Capítulo V. Fundamentos del álgebra lineal

§ 1. Espacios lineales

1. Conceptos principales. Examinemos un conjunto R de los elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$, en el cual, para dos elementos cualesquiera $\mathbf{x} \in R$ e $\mathbf{y} \in R$ está determinada la suma $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in R$ y para cualquier elemento $\mathbf{x} \in R$ y cualquier número real está determinado el producto $\lambda\mathbf{x} \in R$.

Si la adición de los elementos de un conjunto R y la multiplicación de un elemento de este conjunto por un número real satisface las condiciones siguientes:

1ª. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;

2ª. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;

3ª. existe un elemento $0 \in R$ (elemento nulo) tal, que $\mathbf{x} + 0 = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in R$;

4ª. para cada elemento $\mathbf{x} \in R$ existe un elemento $\mathbf{y} \in R$ tal, que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 0$ (en adelante escribiremos $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$, o sea, $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$);

5ª. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;

6ª. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$;

7ª. $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$;

8ª. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$,

entonces, el conjunto R se llama *espacio lineal* (o *vectorial*) y los elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ de este espacio se denominan *vectores*.

Por ejemplo, el conjunto de todos los vectores geométricos es un espacio lineal, ya que para los elementos de este espacio están definidas las operaciones de adición y multiplicación por un número que satisfacen las condiciones enunciadas.

Se llama *diferencia* de dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de un espacio lineal a un vector $\mathbf{v}$ de este espacio tal, que $\mathbf{y} + \mathbf{v} = \mathbf{x}$. La diferencia de los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se designa por $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, o sea, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{v}$. Se demuestra fácilmente que $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

Son justos también los teoremas siguientes:

1. *En cada espacio lineal existe un solo elemento nulo.*
2. *Para todo elemento de un espacio lineal existe un solo elemento contrario.*
3. *Para todo elemento* $\mathbf{x} \in R$ *se cumple la igualdad* $0 \cdot \mathbf{x} = 0$.
4. *Para todo número real* λ *y* $0 \in R$ *se cumple la igualdad* $\lambda \cdot 0 = 0$.
5. *De la igualdad* $\lambda\mathbf{x} = 0$ resulta una de dos igualdades: $\lambda = 0$ ó $\mathbf{x} = 0$.
6. *El elemento* $(-1) \cdot \mathbf{x}$ *es el contrario del elemento* $\mathbf{x}$.

461. Hay un conjunto de todos los posibles sistemas de números reales $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$, $(\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$ $(\zeta_1; \zeta_2; \ldots; \zeta_n)$, ... La suma de dos elementos cualesquiera se define por la igualdad

$$(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) + (\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n) = \\ = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n),$$

y el producto de cualquier elemento por un número cualquiera, por la igualdad

$$\lambda(\xi_1;\ \xi_2;\ \ldots;\ \xi_n) = (\lambda\xi_1;\ \lambda\xi_2;\ \ldots;\ \lambda\xi_n).$$

Demostrar que este conjunto es un espacio lineal.

Resolución. Designamos $\mathbf{x} = (\xi_1;\ \xi_2;\ \ldots;\ \xi_n)$, $\mathbf{y} = (\eta_1;\ \eta_2;\ \ldots;\ \eta_n)$, $\mathbf{z} = (\zeta_1;\ \zeta_2;\ \ldots;\ \zeta_n)$, ... Vamos a comprobar el cumplimiento de las ocho condiciones enunciadas anteriormente,

1ª. $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (\xi_1+\eta_1;\ \xi_2+\eta_2;\ \ldots;\ \xi_n+\eta_n)$. $\mathbf{y}+\mathbf{x} = (\eta_1+\xi_1;\ \eta_2+\xi_2;\ \ldots;\ \eta_n+\xi_n)$, o sea, $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$.

2ª. $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (\xi_1+\eta_1;\ \xi_2+\eta_2;\ \ldots;\ \xi_n+\eta_n)$, $\mathbf{y}+\mathbf{z} = (\eta_1+\zeta_1;\ \eta_2+\zeta_2;\ \ldots;\ \eta_n+\zeta_n)$, $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = (\xi_1+\eta_1+\zeta_1;\ \xi_2+\eta_2+\zeta_2;\ \ldots;\ \xi_n+\eta_n+\zeta_n)$, $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\xi_1+\eta_1+\zeta_1;\ \xi_2+\eta_2+\zeta_2;\ \ldots;\ \xi_n+\eta_n+\zeta_n)$. Así, pues, $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$.

3ª. El elemento nulo es $\mathbf{0} = (0\ 0\ \ldots;\ 0)$. En efecto, $\mathbf{x}+\mathbf{0} = (\xi_1+0;\ \xi_2+0;\ \ldots;\ \xi_n+0) = \mathbf{x}$.

4ª. El elemento $(-\xi_1;\ -\xi_2;\ \ldots;\ -\xi_n)$ es contrario al elemento $(\xi_1;\ \xi_2;\ \ldots;\ \xi_n)$, ya que $(\xi_1;\ \xi_2;\ \ldots;\ \xi_n)+(-\xi_1;\ -\xi_2;\ \ldots;\ -\xi_n) = (0;\ 0;\ \ldots;\ 0) = \mathbf{0}$.

5ª. $1\cdot\mathbf{x} = (1\cdot\xi_1;\ 1\cdot\xi_2;\ \ldots;\ 1\cdot\xi_n) = \mathbf{x}$.

6ª. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = \lambda(\mu\xi_1;\ \mu\xi_2;\ \ldots;\ \mu\xi_n) = (\lambda\mu\xi_1;\ \lambda\mu\xi_2;\ \ldots;\ \lambda\mu\xi_n) = (\lambda\mu)\,\mathbf{x}$.

7ª. $(\lambda+\mu)\,\mathbf{x} = ((\lambda+\mu)\,\xi_1;\ (\lambda+\mu)\,\xi_2;\ \ldots;\ (\lambda+\mu)\,\xi_n) = (\lambda\xi_1+\mu\xi_1;\ \lambda\xi_2+\mu\xi_2;\ \ldots;\ \lambda\xi_n+\mu\xi_n) = (\lambda\xi_1;\ \lambda\xi_2;\ \ldots;\ \lambda\xi_n)+(\mu\xi_1;\ \mu\xi_2;\ \ldots;\ \mu\xi_n) = \lambda(\xi_1;\ \xi_2;\ \ldots;\ \xi_n)+\mu(\xi_1;\ \xi_2;\ \ldots;\ \xi_n) = \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$.

8ª. $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda(\xi_1+\eta_1;\ \xi_2+\eta_2;\ \ldots;\ \xi_n+\eta_n) = (\lambda\xi_1+\lambda\eta_1;\ \lambda\xi_2+\lambda\eta_2;\ \ldots;\ \lambda\xi_n+\lambda\eta_n) = (\lambda\xi_1;\ \lambda\xi_2;\ \ldots;\ \lambda\xi_n)+(\lambda\eta_1;\ \lambda\eta_2;\ \ldots;\ \lambda\eta_n) = \lambda(\xi_1;\ \xi_2;\ \ldots;\ \xi_n)+\lambda(\eta_1;\ \eta_2;\ \ldots;\ \eta_n) = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$.

462. Demostrar que el conjunto de todos los números complejos es un espacio lineal.

463. ¿Es un espacio lineal el conjunto de los sistemas de cuatro números reales $(\xi_1;\ \xi_2;\ 0;\ 0)$, $(\eta_1;\ \eta_2;\ 0;\ 0)$, $(\zeta_1;\ \zeta_2;\ 0;\ 0)$, donde ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, ζ_1, ζ_2 son números reales de toda clase? La adición de los elementos y su multiplicación por un número real están definidas al igual que en el problema 461.

464. ¿Forma un espacio lineal el conjunto de todos los polinomios $(\xi_1;\ \xi_2;\ 1;\ 1)$, $(\eta_1;\ \eta_2;\ 1;\ 1)$, $(\zeta_1;\ \zeta_2;\ 1;\ 1)$?

465. ¿Es un espacio lineal el conjunto de todos los polinomios de segundo grado posibles $\alpha_0t^2+\alpha_1t+\alpha_2$, $\beta_0t^2+\beta_1t+\beta_2$, $\gamma_0t^2+\gamma_1t+\gamma_2+\ldots$?

466. ¿Forma un espacio lineal el conjunto de todos los polinomios cuyo grado no es superior al tercero?

467. Dadas las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, ... ¿Es el conjunto de estas funciones un espacio lineal si ellas forman: 1) el conjunto de todas las funciones continuas en un segmento $[a,\ b]$; 2) el conjunto de todas las funciones derivables en un segmento $[a,\ b]$; 3) el conjunto de todas las funciones elementales; 4) el conjunto de todas las funciones no elementales?

468. Se da un conjunto de todos los pares posibles de números positivos: $\mathbf{x} = (\xi_1;\ \xi_2)$, $\mathbf{y} = (\eta_1;\ \eta_2)$, $\mathbf{z} = (\zeta_1;\ \zeta_2)$. ¿Es este conjunto un espacio lineal si la adición de dos elementos se define por la igualdad $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (\xi_1\eta_1;\ \xi_2\eta_2)$ y su multiplicación por un número real, por la igualdad $\lambda\mathbf{x} = (\xi_1^\lambda;\ \xi_2^\lambda)$?

469. ¿Puede un espacio lineal componerse: 1) de un solo vector; 2) de dos vectores diferentes?

470. A partir de un espacio lineal ha sido eliminado el vector **x**. ¿Puede el conjunto de los vectores obtenido después de esta eliminación quedarse un espacio lineal?

471. De un espacio lineal ha sido eliminado un conjunto innumerable de los vectores. ¿Puede el conjunto de los vectores obtenido después de esta eliminación ser un espacio lineal?

472. Los encargados de los coches-cama reciben cada día del almacén: 1) azúcar; 2) té; 3) galletas; 4) bizcochos; 5) carbón de leña, en calidad de reserva para el consumo sucesivo. Sean ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 los incrementos diarios respectivos de las cantidades (en kg) de estos ingresos. Si $\xi_i > 0$, del almacén se han suministrado cantidades mayores de alimento respectivo o carbón que las que han sido consumidos en este día y si $\xi_i < 0$, sus gastos son mayores que sus suministros del almacén.

¿Es el conjunto de sistemas de los números $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4; \xi_5)$ un espacio lineal? ¿Qué significa el vector $(-100; 5; 0; -200; 3)$?

473. ¿Forma un espacio lineal el conjunto de tres números enteros $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$?

474. Cada día llegan al depósito vagones de diferente tipo: furgones de equipajes y de correos, coches de tercera, segunda y primera clase, a partir de los cuales se forman diariamente y parten trenes de pasajeros, ordinarios y rápidos. Sean ξ_1; ξ_2; ξ_3; ξ_4; ξ_5 los incrementos diarios del número de vagones respectivos. ¿Es el conjunto de los números $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4; \xi_5)$ un espacio lineal?

475. ¿Forman un espacio lineal todos los vectores geométricos que tienen por origen de las coordenadas y están situados en el primer octante?

476. Demostrar que el conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

forma un espacio lineal.

Indicación: demostrar que si $(x_1; y_1; z_1)$ y $(x_2; y_2; z_2)$ son las soluciones de este sistema, entonces $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ y $(\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$ para cualquier λ también son las soluciones del sistema.

477. Demostrar que todas las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ . . ., que satisfacen la ecuación diferencial $A_0y^{(n)} + A_1y^{(n-1)} + A_ny = 0$ (A_0, A_1, . . ., A_n son funciones de x) forman un espacio lineal.

2. Vectores linealmente independientes. Sean **x**, **y**, **z**, . . ., **u** vectores cualesquiera de un espacio lineal R. El vector definido por la igualdad

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} + \ldots + \lambda\mathbf{u},$$

donde α, β, γ, . . ., λ son números reales, también pertenece al espacio lineal R. Este vector se llama *combinación lineal* de los vectores **x**, **y**, **z**, . . ., **u**.

Supongamos que la combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$ es el vector nulo, o sea,

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} + \ldots + \lambda\mathbf{u} = 0. \qquad (1)$$

Si la igualdad (1) puede cumplirse también en el caso en que no todos los números $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sean iguales a cero, se dice que los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$ *son linealmente dependientes.*

Los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$ se llaman *linealmente independientes* si la igualdad (1) se cumple sólo cuando $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \lambda = 0$. Se demuestra fácilmente que los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$ son linealmente independientes si, y sólo si, uno de estos vectores puede representarse en forma de la combinación lineal de los demás.

478. Mostrar que si entre los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$ hay un vector nulo, los vectores en cuestión son linealmente dependientes.

Resolución. Sea $\mathbf{x} = 0$. Como la igualdad

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} + \ldots + \lambda\mathbf{u} = 0$$

puede cumplirse cuando $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = \ldots = \lambda = 0$, los vectores son linealmente dependientes.

479. Los sistemas de números reales ordenados $\mathbf{x}_i = (\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{ni})$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ son elementos de un espacio lineal. ¿Qué condición deben satisfacer los números ξ_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, n)$ para que los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ sean linealmente independientes, si la suma de los vectores y el producto de un vector por un número se definen por las igualdades $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_k = (\xi_{1i} + \xi_{1k};\ \xi_{2i} + \xi_{2k};\ \ldots;\ \xi_{ni} + \xi_{nk})$, $\lambda x_i = (\lambda\xi_{1i};\ \lambda\xi_{2i};\ \ldots;\ \lambda\xi_{ni})$?

Resolución. Examinamos la igualdad $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n = 0$. Ella es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1\xi_{11} + \alpha_2\xi_{12} + \ldots + \alpha_n\xi_{1n} = 0, \\ \alpha_1\xi_{21} + \alpha_2\xi_{22} + \ldots + \alpha_n\xi_{2n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\xi_{n1} + \alpha_2\xi_{n2} + \ldots + \alpha_n\xi_{nn} = 0. \end{cases}$$

En caso de independencia lineal de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ este sistema debe tener solución única $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, o sea,

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

En particular, los vectores $(\xi_{11}; \xi_{21})$ y $(\xi_{12}; \xi_{22})$ son linealmente independientes si, y sólo si, $\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21} \neq 0$.

480. Se examina un espacio lineal de polinomios de un grado no superior al segundo. Demostrar que los vectores $\mathbf{P}_1 = 1 + 2t + 3t + 3t^2$, $\mathbf{P}_2 = 2 + 3t + 4t^2$ y $\mathbf{P}_3 = 3 + 5t + 7t^2$ son linealmente dependientes.

Resolución. En este caso se puede observar directamente que $\mathbf{P}_3 = 1 \cdot \mathbf{P}_1 + 1 \cdot \mathbf{P}_2$; por lo tanto, los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ son linealmente dependientes.

481. ¿En qué caso los vectores $\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2)$ e $\mathbf{y} = (\eta_1; \eta_2)$ definidos en el enunciado del problema 468 son linealmente dependientes?

Resolución. De la igualdad $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$ se deduce que $(\xi_1; \xi_2) = \lambda (\eta_1; \eta_2)$, o bien $(\xi_1; \xi_2) = (\eta_1^\lambda; \eta_2^\lambda)$, o sea, $\xi_1 = \eta_1^\lambda$, $\xi_2 = \eta_2^\lambda$. De aquí sacamos la conclusión de que $\ln \xi_1 \cdot \ln \eta_2 = \ln \eta_1 \cdot \ln \xi_2$.

482. Demostrar que tres vectores coplanares **a**, **b** y **c** son linealmente dependientes.

Indicación: reducir los vectores a un origen común y descomponer uno de los vectores en componentes que sean colineales respectivamente a los componentes de los otros dos vectores.

483. Demostrar que tres vectores no coplanares **a**, **в** y **c**, son linealmente independientes.

484. Demostrar que cuatro vectores cualesquiera **a**, **b**, **c** y **d** son linealmente dependientes.

Resolución. Si tres de los cuatro vectores son coplanares, el problema se resuelve fácilmente. Supongamos que estos vectores no son coplanares. Llevamos los cuatro vectores a un origen común O. Construimos un paralelepípedo cuya diagonal sea el vector **d** con las aristas sobre las rectas que contienen **a**, **b** y **c**. No es difícil ver que $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

485. Demostrar que si n vectores de un espacio lineal **x**, **y**, **z**, ..., **u** son linealmente dependientes, $n + 1$ vectores de este espacio **x**, **y**, **z**, . . ., **u**, **v**, también son linealmente dependientes.

3. Dimensión y base de un espacio lineal. Si en un espacio lineal R hay n vectores linealmente independientes, pero $n + 1$ vectores cualesquiera de este espacio son linealmente dependientes, entonces el espacio R se llama espacio *n-dimensional*. Se dice también que la dimensión del espacio R es igual a n y se escribe $d(R) = n$. Un espacio en el cual se puede hallar una cantidad tan grande que se quiera de vectores linealmente independientes se denomina espacio *de dimensión infinita*. Si R es un espacio de dimensión infinita, entonces $d(R) = \infty$.

El conjunto de n vectores linealmente independientes de un espacio lineal n-dimensional se llama *base*. Es justo el *teorema* siguiente: *cada vector de un espacio lineal n-dimensional puede ser representado unívocamente en forma de una combinación lineal de los vectores de la base*. Así, si $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, es la base de un espacio n-dimensional R, entonces todo vector $\mathbf{x} \in R$ puede ser unívocamente representado de la forma

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}_n.$$

De este modo, el vector **x** en la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ se determina unívocamente con ayuda de los números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Estos números se denominan *coordenadas* del vector **x** en la base dada.

Si $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y} = \eta_1\mathbf{e}_1 + \eta_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \eta_n\mathbf{e}_n$, entonces

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1 + \eta_1)\,\mathbf{e}_1 + (\xi_2 + \eta_2)\,\mathbf{e}_2 + \ldots + (\xi_n + \eta_n)\,\mathbf{e}_n,$$
$$\lambda\mathbf{x} = \lambda\xi_1\mathbf{e}_1 + \lambda\xi_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda\xi_n\mathbf{e}_n.$$

Para determinar la dimensión de un espacio lineal es útil tener en cuenta el siguiente *teorema*: *si todo vector de un espacio lineal R puede ser representado en forma de una combinación lineal de los vectores linealmente independientes* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, *entonces* $d(R) = n$ (y, por consiguiente, *los vectores* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, *forman la base en el espacio R*).

486. Se da un espacio lineal de todos los pares posibles de números reales ordenados $\mathbf{x}_1 = (\xi_{11};\ \xi_{21})$, $\mathbf{x}_2 = (\xi_{12};\ \xi_{22})$, $\mathbf{x}_3 = (\xi_{13};\ \xi_{23})$, . . ., con ello la suma de vectores y la multiplicación de un vector por un número real están definidas por las igualdades $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_k = (\xi_{1i} + \xi_{1k};\ \xi_{2i} + \xi_{2k})$; $\lambda\mathbf{x}_i = (\lambda\xi_{1i};\ \lambda\xi_{2i})$. Demostrar que los vectores $\mathbf{e}_1 = (1;\ 2)$ y $\mathbf{e}_2 = (3;\ 4)$ forman la base del espacio lineal dado. Hallar las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (7;\ 10)$ en esta base.

Resolución. Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1;\ 2)$ y $\mathbf{e}_2 = (3;\ 4)$ son linealmente independientes (véase el problema 479). Consideramos un vector cualquiera $\mathbf{y} = (\eta_1;\ \eta_2)$. Mostremos que para cualesquiera η_1 y η_2 se pueden determinar los números λ y μ, *de modo que se cumpla la igualdad* $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2$, *o bien*, $(\eta_1;\ \eta_2) = (\lambda + 3\mu;\ 2\lambda + 4\mu)$.

No es difícil ver que existe un único par de valores $(\lambda;\ \mu)$ para el cual se cumple esta igualdad. Esto resulta del hecho de que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = \eta_1, \\ 2\lambda + 4\mu = \eta_2 \end{cases}$$

es determinado.

Y bien, los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ forman la base. Hallemos las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (7;\ 10)$ en esta base. El problema se reduce a la determinación de λ y μ en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = 7, \\ 2\lambda + 4\mu = 10. \end{cases}$$

De aquí obtenemos $\lambda = 1$, $\mu = 2$, o sea, $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

487. Mostrar que el espacio lineal cuyos elementos son los vectores $\mathbf{x} = (\xi_1;\ \xi_2;\ \ldots;\ \xi_n)$ (véase el problema 479) tiene por base el conjunto de los vectores $\mathbf{e}_1 = (1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0;\ 0;\ 1;\ \ldots;\ 0)$, . . ., $\mathbf{e}_n = (0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1)$.

Resolución. No es difícil ver que

$$\mathbf{x} = \xi_1 (1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0) + \xi_2 (0;\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0) + \ldots + \xi_n (0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1),$$

o sea, $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \xi_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}_n$. Ahora bien, todo vector puede ser representado en forma de una combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. De este modo, estos vectores forman la base y el espacio R es n-dimensional.

488. ¿De qué elementos se compone un espacio lineal con la base $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n$, si la adición de los elementos y la multiplicación de un elemento por un número real se entienden en el sentido ordinario?

489. Mostrar que el conjunto de todas las matrices de segundo orden es un espacio lineal de cuarta dimensión.

490. Mostrar que las matrices $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ forman la base del espacio lineal considerado en el problema 489.

491. Mostrar que los elementos $\mathbf{e}_1 = (1;\ 10)$ y $\mathbf{e}_2 = (10;\ 1)$ del espacio lineal examinado en el problema 468 son básicos. Hallar las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (2;\ 3)$ en esta base.

Resolución. Como $\ln 1 \cdot \ln 1 - \ln 10 \cdot \ln 10 \neq 0$, los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes (véase el problema 481). Supongamos que un vector cualquiera $\mathbf{y} = (\eta_1;\ \eta_2)$ está representado en la forma de la combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. Mostremos que existe tal par de números $(\lambda;\ \mu)$ para el cual se cumple la igualdad $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2$, o bien $(\eta_1;\ \eta_2) = (1^\lambda \cdot 10^\mu;\ 10^\lambda \cdot 1^\mu)$. Por consiguiente, $\mu = \log \eta_1$, $\lambda = \log \eta_2$. En particular, $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \log 3 + \mathbf{e}_2 \log 2$. De este modo, $(\log 3;\ \log 2)$ son las coordenadas del vector $\mathbf{x}$ en la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

492. Mostrar que como base del espacio n-dimensional examinado en el problema 479, pueden tomarse los vectores $\mathbf{e}_1 = (1;\ 1;\ 1;\ \ldots;\ 1;\ 1)$, $\mathbf{e}_2 = (0;\ 1;\ 1;\ \ldots;\ 1;\ 1)$, $\mathbf{e}_3 = (0;\ 0;\ 1;\ \ldots;\ 1;\ 1)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_{n-1} = (0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1;\ 1)$, $\mathbf{e}_n = (0;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0;\ 1)$.

Indicación: examinar los vectores $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\ldots$, $\mathbf{e}'_{n-1} = \mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}'_n = \mathbf{e}_n$.

4. Isomorfismo de espacios lineales. Examinemos dos espacios lineales R y R'. Designamos los elementos del espacio R por $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ y los elementos del espacio R' por $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}', \ldots$.

Los espacios R y R' se llaman *isomorfos* si entre sus elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}'$, se puede establecer tal correspondencia biunívoca $\mathbf{x} \longleftrightarrow \mathbf{x}'$; $\mathbf{y} \longleftrightarrow \mathbf{y}'$ para la cual $\mathbf{x} + \mathbf{y} \longleftrightarrow \mathbf{x}' + \mathbf{y}'$, $\lambda\mathbf{x} \longleftrightarrow \lambda\mathbf{x}'$ (λ es un número real cualquiera). Conviene señalar un teorema importante con cuya ayuda se determina fácilmente el isomorfismo de los espacios lineales de dimensión finita: *para que dos espacios de dimensión finita R y R' sean isomorfos es necesario y suficiente que sus dimensiones sean iguales.*

493. Se dan dos espacios lineales R y R'. Los elementos del espacio R son todas las posibles funciones derivables del argumento t que se anulan cuando $t = 0$. Al mismo tiempo los elementos del espacio R' son las funciones derivadas que pertenecen al espacio R. Demostrar que los espacios R y R' son isomorfos.

Resolución. Sean $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots$ las funciones del espacio R y $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \ldots$ las funciones del espacio R'. Del hecho de que estas funciones están dotadas de índices no cabe deducir de que R y R' sean conjuntos numerables.

Sea $\varphi_i(t) = f'_i(t)$; entonces $f_i(t) = \int\limits_0^t \varphi_i(t)\,dt$. De este modo, entre los elementos de los espacios lineales R y R' (es el lector quien debe demostrar su linealidad) queda establecida la correspondencia biunívoca.

Con ayuda de las igualdades

$$\varphi_i(t) + \varphi_k(t) = [f_i(t) + f_k(t)]', \quad f_i(t) + f_k(t) =$$
$$= \int\limits_0^t [\varphi_i(t) + \varphi_k(t)]\,dt, \quad \lambda\varphi_i(t) = [\lambda f_i(t)]', \ \lambda f_i(t) = \int\limits_0^t \lambda\varphi_i(t)\,dt$$

quedan establecidas las correspondencias biunívocas:

$$f_i(t) + f_k(t) \longleftrightarrow \varphi_i(t) + \varphi_k(t),$$
$$\lambda f_i(t) \longleftrightarrow \lambda\varphi_i(t).$$

De suerte que R y R' son espacios isomorfos.

494. Demostrar que los conjuntos de todos los vectores geométricos y de los polinomios no superiores al segundo grado, son espacios lineales isomorfos.

495. Se dan los espacios lineales isomorfos R y R'. Entre los elementos de estos espacios se han establecido las correspondencias biunívocas $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, $\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{y}'$, . . . Demostrar que $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} \leftrightarrow \alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{y}' + \gamma\mathbf{z}'$ para α, β y γ reales cualesquiera.

496. Sean R y R' espacios lineales isomorfos, además $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$. Demostrar que $(-\mathbf{x}) \leftrightarrow (-\mathbf{x}')$.

497. Se dan los espacios isomorfos R y R', siendo $\mathbf{0}$ y $\mathbf{0}'$ los elementos nulos de estos espacios. Demostrar que $\mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}'$ independientemente de cómo están fijadas las correspondencias biunívocas entre otros elementos de estos espacios.

498. Se dan todos posibles pares de números reales: $(\xi_1; \eta_1)$, $(\xi_2; \eta_2)$, $(\xi_3; \eta_3)$, ... Se construyen dos espacios lineales: el espacio R con los elementos $\mathbf{x}_1 = (\xi_1; \eta_1)$, $\mathbf{x}_2\ (\xi_2; \eta_2)$, $\mathbf{x}_3 = (\xi_3; \eta_3)$, . . . en el cual la adición de los vectores y la multiplicación de un vector por un número están definidas por las igualdades $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = (\xi_1 + \xi_2; \eta_1 + \eta_2)$, $\lambda\mathbf{x}_1 = (\lambda\xi_1; \lambda\eta_1)$ y el espacio R' constituido por los vectores $\mathbf{x}_1' = (e^{-\xi_1}; e^{-\eta_1})$, $\mathbf{x}_2' = (e^{-\xi_2}; e^{-\eta_2})$, $\mathbf{x}_3' = (e^{-\xi_3}; e^{-\eta_3})$, . . . en el cual las operaciones respectivas están definidas por las igualdades $\mathbf{x}_1' + \mathbf{x}_2' = (e^{-\xi_1-\xi_2}; e^{-\eta_1-\eta_2})$, $\lambda\mathbf{x}_1' = (e^{-\lambda\xi_1}; e^{-\lambda\eta_1})$. Demostrar que los espacios R y R' son isomorfos.

499. ¿Son isomorfos los espacios lineales R y R' si los elementos de R son los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, . . . y los elementos de R' son los vectores $2\mathbf{x}$, $2\mathbf{y}$, $2\mathbf{z}$, . . .? Mostrar que los espacios R y R' están constituidos por los mismos elementos.

§ 2. Transformación de coordenadas al pasar a una base nueva

Supongamos que en un espacio lineal de n-dimensional R^n hay dos bases: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, . . . (vieja) y $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$, . . . (nueva). Se dan las dependencias que expresan cada vector de la nueva base en función de los vectores de la base vieja:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1' &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n,\\
\mathbf{e}_2' &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n,\\
\mathbf{e}_n' &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n.
\end{aligned}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz de paso* de la vieja base a la nueva.

Tomamos un vector $\mathbf{x}$ cualquiera. Sean $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$ las coordenadas de este vector en la vieja base y $(\xi_1'; \xi_2'; \ldots; \xi_n')$ sus coordenadas en la nueva base. Con ellos las viejas coordenadas del vector $\mathbf{x}$ se expresan por las nuevas coordenadas de este vector mediante las fórmulas:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a_{11}\xi_1' + a_{12}\xi_2' + \ldots + a_{1n}\xi_n', \\ \xi_2 &= a_{21}\xi_1' + a_{22}\xi_2' + \ldots + a_{2n}\xi_n', \\ &\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \xi_n &= a_{n1}\xi_1' + a_{n2}\xi_2' + \ldots + a_{nn}\xi_n' \end{aligned}$$

que se llaman *fórmulas de transformación de las coordenadas.*

No es difícil ver que las columnas de la matriz A son las coordenadas en las fórmulas de paso de la vieja base a la nueva y las líneas de esta matriz son las coordenadas en las fórmulas de transformación de las viejas coordenadas por las nuevas.

500. Se da el vector $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$. Descomponer este vector en la nueva base $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4'$ si $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Resolución. Escribimos la matriz del paso de la base vieja a la nueva:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las filas de esta matriz son los coeficientes en las fórmulas de transformación de las coordenadas:

$$\xi_1 = \xi_2' + \xi_3' + \xi_4', \quad \xi_2 = \xi_1' + \xi_3' + \xi_4', \quad \xi_3 = \xi_1' + \xi_2' + \xi_4', \quad \xi_4 = \xi_1' + \xi_2' + \xi_3'.$$

Como $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 1$, entonces, una vez resuelto el sistema de ecuaciones, hallamos $\xi_1' = \xi_2' = \xi_3' = \xi_4' = 1/3$ y $\mathbf{x} = (1/3)(\mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3' + \mathbf{e}_4')$.

Se puede resolver el problema también de otro modo. Eliminando $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{e}_1' = 0\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 0\cdot\mathbf{e}_4, \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{e}_1' & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{e}_2' & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{e}_3' & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{e}_4' & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Hay que desarrollar este determinante por los elementos de la primera columna y expresar $\mathbf{x}$ en función de $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ y $\mathbf{e}_4'$.

Teniendo en cuenta las particularidades de este problema se puede proponer un procedimiento más para resolverlo. Como $\mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3' + \mathbf{e}_4' = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_4$, entonces $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 = (1/3)(\mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3' + \mathbf{e}_4')$. De aquí $\mathbf{x} = (1/3)(\mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3' + \mathbf{e}_4')$.

501. Se da el vector $\mathbf{x} = 8\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 - 18\mathbf{e}_4$. Descomponer este vector en una nueva base vinculada con la vieja por las ecuaciones $\mathbf{e}_1' = -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 - 6\mathbf{e}_4$.

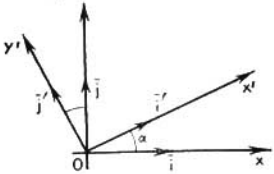

Fig. 21

502. Se da el vector $\mathbf{x} = 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_n)$. Descomponer el vector $\mathbf{x}$ por la base $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$, si $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}' = \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_n' = \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_1$.

503. El sistema de coordenadas xOy se ha girado alrededor del origen de las coordenadas en el ángulo α (fig. 21). Expresar las coordenadas del vector $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ en el nuevo sistema por medio de sus coordenadas en el viejo.

Resolución. Descomponemos los vectores $\mathbf{i}'$ y $\mathbf{j}'$ en los versores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$;

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{i}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Escribimos la matriz de paso de la vieja base $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a la base nueva $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos

$$x = x'\cos\alpha - y'\,\mathrm{sen}\,\alpha, \qquad y = x'\,\mathrm{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha,$$

o sea,

$$x' = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha, \qquad y' = -x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha.$$

504. Se dan las dependencias $\mathbf{e}_1' = \alpha\mathbf{e}_2$; $\mathbf{e}_2' = \beta\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3' = \gamma\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_4' = \delta\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_5' = \varepsilon\mathbf{e}_1$. Escribir las fórmulas que enlazan las viejas coordenadas $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4; \xi_5)$ del vector $\mathbf{x}$ con las nuevas $(\xi_1'; \xi_2'; \xi_3'; \xi_4'; \xi_5')$ del mismo vector.

