Capítulo VIII. Cálculo diferencial de funciones de varias variables independientes

§ 1. Campo de definición de una función. Líneas y superficies de nivel

Sean dados dos conjuntos no vacíos D y U. Si a cada par de números reales $(x;\ y)$ perteneciente al conjunto D se le pone en correspondencia, según una regla determinada, un y sólo un elemento u de U, se dice que sobre el conjunto D está representada *la función* f (o *aplicación*) con el conjunto de valores U. Esto se escribe $D \xrightarrow{f} U$, o bien $f: D \to U$. El conjunto D se llama *campo de definición* de la función y el conjunto U, compuesto de todos los números del tipo $f(x,\ y)$, donde $(x;\ y) \in D$, se denomina *conjunto de valores* de la función. El valor de la función $u = f(x,\ y)$ en un punto $M(x_0;\ y_0)$ se designa por $f(x_0,\ y_0)$ o bien por $f(M)$.

El campo de definición de la función $u = f(x,\ y)$ es, en los casos elementales, la parte de un plano limitada por una curva cerrada, siendo que los puntos de esta curva (fronteras del campo) pueden pertenecer o no al campo de definición; bien sea todo el plano, o, por último, el campo de difinición puede ser el conjunto de varias partes del plano xOy. La representación geométrica de la función $u = f(x,\ y)$ en el sistema de coordenadas rectangulares $Oxyu$ (gráfico de la función) es una superficie.

Análogamente se define la función de cualquier número de variables $u = f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)$.

Se dice *línea de nivel* de una función $u = f(x,\ y)$ a la línea $f(x,\ y) = C$ sobre el plano xOy, en cuyos puntos la función conserva un valor constante $u = C$.

Se llama *superficie de nivel* de una función $u = f(x,\ y,\ z)$ a la superficie $f(x\ y,\ z) = C$ en cuyos puntos la función conserva un valor constante $u = C$.

1155. Hallar el campo de definición de la función $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Resolución. La función u toma valores reales a condición de que $a^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, o bien $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, o sea, el campo de definición de la función dada es un círculo de radio a con centro en el origen de las coordenadas incluyendo la circunferencia de frontera.

1156. Hallar el campo de definición de la función $u = \operatorname{arcsen}(x/y^2)$.

Resolución. Esta función está definida si $y \neq 0$ y $-1 \leqslant x/y^2 \leqslant 1$, o sea, $-y^2 \leqslant x \leqslant y^2$. El campo de definición de la función es la parte del plano comprendida entre dos parábolas $y^2 = x$ e $y^2 = -x$, excluyendo el punto $O\ (0;\ 0)$.

1157. Hallar el campo de definición de la función $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$.

Resolución. La función dada depende de tres variables y toma valores reales cuando $2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6 > 0$, o bien $x^2/1 + y^2/2 - z^2/3 < -1$, o sea, el campo de definición de la función es la parte del espacio comprendida dentro de las hojas de un hiperboloide de dos hojas.

1158. Hallar las líneas de nivel de la función $u = x^2 + y^2$.

Resolución. La ecuación de la familia de las rectas de nivel tiene la forma $x^2 + y^2 = C$ $(C > 0)$. Asignando a C diferentes valores reales, obtendremos circunferencias concéntricas con centro en el origen de las coordenadas.

1159. Hallar las superficies de nivel de la función $u = x^2 + z^2 - y^2$.

Resolución. La ecuación de la familia de las superficies de nivel tiene la forma $x^2 + z^2 - y^2 = C$. Si $C = 0$, obtenemos $x^2 + z^2 - y^2 = 0$, o sea, un cono; si $C > 0$, entonces $x^2 + z^2 - y^2 = C$ es la familia de hiperboloides de una hoja; si $C < 0$, entonces $x^2 + z^2 - y^2 = C$ es la familia de hiperboloides de dos hojas.

Hallar los campos de definición de las funciones:

1160. $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. **1161.** $u = 1/\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

1162. $u = \operatorname{arcsen}(x + y)$. **1163.** $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.

1164. $u = \ln(-x + y)$. **1165.** $u = y + \sqrt{x}$.

1166. $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$. **1167.** $u = \operatorname{arcsen}\left(z/\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

1168. $u = 1/\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$. **1169.** $u = \sqrt{x + y + z}$.

Hallar las líneas de las funciones:

1170. $z = 2x + y$. **1171.** $z = x/y$. **1172.** $z = \ln\sqrt{y/x}$.

1173. $z = \sqrt{x}/y$. **1174.** $z = e^{xy}$.

Hallar las superficies de nivel de las funciones:

1175. $u = x + y + 3z$. **1176.** $u = x^2 + y^2 + z^2$.

1177. $u = x^2 - y^2 - z^2$.

§ 2. Derivadas y diferenciales de funciones de varias variables

1. Derivadas parciales de primer orden. Se llama *derivada parcial* de una función $z = f(x, y)$ con respecto a la variable independiente x a la derivada

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y),$$

calculada para y constante.

Se denomina derivada parcial con respecto a y a la derivada

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y),$$

calculada para x constante.

Para las derivadas parciales son válidas las reglas y fórmulas de derivación corrientes.

1178. $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$. Hallar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Resolución. Considerando y como una constante, obtenemos $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 1$. Considerando x como una constante. hallamos $\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 8y + 2$.

1179. $z = e^{x^2+y^2}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_x = 2xe^{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)'_y = 2ye^{x^2+y^2}.$$

1180. $\rho = u^4 \cos^2 \varphi$. Hallar $\frac{\partial \rho}{\partial u}$ y $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 4u^3 \cos^2 \varphi, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = u^4 \cdot 2 \cos \varphi\,(-\operatorname{sen} \varphi) = -u^4 \operatorname{sen} 2\varphi.$$

1181. Mostrar que la función $z = y \ln (x^2 - y^2)$ satisface la ecuación $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Resolución. Hallamos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2-y^2}\, \frac{\partial z}{\partial y} = \ln (x^2-y^2) - \frac{2y^2}{x^2-y^2}.$$

Sustituimos las expresiones halladas en el primer miembro de la ecuación:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2-y^2} + \frac{1}{y}\left[\ln (x^2-y^2) - \frac{2y^2}{x^2-y^2}\right] =$$

$$= \frac{2y}{x^2-y^2} - \frac{2y}{x^2-y^2} + \frac{\ln (x^2-y^2)}{y} \equiv \frac{z}{y^2}.$$

Obtenemos una identidad, o sea, la función z satisface la ecuación dada.

1182. Mostrar que la función $z = y^{y/x} \operatorname{sen} (y/x)$ satisface la ecuación $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = yz$.

Resolución. Hallamos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^{y/x} \ln y \left(-\frac{y}{x^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) + y^{y/x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left[y^{y/x} \cdot \ln y \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot y^{y/x-1}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) + y^{y/x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}.$$

Sustituimos las expresiones halladas en el primer miembro de la ecuación:

$$-x^2 \frac{y}{x^2} \cdot y^{y/x} \cdot \ln y \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 \cdot \frac{y}{x^2} \cdot y^{y/x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) +$$

$$+ xy \cdot \frac{y}{x} \cdot y^{y/x-1} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot \frac{1}{x} \cdot y^{y/x} \cdot \ln y \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) +$$

$$+ xy \cdot \frac{1}{x} \cdot y^{y/x} \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right) = yy^{y/x} \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) \equiv yz.$$

Obtenemos una identidad; por consiguiente, la función z satisface la ecuación dada.

1183. $u=x^2+2y^2-3xy-4x+2y+5$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

1184. $r=\rho^2 \operatorname{sen}^4 \theta$. Hallar $\frac{\partial r}{\partial \rho}$, $\frac{\partial r}{\partial \theta}$.

1185. $u=\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

1186. $z=e^{xy(x^2+y^2)}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1187. $u=2y\sqrt{x}+3y^2\sqrt[3]{z^2}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

1188. $u=e^{x/y}+e^{-z/y}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

1189. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{1+x^2}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1190. $z=e^{(x^2+y^2)^2}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1191. $u=(x-y)(x-z)(y-z)$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

1192. $u=e^{3x^2+2y^2-xy}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$.

1193. $u=e^{xyz}\cdot\operatorname{sen}\frac{y}{x}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial y}$.

1194. Mostrar que la función $z=\frac{x^2}{2y}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ satisface la ecuación $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{y}$.

1195. Hallar $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ si $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$.

2. Diferencial total. Se llama *incremento total* de una función $z=f(x, y)$ en un punto $M(x; y)$ a la diferencia $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$, donde Δx y Δy son incrementos arbitrarios de los argumentos.

La función $z=f(x, y)$ se llama *diferenciable* en el punto (x, y) si en este punto el incremento total puede representarse en la forma

$$\Delta z=A\,\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

donde $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Se denomina *diferencial total* de una función $z=f(x, y)$ a la parte principal del incremento total Δz, la cual es lineal con respecto a los incrementos de los argumentos Δx y Δy, o sea, $dz=A\,\Delta x+B\,\Delta y$.

Las diferenciales de variables independientes coinciden con sus incrementos, o sea, $dx=\Delta x$ y $dy=\Delta y$.

La diferencial total de la función $z=f(x, y)$ se calcula por la fórmula

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Análogamente, la diferencial total de una función de tres argumentos $u=f(x, y, z)$ se calcula por la fórmula

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Con un $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ suficientemente pequeño para una función derivable $z = f(x, y)$ son válidas las igualdades aproximadas

$$\Delta z \approx dz; \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz.$$

1196. $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$. Hallar dz.

Resolución. Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Por consiguiente,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

1197. $u = x^{y^2 z}$. Hallar du.

Resolución. Tenemos $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$, donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot y^2.$$

Por consiguiente,

$$du = y^2 z x y^{2z-1} dx + 2yz \cdot x^{y2z} \cdot \ln x\, dy + y^2 x^{y2z} \cdot \ln x\, dz.$$

1198. Calcular aproximadamente $\sqrt{\operatorname{sen}^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}}$ partiendo del valor de la función $z = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 8e^y}$ para $x = \pi/2 \approx 1{,}571$, $y = 0$.

Resolución. El número buscado es el valor incrementado de la función z cuando $\Delta x = 0{,}021$, $\Delta y = 0{,}015$. Hallamos el valor de z para $x = \pi/2$, $y = 0$: tenemos $z = \sqrt{\operatorname{sen}^2 (\pi/2) + 8e^0} = 3$. Encontramos el incremento de la función:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = \frac{\operatorname{sen} 2x\, \Delta x + 8e^y \Delta y}{2\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 8e^y}} = \frac{8 \cdot 0{,}015}{6} = 0{,}02.$$

Por lo tanto, $\sqrt{\operatorname{sen}^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}} \cong 3{,}02$.

1199. Calcular aproximadamente $\operatorname{arctg} (1{,}02/0{,}95)$ partiendo del valor de la función $z = \operatorname{arctg} (y/x)$ para $x = 1$, $y = 1$.

Resolución. El valor de la función z para $x = 1$, $y = 1$ es $z = \operatorname{arctg} (1/1) = \pi/4 \cong 0{,}785$. Hallemos el incremento de la función Δz cuando $\Delta x = -0{,}05$, $\Delta y = 0{,}02$.

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = -\frac{y\,\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\,\Delta y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x\,\Delta y - y\,\Delta x}{x^2+y^2} = \frac{1 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot 0{,}05}{2} = 0{,}035,$$

Por consiguiente, $\operatorname{arctg} (1{,}02/0{,}95) = z + \Delta z \approx 0{,}785 + 0{,}035 = 0{,}82$.

1200. $z = \ln (x^2 + y^2)$. Hallar dz.

1201. $z = \ln \operatorname{tg} (y/x)$. Hallar dz.

1202. $z = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$. Hallar dz.

1203. $z = x^y$. Hallar dz.

1204. $u = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. Hallar du.

1205. $z = e^x(\cos y + x \operatorname{sen} y)$. Hallar dz.

1206. $z = e^{x+y}(x \cos y + y \operatorname{sen} x)$. Hallar dz.

1207. $z = \operatorname{arctg} \frac{2(x + \operatorname{sen} y)}{4 - x \operatorname{sen} y}$. Hallar dz.

1208. $u = e^{xyz}$. Hallar du.

1209. Calcular aproximadamente $1{,}02^{4,05}$ partiendo del valor de la función $z = x^y$ para $x = 1$, $y = 4$ y sustituyendo su incremento por la diferencial.

1210. Calcular aproximadamente $\ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$ partiendo del valor de la función $z = \ln(x^3 + y^3)$ para $x = 0$, $y = 1$.

1211. Calcular aproximadamente $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$ partiendo del valor de la función $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ para $x = 1$, $y = 0$.

1212. Calcular aproximadamente $\sqrt{5e^{0,02} + 2{,}03^2}$ partiendo del valor de la función $z = \sqrt{5e^x + y^2}$ para $x = 0$, $y = 2$.

1213. Calcular aproximadamente $\sqrt{1{,}04^{1,99} + \ln 1{,}02}$ partiendo del valor de la función $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ para $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

3. Derivadas parciales y diferenciales de órdenes superiores. Se llaman *derivadas parciales de segundo orden* de la función $z = f(x, y)$ a las derivadas parciales de las derivadas parciales de primer orden. Las anotaciones de las derivadas parciales de segundo orden son las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Análogamente se definen y se designan las derivadas parciales de tercer orden y de órdenes superiores, por ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y),$$

etc.; las llamadas derivadas «mixtas» que se distinguen una de otra sólo por la sucesión de derivación son iguales entre sí si son continuas, por ejemplo, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x}$.

Se denomina *diferencial de segundo orden* de la función $z = f(x, y)$ a la diferencial de su diferencial total, o sea, $d^2z = d(dz)$.

De un modo análogo se definen las diferenciales de tercer orden y de órdenes superiores: $d^3z = d(d^2z)$; en general, $d^nz = d(d^{n-1}z)$.

Si x e y son variables independientes y la función $f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas, las diferenciales de órdenes superiores se calculan por las fórmulas:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2;$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3;$$

en general tiene lugar una fórmula simbólica

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n z$$

que se resuelve formalmente según la ley binomial.

1214. $z = y \ln x$. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Resolución. Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln x.$$

Derivando repetidamente, obtendremos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} = (\ln x) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

1215. $z = \ln \operatorname{tg}(y/x)$. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg}(y/x)} \cdot \sec^2(y/x)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{2}{\operatorname{sen}(2y/x)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{\operatorname{sen}(2y/x)} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{-2\cos(2y/x)\cdot(2/x)}{\operatorname{sen}^2(2y/x)} =$$

$$= \frac{2}{x^3 \cdot \operatorname{sen}^2(2y/x)} \cdot (2y\cos(2y/x) - x\operatorname{sen}(2y/x)).$$

1216. $z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$. Hallar $d^2 z$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{sen} x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

$$d^2 z = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\,dx^2 + 2\cos x \cos y\,dx\,dy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\,dy^2.$$

1217. $z = x^2 y$. Hallar $d^3 z$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = 2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = 0;$$

$$d^3 z = 0 \cdot dx^3 + 3 \cdot 2\,dx^2\,dy + 3 \cdot 0 \cdot dx \cdot dy^2 + 0 \cdot dy^3 = 6\,dx^2\,dy.$$

1218. $u = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3$. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$.

1219. $u = xy + \operatorname{sen}(x + y)$. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

1220. $u = \ln \operatorname{tg}(x+y)$. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$.

1221. $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

1222. $z = x^2 \ln(x+y)$. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

1223. $u = x \operatorname{sen} xy + y \cos xy$. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

1224. $u = \operatorname{sen}(x + \cos y)$. Hallar $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}$.

1225. $z = 0{,}5 \ln(x^2+y^2)$. Hallar d^2z.

1226. $z = \cos(x+y)$. Hallar d^2z.

1227. $z = \cos(ax+e^y)$. Hallar $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$.

1228. $u = \frac{x^4 - 8xy^3}{x-2y}$. Hallar $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}$.

1229. $z = x^2y^3$. Comprobar que $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2\,\partial y^3} = \frac{\partial^5 z}{\partial y^3\,\partial x^2}$.

1230. $z = x^2+y^2-xy-2x+y+7$. Hallar d^2z.

1231. Mostrar que la función $z = \varphi(x)\,g(y)$ satisface la ecuación $z\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$.

1232. Mostrar que la función $z = g(x) + yg'(x)$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

1232. 1) Comprobar, que la función $u = ye^{x^2-y^2}$, satisface la ecuación $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}$.

2) Comprobar, que la función $u = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ satisface la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

3) Hallar d^2u, si $u = e^{xy}$.
4) Hallar d^2u, si $u = \ln(x+y)$.
5) Hallar d^3u, si $u = xyz$.
6) Hallar d^3u, si $u = \frac{y}{x}$.
7) Hallar d^4u, si $u = x \ln y$.
8) Hallar d^5u, si $u = e^{x+y}$.

4. Derivación de funciones complejas. Sean $z = f(x, y)$ donde $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ y las funciones $f(x, y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ son derivables.

Entonces la derivada de la función compuesta $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ se calcula por la fórmula

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Si $z=f(x, y)$, donde $y=\varphi(x)$, entonces la *derivada total* de z respecto a x se determina por la fórmula

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Pero si $z=f(x, y)$, donde $x=\varphi(\xi, \eta)$, $y=\psi(\xi, \eta)$, entonces las derivadas parciales se expresan del modo siguiente:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

1233. $z=e^{x^2+y^2}$, donde $x=a\cos t$, $y=a\,\text{sen}\,t$. Hallar $\frac{dz}{dt}$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=e^{x^2+y^2}\cdot 2x(-a\,\text{sen}\,t)+e^{x^2+y^2}\cdot 2y(a\cos t)=$$
$$=2ae^{x^2+y^2}(y\cos t-x\,\text{sen}\,t).$$

Expresando x e y por t, obtendremos

$$\frac{dz}{dt}=2ae^{a^2}(a\,\text{sen}\,t\cos t-a\cos t\,\text{sen}\,t)=0.$$

1234. $z=\ln(x^2-y^2)$, donde $y=e^x$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$.

Resolución. Tenemos $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-y^2}$. Utilizando la fórmula de derivada total, encontramos

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{2ye^x}{x^2-y^2}=\frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}$$

1235. $z=\frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$, donde $u=\text{tg}^2 x$, $v=\text{ctg}^2 x$. Hallar $\frac{dz}{dx}$.

1236. $z=\frac{x^2-y}{x^2+y}$, donde $y=3x+1$. Hallar $\frac{dz}{dx}$.

1237. $z=x^2y$, donde $y=\cos x$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$.

1238. $z=\ln\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$, donde $y=x\cos\alpha$. Hallar $\frac{dz}{dx}$.

1239. $z=x^2+y^2$, donde $x=\xi+\eta$, $y=\xi-\eta$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial \eta}$.

1240. $u=\ln(x^2+y^2)$ donde $x=\xi\eta$, $y=\frac{\xi}{\eta}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$.

1241. Mostrar que la función $u=\ln(1/r)$, donde $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, satisface la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

5. Derivada en el sentido dado. Gradiente de una función. Se llama *derivada* de una función $z=f(x, y)$ en un punto $M(x, y)$ *en el sentido* del vector $\mathbf{l}=\overline{MM_1}$ al límite

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{|MM_1|\to 0}\frac{f(M_1)-f(M)}{|MM_1|}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho},$$

donde $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Si la función $f(x, y)$ es derivable, entonces la derivada en el sentido dado se calcula por la fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha,$$

donde α es el ángulo formado por el vector **l** con el eje Ox.

En el caso de una función de tres variables $u = f(x, y, z)$ la derivada en el sentido dado se determina de un modo análogo. La fórmula respectiva tiene el aspecto

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores del vector **l**.

Se denomina *gradiente* de una función $z = f(x, y)$ en un punto $M(x; y)$ al vector que sale del punto M y sus coordenadas son las derivadas parciales de la función z:

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}.$$

El gradiente de una función y la derivada en el sentido del vector **l** se hallan relacionados por la fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\operatorname{der}_1 \operatorname{grad} z.$$

El gradiente indica el sentido del crecimiento más rápido de una función en el punto dado. La derivada $\frac{\partial z}{\partial l}$ en el sentido del gradiente tiene el valor máximo igual a

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\max}=|\operatorname{grad} z|=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

En el caso de una función $u = f(x, y, z)$ el gradiente de la función es igual a

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

1242. Hallar la derivada de la función $z = x^2 - y^2$ en el punto $M(1; 1)$ en el sentido del vector **l** que forma un ángulo $\alpha = 60°$ con el sentido positivo del eje Ox.

Resolución. Hallamos los valores de las derivadas parciales en el punto M:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=2,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=-2.$$

Como $\cos\alpha = \cos 60° = 1/2$, $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial l}=2\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}\approx-0{,}7.$$

1243. Hallar la derivada de la función $u = xy^2z^3$ en el punto $M(3; 2; 1)$ en el sentido del vector $\overline{MN}$, donde $N(5; 4; 2)$.

Resolución. Hallamos el vector $\overline{MN}$ y sus cosenos directores: $\overline{MN}=\mathbf{l}=$ $=(5-3)\mathbf{i}+(4-2)\mathbf{j}+(2-1)\mathbf{k}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$;

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{3};\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

Calculamos los valores de las derivadas parciales en el punto M:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=4;\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=12;\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=36.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=4\cdot\frac{2}{3}+12\cdot\frac{2}{3}+36\cdot\frac{1}{3}=22\frac{2}{3}.$$

1244. Hallar la derivada de la función $z=\ln(x^2+y^2)$ en el punto $M(3;\ 4)$ en el sentido del gradiente de la función z.

Resolución. Aquí el vector $\mathbf{l}$ coincide con el gradiente de la función $z=\ln(x^2+y^2)$ en el punto $M(3;\ 4)$ y es igual a

$$\operatorname{grad} z=\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)_M\mathbf{i}+\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)_M\mathbf{j}=\frac{6}{25}\mathbf{i}+\frac{8}{25}\mathbf{j}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial l}=|\operatorname{grad} z|=\sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2+\left(\frac{8}{25}\right)^2}=\frac{2}{5}.$$

1245. Hallar el valor y el sentido del gradiente de la función $u=\operatorname{tg}x-x+3\operatorname{sen}y-\operatorname{sen}^3y+z+\operatorname{ctg}z$ en el punto $M(\pi/4;\ \pi/3;\ \pi/2)$.

Resolución. Hallamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sec^2 x-1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3\cos y-3\operatorname{sen}^2 y\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial z}=1-\operatorname{cosec}^2 z$$

y calculamos sus valores en el punto $M(\pi/4;\ \pi/3;\ \pi/2)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=2-1=1,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=3\cdot\frac{1}{2}-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M=1-1=0.$$

Por consiguiente,

$$(\operatorname{grad} u)_M=\mathbf{i}+\frac{3}{8}\mathbf{j};\quad |\operatorname{grad} u|_M=\sqrt{1^2+(3/8)^2}=\sqrt{73}/8;$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{73}/8}=\frac{8}{\sqrt{73}};\quad \cos\beta=\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{\sqrt{73}}.$$

1246. Hallar la derivada de la función $z=x^2-xy+y^2$ en el punto $M(1;\ 1)$ en el sentido del vector $\mathbf{l}=6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$.

1247. Hallar la derivada de la función $u=\operatorname{arcsen}(z/\sqrt{x^2+y^2})$ en el punto $M(1;\ 1;\ 1)$ en el sentido del vector $\overline{MN}$, donde $N(3;\ 2;\ 3)$.

1248. Hallar la derivada de la función $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ en el punto $M(1;\ 2;\ 1)$ en el sentido del vector $\mathbf{r}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

1249. Hallar el valor y el sentido del gradiente de la función $u=1/r$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, en el punto $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

1250. Hallar el valor y el sentido del gradiente de la función $u = xyz$ en el punto M (2; 1; 1).

1251. Hallar la derivada de la función $u = x/2 + y/3 + z/6$ en el sentido $\mathbf{l} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ en un punto arbitrario.

6. Derivación de las funciones implícitas. La derivada de una función implícita $y = y(x)$ definida con ayuda de la ecuación $F(x, y) = 0$, donde $F(x, y)$ es una función derivable de las variables x e y, puede calcularse por la fórmula

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

a condición de que $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Las derivadas de orden superior de una función implícita se pueden hallar por la derivación sucesiva de la fórmula indicada, considerando en este caso y como función de x.

