdot x_4=0,4, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2-13x_3+20x_4=7, \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2-0,75x_3+0\cdot x_4=0,25. \end{cases}$$

De aquí,

$x_1 = 0,4 + 0,6x_3, \quad x_2 = 0,25 + 0,75x_3, \quad x_4 = 0,35 + 0,65x_3.$

De suerte que el sistema tiene la forma:

$x_1 = 0,4 + 0,6u, \quad x_2 = 0,25 + 0,75u, \quad x_3 = u, \quad x_4 = 0,35 + 0,65u,$

donde u es un número arbitrario.

455. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 6x-5y+7z+8t=3, \\ 3x+11y+2z+4t=6, \\ 3x+2y+3z+4t=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

Resolución. Componemos la tabla:

6	-5	7	8	3	19
3	11	2	4	6	26
3	2	3	4	1	13
$\boxed{1}$	1	1	0	0	3

El cuarto elemento de la primera columna es resolutivo:

0	—11	$\boxed{1}$	8	3	1
0	8	—1	4	6	17
0	—1	0	4	1	4
1	1	1	0	0	3

El primer elemento de la tercera columna es resolutivo:

0	—11	1	8	3	1
0	—3	0	12	9	18
0	—1	0	4	1	4
1	12	0	—8	—3	2

Reemplazamos los signos de los elementos de la tercera fila por los contrarios:

0	—11	1	8	3	1
0	—3	0	12	9	18
0	$\boxed{1}$	0	—4	—1	—4
1	12	0	—8	—3	2

El tercer elemento de la segunda columna es resolutivo:

0	0	1	—36	—8	—43
0	0	0	0	6	6
0	1	0	—4	—1	—4
1	0	0	40	9	50

En resumen, llegamos al sistema:

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z-36t=-8, \\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+0\cdot t=6, \\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z-4\cdot t=-1, \\ 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+40t=9. \end{cases}$$

Es fácil ver que a la segunda ecuación no la satisfacen ninguno de los valores de x, y, z y t. *Así, pues, el sistema obtenido de ecuaciones y el sistema dado son compatibles.*

456. Aplicar el método de Jordan—Gauss para la determinación del rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resolución. Componemos la tabla.

7	—1	3	5	14
$\boxed{1}$	3	5	7	16
4	1	4	6	15
3	—2	—1	—1	—1

En la última columna (de control) están escritas las sumas de los elementos de las filas respectivas. El segundo elemento de la primera columna es resolutivo:

0	—22	—32	—44	—98
1	3	5	7	16
0	—11	—16	—22	—49
0	—11	—16	—22	—49

Dividimos los elementos de la primera fila por —2:

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16
0	11	16	22	49
0	11	16	22	49

Restemos los elementos de la primera fila de los elementos correspondientes de las tercera y cuarta filas:

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Tachando las dos últimas filas, obtenemos la tabla:

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16

Todo determinante de segundo orden de la matriz obtenida es distinto de cero. Por consiguiente, $r(A) = 2$.

Resolver los sistemas de ecuaciones valiéndose del método de Jordan—Gauss:

457. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_2 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

458. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

459. $\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3-3x_4=1, \\ 7x_1+2x_2-3x_3-4x_4=2, \\ x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4=5, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=4, \\ x_1-\ x_2-\ x_3-\ x_4=-2. \end{cases}$

460. Determinar el rango de la matriz valiéndose del método de Jordan—Gauss

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$