505. ¿Son posibles las dependencias $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ entre la vieja base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ y la nueva $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$?

§ 3. Subespacios

1. Subespacio de un espacio lineal. Un espacio lineal R' se llama *subespacio* de un espacio lineal R si de elementos del espacio R' sirven sólo los del espacio R.

Por ejemplo, el conjunto de todos los vectores paralelos a un mismo plano es un subespacio de todos los vectores geométricos del espacio.

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{u}$, son vectores cualesquiera de un espacio lineal R, entonces todos los vectores $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \ldots + \lambda\mathbf{u}$, donde $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, son todos los números reales posibles, forman un subespacio del espacio R. El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \ldots + \lambda\mathbf{u}$ se denomina *cápsula lineal* de los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{u}$ y se designa por $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{u})$.

Si R_1 es un subespacio de un espacio lineal R, entonces $d(R_1) \leqslant d(R)$.

Supongamos que en un espacio lineal R hay dos subespacios R_1 y R_2.

Se llama *intersección* de los subespacios R_1 y R_2 al conjunto R_3 de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a R_1 y R_2. La notación $R_3 = R_1 \cap R_2$

significa que R_3 es la intersección de los subespacios R_1 y R_2. Se denomina *suma* de los subespacios R_1 y R_2 al conjunto R_4 de todos los elementos que tiene la forma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ donde $\mathbf{x} \in R_1$ e $\mathbf{y} \in R_2$. La notación $R_4 = R_1 + R_2$ significa que el conjunto R_4 es la suma de los subespacios R_1 y R_2.

Se demuestra que la intersección R_3 y la suma R_4 son subespacios del espacio R. Conviene tener en cuenta que

$$d(R_1) + d(R_2) = d(R_3) + d(R_4).$$

506. ¿Puede un subespacio de un espacio lineal R constar de un solo elemento?

507. Se da el espacio lineal R cuyos elementos son todos los posibles sistemas de números reales: $\mathbf{x} = (\xi_1;\ \xi_2;\ \xi_3;\ \xi_4)$, $\mathbf{y} = (\eta_1;\ \eta_2;\ \eta_3;\ \eta_4)$, $\mathbf{z} = (\zeta_1;\ \zeta_2;\ \zeta_3;\ \zeta_4)$, ... La adición de dos elementos y la multiplicación de un elemento por un número están definidas por las igualdades

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1 + \eta_1;\ \xi_2 + \eta_2;\ \xi_3 + \eta_3;\ \xi_4 + \eta_4),$$

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda\xi_1;\ \lambda\xi_2;\ \lambda\xi_3;\ \lambda\xi_4).$$

Demostrar que el conjunto R_1 de los elementos $\mathbf{x}_1 = (0;\ \xi_2;\ \xi_3;\ \xi_4)$, $\mathbf{y}_1 = (0;\ \eta_2;\ \eta_3;\ \eta_4)$, $\mathbf{z}_1 = (0;\ \zeta_2;\ \zeta_3;\ \zeta_4)$, . . . y el conjunto R_2 de los elementos $\mathbf{x}_2 = (\xi_1;\ 0;\ \xi_3;\ \xi_4)$, $\mathbf{y}_2 = (\eta_1;\ 0;\ \eta_3;\ \eta_4)$, $\mathbf{z}_2 = (\zeta_1;\ 0;\ \zeta_3;\ \zeta_4)$ . . . son subespacios del espacio lineal R.

508. Hallar para el espacio lineal R examinado en el problema 507 la intersección R_3 y la suma R_4 de los subespacios R_1 y R_2.

509. Mostrar que para los subespacios examinados en los problemas 504 y 505 se cumple la igualdad $d(R_1) + d(R_2) = d(R_3) + d(R_4)$.

510. Se da un espacio lineal compuesto por todos los vectores geométricos. ¿Es el conjunto de los vectores que tienen por origen el origen de coordenadas y están situados en el primer octante un subespacio de este espacio?

511. Se da un espacio lineal R cuyos elementos son las coordenadas de los puntos $P(x;\ y;\ z)$ del primer octante que no están sobre los planos de coordenadas. La suma de dos elementos cualesquiera $P_1 = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $P_2 = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ está definida por la igualdad $P_1 + P_2 = (x_1x_2;\ y_1y_2;\ z_1z_2)$ y la multiplicación de un elemento $P = (x;\ y;\ z)$ por un número real λ, mediante la igualdad $\lambda P = (x^\lambda;\ y^\lambda;\ z^\lambda)$. Demostrar que el conjunto R_1 de los puntos de este espacio que están situados sobre el plano $z = 1$ es un subespacio del espacio R.

512. Se da un espacio lineal R de los polinomios no superiores al quinto grado. Demostrar que el conjunto R_1 de los polinomios que tienen la forma $a_0t + a_1$ y el conjunto R_2 de los polinomios $b_0t^4 + b_1t^2 + b_2$ son subespacios del espacio R si la adición de los elementos y la multiplicación de un elemento por un número se entienden en el sentido ordinario.

513. Hallar los subespacios $R_3 = R_1 \cap R_2$ y $R_4 = R_1 + R_2$ según los datos y condiciones del problema precedente.

514. Se examinan dos subespacios del espacio R de todos los vectores geométricos; R_1 es el conjunto de los vectores paralelos al plano de las coordenadas xOy, y R_2 es el conjunto de los vectores paralelos al plano xOz. Hallar $R_3 = R_1 \cap R_2$ y $R_4 = R_1 + R_2$.

515. Sean R_1 y R_2 subespacios de un espacio lineal R, y R'_1 y R'_2 subespacios de un espacio lineal R'. Se sabe que los subespacios R_1 y R'_1, así como R_2 y R'_2 son isomorfos. Demostrar que son isomorfos los subespacios $R_3 = R_1 \cap R_2$ y $R'_3 = R'_1 \cap R'_2$, así como $R_4 = R_1 + R_2$ y $R'_4 = R'_1 + R'_2$.

516. Se da un conjunto de funciones $f(x)$ continuas y positivas en el segmento $[-a, a]$. Demostrar que este conjunto es un espacio lineal si se toma como suma de los vectores el producto de las funciones respectivas y como el producto de un vector por un número real λ el resultado de elevación de la función respectiva a la potencia λ. ¿Es el conjunto de todas las funciones impares de este espacio un subespacio?

517. Se examina un espacio lineal de vectores geométricos. ¿Forma un subespacio de este espacio el conjunto de todos los vectores $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$, donde X, Y y Z son números racionales?

2. Subespacios formados por las soluciones de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones. Examinemos el sistema lineal homogéneo de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Sean $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, . . ., $x_n = \lambda_n$ una solución cualquiera del sistema. Escribimos esta solución en forma de un vector $\mathbf{f} = (\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n)$. El conjunto de las soluciones linealmente independientes $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ del sistema de ecuaciones (1) se llama *sistema fundamental de soluciones*, si toda solución del sistema de ecuaciones (1) puede representarse en forma de la combinación lineal de los vectores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$.

TEOREMA SOBRE LA EXISTENCIA DEL SISTEMA FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES. *Si el rango de la matriz*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es menor que n, el sistema (1) tiene soluciones nulas. El número de vectores que determinan el sistema fundamental de soluciones se halla por la fórmula $k = n - r$, donde r es el rango de la matriz.

De este modo, si se examina un espacio lineal R^n cuyos vectores son todos los posibles sistemas de n números reales, entonces el conjunto de todas las soluciones del sistema (1) es un subespacio del espacio R^n. La dimensión de este subespacio es igual a k.

518. Hallar la base y la dimensión del subespacio de soluciones del sistema lineal homogéneo de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ (1/2)\,x_1 + x_2 + (3/2)\,x_3 + 2x_4 = 0, \\ (1/3)\,x_1 + (2/3)\,x_2 + x_3 + (4/3)\,x_4 = 0, \\ (1/4)\,x_1 + (1/2)\,x_2 + (3/4)\,x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Resolución. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 4/3 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

es igual a 1, puesto que todos los menores de la matriz, a excepción de los de primer orden, son iguales a cero. El número de incógnitas es igual a 4; por eso la dimensión del subespacio de soluciones $k = n - r = 4 - 1 = 3$, o sea, este espacio es tridimensional. Como $r = 1$, en este sistema basta tomar una ecuación cualquiera.

Tomamos la primera ecuación del sistema y la escribimos de la forma $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4$. Si $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, entonces $x_1 = -2$; si $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, entonces $x_1 = -3$, si $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, entonces $x_1 = -4$. De suerte que hemos obtenido los vectores linealmente independientes $\mathbf{f}_1 = (-2;\ 1;\ 0;\ 0)$, $\mathbf{f}_2 = (-3;\ 0;\ 1;\ 0)$, $\mathbf{f}_3 = (-4;\ 0;\ 0;\ 1)$ que forman la base del subespacio tridimensional de soluciones de este sistema.

519. Mostrar que el vector $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ satisface el sistema de ecuaciones del problema 461.

520. Hallar la base y la dimensión del subespacio de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Resolución. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

es igual a 2, ya que el determinante de tercer orden formado por los elementos de la matriz es igual a cero y entre los menores de segundo orden hay algunos que son distintos de cero. La dimensión del subespacio de soluciones $k = n - r = 3 - 2 = 1$. Como $r = 2$, entonces basta tomar dos ecuaciones entre las tres dadas. Eliminamos la tercera ecuación, puesto que sus coeficientes son proporcionales a los coeficientes correspondientes de la primera ecuación.

En el sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3 \\ 2x_1 - x_2 = x_3 \end{cases}$$

suponemos $x_3 = 1$, entonces la solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

es $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

De suerte que el subespacio de las soluciones se determina por el vector básico $\mathbf{f} = (1;\ 1;\ 1)$.

521. Hallar la dimensión y la base del subespacio de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Solución. Determinamos el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Restamos la segunda fila de la tercera y la primera de la cuarta:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como los elementos de la tercera fila son proporcionales a los elementos correspondientes de la primera, y los elementos de la cuarta fila son proporcionales a los de la segunda, se pueden tachar las tercera y cuarta filas:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De suerte que el rango de la matriz A es igual a 2 y $k = n - r = 4 - 2 = 2$.

Pues bien, la dimensión del subespacio de soluciones es igual a 2. Como $r = 2$, tomamos dos de las cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4, \\ x_1 - x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Haciendo $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1. \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

Por lo tanto, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $\mathbf{f}_1 = (0;\ 1;\ 1;\ 0)$.

Haciendo ahora $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, tenemos

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1. \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Ahora bien, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ y $\mathbf{f}_2 = (0;\ -1;\ 0;\ 1)$.

Como vectores básicos del subespacio pueden tomarse $\mathbf{f}_1 = (0; 1; 1; 0)$, $\mathbf{f}_2 = (0; -1; 0; 1)$. La solución general del sistema de ecuaciones se determina por el vector $\mathbf{f} = c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2$, o sea, $\mathbf{f} = (0; c_1 - c_2; c_1; c_2)$.

522. Determinar la dimensión de los subespacios de soluciones, la base y la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

§ 4. Transformaciones lineales

1. Conceptos principales. Diremos que en un espacio lineal R está representada la *transformación* A si a cada vector $\mathbf{x} \in R$ está puesto en correspondencia, por cierta regla, el vector $A\mathbf{x} \in R$. La transformación A se llama *lineal* si para dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ y para un número real cualquiera λ se cumplen las igualdades:

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}, \quad A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}.$$

Una transformación lineal se denomina *idéntica* si ella transforma a un vector cualquiera $\mathbf{x}$ en sí mismo. Una transformación lineal idéntica se designa por E. De este modo, $E\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

523. Mostrar que la transformación $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$, donde α es un número real, es lineal.

Resolución. Tenemos

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} = A\mathbf{x} + A\mathbf{y},$$
$$A(\lambda\mathbf{x}) = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}.$$

De este modo, ambas condiciones que determina la transformación lineal se cumplen. La transformación examinada A se llama *transformación de semejanza.*

524. Una transformación A se define en un espacio lineal R por la igualdad $A\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}_0 \in R$ es un vector fijo no nulo. ¿Es lineal la transformación A?

Resolución. De las igualdades $A\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, $A\mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}_0$, $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{x}_0$, $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ sacamos la conclusión de que $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{x}_0 = (\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) + (\mathbf{y} + \mathbf{x}_0)$. De aquí se deduce que $\mathbf{x}_0 = 0$, pero esto contradice las condiciones del problema. Por consiguiente, la transformación A no es lineal.

525. Se da un espacio lineal de los vectores geométricos. La transformación A consiste en sustituir cada vector por sus componentes referentes al eje Ox. ¿Es lineal esta transformación?

Resolución. Sean $\mathbf{a} = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k}$, vectores arbitrarios y λ un número real arbitrario. Como

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (X_1 + X_2)\,\mathbf{i} + (Y_1 + Y_2)\,\mathbf{j} + (Z_1 + Z_2)\,\mathbf{k},$$
$$\lambda\mathbf{a} = \lambda X_1\mathbf{i} + \lambda Y_1\mathbf{j} + \lambda Z_1\mathbf{k},$$

entonces

$$A(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (X_1 + X_2)\,\mathbf{i} = X_1\mathbf{i} + X_2\mathbf{i} = A\mathbf{a} + A\mathbf{b},$$
$$A(\lambda\mathbf{a}) = AX_1\mathbf{i} = \lambda A\mathbf{a}.$$

Por lo tanto, A es una transformación lineal.

526. ¿Es la sustitución de cada vector geométrico por su aplicación especular respecto al plano de coordenadas xOy una transformación lineal?

527. ¿Es la multiplicación de cada vector geométrico por su longitud una transformación lineal?

528. ¿En qué caso la transformación A es lineal si $A\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}$ es un vector arbitrario de un espacio lineal R y $\mathbf{x}_0$ es un vector fijo?

529. Se da el espacio lineal de los vectores $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$, donde ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, son todos los números reales posibles. Sea a un número real fijo. ¿Es lineal la transformación A definida por la igualdad $A\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$?

530. Se da el espacio lineal de los vectores $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$. La transformación A consiste en que en cada vector cambian de lugar la segunda y tercera coordenadas, o sea, $A\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_3\mathbf{e}_2 + \xi_2\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$. ¿Es lineal la transformación A?

531. Sea A una transformación lineal. Demostrar que la transformación B definida por la igualdad $B\mathbf{x} = A\mathbf{x} - 2\mathbf{x}$ es lineal.

2. Matriz de una transformación lineal. Supongamos que en un espacio lineal n-dimensional R cuya base es $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, se representa una transformación lineal A. Como $A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{e}_n$ son los vectores del espacio R, cada uno de ellos se puede descomponer de modo único por los vectores de la base:

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n, \\ A\mathbf{e}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A\mathbf{e}_n &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz de la transformación lineal* A en la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Las columnas de esta matriz se componen de los coeficientes representados en las fórmulas de transformación de los vectores básicos. Tomamos en el espacio R un vector cualquiera $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$. Como $A\mathbf{x} \in R$, entonces el vector $A\mathbf{x}$ se puede descomponer en vectores de la base:

$$A\mathbf{x} = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n'\mathbf{e}_n.$$

Las coordenadas $(x_1'; x_2'; \ldots; x_n')$ del vector $A\mathbf{x}$ se expresan por las coordenadas $(x_1\ x_2; \ldots; x_n)$ del vector $\mathbf{x}$ usando las fórmulas

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Estas n igualdades pueden llamarse transformación lineal A en la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Los coeficientes representados en las fórmulas de esta transformación lineal son elementos de las líneas de la matriz A.

532. Hallar la matriz de una transformación idéntica E en un espacio n-dimensional:

Resolución. Una transformación idéntica no cambia sus vectores básicos: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$; $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$, ..., $\mathbf{e}'_n = \mathbf{e}_n$, o sea,

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= 1\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\cdot\mathbf{e}_n,\\
\mathbf{e}'_2 &= 0\cdot\mathbf{e}_1 + 1\cdot\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\cdot\mathbf{e}_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathbf{e}'_n &= 0\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + \ldots + 1\cdot\mathbf{e}_n.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, de matriz de la transformacion lineal sirve la matriz unidad

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

533. Hallar la matriz de la transformación de semejanza $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ en un espacio n-dimensional.

534. En un espacio lineal cuadridimensional se examina una transformación lineal A. Escribir esta transformación en la forma de coordenadas si $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $A\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4$, $A\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_2$, $A\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Resolución. La matriz de la transformación A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la transformación A se ecribe en forma de coordenadas así: $x'_1 = x_2 + x_3$, $x'_2 = x_3 + x_4$, $x'_3 = x_1 + x_4$, $x'_4 = x_1 + x_2$.

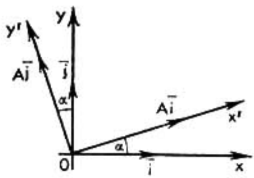

Fig. 22

535. La transformación lineal del conjunto de todos los vectores sobre el plano xOy consiste en girar cada vector en el sentido contrario al de las agujas del reloj en un ángulo α (fig. 22). Hallar la matriz de esta transformación lineal en la forma de coordenadas.

Resolución. Como

$$A\mathbf{i} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\alpha, \qquad A\mathbf{j} = -\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha,$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

De este modo, la transformación lineal considerada tiene la forma

$$x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha; \qquad y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha.$$

536. Se examina el espacio lineal de los vectores $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4$, donde x_1, x_2, x_3, x_4, son números reales cualesquiera. Demostrar que la transformación A definida por la igualdad $\mathrm{A}\mathbf{x} = x_2\mathbf{e}_1 + x_3\mathbf{e}_2 + x_4\mathbf{e}_3 + x_1\mathbf{e}_4$, es lineal, y hallar su matriz.

3. Operaciones sobre las transformaciones lineales. En las definiciones que se dan a continuación se designan: por A y B transformaciones lineales arbitrarias en un espacio lineal R, por λ un número real arbitrario, por $\mathbf{x} \in R$ un elemento cualquiera.

Se llama *suma de las transformaciones lineales* A y B a la transformación C_1 definida por la igualdad $\mathrm{C}_1\mathbf{x} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{B}\mathbf{x}$. Designación: $\mathrm{C}_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B}$.

Se denomina *producto de la transformación lineal* A *por un número* λ a la transformación C_2 definida por la igualdad $\mathrm{C}_2\mathbf{x} = \lambda\mathrm{A}\mathbf{x}$. Designación: $\mathrm{C}_2 = \lambda\mathrm{A}$.

Ha recibido el nombre de *producto de la transformación* lineal A por la transformación lineal B a la transformación *lineal* C_3 definida por la igualdad $\mathrm{C}_3\mathbf{x} = \mathrm{AB}\mathbf{x}$. Designación: $\mathrm{C}_3 = \mathrm{AB}$.

Las transformaciones C_1, C_2 y C_3 son lineales. Las matrices de las transformaciones lineales C_1, C_2 y C_3 se determinan de las igualdades $C_1 = A + B$, $C_2 = \lambda A$, $C_3 = AB$.

Al sumar las transformaciones lineales se cumple la ley conmutativa; no obstante, hablando en general, el producto AB se distingue del producto BA.

Citemos algunas propiedades de las operaciones sobre las transformaciones lineales en el espacio R:

$$\mathrm{A}(\mathrm{BC}) = (\mathrm{AB})\mathrm{C}; \quad \mathrm{AE} = \mathrm{EA} = \mathrm{A}; \quad (\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C} = \mathrm{AC}+\mathrm{BC};$$
$$\mathrm{C}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{CA}+\mathrm{CB}.$$

Si para una transformación lineal A se encuentran tales transformaciones lineales B y C que $\mathrm{BA} = \mathrm{E}$, $\mathrm{AC} = \mathrm{E}$, entonces $\mathrm{B} = \mathrm{C}$. En este caso se designan $\mathrm{B} = \mathrm{C} = \mathrm{A}^{-1}$, y la transformación lineal A^{-1} se llama *transformación lineal inversa* respecto a la transformación lineal A. De este modo, $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{E}$.

Una transformación lineal A en un espacio de dimensión finita se llama *regular* si el determinante de la matriz de esta transformación es distinto de cero. Hay que tener en cuenta que cada transformación lineal regular A tiene una transformación inversa A^{-1}, y ésta es única.

Si una transformación lineal regular A se define en la forma de coordenadas por las igualdades

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + \ldots + a_{1n}u, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + \ldots + a_{2n}u, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u' &= a_{n1}x + a_{n2}y + \ldots + a_{nn}u, \end{aligned}$$

la transformación lineal inversa A^{-1} tiene la forma

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_{11}}{|A|}x' + \frac{A_{21}}{|A|}y' + \ldots + \frac{A_{n1}}{|A|}u', \\ y &= \frac{A_{12}}{|A|}x' + \frac{A_{22}}{|A|}y' + \ldots + \frac{A_{n2}}{|A|}u', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u &= \frac{A_{1n}}{|A|}x' + \frac{A_{2n}}{|A|}y' + \ldots + \frac{A_{nn}}{|A|}u'. \end{aligned}$$

Aquí A_{ij} es el complemento algebráico del elemento a_{ij} de la matriz A y $|A|$ es el determinante de la matriz A.

La matriz de la transformación lineal $\mathbf{A}^{-1}$ es inversa respecto a la matriz A y se define por la igualdad

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

537. La transformación A consiste en que cada vector del plano xOy está vuelto en el ángulo $\alpha=\pi/4$. Hallar en la forma de coordenadas la transformación A + E.

Resolución. Tenemos

$$A\mathbf{i}=\mathbf{i}\cos(\pi/4)+\mathbf{j}\operatorname{sen}(\pi/4)=(\sqrt{2}/2)\,\mathbf{i}+(\sqrt{2}/2)\,\mathbf{j};$$
$$A\mathbf{j}=\mathbf{i}\cos(3\pi/4)+\mathbf{j}\operatorname{sen}(3\pi/4)=-(\sqrt{2}/2)\,\mathbf{i}+(\sqrt{2}/2)\,\mathbf{j}.$$

Por consiguiente,

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Como $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$A+E=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2+1 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2+1 \end{pmatrix}.$$

Pues bien, la transformación lineal A + E se puede escribir con ayuda de las igualdades

$$x'=(\sqrt{2}/2+1)\,x-(\sqrt{2}/2)\,y,$$
$$y'=(\sqrt{2}/2)\,x+(\sqrt{2}/2+1)\,y.$$

538. Se dan dos transformaciones lineales:

$$\begin{aligned} x' &= x+2y+3z, \\ y' &= 4x+5y+6z, \\ z' &= 7x+8y+9z \end{aligned} \quad (A) \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x' &= x+3y+4{,}5z, \\ y' &= 6x+7y+9z, \\ z' &= 10{,}5x+12y+13z. \end{aligned} \quad (B)$$

Hallar 3A — 2B.

539. Se dan dos transformaciones lineales:

$$\begin{aligned} x' &= x+y, \\ y' &= y+z, \\ z' &= z+x \end{aligned} \quad (A) \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x' &= y+z, \\ y' &= x+z, \\ z' &= x+y. \end{aligned} \quad (B)$$

Hallar las transformaciones AB y BA.

Resolución. Las matrices de las transformaciones dadas tienen la forma

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallamos los productos de estas matrices:

$$AB=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix},\qquad BA=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

En este caso $AB = BA$, por eso las transformaciones lineales AB y BA coinciden. La forma de coordenadas de la transformación AB se escribe del modo siguiente:

$$x' = x + y + 2z,\quad y' = 2x + y + z,\quad z' = x + 2y + z.$$

540. Supongamos que el conjunto de los vectores $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ sobre el plano xOy se somete a dos transformaciones lineales: A, o sea, la sustitución del vector por su componente en el eje Ox; B, o sea, la aplicación especular del vector respecto a la bisectriz de los ángulos de coordenadas I y III. Hallar las transformaciones AB y BA.

Resolución. Según los datos del problema $A\mathbf{u} = x\mathbf{i}$, $B\mathbf{u} = x\mathbf{j} + y\mathbf{i}$. Así, pues, $A\mathbf{i} = \mathbf{i}$, $A\mathbf{j} = 0$, $B\mathbf{i} = \mathbf{j}$, $B\mathbf{j} = \mathbf{i}$, o sea,

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

De suerte que la transformación AB se define por las igualdades $x' = y$, $y' = 0$ y la transformación BA por las igualdades $x' = 0$, $y' = x$. Recomendamos obtener estas igualdades partiendo de las consideraciones geométricas.

541. La transformación A consiste en girar cada vector del plano xOy en un ángulo α. Hallar la matriz de la transformación A^2 (o sea, $A \cdot A$).

Resolución. Puesto que $A\mathbf{i} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $A\mathbf{j} = -\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha$, entonces

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha\\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$A^2=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\,\alpha & -2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\\ 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\,\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & -\mathrm{sen}\,2\alpha\\ \mathrm{sen}\,2\alpha & \cos 2\alpha\end{pmatrix}.$$

Ahora bien, la transformación A^2 en la forma de coordenadas se determina por las igualdades

$$x' = x\cos 2\alpha - y\,\mathrm{sen}\,2\alpha,\qquad y' = x\,\mathrm{sen}\,2\alpha + y\cos 2\alpha.$$

Estos resultados también pueden ser obtenidos partiendo de consideraciones puramente geométricas.

542. La transformación lineal A consiste en girar cada vector del plano xOy en un ángulo $\pi/4$. Hallar la matriz de la transformación lineal $B = A^2 + \sqrt{2}A + E$.

Resolución. Tenemos

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}=\sqrt{2}/2\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\2&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}.$$

543. Se da el espacio de los vectores geométricos. Supongamos que la transformación lineal A es un giro del espacio alrededor del eje Oz en el ángulo $\pi/4$ y la transformación lineal B es un giro del espacio alrededor del eje Ox en el mismo ángulo. Hallar la matriz de la transformación lineal AB.

Resolución. **Tenemos**

$$A\mathbf{i}=\mathbf{i}\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{j}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j},\ A\mathbf{j}=-\mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\mathbf{j}\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j},\ A\mathbf{k}=\mathbf{k};\ B\mathbf{i}=\mathbf{i},\ B\mathbf{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k},\ B\mathbf{k}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}.$$

Por consiguiente,

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -1/2 & 1/2\\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & -1/2\\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}.$$

544. Se da la transformación lineal A:

$$x'=-0{,}5\,(y+z),\quad y'=-0{,}5\,(x+z),\quad z'=-0{,}5\,(x+y).$$

Hallar la matriz de la transformación lineal inversa.

545. Se examina un conjunto de todos los vectores geométricos. La transformación lineal A es la aplicación especular de estos vectores respecto al plano P. Hallar A^{-1}.

546. En un espacio lineal con base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ se da la transformación lineal A. Hallar la matriz de la transformación inversa si $A\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2$, $A\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_1$.

547. La transformación lineal A consiste en girar cada vector del plano xOy en un ángulo α. Hallar la matriz $B=A+A^{-1}$.

548. Se da la transformación lineal A: $x'=x+y$, $y'=2\,(x+y)$. Hallar la transformación lineal inversa.

549. La transformación lineal A consiste en girar cada vector del plano xOy en el ángulo $\pi/4$. Hallar la matriz A^{-2}.

550. ¿Para qué valor de λ la transformación lineal $x'=-2x+y+z$, $y'=x-2y+z$, $z'=x+y+\lambda z$ no tiene transformación inversa?

4. Números característicos y vectores propios de una transformación lineal. Sea R un espacio lineal n-dimensional dado. El vector no nulo $\mathbf{x}\in R$ se llama *vector propio* de una transformación lineal A si existe un número λ tal, que se cumpla la igualdad $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$. Este número λ se denomina *número característico* de la transformación lineal A, correspondiente al vector $\mathbf{x}$.

Si la transformación lineal A en la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ tiene la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces de números característicos de la transformación lineal A sirven las raíces reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la ecuación de grado n que se puede escribir de la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Ella se llama *ecuación característica* y su primer miembro se denomina *polinomio característico* de la transformación lineal A. De vector propio $\mathbf{x}_k$ que corresponde al número característico λ_k sirve un vector cualquiera $\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\ldots$ $\ldots+\xi_n\mathbf{e}_n$, cuyas coordenadas satisfacen el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_k)\,\xi_1+a_{12}\xi_2+\ldots+a_{1n}\xi_n=0, \\ a_{21}\xi_1+(a_{22}-\lambda_k)\,\xi_2+\ldots+a_{2n}\xi_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda_k)\,\xi_n=0. \end{cases}$$

Conviene indicar los teoremas importantes siguientes.

El polinomio característico de una transformación lineal no depende de la elección de la base.

Si la matriz A de una transformación lineal A es simétrica, entonces todas las raíces de la ecuación característica $|A-\lambda E|=0$ *son números reales.*

551. Hallar los números característicos y los vectores propios de la transformación A definida por las ecuaciones $x'=5x+4y$, $y'=8x+9y$.

Resolución. La matriz de la transformación se escribirá así:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ o bien } \lambda^2-14\lambda+13=0;$$

los números característicos son $\lambda_1=1$, $\lambda_2=13$.

Para determinar las coordenadas de los vectores propios obtenemos dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}(5-\lambda_1)\,\xi_1+4\xi_2=0 \\ 8\xi_1+(9-\lambda_1)\,\xi_2=0;\end{cases} \qquad \begin{cases}(5-\lambda_2)\,\xi_1+4\xi_2=0, \\ 8\xi_1+(9-\lambda_2)\,\xi_2=0.\end{cases}$$

Como $\lambda_1=1$, el primer sistema puede ser escrito del modo siguiente:

$$\begin{cases}4\xi_1+4\xi_2=0, \\ 8\xi_1+8\xi_2=0.\end{cases}$$

Pues bien, los valores de ξ_1 y ξ_2 deben satisfacer la ecuación $\xi_1+\xi_2=0$ o bien $\xi_2=-\xi_1$. Por lo tanto, la solución de este sistema tiene la forma $\xi_1=c_1$,

$\xi_2 = -c_1$, donde c_1 es una magnitud arbitraria. Así, pues, al número característico $\lambda = 1$ le corresponde una familia de vectores propios $\mathbf{u} = c_1\mathbf{e}_1 - c_1\mathbf{e}_2$, o sea, $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$.

El valor de $\lambda_2 = 13$ lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 - 4\xi_2 = 0, \end{cases}$$

o sea, $\xi_2 = 2\xi_1$. Suponiendo $\xi_1 = c_2$, obtenemos $\xi_2 = 2c_2$. Por consiguiente, al número característico $\lambda = 13$ le corresponde una familia de los vectores propios $\mathbf{v} = c_2(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$.

De suerte que aplicando a las magnitudes c_1 y c_2 presentes en las igualdades $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ y $\mathbf{v} = c_2(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$ valores numéricos cualesquiera, obtendremos vectores propios respectivos de la transformación lineal A.

552. Se da una transformación lineal con la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Hallar los números característicos y los vectores propios de esta transformación.

553. Hallar los números característicos y los vectores propios de una transformación lineal con la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

554. Hallar los números característicos y los vectores propios de una transformación lineal con la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

555. Determinar los números característicos y los vectores propios de una transformación lineal con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolución. Planteemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ o sea, } (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = 0,\ (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0,$$
$$\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 3.$$

Si $\lambda = 1$, entonces, para determinar las coordenadas del vector propio obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0, \\ \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Ahora bien, al número característico $\lambda = 1$ le corresponde una familia de los vectores propios $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$.

Si $\lambda = 3$, entonces, para determinar las coordenadas del vector propio obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ \xi_3 = 0. \end{cases}$$

La familia de los vectores propios correspondientes a este número característico se define por la igualdad $\mathbf{v} = c_2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$.

556. Determinar los números característicos y los vectores propios de una transformación lineal A con la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

557. Demostrar que si

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica y los números reales α, β y γ son distintos de cero, todas las raíces de la ecuación característica de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\alpha/\beta & a_{13}\alpha/\gamma\\ a_{21}\beta/\alpha & a_{22} & a_{23}\beta/\gamma\\ a_{31}\gamma/\alpha & a_{32}\gamma/\beta & a_{33}\end{pmatrix}$$

son números reales.