Análogamente, las derivadas parciales de una función implícita de dos variables $z = \varphi(x, y)$ definida con ayuda de la ecuación $F(x, y, z) = 0$, donde $F(x, y, z)$ es una función derivable de las variables x, y, z, pueden calcularse por las fórmulas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

a condición de que $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

1252. $\cos(x + y) + y = 0$. Hallar y'.

Resolución. Aquí $F(x, y) = \cos(x + y) + y$. Hallamos $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\operatorname{sen}(x + y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\operatorname{sen}(x + y) + 1$. Por lo tanto,

$$y' = -\frac{-\operatorname{sen}(x + y)}{1 - \operatorname{sen}(x + y)} = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{1 - \operatorname{sen}(x + y)}.$$

1253. $y - \operatorname{sen} y = x$. Hallar y' e y''.

Resolución. Aquí $F(x, y) = y - \operatorname{sen} y - x$. Tenemos $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -1$, $\dfrac{\partial F}{\partial u} = 1 - \cos y = 2\operatorname{sen}^2 \dfrac{y}{2}$, de donde

$$y' = -\frac{-1}{2\operatorname{sen}^2(y/2)} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 \frac{y}{2}.$$

Hallamos la derivada segunda:

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot 2\operatorname{cosec}\frac{y}{2}\left(-\operatorname{cosec}\frac{y}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{y}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\, y' = -\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^4 \frac{y}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{y}{2}.$$

1254. $z^3 - 3xyz = a^3$. Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Resolución. Aquí $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3$. Encontramos $\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -3xz$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

1255. $xyz = x + y + z$. Hallar dz.

Resolución. Como es sabido, $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, por eso hallamos primeramente $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz - 1}{xy - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz - 1}{xy - 1}.$$

Por consiguiente,

$$dz = -\frac{1}{xy - 1}[(yz - 1)\,dx + (xz - 1)\,dy].$$

1256. $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = a^2$. Hallar y'.
1257. $(y/x) + \operatorname{sen}(y/x) = a$. Hallar y'.
1258. $(xy - \alpha)^2 + (xy - \beta)^2 = r^2$. Hallar y', y''.
1259. $x^3 + 2y^3 - 2xy\sqrt{2xy} + 1 = 0$. Hallar y'.
1260. $\ln \operatorname{tg}(y/x) - y/x = a$. Hallar y'.
1261. $(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. Hallar y' en el punto $M(b; b)$.
1262. $3\operatorname{sen}(\sqrt{x}/y) - 2\cos(\sqrt{x}/y) + 1 = 0$. Hallar y'.
1263. $0{,}5\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}(y/x) = 0$. Hallar y'.
1264. $x^2 - x\cdot 2^{y+1} + 4^y - x + 2^y + 2 = 0$. Hallar y'.
1265. $x + y - e^{x+y} = 0$. Hallar y', y''.
1266. $x + y + z = e^z$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
1267. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
1268. $x = z\ln(z/y)$. Hallar dz.
1269. $x\operatorname{sen} y + y\operatorname{sen} x + z\operatorname{sen} x = a$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial y}$.
1270. $xy + xz + yz = 1$. Hallar dz.
1271. $xe^y + ye^x + ze^x = a$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$.
1272. $z = x + \operatorname{arctg}\frac{y}{z - x}$, Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$.

§ 3. Plano tangente y normal a una superficie

Se llama *plano tangente* a una superficie en un punto M al plano que contiene todas las tangentes a las curvas trazadas sobre la superficie por el punto M.

Se denomina *normal* a una superficie a la recta que pasa por un punto M y es perpendicular al plano tangente.

Si una superficie está definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$, entonces la ecuación del plano tangente en un punto $M(x_0; y_0; z_0)$ de la superficie tiene la forma

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z-z_0)=0,$$

donde $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ son los valores de las derivadas parciales en el punto M y x, y, z, las coordenadas corrientes del punto del plano tangente.

Las ecuaciones de una normal a una superficie en un punto M se escriben de la forma

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

Aquí x, y, z, son las coordenadas corrientes del punto de la normal.

Pero si la ecuación de una superficie está definida de un modo explícito $z = f(x, y)$, entonces la ecuación del plano tangente en un punto $M(x_0; y_0; z_0)$ se escribe de la forma

$$z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y-y_0),$$

y las ecuaciones de la normal se escriben de la forma

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

1273. Se da la superficie $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$. Escribir la ecuación del plano tangente y las ecuaciones de la normal a la superficie en el punto $M(1; 1; 1)$.

Resolución. Hallamos las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y-1$ y $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=-2x+2y+2$ y sus valores en el punto $M(1; 1; 1)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=-1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=2.$$

La ecuación del plano tangente es la siguiente:

$$z-1=-(x-1)+2(y-1), \text{ o bien, } x-2y+z=0.$$

La ecuación de la normal es la siguiente:

$$(x-1)/(-1)=(y-1)/2=(z-1)/(-1).$$

1274. Trazar a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$ planos tangentes que sean paralelos al plano $x + y + z = 1$.

Resolución. Aquí $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 11$. Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=4y, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=6z.$$

Debido a la condición de paralelismo del plano tangente y del plano dado resulta que $(\partial F/\partial x)/1 = (\partial F/\partial y)/1 = (\partial F/\partial z)/1$, o bien $(2x)/1 = (4y)/1 = (6z)/1$. Uniendo a estas ecuaciones la ecuación de la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$,

encontramos las coordenadas de los puntos de tangencia: M_1 ($\sqrt{6}$; $\sqrt{6}/2$; $\sqrt{6}/3$) y M_2 ($-\sqrt{6}$; $-\sqrt{6}/2$; $-\sqrt{6}/3$).
Por consiguiente, las ecuaciones de los planos tangentes tienen la forma

$$1\cdot(x\pm\sqrt{6})+1\cdot(y\pm\sqrt{6}/2)+1\cdot(z\pm\sqrt{6}/3)=0,$$

o sea,

$$x+y+z+11/\sqrt{6}=0 \quad \text{y} \quad x+y+z-11/\sqrt{6}=0.$$

1275. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $z=1+x^2+y^2$ en el punto M (1; 1; 3).

1276. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $x^2+y^2-z^2=-1$ en el punto M (2; 2; 3).

1277. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $z=\ln(x^2+y^2)$ en el punto M (1; 0; 0).

1278. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $z=\operatorname{sen} x\cos y$ en el punto M ($\pi/4$; $\pi/4$; 1/2).

1279. Escribir las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2+2y^2+3z^2=21$ que sean paralelos al plano $x+4y+6z=0$.

1280. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ truncan sobre los ejes de coordenadas los segmentos cuya suma es constante.

1281. ¿En qué punto del elipsoide $x^2/4+y^2/4+z^2=1$ la normal trazada a éste forma ángulos iguales con los ejes de las coordenadas?

1282. Demostrar que $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, si $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal a la superficie $z=f(x, y)$.

§ 4. Extremo de una función de dos variables independientes

1. Extremo de una función. Una función $z=f(x, y)$ tiene *un máximo (mínimo)* en un punto M_0 (x_0; y_0) si el valor de la función en este punto es mayor (menor) que su valor en un otro punto cualquiera M (x, y) de cierto entorno del punto M_0, o sea, $f(x_0, y_0)>f(x, y)$ [respectivamente $f(x_0, y_0)<f(x, y)$] para todos los puntos M (x, y) que satisfacen la condición $|M_0M|<\delta$, donde δ es un número positivo suficientemente pequeño.

El máximo o el mínimo de una función se llama *extremo* de la misma. El punto M_0 en el que la función presenta un extremo se denomina *punto extremo*.

Si una función derivable $z=f(x, y)$ alcanza un extremo en el punto M_0 (x_0, y_0), entonces sus derivadas parciales de primer orden en este punto son iguales a cero, o sea,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}=0$$

(*condiciones necesarias* del extremo).

Los puntos en los que las derivadas parciales son iguales a cero se llaman *puntos estacionarios*. No todo un punto estacionario es un punto extremo.

Sea M_0 $(x_0; y_0)$ un punto estacionario de la función $z = f(x, y)$. Designamos,

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

y escribimos *el discriminante* $\Delta = AC - B^2$. Entonces:

si $\Delta > 0$, *la función tiene en el punto* M_0 *un extremo, a saber, un máximo cuando* $A < 0$ *(o bien* $C < 0$*) y un mínimo cuando* $A > 0$ *(o bien* $C > 0$*)*;

si $\Delta < 0$, *en el punto* M_0 *no hay extremo (condiciones suficientes* de presencia *o* ausencia de un extremo);

si $\Delta = 0$, se requiere una investigación ulterior (caso dudoso).

1283. Hallar el extremo de la función $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Resolución. Determinamos las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6.$$

Utilizando las condiciones necesarias de un extremo, encontramos los puntos estacionarios:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases}$$

de donde $x = 0$, $y = 3$; M $(0; 3)$.

Hallamos los valores de las derivadas parciales de segundo orden en el punto M

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 1$$

y escribimos el discriminante

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0; \quad A > 0.$$

Por consiguiente, en el punto M $(0; 3)$ la función dada presenta un mínimo. El valor de la función en este punto $z_{\min} = -9$.

1284. Hallar el extremo de la función

$$z = \frac{1}{2} xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right).$$

Resolución. Encontramos las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12} y - \frac{2}{3} x + \frac{47}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2} y - \frac{1}{12} x + \frac{47}{4}.$$

Valiéndonos de las condiciones necesarias de un extremo, hallamos los puntos estacionarios:

$$\begin{cases} -\frac{1}{12} y - \frac{2}{3} x + \frac{47}{3} = 0, \\ -\frac{1}{2} y - \frac{1}{12} x + \frac{47}{4} = 0, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 8x + y = 188, \\ x + 6y = 141. \end{cases}$$

De aquí $x = 21$, $y = 20$; el punto estacionario es M $(21, 20)$.

Hallamos los valores de las segundas derivadas en el punto M:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{12}.$$

Entonces

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0.$$

Como $A < 0$, entonces en el punto M (21, 20) la función tiene un máximo: $z_{max} = 282$.

Hallar los extremos de las funciones:

1285. $z = xy^2(1 - x - y)$. **1286.** $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

1287. $z = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}$. **1288.** $z = (x^2 + y^2)(e^{-(x^2+y^2)} - 1)$

1289. $z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$.

2. Extremo condicionado. Valores máximo y mínimo de una función en el dominio cerrado. Se llama *extremo condicionado* de una función $z = f(x, y)$ al extremo de esta función alcanzado a condición de que las variables x e y se hallen vinculadas por la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ (*ecuación de vinculación*).

La determinación del extremo condicionado puede reducirse a la investigación para determinar el extremo corriente de la llamada *función de Lagrange*

$$u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

donde λ es un multiplicador constante indefinido.

Las condiciones necesarias del extremo de una función de Lagrange tienen la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

A partir de este sistema de tres ecuaciones se pueden hallar las incógnitas x, y y λ.

Para hallar los valores *máximo* y *mínimo* de la función en un dominio cerrado es necesario:

1) determinar los puntos estacionarios alojados en el dominio dado y calcular los valores de la función en estos puntos;

2) determinar los valores máximo y mínimo de la función en las líneas que constituyen la frontera del dominio;

3) entre todos los valores hallados escoger el máximo y el mínimo.

1290. Hallar el extremo de la función $z = xy$ a condición de que x e y se hallan vinculados por la ecuación $2x + 3y - 5 = 0$.

Resolución. Examinemos la función de Lagrange $u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$. Tenemos $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda$. A partir del sistema de ecuaciones (condiciones necesarias del extremo)

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

determinamos que $\lambda = -5/12$, $x = 5/4$, $y = 5/6$. No es difícil ver que en el punto $(5/4; 5/6)$ la función $z = xy$ alcanza el valor máximo $z_{max} = 25/24$.

1291. Entre todos los triángulos rectángulos, con un área dada S, hallar aquel cuya hipotenusa tenga el valor mínimo.

Resulución. Sean x e y los catetos de un triángulo y z su hipotenusa. Puesto que $z^2 = x^2 + y^2$, el problema se reduce a la determinación del valor mínimo de la función $x^2 + y^2$ a condición de que x e y se hallan vinculados por la ecuación $xy/2 = S$, o sea $xy - 2S = 0$. Examinamos la función $u = x^2 + y^2 + \lambda (xy - 2S)$ y hallamos sus derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \lambda y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \lambda x.$$

Como $x > 0$, $y > 0$, entonces, a partir del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0, \\ 2y + \lambda x = 0, \\ xy/2 = S \end{cases}$$

obtenemos la solución $\lambda = -2$, $x = y = \sqrt{2S}$.

De este modo, la hipotenusa tiene el valor mínimo si los catetos del triángulo son iguales entre sí.

1292. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = x^2 + y^2$ en el círculo $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leqslant 9$.

Resolución. Aquí se examina el campo D limitado por la circunferencia $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$ incluyendo también los puntos de la circunferencia.

Hallamos los puntos estacionarios de la función dada; tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$; en virtud de las condiciones necesarias del extremo encontramos que $x = 0$, $y = 0$.

No es difícil ver que en el punto $(0; 0)$ la función $z = x^2 + y^2$ tiene el valor mínimo $z_{\min} = 0$, con ello el punto indicado es un punto interior del campo D.

Investigamos la función $z = x^2 + y^2$ para determinar el extremo condicionado si x e y están vinculados por la relación $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$. Examinamos la función

$$u = x^2 + y^2 + \lambda [(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9.$$

Hallamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda (x - \sqrt{2}), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda (y - \sqrt{2}).$$

Para determinar x, y, λ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + \lambda (x - \sqrt{2}) = 0, \\ x + \lambda (y - \sqrt{2}) = 0, \\ (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9. \end{cases}$$

Este sistema tiene dos soluciones: $x = y = 5\sqrt{2}/2$, $\lambda = -5/3$ y $z = 25$; $x = y = -\sqrt{2}/2$, $\lambda = -1/3$ y $z = 1$. Pues bien, la función tiene el valor máximo en el punto $(5\sqrt{2}/2; 5\sqrt{2}/2)$.

De suerte que $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 25$.

1293. Hallar el extremo de la función $z = x^2 + y^2$ si x e y están acoplados por la ecuación $x/4 + y/3 = 1$.

1294. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ en un dominio cerrado limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

1295. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = xy + x + y$ en un cuadrado limitado por las rectas $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

1296. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = xy$ en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

1297. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ en un triángulo limitado por las rectas $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

1298. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = 1 - x^2 - y^2$ en el círculo $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$.

1299. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$ en el campo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

1300. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$ en el campo $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant 3\pi/2$.

1301. Hallar los valores mínimo y máximo de la función $z = \cos x \cos y \cos(x + y)$ en el campo $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

1302. Entre todos los triángulos inscritos en un círculo hallar aquel cuya área sea máxima.

1303. Entre todos los triángulos que tienen el perímetro dado hallar aquel cuya área sea máxima.

1304. Entre todos los rectángulos, con el área dada S, hallar aquel, cuyo perímetro tenga el valor mínimo.

1305. Hallar las dimensiones de un paralelepípedo rectangular que tenga, para la superficie total dada S, el volumen máximo.

Capítulo IX. Integral indefinida

§ 1. Integración inmediata. Cambio de la variable e integración por partes

1. Integración inmediata. Una función $F(x)$ se llama *primitiva* para la función $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$ o $dF(x) = f(x)\,dx$.

Si la función $f(x)$ tiene una primitiva $F(x)$, ella tiene un conjunto infinito de primitivas, con ello todas las primitivas se contienen en la expresión $F(x) + C$, donde C es una constante.

Se denomina *integral indefinida* de la función $f(x)$ (o de la expresión $f(x)\,dx$) al conjunto de todas sus primitivas. La anotación es la siguiente:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Aquí $\int$ es el signo de la integral; $f(x)$, la función integrando; $f(x)\,dx$, la expresión integrando; x, la variable de integración.

La determinación de la integral indefinida ha recibido el nombre de *integración* de una función.

Propiedades de una integral indefinida (reglas de integración)

1ª. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2ª. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

3ª. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4ª. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, donde a es una constante.

5ª. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

6ª. Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ y $u = \varphi(x)$, entonces $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

Tabla de integrales inmediatas

I. $\int dx = x + C.$

II. $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ para $m \neq -1.$

III. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

IV. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C.$

VI. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

VII. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

VIII. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$

IX. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

X. $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C.$

XI. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

XII. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

XIII. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

1306. Hallar la integral $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\,dx.$

Resolución. Utilizando las propiedades 4ª y 5ª, obtenemos

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\,dx = 2\int x^3\,dx - 5\int x^2\,dx + 7\int x\,dx - 3\int dx.$$

Aplicamos la fórmula II a las primeras tres integrales del segundo miembro y la fórmula I a la cuarta integral:

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\,dx = 2\cdot\frac{x^4}{4} - 5\cdot\frac{x^3}{3} + 7\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C.$$

1307. Hallar la integral $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 \cdot dx.$

Resolución. Tenemos

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int \left(x + 2\cdot\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right) dx =$$

$$= \int (x + 2x^{1/6} + x^{-2/3})\,dx = \int x\,dx + 2\int x^{1/6}\,dx + \int x^{-2/3}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^{7/6}}{7/6} + \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + C.$$

1308. Hallar la integral $\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x}\,dx.$

Resolución. Tenemos

$$\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\,dx = \int (2\cdot 3^2\cdot 5^3)^x\,dx = \int 2250^x\,dx = \frac{2250^x}{\ln 2250} + C.$$

La propiedad 6ª permite ampliar considerablemente la tabla de integrales inmediatas con ayuda de un procedimiento consistente en *colocar la función bajo el signo de diferencial.*

1309. Hallar la integral $(1+x^2)^{1/2}x\,dx$.

Resolución. Esta integral puede reducirse a la fórmula II, transformándo la integral de modo siguiente:

$$\int (1+x^2)^{1/2}\,x\,dx=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2}\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2}\,d\,(1+x^2).$$

Ahora en calidad de variable de integración tenemos la expresión $1+x^2$ y con respecto a esta variable se obtiene la integral de una función potencial. Por consiguiente,

$$\int (1+x^2)^{1/2}\,x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{1/2+1}}{1/2+1}+C=\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C.$$

1310. Hallar la integral $\int (x^2-3x+1)^{10}\cdot(2x-3)\,dx$.

Resolución. Aquí, procediendo al igual que en el ejercicio precedente, tenemos

$$\int (x^2-3x+1)^{10}\,d\,(x^2-3x+1)=\frac{1}{11}(x^2-3x+1)^{11}+C.$$

1311. Hallar la integral $\int (\ln t)^4\,\frac{dt}{t}$.

Resolución. La expresión $\frac{dt}{t}$ se puede escribir como $d\,(\ln t)$, por eso

$$\int (\ln t)^4\,d\,(\ln t)=\frac{1}{5}(\ln t)^5+C.$$

1312. Hallar la integral $\int e^{3\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$.

Resolución. La integral dada puede representarse así:

$$\int e^{3\cos x}\operatorname{sen} x\,dx=\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}\cdot 3\operatorname{sen} x\,dx,$$

pero $3\operatorname{sen} x\,dx=-d\,(3\cos x)$ y por eso

$$\int e^{3\cos x}\cdot\operatorname{sen} x\,dx=-\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}\cdot d\,(3\cos x),$$

o sea, la variable de integración es $3\cos x$. Por lo tanto, la integral se toma por la fórmula VI:

$$\int e^{3\cos x}\operatorname{sen} x\,dx=-\frac{1}{3}e^{3\cos x}+C.$$

1313. Hallar la integral $\int (2\operatorname{sen} x+3\cos x)\,dx$.

Resolución. Encontramos

$$\int (2\operatorname{sen} x+3\cos x)\,dx=2\int \operatorname{sen} x\,dx+3\int \cos x\,dx=-2\cos x+3\operatorname{sen} x+C$$

(véanse las fórmulas VIII y IX).

1314. Hallar la integral $\int (\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int (\mathrm{tg}\, x+\mathrm{ctg}\, x)^2\, dx=\int (\mathrm{tg}^2 x+2\,\mathrm{ctg}\, x\cdot \mathrm{tg}\, x+\mathrm{ctg}^2 x)\, dx=$$

$$=\int (\mathrm{tg}^2 x+1+1+\mathrm{ctg}^2 x)\, dx=\int (\mathrm{tg}^2 x+1)\, dx+\int (1+\mathrm{ctg}^2 x)\, dx=$$

$$=\int \sec^2 x\, dx+\int \mathrm{cosec}^2\, x\, dx=\mathrm{tg}\, x-\mathrm{ctg}\, x+C$$

(véanse las fórmulas X y XI).

Hallar las integrales:

1315. $\int x\sqrt{x}\, dx$. **1316.** $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$. **1317.** $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1318. $\int \frac{2-x^4}{1+x^2}\, dx$. **1319.** $\int e^{3x}\cdot 3^x\, dx$. **1320.** $\int \mathrm{tg}^2\, x\, dx$.

1321. $\int (\mathrm{sh}\, x-\mathrm{sen}\, x)\, dx$. **1322.** $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$.

1323. $\int (2\,\mathrm{tg}\, x+3\,\mathrm{ctg}\, x)^2\, dx$. **1324.** $\int x\cos (x^2)\, dx$.

1325. $\int \frac{dx}{x\ln x}$. **1326.** $\int (ax^2+b)^{1/3}\cdot x\, dx$.

1327. $\int \sqrt{\mathrm{sen}\, x}\cos x\, dx$. **1328.** $\int \mathrm{sen}\,(a+bx)\, dx$.

1329. $\int \cos (\mathrm{sen}\, x)\cdot \cos x\, dx$.

2. Cambio de la variable en una integral indefinida. *El cambio de la variable en una integral indefinida* se efectúa con ayuda de *sustituciones* de dos tipos:

1) $x=\varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función monótona continuamente derivable de una variable nueva t. La fórmula de cambio de la variable es en este caso la siguiente:

$$\int f(x)\, dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\, dt;$$

2) $u=\psi(x)$, donde u es una variable nueva. Con tal sustitución la fórmula de cambio de la variable es la siguiente:

$$\int f[\psi(x)]\,\psi'(x)\, dx=\int f(u)\, du.$$

1330. Hallar la integral $\int \frac{\mathrm{sen}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

Resolución. Efectuamos la sustitución $t=\sqrt[3]{x}$, o sea $x=t^3$. Esta sustitución llevará a que bajo el signo de seno resulte la variable de integración en vez de la raíz de la misma. Determinemos la diferencial $dx=3t^2\, dt$. De ello obtenemos

$$\int \frac{\mathrm{sen}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx=\int \frac{3t^2\,\mathrm{sen}\, t}{t^2}\, dt=3\int \mathrm{sen}\, t\, dt=-3\cos t+C.$$

La respuesta debe expresarse por la vieja variable x. Sustituyendo como resultado de integración $t=\sqrt[3]{x}$, obtenemos

$$\int \frac{\mathrm{sen}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx=-3\cos\sqrt[3]{x}+C.$$

1331. Hallar la integral $\int (2x+1)^{20}\,dx$.

Resolución. Esta integral se puede hallar sin efectuar el cambio de la variable. Aquí basta desarrollar la expresión $(2x+1)^{20}$ por la fórmula del binomio de Newton y aplicar la integración término a término. Sin embargo, este procedimiento está vinculado con gran cantidad de cálculos. Con ayuda del cambio de la variable se puede reducir directamente la integral dada a una inmediata.

Suponiendo $2x+1=t$, tenemos $2dx=dt$, o sea, $dx=(1/2)\,dt$. De aquí obtenemos

$$\int (2x+1)^{20}\,dx=\frac{1}{2}\int t^{20}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}\,t^{21}+C=\frac{1}{42}\,(2x+1)^{21}+C.$$

En general, si la integral $\int f(x)\,dx$ se halla tabulada (como inmediata) entonces la integral $\int f(ax+b)\,dx$ se puede determinar fácilmente con ayuda de la sustitución $ax+b=t$.

Por ejemplo, aplicando esta sustitución a la integral $\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx$, tenemos $ax+b=t$, $a\,dx=dt$ y $dx=(1/a)\,dt$. Por consiguiente,

$$\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx=\int \operatorname{sen} t\cdot\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}\int \operatorname{sen} t\,dt=-\frac{1}{a}\cos t+C.$$

Retornando a la vieja variable, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C.$$

Análogamente se puede demostrar que

$$\int \cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b)+C,\qquad \int e^{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}\cdot e^{ax+b}+C,$$

etc.

Al determinar la integral $\int f(ax+b)\,dx$ se puede omitir la anotación de la misma sustitución $ax+b=t$. Aquí basta tomar en consideración que $dx=\frac{1}{a}\,d\,(ax+b)$. De este modo,

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\,F(ax+b)+C,$$

donde F es la primitiva para f.