Resolución. En la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ examinemos la transformación lineal A con la matriz A. Entonces

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + (a_{21}\beta/\alpha)\,\mathbf{e}_2 + (a_{31}\gamma/\alpha)\,\mathbf{e}_3,$$
$$\mathrm{A}\mathbf{e}_2 = (a_{12}\alpha/\beta)\,\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + (a_{32}\gamma/\beta)\,\mathbf{e}_3,$$
$$\mathrm{A}\mathbf{e}_3 = (a_{13}\alpha/\gamma)\,\mathbf{e}_1 + (a_{23}\beta/\gamma)\,\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3,$$

o bien

$$\mathrm{A}(\alpha\mathbf{e}_1) = a_{11}\alpha\mathbf{e}_1 + a_{21}\beta\mathbf{e}_2 + a_{31}\gamma\mathbf{e}_3,$$
$$\mathrm{A}(\beta\mathbf{e}_2) = a_{12}\alpha\mathbf{e}_1 + a_{22}\beta\mathbf{e}_2 + a_{32}\gamma\mathbf{e}_3,$$
$$\mathrm{A}(\gamma\mathbf{e}_3) = a_{13}\alpha\mathbf{e}_1 + a_{23}\beta\mathbf{e}_2 + a_{33}\gamma\mathbf{e}_3.$$

Haciendo $\alpha\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1'$, $\beta\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2'$, $\gamma\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3'$, tenemos

$$A\mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1' + a_{21}\mathbf{e}_2' + a_{31}\mathbf{e}_3',$$
$$A\mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1' + a_{22}\mathbf{e}_2' + a_{32}\mathbf{e}_3',$$
$$A\mathbf{e}_3' = a_{13}\mathbf{e}_1' + a_{23}\mathbf{e}_2' + a_{33}\mathbf{e}_3'.$$

De este modo, de matriz de la transformación lineal A en base $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ sirve la matriz simétrica

$$A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la ecuación característica de la transformación lineal A en la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ tiene sólo raíces reales. Puesto que al pasar a la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ los números característicos no cambian, entonces las mismas raíces las tiene también la ecuación característica de la matriz A.

558. La transformación lineal A consiste en girar un espacio en un ángulo igual a $\pi/3$ alrededor del eje Oz. Hallar los números característicos y los vectores propios de esta transformación.

Indicación: mostrar que la matriz de esta transformación lineal tiene la forma

$$A=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

559. Conociendo los números característicos de la transformación lineal A hallar los números característicos de la transformación lineal inversa A^{-1}.

Indicación: mostrar que de la ecuación $|A^{-1}-\lambda E|=0$ resulta la ecuación $|A-(1/\lambda)E|=0$.

560. Hallar los números característicos y los vectores propios de la transformación lineal A con la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

561. Hallar los números característicos y los vectores propios de una transformación lineal con la matriz.

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

§ 5. Espacio euclídeo

Un espacio lineal R se llama *euclídeo* si hay una regla que permita para cada dos vectores **x** e **y** de R construir un número real denominado *producto escalar* de los vectores **x** e **y** y designado por $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, con ello esta regla satisface las condiciones siguientes:

1ª. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

2ª. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$;

3ª. $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para un número real cualquiera λ;

4ª. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, si $\mathbf{x} \neq 0$.

De las condiciones 1ª a 4ª se deduce que:

a) $(\mathbf{y}+\mathbf{z}, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{z}, \mathbf{x})$;

b) $(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;

c) $(0, \mathbf{x}) = 0$ para cualquier vector **x**.

El producto escalar de cualquier vector $\mathbf{x} \in R$ por sí mismo, se llama *cuadrado escalar* del vector **x**.

Se denomina *longitud* del vector **x** en un espacio euclídeo a la raíz cuadrada extraída del cuadrado escalar de este vector, o sea, $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Si λ es un número real cualquiera y **x** es un vector cualquiera de un espacio euclídeo, entonces $|\lambda\mathbf{x}| = |\lambda|\cdot|\mathbf{x}|$.

Un vector cuya longitud es igual a la unidad se dice *normalizado*. Si $\mathbf{x} \in R$ es un vector no nulo, no es difícil ver que $\frac{1}{|\mathbf{x}|}\cdot\mathbf{x}$ $\left(\text{se puede designar por } \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)$ es un vector normalizado.

Para dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en un espacio euclídeo se cumple la desigualdad $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ llamada *desigualdad de Cauchy — Buniakovski*.

La igualdad $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ tiene lugar si, y sólo si, los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son linealmente dependientes.

De la desigualdad de Cauchy — Buniakovski resulta que $-1 \leqslant \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} \leqslant 1$. El ángulo φ definido por la igualdad $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}$ y perteneciente al segmento $[0, \pi]$ se denomina *ángulo entre los vectores* $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores no nulos y $\varphi = \pi/2$, entonces $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. En este caso se dice que los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son *ortogonales y* se escribe $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Para vectores arbitrarios $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de un espacio euclídeo tienen lugar las relaciones siguientes fundamentales:

1. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (*desigualdad del triángulo*).

2. Sea φ el ángulo entre los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$; entonces $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|\cos\varphi$ (*teorema del coseno*). Si $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, entonces se obtiene la igualdad $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$. Sustituyendo en la última igualdad $\mathbf{y}$ por $-\mathbf{y}$ obtendremos $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$ (*teorema de Pitágoras*).

562. Se da el espacio lineal examinado en el problema 461. ¿Se puede definir el producto escalar de dos vectores arbitrarios $\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$ e $\mathbf{y} = (\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$ por la igualdad $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n$ (para que este espacio llegue a ser euclídeo)?

Resolución. Vamos a comprobar el cumplimiento de las condiciones 1ª — 4ª.

1ª. Como $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2 + \ldots + \eta_n\xi_n$, entonces $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

2ª. Sea $\mathbf{z} = (\zeta_1; \zeta_2; \ldots; \zeta_n)$. Entonces $\mathbf{y} + \mathbf{z} = (\eta_1 + \zeta_1; \eta_2 + \zeta_2; \ldots; \eta_n + \zeta_n)$ y

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = \xi_1\eta_1 + \xi_1\zeta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_2\zeta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n + \xi_n\zeta_n = (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n) + (\xi_1\zeta_1 + \xi_2\zeta_2 + \ldots + \xi_n\zeta_n) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

3ª. $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda\xi_1\eta_1 + \lambda\xi_2\eta_2 + \ldots + \lambda\xi_n\eta_n = \lambda(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

4ª. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 \neq 0$ si al menos uno de los números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ es distinto de cero.

563. Se da el espacio euclídeo examinado en el problema 562. Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ la cantidad de n tipos de artículos que se fabrican diariamente por una planta y $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ los precios respectivos de estos artículos. ¿Cómo se puede interpretar el producto escalar de los vectores $\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$ e $\mathbf{y} = (\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$?

564. Se da un espacio lineal cuyos vectores son todos los sistemas posibles compuestos por n números positivos: $\mathbf{x} = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$, $\mathbf{y} = (\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$, $\mathbf{z} = (\zeta_1; \zeta_2; \ldots; \zeta_n)$, ... La adición de los vectores y la multiplicación de un vector por un número están definidas por las igualdades $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \ldots, \xi_n\eta_n)$, $\lambda\mathbf{x} = (\xi_1^\lambda, \xi_2^\lambda, \ldots, \xi_n^\lambda)$. ¿Se puede hacer euclídeo este espacio al definir el producto escalar por la igualdad $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln\xi_1 \ln\eta_1 + \ln\xi_2 \ln\eta_2 + \ldots + \ln\xi_n \ln\eta_n$?

Resolución. Vamos a comprobar el cumplimiento de las condiciones 1ª — 4ª.

1ª. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln\xi_1 \ln\eta_1 + \ln\xi_2 \ln\eta_2 + \ldots + \ln\xi_n \ln\eta_n$,

$(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \ln\eta_1 \ln\xi_1 + \ln\eta_2 \ln\xi_2 + \ldots + \ln\eta_n \ln\xi_n$,

o sea, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

2^a. Puesto que $\mathbf{y}+\mathbf{z}=(\eta_1\zeta_1;\ \eta_2\zeta_2;\ \ldots;\ \eta_n\zeta_n)$, entonces

$(\mathbf{x},\ \mathbf{y}+\mathbf{z})=\ln\xi_1\ln(\eta_1\zeta_1)+\ln\xi_2\ln(\eta_2\zeta_2)+\ldots+\ln\xi_n\ln(\eta_n\zeta_n)=$
$=\ln\xi_1\ln\eta_1+\ln\xi_2\ln\eta_2+\ldots+\ln\xi_n\ln\eta_n+\ln\xi_1\ln\zeta_1+\ln\xi_2\ln\zeta_2+$
$+\ldots+\ln\xi_n\ln\zeta_n=(\mathbf{x},\ \mathbf{y})+(\mathbf{x},\ \mathbf{z})$.

3^a. Como $\lambda\mathbf{x}=(\xi_1^\lambda;\ \xi_2^\lambda;\ \ldots;\ \xi_n^\lambda)$, entonces

$(\lambda\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\ln\xi_1^\lambda\ln\eta_1+\ln\xi_2^\lambda\ln\eta_2+\ldots+\ln\xi_n^\lambda\ln\eta_n=\lambda(\ln\xi_1\times$
$\times\ln\eta_1+\ln\xi_2\ln\eta_2+\ldots+\ln\xi_n\ln\eta_n)=\lambda(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$.

4^a. $(\mathbf{x},\ \mathbf{x})=\ln^2\xi_1+\ln^2\xi_2+\ldots+\ln^2\xi_n\geqslant 0$.

Por lo tanto, el espacio que se considera es euclídeo.

565. Se examina un espacio lineal de las funciones $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}=\mathbf{z}(t)$, ... que son continuas en el intervalo $[a,\ b]$. ¿Puede hacerse lineal este espacio al definir el producto escalar de dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ por la igualdad $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=$ $=\int_a^b \mathbf{x}(t)\,\mathbf{y}(t)\,dt$?

566. ¿Es el conjunto de todos los vectores geométricos un espacio euclídeo si el producto escalar de dos vectores se define como producto de sus longitudes?

567. ¿Forma el conjunto de todos los vectores geométricos un espacio euclídeo si el producto escalar de dos vectores arbitrarios **a** y **b** se define como producto de la longitud del vector **a** y la producción triplicada del vector **b** por el sentido del vector **a**?

568. Se da el espacio lineal examinado en el problema 562 para $n=4$. Determinar el ángulo entre los vectores $\mathbf{x}=(4;\ 1;\ 2;\ 2)$ e $\mathbf{y}=(1;\ 3;\ 3;\ -9)$.

Resolución. Tenemos

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{(\mathbf{x},\ \mathbf{x})}=\sqrt{16+1+4+4}=5;$$

$$|\mathbf{y}|=\sqrt{\mathbf{y},\ \mathbf{y}}=\sqrt{1+9+9+81}=10;\quad (\mathbf{x},\ \mathbf{y})=4+3+6-18=-5;$$

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}=\frac{-5}{5\cdot 10}=-0{,}1;\quad \varphi=\arccos(-0,\ 1)=174°15'.$$

569. Se da el espacio euclídeo examinado en el problema 562. Determinar el ángulo entre los vectores $\mathbf{x}=(1;\ \sqrt{3};\ \sqrt{5};\ \ldots$ $\ldots;\ \sqrt{2n-1})$ e $\mathbf{y}=(1;\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$.

570. Se examina el espacio euclídeo de las funciones continuas $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}(t)$, ... en el segmento $[-1,\ 1]$. El producto escalar está definido por la igualdad $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\int_{-1}^{1}\mathbf{x}(t)\,\mathbf{y}(t)\,dt$. Hallar el ángulo entre los vectores $\mathbf{x}=3t^2-1$, $\mathbf{y}=3t-5t^3$.

Resolución. Tenemos

$$(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\int_{-1}^{1}(3t^2-1)(3t-5t^3)\,dt.$$

No es difícil ver que $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=0$, ya que la función subintegral es impar. Por consiguiente, los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son ortogonales.

571. Se da el espacio euclídeo examinado en el problema 562 para $n = 6$. Comprobar la validez del teorema de Pitágoras para los vectores ortogonales $\mathbf{x} = (1;\ 0;\ 2;\ 0;\ 2;\ 0)$ e $\mathbf{y} = (0;\ 6;\ 0;\ 3;\ 0;\ 2)$.

Resolución. Tenemos

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{1+0+4+0+4+0} = 3, \quad |\mathbf{y}| = \sqrt{0+36+0+9+0+4} = 7;$$

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (1;\ 6;\ 2;\ 3;\ 2;\ 2);$$

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| = \sqrt{1+36+4+9+4+4} = \sqrt{58}.$$

De suerte que $|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2$.

572. En el espacio euclídeo de las funciones continuas correspondientes a los datos del problema 565 se examinan dos vectores: $\mathbf{x} = t^2 + 1$, $\mathbf{y} = \lambda t^2 + 1$. Hallar el valor de λ para el cual los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son ortogonales sobre el segmento $[0, 1]$ y comprobar la justeza del teorema de Pitágoras para estos vectores.

Resolución. Escribimos el producto escalar

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^1 (t^2+1)(\lambda t^2+1)\,dt = \lambda/5 + (\lambda+1)/3 + 1$$

Puesto que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, determinamos λ; tenemos $\lambda/5 + (\lambda + 1)/3 + 1 = 0$, de donde $\lambda = -5/2$.

Hallamos ahora las longitudes de los vectores $\mathbf{x} = t^2 + 1$, $\mathbf{y} = -(5/2)\,t^2 + 1$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = -(3/2)\,t^2 + 2$:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\int_0^1 (t^4+2t^2+1)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1} = \sqrt{\frac{28}{15}},$$

$$|\mathbf{y}| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{25}{4}t^4-5t^2+1\right)dt} = \sqrt{\frac{5}{4}-\frac{5}{3}+1} = \sqrt{\frac{7}{12}},$$

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{9}{4}t^4-6t^2+4\right)dt} = \sqrt{\frac{9}{20}-2+4} = \sqrt{\frac{49}{20}}.$$

De este modo, $|\mathbf{x}|^2 = 28/15$, $|\mathbf{y}|^2 = 7/12$, $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = 49/20$, o sea, $|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2$.

573. Se examina un conjunto de sistemas ordenados cualesquiera de los vectores geométricos $\mathbf{a}^* = (\mathbf{a}_1;\ \mathbf{a}_2;\ \ldots;\ \mathbf{a}_n)$, $\mathbf{b}^* = (\mathbf{b}_1;\ \mathbf{b}_2;\ \ldots;\ \mathbf{b}_n)$, $\mathbf{c}^* = (\mathbf{c}_1;\ \mathbf{c}_2;\ \ldots;\ \mathbf{c}_n)$, ... ¿Es euclídeo este conjunto si la adición de los elementos, la multiplicación de un elemento por un número y el producto escalar se definen por las igualdades $\mathbf{a}^* + \mathbf{b}^* = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1;\ \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2;\ \ldots;\ \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)$, $\lambda\mathbf{a}^* = (\lambda\mathbf{a}_1;\ \lambda\mathbf{a}_2;\ \ldots;\ \lambda\mathbf{a}_n)$, $(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n$? (el segundo miembro de la última igualdad es la suma de los productos escalares de los vectores geométricos).

574. Demostrar la justeza de las desigualdades:

$$\sqrt{(\xi_1+\eta_1)^2+(\xi_2+\eta_2)^2+\ldots+(\xi_n+\eta_n)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots\ \xi_n^2}+\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2};$$
$$(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2)(\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2)\leqslant$$
$$\leqslant(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n)^2,$$

donde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ son números reales.

Indicación. Utilizar las desigualdades triangular y de Cauchy — Buniakovski para el espacio euclídeo examinado en el problema 562.

575. Se examinan todas las funciones continuas posibles $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ... sobre el segmento $[0, 1]$. Demostrar la justeza de las desigualdades:

$$\sqrt{\int_0^1 (x+y)\,dt}\leqslant\sqrt{\int_0^1 x^2\,dt}+\sqrt{\int_0^1 y^2\,dt},$$

$$\int_0^1 (y^2/x^2)\,dt\geqslant\left(\int_0^1 y\,dt\right)^2\Big/\left(\int_0^1 x^2\,dt\right),\quad \text{si}\quad x(0)\neq 0.$$

§ 6. Base ortogonal y transformaciones ortogonales

1. Base ortogonal. La base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ de un espacio euclídeo se llama *ortogonal* si $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = 0$ cuando $i \neq k$.

Es justo el *teorema* siguiente: *en todo espacio euclídeo hay una base ortogonal.* Si la base ortogonal se compone de vectores normalizados, entonces esta base se llama *ortonormal.* Para la base ortogonal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ se cumplen las igualdades

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)=\begin{cases}0, & \text{si}\quad i\neq k;\\ 1, & \text{si}\quad i=k.\end{cases}$$

Si en un espacio euclídeo n-dimensional se conoce una base cualquiera $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, en este espacio siempre se puede encontrar también la base ortonormal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Cualquier vector $\mathbf{x}$ de un espacio euclídeo, representado en la base ortonormal, se define por la igualdad

$$\mathbf{x}=\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\ldots+\xi_n\mathbf{e}_n.$$

La longitud del vector $\mathbf{x}$ se encuentra por la fórmula

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}.$$

Dos vectores $\mathbf{x}=\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\ldots+\xi_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y}=\eta_1\mathbf{e}_1+\eta_2\mathbf{e}_2+\ldots+\eta_n\mathbf{e}_n$ son linealmente independientes (colineales, proporcionales) si, y sólo si,

$$\xi_1/\eta_1=\xi_2/\eta_2=\ldots=\xi_n/\eta_n.$$

La condición de ortogonalidad de los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tiene la forma

$$\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n=0.$$

El ángulo entre dos vectores **x** e **y** se encuentra por la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}\cdot\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2}}.$$

En los problemas siguientes la base ortonormal de un espacio euclídeo n-dimensional se designa por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

576. Hallar la longitud del vector $\mathbf{x} = 4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$.

577. Normalizar el vector $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\sqrt{2\mathbf{e}_2} + 3\sqrt{3\mathbf{e}_3} + 8\mathbf{e}_4 + 5\sqrt{5\mathbf{e}_5}$.

578. Se da la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 6/7 & -2/7 & 3/7 \\ 3/7 & 6/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

de paso de la base ortonormal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a la base $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$. Demostrar que la base $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ es ortonormal.

579. Normalizar el vector $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \operatorname{sen}^3\alpha + \mathbf{e}_2 \operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha + \mathbf{e}_3 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \mathbf{e}_4\cos\alpha$.

580. Determinar el ángulo entre los vectores $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1\sqrt{7} + \mathbf{e}_2\sqrt{5} + \mathbf{e}_3\sqrt{3} + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1\sqrt{7} + \mathbf{e}_2\sqrt{5}$.

581. Hallar un vector normalizado que sea ortogonal a los vectores $\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{z} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$.

582. ¿Para qué valor de λ los vectores $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \lambda\mathbf{e}_4$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \lambda\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$ tienen iguales longitudes?

583. En un espacio cuatridimensional se da la base $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$. Mediante los vectores de esta base construir la base ortonormal de este mismo espacio.

Resolución. Primeramente construimos en el espacio dado una base cualquiera $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$.

Hacemos $\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_1$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2 + \alpha\mathbf{g}_1$. Escogemos un número real α de modo que se cumpla la condición de $\mathbf{g}_2 \perp \mathbf{g}_1$. Multiplicando escalarmente por $\mathbf{g}_1$ ambos miembros de la última igualdad, obtenemos

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = (\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2) + \alpha(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1).$$

Como $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = 0$, entonces $\alpha = -(\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2)/(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)$.

Luego, en la igualdad $\mathbf{g}_3 = \mathbf{f}_3 + \beta_1\mathbf{g}_1 + \beta_2\mathbf{g}_2$ seleccionemos β_1 y β_2 de modo que se cumplan las condiciones $\mathbf{g}_3 \perp \mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_3 \perp \mathbf{g}_2$. De las igualdades

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = (\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_3) + \beta_1(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) + \beta_2(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2),$$
$$(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) = (\mathbf{g}_2, \mathbf{f}_3) + \beta_1(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) + \beta_2(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2)$$

obtenemos $\beta_1 = -(\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_3)/(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)$, $\beta_2 = -(\mathbf{g}_2, \mathbf{f}_3)/(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2)$.

Por último, de la igualdad $\mathbf{g}_4 = \mathbf{f}_4 + \gamma_1\mathbf{g}_1 + \gamma_2\mathbf{g}_2 + \gamma_3\mathbf{g}_3$ hallamos $\gamma_1 = -(\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_4)/(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)$, $\gamma_2 = -(\mathbf{g}_2, \mathbf{f}_4)/(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2)$, $\gamma_3 = -(\mathbf{g}_3, \mathbf{f}_4)/(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_3)$.

De suerte que con la selección efectuada $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ los vectores $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ son ortogonales de par en par. Por lo tanto, los vectores $\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1/|\mathbf{g}_1|$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{g}_2/|\mathbf{g}_2|$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{g}_3/|\mathbf{g}_3|$, $\mathbf{e}_4 = \mathbf{g}_4/|\mathbf{g}_4|$ forman una base ortonormal.

584. Se examina un espacio euclídeo de polinomios no superiores al segundo grado. El producto escalar de dos polinomios arbitrarios $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ está definido por la igualdad $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^1 \mathbf{x}(t)\, \mathbf{y}(t)\, dt$. Utilizando la base $\mathbf{f}_1 = t^2$, $\mathbf{f}_2 = t$, $\mathbf{f}_3 = 1$ y valiéndose del método de resolución examinado en el problema 583, construir la base ortonormal para este espacio.

Resolución. Primeramente construimos la base ortogonal: $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$. Haciendo $\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_1$, o sea, $\mathbf{g}_1 = t^2$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2 + \alpha \mathbf{g}_1 = t + \alpha t^2$. Entonces

$$\int_0^1 \mathbf{g}_2 t^2\, dt = \int_0^1 t^3\, dt + \alpha \int_0^1 t^4\, dt.$$

En virtud de la ortogonalidad de los vectores $\mathbf{g}_1$ y $\mathbf{g}_2$ el primer miembro de la última igualdad se anula. Así, pues, $\alpha = -5/4$ y $\mathbf{g}_2 = t - 5t^2/4$.

Hallamos ahora $\mathbf{g}_3$. En la igualdad $\mathbf{g}_3 = 1 + \beta_1 t + \beta_2 (t - 5t^2/4)$ determinamos los valores de β_1 y β_2 a partir de las condiciones de ortogonalidad

$$\int_0^1 \mathbf{g}_3 t^2\, dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^1 \mathbf{g}_3 \left(t - \frac{5}{4} t^2\right) dt = 0.$$

De este modo,

$$0 = \int_0^1 t^2\, dt + \beta_1 \int_0^1 t^4\, dt \quad \text{y} \quad 0 = \int_0^1 \left(t - \frac{5}{4} t^2\right) dt + \beta_2 \int_0^1 \left(t - \frac{5}{4} t^2\right) dt.$$

De aquí $\beta_1 = -5/3$, $\beta_2 = -4$ y $\mathbf{g}_3 = 1 - 5t^2/3 - 4(t - 5t^2/4)$, o sea, $\mathbf{g}_3 = 1 - 4t + 10t^2/3$.

Hallamos las longitudes de los vectores $\mathbf{g}_1 = t^2$, $\mathbf{g}_2 = t - 5t^2/4$ y $\mathbf{g}_3 = 1 - 4t + 10t^2/3$:

$$|\mathbf{g}_1| = \sqrt{\int_0^1 t^4\, dt} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad |\mathbf{g}_2| = \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{5}{4} t^2\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{5}{8} + \frac{5}{16}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}, \quad |\mathbf{g}_3| = \sqrt{\int_0^1 \left(1 - 4t + \frac{10}{3} t^2\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \left(1 - 8t + \frac{68}{3} t^2 - \frac{80}{3} t^3 + \frac{100}{9} t^4\right) dt} =$$

$$= \sqrt{1 - 4 + \frac{68}{9} - \frac{20}{3} + \frac{20}{9}} = \frac{1}{3}.$$

De este modo, los vectores

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1/|\mathbf{g}_1| = \sqrt{5}\, t^2, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{g}_2/|\mathbf{g}_2| = \sqrt{3}\,(4 - 5t^2), \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{g}_3/|\mathbf{g}_3| = 3 - 12t + 10t^2$$

forman la base ortonormal.

585. ¿Para qué valor de λ la base constituida por los vectores $\mathbf{g}_1 = \lambda\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \lambda\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{g}_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \lambda\mathbf{e}_4$ es ortogonal? Normalizar esta base.

Resolución. Partiendo de la condición $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = 0$ (para $i \neq k$) obtenemos la ecuación $\lambda + \lambda + 1 + 1 = 0$. Por consiguiente, $\lambda = -1$ y $\mathbf{g}_1 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $\mathbf{g}_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$, $|\mathbf{g}_i| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$.

Por lo tanto, los vectores $\mathbf{e}_1' = 0{,}5\,(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$, $\mathbf{e}_2' = 0{,}5\,(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$, $\mathbf{e}_3' = 0{,}5\,(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$, $\mathbf{e}_4' = 0{,}5\,(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)$, forman la base ortonormal.

586. ¿Para qué valores de α y β la base constitutida por los vectores $\mathbf{e}_1' = \frac{\alpha}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1-\alpha}{3}\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2' = \frac{1-\alpha}{3}\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \frac{\alpha}{3}\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3' = \beta\mathbf{e}_1 + \frac{\alpha}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{1-\alpha}{3}\mathbf{e}_3$ es ortonormal?

Resolución. Partiendo de las condiciones $|\mathbf{e}_i'| = 1$, $(\mathbf{e}_i', \mathbf{e}_k') = 0$ (cuando $i \neq k$), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 9\beta^2 = 9, \\ \alpha\,(1-\alpha) + 3\,(1-\alpha)\,\beta + 3\alpha\beta = 0. \end{cases}$$

De la última ecuación hallamos $\beta = -\alpha\,(\alpha - 1)/3$. Sustituyendo este valor de β en la primera ecuación, tenemos

$$\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + \alpha^2\,(1-\alpha^2)^2 = 9;\quad 1 - 2\,(1-\alpha)\,\alpha + \alpha^2\,(1-\alpha)^2 = 9;$$
$$(1 - \alpha + \alpha^2)^2 = 9.$$

Puesto que $1 - \alpha^2 + \alpha > 0$ para los valores reales de α, entonces $1 - \alpha + \alpha^2 = 3$, o sea, $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$. Por consiguiente, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = -2/3$, $\beta_2 = 2/3$.

De suerte que obtenemos dos bases ortonormales:

$$\mathbf{e}_1^{(1)} = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{e}_2^{(1)} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}_3^{(1)} = -\frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}_1^{(2)} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{e}_2^{(2)} = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{e}_3^{(2)} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3.$$

2. Transformaciones ortogonales. Una transformación lineal A se llama *ortogonal* si no hace cambiar la longitud de un vector cualquiera de un espacio euclídeo, o sea si $|A\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$. Con ello la transformación ortogonal A no hace cambiar el producto escalar de dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ del espacio euclídeo, o sea, $(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. De este modo,

$$\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} = \frac{(A\mathbf{x}, A\mathbf{y})}{|A\mathbf{x}|\cdot|A\mathbf{y}|}.$$

De la última igualdad se desprende que la transformación ortogonal A no hace cambiar el ángulo entre dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

La transformación ortogonal convierte una base ortonormal cualquiera en otra ortonormal. Por el contrario, si una transformación lineal convierte una base ortonormal cualquiera en otra ortonormal, tal transformación es ortogonal.

587. ¿Es ortogonal una transformación que convierte cada vector geométrico en un vector que sea simétrico respecto a cierto plano fijo?

588. ¿Es ortogonal una transformación que consiste en girar un vector cualquiera que esté en el plano xOy en un ángulo fijo α?

589. ¿Para qué valores de λ la transformación A definida por la igualdad $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ es ortogonal?

590. ¿Es ortogonal una transformación A definida en una base ortonormal cualquiera $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \qquad a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0,$$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0,$$

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \quad a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1?$$

591. ¿Es ortogonal la transformación $\mathbf{Ax} = -\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$, donde $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 + \xi_4\mathbf{e}_4$ es un vector arbitrario y $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ es la base ortonormal?

592. Sea $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_6$, una base ortonormal. Demostrar que A es una transformación ortonormal si $\mathbf{Ae}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{Ae}_2 = -\mathbf{e}_2$, $\mathbf{Ae}_3 = \mathbf{e}_3 \cos\alpha + \mathbf{e}_4 \operatorname{sen}\alpha$, $\mathbf{Ae}_4 = -\mathbf{e}_3 \operatorname{sen}\alpha + \mathbf{e}_4\cos\alpha$, $\mathbf{Ae}_5 = \mathbf{e}_5\cos\beta + \mathbf{e}_6 \operatorname{sen}\beta$, $\mathbf{Ae}_6 = -\mathbf{e}_5 \operatorname{sen}\beta + \mathbf{e}_6\cos\beta$.

§ 7. Formas cuadráticas

Se llama *forma cuadrática* de variables reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a un polinomio de segundo grado respecto a estas variables que no contenga un término independiente ni términos de primer grado.

Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la forma cuadrática de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y λ es un número real cualquiera, entonces $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Si $n = 2$, entonces

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Si $n = 3$, entonces

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

A continuación todos los enunciados y definiciones vamos a citarlos para la forma cuadrática de tres variables.

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

en la cual $a_{ik} = a_{ki}$ se llama *matriz de la forma cuadrática* $f(x_1, x_2, x_3)$ y el determinante correspondiente se denomina *determinante de esta forma cuadrática.*

Como A es una matriz simétrica, las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

son números reales.

Sean

$$\mathbf{e}'_1 = b_{11}\mathbf{e}_1 + b_{21}\mathbf{e}_2 + b_{31}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}'_2 = b_{12}\mathbf{e}_1 + b_{22}\mathbf{e}_2 + b_{32}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}'_3 = b_{13}\mathbf{e}_1 + b_{23}\mathbf{e}_2 + b_{33}\mathbf{e}_3$$

vectores propios normalizados correspondientes a los números característicos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ en la base ortonormal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. A su vez, los vectores $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ forman una base ortonormal. La matriz

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

es la matriz de paso de la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a la base $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

Las fórmulas de transformación de las coordenadas al pasar a la nueva base ortonormal tienen la forma

$$x_1 = b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3,$$
$$x_2 = b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3,$$
$$x_3 = b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3.$$

Transformando con ayuda de estas fórmulas la forma cuadrática $f(x_1, x_2, x_3)$ obtenemos la forma cuadrática

$$f(x'_1, x'_2, x'_3) = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + \lambda_3 x'^2_3$$

que no contiene términos con los productos $x'_1x'_2, x'_1x'_2, x'_2x'_3$.

Se suele decir que la forma cuadrática $f(x_1, x_2, x_3)$ está reducida a la *forma canónica* con ayuda de la transformación ortogonal B. Se razonaba suponiendo que los números característicos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son distintos. Mostraremos en los problemas cómo se debe proceder si hay números característicos iguales.

593. Reducir a la forma canónica la forma cuadrática

$$f = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Resolución. Aquí $a_{11} = 27$, $a_{12} = -5$, $a_{22} = 3$. Escribimos la ecuación cuadrática

$$\begin{vmatrix} 27-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ o bien } \lambda^2-30\lambda+56=0,$$

o sea, los números característicos $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 28$.

Determinamos los vectores propios. Si $\lambda = 2$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 25\xi_1-5\xi_2=0, \\ -5\xi_1+\xi_2=0. \end{cases}$$

Ahora bien, $\xi_2 = 5\xi_1$. Haciendo $\xi_1 = c$, tenemos $\xi_2 = 5c$, o sea, el vector propio $\mathbf{u} = c(\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2)$.

Si $\lambda = 28$, llegamos al sistema

$$\begin{cases} -\xi_1 - 5\xi_2 = 0, \\ -5\xi_1 - 25\xi_2 = 0. \end{cases}$$

En este caso obtenemos el vector propio $\mathbf{v} = c\,(-5\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$.

Para normalizar los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ hay que tomar $c = 1/\sqrt{1^2 + 5^2} = 1/\sqrt{26}$. De suerte que hemos encontrado los vectores propios normalizados $\mathbf{e}'_1 = (\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2)/\sqrt{26}$, $\mathbf{e}'_2 = (-5\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{26}$.

La matriz de paso de la base ortonormal $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a la base ortonormal $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{26} & -5/\sqrt{26} \\ 5/\sqrt{26} & 1/\sqrt{26} \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos las fórmulas de transformación de las coordenadas

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\,x'_1 - \frac{5}{\sqrt{26}}\,x'_2, \quad x_2 = \frac{5}{\sqrt{26}}\,x'_1 + \frac{1}{\sqrt{26}}\,x'_2.$$

Así, pues,

$$f = 27\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\,x'_1 - \frac{5}{\sqrt{26}}\,x'_2\right)^2 - 10\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\,x'_1 - \frac{5}{\sqrt{26}}\,x'_2\right) \times$$
$$\times \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\,x'_1 + \frac{1}{\sqrt{26}}\,x'_2\right) + 3\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\,x'_2 + \frac{1}{\sqrt{26}}\,x'_2\right)^2 = 2x_1'^2 + 28x_2'^2.$$

Este resultado se puede obtener inmediatamente, puesto que $f = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2$.

594. Reducir a la forma canónica la forma cuadrática

$$f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Resolución. Aquí $a_{11} = 2$, $a_{12} = 4$, $a_{22} = 8$. Resolvemos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 10.$$

Determinamos los vectores propios. Cuando $\lambda = 0$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 + 8\xi_2 = 0 \end{cases}$$

que tiene la solución $\xi_1 = 2c$, $\xi_2 = -c$, o sea, $\mathbf{u} = c\,(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$.

Cuando $\lambda = 10$, tenemos

$$\begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 - 2\xi_2 = 0, \end{cases}$$

de donde $\xi_1 = c$, $\xi_2 = 2c$, o sea, $\mathbf{v} = c\,(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$.

Tomando $c = 1/\sqrt{2^2 + 1^2} = 1/\sqrt{5}$, encontramos los vectores propios normalizados $\mathbf{e}'_1 = (2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{5}$, $\mathbf{e}'_2 = (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)/\sqrt{5}$.

La matriz de paso a la nueva base (la matriz de la transformación ortogonal) tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Las fórmulas de transformación de las coordenadas se escribirán así:

$$x_1=\frac{2}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{5}}x_2', \quad x_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{2}{\sqrt{5}}x_2'.$$

Por consiguiente,

$$f=2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{5}}x_2'\right)^2+8\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{5}}x_2'\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{2}{\sqrt{5}}x_2'\right)+8\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{2}{\sqrt{5}}x_2'\right)^2=10x_2'^2.$$

Se puede resolver este problema más sencillamente. Notemos que $f = 2(x_1+2x_2)^2$; por eso se puede tomar $x_2'=(x_1+2x_2)/\sqrt{1+4}=(x_1+2x_2)/\sqrt{5}$, $x_1'=(2x_1-x_2)/\sqrt{5}$ (la segunda igualdad está escrita teniendo en cuenta la ortogonalidad de la transformación); puesto que $x_1+2x_2=\sqrt{5}x_2'$, entonces $f=10x_2'^2$.

595. Reducir a la forma canónica la forma cuadrática

$$f=3x_1^2+2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3.$$

Resolución. Aquí $a_{11}=3$, $a_{22}=2$, $a_{33}=1$, $a_{12}=2$, $a_{13}=0$, $a_{23}=2$. Escribimos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0; \quad (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-4(1-\lambda)+4(3-\lambda)=0;$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-8(2-\lambda)=0; \quad (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3-8)=0,$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-5)=0; \quad \lambda_1=2, \quad \lambda_2=-1, \quad \lambda_3=5.$$

Determinamos los vectores propios correspondientes a los números característicos hallados. Para encontrar las coordenadas de los vectores propios hallamos tres sistemas de ecuaciones lineales:

$$1)\ \lambda=2, \qquad 2)\ \lambda=-1, \qquad 3)\ \lambda=5.$$

$$\begin{cases} \xi_1+2\xi_2=0, \\ 2\xi_1+2\xi_3=0, \\ 2\xi_2-\xi_3=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4\xi_1+2\xi_2=0, \\ 2\xi_1+3\xi_2+2\xi_3=0, \\ 2\xi_2+2\xi_3=0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2\xi_1+2\xi_2=0, \\ 2\xi_1-3\xi_2+2\xi_3=0, \\ 2\xi_2-4\xi_3=0; \end{cases}$$

$\xi_1=2c$, $\xi_2=-c$, $\xi_3=-2c$, $\xi_1=c$, $\xi_2=-2c$, $\xi_3=2c$,

$\xi_1=2c$, $\xi_2=2c$, $\xi_3=c$, $\mathbf{u}=c(2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3)$,

$\mathbf{v}=c(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3)$, $\mathbf{w}=c(2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$,

$$\mathbf{e}_1'=\frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3); \quad \mathbf{e}_2'=\frac{1}{3}(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3);$$

$$\mathbf{e}_3'=\frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3).$$

La matriz de la transformación ortogonal tiene la forma

$$B=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Las fórmulas de transformación de las coordenadas

$$x_1=\frac{2}{3}x_1'+\frac{1}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3', \quad x_2=-\frac{1}{3}x_1'-\frac{2}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3',$$
$$x_3=-\frac{2}{3}x_1'+\frac{2}{3}x_2'+\frac{1}{3}x_3'.$$

De este modo, $f = 2x_1'^2 - x_2'^2 + 5x_3'^2$.

596. Reducir a la forma canónica la forma cuadrática

$$f = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Resolución. Aquí $a_{11} = 6$, $a_{22} = 3$, $a_{33} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 2$, $a_{23} = -4$. Resolviendo la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

encontramos los números característicos $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -2$.

Cuando $\lambda = 7$, llegamos al sistema

$$\begin{cases} -\xi_1+2\xi_2+2\xi_3=0, \\ 2\xi_1-4\xi_2-4\xi_3=0, \\ 2\xi_1-4\xi_2-4\xi_3=0, \end{cases}$$

que se reduce a una sola ecuación $\xi_1 = 2\xi_2 + 2\xi_3$. La solución de este sistema se puede escribir de la forma $\xi_1 = 2a + 2b$, $\xi_2 = a$, $\xi_3 = b$. Como resultado obtenemos una familia de vectores propios $\mathbf{u} = 2(a + b)\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3$ que depende de dos parámetros a y b.

Cuando $\lambda = -2$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 8\xi_1+2\xi_2+4\xi_3=0, \\ 2\xi_1+5\xi_2-4\xi_3=0, \\ 2\xi_1-4\xi_2+5\xi_3=0. \end{cases}$$

Resolviendo, por ejemplo, las dos últimas ecuaciones, tenemos $\xi_1/9 = \xi_2/(-18) = \xi_3/(-18)$, o bien $\xi_1 = -\xi_2/2 = -\xi_3/2$; $\xi_1 = c$, $\xi_2 = -2c$, $\xi_3 = -2c$. Así, pues, obtendremos una familia monoparamétrica de los vectores propios $\mathbf{v} = c(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)$.

En la familia de los vectores propios $\mathbf{u} = 2(a + b)\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3$ escogemos dos vectores ortogonales cualesquiera. Haciendo, por ejemplo, $a = 0$, $b = 1$, *obtenemos el vector propio* $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$. *Seleccionamos los parámetros* a y b de modo que se cumpla la igualdad $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = 0$. Entonces obtendremos la ecuación $2\cdot 2(a + b) + b = 0$, o sea, $4a + 5b = 0$. Ahora se puede tomar $a = 5$, $b = -4$; de aquí encontramos el otro vector propio de la familia examinada: $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$.

De suerte que hemos obtenido tres vectores ortogonales de par en par: $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$. Los vectores propios $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ corresponden al número característico $\lambda = 7$ y el vector propio $\mathbf{v}$ corresponde al número característico $\lambda = -2$ cuando $c = 1$.

Normalizando estos vectores, obtendremos una nueva base ortonormal, con ello la matriz de paso a la nueva base tiene la forma

$$B=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 2/(3\sqrt{5}) & 1/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \\ 1/\sqrt{5} & -4/(3\sqrt{5}) & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando las fórmulas de transformación de las coordenadas $x_1=\frac{2}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{2}{3\sqrt{5}}x_2'+\frac{1}{3}x_3'$, $x_2=\frac{\sqrt{5}}{3}x_2'-\frac{2}{3}x_3'$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{5}}x_1'-\frac{4}{3\sqrt{5}}\times x_2'-\frac{2}{3}x_3'$ a la forma cuadrática dada, obtenemos $f=7x_1'^2+7x_2'^2-2x_3'^2$.

Capítulo VI. Introducción al análisis

§ 1. Errores absoluto y relativo

Sea a un número aproximado que sustituye en los cálculos al número exacto A.

Se llama *error absoluto* del *número aproximado* a, al valor absoluto de la diferencia entre este número y el número exacto respectivo: $|A - a|$.

Se denomina *error absoluto límite* a un número menor posible Δ, que satisface la desigualdad $|A - a| \leqslant \Delta$.

El número exacto A se encuentra dentro de los límites $a - \Delta \leqslant A \leqslant a + \Delta$, o bien $A = a \pm \Delta$.

Ha recibido el nombre de *error relativo* del número aproximado a, la relación entre el error absoluto de este número y el número exacto respectivo: $|A - a|/A$.

Se llama *error relativo límite* a un número menor posible δ, que satisface la igualdad $|A - a|/A \leqslant \delta$.

Puesto que prácticamente $A \approx a$, como error relativo límite se toma el número $\delta = \Delta/a$ (expresado de ordinario en tanto por ciento).

Es justa la desigualdad $a(1 - \delta) \leqslant A \leqslant a(1 + \delta)$.

Se dice que el número aproximado positivo a escrito en la forma de un desarrollo decimal tiene *n signos (cifras) exactos* si el error absoluto de este número no excede de la mitad de la unidad de n-ésimo orden.

Cuando $n > 1$, como error relativo límite del número aproximado a con la primera cifra significativa k se puede tomar el número $\delta = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Si se conoce que

$$\delta \leqslant \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, \tag{1}$$

entonces el número a tiene n signos exactos.

El error absoluto límite de la suma algebraica de varios números es igual a la suma de los errores absolutos límites de los sumandos.

El error relativo de la suma de sumandos positivos no supera el mayor entre los errores relativos de estos sumandos.

El error relativo límite del producto y del cociente de números aproximados es igual a la suma de los errores relativos límites de estos números.

El error relativo límite de la potencia de un número aproximado es igual al producto del error relativo límite de este número por el exponente de la potencia.

597. El ángulo medido por el teodolito resulta igual a $22°20'30'' \pm 30''$. ¿Cuál es el error relativo de la medición?

Resolución. El error absoluto $\Delta = 30''$. Entonces el error relativo

$$\delta = \frac{\Delta}{a} = \frac{30''}{22°20'30''} \cdot 100\% = 0{,}04\%.$$

598. Determinar el número de signos exactos y escribir respectivamente el valor aproximado de la aceleración de la gravedad $g = 9{,}806\ldots$ si el error relativo es del $0{,}5\%$.

Resolución. Como la primera cifra significativa es 9, entonces, utilizando la desigualdad (1), obtendremos $0{,}005 \leqslant \frac{1}{2\cdot 10}\left(\frac{1}{10}\right)^{(n-1)}$, o sea, $n = 2$. Por lo tanto, $g = 9{,}8$.

599. Se conoce que el error relativo límite del número $\sqrt{19}$ es igual al $0{,}1\%$. ¿Cuántos signos exactos se contiene en este número?

Resolución. Aquí la primera cifra significativa es 4, el error relativo límite $\delta = 0{,}001 = 10^{-3}$. En razón de la desigualdad (1) tenemos $0{,}001 \leqslant \frac{1}{2\cdot 5}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, de donde $n = 3$. Por consiguiente, $\sqrt{19} = 4{,}36$ (por las tablas de cuatro signos $\sqrt{19} = 4{,}3589$).

600. ¿Cuántos signos exactos contiene el número $A = 3{,}7563$ si el error relativo es igual al 1%?

Resolución. La primera cifra exacta es 3, por eso $0{,}01 \leqslant \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, de donde $n = 2$. El número A se debe escribir así: $A = 3{,}8$.

601. El área de un cuadrado es igual a $25{,}16$ cm² (con la precisión hasta $0{,}01$ cm²). ¿Con qué error relativo y con cuántos signos exactos se puede determinar el lado del cuadrado?

Resolución. El lado buscado $x = \sqrt{25{,}16}$. El error relativo del lado del cuadrado $\delta = (1/2)\cdot(0{,}01/25{,}16)$, donde $0{,}01$ es error absoluto del área, o sea, $\delta = 0{,}0002$. La primera cifra significativa del número que mide el lado del cuadrado es 5. Resolviendo la desigualdad (1) para $k = 5$, obtendremos $(5+1)\cdot 0{,}0002 \leqslant 1/10^{n-1}$, o bien, $1{,}2\cdot 10^{-3} \leqslant 1/10^{n-1}$. De ello $n = 3$.

602. ¿Con cuántos signos exactos se puede determinar el radio de un círculo si se conoce que su área es igual a $124{,}35$ cm² (con precisión de hasta $0{,}01$ cm²)?

603. Hallar el error relativo límite al calcular la superficie completa de un cono truncado si los radios de sus bases $R = 23{,}64 \pm 0{,}01$ (cm), $r = 17{,}31 \pm 0{,}01$ (cm), la generatriz $l = 10{,}21 \pm 0{,}01$ (cm); el número $\pi = 3{,}14$.

604. El número $g = 9{,}8066$ es el valor aproximado de la aceleración de la gravedad (para la latitud de 45°) con cinco signos exactos. Hallar su error relativo.

605. Calcular el área de un rectángulo cuyos lados tienen $95{,}73 \pm 0{,}01$ (m) y $94{,}5 \pm 0{,}01$ (m). Determinar el error relativo del resultado y el número de signos exactos.

§ 2. Función de una variable independiente

Se llaman números *reales* a los números racionales e irracionales.

Se denomina *valor absoluto* de un número real a, a un número no negativo $|a|$ definido del modo siguiente:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geqslant 0, \\ -a & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

Sean dados dos conjuntos no vacíos X e Y. Si a cada elemento x del conjunto X se pone en correspondencia, según cierta regla, un, y sólo un, elemento y del Y, se dice que sobre el conjunto X está definida la *función* f (o la *aplicación*) con el conjunto de valores Y. Esto se puede escribir así: $x \in X$, $X \xrightarrow{f} Y$, o bien, $f\colon X \to Y$, donde el conjunto X se llama *campo de definición* de la función y el conjunto Y constituido por todos los números de la forma $y = f(x)$ se denomina *conjunto de valores* de la función. El campo de definición de la función f se designa por $D(f)$ y el conjunto de valores, por $E(f)$. El valor de la función $f(x)$, cuando $x = a$, se connota mediante $f(a)$.

El campo de definición de una función representa, en casos elementales: el *intervalo abierto* $]a, b[$, o sea, el conjunto de los valores de x que satisfacen la condición $a < x < b$; un *segmento* (o sea, un *intervalo cerrado*) $[a, b]$, es decir el conjunto de los valores de x que satisfacen la condición $a \leqslant x \leqslant b$; un *intervalo semiabierto* $]a, b]$ (o sea, $a < x \leqslant b$) o bien $[a, b[$ (o sea, $a \leqslant x < b$); un *intervalo infinito* $]a, +\infty[$ (o sea, $a < x < +\infty$) o bien $]-\infty, b[$ (o sea, $-\infty < x < b$) o bien $]-\infty, +\infty[$ (o sea, $-\infty < x < +\infty$); un conjunto de varios intervalos abiertos o cerrados, etc.

Se llama *gráfico* de la función $y = f(x)$ al conjunto de puntos del plano xOy con las coordenadas $(x; f(x))$, donde $x \in X$.

La función $f(x)$ cuyo campo de definición es simétrico respecto al cero se dice *par* si $f(-x) = f(x)$ para todo valor de x. El gráfico de una función par es simétrico respecto al eje de las ordenadas.

La función $f(x)$ cuyo campo de definición es simétrico respecto al cero se dice *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo valor de x. El gráfico de una función impar es simétrico respecto al origen de las coordenadas.

La función $f(x)$ se llama *periódica* si existe un número positivo T denominado *período* de la función tal que para todas las x pertenecientes al campo de definición de la función se cumpla la igualdad $f(x + T) = f(x)$. Ha recibido el nombre de *período fundamental* de una función al menor número positivo τ que posee la propiedad indicada.

606. Hallar $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ si $f(x) = x^2$.

Resolución. Hallamos los valores de la función dada para $x = a$ y $x = b$: $f(a) = a^2$, $f(b) = b^2$. Entonces obtendremos

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b.$$

607. Hallar el campo de definición de la función $f(x) = \dfrac{x - 2}{2x - 1}$.

Resolución. La función dada está definida si $2x - 1 \neq 0$, o sea, si $x \neq 1/2$. Ahora bien, el campo de definición de la función es la unión de dos intervalos: $D(f) = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

608. Hallar el campo de definición de la función $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x - 1}$.

Resolución. La función está definida si $x - 1 \neq 0$ y $1 + x > 0$, o sea, si $x \neq 1$ y $x > -1$. El campo de definición de la función es la unión de dos intervalos: $D(f) =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

609. Hallar el campo de definición de la función

$$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3 \operatorname{arcsen} \frac{3x-1}{2}.$$

Resolución. El primer sumando toma valores reales cuando $1 - 2x \geqslant 0$ y el segundo cuando $-1 \leqslant (3x-1)/2 \leqslant 1$. Ahora bien, para encontrar el campo de definición de la función dada es necesario resolver el sistema de desigualdades: $1 - 2x \geqslant 0$, $(3x-1)/2 \leqslant 1$, $(3x-1)/2 \geqslant -1$. Como resultado obtenemos $x \leqslant 1/2$, $x \leqslant 1$, $x \geqslant -1/3$. Por consiguiente, el campo de definición de la función es el segmento $[-1/3, 1/2]$.

610. Hallar el conjunto de valores de las funciones:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; 2) $f(x) = 2 + 3 \operatorname{sen} x$.

Resolución. 1) Separando del trinomio cuadrático el cuadrado perfecto, obtendremos

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 4.$$

El primer sumando es para todas las x un número no negativo, por eso la función toma valores no menores que -4. De suerte que el conjunto de valores de la función es un intervalo infinito $[-4, +\infty[$.

2) Como el seno toma valores cuyo módulo no excede de la unidad, escribimos la desigualdad $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$, o bien $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$. Multiplicando todos los miembros de esta doble desigualdad por 3 y adicionándoles 2 a cada uno, obtendremos

$$-3 \leqslant 3 \operatorname{sen} x \leqslant 3; \quad -1 \leqslant 2 + 3 \operatorname{sen} x \leqslant 5.$$

Por consiguiente, $E(f) = [-1, 5]$.

611. Hallar los períodos fundamentales de las funciones:

1) $f(x) = \cos 8x$; 2) $f(x) = \operatorname{sen} 6x + \operatorname{tg} 4x$.

1) Puesto que el período fundamental de la función $\cos x$ es 2π, entonces el período fundamental de la función $f(x) = \cos 8x$ es igual a $2\pi/8$, o sea, $\pi/4$.

2) Aquí para el primer sumando el período fundamental es igual a $2\pi/6 = \pi/3$ y para el segundo es igual a $\pi/4$. Es evidente que el período fundamental de la función dada es el mínimo común múltiplo de los números $\pi/3$ y $\pi/4$, o sea π.

612. Determinar la paridad o imparidad de las funciones:

1) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} + 2 \operatorname{sen} x$; 2) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; 3) $f(x) = |x| - 5e^{x^2}$; 4) $f(x) = x^2 + 5x$; 5) $f(x) = \log \frac{x+3}{x-3}$.

Resolución. En los ejercicios que se examinan el campo de definición de cada una de las funciones es simétrico respecto al cero: en los primeros cuatro ejercicios $D(f) =]-\infty, +\infty[$ y en el último ejercicio $D(f) =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

1) Reemplazando x por $-x$ obtendremos

$$f(-x) = (-x)^2 \sqrt[3]{(-x)} + 2 \operatorname{sen}(-x) = -x^2 \sqrt[3]{x} - 2 \operatorname{sen} x,$$

o sea, $f(-x) = f(x)$. Por lo tanto, la función dada es impar.

2) Tenemos $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x$, o sea, $f(-x) = f(x)$. De suerte que la función dada es par.

3) Aquí $f(-x) = |x| - 5e^{(-x)^2} = |x| - 5e^{x^2}$, o sea, $f(-x) = f(x)$, por consiguiente, la función $f(x)$ es par.

4) Tenemos $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x$. Ahora bien, $f(-x) \neq \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, o sea, la función dada no es ni par ni impar.

5) Hallamos

$$f(-x) = \log \frac{-x+3}{-x-3} = \log \frac{x-3}{x+3} = \log \left(\frac{x+3}{x-3} \right)^{-1} = -\log \frac{x+3}{x-3}, \text{ o sea,}$$

$f(-x) = -f(x)$ y, por consiguiente, la función dada es impar.

613. Hallar los campos de definición de las funciones:

1) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$; 3) $f(x) = \frac{1}{xe^x}$; 4) $f(x) = \frac{x-2}{\cos 2x}$; 5) $f(x) = \frac{2x^2+3}{x - \sqrt{x^2-4}}$; 6) $f(x) = \log(3x - 1) + 2\log(x+1)$; 7) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{\operatorname{sen} x}$.

614. Hallar los conjuntos de valores de las funciones:

1) $f(x) = |x| + 1$; 2) $f(x) = 5/x$; 3) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$; 4) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$; 5) $f(x) = 1 - 3\cos x$; 6) $f(x) = 4^{-x^2}$.

615. Determinar la paridad o imparidad de las funciones:

1) $f(x) = x^4 \operatorname{sen} 7x$; 2) $f(x) = 5|x| - 3\sqrt[3]{x^2}$; 3) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$; 4) $f(x) = |x| + 2$; 5) $f(x) = |x+2|$; 6) $f(x) = \log \cos x$; 7) $f(x) = \frac{16^x - 1}{4^x}$.

616. Hallar los períodos fundamentales de las funciones:

1) $f(x) = \operatorname{sen} 5x$; 2) $f(x) = -2\cos(x/3) + 1$; 3) $f(x) = \log \cos 2x$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \cos 4x$.

§ 3. Construcción de gráficos de funciones

Al construir los gráficos de funciones se emplean los métodos siguientes: construcción «marcando los puntos»; operaciones con los gráficos (adición, sustracción, multiplicación de los gráficos); transformación de los gráficos (desplazamiento, alargamiento).

Partiendo del gráfico de la función $y = f(x)$ se puede construir los gráficos de las funciones siguientes:

1) $y = f(x - a)$, o sea, el gráfico inicial desplazado a lo largo del eje Ox en la magnitud a;

2) $y = f(x) + b$, o sea, el mismo gráfico desplazado a lo largo del eje Oy en la magnitud b;

3) $y = Af(x)$, o sea, el gráfico inicial alargado A veces a lo largo del eje Oy.

4) $y = f(kx)$, o sea, el mismo gráfico alargado $1/k$ veces a lo largo del eje Ox.

Por lo tanto, a partir del gráfico de la función $y = f(x)$ se puede construir el gráfico de una función de forma $y = Af[k(x - a)] + b$.

617. Construir el gráfico de la función $y = 2x + 1 + \cos x$.

Resolución. El gráfico de la función dada se puede construir sumando los gráficos de dos funciones: $y = 2x + 1$ e $y = \cos x$. El gráfico de la primera función es una recta que se puede construir marcando dos puntos, el gráfico de la segunda función es una cosinusoide (fig. 23).

618. Construir el gráfico de la función

$$y=\begin{cases} 2-x \text{ para } x\leqslant 3, \\ 0{,}1x^2 \text{ para } x>3. \end{cases}$$

Resolución. Cuando $x<3$, de gráfico sirve una semirrecta y cuando $x\geqslant 3$, de gráfico sirve una rama de una parábola. El gráfico buscado está representado en la fig. 24.

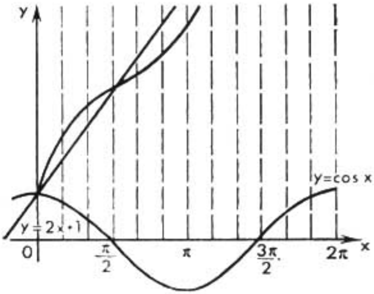

Fig. 23

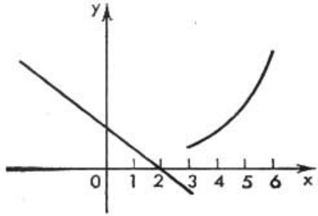

Fig. 24

619. Construir el gráfico de la función $y=2$ **sen** $(2x-1)$.

Resolución. Transformemos la función dada de modo que tenga la forma $y=2$ sen $2\,(x-1/2)$. Aquí $A=2$, $k=2$, $a=1/2$. En calidad de gráfico

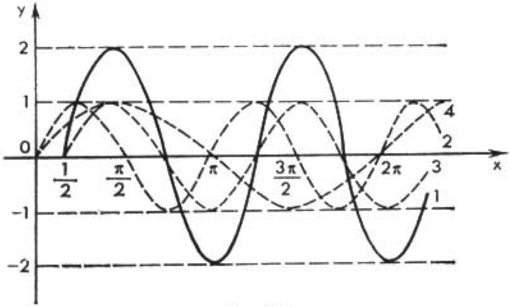

Fig. 25

inicial tomamos el de $y=$ sen x. Luego construimos el gráfico de la función $y=$ sen $2x$ comprimiéndolo dos veces a lo largo del eje de abscisas. Acto seguido construimos el gráfico de la función $y=$ sen $2\,(x-1/2)$ mediante el desplazamiento en 1/2 a la derecha y, por fin, mediante el alargamiento de dos veces a lo largo del eje de ordenadas del último gráfico, obteniendo la representación buscada de la función $y=2$ sen $(2x-1)$ (fig. 25).

Construir los gráficos de las funciones:

620. $y=\frac{x^3-x}{3}$ sobre el segmento $[-4, 4]$.

621. $y = x^2 (2 - x)^2$ sobre el segmento $[-3, 3]$.

622. $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$ en el campo de definición.

623. $y = 0,5x + 2^{-x}$ sobre el segmento $[0, 5]$.

624. $y = 2(x - 1)^3$ partiendo de la función $y = x^3$.

625. $y=\frac{1}{x^2+4}$. 626. $y=\frac{x^2+1}{x}$.

627. $y = \operatorname{sen}(3x - 2) + 1$. 628. $y = -2\cos(2x + 1)$.

629. $y = \operatorname{arcsen}(x - 2)$. 630. $y = x + 1 + \operatorname{sen}(x - 1)$.

631. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.

632. $y=\begin{cases} -x^2 \text{ para } x<0, \\ 3x \text{ para } x\geqslant 0, \end{cases}$

633. $y=\begin{cases} 4-x & \text{si } x<-1, \\ 5 & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 0, \\ x^2+5 & \text{si } x>0. \end{cases}$

§ 4. Límites

Se llama *límite de una sucesión* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ al número a, si para todo número positivo ε, tan pequeño como se desee, existe un número positivo N tal, que $|x_n - a| < \varepsilon$, cuando $n > N$.

En este caso se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Se denomina *límite de la función* $f(x)$ para $x \to a$ al número A si para todo número $\varepsilon > 0$, tan pequeño como se desee, existe un número $\delta > 0$ tal, que $|f(x) - A| < \varepsilon$ cuando $|x - a| < \delta$. Esto se escribe así: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Análogamente, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ si $|f(x) - A| < \varepsilon$ cuando $|x| > N$.

Se escribe convencionalmente $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ si $|f(x)| > M$ cuando $|x - a| < \delta$, donde M es un número positivo arbitrario.

En este caso la función $f(x)$ se llama magnitud *infinita* (*infinitamente grande*) cuando $x \to a$.

Si $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, la función $\alpha(x)$ se denomina magnitud *infinitésima* (*infinitamente pequeña*) cuando $x \to a$.

Si $x < a$ y $x \to a$, entonces se escribe $x \to a - 0$; si $x > a$ y $x \to a$, se escribe $x \to a + 0$. Los números $f(a - 0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ y $f(a + 0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ se denominan *límite izquierdo* y *límite derecho*, respectivamente, de la función $f(x)$ en el punto a.

Para la existencia del límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$, es necesario y suficiente que $f(a - 0) = f(a + 0)$.

El cálculo práctico de los límites se funda en los teoremas siguientes.

Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, entonces

1) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (cuando $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$).

Se utilizan también los límites siguientes:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (*primer límite notable*);

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = e = 2{,}71828\ \ldots$ (*segundo límite notable*).

El logaritmo de un número x que tiene por base e se llama *logaritmo natural* y se designa por $\ln x$.

Al resolver los ejercicios es útil tener en cuenta las igualdades siguientes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m-1}{x} = m.$$

634. Mostrar que para $n\to\infty$ la sucesión $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4},\ \ldots,\ 2+\frac{1}{n},\ \ldots$ tiene por límite el número 2.

Resolución. Aquí el n-ésimo término de la sucesión es $x_n = 2 + 1/n$. Por consiguiente, $x_n - 2 = 1/n$. Damos de antemano un número positivo ε. Escogemos n tan grande que se cumpla la desigualdad $1/n < \varepsilon$. Para esto es suficiente tomar $n > 1/\varepsilon$. Con tal selección de n obtenemos $|x_n - 2| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim x_n = 2$.

635. Mostrar que para $n\to\infty$ la sucesión $7/3,\ 10/5,\ 13/7,\ \ldots\ \ldots,\ (3n+4)/(2n+1),\ \ldots$ tiene por límite el número $3/2$.

Resolución. Aquí $x_n - 3/2 = (3n+4)/(2n+1) - 3/2 = 5/[2(2n+1)]$. Determinemos, para qué valor de n se cumple la desigualdad $5/[2(2n+1)] < \varepsilon$; como $2(2n+1) > 5/\varepsilon$, entonces $n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$. De suerte que si $n > 5/(4\varepsilon) - 1/2$, entonces $|x_n - 3/2| < \varepsilon$, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} x = 3/2$.

Haciendo $\varepsilon = 0{,}1$, sacamos la conclusión de que la desigualdad $|x_n - 3/2| < 0{,}1$ se cumple cuando $n > 12$ (por ejemplo, cuando $n = 13$). Análogamente, la desigualdad $|x_n - 3/2| < 0{,}01$ se cumple para $n > 124{,}5$ (por ejemplo, para $n = 125$) y la desigualdad $|x_n - 3/2| < 0{,}001$ se cumple si $n > 1249{,}5$ (por ejemplo si $n = 1250$).

636. Hallar el $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5x+2}{2x+3}$.

Resolución. Como $x\to 4$, el numerador de la fracción tiende al número $5\cdot 4 + 2 = 22$ y el denominador al número $2\cdot 4 + 3 = 11$, por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5x+2}{2x+3} = \dfrac{22}{11} = 2$.

637. Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{2x+7}$.

Resolución. El numerador y el denominador de la fracción crecen indefinidamente cuando $x\to\infty$. En tal caso se dice que tiene lugar la indeterminación de forma ∞/∞. Dividiendo por x el numerador y el denominador de la fracción, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{2x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+5/x}{2+7/x} = \frac{3}{2},$$

ya que cuando $x \to \infty$ cada una de las fracciones $5/x$ y $7/x$ tiende a cero.

638. Hallar el $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Resolución. Aquí el numerador y el denominador de la fracción cuando $x \to 3$ tiende a cero (suele decir que se obtiene la indeterminación de forma 0/0). Tenemos

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x};$$

si $x \neq 3$, entonces $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x}$. Pero cuando $x\to 3$, la fracción $\dfrac{x+3}{x}$ tiende al número $\dfrac{3+3}{3}=2$. De suerte que $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=2$.

639. Hallar el $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

Resolución. Aquí tiene lugar la indeterminación de forma 0/0. Descompongamos en factores el numerador y el denominador de la fracción:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x+1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

640. Hallar el $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$.

Resolución. Aquí se tiene la indefinición de forma 0/0. Tenemos

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}.$$

El numerador de la fracción tiende a 300 y el denominador tiende a cero, o sea, es una infinitésima, por consiguiente, la fracción que se examina es una magnitud variable infinita y $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-2x^2+100x}=\infty$.

641. Hallar el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Resolución. Multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por la suma $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

642. Hallar el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$.

Resolución. Haciendo $1+x=y^5$, entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^5-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{3}{5}.$$

643. Hallar el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} mx}{x}$.

Resolución. Utilizando el primer límite notable, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} mx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{m\cdot\operatorname{sen} mx}{mx}=m\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}=m.$$

644. Hallar el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2(5x/2)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(5x/2)}{x}\right)^2=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

Aquí hemos utilizado el resultado del ejercicio precedente, tomando $m=5/2$.

645. Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$.

Resolución. Es una indeterminación de forma ∞/∞. Dividimos el numerador y el denominador de la fracción por la mayor potencia de x, o sea, por x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2/x+3/x^2+4/x^3}{4+3/x+2/x^2+1/x^3}=\frac{1}{4}.$$

646. Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

Resolución. Dividimos el numerador y el denominador por x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2/x^4}{\sqrt{1+3/x^7+4/x^8}}=\frac{3}{1}=3.$$

647. Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$.