1332. Hallar la integral $\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$.

Resolución. Hacemos $\sqrt{x^3+5}=t$; entonces $x^3+5=t^2$. Derivamos ambos miembros de la igualdad: $3x^2\,dx=2t\,dt$. De aquí $x^2\,dx=(2/3)\,t\,dt$ y, por consiguiente,

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx=\int \sqrt{x^3+5}\,x^2\,dx=\int t\cdot\frac{2}{3}\,t\,dt=\frac{2}{3}\int t^2\,dt=$$
$$=\frac{2}{9}\,t^3+C=\frac{2}{9}\,(\sqrt{x^3+5})^3+C=\frac{2}{9}\,(x^3+5)\sqrt{x^3+5}+C.$$

La integral dada puede determinarse también con ayuda de la sustitución $x^3+5=t$.

Esta sustitución reduce directamente la integral a la forma inmediata, puesto que el primer factor de la expresión integrando x^2 se distingue de la derivada de la expresión radicando x^3+5 sólo por el factor constante 1/3, o sea, $x^2=(1/3)(x^3+5)'$.

En general, si una función integrando es el producto de dos factores uno de los cuales depende de cierta función $\psi(x)$ y el otro es la derivada de $\psi(x)$ (con precisión hasta el factor constante), entonces es conveniente efectuar el cambio de la variable por la fórmula $\psi(x)=t$.

1333. Hallar la integral $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}\,dx$.

Resolución. Escribamos la integral dada en la forma $\int (2\ln x+3)^3\frac{1}{x}dx$. Como la derivada de la expresión $2\ln x+3$ es igual a $2/x$ y el segundo factor $1/x$ no se distingue de esta variable sino que por el coeficiente constante 2, hace falta efectuar la sustitución $2\ln x+3=t$. Entonces $2\cdot\frac{dx}{x}=dt$, $\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\,dt$. Por consiguiente,

$$\int (2\ln x+3)^3\cdot\frac{dx}{x}=\int t^3\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int t^3\,dt=\frac{1}{8}\,t^4+C=$$
$$=\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C.$$

1334. Hallar la integral $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

Resolución. Efectuemos la sustitución $f(x)=t$. Entonces $f'(x)\,dx=dt$ y

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C.$$

Por ejemplo,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Aquí no escribimos el signo de módulo, ya que $x^2+1>0$.

1335. Hallar la integral $\int \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{f/x}}$.

Resolución. Hacemos $f(x)=t$. Entonces $f'(x)\,dx=dt$ y

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-1/2}\,dt=\frac{t^{1/2}}{1/2}+C=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{f(x)}+C.$$

Notemos que la integral dada se podría hallar con ayuda de la sustitución $\sqrt{f(x)}=t$.

1336. Hallar la integral $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ si $a\neq 0$.

Resolución. Para reducir la integral a una inmediata (véase la fórmula IV) dividimos el numerador y el denominador de la expresión integrando por a^2:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\int \frac{(dx)/a^2}{1+(x/a)^2}=\frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2}.$$

Hemos colocado el factor constante $1/a$ bajo el signo de diferencial. Examinando x/a como nueva variable, obtendremos

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Habríamos llegado al mismo resultado también con ayuda de la sustitución $x=at$.

1337. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ si $a>0$.

Resolución. Dividiendo el numerador y el denominador por a, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{(dx)/a}{\sqrt{1-(x/a)^2}}=\int \frac{d\,(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}}.$$

Tomando x/a como nueva variable, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+C.$$

Completemos ahora la tabla de integrales inmediatas con las fórmulas siguientes:

XVI. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C.$

XVII. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx=2\sqrt{f(x)}+C.$

XVIII. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$

XIX. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$

XX. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+C.$

XXI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}}=\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}|+C.$

XXII. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C=\ln|\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x|+C.$

XXIII. $\int \frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+C.$

XXIV. $\int \operatorname{tg} x\,dx=-\ln|\cos x|+C.$

XXV. $\int \operatorname{ctg} x\,dx=\ln|\operatorname{sen} x|+C.$

Las fórmulas I—XXV hay que aprenderlas de memoria, ya que la mayoría de las integrales que se utilizan en la práctica se reducen a las mismas.

1338. Hallar la integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$.

Resolución. Efectuamos la sustitución $\sqrt{2x-9}=t$; entonces $2x-9=t^2$, $x=(t^2+9)/2$ y $dx=t\,dt$. De suerte que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}=\int \frac{t\,dt}{\frac{t^2+9}{2}\cdot t}=2\cdot\int \frac{dt}{t^2+9}.$$

Aplicando la fórmula XVIII, obtenemos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.$$

1339. Hallar la integral $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$.

Resolución. Efectuamos la sustitución $\cos^2 x = t$; entonces $-2\cos x \operatorname{sen} x \times \times x\, dx = dt$, o sea, $\operatorname{sen} 2x\, dx = -dt$. Ahora hallamos

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}\, dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = -\operatorname{arcsen}\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -\operatorname{arcsen}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C$$

(hemos utilizado la fórmula XX).

1340. Hallar la integral $\int \left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}+3\right)^2 \cos\frac{x}{2}\, dx$.

Resolución. Aplicamos la sustitución $2\operatorname{sen}(x/2)+3=t$; entonces $\cos(x/2)\, dx = dt$ y

$$\int \left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}+3\right)^2 \cos\frac{x}{2}\, dx = \int t^2\, dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}+3\right)^3 + C.$$

1341. Hallar la integral $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$.

Resolución. Aplicamos la sustitución $x^5 = t$; entonces $5x^4\, dx = dt$, $x^4\, dx = (1/5)\, dt$ y

$$\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} = \frac{1}{5}\ln|t+\sqrt{t^2-2}| + C$$

(véase la fórmula XXI). De suerte que

$$\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \frac{1}{5}\ln|x^5+\sqrt{x^{10}-2}| + C.$$

1342. Hallar la integral $\int \frac{x\, dx}{x^4+2x^2+5}$.

Resolución. Transformando el denominador de la fracción, obtenemos $x^4+2x^2+5=(x^2+1)^2+4$. Efectuamos la sustitución $x^2+1=t$; entonces $x\, dx = (1/2)\, dt$. De aquí,

$$\int \frac{x\, dx}{x^4+2x^2+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C$$

(véase la fórmula XVIII). De este modo,

$$\int \frac{x\, dx}{x^4+2x^2+5} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2} + C.$$

1343. Hallar la integral $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}\, dx$.

Resolución. Hacemos $e^{2x}=t$, entonces $e^{2x}\, dx = (1/2)\, dt$ y

$$\int \frac{e^{2x}\, dx}{e^{4x}-5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| + C$$

(hemos aplicado la fórmula XIX).

Pues bien

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}-5}=\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right|+C.$$

1344. Hallar la integral $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}+5}$.

Resolución. Efectuando la misma sustitución que en el ejercicio precedente, obtenemos

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}+5}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+5}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}}+C.$$

1345. Hallar la integral $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{x\cdot\operatorname{sen}2\sqrt{x}}\,dx$.

Resolución. Haciendo $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, obtendremos

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\operatorname{sen}2\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{(\operatorname{sen}t+\cos t)\cdot 2t}{t\operatorname{sen}2t}\,dt=\int \frac{\operatorname{sen}t+\cos t}{\operatorname{sen}t\cdot\cos t}\,dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\operatorname{sen}t}\right)dt=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C$$

(véanse las fórmulas XXII y XXIII).

Retornando a la vieja variable, obtendremos

$$\int \frac{(\operatorname{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})}{\sqrt{x}\cdot\operatorname{sen}2\sqrt{x}}\,dx=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}}{2}\right|+C.$$

Hallar las integrales:

1346. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}\,dx$. **1347.** $\int x^3(1-2x^4)^3\,dx$.

1348. $\int \operatorname{sen}(2-3x)\,dx$. **1349.** $\int x\operatorname{ch}(5x^2+3)\,dx$.

1350. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$. **1351.** $\int x(x^2+1)^{3/2}\,dx$.

1352. $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$. **1353.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$.

1354. $\int \frac{\operatorname{sen}4x\,dx}{\cos^4 2x+4}$. **1355.** $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$.

1356. $\int \frac{e^{x/2}\,dx}{\sqrt{16-e^x}}$. **1357.** $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$.

Indicación: representar la integral en la forma de una suma de integrales.

1358. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-3x^3}}$. **1359.** $\int \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$.

1360. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$. **1361.** $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x}\,dx$. **1362.** $\int \frac{x\,dx}{2x^4+5}$.

3. Integración por partes. Se llama *integración por partes* a la determinación de la integral por la fórmula

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du,$$

donde $u = \varphi(x)$, $u = \psi(x)$ son funciones de x, continuamente derivables. Con ayuda de esta fórmula la obtención de la integral $\int u\,dv$ se reduce a la determinación de otra integral $\int v\,du$; su empleo es racional en los casos en que la última integral es más sencilla de la inicial o bien es semejante a ella.

En este caso por u se toma tal función que, al derivarla, se simplifica y por dv se toma aquella parte de la expresión integrando cuya integral se conoce o puede ser hallada.

Así, por ejemplo, para las integrales del tipo $\int P(x)\,e^{ax}dx$, $\int P(x)\times$ $\times \operatorname{sen} ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$, donde $P(x)$ es el polinomio, como u se debe tomar $P(x)$ y como dv las expresiones $e^{ax}\,dx$, $\operatorname{sen} ax\,dx$, $\cos ax\,dx$, respectivamente; para las integrales del tipo $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsen x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$ como u se toman las funciones $\ln x$, $\arcsen x$, $\arccos x$, respectivamente, y como dv se toma la expresión $P(x)\,dx$.

1363. Hallar la integral $\int \ln x\,dx$.

Resolución. Hacemos $u = \ln x$, $dv = dx$; entonces $v = x$, $du = \frac{dx}{x}$. Utilizando la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx =$$
$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

1364. Hallar la integral $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Resolución. Sea $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$; entonces $du = \frac{\partial x}{1+x^2}$, $v = x$. Con ayuda de la formula de integración por partes hallamos

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

1365. Hallar la integral $\int x\operatorname{sen} x\,dx$.

Resolución. Hacemos $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$; entonces $du = dx$, $v =$ $= -\cos x$. De aquí

$$\int x\operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Si hubiésemos escogido las expresiones u y dv de otro modo, por ejemplo, $u = \operatorname{sen} x$, $dv = x\,dx$, habríamos obtenido $du = \cos x\,dx$, $v = (1/2)\,x^2$, de donde

$$\int x\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} x - \int \frac{1}{2}x^2\cos x\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\int x^2\cos x\,dx,$$

y habríamos llegado a una integral más compleja que la inicial, ya que el grado de la potencia del factor adjunto a la función trigonométrica habría sido elevado en una unidad.

1366. Hallar la integral $\int x^2 e^x \, dx$.

Resolución. Hacemos $u = x^2$, $dv = e^x \, dx$; entonces $du = 2x \, dx$, $v = e^x$. Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

Hemos logrado la disminución del grado de la potencia de x en una unidad. Para hallar $\int x e^x \, dx$, aplicamos una vez más la integración por partes. Hacemos $u = x$, $dv = e^x \, dx$; entonces $du = dx$, $u = e^x$ y

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x \, dx \right) =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

1367. Hallar la integral $I = \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

Resolución. Sean $u = e^x$, $dv = \operatorname{sen} x \, dx$; entonces $du = e^x \, dx$, $v = -\cos x$. Por consiguiente,

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

Pareciera que la integración por partes no ha logrado su objetivo, ya que la integral no se ha simplificado. No obstante, probemos integrar por partes una vez más. Haciendo $u = e^x$, $dv = \cos x \, dx$, de donde $du = e^x \, dx$, $v = \operatorname{sen} x$, obtenemos

$$I = -e^x \cos x + (e^x \operatorname{sen} x - I), \text{ o sea},$$

$$I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - I.$$

Habiendo efectuado dos veces la operación de integración por partes, hemos obtenido otra vez la integral inicial en el segundo miembro. Ahora bien, llegamos a la ecuación con la integral desconocida I. A partir de esta ecuación encontramos

$$2I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x, \text{ o sea, } I = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

En el resultado final hemos añadido la constante arbitraria a la función primitiva hallada.

1368. 1) Hallar la integral $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ si $a > 0$.

Resolución. Hacemos $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$, de donde $du = -\dfrac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $v = x$. Por consiguiente,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx,$$

o bien

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx + a^2 \arcsen \frac{x}{a}.$$

De ello obtenemos

$$2 \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen \frac{x}{a},$$

o sea,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\,x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

2) Hallar la integral $\int \sqrt{x^2+\lambda}\,dx$.

1369. Deducir la fórmula recurrente para la integral $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

Resolución. La integral dada se puede transformar así:

$$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\int \frac{x\cdot x\,dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int x\cdot\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Hacemos $u=x$, $dv=\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}$; entonces $du=dx$,

$$v=\frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^{-n}\cdot d\,(x^2+a^2)=-\frac{1}{2\,(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}},$$

de donde

$$I_n=\frac{1}{a^2}\,I_{n-1}+\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2\,(n-1)}\cdot\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right],$$

o bien

$$I_n=\frac{1}{a^2}\cdot I_{n-1}+\frac{x}{2a^2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2\,(n-1)}\,I_{n-1},$$

o sea,

$$I_n=\frac{x}{2a^2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\,\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Haciendo $n=2$, obtenemos la expresión de la integral I_2 por medio de funciones elementales. Haciendo ahora $n=3$, hallamos la integral I_3 (puesto que la integral I_2 ya se ha encontrado). De este modo, se puede hallar I_n para un n positivo entero cualquiera.

Hallar las integrales:

1370. $\int x\ln x\,dx$. **1371.** $\int \arcsin x\,dx$.

1372. $\int x^2\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. **1373.** $\int (x+1)\,e^x\,dx$.

1374. $\int x^2\,\mathrm{sen}\,x\,dx$. **1375.** $\int x^5e^{x^2}\,dx$.

Indicación: hacer $x^2=t$.

1376. $\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx$.

1377. $\int e^{2x}\cos x\,dx$. **1378.** $\int \mathrm{sen}\ln x\,dx$.

1379. $\int \mathrm{sen}\sqrt{x}\,dx$.

Indicación: hacer $\sqrt{x}=t$.

§ 2. Integración de fracciones racionales

1. Integración de fracciones elementales. Se llama *fracción racional* a la del tipo $P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Una fracción racional se denomina *propia* si el grado del polinomio $P(x)$ es inferior al grado del polinomio $Q(x)$; en el caso contrario la fracción se llama *impropia*.

Han recibido el nombre de fracciones *elementales* las fracciones propias del tipo siguiente:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, donde m es un número entero mayor que la unidad;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, donde $\dfrac{p^2}{4}-q<0$, o sea, el trinomio de segundo grado x^2+px+q no tiene raíces reales;

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, donde n es un número entero mayor que la unidad y el trinomio de segundo grado x^2+px+q no tiene raíces reales.

En los cuatro casos se supone que A, B, p, q, a son números reales. Las fracciones enumeradas las llamaremos fracciones simples de los tipos I, II, III y IV, respectivamente.

Examinemos las integrales de fracciones elementales de los primeros tres tipos. Tenemos

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C;$

II. $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C;$

III. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$

En efecto, para este caso particular de una fracción elemental del tipo III obtenemos

$$x^2+px+q\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}, \quad \text{o bien} \quad x^2+px+q=t^2+a^2,$$

donde $t=x+\dfrac{p}{2}$, $a=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ $\left(\text{aquí } \dfrac{p^2}{4}-q<0\right)$, de donde

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

1380. Hallar la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+25} = \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C.$$

1381. Hallar la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{5/2}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{5}+C.$$

Mostraremos cómo se integran, en forma general, las fracciones elementales del tipo III.

Se necesita hallar $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx,\ \frac{p^2}{4}-q<0.$

Separamos en el numerador de la fracción la derivada del denominador. Para esto representemos el numerador en la forma

$$Ax+B=(2x+p)\cdot\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B.$$

Entonces

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

En la primera integral el numerador es la derivada del denominador; por eso

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx=\ln(x^2+px+p)+C,$$

como $x^2+px+q>0$ para un valor cualquiera de x. La segunda integral, como ya hemos señalado, se determina por la fórmula

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Y bien,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

1382. Hallar la integral $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx.$

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx=\int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}\,dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx+$$

$$+5\int \frac{dx}{x^2-4x+8}=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+5\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C.$$

1383. Hallar la integral $\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}=\int \frac{\frac{1}{4}(4x+2)-\frac{1}{2}}{2x^2+2x+5}\,dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{4}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3/2}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{3/2}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C.$$

1384. Hallar la integral $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}\,dx$.

Resolución. En esta integral efectuemos previamente el cambio de la variable $x^2=t$, entonces $2x\,dx=dt$, $x\,dx=(1/2)\,dt$. Por consiguiente,

$$\int \frac{(2x^2+3)x\,dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{(2t+3)\,dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)+2}{t^2+t+1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt+\int \frac{dt}{t^2+t+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Examinemos ahora el caso particular de la integral de una fracción elemental del tipo IV.

Para la integral $I_n=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ (n es un número positivo entero) tiene lugar la siguiente fórmula recurrente:

$$I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Esta fórmula permite, después de aplicada $(n-1)$ veces, reducir la integral dada I_n a la inmediata $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

1385. Hallar la integral $I_3=\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Resolución. Aquí $n = 3$. Después de la primera aplicación de la fórmula recurrente obtenemos

$$I_3=\frac{1}{2\cdot(3-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{3-1}}+\frac{2\cdot3-3}{2\cdot3-2}\cdot I_{3-1}-\frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}I_2.$$

Aplicamos otra vez a la integral $I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ la fórmula recurrente (aquí hacemos $n=2$):

$$I_2=\frac{1}{2(2-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{2-1}}+\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}I_{2-1}=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+$$
$$+\frac{1}{2}I_1=\frac{x}{2(x^2+1)}\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Y bien,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\left[\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right]+C.$$

Finalmente tenemos

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C.$$

Vamos a mostrar ahora, en forma general, como se integran las fracciones elementales del tipo IV.

Se necesita encontrar $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$, $\frac{p^2}{4}-q<0$.

Separemos en el numerador la derivada del trinomio de segundo grado que está en el denominador:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx=$$
$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

La primera integral del segundo miembro de la igualdad se determina fácilmente con ayuda de la sustitución $x^2+px+q=t$ y la segunda la transformamos así:

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}.$$

Haciendo ahora $x+\frac{p}{2}=t$, $dx=dt$ y designando $q-\frac{p^2}{4}=a^2$, obtenemos

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

De este modo, la integración de una fracción elemental del tipo IV puede efectuarse con ayuda de la fórmula recurrente.

1386. Hallar la integral $\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=\int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)+(2-3)}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx-\int \frac{dx}{[(x+1)^2+9)]^2}.$$

Efectuamos en la primera integral el reemplazo $x^2+2x+10=z$, $(2x+2)\,dx=dz$ y que en la segunda integral hacemos $x+1=t$, $dx=dt$. De aquí

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=\frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2}-\int \frac{dt}{(t^2+9)^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\int z^{-2}\,dz-\int \frac{dt}{(t^2+9)^2}=-\frac{3}{2}z^{-1}-$$

$$-\left[\frac{1}{2(2-1)\cdot 9}\cdot\frac{t}{(t^2+9)^{2-1}}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\cdot\int\frac{dt}{t^2+9}\right]=$$

$$=-\frac{3}{2z}-\frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9}-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C.$$

Retornando a la vieja variable, obtenemos

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{(x+1)^2+9}-$$

$$-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-$$

$$-\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+10}-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

Hallar las integrales:

1387. $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$. **1388.** $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$. **1389.** $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$.

1390. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+2x^3+3}$. **1391.** $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}\,dx$.

1392. $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}\,dx$. **1393.** $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1}\,dx$.

1394. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^3}$. **1395.** $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$.

2. Integración de fracciones racionales con ayuda del desarrollo en fracciones simples. Antes de proceder a la integración de una fracción racional $P(x)/Q(x)$ es necesario efectuar las transformaciones algebraicas y cálculos siguientes:

1) si se da una fracción racional impropia, separar de ella la parte entera, o sea, representarla en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

donde $M(x)$ es un polinomio y $P_1(x)/Q(x)$, una fracción racional propia;

2) descomponer el denominador de la fracción en factores lineales y cuadráticos:

$$Q(x)=(x-a)^m\ \dots\ (x^2+px+q)^n\ \dots,$$

donde $\frac{p^2}{4} - q < 0$, o sea, el trinomio $x^2 + px + q$ tiene raíces conjugadas complejas;

3) desarrollar la fracción racional propia en fracciones simples:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{x-a} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_1x + C_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q} + \ldots;$$

4) calcular los coeficientes indeterminados $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots, B_n, C_n, \ldots$, para lo cual se debe reducir la última igualdad a un denominador común, agrupar los coeficientes adjuntos de iguales potencias de x en los miembros izquierdo y derecho de la identidad obtenida y resolver *el sistema de ecuaciones lineales respecto a los coeficientes buscados.* Los coeficientes pueden determinarse también por otro procedimiento, atribuyendo en la identidad obtenida valores numéricos arbitrarios a la variable x. Frecuentemente es útil combinar ambos métodos de cálculo de los coeficientes.

Como resultado, la integración de una fracción racional se reducirá a la determinación de las integrales del polinomio y de las fracciones racionales simples.

Caso 1. El denominador tiene sólo raíces reales diferentes o sea, se descompone en factores de primer grado que no se repiten.

1396. Hallar la integral $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx$.

Resolución. Como cada uno de los binomios $x-1$, $x-2$, $x-4$ forma parte del denominador en el primer grado, la fracción racional propia dada puede representarse como una suma de fracciones simples del tipo I:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}.$$

Eliminando los denominadores, obtendremos

$$x^2 + 2x + 6 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2). \quad (*)$$

Por lo tanto,

$$x^2 + 2x + 6 = A(x^2 - 6x + 8) + B(x^2 - 5x + 4) + C(x^2 - 3x + 2).$$

Agrupamos los términos con exponentes iguales:

$$x^2 + 2x + 6 = (A + B + C)x^2 + (-6A - 5B - 3C)x + (8A + 4B + 2C).$$

Comparando los coeficientes de las potencias iguales de x, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B + C = 1, \\ -6A - 5B - 3C = 2, \\ 8A + 4B + 2C = 6, \end{cases}$$

del cual hallamos $A = 3$, $B = -7$, $C = 5$.

De suerte que el desarrollo de la fracción racional en fracciones simples tiene la forma

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4}.$$

Las incógnitas A, B, C en el desarrollo pudieron determinarse también de otro modo. Después de eliminado el denominador, se puede asignar a x tantos valores particulares como incógnitas se contienen en la ecuación, en el caso dado, tres valores particulares.

Es sobre todo cómodo atribuir a x valores que son las raíces reales del denominador. Utilicemos este procedimiento para resolver el problema dado. Una vez eliminado el denominador obtenemos la igualdad (*). Las raíces reales del denominador son los números 1, 2 y 4. Supongamos que en esta igualdad $x = 1$, entonces

$$1^2 + 2\cdot 1 + 6 = A\,(1-2)\,(1-4) + B\,(1-1)\,(1-4) + C\,(1-1)\,(1-2),$$

de donde $9 = 3A$, o sea $A = 3$. Haciendo $x = 2$, obtenemos $14 = -2B$, o sea, $B = -7$; haciendo $x = 4$, tenemos $30 = 6C$, o sea, $C = 5$. Como resultado hemos obtenido los mismos valores que con el primer método de determinación de las incógnitas.

De este modo,

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx = 3\int \frac{dx}{x-1} - 7\int \frac{dx}{x-2} + 5\int \frac{dx}{x-4} =$$

$$= 3\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + 5\ln|x-4| + C = \ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + C.$$

Caso 2. El denominador tiene sólo raíces reales, además, algunas de ellas son múltiples, o sea, el denominador se descompone en factores de primer grado y algunos de ellos se repiten.

1397. Hallar la integral $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}\,dx$.

Resolución. Al factor $(x-1)^3$ le corresponde la suma de tres fracciones simples $\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$ y al factor $x+3$ le corresponde la fracción simple $\frac{D}{x+3}$. Así,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}.$$

Eliminemos el denominador:

$$x^2 + 1 = A\,(x+3) + B\,(x-1)\,(x+3) + C\,(x-1)^2\,(x+3) + D\,(x-1)^3.$$

Las raíces reales del denominador son los números 1 y -3. Haciendo $x = 1$, obtenemos $2 = 4A$, o sea, $A = 1/2$. Cuando $x = -3$ tenemos $10 = -64D$, o sea, $D = -5/32$.