Resolución. Aquí tiene lugar la indeterminación de forma $\infty-\infty$. Multiplicamos y dividimos la expresión dada por $\sqrt{x^2+8x+3}+$ $+\sqrt{x^2+4x+3}$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+8/x+3/x^2}+\sqrt{1+4/x+3/x^2}}=\frac{4}{2}=2.$$

648. Hallar el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

Resolución. Dividiendo el numerador de la fracción por el denominador, separamos la parte entera:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}.$$

De este modo, cuando $x\to\infty$ la función dada es una potencia cuya base tiende a la unidad, mientras que el exponente tiende a infinito (indeterminación de la forma 1^∞). Transformando la función de modo que se utilice el segundo límite notable, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x-7}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{8-3x}{1-3/x+7/x^2}}.$$

Como $\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\to 0$ cuando $x\to\infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}=e.$$

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}=8$, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=e^8.$$

649. Hallar los límites izquierdo y derecho de la función $f(x)=\frac{1}{x+2^{1/(x-3)}}$ cuando $x\to 3$.

Resolución. Si $x\to 3-0$, entonces $1/(x-3)\to-\infty$ y $2^{1/(x-3)}\to 0$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=1/3$. Si empero $x\to 3+0$, entonces $1/(x-3)\to +\infty$, $2^{1/(x-3)}\to+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=0$.

650. Hallar los límites izquierdo y derecho de la función $f(x)=e^{1/(x-a)}$ cuando $x\to a$.

Resolución. Si $x\to a-0$, entonces $1/(x-a)\to-\infty$ y $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=0$. Si empero $x\to a+0$, entonces $1/(x-a)\to+\infty$ y $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.

651. Mostrar que cuando $n\to\infty$ la sucesión $1/2$, $5/3$, $9/4$, ..., $(4n-3)/(n+1)$, ... tiene un límite igual a 4.

652. Mostrar que cuando $n\to\infty$ la sucesión 1, $1/3$, $1/5$, ..., $1/(2n-1)$, ... es una magnitud infinitésima.

Hallar los límites siguientes:

653. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

654. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

655. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

656. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

657. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+2h)-2\operatorname{sen}(a+h)+\operatorname{sen} a}{h^2}$.

658. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} mx}{\operatorname{sen} nx}$. 659. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} x_0}{x-x_0}$.

660. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\pi-4x}$. 661. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\pi-2x}$.

662. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$.

Indicación: hacer $\pi/2 - x = \alpha$.

663. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}$.

664. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$.

665. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$.

666. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\operatorname{sen} x}-1}{x^2}$. 667. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

668. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7x+2x-x^2}}{x^2-2x}$.

669. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$. 670. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$.

671. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+mx)}{x}$. 672. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2^x+3}{2^x-3}$.

673. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d})$.

674. $\lim\limits_{x\to \infty} (\operatorname{sen}\sqrt{x+1}-\operatorname{sen}\sqrt{x})$.

675. $\lim (\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$.

676. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-5^x}{1-e^x}$. 677. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$.

678. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\ln(1+x)}$. 679. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5^x-1}{x}$.

680. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$.

Indicación. Poner $x = t^4$.

681. $\lim\limits_{x\to \pm 0} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|}$. 682. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t+\operatorname{sen} t}{t-\operatorname{sen} t}$.

683. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen} x}{\ln(x+1)}$. 684. $\lim\limits_{x\to 5-0} 10^{1/(x-5)}$.

685. $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{sen} x$. 686. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^4-1}$.

687. Hallar el $\lim\limits_{t\to \infty} t(\sqrt[t]{a}-1)$ (donde $t>0$).

Indicación: hacer $x = 1/t$, donde $x \to 0$.

688. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

689. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

690. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$. 691. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5^x-4^x}{x^2+x}$.

Indicación. Reducir las fracciones a un denominador común.

692. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x-1}{x\ln x}$. 693. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{x}$.

Indicación: tener en cuenta que $x^x = e^{x\ln x}$.

694. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$.

695. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$.

696. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x$.

697. $\lim\limits_{\alpha\to 0} (2-\cos\alpha)^{\operatorname{cosec}^2\alpha}$.

698. Hallar $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$.

699. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/(x-2)}$.

§ 5. Comparación de infinitésimos

Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ infinitésimos cuando $x \to a$.

1. Si el $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta}=0$, entonces se dice que α es un *infinitésimo de orden superior* en comparación con β. En este caso se escribe $\alpha = o(\beta)$.

2. Si el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\alpha} = m$, donde m es un número distinto de cero, entonces se dice que α y β son *infinitésimos del mismo orden*. En particular, si el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, los infinitésimos β y β se llaman *equivalentes*. La notación $\alpha \sim \beta$ significa que α y β son infinitésimos equivalentes.

Si $\dfrac{\alpha}{\beta} \to \infty$, esto quiere decir que el $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$. Por lo tanto, β es un infinitésimo de orden superior en comparación con α, o sea, $\beta = o(\alpha)$.

3. Si α^k y β son infinitésimos del mismo orden y $k > 0$, se dice que el infinitésimo β tiene el *orden* k en comparación con α.

Señalemos algunas propiedades de los infinitésimos:

1ª. *El producto de dos infinitésimos es un infinitésimo de orden superior al de los factores*, o sea, si $\gamma = \alpha\beta$, entonces $\gamma = o(\alpha)$ y $\gamma = o(\beta)$.

2ª. *Los infinitésimos α y β son equivalentes si, y sólo si, su diferencia $\alpha - \beta = \gamma$ es un infinitésimo de orden superior en comparación con α y β*, o sea, si $\gamma = o(\alpha)$, $\gamma = o(\beta)$.

3ª. *Si la relación entre dos infinitésimos tiene un límite, entonces este límite no se cambiará al sustituir cada una de los infinitésimos por otro equivalente*, o sea, si el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = m$, $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = m$.

Es útil tener en cuenta la equivalencia de los infinitésimos siguientes: si $x \to 0$, entonces

$\operatorname{sen} x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\operatorname{arcsen} x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$.

700. Sea t un infinitésimo. Comparar los infinitésimos $\alpha = 5t^2 + 2t^5$ y $\beta = 3t^2 + 2t^3$.

Resolución. Hallamos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0} \frac{5t^2+2t^5}{3t^2+2t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{5+2t^3}{3+2t} = \frac{5}{3}.$$

Como el límite de la relación entre α y β es un número distinto de cero, α y β son infinitésimos del mismo orden.

701. Comparar las magnitudes infinitésimas $\alpha = t \operatorname{sen}^2 t$ y $\beta = 2t \operatorname{sen} t$ cuando $t \to 0$.

Resolución. Hallamos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0} \frac{t \operatorname{sen}^2 t}{2t \operatorname{sen} t} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \operatorname{sen} = 0,$$

o sea, $\alpha = o(\beta)$.

702. Comparar las magnitudes infinitésimas $\alpha = t \ln(1+t)$, $\beta = t \operatorname{sen} t$ cuando $t \to 0$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0} \frac{t \ln(1+t)}{t \operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}} = 1,$$

o sea, $\alpha \sim \beta$.

703. Hallar el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x \operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg} x^2}$.

Resolución. Sustituimos el numerador y el denominador de la fracción por los infinitésimos equivalentes: $\ln(1+3x \operatorname{sen} x) \sim 3x \operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg} x^2 \sim x^2$. Entonces obtendremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x \operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg} x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x \operatorname{sen} x}{x^2} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 3.$$

704. Determinar el orden de la magnitud infinitésima $y = xe^x$ en comparación con el infinitésimo x.

705. Determinar el orden de la magnitud infinitésima $y = \sqrt{1 + x \operatorname{sen} x} - 1$ en comparación con el infinitésimo x.

706. Determinar el orden del infinitésimo $y = \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$ en comparación con x.

707. Comparar los infinitésimos $\alpha = t^2 \operatorname{sen}^2 t$ y $\beta = t \operatorname{tg} t$ si $t \to 0$.

708. Comparar los infinitésimos $\alpha = (1+x)^m - 1$ y $\beta = mx$ si $x \to 0$ y m es un número racional positivo.

709. Comparar los infinitésimos $\alpha = a^x - 1$ y $\beta = x \ln a$.

Hallar los límites siguientes:

710. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$. **711.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{\ln^2 (1+2x)}$.

Indicación: sustituir el numerador y el denominador por infinitésimos equivalentes.

712. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(1-4x)}$.

713. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$.

714. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)}$.

715. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(e^{x-1}-1)}{\ln x}$.

Indicación. Representar $\cos x$ en forma $1 - (1 - \cos x)$.

716. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1}$.

717. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{(5^\alpha - 1)(4^\alpha - 1)}{(3^\alpha - 1)(6^\alpha - 1)}$.

718. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2}$.

Indicación. Dividir por dos el numerador y el denominador.

§ 6. Continuidad de una función

La función $f(x)$ se llama *continua en el punto* a si: 1) esta función está definida en cierto entorno del punto a; 2) existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3) este límite es igual al valor de la función en el punto a, o sea, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Designando $x - a = \Delta x$ (incremento del argumento) y $f(x) - f(a) = \Delta y$ (incremento de la función), la condición de continuidad se puede escribir así: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, o sea, *la función $f(x)$ es continua en el punto a si, y sólo si, en este punto al incremento infinitésimo del argumento le corresponde el incremento infinitésimo de la función.*

Si la función es continua en cada punto de cierto campo (intervalo, segmento, etc.), se denomina *continua en* este *campo.*

El punto a que pertenece al campo de definición de la función o que es el de frontera para este campo se llama *punto de discontinuidad* si en él se altera la condición de continuidad de la función.

Si existen los límites finitos $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ y $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ y no todos los tres números $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ son iguales entre sí, entonces a se llama *punto de discontinuidad de primera especie.*

Los puntos de discontinuidad de primera especie se subdividen, a su vez, en *puntos de discontinuidad evitable* (cuando $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$, o sea,

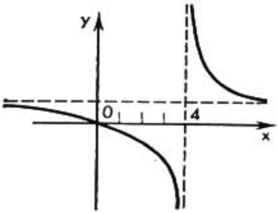

Fig. 26

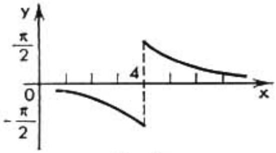

Fig. 27

cuando los límites izquierdo y derecho de la función en el punto a son iguales entre sí, pero no son iguales al valor de la función en este punto y en *puntos de salto* (cuando $f(a-0) \neq f(a+0)$, o sea, cuando los límites izquierdo y derecho de la función en el punto a son distintos); en el último caso la diferencia $f(a+0) - f(a-0)$ se denomina *salto* de la función en el punto a.

Los puntos de discontinuidad que no son de la primera especie se llaman *puntos de discontinuidad de segunda especie.* En los puntos de discontinuidad de segunda especie no existe ni siquiera uno de los límites unilaterales.

La suma y el producto de un número finito de funciones continuas es una función continua. El cociente obtenido por la división de dos funciones continuas es una función continua en todos los puntos en que el divisor no sea igual a cero.

719. Mostrar que cuando $x = 4$ la función $y = \frac{x}{x-4}$ tiene una discontinuidad.

Resolución. Hallamos

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty, \quad \lim_{x \to 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty.$$

Así, pues, la función, si $x \to 4$, no tiene un límite finito, ni derecho ni izquierdo. Por lo tanto, $x = 4$ es el punto de discontinuidad de segunda especie (fig. 26).

720. Mostrar que cuando $x = 4$ la función $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}$ presenta una discontinuidad.

Resolución. Si $x \to 4-0$, entonces $1/(x-4) \to -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 4-0} y = -\pi/2$. Pero si $x \to 4+0$, entonces $1/(x-4) \to +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 4+0} y = \pi/2$. De suerte que cuando $x \to 4$ la función tiene un límite finito, tanto izquierdo como derecho, además ellos son diferentes. Por consiguiente, $x = 4$ es un punto de discontinuidad de primera especie, o sea, un punto de salto. El salto de la función en este punto es igual a $\pi/2 - (-\pi/2) = \pi$ (fig. 27).

721. Mostrar que cuando $x = 5$ la función $y = \frac{x^2-25}{x-5}$ presenta una discontinuidad.

Resolución. En el punto $x = 5$ la función no está definida, ya que al sustituir, obtenemos la indeterminación $0/0$. En otros puntos la fracción se puede simplificar dividiendo por $x-5$, ya que $x-5 \neq 0$. Por lo tanto, $y = x+5$ si $x \neq 5$, es fácil ver que $\lim\limits_{x \to 5-0} y = \lim\limits_{x \to 5+0} y = 10$.

De este modo, cuando $x = 5$ la función tiene una discontinuidad evitable, si se conviene en que $y = 10$ para $x = 5$.

Por lo tanto, se puede considerar que la función $y = (x^2-25)/(x-5)$ es continua para todos los valores de x si se toma que la igualdad $(x^2-25)/(x-5) = x+5$ es válida para todos los valores de x no excluyendo tampoco $x = 5$. En este caso el gráfico de la función es la recta $y = x+5$.

722. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y = \frac{2^{1/(x-2)}-1}{2^{1/(x-2)}+1}$.

723. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y = \frac{1}{(x-1)(x-5)}$.

724. ¿Cuál es el carácter de la discontinuidad de la función $y = \frac{1}{1-e^{1-x}}$ en el punto $x = 1$?

725. ¿Cuál es el carácter de la discontinuidad de la función $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en el punto $x = 0$?

726. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}}{x(x-5)}$.

727. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

728. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y = \frac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

729. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y = \frac{1}{x^2+x+1}$.

730. Investigar si es continua o no la función $y = \frac{1}{(x-1)(x-6)}$ sobre el segmento: 1) $[2, 5]$; 2) $[4, 10]$; 3) $[0, 7]$.

731. Investigar si es continua o no la función $y = \frac{1}{x^4-26x^2+25}$ sobre el segmento: 1) $[6, 10]$; 2) $[-2, 2]$; 3) $[-6, 6]$.

Capítulo VII. Cálculo diferencial de funciones de una variable independiente

§ 1. Derivada y diferencial

1. Derivación de funciones explícitas. Sean x_1 y x_2 los valores del argumento e $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ los valores respectivos de la función $y = f(x)$. La diferencia $\Delta x = x_2 - x_1$ se llama *incremento del argumento* y la diferencia $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ se denomina *incremento de la función* en el segmento $[x_1, x_2]$.

Se denomina *derivada* de la función $y = f(x)$ del argumento x el límite de la razón del incremento de la función al del argumento cuando el incremento de este último tiende a cero:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ o bien } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(la derivada se designa también por $\frac{dy}{dx}$).

La derivada es, gráficamente, la pendiente de la tangente al gráfico de la función $y = f(x)$ en el punto x, o sea $y' = \operatorname{tg} \alpha$.

La derivada es la *velocidad de variación* de la función en el punto x.

La determinación de la derivada se llama *derivación* de la función.

Fórmulas de derivación de las funciones principales

I. $(x^m)' = mx^{m-1}$.

II. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$.

IV. $(e^x)' = e^x$.

V. $(a^x)' = a^x \ln a$.

VI. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

VII. $(\log_a x') = \frac{1}{x \ln a}$.

VIII. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

IX. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

X. $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$.

XI. $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$.

XII. $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XIII. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XIV. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

XV. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

XVI. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x$.

XVII. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x$.

XVIII. $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XIX. $(\operatorname{cth} x') = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Reglas principales de derivación

Sean C, una constante; $u = u(x)$, $v = v(x)$, funciones que poseen derivadas. Entonces:

1) $C' = 0$; 2) $x' = 1$; 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 4) $(Cu)' = Cu'$; 5) $(uv)' = u'v + uv'$; 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; 7) si $y = f(u)$, $u = u(x)$, o sea, $y = f[u(x)]$, donde las funciones $f(u)$ y $u(x)$ tienen derivadas, entonces

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

(regla de derivación de una *función compuesta*).

732. Partiendo de la definición de una derivada (sin aplicar las fórmulas de derivación), hallar la derivada de la función $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.

Resolución. Damos a x el incremento Δx, entonces y obtendrá el incremento Δy:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Hallamos el incremento de la función:

$$\Delta y = [2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4] - (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) = 6x^2 \Delta x + 6x \Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x \Delta x + 5 \Delta x^2 - 7 \Delta x.$$

Hallamos la razón del incremento de la función con respecto al del argumento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7.$$

Encontramos el límite de esta razón cuando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7.$$

Por consiguiente, según la definición de derivada $y' = 6x^2 + 10x - 7$.

733. Partiendo de la definición de derivada, hallar la derivada de la función $y = \sqrt{x}$.

Resolución. Hallamos el incremento de la función $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$. De aquí

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

De este modo,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

De suerte que $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

734. Partiendo de la definición de una derivada, hallar la derivada de la función $y = -\operatorname{ctg} x - x$.

Resolución. Hallamos

$$\Delta y = -\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - (x + \Delta x) + \operatorname{ctg} x + x = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \Delta x.$$

Utilizando la fórmula $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$, obtenemos

$$\Delta y = \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x - x)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x + \Delta x)} - \Delta x = \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x + \Delta x)} - \Delta x,$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x + \Delta x)} - 1$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}}{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(x + \Delta x)} - 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1.$$

De suerte que $y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x$.

Partiendo de la definición de derivada hallar las derivadas de las funciones:

735. $y = \dfrac{1}{x^2}$. **736.** $y = \sqrt[3]{x^2}$.

737. $y = 5 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$. **738.** $y = 5(\operatorname{tg} x - x)$.

739. $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$. **740.** $y = 2^{x^2}$.

Aplicando las fórmulas y reglas de derivación hallar las derivadas de las funciones siguientes:

741. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$.

Resolución. $y' = (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (4)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7x' + 4' = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7$.

742. $y = x^2 \cdot e^x$.

Resolución. $y' = x^2 (e^x)' + e^x \cdot (x^2)' = x^2 e^x + 2x e^x = x e^x (x + 2)$.

743. $y = x^3 \operatorname{arctg} x$.

Resolución. $y' = x^3\ (\operatorname{arctg} x)' + \operatorname{arctg} x \cdot (x^3)' = x^3 \cdot \dfrac{1}{1+x^2} + 3x^2 \cdot \operatorname{arctg} x =$
$= \dfrac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \cdot \operatorname{arctg} x.$

744. $y = x\sqrt{x}\,(3 \ln x - 2).$

Resolución. Reescribimos la función dada en la forma de $y = x^{3/2} \times$ $\times (3 \ln x - 2)$. Entonces

$$y' = x^{3/2} \cdot \frac{3}{x} + \frac{3}{2} x^{1/2} (3 \ln x - 2) = 3x^{1/2} +$$
$$+ \frac{9}{2} x^{1/2} \cdot \ln x - 3x^{1/2} = \frac{9}{2} \sqrt{x} \ln x.$$

745. $y = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}.$

Resolución. $y' = \dfrac{x \cdot (\operatorname{arcsen} x)' - \operatorname{arcsen} x \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arcsen} x}{x^2} =$
$= \dfrac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arcsen} x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$

746. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}.$

Resolución.

$$y' = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x + \operatorname{sen} x) - (\operatorname{sen} x - \cos x)(\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} =$$
$$= \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}.$$

747. $y = (2x^3 + 5)^4.$

Resolución. Designemos $2x^3 + 5 = u$; entonces $y = u^4$. Según la regla de derivación de una función compuesta tenemos

$$y' = (u^4)'_u \cdot (2x^3 + 5)'_x = 4u^3\,(6x^2) = 24x^2\,(2x^3 + 5)^3.$$

748. $y = \operatorname{tg}^6 x.$

Resolución. $y' = 6 \operatorname{tg}^5 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 6 \operatorname{tg}^5 x \cdot \sec^2 x.$

749. $y = \cos^2 x.$

Resolución. $y' = 2 \cos x\,(\cos x)' = -2 \cos x \cdot \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x.$

750. $y = \operatorname{sen}(2x + 3).$

Resolución. $y' = \cos(2x + 3) \cdot (2x + 3)' = 2 \cos(2x + 3).$

751. $y = \operatorname{tg} \ln x.$

Resolución. $y' = \sec^2 \ln x \cdot (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \cdot \operatorname{sen}^2 \ln x.$

752. $y = \operatorname{sen}^3 \dfrac{x}{3}.$

Resolución. $y' = 3 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{3} \cdot \left(\operatorname{sen} \dfrac{x}{3}\right)' = 3 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{3} \cos \dfrac{x}{3} \left(\dfrac{x}{3}\right)' = \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{3} \times$
$\times \cos \dfrac{x}{3}.$

753. $y=\ln(x^2+5)$.

Resolución. $y'=\dfrac{1}{x^2+5}\cdot(x^2+5)'\cdot=\dfrac{2x}{x^2+5}$.

754. $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Resolución. $y'=\dfrac{1}{\operatorname{tg}(x/2)}\cdot(\operatorname{tg}(x/2))'=\dfrac{1}{\operatorname{tg}(x/2)}\cdot\sec^2(x/2)\cdot(x/2)'=$

$$=\frac{1}{2\operatorname{tg}(x/2)\cos^2(x/2)}=\frac{1}{2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)}=\frac{1}{\operatorname{sen}x}.$$

755. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Resolución.

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times$$
$$\times\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

756. $y=\ln\left(\sqrt{2\operatorname{sen}x+1}+\sqrt{2\operatorname{sen}x-1}\right)$.

Resolución.

$$y'=\left(\frac{1}{\sqrt{2\operatorname{sen}x+1}+\sqrt{2\operatorname{sen}x-1}}\right)\cdot\left(\sqrt{2\operatorname{sen}x+1}+\sqrt{2\operatorname{sen}x-1}\right)'=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\operatorname{sen}x+1}+\sqrt{2\operatorname{sen}x-1}}\left(\frac{2\cos x}{2\sqrt{2\operatorname{sen}x+1}}+\frac{2\cos x}{2\sqrt{2\operatorname{sen}x-1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\operatorname{sen}x+1}+\sqrt{2\operatorname{sen}x-1}}\times$$
$$\times\frac{\cos x\left(\sqrt{2\operatorname{sen}x+1}+\sqrt{2\operatorname{sen}x-1}\right)}{\sqrt{4\operatorname{sen}^2x-1}}=\frac{\cos x}{\sqrt{4\operatorname{sen}^2x-1}}.$$

757. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\dfrac{k}{2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)$.

Resolución.

$$y'=\frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}\right)=$$
$$=\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+k}}+\frac{\sqrt{x^2+k}}{2}+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}}=$$
$$=\frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}=\sqrt{x^2+k}.$$

758. $y=\operatorname{arcsen}\dfrac{2x^2}{1+x^4}$, $\quad |x|<1$.

Resolución.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\cdot\frac{(1+x^4)\cdot 4x-2x^2\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-2x^4+x^8}}\cdot\frac{4x\,(1-x^4)}{1+x^4}=\frac{4x}{1+x^4}.$$

759. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\ln x}{3}$.

Resolución. $y'=\dfrac{1}{1+(\ln^2 x)/9}\cdot\dfrac{1}{3x}=\dfrac{3}{x\,(9+\ln^2 x)}$.

760. $y=e^x\cdot\operatorname{arctg} e^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$.

Resolución. Escribiendo la función dada en la forma de

$$y=e^x\cdot\operatorname{arctg} e^x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}),$$

obtenemos

$$y'=e^x\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^x+e^x\operatorname{arctg} e^x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\times$$

$$\times e^{2x}\cdot 2=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}+e^x\cdot\operatorname{arctg} e^x-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=e^x\cdot\operatorname{arctg} e^x.$$

761. $y=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}+\ln\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Resolución. Transformamos la función dada:

$$y=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}+\ln(1+\operatorname{sen} x)-\ln\cos x.$$

Entonces

$$y'=\frac{\cos^2 x\cos x-\operatorname{sen} x\cdot 2\cos x\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^4 x}+$$

$$+\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\cos x-\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x),$$

o bien

$$y'=\frac{\cos^2 x+2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}+\frac{\cos x\,(1-\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen}^2 x}+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{2}{\cos^3 x}=2\sec^3 x.$$

762. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$.

Resolución. $y' = \operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\sec^2\sqrt{x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}\,(-\operatorname{sen}\sqrt{x})\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}\sqrt{x}\,(\sec^2\sqrt{x} - 1) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}^3\sqrt{x}.$$

763. $y = 5\operatorname{sh}^3\dfrac{x}{15}\;3\operatorname{sh}^5\dfrac{x}{15}$.

Resolución. Hallamos

$$y' = 15\operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{15}\cdot\frac{1}{15} + 15\operatorname{sh}^4\frac{x}{15}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{15}\cdot\frac{1}{15} =$$
$$= \operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{15}\cdot\left(1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{15}\right),$$

de donde, utilizando la relación $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, obtenemos finalmente $y' = \operatorname{sh}^2\dfrac{x}{15}\operatorname{ch}^3\dfrac{x}{15}$.

764. $y = x^{x^2}$.

Resolución. Aquí la base y el exponente dependen de x. Aplicando logaritmos, obtenemos

$$\ln y = x^2 \ln x.$$

Derivamos ambos miembros de la última igualdad con respecto a x. Como y es función de x, $\ln y$ es una función compuesta de x y $(\ln y)' = \dfrac{1}{y}\cdot y'$. Por consiguiente,

$$\frac{y'}{y} = x^2\cdot\frac{1}{x} + 2x\cdot\ln x, \qquad \frac{y'}{y} = x\,(1 + 2\ln x),$$

o sea,

$$y' = xy\,(1 + 2\ln x) = xx^{x^2}(1 + 2\ln x) = x^{x^2+1}(1 + 2\ln x).$$

765. $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$.

Resolución. Tenemos $\ln y = \operatorname{tg} x\cdot\ln\operatorname{sen} x$, de donde

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x + \sec^2 x\cdot\ln\operatorname{sen} x = 1 + \sec^2 x\cdot\ln\operatorname{sen} x;$$
$$y' = y\,(1 + \sec^2 x\cdot\ln\operatorname{sen} x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}(1 + \sec^2 x\cdot\ln\operatorname{sen} x).$$

766. $y = \dfrac{(2x-1)^3\cdot\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$.

Resolución. Aquí es también útil aplicar previamente logaritmos a la función dada.

$$\ln y = 3\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x+4) - \frac{1}{3}\ln(1-x);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x-1}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3x+2} - 2\cdot\frac{5}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)};$$

$$y' = \frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\left[\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right].$$

Hallar las derivadas de las funciones:

767. $y=\frac{7}{x^3}$. **768.** $y=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$.

769. $y=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{4}{11}x^5\sqrt{x}+\frac{2}{15}x^7\sqrt{x}$.

770. $y=(x^2+2x+2)\,e^{-x}$.

771. $y=3x^3\ln x-x^3$.

772. $y=\frac{2^{3x}}{3^{2x}}$.

773. $y=x^2\operatorname{sen}x+2x\cos x-2\operatorname{sen}x$.

774. $y=\ln(2x^3+3x^2)$.

775. $y=\sqrt{1-3x^2}$.

776. $y=x\arccos\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$.

777. $y=\sqrt{x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

778. $y=\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$.

779. $y=\cos^3(x/3)$. **780.** $y=\ln\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}$.

781. $y=\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$.

782. $y=\operatorname{tg}2x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 2x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 2x$.

783. $y=\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\sqrt{x}-\frac{2}{5}\operatorname{sen}^5\sqrt{x}+\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7\sqrt{x}$.

784. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$.

785. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$.

786. $y=\ln\frac{\sqrt{4\operatorname{tg}x+1}-2\sqrt{\operatorname{tg}x}}{\sqrt{4\operatorname{tg}x+1}+2\sqrt{\operatorname{tg}x}}$.

787. $y=-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-2\ln\operatorname{sen}\frac{x}{2}$.

788. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x^2-1}$.

789. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

790. $y=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

791. $y=\operatorname{arcsen}\frac{2x^3}{1+x^6}$, si $|x|<1$.

792. $y = \arccos \frac{9-x^2}{9+x^2}$.

793. $y = e^{-x} - \operatorname{sen} e^{-x} \cos e^{-x}$.

794. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

795. $y = \ln \frac{(x-1)(x-3)^3}{(x-2)^3(x-4)}$.

796. $y = 1 - e^{\operatorname{sen}^2 3x} \cos^2 3x$.

797. $y = \ln \frac{2 \ln^2 \operatorname{sen} x + 3}{2 \ln^2 \operatorname{sen} x - 3}$.

798. $y = \ln (\sec x + \operatorname{tg} x)$.

799. $y = -\ln (\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x)$.

800. $y = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x} - 1)$. **801.** $y = \ln \frac{x^5}{x^5+2}$.

802. $y = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)^2$.

803. $y = \operatorname{arcsen} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

804. $y = -\operatorname{cosec}^2 (x/2)$.

805. $y = \operatorname{sen} (\ln x) \cdot \cos (\ln x) - \ln (1/x)$.

806. $y = (x^5 + 3) [\ln (x^5 + 3) - 1]$.

807. $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{1 - 0{,}2x^2}$.

808. $y = 0{,}5 \left[(x+\alpha)\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta} + (\beta - \alpha^2) \ln \left(x + \alpha + \sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}\right)\right]$.

809. $y = \operatorname{arcsen} e^x + \operatorname{arcsen} \sqrt{1-e^{2x}}$.

810. $y = m\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta} + (n - m\alpha) \ln \left(x + \alpha + \sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}\right)$.

811. $y = \frac{x}{\sqrt{1-mx^2}}$.

812. $y = x^2 + 2x \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x$.

813. $y = \operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x + \ln (\operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec} x)$.

814. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \ln \operatorname{sen} x}$.

815. $y = 3x \operatorname{sen}^3 x + 3 \cos x - \cos^3 x$.

816. $y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

817. $y = e^x - \operatorname{sen} e^x \cos^3 e^x - \operatorname{sen}^3 e^x \cos e^x$.

818. $y = \operatorname{arctg} (x+1) + \frac{x+1}{x^2+2x+2}$.

819. $y = x (\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6)$.

820. $y = \ln \operatorname{sen} \sqrt{x}\, tg \sqrt{x} - \sqrt{x}$.

821. $y = \operatorname{arctg} \frac{x^x - x^{-x}}{2}$.

822. $y = \frac{1}{64}\left(\operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}\right) +$
$+ \frac{3}{8} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

823. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$.

824. $y = -\frac{2 \cos (x/2)}{\operatorname{sen} (x/2) + 3 \cos (x/2)}$.

825. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \operatorname{sen} x + \ln \cos \operatorname{sen} x$.

826. $y = \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$.

827. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 1}$.

828. $y = 2x \operatorname{tg} 2x + \ln \cos 2x - 2x^2$.

829. $y = \arccos (2e^{2x} - 1)$. 830. $y = \ln \ln x (\ln \ln \ln x - 1)$.

831. $y = \frac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}$. 832. $y = \ln \frac{x \ln x - 1}{x \ln x + 1}$.

833. $y = \operatorname{arctg} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$.

834. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{e^{2 \operatorname{sen} x}}{4}$.

835. $y = \frac{a}{2} \operatorname{sen}^2 x + \frac{b}{2} \cos^2 x - \frac{a + b}{4} \cos 2x$.

836. $y = \operatorname{tg}^3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg} \operatorname{tg} x$.

837. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \ln \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

838. $y = \frac{\ln x}{x^5} + \frac{1}{5x^5}$.

839. $y = \sqrt{2x + 1}\, [\ln (2x + 1) - 2]$.

840. $y = \sec x\, (1 + \ln \cos x)$.

841. $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \operatorname{arcsen} e^x$.

842. $y = 2^{\cos^3 x - 3 \cos x}$.

843. $y = \frac{e^x \cdot 2^{5x}}{3^{4x}}$.

844. $y = \frac{x + 1}{x} - e^{-\ln \frac{x}{x + 1}}$

845. $y = x \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2} \cos^2 x$.

846. $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

847. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\operatorname{sen} x}$.

848. $y = 2(\operatorname{tg} \sqrt{x} - \sqrt{x})$.

849. $y = \frac{1}{4a} \ln \frac{x-a}{x+a} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

850. $y = \ln \frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{\sqrt{x^4+1} + x^2}$.

851. $y = e^{0,5 \operatorname{tg}^2 x} \cos x$.

852. $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1-x^8}$. 853. $y = x^2 e^{x^2} \ln x$.

854. $y = \arccos \sqrt{1-2^x}$. 855. $y = \log_{x^2} 2$.

856. $y = -m\sqrt{-x^2+2\alpha x+\beta} + (m\alpha+n) \operatorname{arcsen} \frac{x-\alpha}{\sqrt{\alpha+\beta}}$.

857. $y = \log_2 \operatorname{sen}^2 x$.

858. $y = \log_a (x + \sqrt{x^2+9})$.

859. $y = x^{\operatorname{arcsen} x}$. 860. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$.

861. $y = \frac{2^x (x+1)^3}{(x-1)^2 \sqrt{2x+1}}$.

862. $y = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$.

863. $y = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2+n^2} [(m+1)\cos(n \ln x) + n \operatorname{sen}(n \ln x)]$.

864. $y = (x \operatorname{tg} x + \ln \cos x) \cdot \operatorname{tg}(x \operatorname{tg} x + \ln \cos x) + \ln \cos(x \operatorname{tg} x + \ln \cos x)$.

865. $y = (x \cos x - \operatorname{sen} x)[\ln(x \cos x - \operatorname{sen} x) - 1]$.

866. $y = 3 \operatorname{sen}(xe^x - e^x) - \operatorname{sen}^3 (xe^x - e^x)$.

867. $y = \arccos(2x\sqrt{1-x^2})$.

868. $y = |x|$ $(x \neq 0)$. 869. $y = |f(x)|$.

870. $y = |3x - 5|$. 871. $y = e^{|x|}$.

872. $y = |x| + |x - 2|$.

873. $y = xe^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + e^x \cos x$.

874. $y = \ln [x \operatorname{sen} x + \cos x + \sqrt{(x \operatorname{sen} x + \cos x)^2 + 1}]$.

875. $y = \frac{x^x}{e^x} (x \ln x - x - 1)$.

876. $y = \log_{\cos x} \operatorname{sen} x$.

877. $y=\log_{e^2}(x^n+\sqrt{x^{2n}+1})$.

878. $y=\log_x e$. 879. $y=\log_{x^2} x$.

880. $y=\log_{x^2} x^x$. 881. $y=x^{1/\ln x}$.

882. $y=x^x$. 883. $y=x^{-x}\cdot 2^x\cdot x^2$.

884. $y=x^{\ln x}$. 885. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}$.

886. Mostrar que $(\sec x)'=\sec x \operatorname{tg} x$.

887. Mostrar que $(\operatorname{cosec} x)'=-\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$.

888. Mostrar que $(u^v)'=vu^{v-1}\cdot u'+u^v\cdot v'\ln u$.

889. Deducir las fórmulas de derivación de $\operatorname{arcsec} x$ y $\operatorname{arccosec} x$.

890. ¿A qué es igual la expresión $u=y^2+y'^2+4y^2/y'^2$ si $y=2\cos x$?

891. Mostrar que la función $y=(x^2+1)(e^x+C)$ convierte en identidad la ecuación $y'-\dfrac{2xy}{x^2+1}=e^x(x^2+1)$.

2. Derivación de las funciones implícitas. Sea que la ecuación $F(x, y)=0$ determina y como función implícita de x. En adelante consideraremos esta función derivable.

Derivando con respecto a x ambos miembros de la ecuación $F(x, y)=0$, obtendremos una ecuación de primer grado con respecto a y'. A partir de esta ecuación se encuentra fácilmente y', o sea, la derivada de la función implícita.

892. Hallar la derivada y'_x a partir de la ecuación $x^2+y^2=4$.

Resolución. Como y es función de x, consideraremos y^2 como función compleja de x. Por consiguiente, $(y^2)'=2yy'$. Derivando con respecto a x ambos miembros de la ecuación dada, obtendremos $2x+2yy'=0$, o sea, $y'=-x/y$.

893. Hallar la derivada y'_x a partir de la ecuación $x^3+\ln y-x^2e^y=0$.

Resolución. Derivando con respecto a x ambos miembros de la ecuación obtenemos

$$3x^2+\frac{y'}{y}-x^2e^yy'-2xe^y=0, \qquad \text{o sea,} \qquad y'=\frac{(2xye^y-3x^2)\,y}{1-x^2ye^y}.$$

Hallar la derivada y'_x de las funciones implícitas:

894. $x^3+y^3-3xy=0$.

895. $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

896. $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$.

897. $x^y-y^x=0$.

898. $x \operatorname{sen} y+y \operatorname{sen} x=0$.

899. $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$.

900. $\operatorname{sen}(y-x^2)-\ln(y-x^2)+2\sqrt{y-x^2}-3=0$.

901. $\dfrac{y}{x}+e^{y/x}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$.

902. $x^{y^2}+y^2\ln x-4=0$.

903. $x^2\operatorname{sen} y+y^3\cos x-2x-3y+1=0$.

3. Derivación de funciones paramétricamente dadas. Si la función y con argumento x está definida por las ecuaciones paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, entonces

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \text{o bien,} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

904. Hallar $y' = \frac{dy}{dx}$ si $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$

Resolución. Hallamos $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 3$, $\frac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2$. Por consiguiente $\frac{dy}{dx} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2$.

905. Hallar $y' = \frac{dy}{dx}$ si $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$.

906. Hallar $y' = \frac{dy}{dx}$ si $x = e^{-t} \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$.

907. Hallar $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ si $\rho = \left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha} + 1\right)\alpha$, $\theta = \sqrt{\alpha}\, e^{\sqrt{\alpha}}$.

908. Hallar $y' = \frac{dy}{dx}$ si $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$.

4. Aplicaciones de la derivada a los problemas de la geometría y la mecánica. Si una curva está definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, donde α es el ángulo formado por el semieje positivo Ox y la tangente trazada a la curva en el punto con abscisa x_0.

La *ecuación de la tangente* a la curva $y = f(x)$ en el punto $M_0(x_0; y_0)$ tiene la forma

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0),$$

donde y'_0 es el valor de la derivada y' en el punto $M_0(x_0; y_0)$.

Se llama *normal* a la curva, la recta perpendicular a la tangente que pasa por el punto de tangencia.

La *ecuación de una normal* tiene la forma

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0).$$

Se denomina *ángulo entre dos curvas* $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ en el punto de intersección $M_0(x_0; y_0)$, al ángulo comprendido entre las tangentes a estas curvas en el punto M_0. Este ángulo se determina por la fórmula

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0)}.$$

Si para el movimiento rectilíneo de un punto se asigna la ley de movimiento $s = s(t)$, entonces la velocidad de movimiento en el instante t_0 es la derivada del recorrido respecto al tiempo: $v = s'(t_0)$.

909. ¿Qué ángulo forma con el eje de las abscisas la tangente a la curva $y = (2/3)x^5 - (1/9)x^3$, trazada en el punto con la abscisa $x = 1$?

Resolución. Hallamos la derivada $y' = (10/3)x^4 - (1/3)x^2$; para $x = 1$ tenemos $y' = 3$, o sea, $\operatorname{tg} \alpha = 3$, de donde $\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 71°34'$.

910. ¿Qué ángulo forma con el eje de las abscisas la tangente a la parábola $y = x^2 - 3x + 5$, trazada en el punto $M(2, 3)$? Escribir las ecuaciones de la tangente.

911. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ en el punto $M(1; -1)$.

Resolución. De la ecuación de la curva determinamos la derivada:

$$2x+2y^2+4xyy'+12y^3y'=0, \text{ o sea, } y'=-\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}.$$

Por consiguiente, $y_0' = -\dfrac{1+(-1)^2}{2\cdot 1(-1)+6(-1)^3} = \dfrac{1}{4}$.

La ecuación de la tangente es

$$y+1=\frac{1}{4}(x-1), \text{ o bien, } x-4y-5=0.$$

La ecuación de la normal es

$$y+1=-4(x-1), \quad \text{o bien,} \quad 4x+y-3=0.$$

912. Hallar el ángulo comprendido entre las parábolas $y = 8 - x^2$ e $y = x^2$.

Resolución. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones de las parábolas, encontramos los puntos de su intersección $A(2; 4)$ y $B(-2; 4)$. Derivamos las ecuaciones de las parábolas: $y' = -2x$, $y' = 2x$. Determinamos las pendientes de las tangentes a las parábolas en el punto A (o sea, hallamos los valores de las derivadas para $x = 2$): $k_1 = -4$, $k_2 = 4$. Por lo tanto, $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{4+4}{1-16} = -\dfrac{8}{15}$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(-8/15)$. Del mismo modo se determina el ángulo comprendido entre las curvas en el punto B; $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(8/15)$.

913. Hallar la ecuación de la normal a la parábola $y^2 = 2px$ en el punto $M(x_0; y_0)$.

914. Escribir la ecuación de la tangente a la hipérbola $x^2/9 - y^2/8 = 1$, trazada en el punto $M(-9; -8)$.

915. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la astroide $x = \sqrt{2}\cos^3 t$, $y = \sqrt{2}\operatorname{sen}^3 t$, trazadas en el punto para el cual $t = \pi/4$.

916. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, trazadas en el punto para el cual $t = \pi/2$.

917. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la parábola semicúbica $x = t^2$, $y = t^3$, trazadas en el punto para el cual $t = 2$.

918. Mostrar que la ecuación de la tangente a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el punto $M(x_0; y_0)$ tiene la forma $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1$.

919. ¿Qué ángulo forma con el eje de las abscisas la tangente a la curva $y = \operatorname{sh} x$, trazada en el punto $(0; 0)$?

920. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la catenaria $y = \operatorname{ch}(x/2)$, en el punto donde $x = 2\ln 2$.

921. Escribir la ecuación de la tangente a la hipérbola equilátera $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, en el punto $t = t_0$.

922. Hallar el ángulo comprendido entre la curva $y = x - x^3$ y la recta $y = 5x$.

923. Hallar el ángulo entre las curvas $y = x^3$ e $y = 1/x^2$.

924. Hallar el ángulo entre las líneas $y = 1 + \operatorname{sen} x$, $y = 1$.

925. Hallar el ángulo entre las curvas $x^2 + y^2 = 5$, $y^2 = 4x$.

926. Hallar el ángulo entre las curvas $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} x$, $y = \sqrt{2} \cos x$.

927. Para el movimiento rectilíneo de un punto, el espacio recorrido en función del tiempo está definido por la ecuación $s = t^5/5 + (2/\pi) \operatorname{sen} (\pi t/8)$ (t, en segundos y s, en metros). Determinar la velocidad de movimiento cuando han transcurrido dos segundos.

Resolución. Determinamos la derivada del espacio recorrido en el tiempo:

$$\frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi t}{8}.$$

Para $t = 2$ tenemos $\frac{ds}{dt} = 16 + \frac{1}{8} \sqrt{2} \approx 16,18$. Por consiguiente, $v \approx 16{,}18$ m/s

928. Por la parábola $y = x(8 - x)$ se desplaza un punto de modo que su abscisa varíe en función del tiempo t por la ley $x = t\sqrt{t}$ (t, en segundos; x, en metros). ¿Cuál es la velocidad de variación de la ordenada en el punto M (1; 7)?

Resolución. Determinamos la ley de variación de la ordenada; sustituyendo en la ecuación de la parábola x por $t\sqrt{t}$, obtendremos $y = 8t\sqrt{t} - t^3$. La velocidad de variación de la ordenada es la derivada de la ordenada con respecto al tiempo: $y'_t = 12\sqrt{t} - 3t^2$. Para el punto M (1; 7) el valor de t es igual a 1. Por lo tanto, $y'_{t=1} = 9$, o sea, la velocidad de variación de la ordenada es igual a 9 m/s.

929. El espacio recorrido en función del tiempo está definido por la ecuación $s = t \ln (t + 1)$ (t, en segundos y s, en metros). Hallar la velocidad de movimiento cuando han transcurrido dos segundos.

929a. Por la parábola cúbica $y = x^3$ se mueve un punto de modo que su ordenada varíe en función del tiempo t por la ley $y = at^3$. ¿Cuál es la velocidad de variación de la abscisa en función del tiempo?

5. Determinación del ángulo formado entre un radio vector y una línea. Consideremos una línea plana $y = f(x)$ en las coordenadas cartesianas. Como dirección de la línea en un punto $M(x, y)$ dado, se adopta la dirección de la tangente a la línea en este punto, y ella se determina por medio del ángulo α entre la tangente y la dirección positiva del eje Ox (calculado en sentido contrario a la marcha de las agujas del reloj), además, $\operatorname{tg} \alpha = y'$. El coeficiente angular del radio vector del punto M será $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. Entonces el ángulo formado por el radio vector y la tangente a la línea en el punto dado será

$$\omega=\alpha-\varphi,\ \operatorname{tg}\omega=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}=\frac{y'-y/x}{1+y'\cdot y/x}=\frac{xy'-y}{x+yy'},$$

$$\text{o bien,}\quad \operatorname{tg}\omega=\frac{x\,dy-y\,dx}{x\,dx+y\,dy} \qquad (*)$$

Si la línea se da en coordenadas polares $r=r(\varphi)$, entonces la igualdad $(*)$ se puede representar de otra forma, utilizando la relación $x=r\cos\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\varphi$. Hallamos $xdy-ydx=r^2\,d\varphi$, y $xdx+ydy=rdr$, entonces, $\operatorname{tg}\omega=\frac{r^2\,d\varphi}{r\,dr}=\frac{r}{\dot r}$.

930. 1) Hallar el ángulo entre la parábola $y=4-x^2$ y el *radio vector del punto $M(1, 3)$ de esta línea.*

Resolución. Aprovechamos la fórmula $\operatorname{tg}\omega=\frac{xy'-y}{x+yy'}=\frac{x(-2x)-y}{x+y(-2x)}=\frac{-2x^2-y}{x-2xy}$. Reemplazando con las coordenadas del punto dado, obtenemos, $\operatorname{tg}\omega=\frac{-2-3}{1-6}=1$, $\omega=\frac{\pi}{4}$. De este modo, el ángulo formado por la parábola y el radio vector en el punto M es igual a $\frac{\pi}{4}$.

2) Hallar el ángulo entre la circunferencia $r=a$ y el radio *vector de cualquiera de sus puntos.*

Resolución. $\dot r=0$, entonces, $\operatorname{tg}\omega=\frac{r}{\dot r}=\frac{a}{0}=\infty$, $\omega=\frac{\pi}{2}$.

3) Hallar el ángulo entre la hipérbola equilátera $x^2-y^2=36$ *y el radio vector, en el punto $M(10, 8)$ de la hipérbola.*

Resolución. Hallamos y' de la función implícita $x^2-y^2=36$: $2x-2y\cdot y'=0$, $y'=\frac{x}{y}$, entonces, $\operatorname{tg}\omega=\frac{x\cdot x/y-y}{x+y\cdot x/y}=\frac{x^2-y^2}{2xy}=\frac{18}{xy}$; en el punto M dado, $\operatorname{tg}\omega=\frac{18}{10\cdot 8}=\frac{9}{40}=0{,}225$ $\quad\omega=\operatorname{arctg}0{,}225$.

4) Hallar el ángulo formado por la cardioide $r=a(1-\cos\varphi)$ y el radio vector en el punto $M\left(\frac{3}{2}a,\ \frac{2\pi}{3}\right)$.

Resolución. $\dot r=a\operatorname{sen}\varphi$, $\quad\operatorname{tg}\omega=\frac{r}{\dot r}=\frac{a(1-\cos\varphi)}{a\operatorname{sen}\varphi}=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. En el punto M: $\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $\omega=\frac{\pi}{3}$.

5) Hallar el ángulo formado por la parábola $y^2=8x$ y el radio vector en el punto $M(2, 4)$.

6) Hallar el ángulo entre la espiral de Arquímedes $r=a\varphi$ y el radio vector de cualquier punto de la espiral.

7) Hallar el ángulo entre la circunferencia $r=\cos\varphi$ y el radio vector, en cualquiera de sus puntos.

8) Hallar el ángulo entre la circunferencia $(x-7)^2+(y-5)^2=$ $=2$ y el radio vector del punto $M(6, 6)$.

9) Hallar el ángulo formado por la hipérbola $xy=6$ y el radio vector del punto $M(2, 3)$.

10) Hallar el ángulo entre la cardioide $r=a(1+\cos\varphi)$ y el radio vector del punto $M\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$.

11) Hallar el ángulo entre la espiral $r=ae^{m\varphi}$ y el radio vector de cualquier punto de la espiral.

12. Hallar el ángulo entre la elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ y el radio vector en el punto $M(6, 4, 8)$.

6. Derivadas de órdenes superiores. Se llama *derivada de segundo orden* (*segunda derivada*) de la función $y=f(x)$ a la derivada de su derivada. La segunda derivada se designa así: y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$, o bien $f''(x)$.

Si $s=f(t)$ es la ley del movimiento rectilíneo de un punto, la segunda derivada del espacio recorrido con respecto al tiempo $\frac{d^2s}{dt^2}$ es la aceleración de este movimiento.

Análogamente, la *derivada de tercer orden* de la función $y=f(x)$ es la derivada de la derivada de segundo orden $y'''=(y'')'$.

En general, se denomina *derivada de n-ésimo orden de la función* $y=f(x)$ a la derivada de la derivada de orden $n-1$: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$. La n-ésima derivada se designa por $y^{(n)}$, por $\frac{d^ny}{dx^n}$, o bien por $f^{(n)}(x)$.

Las derivadas de orden superior (segunda, tercera, etc.) se calculan por la derivación sucesiva de la función dada.

Si una función está definida por ecuaciones paramétricas:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

las derivadas y'_x, y''_{xx}, ... se calculan por las fórmulas

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ etc.}$$

La segunda derivada se puede calcular también por la fórmula

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

931. $y=x^5+2x^4-3x^3-x^2-\frac{1}{2}x+7$. Hallar y', y'', y''',...

Resolución. Tenemos

$$y'=5x^4+8x^3-9x^2-2x-\frac{1}{2},$$
$$y''=20x^3+24x^2-18x-2,$$
$$y'''=60x^2+48x-18,$$
$$y^{IV}=120x+48,$$
$$y^{V}=120,$$
$$y^{VI}=y^{VII}=\ldots=0.$$

932. $y = \ln x$. Hallar $y^{(n)}$.

Resolución. Tenemos:

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1},$$
$$y'' = -1 \cdot x^{-2},$$
$$y''' = 1 \cdot 2x^{-3},$$
$$y^{IV} = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)(-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

933. $y = 2^x$. Hallar $y^{(n)}$.

Resolución. Tenemos $y' = 2^x \cdot \ln 2$, $y'' = 2^x \cdot \ln^2 2$, $y''' = 2^x \cdot \ln^3 2$, ..., $y^{(n)} = 2^x \ln^n 2$.

934. $y = \operatorname{sen} x$. Hallar $y^{(n)}$.

Resolución. Tenemos

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

935. Hallar $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ si $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

Resolución. Tenemos

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(a \operatorname{sen}^3 t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{3a \operatorname{sen}^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \operatorname{sen} t} = -\operatorname{tg} t;$$
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a \cos^2 t \operatorname{sen} t} = \frac{1}{3a \operatorname{sen} t \cos^4 t}.$$

Hallar las derivadas de segundo orden:

936. $y = -\frac{22}{x+5}$. **937.** $y = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 3)$.

938. $y = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \operatorname{arc\,sen} x$.

939. $y = -\frac{1}{9} x \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{27} \cos 3x$.

940. $y = x \ln (x + \sqrt{x^2+a^2}) - \sqrt{x^2+a^2}$.

941. $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$ **942.** $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - t^2}. \end{cases}$

943. Mostrar que la función $y = \operatorname{sen} \ln x + \cos \ln x$ satisface la ecuación $x^2y'' + xy' + y = 0$.

944. Mostrar que la función $y = x + \operatorname{sen} 2x$ satisface la ecuación $y'' + 4y = 4x$.

945. Para el movimiento rectilíneo de un punto el espacio recorrido en función del tiempo está definido por la ecuación $s = \sqrt{t}$. Hallar la aceleración del punto al final del cuarto segundo.

Hallar las terceras derivadas:

946. $y = \dfrac{x}{6(x+1)}$. **947.** $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$.

948. $y = (2x+3)^3\sqrt{2x+3}$. **949.** $y = \operatorname{sh}^2 x$.

Indicación: $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Hallar las derivados de n-ésimo orden:

950. $y = x^n\sqrt{x}$. **951.** $y \dfrac{1}{2x+1}$.

952. $y = 5 - 3\cos^2 x$. **953.** $y = 2^x + 2^{-x}$.

954. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. **955.** $y = e^{kx}$.

956. $y = \cos x$. **957.** $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = 1/t. \end{cases}$

958. $\begin{cases} x = at + b, \\ y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma. \end{cases}$

959. Mostrar que la función $y = e^x + 2e^{2x}$ satisface la ecuación $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

960. Mostrar que la función $y = x^3$ satisface la ecuación $y^{\mathrm{V}} + y^{\mathrm{IV}} + y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$.

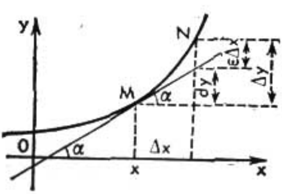

Fig. 28

6. Diferenciales de primer orden y de órdenes superiores. Se llama *diferencial* (*de primer orden*) de la función $y = f(x)$ a la parte principal de su incremento, que es lineal con respecto al incremento del argumento. Se denomina diferencial del argumento al incremento del argumento: $dx = \Delta x$.

La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial del argumento:

$$dy = y'dx.$$

La diferencial equivale geométricamente al incremento de la ordenada de la recta tangente al gráfico de la función en el punto $M(x;\, y)$ (fig. 28).

Propiedades principales de la diferencial

1ª. $dC = 0$, donde $C = \text{const.}$

2ª. $d(Cu) = C\,du$.

3ª. $d(u \pm v) = du \pm dv$.

4ª. $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

5ª. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}\ (v\neq 0)$.

6ª. $df(u)=f'(u)\,du$.

Si el valor absoluto del incremento Δx del argumento es pequeño, entonces

$$\Delta y\approx dy$$

y

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x.$$

De este modo la diferencial de una función puede emplearse para cálculos aproximados.

Se denomina *diferencial de segundo orden* de la función $y=f(x)$ a la diferencial de la diferencial de primer orden: $d^2y=d(dy)$.

Análogamente se define la diferencial de tercer orden: $d^3y=d(d^2y)$.

En general, $d^ny=d(d^{n-1}y)$.

Si $y=f(x)$ y x es una variable independiente, entonces las diferenciales de órdenes superiores se calculan por las fórmulas:

$$d^2y=y''(dx)^2,\ d^3y=y'''(dx)^3,\ \ldots,\ d^ny=y^{(n)}(dx)^n.$$

961. Hallar la diferencial de la función $y=\operatorname{arctg} x$.

Resolución. $dy=(\operatorname{arctg} x)'\cdot dx=\frac{dx}{1+x^2}$.

962. Hallar la diferencial de la función $s=e^{t^3}$.

Resolución. $ds=e^{t^3}\cdot 3t^2\,dt$.

963. Hallar las diferenciales de primer, segundo y tercer orden de la función $y=(2x-3)^3$.

Resolución. Tenemos

$$dy=3(2x-3)^2\cdot 2dx=6(2x-3)^2\,dx,$$
$$d^2y=12(2x-3)\cdot 2dx^2=24(2x-3)\,dx^2,$$
$$d^3y=24\cdot 2dx^3=48dx^3.$$

964. Hallar las diferenciales de primer y segundo orden de la función $v=e^{2t}$.

Resolución. $dv=2e^{2t}\,dt$, $d^2v=4e^{2t}\cdot dt^2$.

965. Comparar el incremento y la diferencial de la función $y=2x^3+5x^2$.

Resolución. Hallamos

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^3+5(x+\Delta x)^2-2x^3-5x^2=$$
$$=(6x^2+10x)\,\Delta x+(6x+5)\,\Delta x^2+2\Delta x^3,$$
$$dy=(6x^2+10x)\,dx.$$

La diferencia entre el incremento Δy y la diferencial dy es un infinitésimo de orden superior a Δx e igual a $(6x+5)\,\Delta x^2+2\Delta x^3$.

966. Calcular el valor aproximado de arcsen 0,51.

Resolución. Examinamos la función $y=\operatorname{arcsen} x$. Haciendo $x=0{,}5$, $\Delta x=0{,}01$ y aplicando la fórmula $\operatorname{arcsen}(x+\Delta x)\approx\operatorname{arcsen} x+(\operatorname{arcsen} x)'\cdot\Delta x$ obtenemos

$$\operatorname{arcsen} 0{,}51\approx\operatorname{arcsen} 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\cdot 0{,}01=\frac{\pi}{6}+0{,}011=0{,}513.$$

967. Calcular el valor aproximado del área de un círculo cuyo radio sea igual a 3,02 m.

Resolución. Utilicemos la fórmula $S = \pi R^2$. Haciendo $R = 3$, $\Delta R = 0{,}02$, tenemos

$$\Delta S \approx dS = 2\pi R \cdot \Delta R = 2\pi \cdot 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}12\pi.$$

Por consiguiente, el valor aproximado del área del círculo es de $9\pi + 0{,}12\pi = 9{,}12\pi \approx 28{,}66$ (m²).

Hallar las diferenciales de las funciones:

968. $y = \frac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{7}$.

969. $x = \frac{1}{12} \ln \frac{x-6}{x+6}$.

970. $y = 2 \ln \operatorname{ch}(x/2)$.

971. $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$.

972. $y = x(\ln x - 1)$. Hallar dy, d^2y, d^3y.

973. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$. Hallar d^2y.

974. Comparar el incremento y la diferencial de la función $y = 1/x$.

975. Calcular Δy y dy para la función $y = x^2 - 2x$ si $x = 3$ y $\Delta x = 0{,}01$.

976. Hallar el valor aproximado de $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

977. Hallar el valor aproximado del volumen de una esfera de 2,01 m de radío.

978. Hallar el valor aproximado de $\operatorname{tg} 46°$.

979. Hallar el valor aproximado de $\ln \operatorname{tg} 47°15'$.

980. Hallar el valor aproximado de x a partir de la ecuación $13 \operatorname{sen} x - 15 \cos x = 0$.

981. Hallar el valor aproximado de $\sqrt[4]{15{,}8}$.

§ 2. Investigación de funciones

1. Teoremas de Rolle, Lagrange, Cauchy y fórmula de Taylor.

Teorema de Rolle. Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ derivable en el intervalo $]a, b[$ y $f(a) = f(b)$, entonces en el intervalo $]a, b[$ hay al menos un valor de $x = \xi$ para el cual $f'(\xi) = 0$.

Si, en particular, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, el teorema de Rolle significa que entre dos raíces de la función hay al menos una raíz de su derivada.

Teorema de Lagrange (sobre el incremento finito). Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y derivable en el intervalo $]a, b[$, entonces en este intervalo hay al menos un valor de $x = \xi$ para el cual se cumple la igualdad

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

Estos teoremas tienen la interpretación geométrica siguiente: sobre el arco AB de la curva continua $y = f(x)$ que tiene en cada punto interior cierta tangente (no paralela al eje Oy) hay al menos un punto interior en el cual la tangente es paralela a la cuerda AB. (Para el teorema de Rolle tanto la cuerda AB como la tangente son paralelas al eje Ox.)

Teorema de Cauchy. Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son continuas sobre el segmento $[a, b]$ y derivables en el intervalo $]a, b[$, siendo $\varphi'(x) \neq 0$, entonces en *este intervalo hay al menos un valor de $x = \xi$ para el cual*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

donde $a < \xi < b$.

Fórmula de Taylor. *La función $f(x)$ derivable $n+1$ veces en cierto intervalo que contiene el punto a puede representarse en forma de la suma de un polinomio de n-ésimo grado y del término residual R_n:*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n,$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

donde $a \gtrless \xi \gtrless x$, o bien, $\xi = a + \theta(x-a)$, siendo $0 < \theta < 1$. Cuando $a = 0$, se obtiene la *fórmula de Maclaurin*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n,$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Citamos los desarrollos de algunas funciones por la fórmula de Maclaurin:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n;$$

$$R_n=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\operatorname{sen} x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{x^{2m-1}(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}+R_{2m};$$

$$R_{2m}=(-1)^m\cos\theta x\cdot\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!};$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2m}(-1)^m}{(2m)!}+R_{2m+1};$$

$$R_{2m+1}=(-1)^{m+1}\cos\theta x\cdot\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!};$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+$$

$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n+R_n;$$

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$$

(siempre $0 < \theta < 1$).

982. ¿Se cumple el teorema de Rolle para la función $f(x) = x^2 - 6x + 100$, si $a = 1$, $b = 5$? ¿Con qué valor de ξ?

Resolución. Como la función $f(x)$ es continua y derivable para todos los valores de x y sus valores en los extremos del segmento $[1, 5]$ son iguales: $f(1) = f(5) = 95$, el teorema de Rolle se cumple sobre este segmento. Determinamos el valor de ξ a partir de la ecuación $f'(x) = 2x - 6 = 0$, o sea, $\xi = 3$.

983. ¿Se cumple el teorema de Rolle para la función $f(x) = \sqrt[3]{8x-x^2}$ si $a=0$, $b=8$? ¿Con qué valor de ξ?

Resolución. La función $f(x) = \sqrt[3]{8x-x^2}$ es continua para todos los valores de x y tiene la derivada $f'(x) = (8-2x)/(3\sqrt[3]{(8x-x^2)^2})$ cuando $x \neq 0$, $x \neq 8$, o sea, es derivable en el intervalo $]0, 8[$. Además, $f(0) = f(8) = 0$. De este modo, el teorema de Rolle se cumple sobre el segmento $[0, 8]$; en efecto, $f'(x) = 0$ para $x = \xi = 4$.

984. Se da la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$. Sean $a=0$, $b=16$. Entonces $f(0) = f(16) = 4$. Sin embargo, la derivada $f'(x) = 2/(3\sqrt[3]{x-8})$ no se anula en ningún punto del intervalo $]0, 16[$. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

Resolución. No, no lo contradice, ya que en el punto $x = 8$ del intervalo $]0, 16[$ la derivada no existe y las condiciones del teorema del Rolle no se observan.

985. Mostrar que la derivada del polinomio $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ tiene una raíz real en el intervalo $]-1, 1[$.

Resolución. Determinemos las raíces del polinomio dado: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, o bien $(x-1)^2(x+1) = 0$, o sea $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Puesto que $f(-1) = f(1) = 0$, entonces, según el teorema de Rolle $f'(x)$ tiene una raíz en el intervalo $]-1, 1[$. Determinamos las raíces de la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$, o sea, $x_1 = -1/3$, $x_2 = 1$. De este modo, entre las raíces de la función -1 y 1 hay una raíz de la derivada, igual a $-1/3$.

986. Sobre el arco AB de la curva $y = 2x - x^2$ hallar un punto M en el cual la tangente sea paralela a la cuerda AB si $A\,(1;\ 1;)$ y $B\,(3;\ -3)$.

Resolución. La función $y = 2x - x^2$ es continua y derivable para todos los valores de x. Según el teorema de Lagrange entre dos valores $a = 1$ y $b = 3$ existe un valor de $x = \xi$ que satisface la igualdad $y(b) - y(a) = (b-a)\,y'(\xi)$, donde $y' = 2 - 2x$. Sustituyendo los valores respectivos, obtendremos

$$y(3) - y(1) = (3-1)\,y'(\xi);\ (2\cdot 3 - 3^2) - (2\cdot 1 - 1^2) = (3-1)\cdot(2-2\xi);\ -4 = 4(1-\xi).$$

De aquí $\xi = 2$, $y(2) = 0$. De este modo, el punto M tiene las coordenadas $(2;\ 0)$.

987. Sobre el arco AB de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$ hallar un punto M en el cual la tangente sea paralela a la cuerda AB, si a los puntos A y B corresponden los valores de $t = 1$ y $t = 3$.

Resolución. La pendiente de la cuerda AB es igual a $\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)}$ y la pendiente de la tangente en el punto M (cuando $t=\xi$) es igual a $\frac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}$, donde $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2$.

Para determinar ξ por el teorema de Cauchy obtenemos la ecuación

$$\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)} = \frac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}, \quad \text{o bien} \quad \frac{27-1}{9-1} = \frac{3\xi^2}{2\xi}, \quad \text{o bien} \quad \frac{13}{4} = \frac{3}{2}\xi,$$

o sea, $\xi = 13/6$. El valor hallado de ξ satisface la desigualdad $1 < \xi < 3$.

Sustituyendo el valor de $t=\xi$ en la ecuación paramétrica de la curva, obtenemos $x=169/36$, $y=2197/216$. De suerte que el punto buscado es M (169/36; 2197/216).

988. Representar la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ en forma de un polinomio de quinto grado con respecto al binomio $x-1$.