Comparemos ahora los coeficientes adjuntos a la potencia superior de x, o sea, los de x^3. En el primer miembro no hay ningún término con x^3, o sea, el coeficiente de x^3 es igual a 0. En el segundo miembro el coeficiente de x^3 es igual a $C + D$. De suerte que $C + D = 0$, de donde $C = 5/32$.

Queda por determinar el coeficiente B. Para esto se necesita tener una ecuación más. Esta ecuación se puede obtener comparando los coeficientes de potencias iguales de x (por ejemplo, los de x^2) o bien atribuyendo a x un valor numérico cualquiera. Es más cómodo tomar un valor tal con el cual sea preciso efectuar el menor número posible de cálculos. Haciendo, por ejemplo, $x = 0$, obtenemos

$$1 = 3A - 3B + 3C - D, \quad \text{o bien,} \quad 1 = \frac{3}{2} - 3B + \frac{15}{32} + \frac{5}{32}, \quad \text{o sea,} \quad B = \frac{3}{8}.$$

El desarrollo final de la fracción dada en fracciones simples tiene la forma

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{3}{8(x-1)^2} + \frac{5}{32(x-1)} + \frac{5}{32(x+3)}.$$

De este modo, obtenemos

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{32}\int \frac{dx}{x-1}-$$
$$-\frac{5}{32}\int \frac{dx}{x+3}=-\frac{1}{4(x-1)^3}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

Caso 3. Entre las raíces del denominador las hay complejas simples, o sea, la descomposición del denominador contiene multiplicadores cuadráticos que no se repiten.

1398. Hallar la integral $\int \frac{dx}{x^5-x^2}$.

Resolución. Descomponemos el denominador en factores:

$$x^5-x^2=x^2(x^3-1)=x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Entonces

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Eliminemos el denominador:

$$1=A(x-1)(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+$$
$$+Cx^2(x^2+x+1)+(Dx+E)x^2(x-1).$$

Las raíces reales del denominador son los números 0 y 1.
Cuando $x=0$ tenemos $1=-A$, o sea, $A=-1$.
Cuando $x=1$ tenemos $1=3C$, o sea, $C=1/3$.
Escribimos la igualdad precedente en la forma

$$1=A(x^3-1)+B(x^4-x)+C(x^4+x^3+x^2)+Dx^4+Ex^3-Dx^3-Ex^2.$$

Comparando los coeficientes de x^4, x^3, x^2, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} B+C+D=0, \\ A+C+E-D=0, \\ C-E=0, \end{cases}$$

del cual hallamos: $B=0$, $D=-1/3$, $E=1/3$. De suerte que

$$\frac{1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^5-x^2}=-\int \frac{dx}{x^2}+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$
$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Caso 4. **Entre las raíces del denominador las hay complejas múltiples, o sea, la descomposición del denominador contiene multiplicadores cuadráticos que se repiten.**

1399. Hallar la integral $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Resolución. Puesto que x^2+1 es un factor doble, entonces

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Eliminando los denominadores, obtenemos

$$x^3-2x=Ax+B+(Cx+D)(x^2+1).$$

Igualando los coeficientes de iguales potencias de x:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1=C, \\ x^2 & 0=D, \\ x & -2=A+C;\ A=-3, \\ x^0 & 0=B+D;\ B=0. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx=\int \frac{-3x\,dx}{(x^2+1)^2}+\int \frac{x\,dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Notemos que la integral dada podía determinarse más sencillamente con ayuda de la sustitución $x^2+1=t$.

1400. Hallar la integral $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx$.

Resolución. Separemos la parte entera de la fracción racional impropia dada:

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \cline{2-2} -\ x^3 \qquad +2x & x+3+\dfrac{3x+1}{x^2+2} \\ \hline 3x^2+3x+7 & \\ -\ 3x^2 \qquad +6 & \\ \hline 3x+1. & \end{array}$$

Así,

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}=x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}.$$

De aquí hallamos

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx=\int\left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx=$$

$$=\int x\,dx+3\int dx+\int \frac{3x+1}{x^2+2}\,dx=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+2}+\int \frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

1401. Hallar la integral $\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx$.

Resolución. Puesto que la función integrando es una fracción propia, conviene representarla en forma de la suma de fracciones simples. Es fácil ver que el polinomio $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ se anula cuando $x = -1$, por eso este polinomio se divide exactamente por $x + 1$.

Efectuamos la división:

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2+11x+6 & x+1 \\ \underline{x^3+\ \ x^2} \quad\quad\quad\quad & \overline{x^2+5x+6} \\ 5x^2+11x \quad\ \ & \\ \underline{5x^2+\ \ 5x} \quad\ \ & \\ 6x+6 & \\ \underline{6x+6} & \end{array}$$

Por consiguiente,

$$x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3),$$

$$\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}=\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}.$$

Eliminando los denominadores, obtendremos

$$x+4=A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2).$$

Haciendo $x = -1$, hallamos $3 = 2A$, o sea, $A = 3/2$. Si $x = -2$, entonces obtenemos $2 = -B$, o sea, $B = -2$, Cuando $x = -3$, resulta $1 = 2C$, o sea, $C = 1/2$.

Pues bien,

$$\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x+1|-2\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+C.$$

1402. Hallar la integral $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$.

Resolución. Es necesario, ante todo, separar la parte entera:

$$\begin{array}{r|l} x^5+1 & x^4-8x^2+16 \\ \underline{x^5-8x^3+16x} & \overline{x+\dfrac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16}} \\ 8x^3-16x+1 & \end{array}$$

Por consiguiente,

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}=x+\frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16}=x+\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Descomponemos la fracción propia en fracciones simples:

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}.$$

Eliminamos los denominadores:

$$8x^3-16x+1=A(x+2)^2+B(x-2)(x+2)^2+$$
$$+C(x-2)^2+D(x-2)^2(x+2).$$

Haciendo $x = 2$, encontramos $33 = 16A$, o sea, $A = 33/16$.
Para $x = -2$ obtenemos $-31 = 16C$, o sea, $C = -31/16$.
Si $x = 0$, entonces $1 = 4A - 8B + 4C + 8D$.
Reemplazando A y C por sus valores, obtenemos

$$1=\frac{33}{4}-8B-\frac{31}{4}+8D, \text{ o sea, } \quad -16B+16D=1.$$

Para hallar B y D escribamos una ecuación más. Comparando los coeficientes de x^3, obtenemos $8 = B + D$. Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} B + D = 8, \\ -16B + 16D = 1 \end{cases}$$

hallamos $D = 129/32$, $B = 127/32$.

De suerte que

$$\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}\,dx = \int \left[x + \frac{33/16}{(x-2)^2} + \frac{127/32}{x-2} - \frac{31/16}{(x+2)^2} + \frac{129/32}{x+2}\right] dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{127}{32}\ln|x-2| + \frac{31}{16(x+2)} + \frac{129}{32}\ln|x+2| + C.$$

1403. Hallar la integral $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^5}$.

Resolución. La función integrando es una fracción racional propia y se podría hallar la integral representando esta fracción en forma de la suma de fracciones simples. Sin embargo, la determinación de la integral puede ser simplificada considerablemente si se efectúa el cambio de la variable $x - 1 = t$; entonces $x = t + 1$ y $dx = dt$. Como resultado obtenemos

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^5} = \int \frac{(t+1)^2 \cdot dt}{t^5} = \int \frac{t^2+2t+1}{t^5}\,dt = \int \frac{dt}{t^3} + 2\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^5} =$$
$$= -\frac{1}{2t^2} - \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{4t^4} + C = \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} -$$
$$- \frac{1}{4(x-1)^4} + C = -\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4} + C.$$

1404. Hallar la integral $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}$.

Resolución. Transformamos el denominador: $x^4 + 6x^2 + 5 = (x^2+3)^2 - 4$. Ahora tenemos

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5} = \int \frac{x\,dx}{(x^2+3)^2-4}.$$

Efectuamos el cambio $x^2+3=t$, entonces $2x\,dx=dt$ y

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5} = \int \frac{x\,dx}{(x^2+3)^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-4} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{x^2+5} + C.$$

Los dos últimos problemas muestran que antes de proceder a la integración de una fracción racional conviene, a veces, efectuar el cambio de la variable.

Hallar las integrales:

1405. $\int \frac{x+2}{x(x-3)}\,dx$. **1406.** $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx$.

1407. $\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}\,dx$. **1408.** $\int \frac{dx}{x^3-8}$.

1409. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}\,dx$. **1410.** $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$.

1411. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$. **1412.** $\int \frac{(19/16)x^2+x+1}{(x^2+4)(x^2+2x+5)}\,dx$.

1413. $\int \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$. **1414.** $\frac{x^2\,dx}{x^2-4x+3}$.

Indicación: representar el denominador en la forma $x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2$.

1415. $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}\,dx$. **1416.** $\int \frac{x^4}{x^4-16}\,dx$.

1417. $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}\,dx$.

§ 3. Integración de funciones irracionales elementales

1. **Integrales del tipo** $\int R\left(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, (ax+b)^{m_2/n_2}, \ldots\right) dx$, **donde** R **es una función racional;** m_1, n_1, m_2, n_2, ... **son números enteros.** Con ayuda de la sustitución $ax+b=t^s$, donde s el mínimo común múltiplo de los números n_1, n_2, ..., la integral indicada se transforma en integral de la función racional.

1418. Hallar la integral $I=\int \frac{dx}{(2x+1)^{2/3}-(2x+1)^{1/2}}$.

Resolución. Aquí $n_1=3$, $n_2=2$; por eso $s=6$. Aplicamos la sustitución $2x+1=t^6$, entonces $x=(t^6-1)/2$, $dx=3t^5\,dt$ y, por consiguiente.

$$I=\int \frac{3t^5\,dt}{t^4-t^3}=3\int \frac{t^2\,dt}{t-1}=3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt=$$
$$=3\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C.$$

Retornamos a la vieja variable. Puesto que $t=(2x+1)^{1/6}$, entonces

$$I=\frac{3}{2}(2x+1)^{1/3}+3(2x+1)^{1/6}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.$$

2. **Integral del tipo** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Tales integrales por medio de la separación del cuadrado perfecto a partir de un trinomio de segundo grado se reducen a las integrales inmediatas XX ó XXI.

1419. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Resolución. Transformemos el trinomio de segundo grado en forma de $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. Entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C.$$

1420. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsen\frac{x-2/3}{1/3}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsen(3x-2)+C.$$

3. **Integrales del tipo** $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. Para hallar esta integral separamos en el numerador la derivada del trinomio de segundo grado que está bajo el signo de la raíz y representamos la integral como suma de dos integrales:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=$$
$$=\frac{A}{2a}\int \frac{d\,(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

La primera de las integrales obtenidas es la integral inmediata XVII y la segunda se examina en el punto 2.

1421. Hallar la integral $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx$.

Resolución. Separamos en el numerador la derivada de l aexpresión radicando:

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx=\int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx=$$
$$=\frac{5}{4}\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx-13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}=$$
$$=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}}=$$
$$\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+C.$$

1422. Hallar la integral $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx=\int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx=$$
$$=-\frac{3}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx+13\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=$$
$$=-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C.$$

4. **Integrales del tipo** $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Con ayuda de la sustitución $x-\alpha=1/t$ esta integral se reduce a la examinada en el punto 2.

1423. Hallar la integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

Resolución. Hacemos $x = 1/t$, entonces $dx = -(1/t^2)\,dt$ y

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} = -\int \frac{(dt)/t^2}{(1/t)\sqrt{5/t^2-2/t+1}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} = -\ln|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}|+C=$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right|+C = -\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C.$$

1424. Hallar la integral $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

Resolución. Haciendo $x-1=1/t$, obtenemos $x = 1/t+1$ y $dx = -(1/t^2)\,dt$. Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} = -\int \frac{(dt)/t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+3}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{-1-\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}+3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|+C=$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+C=$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right|+C.$$

1425. Hallar la integral $I = \int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx$.

Resolución. Escribiendo el numerador de la función integrando en la forma $3x+2 = 3(x+1)-1$, obtenemos

$$I = \int \frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx.$$

Representamos la integral dada como diferencia de dos integrales:

$$I = 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

Aplicamos a la primera integral la fórmula XXI y a la segunda, la sustitución $x+1=1/t$:

$$I = 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \int \frac{(dt)/t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}} =$$

$$= 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} =$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+2}\right|+\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C=$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}\right|+C.$$

5. Integrales del tipo $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, **donde** $P_n(x)$ **es un polinomio de grado** n. La integral de este tipo se encuentra con ayuda de la identidad

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $(n-1)$ con coeficientes indeterminados; λ es un número.

Derivando la identidad indicada y reduciendo el resultado al denominador común, obtendremos la igualdad de dos polinomios a partir de la cual pueden determinarse los coeficientes del polinomio $Q_{n-1}(x)$ y el número λ.

1426. Hallar la integral $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

Resolución. Aquí $n=3$, por eso la identidad respectiva tiene la forma

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx=(b_0x^2+b_1x+b_2)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Derivando ambos miembros, obtenemos

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}=(2b_0x+b_1)\sqrt{x^2+2x+2}+$$

$$+(b_0x^2+b_1x+b_2)\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Eliminamos el denominador:

$$x^3+2x^2+3x+4=(2b_0x+b_1)(x^2+2x+2)+(b_0x^2+b_1x+b_2)(x+1)+\lambda,$$

o bien,

$$x^3+2x^2+3x+4=3b_0x^3+(5b_0+2b_1)x^2+(4b_0+3b_1+b_2)x+$$
$$+(2b_1+b_2+\lambda).$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales de x, obtendremos

$$\begin{cases} 3b_0=1, \\ 5b_0+2b_1=2, \\ 4b_0+3b_1+b_2=3, \\ 2b_1+b_2+\lambda=4. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, hallamos $b_0=1/3$, $b_1=1/6$, $b_2=7/6$, $\lambda=5/2$. Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx=\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+$$

$$+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

Hallar las integrales:

1427. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$. **1428.** $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

1429. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$. **1430.** $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$.

1431. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\,dx$. **1432.** $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$.

1433. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$. **1434.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$.

1435. $\int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$. **1436.** $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$.

6. Integrales de diferenciales binomias $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, donde m, n, p son números racionales. Como demostró P. Chébishev, las integrales de diferenciales binomias se expresan por funciones elementales solamente en tres casos:

1) p es un número entero; entonces la integral dada se reduce a la integral de la función racional con ayuda de la sustitución $x=t^s$, donde s es el mínimo común múltiplo de las fracciones m y n;

2) $(m+1)/n$ es un número entero; en este caso la integral dada se transforma en una integral racional con ayuda de la sustitución $a+bx^n=t^s$;

3) $(m+1)/n+p$ es un número entero; en este caso lleva al mismo objetivo la sustitución $ax^{-n}+b=t^s$, donde s es el denominador de la fracción p.

1437. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$.

Resolución. Aquí la función integrando se puede escribir de la forma $x^{-1/2}(x^{1/4}+1)^{-10}$, o sea, $p=-10$ es un número entero. Por lo tanto, tenemos el primer caso de la integrabilidad de diferencial binomia. Por eso conviene efectuar la sustitución $x=t^4$; entonces $dx=4t^3\,dt$ y la integral buscada tiene la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}=\int \frac{4t^3\,dt}{t^2(t+1)^{10}}=4\int \frac{t\,dt}{(t+1)^{10}}.$$

La última integral se determina así:

$$\int \frac{t\,dt}{(t+1)^{10}}=\int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}\,dt=\int \frac{dt}{(t+1)^9}-\int \frac{dt}{(t+1)^{10}}=\int (t+1)^{-9}\,d(t+1)-$$
$$-\int (t+1)^{-10}\,d(t+1)=-\frac{1}{8(t+1)^8}+\frac{1}{9(t+1)^9}+C.$$

De este modo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}=-\frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8}+\frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}+C.$$

1438. Hallar la integral $\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

Resolución. Escribiendo la función integrando en la forma $x^3(a^2-x^2)^{-3/2}$, tenemos $m=3$, $n=2$, $p=-3/2$. Como $(m+1)/n=(3+1)/2=2$ es un número entero, entonces tiene lugar el segundo caso de integrabilidad. Utilizando la sustitución $a^2-x^2=t^2$, obtenemos $-2x\,dx=2t\,dt$, $x\,dx=-t\,dt$,

$x^2 = a^2 - t^2$. Por lo tanto,

$$\int x^3 (a^2-x^2)^{-3/2}\, dx = -\int (a^2-t^2)\, t^{-3}\cdot t\, dt = -\int \frac{a^2-t^2}{t^2}\, dt =$$

$$= \int dt - a^2 \int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{a^2}{t} + C = \frac{t^2+a^2}{t} + C = \frac{2a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

1439. Hallar la integral $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Resolución. Aquí $m=-4$, $n=2$, $p=-1/2$ y $(m+1)/n+p = [(-4+1)/2 - 1/2 = -2$, o sea un número entero. Por eso tiene lugar el tercer caso de la integrabilidad de una diferencial binomia. Hacemos $x^{-2}+1 = t^2$; entonces $-2x^{-3}\, dx = 2t\, dt$, $x^{-3}\, dx = -t\, dt$. Transformamos la integral dada del modo siguiente:

$$I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}\, dx =$$

$$= \int x^{-4}[x^2(x^{-2}+1)]^{-1/2}\, dx = \int x^{-2}(x^{-2}+1)^{-1/2} x^{-3}\, dx.$$

Por consiguiente,

$$I = -\int (t^2-1)\, t^{-1}\cdot t\, dt = -\int (t^2-1)\, dt =$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + C = \sqrt{x^{-2}+1} - \frac{\sqrt{(x^{-2}+1)^3}}{3} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + C = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C.$$

Hallar las integrales:

1440. $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+1)^2}$. **1441.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\, dx$.

1442. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. **1443.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

1444. $\int \sqrt[3]{x}\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3}\, dx$. **1445.** $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

§ 4. Integración de funciones trigonométricas

1. Integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, donde R es una función racional. Las integrales del tipo indicado se reducen a las de funciones racionales con ayuda de la llamada *sustitución trigonométrica universal* $\operatorname{tg}(x/2) = t$.

Como resultado de esta sustitución tenemos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t;\ dt = \frac{2\, dt}{1+t^2}.$$

1446. Hallar la integral $\int \frac{dx}{4 \operatorname{sen} x+3 \cos x+5}$.

Resolución. La función integrando depende racionalmente de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$; efectuamos la sustitución $\operatorname{tg}(x/2)=t$; entonces $\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=$ $=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ y

$$\int \frac{dx}{4 \operatorname{sen} x+3 \cos x+5}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int \frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C.$$

Retornando a la vieja derivada, obtenemos

$$\int \frac{dx}{4 \operatorname{sen} x+3 \cos x+5}=-\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)+2}+C.$$

1447. Hallar la integral $\frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos x}$.

Resolución. Suponiendo $\operatorname{tg}(x/2)=t$, obtendremos

$$\int \frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=2\int \frac{dt}{(a^2+b^2)(1+t^2)-(a^2-b^2)(1-t^2)}=\int \frac{dt}{a^2t^2+b^2}=$$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{d(at)}{(at)^2+b^2}=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{at}{b}+C=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

En muchos casos la sustitución universal $\operatorname{tg}(x/2)=t$ lleva a cálculos complicados, ya que al aplicarla $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se expresan por t en forma de fracciones racionales que contienen t^2.

En algunos casos particulares la determinación de las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ puede ser simplificada.

1. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es una función impar respecto a $\operatorname{sen} x$, o sea, si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x)=-R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, entonces la integral se racionaliza con ayuda de la sustitución $\cos x=t$.

2. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es una función impar respecto a $\cos x$, o sea, si $R(\operatorname{sen} x, -\cos x)=-R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, entonces la integral se racionaliza por medio de la sustitución $\operatorname{sen} x=t$.

3. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es una función par respecto a $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, o sea, si $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x)=R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, entonces lleva al objetivo la sustitución $\operatorname{tg} x=t$.

1448. Hallar la integral $\int \frac{(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^3 x)\,dx}{\cos 2x}$.

Resolución. Puesto que la función integrando es impar respecto al seno, hacemos $\cos x=t$. De aquí $\operatorname{sen}^2 x=1-t^2$, $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2t^2-1$,

$dt = -\text{sen } x\, dx$. De este modo

$$\int \frac{\text{sen } x+\text{sen}^3 x)\, dx}{\cos 2x}=\int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1}=\int \frac{(t^2-2)\, dt}{2t^2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}\, dt=\frac{1}{2}\int dt-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1}=$$

$$=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2})}{2t^2-1}=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right|+C.$$

Por consiguiente.

$$\int \frac{(\text{sen } x+\text{sen}^3 x)\, dx}{\cos 2x}=\frac{1}{2}\cos x-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.$$

Notemos que en el caso examinado la integral puede siempre escribirse en la forma $\int R^*(\text{sen}^2 x,\ \cos x)\,\text{sen } x\, dx$.

1449. Hallar la integral $\int \frac{(\cos^3 x+\cos^5 x)\, dx}{\text{sen}^2 x+\text{sen}^4 x}$.

Resolución. Aquí la función integrando es impar respecto al coseno. Por eso aplicamos la sustitución $\text{sen } x = t$; entonces $\cos^2 x = 1-\text{sen}^2 x = 1-t^2$, $\cos x\, dx = dt$. Por lo tanto,

$$\int \frac{(\cos^3 x+\cos^5 x)\, dx}{\text{sen}^2 x+\text{sen}^4 x}=\int \frac{\cos^2 x\,(1+\cos^2 x)\cos x\, dx}{\text{sen}^2 x+\text{sen}^4 x}=\int \frac{(1-t^2)(2-t^2)\, dt}{t^2+t^4}.$$

Pero

$$\frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2(1+t^2)}=1+\frac{2}{t^2}-\frac{6}{1+t^2}$$

y, por consiguiente,

$$\int \frac{(1-t^2)(2-t^2)\, dt}{t^2(1+t^2)}=t-\frac{2}{t}-6\,\text{arctg } t+C.$$

Finalmente obtenemos

$$\int \frac{(\cos^3 x+\cos^5 x)\, dx}{\text{sen}^2 x+\text{sen}^4 x}=\text{sen } x-\frac{2}{\text{sen } x}-6\,\text{arctg}(\text{sen } x)+C.$$

Notemos que en el caso examinado la integral siempre puede escribirse de la forma $\int R^*(\text{sen } x,\ \cos^2 x)\cos x\, dx$.

1450. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x+2\,\text{sen } x\cos x-\cos^2 x}$.

Resolución. La función integrando es par respecto al seno y al coseno. Haciendo $\text{tg } x = t$, obtenemos

$$\text{sen } x=\frac{\text{tg } x}{\sqrt{1+\text{tg}^2 x}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$x=\text{arctg } t;\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

De aquí,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+2 \operatorname{sen} x \cos x-\cos^2 x}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+t^2}}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2+2t-1},$$

pero,

$$\int \frac{dt}{t^2+2t-1}=\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Por eso tenemos

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+2 \operatorname{sen} x \cos x-\cos^2 x}=\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg} x+1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Notemos que la determinación de la integral se puede simplificar si en la integral inicial se divide el numerador y el denominador por $\cos^2 x$:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+2 \operatorname{sen} x \cos x-\cos^2 x}=\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x+2 \operatorname{tg} x-1}=\int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x+2 \operatorname{tg} x-1}.$$

2. Integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$. Vamos a destacar aquí dos casos que tienen importancia especial.

Caso 1. A menos uno de los exponentes m o n es un número positivo impar.

Si n es un número positivo impar, entonces se aplica la sustitución $\operatorname{sen} x = t$, pero si m es un número positivo impar se efectúa la sustitución $\cos x = t$.