Resolución. Calculamos los valores de la función $f(x)=x^{1/3}$ y sus derivadas hasta el quinto orden inclusive, para $a=1$:

$$f(1)=1,\quad f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3},\quad f'(1)=\frac{1}{3};\quad f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3},\quad f''(1)=-\frac{2}{9};$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-8/3},\quad f'''(1)=\frac{10}{27};\quad f^{IV}(x)=-\frac{80}{81}x^{-11/3};\quad f^{IV}(1)=-\frac{80}{81};$$

$$f^{V}(x)=\frac{880}{243}x^{-14/3},\quad f^{V}(1)=\frac{880}{243}.$$

Por consiguiente, según la fórmula de Taylor obtenemos

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2+$$
$$+\frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3-\frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4+\frac{880}{243\cdot 5!}(x-5)^5+R_5,$$

donde

$$R_5=\frac{f^{VI}(\xi)}{6!}(x-1)^6=-\frac{12320}{729\cdot 6!}\cdot\xi^{-17/3}(x-1)^6,\quad 1<\xi<x.$$

989. Representar la función $f(x)=a^x$ $(a>0)$ en forma de un polinomio de tercer grado con respecto a x.

Resolución. Tenemos

$$\begin{aligned} f(x)&=a^x, & f(0)&=1,\\ f'(x)&=a^x\ln a, & f'(0)&=\ln a,\\ f''(x)&=a^x\ln^2 a, & f''(0)&=\ln^2 a,\\ f'''(x)&=a^x\ln^3 a, & f'''(0)&=\ln^3 a,\\ f^{IV}(x)&=a^x\ln^4 a, & f^{IV}(\theta x)&=\ln^4 a\cdot a^{\theta x}.\end{aligned}$$

Por la fórmula de Maclaurin obtenemos

$$a^x=1+x\ln a+\frac{x^2\ln^2 a}{2!}+\frac{x^3\ln^3 a}{3!}+R_3,$$

donde $R_3=\frac{x^4\ln^4 a}{4!}a^{\theta x}$, $0<\theta<1$.

990. Calcular con una exactitud de hasta 10^{-3} el valor aproximado de $\sqrt[3]{29}$.

Resolución. Representamos la raíz dada así: $\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=3\times\times\left(1+\frac{2}{27}\right)^{1/3}$.

Utilizamos el desarrollo binomial

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-n+1]}{n!}x^n+R_n.$$

De aquí obtenemos la igualdad aproximada

$$(1+x)^m \cong 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

cuyo error

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$$

puede hacerse tan pequeño como se quiera cuando $|x|<1$ y n lo suficientemente grande.

Suponiendo $x=2/27$ y $m=1/3$, obtendremos

$$\sqrt[3]{29}\cong 3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}-\frac{2^5\cdot 5}{81^4}+\ldots+R_n\right).$$

Evaluando los valores de los errores sucesivos de cálculo de $3|R_n|$, encontramos

$$3|R_1|<\frac{3\cdot 2\cdot 2}{81^2}<0{,}002,\quad 3|R_2|<\frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}<0{,}0003.$$

Por lo tanto, para calcular con la exactitud prefijada es suficiente tomar los tres términos que preceden al resto R_2, o sea, $\sqrt[3]{29}\cong 3(1+0{,}024-0{,}0006)=$ $=3{,}072$.

991. Calcular $\sqrt{e}$ con una exactitud de hasta 0,0001.

Resolución. Utilizamos la fórmula de Maclaurin para la función e^x:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n,$$

donde $R_n=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}n^{n+1}$, $0<\theta<1$. Haciendo $x=1/2$, obtenemos

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{1}{2n^n\cdot n!}+R_n,$$

donde $R_n=\frac{e^{\theta/2}}{2^{n+1}(n+1)!}$, $0<\theta<1$.

Como $0<\theta<1$, $2<e<3$, entonces $R_n<\frac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!}$. Pero $e^{1/2}<2$. Por eso $R_n<\frac{1}{2^n(n+1)!}$. Se necesita determinar n de modo que se cumpla la desigualdad $R_n<0{,}0001$.

$$\text{Si } n=3,\quad \text{entonces } R_3<\frac{1}{8\cdot 24};\quad R_3<\frac{1}{192},$$

$$\text{si } n=4,\quad \text{entonces } R_4<\frac{1}{16\cdot 120};\quad R_4<\frac{1}{1920},$$

$$\text{si } n=5,\quad \text{entonces } R_5<\frac{1}{32\cdot 720};\quad R_5<0{,}0001.$$

Para determinar $\sqrt{e}$ con una exactitud de hasta 0,0001 obtenemos la igualdad aproximada

$$\sqrt{e}\cong 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\frac{1}{2^4\cdot 4!}+\frac{1!}{2^5\cdot 5!}.$$

Efectuamos la adición, convirtiendo todos los sumandos en fracciones decimales con un número sobrante (de reserva):

$$\begin{array}{r} 1,50000 \\ 0,12500 \\ 0,02083 \\ 0,00260 \\ \underline{0,00026} \\ 1,64869. \end{array}$$

De suerte que $\sqrt{e} \cong 1,6487$.

992. Se da la función $f(x)$ que es continua junto con sus derivadas hasta el orden de $(n-1)$ inclusive, sobre el segmento $[a, b]$ y tiene la derivada de n-ésimo orden en el intervalo $]a, b[$, con ello para esta función se cumplen las igualdades $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \ldots f(x_{n-1}) = f(b)$, donde $a < x_1 < x_2 < \ldots < \ldots < x_{n-1} < b$. Demostrar que en el intervalo $]a, b[$ hay al menos un punto ξ para el cual $f^{(n)}(\xi) = 0$.

993. Examinar el caso particular del problema precedente, si $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, $a = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $b = 4$. Determinar ξ.

994. Representar en forma de un polinomio de tercer grado con respecto a $x - x_0$ $(x_0 \neq 0)$ la función $1/x$.

995. ¿En qué punto del arco AB de la curva $y = x^3 - 3x$, la tangente es paralela a la cuerda AB si $A(0;\ 0)$, $B(3;\ 18)$?

Calcular con una exactitud de hasta 10^3:

996. $\cos 41°$. **997.** $\sqrt[3]{121}$.

998. $\sqrt[3]{e}$. **999.** $\sqrt[7]{129}$.

1000. sen $36°$.

2. La regla de L'Hospital para resolver las indeterminaciones. Sean las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ derivables en un entorno ε del punto x_0 y $\varphi'(x) \neq 0$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ ó bien $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, o sea, el cociente en el punto $x = x_0$ es una indeterminación de las formas $0/0$ ó ∞/∞, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

a condición de que exista el límite de la razón de las derivadas.

Si el cociente $f'(x)/\varphi'(x)$ en el punto $x = x_0$ es también una indeterminación de las formas $0/0$ ó ∞/∞ y las derivadas $f'(x)$ y $\varphi'(x)$ satisfacen las condiciones respectivas, hay que pasar a la razón de las derivadas segundas, etc.

En el caso de una indeterminación de forma $0 \cdot \infty$ ó $\infty - \infty$ hay que transformar algebraicamente la función dada de modo que se reduzca a la indeterminación de la forma $0/0$ ó ∞/∞ y luego aplicar la regla de L'Hospital.

En el caso de una indeterminación de la forma 0^0 ó ∞^0 ó 1^∞ conviene determinar por logaritmos la función dada y hallar el límite de su logaritmo.

1001. Hallar $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Resolución. El numerador y el denominador tienden a cero cuando $x \to 1$ y por eso tenemos una indeterminación de la forma $0/0$. Utilizamos la regla de L'Hospital, o sea, examinamos el límite de la razón de las derivadas de las funciones dadas:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1/x}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

1002. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma 0/0. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{6x}=\frac{1}{6},$$

puesto que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$. Aquí la regla de L'Hospital ha sido empleada dos veces.

1003. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$, si n es un número entero positivo.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma ∞/∞. Apliquemos la regla de L'Hospital n veces:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=$$

$$=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{e^x}=0.$$

1004. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}$.

Resolución. En este caso también tiene lugar una indeterminación de la forma ∞/∞. Hallamos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1/2}{(1/2)\,e^{x/2}}=0.$$

1005. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot\ln x)$.

Resolución. Aquí tenemos una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$. Representamos el producto de las funciones en forma del cociente y luego, una vez obtenida una indeterminación de forma ∞/∞, aplicamos la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}(x^2\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

1006. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma $\infty-\infty$. Para hallar el límite de la función reducimos las fracciones a un común denominador y luego, una vez obtenida una indeterminación de forma 0/0, aplicamos la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

1007. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)^x$.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma 0^0. Designamos la función dada por y, o sea, $y=(\operatorname{sen} x)^x$ y le aplicamos logaritmos:

$$\ln y = x\ln\cdot\operatorname{sen} x=\frac{\ln\operatorname{sen} x}{1/x}.$$

Calculamos el límite del logaritmo de la función dada aplicando la regla de L'Hospital (aquí tenemos una indeterminación de la forma ∞/∞):

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{sen} x}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x/\operatorname{sen} x}{-1/x^2}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\operatorname{sen} x}=-\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)=0.$$

Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 0} y=e^0=1$.

1008. Hallar $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma ∞^0. Tomamos $(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}=y$, aplicando logaritmos:

$$\ln y=2\cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x=\frac{2\ln\operatorname{tg} x}{1/\cos x}.$$

Aplicando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to\pi/2}\ln y=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\sec x}=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec^2 x/\operatorname{tg} x}{\sec x\cdot\operatorname{tg} x}=$$

$$=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x}=2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x\cdot\operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg} x\cdot\sec^2 x}=\lim_{x\to\pi/2}\cos x=0,$$

o sea, $\lim\limits_{x\to\pi/2} y=e^0=1$.

1009. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

Resolución. Esto es una indeterminación de la forma 1^∞. Aplicando logaritmos y empleando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1/\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{-1/(x\ln^2 x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\ln^2 x}{x+1}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1+1/x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{(2\ln x)/x}{-1/x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=2\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=0.$$

De este modo, $\lim\limits_{x\to 0} y=e^0=1$.

Hallar los límites de las funciones siguientes:

Indeterminación de la forma 0/0.

1010. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$.

1011. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

1012. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi-2\,\mathrm{arctg}\,x}{e^{3/x}-1}$.

1013. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}$.

1014. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x}-3x-1}{\mathrm{sen}^2\,5x}$.

1015. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,3x-3xe^x+3x^2}{\mathrm{arctg}\,x-\mathrm{sen}\,x-x^3/6}$.

Indeterminación de la forma ∞/∞.

1016. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

1017. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n}\ (n>0)$.

1018. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{1+2\ln\mathrm{sen}\,x}$.

1019. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\mathrm{tg}\,(\pi x/2)}{\ln(1-x)}$.

1020. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\mathrm{ctg}\,\pi x}$.

Indeterminación de la forma $0\cdot\infty$.

1021. $\lim\limits_{x\to 0} (x\cdot\mathrm{ctg}\,\pi x)$. **1022.** $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{arcsen}\,x\cdot\mathrm{ctg}\,x)$.

1023. $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\cdot\mathrm{ctg}\,x$.

Indeterminación de forma $\infty-\infty$.

1024. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

1025. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{p}{1-x^p}-\frac{q}{1-x^q}\right)$.

1026. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2\,x\right)$.

Indeterminaciones de las formas 0^0, ∞^0, 1^∞.

1027. $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\pi-2x)^{\cos x}$.

1028. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$.

1029. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+2^x)^{1/x}$.

1030. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}\right)^{1/x^2}$.

3. Crecimiento y decrecimiento de una función. Extremo de una función. Una función $f(x)$ se llama *creciente en un punto* x_0 si para un $h>0$ suficientemente pequeño se cumple la condición (fig. 29)

$$f(x_0-h)<f(x_0)<f(x_0+h).$$

Una función $f(x)$ se dice *decreciente en un punto* x_0 si para un $h > 0$ suficientemente pequeño se cumple la condición (fig. 30)

$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h).$$

Una función $f(x)$ se denomina *creciente en un intervalo* $]a, b[$ si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 del intervalo indicado que satisfagan la desigualdad $x_1 < x_2$, se cumple la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$.

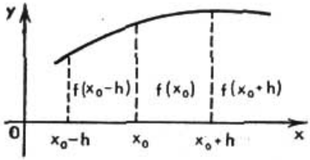

Fig. 29

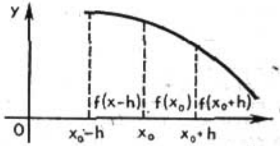

Fig. 30

Una función $f(x)$ se llama *decreciente en un intervalo* $]a, b[$ si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 del intervalo indicado que satisfacen la desigualdad $x_1 < x_2$, se cumple la desigualdad $f(x_1) > f(x_2)$.

Criterios de crecimiento y decrecimiento de una función

1) *Si* $f'(x_0) > 0$, *la función* $f(x)$ *es creciente en el punto* x_0.
2) *Si* $f'(x_0) < 0$, *la función* $f(x)$ *es decreciente en el punto* x_0.

El valor de $f(x_0)$ se llama *máximo* de la función $f(x)$ si para un $h > 0$ suficientemente pequeño se cumple la condición

$$f(x_0 - h) < f(x_0) \text{ y } f(x_0 + h) < f(x_0).$$

En este caso el punto x_0 se llama *punto de máximo* de la función $f(x)$ (fig. 31).

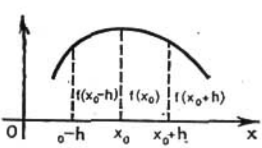

Fig. 31

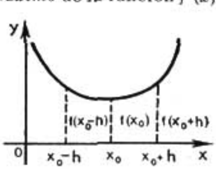

Fig. 32

El valor de $f(x_0)$ se denomina *mínimo* de la función $f(x)$ si para un $h > 0$ suficientemente pequeño se cumple la condición

$$f(x_0 - h) > f(x_0) \text{ y } f(x_0 + h) > f(x_0).$$

En este caso el punto x_0 se denomina *punto de mínimo* de la función $f(x)$ (fig. 32).

El máximo o el mínimo de la función se llama *extremo* de la misma. El punto de máximo o de mínimo de la función se llama *punto* de su *extremo*.

CONDICIÓN NECESARIA DEL EXTREMO. *Si la función $f(x)$ tiene un extremo en el punto x_0, entonces la derivada $f'(x_0)$ se anula o no existe.*

El punto x_0 en el cual $f'(x_0) = 0$ se llama *punto estacionario*. Los puntos en los cuales $f'(x) = 0$ ó $f'(x)$ no existe, se denominan *puntos críticos*. No todo punto crítico es un punto de extremo.

Condiciones suficientes del extremo.

Regla 1. *Si x_0 es un punto crítico de una función $f(x)$ y para un $h > 0$ arbitrario suficientemente pequeño se cumplen las desigualdades $f'(x_0 - h) > 0$, $f'(x_0 + h) < 0$, entonces la función $f(x)$ en el punto x_0 tiene un máximo, pero si $f'(x_0 - h) < 0$, $f'(x_0 + h) > 0$, entonces la función $f(x)$ en el punto x_0 tiene un mínimo.*

Si los signos $f'(x_0 - h)$ y $f'(x_0 + h)$ son iguales, la función $f(x)$ en el punto x_0 no tiene extremo, a saber, el máximo.

Regla 2. *Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x) \neq 0$, la función $f(x)$ en el punto x_0 tiene un extremo, precisamente, un máximo, si $f''(x_0) < 0$, y un mínimo, si $f''(x_0) > 0$.*

Regla 3. *Sea $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, . . ., $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. En este caso la función $f(x)$ tiene un extremo en el punto x_0, si n es un número par, precisamente, un máximo cuando $f^{(n)}(x_0) < 0$ y un mínimo cuando $f^{(n)}(x_0) > 0$. Pero si n es un número impar, entonces la función $f(x)$ en el punto x_0 no tiene extremo.*

Para hallar el valor máximo (mínimo) de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ es necesario entre los valores de la función en las fronteras del segmento y en los puntos críticos pertenecientes a este segmento elegir el valor máximo (mínimo).

1031. Se dan los puntos $x = 3$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 0{,}5$. ¿En qué puntos entre los citados la función $y = x^3 - 3x^2$ crece? En cuáles decrece?

Resolución. Determinamos la derivada $y' = 3x^2 - 6x$. Tenemos:
si $x = 3$, entonces $y' = 9 > 0$; la función crece;
si $x = 1$, entonces $y' = -3 < 0$; la función decrece;
si $x = -1$, entonces $y' = 9 > 0$; la función crece;
si $x = 0{,}5$, entonces $y' = -2{,}25 < 0$; la función decrece.

1032. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = x(1 + \sqrt{x})$.

Resolución. Encontramos $y' = 1 + (3/2)\, x^{1/2}$. Como la derivada es positiva en el intervalo $[0, +\infty[$, la función crece en todo su campo de definición.

1033. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = x - 2 \operatorname{sen} x$ si $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Resolución. Hallamos la derivada: $y' = 1 - 2 \cos x$. Es evidente que $y' > 0$ en el intervalo $]\pi/3, 5\pi/3[$ e $y' < 0$ en los intervalos $]0, \pi/3[$ y $]5\pi/3, 2\pi[$. Así, pues, en el intervalo $]\pi/3, 5\pi/3[$ la función dada crece y en los intervalos $]0, \pi/3[$ y $]5\pi/3, 2\pi[$ decrece.

1034. Investigar el extremo de la función $y = (x - 5)\, e^x$.

Resolución. Hallamos la derivada $y' = (x - 4)\, e^x$. La igualamos a cero y encontramos el punto estacionario:

$$e^x (x - 4) = 0, \; x = 4; \; y'(4 - h) = -he^{4-h} < 0, \; y'(4 + h) = he^{4+h} > 0.$$

Según la regla 1 llegamos a la conclusión de que en el punto $x = 4$ la función tiene el mínimo $y_{\min} = -e^4$.

1035. Investigar los extremos de la función $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Resolución. La función está definida para $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Hallamos la derivada: $y' = (1-2x^2)/\sqrt{1-x^2}$; $y' = 0$ para $1-2x^2 = 0$; de aquí, $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$ (puntos estacionarios); $y' = \infty$ para $x = \pm 1$, o sea, en las fronteras del campo de definición de la función.

Hallamos la segunda derivada: $y'' = x(2x^2-3)/(1-x^2)^{3/2}$. Calculamos los valores de la segunda derivada en los puntos estacionarios. Cuando $x = 1/\sqrt{2}$, tenemos

$$y''(1/\sqrt{2}) = \frac{1\cdot(1-3)}{\sqrt{2}\,(1-1/2)^{3/2}} < 0,$$

por consiguiente, de acuerdo con la regla 2 llegamos a la conclusión de que en el punto $x = 1/\sqrt{2}$ la función tiene el máximo $y_{\max} = (1/\sqrt{2})\sqrt{1/\sqrt{2}} = 1/2$. Cuando $x = -1/\sqrt{2}$, obtenemos

$$y''(-1/\sqrt{2}) = \frac{1\cdot(1-3)}{\sqrt{2}\,(1-1/2)^{3/2}} > 0,$$

o sea, en el punto $x = -1/\sqrt{2}$ la función tiene el mínimo $y_{\min} = -1/2$.

En los puntos críticos $x = \pm 1$ el extremo falta, ya que por definición, sólo los puntos interiores del campo de definición de la función pueden ser puntos extremos.

1036. Investigar los extremos de la función $y = (x-1)^4$.

Resolución. Hallamos la derivada: $y' = 4(x-1)^3$; $(x-1)^3 = 0$; $x = 1$ es un punto estacionario. La segunda derivada $y'' = 12(x-1)^2$ cuando $x = 1$ es igual a cero. La tercera derivada $y''' = 24(x-1)$ cuando $x = 1$ también se anula. La cuarta derivada $y^{\mathrm{IV}} = 24 > 0$. Por lo tanto, según la regla 3 llegamos a la conclusión de que en el punto $x = 1$ la función tiene el mínimo $y_{\min} = 0$.

1037. Investigar el extremo de la función $y = 1-(x-2)^{4/5}$.

Resolución. Hallamos $y' = -\frac{4}{5}(x-2)^{-1/5} = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}$. La derivada no se anula para ningún valor de x y no existe solamente cuando $x = 2$ (punto crítico).

Puesto que para un $h > 0$ suficientemente pequeño se cumplen las desigualdades $y'(2-h) > 0$ e $y'(2+h) < 0$, entonces según la regla 1 llegamos a la conclusión de que para $x = 2$ la función tiene el máximo $y_{\max} = 1$.

1038. Investigar los extremos de la función $y = (x-2)^{2/3}(2x+1)$.

Resolución. Determinamos $y' = \frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}}$. Los puntos críticos $x = 1$ (la derivada es igual a cero) y $x = 2$ (la derivada no existe). Para un $h > 0$ suficientemente pequeño se cumplen las desigualdades $y'(1-h) > 0$, $y'(1+h) < 0$; $y'(2-h) < 0$, $y'(2+h) > 0$. Por consiguiente, en el punto $x = 1$ la función tiene el máximo $y_{\max} = 3$ y en el punto $x = 2$, el mínimo $y_{\min} = 0$.

1039. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = 3x - x^3$ sobre el segmento $[-2, 3]$.

Resolución. Hallamos la derivada: $f'(x) = 3-3x^2$; $3-3x^2 = 0$, o sea, $x = \pm 1$ son los puntos estacionarios. Determinamos los valores de la función en estos puntos: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$. Calculamos los valores de la función dada en las fronteras del intervalo: $f(-2) = 2$, $f(3) = -18$. Entre los cuatro valores obtenidos escogemos el mayor y el menor.

De suerte que el mayor valor de la función sobre el segmento dado es igual a 2 y el menor, a -18.

1040. Hallar un cilindro tal, que tenga el volumen máximo para la superficie total dada S.

Resolución. Sea el radio de la base del cilindro igual a x y su altura igual a y. Entonces

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy, \quad \text{o sea,} \quad y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right).$$

Por consiguiente, el volumen del cilindro se expresará así:

$$V = V(x) = \pi x^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right) = \frac{S}{2}x - \pi x^3.$$

El problema se reduce a la investigación de la función $V(x)$ para el máximo de $x > 0$.

Hallemos la derivada $\frac{dV}{dx} = \frac{S}{2} - 3\pi x^2$ y la igualemos a cero, de donde $x = \sqrt{S/(6\pi)}$.

Hallemos la segunda derivada: $\frac{d^2V}{dx^2} = -6\pi x$. Como para $x = \sqrt{S/(6\pi)}$ se cumple la condición $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$, el volumen tiene el mayor valor, con ello

$$y = \frac{S - 2\pi \cdot S/(6\pi)}{2\pi\sqrt{S/(6\pi)}} = 2\sqrt{S/(6\pi)} = 2x$$

o sea, la sección axial del cilindro debe ser un cuadrado.

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

1041. $y = 2 - 3x + x^3$. **1042.** $y = (x^2 - 1)^{3/2}$.

1043. $y = xe^{-x}$ **1044.** $y = (2 - x)(x + 1)^2$.

Hallar los extremos de las funciones:

1045. $y = x^2\left(1 - x\sqrt{x}\right)$. **1046.** $y = x + \sqrt{3 - x}$.

1047. $y = \ln(x^2 + 1)$. **1048.** $y = \operatorname{ch}^2 x$.

1049. $y = \frac{x}{\ln x}$. **1050.** $y = xe^{-x/2}$.

1051. $y = (x - 1)^{6/7}$.

1052. $y = (2x - 1)\sqrt[3]{(x - 3)^2}$.

1053. $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$.

1054. $y = x - 2\operatorname{sen}^2 x$.

1055. $y = e^{1,5 \operatorname{sen} x}$.

1056. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $y = x^4 - 2x^2 + 3$ sobre el segmento $[-3, 2]$.

1057. Sobre el eje Oy hallar un punto a partir del cual el segmento $[AB]$ sea visto bajo el ángulo máximo si A (2; 0), B (8; 0).

1058. El punto B se encuentra a 60 km de una vía férrea. Viajando por el ferrocarril, la distancia del lugar A al punto C próximo al punto B es igual a 285 km. ¿A qué distancia del punto C se debe construir una estación para emplear el tiempo mínimo viajando entre los lugares A y B si la velocidad de movimiento por el ferrocarril es igual a 52 km/h y la velocidad de movimiento por la carretera es de 20 km/h?

1059. Hallar los lados de un rectángulo de área máxima que pueda ser inscrito en la elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$.

1060. Un alambre de longitud l está doblado de modo que forma un rectángulo. ¿Cuáles son las dimensiones de este rectángulo si su área es máxima?

1061. Hallar el volumen máximo de un cono cuya generatriz es igual a l.

1062. Hallar el volumen máximo de un cilindro cuya superficie total es igual a S.

1067. Un turista camina desde el punto A que se encuentra junto a una carretera al lugar B a 8 km de la carretera. La distancia entre A y B es igual a 17 km. ¿En qué punto el turista debe apartarse de la carretera para llegar al punto B gastando el tiempo mínimo si la velocidad de su movimiento por la carretera es de 5 km/h y a campo traviesa es de 3 km/h?

1064. Un canal cuyo ancho es de 27 m desemboca en ángulo recto en otro canal de 64 m de ancho. ¿Cual es la longitud máxima de troncos que puedan ser transportados por este sistema de canales?

1065. ¿En qué altura por encima del centro de una mesa redonda de radio a se debe colocar la bombilla eléctrica para que la iluminación del borde de la mesa sea máxima?

Indicación: la intensidad de iluminación se expresa por la fórmula $I = (k \cdot \operatorname{sen} \varphi)/r^2$, donde φ es el ángulo de inclinación de los rayos; r, distintacia del manantial de luz al área que se alumbra; k, intensidad del manantial de luz.

Fig. 33

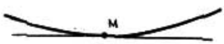

Fig. 34

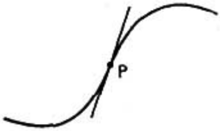

Fig. 35

4. Convexidad. Concavidad. Punto de inflexión. El gráfico de una función $y = f(x)$ se llama *convexo* en el intervalo $]a, b[$ si se encuentra debajo de la tangente trazada en todo punto de este intervalo (fig. 33).

El gráfico de una función $y = f(x)$ se dice cóncavo en el intervalo $]a, b[$ si se encuentra por encima de la tangente trazada en todo punto de este intervalo (fig. 34).

CONDICION SUFICIENTE DE LA CONVEXIDAD (CONCAVIDAD) DEL GRAFICO DE UNA FUNCION. *Si $f''(x) < 0$ en el intervalo $]a, b[$, el gráfico de la función es convexo en este intervalo; pero si $f''(x) > 0$, entonces en el intervalo $]a, b[$ el gráfico de la función es cóncavo.*

El punto $(x_0; f(x_0))$ del gráfico de una función que separa la parte convexa del gráfico de la parte cóncava se denomina *punto de inflexión* (fig. 35).

Si x_0 es la abscisa del punto de inflexión de la función $y = f(x)$, entonces la segunda derivada es igual a cero o no existe. Los puntos en los cuales $f''(x) = 0$ ó $f''(x)$ no existe se llaman *puntos críticos de segunda especie.*

Si x_0 es un punto crítico de segunda especie y para un $h > 0$ arbitrario tan pequeño como se quiera se cumplen las desigualdades $f''(x_0 - h) < 0$, $f''(x_0 + h) > 0$ (o bien las desigualdades $f''(x_0 - h) > 0$, $f''(x_0 + h) < 0$), entonces el punto de la curva $y = f(x)$ con la abscisa x_0 es de inflexión.

Sin embargo, si $f''(x_0 - h)$ y $f''(x_0 + h)$ tienen los mismos signos, entonces el punto de la curva $y = f(x)$ con la abscisa x_0 no es de inflexión.

1066. Hallar los intervalos de convexidad y de concavidad del gráfico de la función $y = x^5 + 5x - 6$.

Resolución. Tenemos $y' = 5x^4 + 5$, $y'' = 20x^3$. Si $x < 0$, entonces $y'' < 0$ y la curva es convexa, pero si $x > 0$, entonces $y'' > 0$ y la curva es cóncava. De suerte que la curva es convexa en el intervalo $]-\infty, 0[$ y cóncava en el intervalo $]0, +\infty[$.

1067. Hallar los extremos de la función $y = (x + 1)^2 (x - 2)$ y los puntos de inflexión de su gráfico.

Resolución. Hallamos la derivada primera: $y' = 3(x^2 - 1)$. Las raíces de la derivada primera son $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Determinamos la derivada segunda: $y'' = 6x$. Calculamos los valores de la derivada segunda en los puntos estacionarios: $y''(-1) = -6 < 0$, o sea, $y_{\max} = 0$; $y''(1) = 6 > 0$, o sea, $y_{\min} = -4$.

Buscamos el punto de inflexión, para lo cual igualamos a cero la segunda derivada: $6x = 0$, o sea, $x = 0$. A la izquierda del punto $x = 0$ tenemos $y''(0 - h) < 0$, o sea, la curva es convexa y a la derecha del punto $x = 0$ tenemos $y''(0 + h) > 0$, o sea, la curva es cóncava; por consiguiente, el punto con abscisa $x = 0$ es de inflexión; $y_{\text{p.infl}} = -2$.

1068. Hallar los puntos de inflexión de la curva $y = (x - 5)^{5/3} + 2$.

Resolución. Hallamos

$$y' = \frac{5}{3}(x-5)^{2/3}, \qquad y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}.$$

La segunda derivada no se anula para ningún valor de x y no existe en el punto $x = 5$. El valor $x = 5$ es la abscisa del punto de inflexión, ya que $y''(5 - h) < 0$, $y''(5 + h) > 0$. Por lo tanto, el punto $(5; 2)$ es de inflexión.

1069. Hallar los intervalos de convexidad y de concavidad de la curva $y = xe^x$.

1070. Hallar los puntos de inflexión de la curva $y = (x - 4)^5 + 4x + 4$.

1071. Hallar los puntos de inflexión de la curva $y = (x - 1)\sqrt[7]{(x - 1)^6}$.

1072. Hallar los puntos de inflexión de la curva $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

5. Asíntotas. Una recta L se llama *asíntota* a una curva $y = f(x)$ si la distancia de un punto $M(x; y)$ de la curva a la recta L tiende a cero cuando este punto se aleja indefinidamente por la curva a partir del origen de coordenadas (o sea cuando los puntos de una de las coordenadas, por lo menos, tiende a infinito).

La recta $x = a$ es *la asíntota vertical* de la curva $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ o bien $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

La recta $y = b$ es *la asíntota horizontal* de la curva $y = f(x)$ si existe el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ o bien $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

La recta $y = kx + b$ es *la asíntota oblicua* de la curva $y = f(x)$ si existen los límites

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx];$$

o bien,

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx].$$

1073. Hallar las asíntotas de la curva $y = \sqrt{x^3/(x-2)}$.

Resolución. La función está definida en los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]2, +\infty[$. Como $\lim\limits_{x \to 2+0} \sqrt{x^3/(x-2)} = +\infty$, la recta $x = 2$ es la asíntota vertical de la curva.

La curva no tiene asíntotas horizontales puesto que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3/(x-2)}$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^3/(x-2)}$ no son valores finitos.

Determinemos si existen asíntotas oblicuas. Hallamos

$$1)\ k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\left(1 + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 1.$$

De este modo, existe la asíntota oblicua derecha $y = x + 1$;

$$2)\ k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x/(x-2)}}{-1}$$

(hemos dividido el numerador y el denominador por el valor positivo $-x$), o sea,

$$k_2 = -\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x] = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{-x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= -\lim_{x \to -\infty} \frac{x(\sqrt{-x} - \sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}(\sqrt{-x} + \sqrt{2-x})} = -1.$$

De suerte que existe la asíntota oblicua izquierda $y = -x - 1$ (fig. 36).

1074. **Hallar las asíntotas de la curva $y = x + 2\,\mathrm{arctg}\,x$.**

Resolución. No es difícil ver que la curva no tiene asíntotas verticales ni horizontales. Buscamos las asíntotas oblicuas:

1) $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2\,\mathrm{arctg}\,x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{x}\right) = 1.$

$b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+2\,\mathrm{arctg}\,x - x) = 2\,(\pi/2) = \pi;$

$y = x+\pi$ es la asíntota oblicua derecha;

2) $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+2\,\mathrm{arctg}\,x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{x}\right) = 1.$

$b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+2\,\mathrm{arctg}\,x - x) = 2\cdot(-\pi/2) = -\pi;$

$y = x-\pi$ es la asíntota oblicua izquierda.

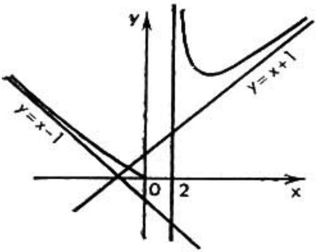

Fig. 36

1075. **Hallar las asíntotas de la curva $y = x^2e^{-x}$.**

Resolución. Es evidente que no existen las asíntotas verticales. Si $x\to\infty$, entonces $y\to 0$. Por consiguiente, el eje Ox es la asíntota horizontal de la curva dada. Determinemos si existe o no asíntota oblicua.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0.$$

De modo que existe sólo la asíntota horizontal $y=0$.