1451. Hallar la integral $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x\, dx$.

Resolución. Haciendo $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x\, dx = dt$, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x\, dx=\int \operatorname{sen}^4 x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\, dx=\int t^4 (1-t^2)^2\, dt=$$

$$=\int t^4\, dt-2\int t^6\, dt+\int t^8\, dt=\frac{1}{5} t^5-\frac{2}{7} t^7+\frac{1}{9} t^9+C=$$

$$=\frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x-\frac{2}{7} \operatorname{sen}^7 x+\frac{1}{9} \operatorname{sen}^9 x+C.$$

1452. Hallar la integral $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\, dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}\, dx=\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^{-4/3} x\, dx=\int (1-\cos^2 x) \cos^{-4/3} x \operatorname{sen} x\, dx.$$

Haciendo $\cos x = t$, $-\operatorname{sen} x\, dx = dt$, obtenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}\, dx=-\int (1-t^2)\, t^{-4/3}\, dt=-\int t^{-4/3}\, dt+\int t^{2/3}\, dt=$$

$$=3t^{-1/3}+\frac{3}{5} t^{5/3}+C=\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{3}{5} \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x}+C.$$

Caso 2. Ambos exponentes m y n son números positivos pares. Aquí conviene transformar la función integrando con ayuda de las fórmulas

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x, \tag{1}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \tag{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x). \tag{3}$$

1453. Hallar la integral $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$.

Resolución. De la fórmula (1) se deduce que

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = (\operatorname{sen} x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right)^2 = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2x.$$

Aplicando ahora la fórmula (2), obtenemos

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x).$$

De suerte que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8} \int dx = \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C.$$

1454. Hallar la integral $\int \cos^6 x \, dx$.

Resolución. Utilizando la fórmula (3), obtenemos

$$\int \cos^6 x \, dx = \int (\cos^2 x)^3 \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int dx + \frac{3}{8} \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{8} \int \cos^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} x + \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx +$$
$$+ \frac{1}{8} \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \, dx = \frac{1}{8} x + \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2x +$$
$$+ \frac{3}{16} \int dx + \frac{3}{16} \int \cos 4x \, dx + \frac{1}{8} \int \cos 2x \, dx -$$
$$- \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 2x \cdot \frac{1}{2} \, d(\operatorname{sen} 2x) = \frac{1}{8} x + \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2x +$$
$$+ \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C =$$
$$= \frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C.$$

1455. Hallar la integral $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cdot \frac{1}{2}\,d \operatorname{sen} 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\,dx + \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^2 2x\,d(\operatorname{sen} 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C.$$

3. Integrales del tipo $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ y $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$, donde m es un número positivo entero.

Al determinar tales integrales se aplica la fórmula

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \quad (\text{o bien } \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1)$$

con cuya ayuda se disminuye sucesivamente el grado de la potencia de la tangente o de la cotangente.

1456. Hallar la integral $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \operatorname{tg}^7 x\,dx = \int \operatorname{tg}^5 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{tg}^5 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \operatorname{tg}^3 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

1457. Hallar la integral $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx = \int \operatorname{ctg}^4 x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx =$$

$$= -\int \operatorname{ctg}^4 x d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg}^4 x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} -$$

$$-\int \operatorname{ctg}^2 x(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} +$$

$$+\int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x - x + C.$$

4. Integrales del tipo $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\,dx$ y $\int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^n x\,dx$, donde n es un número positivo par. Tales integrales se determinan análogamente a las examinadas en el punto 3 con ayuda de la fórmula

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad (\text{o bien } \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

1458. Hallar la integral $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x\,dx = \int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x \cdot \sec^2 x\,dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^4 x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)^2\,d(\operatorname{tg} x) = \int \operatorname{tg}^4 x\,d(\operatorname{tg} x) +$$

$$+2\int \operatorname{tg}^6 x\,d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^8 x\,d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x +$$

$$+\frac{2}{7}\operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x + C.$$

1459. Hallar la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}$

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \int \operatorname{cosec}^4 x\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\,dx =$$

$$= \int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\operatorname{cosec}^2 x\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx -$$

$$-\int \operatorname{ctg}^2 x\,d(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.$$

5. Integrales del tipo $\int \sec^{2n+1} x\,dx$ **y** $\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x\,dx$. Las integrales de la potencia positiva impar de la secante o de la cosecante se determinan más simplemente por las fórmulas recurrentes:

$$\int \sec^{2n+1} x\,dx = \frac{1}{2n}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{2n} x} + \left(1-\frac{1}{2n}\right)\int \sec^{2n-1} x\,dx, \qquad (1)$$

$$\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x\,dx = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{2n} x} + \left(1-\frac{1}{2n}\right)\int \operatorname{cosec}^{2n-1} x\,dx. \qquad (2)$$

1460. Hallar la integral $\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx$.

Resolución. Utilizando la fórmula recurrente (2) para $2n+1=5$, o sea para $n=2$, obtendremos

$$\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x} + \frac{3}{4}\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx;$$

haciendo ahora $2n+1=3$, o sea, $n=1$, por la misma fórmula tenemos

$$\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2}\cdot\int \operatorname{cosec} x\,dx,$$

pero

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Por consiguiente,

$$\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx = -\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

$$\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx = -\frac{\cos x}{4\operatorname{sen}^4 x} - \frac{3\cos x}{8\operatorname{sen}^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

6. Integrales del tipo sen mx cos $nx\,dx$, $\int$ cos mx cos $nx\,dx$, $\int$ sen $\times$ $\times\, mx$ sen $nx\,dx$. Las fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)], \qquad (1)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)], \qquad (2)$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \qquad (3)$$

posibilitan la representación del producto de las funciones trigonométricas en forma de una suma.

1461. Hallar la integral $\int \operatorname{sen} 2x\cos 5x\,dx$.

Resolución. Utilizando la fórmula (1) obtenemos

$$\int \operatorname{sen} 2x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int[\operatorname{sen} 7x+\operatorname{sen}(-3x)]\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 7x\,dx-\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 3x\,dx=-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

1462. Hallar la integral $\int \cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx$.

Resolución. Aplicamos al producto $\cos x\cos\frac{x}{2}$ la fórmula (2):

$$\int \cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{4}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx+\frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx.$$

Volviendo a utilizar la misma fórmula, encontramos

$$\int \cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\,dx=\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{7x}{4}+\cos\frac{5x}{4}\right)dx+$$
$$+\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{3x}{4}x+\cos\frac{x}{4}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{7}\operatorname{sen}\frac{7x}{4}+\frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3x}{4}+\operatorname{sen}\frac{x}{4}+C.$$

Hallar las integrales:

1463. $\int\frac{dx}{3+5\operatorname{sen} x+3\cos x}$. **1464.** $\int\frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$.

1465. $\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x+4\operatorname{sen} x\cos x}$.

1466. $\int\frac{\cos^3 x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x}$. **1467.** $\int\frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\cos^3 x-\operatorname{sen}^2 x-1}$

Indicación: hacer $\operatorname{ctg} x = t$.

1468. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$. **1469.** $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen} x}\,dx$.

1470. $\int \operatorname{sen}^2 (x/4) \cos^2 (x/4)\,dx$. **1471.** $\int \cos^4 x\,dx$.

1472. $\int \operatorname{tg}^4 (x/2)\,dx$. **1473.** $\int \operatorname{ctg}^3 3x\,dx$.

1474. $\int \sec^6 x\,dx$. **1475.** $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$.

1476. $\int \operatorname{ses}^3 x\,dx$. **1477.** $\int \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{cosec} x\,dx$.

1478. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x\,dx$. **1479.** $\int \cos (x/2) \cos (x/2)\,dx$

7. Sustituciones trigonométricas. Las integrales del tipo

$$\int R\,(x, \sqrt{a^2-x^2}\,)\,dx, \quad \int R\,(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx, \quad \int R\,(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$$

se reducen a integrales de una función racional respecto a sen t y cos t con ayuda de la sustitución correspondiente: para la primera integral $x = a \operatorname{sen} t$ (o bien $x = a \cos t$), para la segunda $x = a \operatorname{tg} t$ (o bien $x = a \operatorname{ctg} t$) y para la tercera $x = a \sec t$ (o bien $x = a \operatorname{cosec} t$).

1480. Hallar la integral $I = \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx$.

Resolución. Hacemos $x = a \operatorname{sen} t$, entonces $dx = a \cos t\,dt$ y la integral dada adopta la forma

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2-a^2 \operatorname{sen}^2 t}}{a \operatorname{sen} t}\, a \cos t\,dt =$$
$$= a \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\,dt = a \int \frac{1-\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t}\,dt = a \int \frac{dt}{\operatorname{sen} t} -$$
$$- a \int \operatorname{sen} t\,dt = a \ln |\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + a \cos t + C.$$

Para determinar la integral $\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t}$ hemos utilizado la fórmula $\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t} = \ln |\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + C$, *ya que con su ayuda es más fácil pasar* a la vieja variable x.

Así, pues, obtenemos

$$I = a \ln \left| \frac{1}{\operatorname{sen} t} - \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \right| + a \cos t + C,$$

donde $\operatorname{sen} t = x/a$, $\cos t = \sqrt{a^2-x^2}/a$. Por consiguiente,

$$I = a \ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right| + \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

1481. Hallar la integral $I = \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2+x^2}}$.

Resolución. Aplicamos la sustitución $x = a \operatorname{tg} t$, de donde $dx = a \sec^2 t\, dt$. Entonces obtenemos

$$I=\int \frac{a \sec^2 t\, dt}{a \operatorname{tg} t \sqrt{a^2+a^2 \operatorname{tg}^2 t}}=\frac{1}{a}\int \frac{\sec^2 t\, dt}{\operatorname{tg} t \sec t}=$$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{\sec t}{\operatorname{tg} t}\, dt=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t}=\frac{1}{a}\ln|\operatorname{cosec} t-\operatorname{ctg} t|+C,$$

donde $\operatorname{tg} t=x/a$ y, por lo tanto, $\operatorname{ctg} t=a/x$, $\operatorname{cosec} t=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}=$ $=\sqrt{a^2+x^2}/x$. De este modo, obtenemos

$$I=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}\right|+C.$$

1482. Hallar la integral $I=\int\frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Resolución. Efectuamos la sustitución $x = a \sec t$, de donde $dx =$ $= a \sec t \operatorname{tg} t\, dt$. Entonces obtenemos

$$I=\int \frac{a^2 \sec^2 t\cdot a \sec t\cdot \operatorname{tg} t}{\sqrt{a^2 \sec^2 t-a^2}}\, dt=a^2\int \sec^3 t\, dt.$$

Aplicamos luego la fórmula recurrente (1) del punto 5 para $n = 1$:

$$\int \sec^3 t\, dt=\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}+\frac{1}{2}\int \sec t\, dt=\frac{\operatorname{sen} t}{2\cos^2 t}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos t}=\frac{\operatorname{sen} t}{2\cos^2 t}+\frac{1}{2}\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C,$$

donde $\sec t=x/a$, $\cos t=a/x$, $\operatorname{sen} t=\sqrt{x^2-a^2}/x$, $\operatorname{tg} t=\sqrt{x^2-a^2}/a$. Por consiguiente,

$$I=\frac{a^2 \operatorname{sen} t}{2\cos^2 t}+\frac{a^2}{2}\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C.$$

Hallar las integrales:

1483. $\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$. **1484.** $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$.

1485. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

§ 5. Integración de funciones diversas

Hallar las integrales:

1486. $\int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 3x\, dx$. **1487.** $\int (2x^2-2x+1)\, e^{-x/2}\, dx$.

1488. $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$. **1489.** $\int \frac{x^2-2}{x^2+1}\cdot \operatorname{arctg} x\, dx$.

1490. $\int (2x^2-1)\cos 2x\, dx$. **1491.** $\int x \ln^2 x\, dx$.

1492. $\int \frac{2e^{2x}-e^{x}-3}{e^{2x}-2e^{x}-3}\,dx.$ **1493.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$

1494. $\int \sqrt{2^{x}-1}\,dx.$ **1495.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

1496. $\int \sqrt{6+4x-2x^2}\,dx.$ **1497.** $\int e^{2x}\operatorname{sen} e^{x}\,dx.$

1498. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{2+5\operatorname{tg}^2 x}}.$

1499. $\int \operatorname{sen} 2x \ln \cos x\,dx.$

1500. $\int (x+2)\cos(x^2+4x+1)\,dx.$

1501. $\int \frac{x\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx.$ **1502.** $\int \frac{xe^{x}}{\sqrt{1+e^{x}}}\,dx.$

1503. $\int \ln(x^2+x)\,dx.$ **1504.** $\int \frac{dx}{x^4+x^2}.$

1505. $\int \cos\ln x\,dx.$ **1506.** $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x^3}}\,dx.$

1507. $\int e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx.$ **1508.** $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$

1509. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x}.$

1510. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}.$ **1511.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$

Capítulo X. Integral definida

§ 1. Cálculo de una integral definida

Sea la función $f(x)$ definida sobre un segmento $[a, b]$. Dividimos el segmento $[a, b]$ en n partes arbitrarias por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_{n-1} < x_n = b$, escogemos en cada segmento elemental $[x_{k-1}, x_k]$ un punto arbitrario ξ_k y hallemos la longitud de cada segmento: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Se llama *suma integral* para la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ a la suma que tiene la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Se denomina *integral definida* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ (o bien dentro de los límites de a a b) al límite de la suma integral a condición de que la longitud del mayor de los segmentos elementales tienda a cero:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

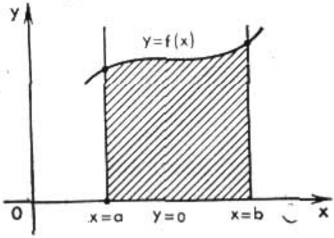

Fig. 42

Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, entonces el límite de la suma integral existe y no depende del procedimiento de división del segmento $[a, b]$ en segmentos elementales ni de la elección de los puntos ξ_k (*teorema de existencia* de la integral definida).

Si $f(x) > 0$ sobre el segmento $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ representa geométricamente el área de un *trapecio curvilíneo*, o sea, de la figura acotada por las líneas $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (fig. 42).

Propiedades principales de una integral definida

1ª. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

2ª. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

3ª. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4ª. $$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

5ª. $$\int_a^b C\cdot f(x)\,dx = C\cdot \int_a^b f(x)\,dx,$$ donde C es una constante.

6ª. *Estimación de una integral definida*: si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ sobre el segmento $[a, b]$, entonces

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a).$$

Reglas de cálculo de las integrales definidas

1. *Fórmula de Newton — Leibniz:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

donde $F(x)$ es la primitiva para $f(x)$, o sea, $F'(x) = f(x)$.

2. *Integración por partes:*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

donde $u = u(x)$, $v = v(x)$ son funciones continuamente derivables en el segmento $[a, b]$.

3. *Cambio de variable*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

donde $x = \varphi(t)$ es una función continua junto con su derivada $\varphi'(t)$ en el segmento $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$; $f[\varphi(t)]$ es una función continua en el segmento $[\alpha, \beta]$.

4. Si $f(x)$ es una función impar, o sea, $f(-x) = -f(x)$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Si $f(x)$ es una función par, o sea, $f(-x) = f(x)$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

1512. Calcular la integral $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ como límite de la suma integral.

Resolución. Aquí $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$; dividimos el segmento $[0, 1]$ en n partes congruentes, entonces $\Delta x_k=(b-a)/n=1/n$ y escogemos $\xi_k=x_k$. Tenemos

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\quad x_2=\frac{2}{n},\ \ldots,\ x_{n-1}=\frac{n-1}{n},\quad x_n=\frac{n}{n}=1;$$

$$f(\xi_1)=\left(\frac{1}{n}\right)^2;\quad f(\xi_2)=\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \ldots,\ f(\xi_n)=\left(\frac{n}{n}\right)^2;$$

$$f(\xi_k)\Delta x_k=\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

Por lo tanto,

$$\int\limits_0^1 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}=\frac{1}{3}.$$

Aquí ha sido utilizada la fórmula de suma de los cuadrados de números naturales.

1513. Calcular $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}$ por la fórmula de Newton — Leibniz.

Resolución. Tenemos

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1514. Estimar la integral $\int\limits_{10}^{18}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Resolución. Como $|\cos x|\leqslant 1$, entonces para $x>10$ obtendremos la desigualdad $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\right|<10^{-2}$. Por consiguiente,

$$\left|\int\limits_{10}^{18}\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx\right|<8\cdot 10^{-2}<10^{-1},\ \text{o sea,}\ \left|\int\limits_{10}^{18}\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx\right|<0{,}1.$$

1515. Estimar la integral $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{5+3\cos^2 x}$.

Resolución. Puesto que $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, tenemos

$$\frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{5+3\cos^2 x} \leqslant \frac{1}{5} \text{ y } \frac{\pi}{16} \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \leqslant \frac{\pi}{10}.$$

1516. Calcular $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

Resolución. Aplicamos el método de integración por partes. Hacemos $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, de donde $du = dx$, $v = -e^{-x}$. Entonces

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

1517. Calcular $\int_0^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

Resolución. Hacemos $\ln x = t$; entonces $\frac{dx}{x}\,dt$; si $x = 1$, $_t = 0$; si $x = e$, $t = 1$. *Por consiguiente*,

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\,t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\,(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$

1518. Calcular $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2\,dx}$.

Resolución. Hacemos $x = r \operatorname{sen} t$; entonces $dx = r\cos t\,dt$; si $x = 0$, $t = 0$; si $x = r$, $t = \pi/2$. Por eso

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 t}\; r\cos t\,dt = r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,r^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\,r^2 \left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right)\right] = \frac{\pi r^2}{4}.$$

1519. Calcular $I = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$.

Resolución. La función integrando es par y por eso $I = 2\int_0^{\pi/3} \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$.

Integramos por partes haciendo $u = x$, $dv = \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x}$; entonces $du = dx$, $v =$

$=\frac{1}{\cos x}$. De aquí hallamos

$$\int_0^{\pi/3} \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx = \frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi}{3\cos(\pi/3)} - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} \ln \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}.$$

Por lo tanto,

$$I = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\right).$$

1520. Calcular $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2 \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

Resolución. La función integrando es impar, por consiguiente, $I = 0$.

1521. Calcular $\int_0^1 x\,dx$ como límite de la suma integral.

1522. Calcular $\int_0^1 e^x\,dx$ como límite de la suma integral.

1523. Estimar la integral $\int_0^1 x(1-x)^2\,dx$.

1524. Estimar la integral $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$.

1525. Estimar la integral $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

Calcular las integrales:

1526. $\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$. **1527.** $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^4}$.

1528. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$. **1529.** $\int_0^1 e^{x+e^x}\,dx$.

1530. $\int_1^{e^{\pi/2}} \cos \ln x\,dx$. **1531.** $\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\,dx$.

1532. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$. **1533.** $\int_0^{2\pi} \cos 5x \cos x\,dx$.

1534. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^3 x \operatorname{sen} 2x\, dx$. **1535.** $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\, dx$.

1536. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+x}$. **1537.** $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$.

1538. $\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{x^2+1}\, dx$. **1539.** $\int\limits_{-1}^{1} x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Indicación: utilizar la propiedad de una función impar.
Indicación: utilizar la propiedad de una función par.

1540. Demostrar que

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m \neq n; \\ \pi, & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

(m y n son números positivos enteros).

§ 2. Integrales impropias

1. Conceptos básicos. Se llaman *integrales impropias*: 1) a las que tienen límites infinitos; 2) a las de funciones ilimitadas.

La integral impropia de una función $f(x)$ dentro de los límites desde a hasta $+\infty$ se define por la igualdad

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Si este límite existe y es finito, la integral impropia se llama *convergente*; pero si el límite no existe o es igual a infinito ella se denomina *divergente*.

Análogamente

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$$

y

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Si la función $f(x)$ tiene una discontinuidad infinita en un punto c de un segmento $[a, b]$ y es continua cuando $a \leqslant x < c$ y $c < x \leqslant b$, entonces, según la definición, se hace

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\alpha \to 0} \int\limits_{a}^{c-\alpha} f(x)\, dx + \lim_{\beta \to 0} \int\limits_{c+\beta}^{b} f(x)\, dx.$$

Una integral impropia $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (donde $f(c)=\infty$, $a<c<b$) se llama *convergente* si existen ambos límites en el segundo miembro de la igualdad o *divergente* si no existe por lo menos uno de ellos.

1541. Calcular la integral impropia $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx$ (o determinar su divergencia).

Resolución. Tenemos

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \cos x\,dx=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{sen} x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{sen} b-\operatorname{sen} 0)=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{sen} b,$$

o sea, el límite no existe. Por consiguiente, la integral impropia diverge.

1542. Calcular $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}$.

Resolución. Hallamos

$$\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{-1}=\lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)=1,$$

o sea, la integral impropia converge.

1543. Hallar $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Resolución. La función integrando es par, por eso $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Entonces

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b=\frac{\pi}{2}.$$

De este modo $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$, o sea, la integral impropia converge.

1544. Hallar $\int\limits_0^1\frac{dx}{x}$.

Resolución. La función integrando $f(x)=1/x$ en el punto $x=0$ es ilimitada y por eso tenemos

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{a\to0}\int\limits_a^1\frac{dx}{x}=\lim_{a\to0}\left|\ln x\right|_{a\to0}^{1}=\lim_{a\to0}(\ln 1-\ln a)=+\infty,$$

o sea, la integral impropia diverge.

1545. Hallar $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

Resolución. Tenemos

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} xe^{-x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right)=\frac{1}{2},$$

o sea, la integral impropia converge.

Calcular las integrales impropias:

1546. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. **1547.** $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}$.

1548. $\int\limits_0^{2}\frac{x^5\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **1549.** $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1550. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$. **1551.** $\int\limits_0^{1} x\ln^2 x\,dx$.

1552. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

2. Criterios de comparación. Al investigar la convergencia de integrales impropias se utiliza uno de los criterios de comparación.

1. *Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ están definidas para todas las $x\geqslant a$ y son integrables en un segmento $[a, A]$, donde $A\geqslant a$, y si $0\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x)$ para todas las $x\geqslant a$, entonces de la convergencia de la integral $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ resulta la convergencia de la integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, además, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\leqslant\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$.*

2. (a) *Si para $x\to+\infty$ la función $f(x)\geqslant 0$ es una infinitésima de orden $p>0$ en comparación con $\frac{1}{x}$, entonces la integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge para $p>1$ y diverge para $p\leqslant 1$.*

(b) *Si la función $f(x)\geqslant 0$ está definida y es continua en el intervalo $a\leqslant x<b$, así como es infinitamente grande de orden p en comparación con*

$\frac{1}{b-x}$ *para* $x \to b-0$, *entonces la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge para* $p<1$ *y diverge para* $p \geqslant 1$.

1553. Investigar la convergencia de la integral $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Resolución. Según la definición

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A x^{-p}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right]_a^A =$$

$$= \frac{1}{-p+1} \cdot \lim_{A \to +\infty} A^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot a^{-p+1}.$$

Supongamos que $p>1$; entonces $\lim_{A \to +\infty} A^{-p+1}=0$. Por lo tanto, para $p>1$ la integral converge. Sea $p \leqslant 1$; entonces $\lim_{A \to +\infty} A^{-p+1}=\infty$, o sea, la integral $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ para $p \leqslant 1$ diverge.

1554. Investigar la convergencia de la integral $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ (*integral de Fresnel*).

Resolución. Sea $x=\sqrt{\tau}$; entonces $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau$. Representemos la integral que está a la derecha en forma de la suma

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau.$$

El primer sumando es una integral propia, ya que $\lim_{\tau \to 0} \frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{\tau}}=0$ y al segundo sumando le apliquemos la integración por partes, haciendo $u=1/\sqrt{\tau}$, $dv=\operatorname{sen}\tau\,d\tau$:

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\tau\,d\tau}{\sqrt{\tau}} = -\frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}\Bigg|_{\pi/2}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos\tau\,d\tau}{\sqrt{\tau^3}} = -\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos\tau\,d\tau}{\tau^{3/2}}.$$

La última integral converge, ya que $\frac{\cos\tau}{\tau^{3/2}} \leqslant \frac{1}{\tau^{3/2}}$ y la integral $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{3/2}}$ converge.

Por eso la integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau$ converge basándose sobre el criterio (2a) y, por consiguiente, la integral dada también converge.

1555. Investigar la convergencia de la integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$.

Resolución. La función integrando $f(x) = 1/(1 + x^{10})$ en el intervalo de integración es menor que $\varphi(x) = 1/x^{10}$ y la integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{10}}$ es convergente. Por lo tanto, la integral dada también converge.

1556. Investigar la convergencia de la integral $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ $(a < b)$.

Resolución. Según la definición

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p} = -\frac{1}{-p+1} \lim_{\varepsilon \to 0} (b-x)^{-p+1} \Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{p-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-p+1} + \frac{1}{-p+1} (b-a)^{-p+1}.$$

Si $p < 1$, entonces $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-p+1} = 0$; pero si $p > 1$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-p+1} = \infty$; si, por último, $p = 1$, entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \ln(b-x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \infty.$$

Por consiguiente, para $p < 1$ la integral $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ converge y para $p \geqslant 1$ diverge.