1076. **Hallar las asíntotas de la curva $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$.**

Resolución. Si $x\to-2$, entonces $y\to\infty$, o sea $x=-2$ es la asíntota vertical. Buscamos las asíntotas no verticales:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x\,(x+2)} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2x-3}{x+2} - x\right] = -4.$$

Resulta que la asíntota oblicua tiene la ecuación $y = x-4$.

Hallar las asíntotas de las curvas:

1077. $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$.

1078. $y=\frac{\ln^2 x}{x}-3x$. **1079.** $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$.

1080. $y=0{,}5x+\operatorname{arctg} x$. **1081.** $y=-x\operatorname{arctg} x$.

6. Construcción de los gráficos de funciones por los puntos característicos. Al construir el gráfico de una función $y=f(x)$ es útil revelar las particularidades características del mismo. Para esto es necesario:

1) hallar el campo de definición de la función;

2) investigar la función en cuanto a su paridad e imparidad;

3) hallar los puntos de intersección del gráfico de la función con los ejes de coordenadas;

4) investigar la función en cuanto a su continuidad; hallar los puntos de discontinuidad (si existen) y determinar el carácter de la discontinuidad; hallar las asíntotas de la curva $y=f(x)$;

5) hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función;

6) hallar los intervalos de convexidad y de concavidad y los puntos de inflexión de la curva.

1082. Construir el gráfico de la función $y=\frac{x^3+4}{x^2}$.

Resolución. 1) El campo de definición de la función es todo el eje Ox excluyendo el punto $x=0$, o sea, $D(y)=\,]-\infty,\,0[\,\cup\,]0,\,+\infty[$.

2) La función no es par o impar.

Hallamos los puntos en que el gráfico se interseca con el eje Ox; tenemos $\frac{x^3+4}{x^2}=0$; $x=-\sqrt[3]{4}$.

4) El punto de discontinuidad es $x=0$, además, $\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$; por lo tanto, $x=0$ (eje Oy) es la asíntota vertical del gráfico.

Hallamos las asíntotas oblicuas:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

La asíntota oblicua tiene la ecuación $y=x$.

5) Hallamos los extremos de la función y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Tenemos $y'=1-8/x^3=(x^3-8)/x^3$; $y'=0$ cuando $x=2$; $y'=\infty$ cuando $x=0$ (el punto de discontinuidad de la función).

Los puntos $x=0$ y $x=2$ dividen el eje numérico en los intervalos $]-\infty,\,0[$, $]0,\,2[$ y $]2,\,+\infty[$, con ello $y'>0$ en los intervalos $]-\infty,\,0[$ y $]2,\,+\infty[$ (la función crece) e $y'<0$ en el intervalo $]0,\,2[$ (la función decrece).

Luego hallamos $y''=24/x^4$; $y''(2)>0$; por lo tanto, $x=2$ es el punto del mínimo; $y_{\min}=3$.

6. Hallemos los intervalos de convexidad y de concavidad de la curva y los puntos de su inflexión. Como $y''>0$, el gráfico de la función es cóncavo por doquier. La curva no tiene puntos de inflexión.

Utilizando los datos obtenidos, construimos el gráfico de la función (fig. 37).

1083. Construir el gráfico de la función $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

Resolución. 1) El campo de definición es todo el eje Ox, o sea, $D(y)=\,]-\infty,\,+\infty[$.

2) La función no es par ni impar.

3) Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas son: si $x=0$, entonces $y=1$; si $y=0$, $x=1$.

4) No hay puntos de inflexión ni asíntotas verticales. Tenemos:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2} - x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2} = 0.$$

De suerte que la asíntota oblicua $y = -x$.

5) Hallamos $y' = -x^2/\sqrt[3]{(1-x^3)^2}$; $y' = 0$ cuando $x = 0$; $y' = \infty$ cuando $x = 1$. En el entorno de los puntos críticos la derivada no cambia el signo,

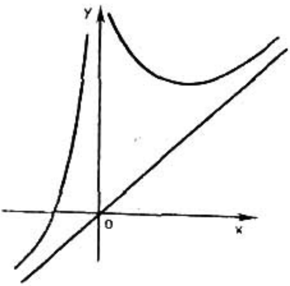

Fig. 37

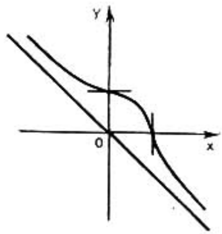

Fig. 38

no hay extremos. Puesto que $y' < 0$ para todas las $x \neq 0$, la función decrece en todo el eje numérico.

6) Encontramos $y'' = -2x/\sqrt[3]{(1-x^3)^5}$; $y'' = 0$ para $x = 0$; $y'' = \infty$ para $x = 1$; $y''(-h) > 0$; $y''(h) < 0$; $y''(1-h) < 0$; $y''(1+h) > 0$. Por consiguiente, en los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]1, +\infty[$ la curva es cóncava y en el intervalo $]0, 1[$ es convexa. Los puntos de inflexión tienen las coordenadas (0; 1) y (1; 0).

Utilizando los datos obtenidos, construimos el gráfico buscado (fig. 38).

Construir los gráficos de las funciones:

1084. $y = \operatorname{sen}^2 x$. **1085.** $y = 3\sqrt[3]{x} - x$.

1086. $y = \ln x - \ln(x-1)$.

1087. $y = \ln \frac{x}{x-1}$. **1088.** $y = \frac{x^3}{x^2-4}$.

1089. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. **1090.** $y = 16x(x-1)^3$.

1091. $y = (x-1)\sqrt{x}$. **1092.** $y = x + e^{-x}$.

1093. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **1094.** $y = e^{2x-x^2}$.

1095. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$.

§ 3. Curvatura de una línea plana

Se llama *ángulo de contingencia* del arco AB de una línea plana al ángulo φ comprendido entre las tangentes trazadas en los puntos A y B de esta línea (fig. 39). La relación entre el ángulo de contingencia y la longitud s del arco AB se denomina *curvatura media* del arco AB:

$$k_m = \varphi/s.$$

Se llama *curvatura* de la línea dada en el punto A al límite de la curvatura media del arco AB cuando $B \to A$, o sea,

$$k = \lim_{s \to 0} (\varphi/s).$$

La curvatura de una circunferencia

$$k_{\text{cir}} = 1/a,$$

donde a es el radio de la circunferencia; la curvatura de una recta es igual a cero.

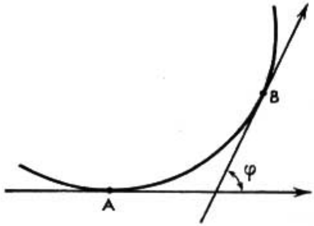

Fig. 39

Si la línea está definida por la ecuación $y = f(x)$, su curvatura se calcula por la fórmula

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Si la línea se define por las ecuaciones paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, entonces

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

donde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$; $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$.

Si la línea está dada en coordenadas polares por la ecuación $\rho = f(\theta)$, entonces

$$k = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}},$$

donde $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$, $\rho'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}$.

Ha recibido el nombre de *radio de curvatura* la magnitud inversa a la curvatura:

$$R = 1/|k|.$$

Se llama *círculo de curvatura* o *círculo osculador* de la línea dada en su punto A a la posición límite de la circunferencia que pasa por tres puntos A, B, C de la curva cuando $B \to A$ y $C \to A$.

El radio del círculo de curvatura es igual al radio de curvatura. El centro del círculo de curvatura se denomina *centro de curvatura* y se encuentra sobre la normal a la línea trazada en el punto A hacia la concavidad de esta línea.

Las coordenadas ξ y η del centro de curvatura de una línea $y = f(x)$ se calculan por la fórmula

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Se llama *evoluta* de una línea al conjunto de sus centros de curvatura. Las fórmulas para las coordenadas del centro de curvatura se pueden considerar como ecuaciones paramétricas de la evoluta (donde de parámetro sirve la abscisa x de la línea inicial).

1096. Hallar la curvatura de la línea $y = -x^3$ en el punto con abscisa $x = 1/2$.

Resolución. Tenemos $y' = -3x^2$, $y'' = -6x$. Cuando $x = 1/2$ estas derivadas toman los valores $y' = -3/4$, $y'' = -3$ y

$$k = \left| \frac{-3}{(1+9/16)^{3/2}} \right| = \frac{3}{125/64} = \frac{192}{125}.$$

1097. Hallar la curvatura en un punto cualquiera de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Resolución. Hallamos

$$\dot{x} = a(1 - \cos t),\ \ddot{x} = a \operatorname{sen} t,\ \dot{y} = a \operatorname{sen} t,\ \ddot{y} = a \cos t,$$

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = a^2(\cos t - \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) = -a^2(1 - \cos t),$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = 2a^2(1 - \cos t),$$

$$k = \left| \frac{-a^2(1-\cos t)}{2^{3/2}a^3(1-\cos t)^{3/2}} \right| = \frac{1}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{1/2}}.$$

1098. Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la línea $x^3 + y^4 = 2$ en el punto $M(1;\ 1)$.

Resolución. Derivemos dos veces la ecuación de la línea dada:

$$3x^2 + 4y^3 \cdot y' = 0\ (*),\quad 6x + 12y^2 \cdot y'^2 + 4y^3 \cdot y'' = 0\ (**).$$

Como $x = 1$, $y = 1$, entonces de la ecuación $(*)$ hallamos $y' = -3/4$ y de la ecuación $(**)$ obtenemos $6 + 27/4 + 4y'' = 0$, o sea, $y'' = -51/16$. Entonces

$$\xi = x - \frac{(1+y'^2)\,y'}{y''} = 1 - \frac{(1+9/16)\ (-3/4)}{-51/16} = \frac{43}{68},$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = 1 + \frac{1+9/16}{-51/16} = \frac{26}{51},$$

o sea, $C\,(43/68;\ 26/51)$.

1099. Escribir la ecuación de la evoluta de la parábola $2y^2 = 2x + 1$.

Resolución. Derivamos dos veces la ecuación de la parábola:

$$4yy' = 2,\quad y' = \frac{1}{2y};\quad 4y'^2 + 4yy'' = 0,\quad y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{4y^3}.$$

Determinamos las coordenadas del centro de curvatura:

$$\xi = x - \frac{(1+y'^2)\cdot y'}{y''} = y^2 - \frac{1}{2} - \frac{\left(1 + \frac{1}{4y^2}\right)\cdot\frac{1}{2y}}{-1/(4y^3)} = 3y^2,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{1}{4y^2}}{-1/(4y^3)} = y - 4y^3 - y = -4y^3.$$

Obtenemos la ecuación de la evoluta en la forma paramétrica: $\xi = 3y^2$, $\eta = -4y^3$. Excluyendo el parámetro y, encontramos la ecuación de la evoluta en la forma explícita: $\eta^2 = 16\ \xi^3/27$.

1100. Hallar el radio de curvatura de la elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$ en el punto $M(0; 3)$.

1101. Hallar el radio de curvatura en un punto cualquiera de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$.

1102. Hallar la curvatura de la línea $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$ en el punto $t = 1$.

1103. Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la línea $y = 1/x$ en el punto $M(1; 1)$.

1104. Escribir la ecuación de la evoluta de la curva $x = t \operatorname{sen} t + \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t$.

§ 4. Orden de tangencia de las curvas planas

Si las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ tienen un punto común $M(x_0, y_0)$, o sea, $y_0 = f(x_0) = \varphi(x_0)$ y las tangentes trazadas en el punto $M(x_0; y_0)$ a las curvas indicadas no coinciden, se dice que las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ *se intersecan* en el punto M. La condición de intersección de estas curvas en el punto $M(x_0; y_0)$ es la siguiente:

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) \neq \varphi'(x_0).$$

Pero si estas curvas tienen el punto común $M(x_0; y_0)$ y las tangentes trazadas en este punto a ambas curvas coinciden, se dice que las curvas *son tangentes* en el punto M. La condición de tangencia de las curvas en el punto $M(x_0; y_0)$ es la siguiente:

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0).$$

Si, por fin,

$$f(x_0) = \varphi(x_0),\ f'(x_0) = \varphi'(x_0),\ f''(x_0) = \varphi''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0),$$

pero $f^{(n+1)}(x_0) \neq \varphi^{(n+1)}(x_0)$, se dice que en el punto $M(x_0; y_0)$ las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ tienen la *tangencia de n-ésimo orden*.

Si $n \geqslant 2$, entonces las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ tienen en el punto $M(x_0, y_0)$ no sólo la tangente común sino también la misma curvatura.

1105. ¿Qué orden de tangencia tienen las curvas $y = e^{-x}$ y $xy = 1/e$ en el punto $x = 1$?

Resolución. Sean $f(x) = e^{-x}$, $\varphi(x) = 1/(ex)$. Hallamos las derivadas sucesivas de estas funciones: $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$, $\varphi'(x) = -1/(ex^2)$, $\varphi''(x) = 2/(ex^3)$, ... Ahora calculamos los valores de las funciones dadas y de sus derivadas en el punto $x = 1$; tenemos $f(1) = e^{-1}$, $f'(1) = -e^{-1}$, $f''(1) = e^{-1}$; $\varphi(1) = e^{-1}$, $\varphi'(1) = -e^{-1}$, $\varphi''(1) = 2e^{-1}$. De este modo, $f(1) = \varphi(1)$, $f'(1) = \varphi'(1)$, pero $f''(1) \neq \varphi''(1)$. Por consiguiente, las curvas indicadas tienen una tangencia de primer orden.

1106. ¿Para qué parámetro a la curva $y = e^{ax}$ tiene en el punto $x = 0$ una tangencia de primer orden con la recta $y = 2x + 1$?

Resolución. Sean $f(x) = e^{ax}$ y $\varphi(x) = 2x + 1$. Para que las líneas indicadas tengan en el punto $x = 0$ una tangencia de primer orden es necesario que se cumplan las igualdades $f(0) = \varphi(0)$ y $f'(0) = \varphi'(0)$, o sea, $e^{a\cdot 0} = 2\cdot 0 + 1$ y $ae^0 = 2$, de donde $a = 2$.

1107. ¿Qué orden de tangencia tienen las curvas $y = 1 + \cos x$ e $y = 2 - x^2$ en el punto $x = 0$?

1108. ¿Qué orden de tangencia con el eje Ox tiene en el punto $x = 0$ la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$?

1109. ¿Qué orden de tangencia tiene la catenaria $y = (e^x + e^{-x})/2$ con la parábola $y = 1 + x^2/2$ en el punto $x = 0$?

1110. ¿Qué orden de tangencia tienen las circunferencias $x^2 + y^2 = 2y$ y $x^2 + y^2 = 4y$ en el punto $x = 0$?

1111. ¿Qué orden de tangencia tienen la parábola $y = x^4$ y el eje Ox en el punto $x = 0$?

1112. ¿Qué orden de tangencia tiene la curva $y = \ln(1 + x)$ con la parábola $y = x - x^2$ en el punto $x = 0$?

§ 5. Función vectorial de un argumento escalar y su derivada

Una curva espacial puede definirse por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

o por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}.$$

La última ecuación define el vector variable $\mathbf{r}$ como *función vectorial* de un argumento escalar t, o sea, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. La curva definida por la ecuación $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ se llama *hodógrafo* del vector variable $\mathbf{r}$.

Se denomina *derivada* de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ con respecto al argumento escalar t, a la nueva función vectorial definida por la igualdad

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

La derivada de la función vectorial se puede calcular por la fórmula

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k}.$$

La derivada $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ es el vector orientado por la tangente al hodógrafo del vector $\mathbf{r}$ hacia el crecimiento del parámetro t.

Si t es el tiempo, entonces $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ es el vector de velocidad del extremo del vector $\mathbf{r}$ y $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ es el vector de aceleración.

Las reglas principales de derivación de la función vectorial de un argumento escalar son las siguientes:

1ª. $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_3}{dt}$;

2ª. $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante;

3ª. $\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{r}) = \lambda \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\frac{d\lambda}{dt}$, donde $\lambda = \lambda(t)$ es función escalar de t;

4ª. $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$;

5ª. $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$.

Las *ecuaciones de una tangente* a una curva espacial $\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ en un punto $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ se escriben en la forma

$$(x - x_0)/\dot{x}_0 = (y - y_0)/\dot{y}_0 = (z - z_0)/\dot{z}_0,$$

donde $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, $\dot{x}_0 = x'(t_0)$, $\dot{y}_0 = y'(t_0)$, $\dot{z}_0 = z'(t_0)$.

Se llama *plano normal* al que pasa por el punto de tangencia y es perpendicular a la tangente. La *ecuación de un plano normal* tiene la forma

$$\dot{x}_0(x - x_0) + \dot{y}_0(y - y_0) + \dot{z}(z - z_0) = 0.$$

La *diferencial del arco de una curva espacial* se calcula por la fórmula

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$$

1113. ¿Qué línea es el hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{r} = a\mathbf{i}\cos t + a\mathbf{j}\operatorname{sen} t + ct\mathbf{k}$?

Resolución. Esta línea tiene las ecuaciones paramétricas $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} t$, $z = ct$ que definen una hélice.

1114. ¿Qué línea es el hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j} + \mathbf{k}\operatorname{sen} t$?

1115. ¿Qué línea es el hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{r} = t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$?

1116. ¿Qué línea es el hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$?

1117. ¿Qué línea es el hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{i}\operatorname{ch} t + \mathbf{k}\operatorname{sh} t$?

1118. Hallar la derivada del producto escalar de los vectores $\mathbf{r}_1 = 3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{d(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)}{dt} = \mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \mathbf{r}_2\cdot\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} =$$
$$= (3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})\cdot(-3\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot 3\mathbf{i} = -6 + 6 = 0.$$

El resultado se explica por el hecho de que el producto escalar $\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2 = 5$, o sea, es una constante.

1119. Mostrar que los vectores $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\operatorname{sen} t + \mathbf{k}$ y $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ son perpendiculares.

Resolución. Tenemos $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i}\operatorname{sen} t + \mathbf{j}\cos t$. Hallamos el producto escalar:

$$\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\cos t\cdot\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\cdot\cos t + 1\cdot 0 = 0.$$

Por consiguiente, $\mathbf{r} \perp \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$.

1120. Hallar la derivada de la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{i}\operatorname{ch}^2 t + \mathbf{j}\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t + \mathbf{k}\operatorname{sh}^2 t$.

1121. $\mathbf{r} = \mathbf{i}\operatorname{sh} t + \mathbf{j}\operatorname{ch} t + \mathbf{k}\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 3\operatorname{sh}^2 t}$. Hallar $\dfrac{d(\mathbf{r}^2)}{dt}$.

1122. $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$, $\quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}t^3 + \mathbf{k}t$. Hallar $\dfrac{d(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)}{dt}$.

1123. Escribir las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva $x = a \operatorname{sen}^2 t$, $y = b \operatorname{sen} t \cos t$, $z = c \cos^2 t$ en el punto $t = \pi/4$.

Resolución. Hallamos $\dot{x} = a \operatorname{sen} 2t$, $\dot{y} = b \cos 2t$; $\dot{z} = -c \operatorname{sen} 2t$. Cuando $t = \pi/4$ tenemos: $x_0 = a/2$, $y_0 = b/2$, $z_0 = c/2$, $\dot{x}_0 = a$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = -c$.

Las ecuaciones de la tangente son:

$$(x - a/2)/a = (y - b/2)/0 = (z - c/2)/(-c).$$

La ecuación del plano normal es:

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0, \quad \text{o bien} \quad ax - cz - \frac{a^2 - c^2}{2} = 0.$$

1124. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la hélice $\mathbf{r} = \mathbf{i} \cos t + \mathbf{j} \operatorname{sen} t + \sqrt{3}\, t\mathbf{k}$ en el punto $t = \pi/2$.

1125. Sobre la curva $x = t + 1$, $y = t^2 - 1$, $z = t^3$ hallar un punto en que la tangente sea paralela al plano $x + 2y + z - 1 = 0$.

1126. *¿Qué angulo forma con el plano xOy la tangente a la* hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 2\sqrt{2t}$ en el punto $t = \pi/4$?

1127. *Escribir las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva* $x = (1/\sqrt{2})\, e^t \operatorname{sen} t$, $y = 1$, $z = (1/\sqrt{2})\, e^t \cos t$ en el *punto* $t = 0$.

1128. Escribir las ecuaciones de la tangente a la curva $x = e^t (\cos t + \operatorname{sen} t)$, $y = e^t (\operatorname{sen} t - \cos t)$, $z = e^t$ en el punto $t = 0$.

1129. Escribir las ecuaciones de la tangente a la curva $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ en el punto $t = 1$.

1130. Mostrar que las curvas $\mathbf{r} = (u + 1)\, \mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + (2u - 1)\, \mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = 2v^2\mathbf{i} + (3v - 2)\, \mathbf{j} + v^2\mathbf{k}$ se intersecan y determinar el ángulo entre las curvas en el punto de su intersección.

1131. *Escribir las ecuaciones de la hélice, si el radio de la base* del cilindro $R = 4$, el paso $h = 6\pi$, y hallar la diferencial de su arco.

Resolución. Las ecuaciones de la hélice tienen la forma $x = 4 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$, $z = 3t$, puesto que $z = h$ cuando $t = 2\pi$. Derivemos estas ecuaciones: $\dot{x} = -4 \operatorname{sen} t$, $\dot{y} = 4 \cos t$, $\dot{z} = 3$. Por consiguiente, la diferencial del arco es igual a

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 t + 16 \cos^2 t + 9}\, dt = \sqrt{16 (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) + 9}\, dt = 5\, dt.$$

1132. Hallar la diferencial del arco de la curva $x = a \cos^2 t$, $y = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen} t \cos t$, $z = b \operatorname{sen}^2 t$.

1133. ¿Para qué paso h la longitud de una espira de la hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = ct$ es igual a 4π?

Indicación. Es necesario valerse de que al desarrollar el cilindro sobre el plano *una espira de la hélice se convierte en segmento de la recta.*

1134. La ecuación de movimiento tiene la forma $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} \cos t + 3\mathbf{j} \operatorname{sen} t + 4t\mathbf{k}$, *donde t es el tiempo. Determinar la velocidad* y la aceleración de movimiento en un instante arbitrario del tiempo.

1135. La ecuación de movimiento tiene la forma $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. Determinar la velocidad y la aceleración de movimiento en el instante $t = 1$.

§ 6. Triedro intrínseco de una curva espacial. Curvatura y torsión

En todo punto M $(x;\ y;\ z)$ de una curva espacial $\mathbf{r} = \mathbf{r}\ (t)$ se puede construir tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares (fig. 40): el vector unitario *tangente* (vector tangente)

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|};$$

el vector unitario de la *normal principal*

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}{\left|\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|};$$

el vector unitario de la *binormal*

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}$$

Los vectores no unitarios respectivos pueden determinarse por las fórmulas:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ (vector tangente)},$$

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \text{ (vector de la binormal)},$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} \text{ (vector de la normal principal)}.$$

El plano que contiene los vectores $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\nu}$ se llama plano *osculador*; el que contiene los vectores $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\beta}$ se denomina plano *normal* y el que contiene los vectores $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\tau}$, plano *rectificante*.

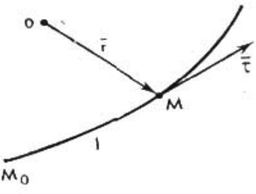

Fig. 40

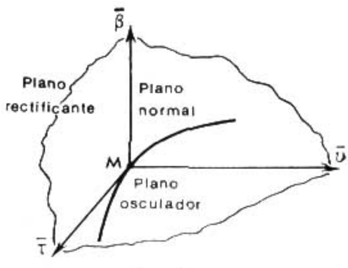

Fig. 41

El triedro, con vértice en el punto M, formado por los planos osculador, normal y rectificante ha recibido el nombre de *triedro intrínseco* de una curva espacial (fig. 41).

Se llama *curvatura* de la línea en el punto M al número

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\Delta s},$$

donde φ es el ángulo de rotación de la tangente (ángulo de contingencia) sobre el arco MN; Δs, la longitud de este arco.

Si la curva se define por la ecuación $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$, entonces $K=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|$.

Si la ecuación de una curva tiene la forma $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, entonces

$$K=\frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}.$$

Se denomina *torsión* de una curva en un punto M al número

$$\sigma=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\theta}{\Delta s},$$

donde θ es el ángulo de rotación de la binormal (ángulo de contingencia de segunda especie) sobre el arco MN.

Si $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$, entonces $\sigma=\pm\left|\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\right|$, donde el signo «—» se toma en el caso en que los vectores $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ y $\boldsymbol{\nu}$ tienen el mismo sentido y el signo «+» en el caso en que ellos tienen sentidos opuestos.

Si $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, entonces

$$\sigma=\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt}\right|^2}.$$

1136. Hallar el vector tangente $\boldsymbol{\tau}$ a la curva $\mathbf{r}=t^2\mathbf{i}+t^3\mathbf{j}+t^6\mathbf{k}$ en el punto $t=1$.

Resolución. Tenemos:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=2t\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j}+6t^5\mathbf{k},$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=\sqrt{4t^2+9t^4+36t^{10}}.$$

Para $t=1$ encontramos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k},\quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=\sqrt{4+9+36}=7,$$

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|}=\frac{2}{7}\,\mathbf{i}+\frac{3}{7}\,\mathbf{j}+\frac{6}{7}\,\mathbf{k}.$$

1137. Hallar el vector unitario tangente a la curva $\mathbf{r}=5t\mathbf{i}+12\mathbf{j}\cos t+12\mathbf{k}\operatorname{sen} t$ en un punto cualquiera.

1138. Hallar el vector unitario tangente a la curva $x=t\operatorname{sen} t+\cos t$, $y=t\cos t-\operatorname{sen} t$, $x=t^2\sqrt{2}$ en el punto $t=\pi/2$.

1139. Hallar el vector $\boldsymbol{\tau}$ de la hélice $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\, t$ $z = \sqrt{R^2 - a^2}\,t$, $R > a > 0$ en un punto cualquiera.

Resolución. Tenemos

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i}\cos t + a\mathbf{j}\,\text{sen}\, t + \sqrt{R^2 - a^2}\,t\mathbf{k},$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\mathbf{i}\,\text{sen}\, t + a\mathbf{j}\cos t + \sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{k},$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2\,\text{sen}^2\, t + a^2\cos^2 t + R^2 - a^2} = R,$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|} = \frac{-a\mathbf{i}\,\text{sen}\, t + a\mathbf{j}\cos t + \sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{k}}{R} =$$

$$= -\frac{a\,\text{sen}\, t}{R}\,\mathbf{i} + \frac{a\cos t}{R}\,\mathbf{j} + \frac{\sqrt{R^2 + a^2}}{R}\,\mathbf{k}.$$

1140. Hallar el vector $\boldsymbol{\beta}$ de la hélice en un punto arbitrario.

Resolución. Tenemos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\mathbf{i}\,\text{sen}\, t + a\mathbf{j}\cos t + \sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -a\mathbf{i}\cos t - a\mathbf{j}\,\text{sen}\, t.$$

Hallemos el producto vectorial de estos vectores:

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\,\text{sen}\, t & a\cos t & \sqrt{R^2 - a^2} \\ -a\cos t & -a\,\text{sen}\, t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a\sqrt{R^2 - a^2}\,\text{sen}\, t\cdot\mathbf{i} - a\sqrt{R^2 - a^2}\cos t\cdot\mathbf{j} + a^2\mathbf{k};$$

$$|\mathbf{B}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{a^2(R^2 - a^2)\,\text{sen}^2\, t + a^2(R^2 - a^2)\cos^2 t + a^4} = aR.$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{a\sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{i}\,\text{sen}\, t - a\sqrt{R^2 - a^2}\,\mathbf{j}\cos t + a^2\mathbf{k}}{aR} =$$

$$= \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}\,\text{sen}\, t\cdot\mathbf{i} - \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}\cos t\cdot\mathbf{j} + \frac{a}{R}\,\mathbf{k}.$$

1141. Hallar el vector $\boldsymbol{\nu}$ de la hélice en un punto cualquiera,

Resolución. Como $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}$, entonces

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\sqrt{R^2 - a^2}\,\text{sen}\, t}{R} & -\dfrac{\sqrt{R^2 - a^2}\cos t}{R} & \dfrac{a}{R} \\ -\dfrac{a\,\text{sen}\, t}{R} & \dfrac{a\cos t}{R} & \dfrac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \end{vmatrix} = -\mathbf{i}\cos t - \mathbf{j}\,\text{sen}\, t.$$

1142. Hallar la curvatura K de la hélice.

Resolución. En los problemas 1139 y 1140 hemos encontrado que

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=R,\ \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|=aR,\ \text{por eso}$$

$$K=\frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}=\frac{aR}{R^3}=\frac{a}{R^2}.$$

1143. Hallar la torsión σ de la hélice.

Resolución. Zenemos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-a\mathbf{i}\operatorname{sen}t+a\mathbf{j}\cos t+\sqrt{R^2-a^2}\,\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-a\mathbf{i}\cos t-a\mathbf{j}\operatorname{sen}t,$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}=a\mathbf{i}\operatorname{sen}t-a\mathbf{j}\cos t.$$

Hallamos el producto mixto de estos vectores:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}=\begin{vmatrix}-a\operatorname{sen}t & a\cos t & \sqrt{R^2-a^2}\\ -a\cos t & -a\operatorname{sen}t & 0\\ a\operatorname{sen}t & -a\cos t & 0\end{vmatrix}=a^2\sqrt{R^2-a^2}.$$

En el problema 1140 hemos encontrado que $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|=aR$. Por consiguiente, $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|^2=a^2R^2$. De este modo,

$$\sigma=\frac{a^2\sqrt{R^2-a^2}}{a^2R^2}=\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}.$$

1144. Escribir la ecuación del plano osculador de la hélice en un punto arbitrario.

Resolución. Este plano pasa por el punto $(a\cos t;\ a\operatorname{sen}t;\ \sqrt{R^2-a^2}\,t)$ y es perpendicular al vector de la binormal

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\sqrt{R^2-a^2}\operatorname{sen}t}{R}\,\mathbf{i}-\frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}\,\mathbf{j}+\frac{a}{R}\,\mathbf{k}.$$

Por eso la ecuación del plano osculador es la siguiente:

$$\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\operatorname{sen}t\,(X-a\cos t)-\frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}\times$$

$$\times(Y-a\operatorname{sen}t)+\frac{a}{R}\,(Z-\sqrt{R^2-a^2}\,t)=0,$$

o bien

$$X\cdot\sqrt{R^2-a^2}\operatorname{sen}t-Y\cdot\sqrt{R^2-a^2}\cdot\cos t+aZ-a\sqrt{R^2-a^2}\,t=0.$$

1145. Escribir la ecuación del plano rectificante de la hélice en un punto cualquiera.

Resolución. Este plano pasa por el punto $(a\cos t;\ a\operatorname{sen}t;\ \sqrt{R^2-a^2}t)$ perpendicularmente al vector de la normal principal $\boldsymbol{\nu}=-\mathbf{i}\cos t-\mathbf{j}\operatorname{sen}t$.

Por eso la ecuación buscada tiene la forma

$$-(X-a\cos t)\cos t-(Y-a\operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t=0,$$

o sea $X\cos t+Y\operatorname{sen} t-a=0$.

1146. Escribir la ecuación del plano normal de la hélice en un punto arbitrario.

Resolución. Este plano es perpendicular al vector tangente $\boldsymbol{\tau}=-\frac{a\operatorname{sen} t}{R}\mathbf{i}+\frac{a\cos t}{R}\mathbf{j}+\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\mathbf{k}$ y pasa por el punto $(a\cos t; a\operatorname{sen} t; \sqrt{R^2-a^2}\,t)$. Por eso la ecuación buscada tiene la forma

$$-\frac{a\operatorname{sen} t}{R}(X-a\cos t)+\frac{a\cos t}{R}(Y-a\operatorname{sen} t)+$$
$$+\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}(Z-\sqrt{R^2-a^2}\,t)=0,$$

o bien

$$Xa\operatorname{sen} t-Ya\cos t-Z\sqrt{R^2-a^2}+(R^2-a^2)t=0.$$

1147. Hallar el vector $\boldsymbol{\tau}$ de la curva $x=6t$, $y=3t^2$, $z=t^3$ en el punto $t=1$.

1148. Hallar el vector $\boldsymbol{\beta}$ de la misma curva cuando $t=1$.

1149. Hallar el vector $\boldsymbol{\nu}$ de la misma curva cuando $t=1$.

1150. Hallar la curvatura K de la misma curva cuando $t=1$.

1151. Hallar la torsión σ de la misma curva cuando $t=1$.

1152. *Escribir la ecuación del plano osculador de la misma* curva cuando $t=1$.

1153. Escribir la ecuación del plano rectificante de la misma curva cuando $t=1$.

1154. Escribir la ecuación del plano normal de la misma curva cuando $t=1$.