1557. Investigar la convergencia de la integral $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$.

Resolución. La función integrando es infinitamente grande para $x \to 1$. Representamos esta función en la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}},$$

o sea, el orden de esta función infinitamente grande cuando $x \to 1$ en comparación con $1/(1 - x)$ es igual a $p = 1/3 < 1$. Por eso la integral dada converge basándose en el criterio (2b).

1558. Investigar la convergencia de la integral $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\operatorname{sen} x}-1} dx$.

Resolución. La función integrando $f(x)$ en el intervalo de integración es positiva y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$. Aplicando el teorema sobre infinitésimas equivalentes, transformamos el numerador y el denominador de la fracción subintegral: tenemos $\ln(1+\sqrt[3]{x}) \sim x^{1/3}$ y $e^{\operatorname{sen} x}-1 \sim \operatorname{sen} x$ cuando $x \to 0$, *de donde*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\operatorname{sen} x}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \infty,$$

o sea, $f(x)$ *es infinitamente grande de orden* $p = 2/3$ *en comparación con* $1/x$. Por lo tanto, según el criterio (2b) la integral dada converge.

Investigar la convergencia de los siguientes integrales impropias:

1559. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$ **1560.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx.$

1561. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$ **1562.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx.$

1563. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3}\,dx.$ **1564.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}.$

1565. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$

§ 3. Cálculo del área de una figura plana

El área de un trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$ $[f(x) \geqslant 0]$ por las rectas $x = a$ y $x = b$ y por el segmento $[a, b]$ del eje Ox se determina por la fórmula

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

El área de una figura limitada por las curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x) \times$ $\times [f_1(x) \leqslant f_2(x)]$ y por las rectas $x = a$ y $x = b$ se determina por la fórmula

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

Si la curva está definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, entonces el área del trapecio curvilíneo limitado por esta curva, por las rectas $x = a$, $x = b$ y por el segmento $[a, b]$ del eje Ox se expresa por la fórmula

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt,$$

donde t_1 y t_2 se determinan de las ecuaciones $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ $[y(t) \geqslant 0$ cuando $t_1 \leqslant t \leqslant t_2]$.

El área de un sector curvilíneo limitado por una curva definida en las coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\theta)$ y por dos radios polares $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$ se expresa por la integral

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\, d\theta.$$

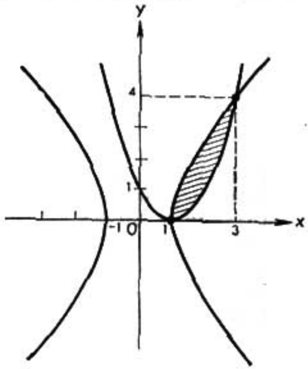

Fig. 42a

1566. 1) Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y por el eje Ox.

Resolución. La parábola corta al eje Ox en los puntos O (0; 0) y M (40); Por consiguiente,

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 =$$

$$= \frac{32}{3} \text{ (unidades cuadradas).}$$

2) Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = (x - 1)^2$ y la hipérbola $x^2 - y^2/2 = 1$ (fig. 42a).

Resolución. Hallamos el punto de intersección de la parábola con la hipérbola, resolviendo conjuntamente la ecuación de estas curvas:

$$x^2 - \frac{(x-1)^4}{2} = 1, \text{ o bien, } x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0.$$

El primer miembro de esta ecuación se puede descomponer en sus factores: $(x - 1)(x - 3)(x^2 + 1) = 0$, de aquí, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, e $y_1 = 0$, $y_2 = 4$.

$$S = \int_1^3 [\sqrt{2(x^2-1)} - (x-1)^2]\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}[x\sqrt{x^2} - 1 + \ln(x + \sqrt{x^2-1})]\Big|_1^3 -$$

$$-\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}[3\sqrt{8} + \ln(3\sqrt{8})] - \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(3 + \sqrt{8}) \simeq 4{,}58 \text{ [unidades cuadradas.}$$

1567. Calcular el área de la figura plana limitada por una onda de la cicloide $x = 2(t - \operatorname{sen} t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (véase la fig. 5) y el eje Ox.

Resolución. Aquí $dx = 2(1 - \cos t)\, dt$ y t varía de $t_1 = 0$ a $t_2 = 2\pi$. Por consiguiente,

$$S = \int_0^{2\pi} 2^2(1 - \cos t)^2\, dt = 4\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt =$$

$$= 4\left[t - 2\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{2\pi} = 12 \text{ (unidades cuadradas).}$$

1568. Hallar el área de la figura plana limitada por la lemniscata $\rho^2 = 2 \cos 2\theta$ (véase la fig. 2).

Resolución. A una cuarta parte del área buscada le corresponde la variación de θ desde 0 hasta $\pi/4$ y por eso

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\theta \, d\theta = 2 \operatorname{sen} 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = 2 \text{ (unidades cuadradas).}$$

Calcular las áreas de las figuras limitadas por las líneas dadas:

1569. $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$.

1570. $y = 16/x^2$, $y = 17 - x^2$ (cuadrante I).

1571. $y^2 = 4x^3$, $y = 2x^2$.

1572. $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$ (cuadrante I).

1573. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

1574. $y = 0{,}25x^2$, $y = 3x - 0{,}5x^2$.

1575. $xy = 4\sqrt{2}$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = 0$, $x = 4$.

1576. $x = 12 \cos t + 5 \operatorname{sen} t$, $y = 5 \cos t - 12 \operatorname{sen} t$.

1577. $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

1578. $\rho = 4/\cos(\theta - \pi/6)$, $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/3$.

1579. $\rho = a \cos \theta$, $\rho = 2a \cos \theta$.

1580. $\rho = \operatorname{sen}^2 (\theta/2)$ (a la derecha de la semirrecta $\theta = \pi/2$.)

1581. $\rho = a \operatorname{sen} 3\theta$ (el área de un bucle).

1582. $\rho = 2 \cos \theta$, $\rho = 1$ (fuera del círculo $\rho = 1$).

§ 4. Cálculo de la longitud del arco de una curva plana

Si una curva $y = f(x)$ en un segmento $[a, b]$ es suave (o sea, la derivada $y' = f'(x)$ es continua), entonces la longitud del arco respectivo de esta curva se determina por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Al definir paramétricamente la curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ [$x(t)$ e $y(t)$ son funciones derivables continuas], la longitud del arco de la curva, correspondiente a la variación monótona del parámetro t desde t_1 hasta t_2, se calcula por la fórmula

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt.$$

Si una curva suave está definida en las coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, entonces la longitud del arco es igual a

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\theta.$$

1583. Hallar la longitud del arco de la curva $y^2 = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ $(y \geqslant 0)$.

Resolución. Derivando la ecuación de la curva, hallamos $y' = (3/2)\,x^{1/2}$. De este modo,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right).$$

1584. Hallar la longitud del arco de la curva $x = \cos^5 t$, $y = \operatorname{sen}^5 t$ desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = \pi/2$.

Resolución. Hallamos las derivadas con respecto al parámetro t: $\dot{x} = -5\cos^4 t \operatorname{sen} t$, $\dot{y} = 5\operatorname{sen}^4 t \cos t$. Por lo tanto,

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-5\cos^4 t \operatorname{sen} t)^2 + (5\operatorname{sen}^4 t \cos t)^2}\,dt =$$

$$= 5\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\cos t\sqrt{\operatorname{sen}^6 t \cos^6 t}\,dt = \frac{5}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2t}\,dt =$$

$$= -\frac{5}{8}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+3\cos^2 2t}\,d(\cos 2t) = -\frac{5}{8\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}\cdot\cos 2t + \sqrt{1+3\cos^2 2t})\right]_0^{\pi/2} = \frac{5}{8}\left[2 - \frac{\ln(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right].$$

1585. Hallar la longitud del arco de la curva $\rho = \operatorname{sen}^3(\theta/3)$ desde $\theta_1 = 0$ hasta $\theta_2 = \pi/2$.

Resolución. Tenemos $\rho' = \operatorname{sen}^2(\theta/3)\cos(\theta/3)$. Por consiguiente,

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}^6\frac{\theta}{3} + \left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{3}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos\frac{2\theta}{3}\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\frac{2\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Calcular las longitudes de los arcos de las curvas:

1586. $y = \ln \operatorname{sen} x$ desde $x = \pi/3$ hasta $x = \pi/2$.

1587. $y = (2/5)\,x\sqrt[4]{x} - (2/3)\sqrt[4]{x^3}$ entre los puntos de intersección con el eje Ox.

1588. $y = x^2/2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

1589. $y = 1 - \ln\cos x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/6$.

1590. $y = \operatorname{ch} x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

1591. $x = t^3/3 - t$, $y = t^2 + 2$ desde $t = 0$ hasta $t = 3$.

1592. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\operatorname{sen} t$ desde $t = 0$ hasta $t = \ln\pi$.

1593. $x = 8 \operatorname{sen} t + 6 \cos t$, $y = 6 \operatorname{sen} t - 8 \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = \pi/2$.

1594. $x = 9(t - \operatorname{sen} t)$, $y = 9(1 - \cos t)$ (longitud del arco de una onda de la cicloide).

1595. $\rho = \theta^2$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$.

1596. $\rho = a \operatorname{sen} \theta$.

1597. $\rho = a \cos^3(\theta/3)$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi/2$.

1598. $\rho = 1 - \cos \theta$.

§ 5. Cálculo del volumen de un cuerpo

1. Cálculo del volumen de un cuerpo por las áreas conocidas de las secciones transversales. Si el área de la sección de un cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox puede ser expresada como función de x, o sea, de la forma $S = S(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, entonces el volumen de la parte del cuerpo comprendida entre los planos $x = a$ y $x = b$ perpendiculares al eje Ox se determina por la fórmula

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

2. Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución. Si un trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$, $x = b$ gira alrededor del eje Ox, entonces el volumen del cuerpo de revolución se calcula por la fórmula

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx.$$

Si la figura limitada por las curvas $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ $[0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x)]$ y las rectas $x = a$, $x = b$ gira alrededor del eje Ox, entonces el volumen del cuerpo de revolución

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx.$$

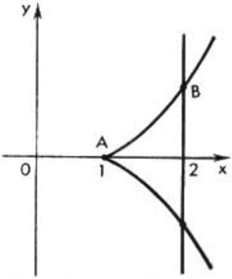

Fig. 43

1599. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución en torno al eje Ox de la figura limitada por la curva $y^2 = (x - 1)^3$ y la recta $x = 2$ (fig. 43).

Resolución. Tenemos

$$V = \pi \int_1^2 y^2\, dx = \pi \int_1^2 (x-1)^3\, dx = \frac{1}{4} \pi (x-1)^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \pi \text{ (unidades cúbicas).}$$

1600. Hallar el volumen de un cuerpo que tiene por base un triángulo isósceles de altura h y base a. La sección transversal del cuerpo es el segmento de una parábola con la cuerda igual a la altura del segmento (fig. 44).

Resolución. Tenemos $|AB| = a$, $|OC| = h$, $|MK| = |DE|$, $|OK| = x$. Expresamos el área de la sección transversal como función de x para lo cual hallamos previamente la ecuación de la parábola. La longitud de la cuerda

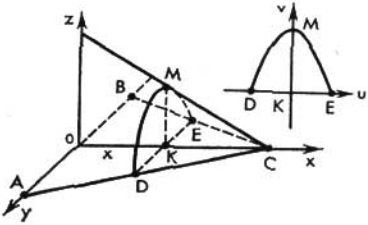

Fig. 44

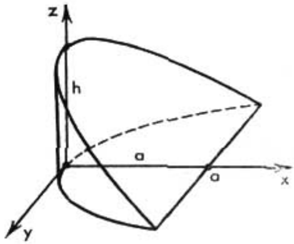

Fig. 45

DE se puede determinar a partir de la semejanza de los triángulos respectivos, a saber:

$$|DE|/a = (h - x)/h, \text{ o sea, } |DE| = a(h - x)/h = |MK|.$$

Tomamos $|DE| = m$, entonces la ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas uKv tendrá la forma $v = m - \frac{4}{m}u^2$. De aquí encontramos el área de la sección transversal del cuerpo dado:

$$S = 2\int_0^{m/2}\left(m - \frac{4}{m}u^2\right)du = \frac{2}{3}m^2, \text{ o bien } S(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{a^2(h-x)^2}{h^2}.$$

De este modo,

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{h^2}(h-x)^2\,dx = \frac{2}{9}a^2h.$$

Hallar los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución en torno al eje Ox de las figuras limitadas por las líneas:

1601. $y = \frac{64}{x^2+16}$, $x^2 = 8y$.

1602. $y^2 = x$, $x^2 = y$.

1603. $y = \sqrt{xe^x}$, $x = 1$, $y = 0$.

1604. $y = x^2/2$, $y = x^3/8$.

1605. Hallar el volumen de un cuerpo limitado por los planos $x = 1$, $x = 3$ si el área de su sección transversal es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la sección y el origen de coordenadas, y para $x = 2$ el área de la sección es igual a 27 (unidades cuadradas).

1606. Hallar el volumen de una *cuña cilíndrica por sus dimensiones* indicadas en la fig. 45 (problema de Arquímedes).

1607. Un vaso cilíndrico con agua lleva introducido un paraboloide de revolución vuelto con el vértice hacia abajo. La base y la altura del paraboloide coinciden con la base y la altura del vaso Hallar el volumen del agua que queda en el vaso si el radio de su base es igual a r y su altura es igual a h.

§ 6. Cálculo del área de una superficie de revolución

Si el arco de una curva suave $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ gira alrededor del eje Ox, entonces el área de la superficie de revolución se calcula por la fórmula

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Si la curva está definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, entonces

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

1608. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución en torno al eje Ox del arco del sinusoide $y = \operatorname{sen} 2x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$.

Resolución. Hallamos $y' = 2\cos 2x$; entonces

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x \sqrt{1+4\cos^2 2x}\,dx.$$

Efectuamos el cambio de la variable: $2\cos 2x = t$, $-4 \operatorname{sen} 2x\,dx = dt$, $\operatorname{sen} 2x\,dx = (-1/4)\,dt$. Determinamos los límites de integración con respecto a t: si $x = 0$, $t = 2$; si $x = \pi/2$, $t = -2$.

De este modo

$$S = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{4}\right)dt = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right] \text{ (unidades cuadradas).}$$

Hallar las áreas de las superficies engendradas por la revolución en torno al eje Ox de los arcos de las curvas:

1609. $y = 2\operatorname{ch}(x/2)$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

1610. $y = x^3$ desde $x = 0$ hasta $x = 1/2$.

1611. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

1612. $x = t - \text{sen}\, t$, $y = 1 - \cos t$ (área engendrada por la revolución de un arco).

§ 7. Momentos estáticos y momentos de inercia de arcos y figuras planas

Supongamos que en el plano xOy está representado el sistema de los puntos materiales $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, ..., $A_n(x_n;\ y_n)$ con las masas m_1, m_2, ..., m_n. Se llama *momento estático* M_x de este sistema con respecto al eje Ox a la suma de los productos de las masas de estos puntos por sus ordenadas:

$$M_x=\sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k.$$

Análogamente (como suma de los productos de las masas de los puntos por sus abscisas) se determina el momento estático del sistema con respecto al eje Oy:

$$M_y=\sum_{k=0}^{k=n} m_k x_k.$$

Se denominan *momentos de inercia* I_x e I_y del sistema con respecto a los ejes Ox y Oy a las sumas de los productos de las masas de los puntos por los cuadrados de sus distancias al eje respectivo. De este modo,

$$I_x=\sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k^2; \quad I_y=\sum_{k=1}^{k=n} m_k x_k^2.$$

Por momentos estáticos y momentos de inercia de los arcos y figuras planas se toman los momentos respectivos de las masas convencionales distribuidas uniformemente a lo largo de estos arcos y figuras con densidad (lineal o de superficie plana) igual a la unidad.

Los momentos estáticos y los momentos de inercia del arco de una curva plana $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ se calculan por las fórmulas:

$$M_x=\int_a^b y\,dL; \quad M_y=\int_a^b x\,dL; \quad I_x=\int_a^b y^2\,dL; \quad I_y=\int_a^b x^2\,dL,$$

donde $dL=\sqrt{1+y'^2}\,dx$ es la diferencial del arco de la curva.

Los momentos estáticos y los momentos de inercia de un trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, por el eje Ox y por dos rectas $x = a$ y $x = b$, se calculan por las fórmulas siguientes:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y\,dS=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \quad M_y=\int_a^b x\,dS=\int_a^b xy\,dx,$$

$$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b y^3\,dx, \quad I_y=\int_a^b x^2\,dS=\int_a^b x^2 y\,dx.$$

En estas fórmulas $dS = y\,dx$ es la diferencial del área del trapecio curvilíneo.

1613. Hallar el momento estático y el momento de inercia de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leqslant x \leqslant r)$ respecto al eje Ox.

Resolución. El momento estático M_x lo calculamos por la fórmula $M_x = \int\limits_a^b y\, dL$, donde $dL = \sqrt{1+y'^2}\, dx$, $y' = -x/\sqrt{r^2-x^2}$. Entonces obtendremos

$$M_x = \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\, dx = r\int\limits_{-r}^{r} dx = 2r^2.$$

Determinamos el momento de inercia respecto al eje Ox:

$$I_x = \int\limits_a^b y^2\, dL = \int\limits_{-r}^{r} (r^2-x^2) \sqrt{1+\frac{r^2}{r^2-x^2}}\, dx =$$

$$= r\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx = 2r\int\limits_0^r \sqrt{r^2-x^2}\, dx.$$

Efectuemos la sustitución $x = r$ sen t, $dx = r \cos t\, dt$; si $x=0$; $t=0$; si $x=r$, $t=\pi/2$. Por consiguiente,

$$I_x = 2r\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 t}\; r\cos t\, dt =$$

$$= r^3\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\, dt = r^3\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

1614. Hallar el momento de inercia de la elipse $x = a\cos t$, $y = b$ sen t respecto al eje Oy.

Resolución. El momento de inercia del área de la elipse respecto al eje Oy es igual a $I_y = \int\limits_{-a}^{a} x^2\, dS$, donde $dS = 2y\, dx$. A partir de las ecuaciones paramétricas de la elipse encontramos $dS = 2b$ sen $t \cdot a$ $(-$sen $t)\, dt = -2ab$ sen$^2 t\, dt$, de donde

$$I_y = 2\int\limits_{\pi/2}^{0} a^2\cos^2 t\,(-2ab\operatorname{sen}^2 t)\, dt = -4a^3b\int\limits_{\pi/2}^{0} \operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}a^3b\int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\, dt = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

1615. Hallar los momentos estáticos y los momentos de inercia del arco de la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a$ sen$^3 t$ que está en el cuadrante I (fig. 46).

Resolución. En virtud de la simetría de la astroide respecto a los ejes de coordenadas, $M_x = M_y$, $I_x = I_y$. Por eso es suficiente calcular los momentos respecto al eje Ox. Para el cuadrante I tenemos $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Encontramos

$$dL = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = 3a \operatorname{sen} t \cos t\, dt,$$

$$M_x = \int_a^b y\,dL = \int_0^{\pi/2} a \cdot \operatorname{sen}^3 t \cdot 3a \operatorname{sen} t \cos t\, dt = \frac{3a^2}{5} \operatorname{sen}^5 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} a^2,$$

$$I_x = \int_a^b y^2\,dL = \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen}^6 t \cdot 3a \operatorname{sen} t \cos t\, dt = \frac{3}{8} a^3 \operatorname{sen}^8 t \int_0^{\pi/2} = \frac{3}{8} a^3.$$

De suerte que $M_x = M_y = (3/5)\, a^2$; $I_x = I_y = (3/8)\, a^3$.

1616. Hallar el momento de inercia de un segmento parabólico en el cual la cuerda sea igual a a y la flecha respecto a la cuerda sea igual a h (fig. 47).

Resolución. Tenemos $|AB| = a$, $|OC| = h$. La ecuación de la parábola se escribe de la forma $y = h - Nx^2$, donde el coeficiente indeterminado N

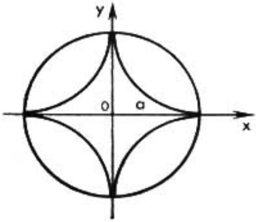

Fig. 46

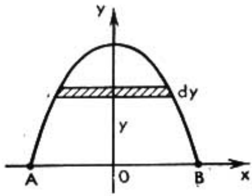

Fig. 47

se puede encontrar valiéndose del hecho de que el punto B $(a/2;\ 0)$ pertenece a la parábola; $0 = h - Na^2/4$, o bien $N = 4h/a^2$; por consiguiente, $y = h - 4hx^2/a^2$. Ahora hallamos el momento de inercia buscado:

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{-a/2}^{a/2} y^3\,dx = \frac{2}{3} \int_0^{a/2} \left(h - \frac{4h}{a^2} x^2\right)^3 dx = \frac{16}{105} ah^3.$$

1617. Hallar el momento estático y el momento de inercia del arco de la catenaria $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$, donde $0 \leqslant x \leqslant a$, respecto al eje Ox.

1618. Hallar el momento estático y el momento de inercia de un triángulo que tenga la base a y la altura h respecto a su base.

1619. Hallar el momento de inercia de un segmento parabólico limitado por la parábola $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 3$ respecto al eje Ox.

1620. Hallar el momento de inercia de un rectángulo que tenga por lados a y b respecto al eje de simetría del mismo.

1621. Hallar el momento polar de inercia de un círculo con diámetro d, o sea, el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro del círculo y es perpendicular a su plano.

§ 8. Determinación de las coordenadas del centro de gravedad. Teoremas de Guldin

Las coordenadas del centro de gravedad del arco homogéneo de una curva plana $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ se expresan por las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\,dL, \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b y\,dL,$$

donde $dL = \sqrt{1+y'^2}\,dx$, y L es la longitud del arco.

Las coordenadas del centro de gravedad de un trapecio curvilíneo se calculan por las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_a^b x\,dS = \frac{1}{S}\int_a^b xy\,dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2S}\int_a^b y\,dS = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2\,dx,$$

donde $dS = y\,dx$, y S es el área de la figura.

Teoremas de Guldin

Teorema 1. *El área de una superficie engendrada por la revolución del arco de una figura plana alrededor de un eje que esté en el plano de esta curva y no la corte, es igual a la longitud del arco de la curva multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad del arco.*

Teorema 2. *El volumen de un cuerpo engendrado por la revolución de una figura plana alrededor de un eje que no lo corte y esté en el plano de la misma, es igual al producto del área de esta figura por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de la figura.*

1622. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la catenaria $y = a\,\mathrm{ch}\,(x/a)$, $-a \leqslant x \leqslant a$.

Resolución. Como la curva es simétrica con respecto al eje Oy, su centro de gravedad está sobre el eje Oy, o sea $\bar{x} = 0$. Queda por encontrar $\bar{y}$. Tenemos $y' = \mathrm{sh}\,(x/a)$; entonces $dL = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2\,(x/a)}\,dx = \mathrm{ch}\,(x/a)\,dx$; la longitud del arco

$$L = \int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\int_0^a \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx = 2a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\Big|_0^a = 2a\,\mathrm{sh}\,1.$$

Por lo tanto,

$$\bar{y} = \frac{1}{2a\,\mathrm{sh}\,1}\int_{-a}^{a} a\,\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{\mathrm{sh}\,1}\int_0^a \mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\int_0^a\left(1+\mathrm{ch}\,\frac{2x}{a}\right)dx = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\left[x+\frac{a}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{2x}{a}\right]_0^a =$$

$$= \frac{a}{2\,\mathrm{sh}\,1}\left(1+\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2\right) = \frac{a\,(2+\mathrm{sh}\,2)}{4\,\mathrm{sh}\,1} \approx 1{,}18a.$$

1623. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una figura limitada por el arco de la elipse $x = a\cos t$, $y = b$ sen t, situado en el cuadrante I, y por los ejes de las coordenadas.

Resolución. En el cuadrante I al crecer x desde 0 hasta a, el valor de t decrece de $\pi/2$ a 0; por eso

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_0^a xy\,dx = \frac{1}{S}\int_{\pi/2}^0 a\cos t \cdot b \operatorname{sen} t\,(-a\operatorname{sen} t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2b}{S}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt = \frac{a^2b}{S}\,\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2b}{3S}.$$

Aplicando la fórmula del área de la elipse $S = \pi ab$, obtendremos $\bar{x} = (4a^2b)/(3\pi ab) = (4a)/(3\pi)$.

Análogamente determinamos

$$\bar{y} = \frac{1}{2S}\int_0^a y^2\,dx = \frac{1}{2S}\int_{\pi/2}^0 b^2\operatorname{sen}^2 t\,(-a\operatorname{sen} t)\,dt =$$

$$= \frac{2ab^2}{\pi ab}\int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 t)\,d(\cos t) = \frac{2b}{\pi}\left[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{\pi/2}^0 = \frac{4b}{3\pi}.$$

De este modo, $\bar{x} = 4a/(3\pi)$, $\bar{y} = 4b/(3\pi)$.

1624. Hallar las áreas de las superficies y los volúmenes de los anillos (toros) engendrados por la revolución del círculo $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2$ alrededor de los ejes Ox y Oy $(a \geqslant r,\ b \geqslant r)$.

Resolución. Si el círculo gira en torno al eje Ox, el centro de gravedad está alejado a partir del eje de revolución a la distancia b; por eso el área de la superficie, según el primer teorema de Guldin, es igual a $S_x = 2\pi r\cdot 2\pi b = 4\pi^2 br$ y el volumen, conforme al segundo teorema de Guldin, es igual a $V_x = \pi r^2\cdot 2\pi b = 2\pi^2 br^2$.

Si la revolución se efectúa en torno al eje Oy, la distancia del centro de gravedad del círculo al eje Oy es igual a a. Entonces $S_y = 2\pi r\cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar$, $V_y = \pi r^2\cdot 2\pi a = 2\pi^2 ar^2$.

1625. Hallar, valiéndose del teorema de Guldin, las coordenadas del centro de gravedad del cuadrante del círculo $x^2 + y^2 \leqslant r^2$.

Resolución. Al girar el cuadrante del círculo alrededor del eje Ox obtenemos una semiesfera cuyo volumen es igual a $V = (1/2)\cdot(4\pi r^3/3) = 2\pi r^3/3$. De acuerdo con el segundo teorema de Guldin $V = (\pi r^2/4)\cdot(2\pi\bar{y})$. De aquí $\bar{y} = 2V/(\pi^2 r^2) = 2\cdot 2\pi r^3/(3\pi^2 r^2) = 4r/(3\pi)$. El centro de gravedad del cuadrante del círculo está sobre el eje de simetría, o sea, sobre la bisectriz del ángulo I de las coordenadas y por eso $\bar{x} = \bar{y} = 4r/(3\pi)$.

1626. Hallar las coordenadas de los centros de gravedad de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y del semicírculo limitado por esta semicircunferencia y el eje Ox.

1627. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una figura limitada por las líneas $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = 0$, $y = \cos x$.

1628. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de un segmento parabólico limitado por las líneas $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

1629. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ (en el cuadrante I).

1630. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las líneas $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

1631. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las líneas $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = 0$, $y = \operatorname{sen} x$.

1632. Hallar, valiéndose de un teorema de Guldin, el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución de un semicírculo de radio r alrededor de la tangente paralela al diámetro.

1633. Valiéndose de un teorema de Guldin, demostrar que el centro de gravedad de un triángulo está alejado de su base a una tercera parte de la altura.

Indicación. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución del triángulo en torno a la base.

1634. Valiéndose de un teorema de Guldin, hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de un rectángulo, que tiene por lados 6 y 8, alrededor de un eje que pase por su vértice perpendicularmente a la diagonal.

§ 9. Cálculo de un trabajo y de una presión

Un *trabajo de una fuerza variable* $X = f(x)$ que actúa en el sentido del eje Ox sobre el segmento $[x_0, x_1]$ se calcula por la fórmula

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Para calcular la *fuerza de presión de un líquido* se utiliza el principio de Pascal de acuerdo con el cual la presión ejercida por un líquido sobre una plataforma es igual a su área S multiplicada por la profundidad de sumersión h, la densidad ρ y la aceleración de la gravedad g, o sea,

$$P = \rho g h S.$$

1635. ¿Qué trabajo se necesita efectuar para estirar un resorte en 4 cm si se sabe que sometido a la carga de 1 N el resorte se estira 1 cm?

Resolución. Conforme a la ley de Hooke la fuerza X N que estira el resorte en x m es igual a $X = kx$. Determinemos el coeficiente de proporcionalidad k partiendo de la condición siguiente: si $x = 0{,}01$ m, entonces $X = 1$ N; por lo tanto, $k = 1/0{,}01 = 100$ y $X = 100x$. Entonces

$$A = \int_0^{0{,}04} 100x\,dx = 50x^2 \Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08 \text{ J}.$$

1636. ¿Qué trabajo realiza una grúa al extraer un estacón de hormigón armado del fondo del río de 5 m de profundidad si el estacón tiene la forma de un tetraedro regular con arista de 1 m y la densidad del hormigón armado es de 2500 kg/m³ (fig. 48)?

Resolución. La altura del tetraedro $h = \sqrt{6}/3$ m, el volumen del tetraedro $V = \sqrt{2}/12$ m³. El peso del estacón sumergido en el agua

$$P = (1/12)\cdot\sqrt{2}\cdot 2500\cdot 9{,}8 - (1/12)\cdot\sqrt{2}\cdot 1000\cdot 9{,}8 = 1225\sqrt{2}\text{N},$$

por eso el trabajo necesario para extraer el estacón hasta el momento en que su vértice aparecerá sobre la superficie del agua es igual a

$$A_0 = 1225\sqrt{2}\,(5 - h) = 1225\sqrt{2}(5 - \sqrt{6}/3) \cong 7227{,}5 \text{ J}.$$

Ahora determinemos el trabajo A_1 necesario para extraer del agua el estacón. *Supongamos que el vértice del tetraedro ha salido a una altura de* $5 + y$,

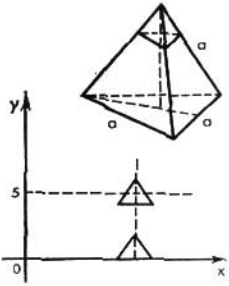

Fig. 48

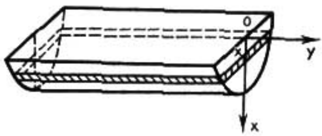

Fig. 49

entonces el volumen del pequeño tetraedro que emerge del agua es igual a $3\sqrt{3}y^3/8$ y el peso del tetraedro

$$P(y) = \frac{2500\cdot 9{,}8}{12}\sqrt{2} - \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\,y^3 3\sqrt{3}\right)1000\cdot 9{,}8 \text{ N}.$$

Por consiguiente,

$$A_1 = \int_0^h \left(\frac{24\,500}{12}\sqrt{2} - \frac{9800}{12}\sqrt{2} + \frac{9800}{8}\,3y^3\sqrt{3}\right)dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{6}/3} (1225\sqrt{2} + 3675\sqrt{3}\,y^3)\,dy = \left[1225\sqrt{2}\,y + \frac{3675}{4}\sqrt{3}\,y^4\right]_0^{\sqrt{6}/3} \approx$$

$$\approx 2082{,}5 \text{ J}.$$

De aquí

$$A = A_0 + A_1 = 7227{,}5 + 2082{,}5 = 9310 \text{ J} = 9{,}31 \text{ kJ}.$$

1637. Hallar el trabajo realizado para extraer el agua de una tina que tiene forma de semicilindro de longitud a y radio r (fig. 49).

Resolución. El volumen de una capa elemental de agua que se encuentra *a la profundidad* x y *tiene longitud* a, ancho $m = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ y *espesor* dx, es igual a

$$dV = am\,dx = 2a\sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

El trabajo elemental efectuado para elevar esta capa a la altura x es igual a $dA = 2\rho gax\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$, donde ρ es la densidad del agua. Por lo tanto,

$$A = 2a\rho g \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -a\rho g\left[\frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{3/2}\right]_0^r = \frac{2}{3}\rho g a r^3.$$

1638. Un tubo de agua es de 6 cm de diámetro. Uno de sus extremos está unido con un depósito en el cual el nivel de agua es 100 cm más alto que el borde superior del tubo y el otro extremo está tapado por una mariposa. Hallar la presión total que es ejercida sobre la mariposa.

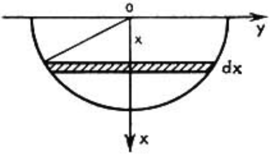

Fig. 50

Resolución. La mariposa es un círculo de 3 cm de radio. Dividimos el área de este círculo en elementos, o sea, en bandas paralelas a la superficie de agua. El área de un elemento así que está a la distancia y a partir del centro es igual (con exactitud hasta infinitésimos de orden superior) a $dS = 2\sqrt{9 - y^2}\,dy$, cm². Determinamos la fuerza de presión a la cual se somete este elemento:

$$dP = 2\rho g\,(103 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy = 1960\,(103 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy \text{ dinas}$$

(aquí $\rho = 1$ g/cm³). Por consiguiente,

$$P = 1960 \int_{-3}^{3} (103 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy =$$

$$= 1960\left[103\left(\frac{y}{2}\sqrt{9 - y^2} + \frac{9}{2}\arcsen\frac{y}{3}\right) + \frac{1}{3}(9 - y^2)^{3/2}\right]_{-3}^{3} =$$

$$= 980 \cdot 927\pi = 908\,460\pi \text{ erg} \approx 0{,}09\pi, \text{ J}.$$

1639. Hallar la presión que ejerce el agua sobre una pared vertical que tiene forma de semicírculo, cuyo diámetro es de 6 m y está sobre la superficie de agua (fig. 50). Densidad del agua $\rho = 1000$ kg/m³.

Resolución. La diferencial de la presión ejercida sobre una plataforma elemental se expresa del modo siguiente:

$$dP = 2\rho gx\sqrt{9 - x^2}\,dx = 19\,600x\sqrt{9 - x^2}\,dx.$$

De aquí

$$P = 19\,600 \int_0^3 x\sqrt{9 - x^2}\,dx = -\frac{19\,600}{3}(9 - x^2)^{3/2}\Big|_0^3 = 176\,400 \text{ N} = 176{,}4 \text{ kN}.$$

1640. Determinar la presión que la gasolina que está en un depósito cilíndrico, cuya altura $h = 3{,}5$ m y el radio de la base $r = 1{,}5$ m, ejerce sobre las paredes del mismo si $\rho = 900$ kg/m³.

Resolución. El elemento de la presión que se ejerce sobre la superficie de la pared en la banda separada se expresará así: $dP = \rho g \cdot 2\pi rx\,dx$. De aquí

$$P = 2\pi r\rho g \int_0^h x\,dx = \rho g\pi rh^2 = 9{,}8\pi \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}5^2 \cdot 900 = 161\,700\,\pi \text{ N} = 161{,}7\,\pi \text{ kN}.$$

1641. ¿A qué presión está sometida una placa rectangular de largo a y de ancho b ($a > b$) si se halla inclinada con respecto al horizonte del líquido bajo un ángulo α y su lado mayor se encuentra a una profundidad h (fig. 51)?

Resolución. El área de una banda elemental separada a la profundidad x es igual a $dS = (a/\operatorname{sen}\alpha)\,dx$. Por lo tanto, el elemento de la presión $dP = (ax\rho g/\operatorname{sen}\alpha)\,dx$ (ρ es la densidad del líquido). De aquí determinamos

$$P = a\rho g \int\limits_{h}^{h+b\operatorname{sen}\alpha} \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{a\rho g}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{1}{2}\,x^2\Big|_{h}^{h+b\operatorname{sen}\alpha} =$$

$$= \frac{a\rho g}{2\operatorname{sen}\alpha}\left[(h^2+2bh\operatorname{sen}\alpha+b^2\operatorname{sen}^2\alpha)-h^2\right] = ab\rho g\left(h+\frac{1}{2}\,b\operatorname{sen}\alpha\right).$$

1642. Hallar la presión ejercida sobre una placa que tiene la forma de un trapecio isósceles, con las bases a y b y la altura h, y está sumergida en un líquido a la profundidad c (fig. 52).

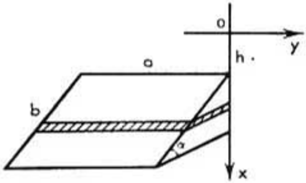

Fig. 51

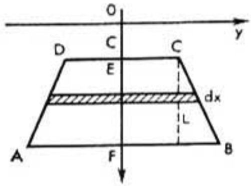

Fig. 52

Resolución. El área de una banda elemental se expresa así: $dS = (a + 2l)\,dx$, donde $l = (b - a)(x - c)/(2h)$ (l se determina a partir de la semejanza de los triángulos). Por consiguiente,

$$P = \rho g \int\limits_{c}^{c+h} \left[a + \frac{b-a}{h}(x-c)\right] x\,dx =$$

$$= \rho g\left[\frac{ax^2}{2} + \frac{b-a}{h}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{cx^2}{2}\right)\right]_c^{c+h} = \left[\frac{a+b}{2}\,ch + \frac{h^2}{6}(a+2b)\right]\rho g.$$

1643. Determinar el trabajo realizado para extraer el agua de un recipiente cónico, cuya base es horizontal y se encuentra debajo del véritce, si el radio de la base es igual a r y su altura es h.

1644. De una cisterna cilíndrica se extrae un líquido. ¿Qué trabajo se necesita realizar si la longitud de la cisterna es igual a a y su diámetro es d?

1645. Por la grúa, con ayuda de un cable sujetado en el vértice, se eleva del agua una piedra de forma cónica. Hallar el trabajo realizado para extraer completamente la piedra del agua si el vértice del cono se encontraba en la superficie de agua. El radio de la base del cono es de 1 m, la altura es de 3 m, la densidad es de 2,5 g/cm³.

Indicación: aquí $P(y) = 14\,700\pi + (9800/27)\,\pi y^3$ N.

1646. Un cono recto de fundición, cuya altura es de 40 cm y el radio de la base es también de 40 cm, se encuentra sobre el fondo de un depósito lleno por completo de aceite de petróleo. Determinar el trabajo que se necesita efectuar para extraer este cono del depósito si la densidad de la fundición $\rho_1 = 7{,}22$ g/cm³ y la densidad del aceite de petróleo $\rho_2 = 0{,}89$ g/cm³.

Indicación: aquí $P(y)$ es igual al peso del cono menos el peso de la masa de petróleo desalojada del agua por la parte del cono, o sea, $P(y) = \frac{1}{3}\pi\cdot 40^3\rho_1 g -$ $- \left(\frac{1}{3}\pi\cdot 40^3 - \frac{1}{3}\pi y^3\right)\rho_2 g$ dinas.

1647. Una botella cilíndrica de 24 cm de diámetro y 80 cm de largo está llena de gas bajo una presión de 2 kPa. ¿Qué trabajo hace falta realizar comprimiendo isotérmicamente el gas, para que su volumen se reduzca a la mitad?

1648. Una placa triangular está sumergida, con el vértice vuelto hacia arriba, en un líquido cuya densidad es igual a ρ. Determinar la presión que el líquido ejerce sobre la placa si la base del triángulo es igual a a y su altura es h. El vértice del triángulo está sobre la superficie.

1649. Determinar la presión que ejerce la gasolina, contenida en un depósito cilíndrico cuya altura $h = 4$ m y el radio $r = 2$ m ($\rho = 900$ kg/m³), sobre las paredes del recipiente a cada metro de profundidad.

1650. Una placa redonda de diámetro d está sumergida en un líquido de densidad ρ de modo que toque la superficie de éste. Hallar la presión que el líquido ejerce sobre la placa.

Componiendo las sumas integrales respectivas y efectuando el paso al límite, resolver los problemas siguientes:

1651. Hallar la masa de una barra de 100 cm de longitud si la densidad lineal de ésta varía según la ley $\delta = (20x + 0{,}15x^2)$ g/cm, donde x es la distancia a uno de los extremos de la barra.

1652. La velocidad de un punto varía según la ley $v = (100 + 8t)$ m/s. ¿Qué camino recorrerá este punto durante el intervalo de tiempo $[0, 10]$?

1653. Un punto se desplaza por el eje Ox a partir del punto $M(1; 0)$ de modo que su velocidad sea igual a la abscisa. ¿Dónde se encontrará este punto dentro de 10 s después de comenzar su movimiento?

1654. La velocidad de un punto varía según la ley $v = 2(6 - t)$ m/s. ¿Cuál será el máximo alejamiento del punto a partir del comienzo de su movimiento?

§ 10. Algunas nociones sobre funciones hiperbólicas

1. Funciones hiperbólicas

Se llaman funciones hiperbólicas a las definidas por las igualdades:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \textit{seno hiperbólico},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \textit{coseno hiperbólico},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \textit{tangente hiperbólica},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \textit{cotangente hiperbólica}.$$

El coseno hiperbólico es una función par, o sea, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, mientras que el seno hiperbólico, la tangente y cotangente hiperbólicas son funciones impares: $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$.

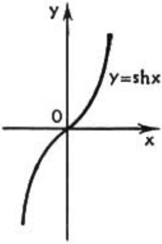

Fig. 53

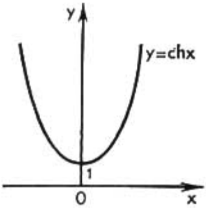

Fig. 54

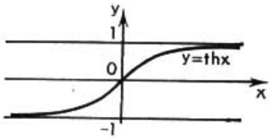

Fig. 55

Es útil tener en cuenta que $\operatorname{sh} 0 = 0$; $\operatorname{ch} 0 = 1$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1$.

Los gráficos de las funciones hiperbólicas $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$ e $y = \operatorname{th} x$ se muestran, respectivamente, en las figs. 53-55.

El gráfico de un coseno hiperbólico se llama *catenaria*. La catenaria es línea de comba de un hilo pesado suspendido de dos puntos.

Las derivadas de las funciones hiperbólicas se determinan por las fórmulas $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{th} x)' = 1/\operatorname{ch}^2 x$, $(\operatorname{cth} x)' = -1/\operatorname{sh}^2 x$.

Para integrar las funciones hiperbólicas tienen lugar las fórmulas

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C, \qquad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

1655. Demostrar la validez de la igualdad

$$\operatorname{sh}(x + a) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} a.$$

Resolución. Según la definición del seno hiperbólico tenemos

$$\operatorname{sh}(x+a)=\frac{e^{x+a}-e^{-(x+a)}}{2}=\frac{e^{x}\cdot e^{a}-e^{-x}\cdot e^{-a}}{2}.$$

Como $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$, $e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$, $e^a = \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a$, $e^{-a} = \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a$, entonces

$$\operatorname{sh}(x+a)=\frac{(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} a+\operatorname{sh} a)-(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} a-\operatorname{sh} a)}{2}.$$

Cumplidas las transformaciones algebraicas, obtenemos

$$\operatorname{sh}(x+a)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} a+\operatorname{ch} x \operatorname{sh} a.$$

1656. Expresar $\operatorname{ch}(x+a)$ por las funciones hiperbólicas de los argumentos x y a.

Resolución. Derivando respecto a x la igualdad

$$\operatorname{sh}(x+a)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} a+\operatorname{ch} x \operatorname{sh} a,$$

obtenemos

$$\operatorname{ch}(x+a)=\operatorname{ch} x \operatorname{ch} a+\operatorname{sh} x \operatorname{sh} a.$$

1657. Expresar $\operatorname{sh} 2x$ y $\operatorname{ch} 2x$ por medio de $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$.

Resolución. Tenemos

$$\operatorname{sh} 2x=\operatorname{sh}(x+x)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x+\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}(x+x)= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x \operatorname{sh} x,$$

o sea,

$$\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x.$$

1658. Expresar $\operatorname{ch}^2 x$ y $\operatorname{sh}^2 x$ mediante el $\operatorname{ch} 2x$.

Resolución. Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch} 2x,\\ \operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1\end{cases}$$

respecto a $\operatorname{ch}^2 x$ y $\operatorname{sh}^2 x$, obtenemos

$$\operatorname{ch}^2 x=(\operatorname{ch} 2x+1)/2, \quad \operatorname{sh}^2 x=(\operatorname{ch} 2x-1)/2.$$

1659. 1) Expresar las funciones hiperbólicas $\operatorname{ch} xi$ y $\operatorname{sh} xi$ del argumento imaginario por $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Resolución. Encontramos

$$\operatorname{sh} xi=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2}=i\cdot\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}=i\cdot\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{ch} xi=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}=\cos x.$$

De suerte que $\operatorname{sh} xi = i\cdot\operatorname{sen} x$, $\operatorname{ch} xi = \cos x$.

2) Expresar la función trigonométrica $\operatorname{sen} xi$ y $\cos xi$ de argumento imaginario, por medio de $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$.

Resolución. Reemplazando en las fórmulas $\operatorname{sh} xi = i \operatorname{sen} x$ y $\operatorname{ch} xi = \cos x$ (problema 1659) xi en lugar de x, obtenemos:

$$\operatorname{sh} xi^2=i\operatorname{sen} xi, \text{ es decir, } \operatorname{sen} xi=\frac{\operatorname{sh}(-x)}{i}=i\operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{ch} xi^2=\cos xi, \text{ o sea, } \cos xi=\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch} x.$$

De este modo, sen $xi = i$ sh x, cos $xi =$ ch x.

1660. ¿Qué línea se define por las ecuaciones paramétricas $x = a \operatorname{ch} t$, $x = a \operatorname{sh} t$ para $a > 0$?

Resolución. Eliminamos de estas ecuaciones t, para lo cual restamos y^2 de x^2:

$$x^2 - y^2 = a^2 (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t), \quad \text{o sea,} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

La curva $x^2 - y^2 = a^2$ es una hipérbola equilátera de cuyas asíntotas sirven las rectas $y = \pm x$. La curva dada es la rama derecha de esta hipérbola, ya que $x = a \operatorname{ch} t > 0$ para cualquier t (fig. 56).

1661. Un punto M se encuentra en la rama derecha de la hipérbola equilátera $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$. Desde el punto M se baja

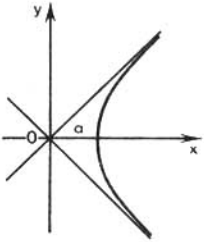

Fig. 56

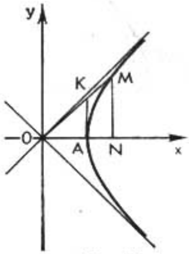

Fig. 57

la perpendicular MN al eje de las abscisas y este mismo punto está unido por el segmento OM con el origen de coordenadas. Desde el vértice A de la hipérbola se traza la perpendicular AK hasta intersecarse en el punto K con el segmento OM (fig. 57). Demostrar que $|NM| : a = \operatorname{sh} t$, $|ON| : a = \operatorname{ch} t$, $|AK| : a = \operatorname{th} t$.

Resolución. Tenemos

$$|NM| : a = y : a = \operatorname{sh} t, \quad |ON| : a = x : a = \operatorname{ch} t,$$

$$|AK| : a = |NM| : |ON| = (|NM| : a)/(|ON| : a) = \operatorname{sh} t / \operatorname{ch} t = \operatorname{th} t.$$

1662. 1) Un punto M se encuentra en la rama derecha de la hipérbola equilátera $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$. Calcular el área del sector hiperbólico limitado por la rama de la hipérbola, el eje de las abscisas y el segmento OM (fig. 58).

Resolución. Tenemos $S = S_{ONM} - S_{ANM} = \frac{1}{2} xy - \int\limits_a^x y\, dx$. Puesto que $x = a \operatorname{ch} t$ e $y = a \operatorname{sh} t$, $dx = a \operatorname{sh} t\, dt$, de donde

$$S = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t - a^2 \int\limits_0^t \operatorname{sh}^2 t\, dt = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t - \frac{a^2}{2} \int\limits_0^t (\operatorname{ch} 2t - 1)\, dt =$$

$$= \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sh} 2t - \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sh} 2t + \frac{a^2}{2} t = \frac{a^2 t}{2}.$$

De este modo $t = 2S/a^2$. Así, pues, el argumento t de las funciones hiperbólicas se puede considerar como el cociente obtenido de la división del área duplicada del sector hiperbólico OAM por el cuadrado del semieje real.

2) Para la catenaria $y = k \operatorname{ch} \frac{x}{k}$, donde $k = \frac{T_x}{\rho}$, establecer la dependencia entre la longitud del arco $ACB = S$, la horizontal l y la vertical h con las distancias de los puntos de suspensión (fig. 58a)

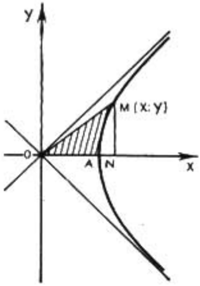

Fig. 58

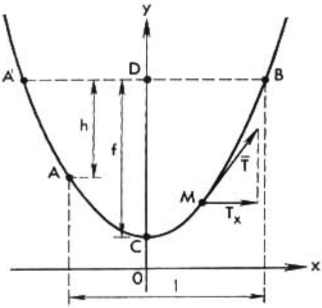

Fig. 58a

Determinar la componente horizontal de tensión T_x, si la densidad lineal del hilo $\rho = 200$ N/m, $S = 40$ m, $l = 20$ m, $h = 8$ m.

Resolución. Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Entonces, $l = x_2 - x_1$, $h = y_2 - y_1 = k\left(\operatorname{ch} \frac{x_2}{k} - \operatorname{ch} \frac{x_1}{k}\right) = 2k \operatorname{sh} \frac{x_2 + x_1}{2k} \operatorname{sh} \frac{x_2 - x_1}{2k} = 2k \operatorname{sh} \frac{l}{2k} \operatorname{sh} \frac{x_2 + x_1}{2k}$. El largo del arco será $S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{k}}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{ch} \frac{x}{k}\, dx = k\left(\operatorname{sh} \frac{x_2}{k} - \operatorname{sh} \frac{x_1}{k}\right) = 2k \cdot \operatorname{sh} \frac{x_2 - x_1}{2k} \operatorname{ch} \frac{x_2 + x_1}{2k} = 2k \cdot \operatorname{sh} \frac{l}{2k} \cdot \operatorname{ch} \frac{x_2 + x_1}{2k}$.

Como $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$, entonces, $s^2 - h^2 = 4k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{l}{2k}$, lo que determina la dependencia entre S, l y h, que se puede escribir así: $\frac{\operatorname{sh} l/2k}{l/2k} = \frac{\sqrt{S^2 - h^2}}{l}$. De esta relación, conociendo S, l y h, se puede determinar el parámetro $k = \frac{T_x}{\rho}$, y luego la componente horizontal de la tensión $T_x = k\rho$. Designamos $\frac{l}{2k} = u$, entonces, $\frac{\operatorname{sh} u}{u} = \frac{\sqrt{S^2 - h^2}}{l} = \frac{\sqrt{40^2 - 8^2}}{20} = 0{,}8\sqrt{6} = 1{,}96$. Obtenemos la ecuación $\frac{\operatorname{sh} u}{u} = \frac{e^u - e^{-u}}{2u} = 1 + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} + \frac{u^6}{7!} + \ldots = 1{,}96$, de la cual, obtenemos con ayuda de la tabla, la raíz de u: $u = \frac{l}{2k} = 2{,}15$, de aquí,

$k=\frac{l}{2u}=\frac{20}{4,3}=4,65$ [m] y $T_x=k\rho=4,65\cdot 200=930$ N. De este modo, $\frac{\operatorname{sh} u}{u}=$ $=\frac{\sqrt{S^2-h^2}}{l}$, donde $u=\frac{l}{2k}$; $T_x=k\rho=930$ N.

3) Determinar la flecha f de flexión del hilo en el **ejercicio** 1662, 2), si los puntos de suspensión se encuentran a igual altura (es decir, $y_1=y_2$, $h=0$, arco $A'CB$, fig. 58a).

Resolución. $f=\overline{OD}-\overline{OC}=y_2-y_C=k\operatorname{ch}\frac{x_2}{k}-k$, pero $\overline{A'B}=l=2x_2$ y $x_2=\frac{l}{2}$, entonces, $f=k\left(\operatorname{ch}\frac{l}{2k}-1\right)=k\left(\frac{l^2}{2!\,2^2\cdot k^2}+\frac{l^4}{4!\,2^4\cdot k^4}+\frac{l^6}{6!\,2^6\cdot k^6}+\ldots\right)\approx\frac{l^2}{8k}$. Para $h=0$: $\frac{\operatorname{sh} u}{u}=\frac{S}{l}$, es decir, el arco $A'CB=S=l\frac{\operatorname{sh} u}{u}=l\left(1+\frac{u^2}{3!}+\right.$ $\left.+\frac{u^4}{5!}+\ldots\right)$, donde $u=\frac{l}{2k}$ y $S=l+\frac{l^3}{3!\,(2k)^2}+\frac{l^5}{5!\,(2k)^4}+\ldots\approx l+\frac{l^3}{24\,k^2}$. Hemos obtenido: $f\approx\frac{l^2}{8k}$ y $S\approx l+\frac{l^3}{24\,k^2}$. Eliminando k, tenemos: $S\approx l+$ $+\frac{8f^2}{3l}$ y $df\cong\frac{3l}{16f}\,dS$.

1663. Hallar las derivadas de las funciones:

1) $y=\ln\left(\operatorname{ch} x+\sqrt{\operatorname{ch}^2 x+1}\right)$; 2) $y=5\operatorname{sh}^3(x/15)+3\operatorname{sh}^5(x/15)$; 3) $y=2\operatorname{arctg}(\operatorname{th}(x/2))$; 4) $y=\operatorname{th} x-\frac{2}{3}\operatorname{th}^5 x+\frac{1}{5}\operatorname{th}^5 x$; 5) $y=$ $=\operatorname{arcctg}(1/\operatorname{sh} x)$; 6) $y=\ln\operatorname{th}(x^2/4)$.

1664. ¿En qué punto de la catenaria $y=\operatorname{ch} x$ la tangente forma con el eje de las abscisas un ángulo $\alpha=\pi/4$?

1665. Investigar la función $y=\operatorname{ch}\frac{x}{2}-1$ determinando su extremo.

1666. Hallar las integrales: 1) $\int x^2\operatorname{ch} x\,dx$; 2) $\int\operatorname{sh}^4 x\,dx$; 3) $\int\frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x-1}}\,dx$; 4) $\int\operatorname{sh} x\operatorname{sen} x\,dx$; 5) $\int\frac{\operatorname{sh}(x/2)}{\operatorname{ch}^3(x/2)}\,dx$; 6) $\int\operatorname{sh}^3\times$ $\times(x/3)\operatorname{ch}^2(x/3)\,dx$.

1667. Calcular las integrales definidas: 1) $\int\limits_0^{\ln(1+\sqrt{2})}\frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{sh}^2 x}}$; 2) $\int\limits_0^{\ln 2}\operatorname{th}^2 x\,dx$; 3) $\int\limits_0^{\ln 3} x\operatorname{ch} x\,dx$.

1668. Expresar $\operatorname{sh}(x-a)$ y $\operatorname{ch}(x-a)$ por las funciones hiperbólicas de los argumentos x y a.

1669. Expresar $\operatorname{th}(x+a)$ y $\operatorname{th}(x-a)$ por medio de $\operatorname{th} x$ y $\operatorname{th} a$. Hallar $\operatorname{th} 2x$.

1670. Expresar por $\operatorname{ch} x$ las funciones hiperbólicas del medio argumento de $\operatorname{sh}(x/2)$, $\operatorname{ch}(x/2)$ y $\operatorname{th}(x/2)$.

1671. Reducir a una fórma cómoda para determinar por logaritmos las expresiones $\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{ch} y$, $\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y$.

1672. Expresar $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$ por medio de $\operatorname{th}(x/2)$.

1673. Representar los productos de las funciones hiperbólicas $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$ en forma de sumas.

1674. Calcular el área limitada por la curva $y = \operatorname{sh} x$ y las rectas $x = \ln 5$, $y = 0$.

1675. Hallar la longitud del arco de la curva $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, comprendido entre las rectas $x = 0$, $x = a$.

1676. Sobre la recta $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$ se dan los puntos M y N correspondientes a los valores de $t = t_1$ y $t = t_2$ $(t_1 < t_2)$. Calcular el área del sector OMN.

1677. ¿Qué línea se define por las ecuaciones $x = a/\operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{th} t$ si $a > 0$, $b > 0$?

1678. ¿Qué línea es definida por las ecuaciones $x = \operatorname{ch}^2 t$, $y = \operatorname{sh}^2 t$?

1679. Se da $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{th} t$. Expresar $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ por medio de t.

1680. Simplificar la expresión $(\cos x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \operatorname{sh} y + i \operatorname{sen} x \cos y)^2$.

1681. Simplificar la expresión $(x \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t)^2 - (x \operatorname{sh} t + y \operatorname{ch} t)^2$.

1682. Demostrar las identidades:

1) $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx$;

2) $\operatorname{ch} nx = \dfrac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n + (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n}{2}$;

3) $\operatorname{sh} nx = \dfrac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n - (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n}{2}$.

1683. Utilizando las igualdades $\operatorname{sh}^n x = \dfrac{(e^x - e^{-x})^n}{2^n}$; $\operatorname{ch}^n x = \dfrac{(e^x + e^{-x})^n}{2^n}$, demostrar que

$$\operatorname{ch}^3 x = \frac{1}{4} \operatorname{ch} 3x + \frac{3}{4} \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh}^5 x = \frac{1}{16} \operatorname{sh} 5x - \frac{5}{16} \operatorname{sh} 3x + \frac{5}{8} \operatorname{sh} x.$$

2. *Funciones hiperbólicas inversas*

En correspondencia con las funciones trigonométricas (circulares) inversas, se definen las funciones hiperbólicas inversas. Si $x = \operatorname{sh} y$, entonces, mediante $\operatorname{Arsh} x$ designamos el argumento del seno hiperbólico (la expresión «Ar» se emplea aquí como símbolo de área), es decir, y es el área del seno hiperbólico igual a x. De un modo análogo se definen las restantes funciones hiperbólicas inversas: $y = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} x$; $y = \operatorname{Ar} \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{Ar} \operatorname{cth} x$. Las funciones hiperbólicas inversas se expresan por medio de funciones logarítmicas: $\operatorname{Ar} \operatorname{sh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\operatorname{Ar} \operatorname{ch} x = \ln (x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$ $(x = \operatorname{ch} y \geqslant 1$, y el doble signo se debe a que, a cada valor de la función $\operatorname{ch} x$ le corresponden dos valores del argumento y):

$$\operatorname{Ar\,th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{para } |x| < 1,$$

$$\operatorname{Ar\,cth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad \text{para } |x| > 1.$$

Los gráficos de las funciones hiperbólicas inversas corresponden al reflejo especular de los gráficos de las correspondientes funciones hiperbólicas con respecto a las bisectrices de los ángulos I y III de las coordenadas.

Observemos algunas propiedades de las funciones hiperbólicas inversas:

1) $y = \operatorname{Ar\,sh} x$ es una función impar, unívoca, con campo de definición $-\infty < x < +\infty$, con crecimiento monótono desde $-\infty$ hasta $+\infty$. En el origen de las coordenadas esta función tiene un punto de inflexión y su centro de simetría. Su tangente en el punto de origen de las coordenadas, forma con el eje Ox un ángulo igual a $\frac{\pi}{4}$. No tiene asíntotas.

2) $y = \operatorname{Ar\,ch} x$, es una función biunívoca, con campo de definición $1 \leqslant x < +\infty$; el gráfico del $\operatorname{Ar\,ch} x$ es simétrico con respecto al eje Ox; en el punto M (1, 0) tiene una tangente vertical $x = 1$. Cuando x se incrementa ($x > 1$), y crece en términos absolutos.

3) $y = \operatorname{Ar\,th} x$, es una función impar, unívoca, con campo de definición $-1 < x < +1$, y crecimiento monótono desde $-\infty$ hasta $+\infty$. En el origen de las coordenadas tiene su punto de inflexión y su centro de simetría. Sus asíntotas verticales son $x = \pm 1$.

4) $\operatorname{Ar\,cth} x$, es una función impar, unívoca, con campo de definición $|x| > 1$. Cuando $-\infty < x < -1$, decrece desde 0 hasta $-\infty$; cuando $+1 < x < +\infty$, decrece desde $+\infty$ hasta 0. No tiene extremos ni puntos de inflexión y sus asíntotas verticales son $x = \pm 1$.

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas se hallan mediante las fórmulas:

$$(\operatorname{Ar\,sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad (\operatorname{Ar\,ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$(\operatorname{Ar\,th} x)' = \frac{1}{1-x^2}; \; (|x|<1); \; (\operatorname{Ar\,cth} x)' = -\frac{1}{x^2-1}, \quad (|x|>1).$$

Mostramos las fórmulas que vinculan las funciones hiperbólicas inversas con las trigonométricas inversas:

$$\operatorname{Ar\,sh} x = -i \operatorname{arc\,sen} xi; \quad \operatorname{Ar\,ch} x = \pm \operatorname{arc\,cos} xi;$$

$$\operatorname{Ar\,sh} xi = i \operatorname{arc\,sen} x, \text{ y } \operatorname{Ar\,ch} xi = \pm \operatorname{arc\,cos} x.$$

Capítulo XI. Elementos de programación lineal

§ 1. Desigualdades lineales y campo de soluciones de un sistema de desigualdades lineales

Sea dada una desigualdad lineal con dos variables x_1 y x_2:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b \geqslant 0. \tag{1}$$

Si las variables x_1 y x_2 se consideran como coordenadas de un punto de un plano, entonces el conjunto de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad (1) se llama *campo de soluciones* de la desigualdad dada. El campo de soluciones de la desigualdad (1) es un semiplano.

Para determinar cuál entre los dos semiplanos corresponde a la desigualdad (1) basta reducir esta desigualdad a la forma $x_2 \geqslant kx_1 + l$ o bien a la forma $x_2 \leqslant kx_1 + l$. En el primer caso el semiplano buscado se halla encima de la recta $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$ y en el segundo, debajo de ella. Si $a_2 = 0$, entonces la desigualdad se reduce a una de las formas $x_1 \geqslant h$ o bien $x_1 \leqslant h$, o sea, el semiplano está a la derecha o a la izquierda de la recta $x_1 = h$.

En el caso en que se da un sistema de desigualdades

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + b_m \geqslant 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

donde m es un número finito, obtendremos la intersección del número finito de semiplanos que forma un campo poligonal D. El campo D se denomina *campo de soluciones* del sistema de desigualdades (2). Este campo no siempre es limitado, puede ser no acotado e incluso vacío. El último caso tiene lugar cuando el sistema de ecuaciones (2) es contradictorio. Pueden ser también los casos de desigualdades superfluas que forman parte del sistema conjunto y definen las rectas que no tienen con el campo D puntos comunes. Tales desigualdades pueden ser eliminadas.

El campo de soluciones posee una particularidad importante: es *convexo*, o sea, junto con sus dos puntos cualesquiera contiene también todo el segmento que los une. La recta que tiene con el campo al menos un punto común de modo que todo el campo esté por un lado de esta recta se llama *recta de apoyo* con respecto a este campo.

De un modo análogo también se interpreta geométricamente un **sistema** de desigualdades con tres variables:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_3 + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \geqslant 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + b_3 \geqslant 0. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Aquí cada una de las desigualdades se cumple para uno de los semiespacios en los que un plano respectivo divide todo el espacio. El sistema de desigualdades (3) es la intersección de los semiespacios, o sea, un campo poliédrico de las soluciones del sistema de desigualdades.

1684. Hallar un semiplano que sea definido por la desigualdad $2x_1 + 3x_2 - 12 \leqslant 0$.

Resolución. Sustituyendo el signo de desigualdad por el de igualdad exacta, obtendremos la ecuación de la recta $2x_1 + 3x_2 - 12 = 0$, o sea, $x_2 = (-2/3)\,x_1 + 4$ (fig. 59). Reducimos la desigualdad dada a la forma $x_2 \leqslant (-2/3)\,x_1 + 4$. Por consiguiente, el semiplano buscado se halla debajo de la recta $x_2 = (-2/3)\,x_1 + 4$.

1685. ¿Qué semiplano define la desigualdad $2x_1 - 3x_2 \geqslant 0$?

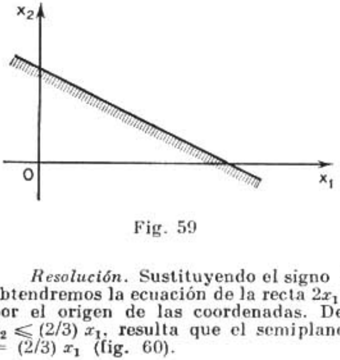

Fig. 59

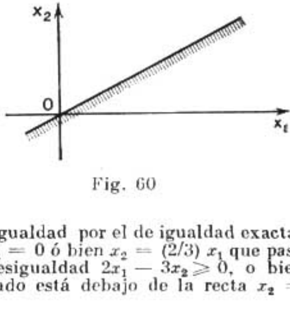

Fig. 60

Resolución. Sustituyendo el signo de desigualdad por el de igualdad exacta, obtendremos la ecuación de la recta $2x_1 - 3x_2 = 0$ ó bien $x_2 = (2/3)\,x_1$ que pasa por el origen de las coordenadas. De la desigualdad $2x_1 - 3x_2 \geqslant 0$, o bien $x_2 \leqslant (2/3)\,x_1$, resulta que el semiplano buscado está debajo de la recta $x_2 = (2/3)\,x_1$ (fig. 60).

1686. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 - 1 \geqslant 0$, $x_2 - 1 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 - 3 \geqslant 0$, $-6x_1 - 7x_2 + 42 \geqslant 0$.

Resolución. Sustituyendo los signos de desigualdad por los de igualdades exactas, obtendremos las ecuaciones de cuatro rectas: $x_1 - 1 = 0$, $x_2 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 - 3 = 0$ y $6x_1 + 7x_2 - 42 = 0$ representadas en la fig. 61. Reducimos las desigualdades dadas a la forma $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant -x_1 + 3$, $x_2 \leqslant (-6/7)\,x_1 + 6$. El rayado muestra los semiplanos que sirven de campos de soluciones de las desigualdades respectivas. El campo de soluciones del sistema de desigualdades es un cuadrilátero convexo.

1687. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 - 2 \geqslant 0$, $x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0$, $x_1 \leqslant 2$.

Resolución. Sustituyendo los signos de desigualdades por los de igualdades exactas, obtendremos las ecuaciones de cuatro rectas: $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 - 2 = 0$, $x_1 - x_2 + 1 = 0$, $x_1 = 2$ representadas en la fig. 62. Llevamos las desigualdades dadas a la forma $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant -x_1 + 2$, $x_2 \leqslant x_1 + 1$, $x_1 \leqslant 2$. El campo de soluciones del sistema de desigualdades es una figura convexa ilimitada.

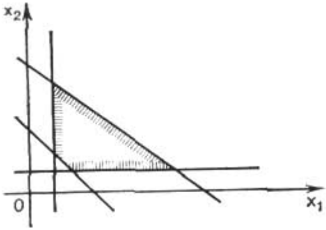

Fig. 61

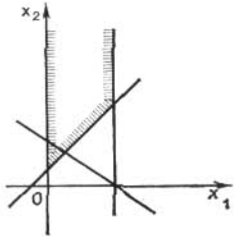

Fig. 62

1688. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 2$, $x_1 + 3x_2 \leqslant 3$, $x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0$.

Resolución. Construyamos las rectas respectivas. En la fig. 63 vemos que no existe ningún punto común a los tres semiplanos. Esto quiere decir que el campo de soluciones es «vacío» y el sistema dado de desigualdades es incompatible.

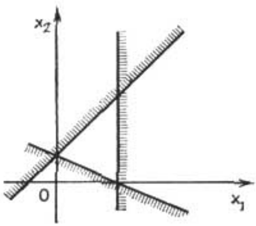

Fig. 63

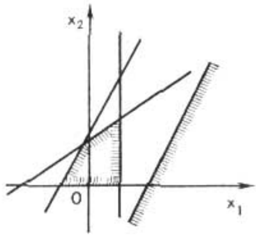

Fig. 64

1689. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $2x_1 - x_2 \geqslant -2$, $x_1 - x_2 \geqslant -2$, $x_1 \leqslant 1$, $2x_1 - x_2 \geqslant 3$.

Resolución. Este sistema no tiene soluciones. Geométricamente esto significa que no existe ningún punto cuyas coordenadas satisfagan todas las desigualdades del problema dado (fig. 64).

1690. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $3x_1 - x_2 \geqslant 0$ (a), $x_1 - x_2 \leqslant 0$ (b), $2x_1 + x_2 \leqslant 6$ (c), $x_1 \leqslant 2$ (d), $3x_1 - x_2 \geqslant -4$ (e).

Resolución. A las cinco desigualdades dadas les corresponde un conjunto de puntos del plano, que forma el triángulo AOB (fig. 65). Las desigualdades (d) y (e) pueden ser eliminadas, ya que la desigualdad (e) define una recta de frontera que no tiene puntos comunes con el triángulo AOB, mientras que la recta definida por la desigualdad (d) tiene un solo punto común con el triángulo y es de apoyo.

1691. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 - 1 \leqslant 0$, $3x_1 + x_2 - 3x_3 \geqslant 0$.

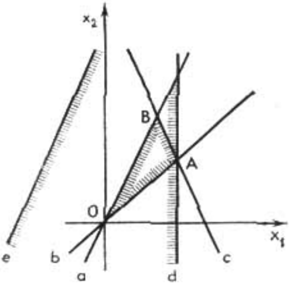

Fig. 65

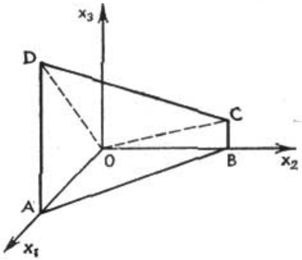

Fig. 66

Resolución. Sustituyendo los signos de desigualdades por los de igualdades exactas, obtendremos las ecuaciones de planos $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - 1 = 0$, $3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ que están representadas en la fig. 66. De campo de soluciones del sistema de desigualdades sirve el tetraedro $ABOCD$.

1692. *¿Cómo está situado el semiplano, si las coordenadas de sus puntos satisfacen la desigualdad* $x_1 - x_2 - 10 \geqslant 0$?

1693. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 + x_2 - 5 \geqslant 0$, $x_1 - x_2 - 5 \geqslant 0$, $x_1 \leqslant 7$.

1694. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 - 5x_2 + 5 \geqslant 0$, $x_1 + 3x_2 - 3 \leqslant 0$, $x_1 \leqslant 5$.

1695. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 3$, $x_2 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 \leqslant 0$.

1696. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 - x_2 + 1 \geqslant 0$, $2x_1 + x_2 - 7 \geqslant 0$, $x_1 - 2x_2 + 4 \geqslant 0$.

1697. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_2 \geqslant 0$ (a), $4x_1 - x_2 \geqslant 0$ (b), $x_2 \leqslant 6$ (c), $4x_1 + x_2 \leqslant 40$ (d), $x_1 - x_2 + 8 \geqslant 0$ (e).

1698. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 1$, $x_3 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 + x_3 - 5 \leqslant 0$.

1699. Hallar el campo de soluciones del sistema de desigualdades $x_1 \leqslant 4$, $2x_2 - x_3 \geqslant 0$, $x_2 + x_3 \leqslant 3$, $x_1 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$.

§ 2. Problema principal de la programación lineal

El problema de la programación lineal consiste en estudiar los procedimientos de la determinación de los valores máximo o mínimo de una función lineal, en presencia de restricciones lineales.

La función cuyo valor máximo o mínimo se busca se llama *función objetivo* y el conjunto de valores de las variables con los cuales se alcanza el valor máximo o mínimo determina el llamado *plan óptimo*. Todo otro conjunto de valores que satisfaga las restricciones determina *un plan (solución) posible*.

Sean dadas las restricciones por un sistema compatible de m desigualdades lineales con n variables:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m. \end{cases}$$

Entre las soluciones no negativas de este sistema se requiere encontrar una solución tal que con ella la función lineal (función objetivo)

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0$$

alcance el valor máximo (mínimo) o, como se dice, maximizar (minimizar) la forma lineal de L.

Mostremos cómo se resuelve el problema indicado por el método geométrico, para lo cual nos limitamos a examinar el sistema compatible de desigualdades lineales con dos y tres variables. Sea dada, además, una función lineal $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$. Entre el conjunto de puntos $(x_1;\ x_2)$ que forman parte del campo de soluciones del sistema compatible de desigualdades, hallaremos aquellos que atribuyan a la función lineal dada el valor mínimo (máximo). Para cada punto del plano la función L toma un valor fijo $L = L_1$. El conjunto de todos estos puntos es la recta $c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = L_1$ perpendicular al vector $\mathbf{C}$ $(c_1;\ c_2)$ que parte del origen de coordenadas. Si esta recta se desplaza paralelamente a sí misma en el sentido positivo del vector $\mathbf{C}$, la función lineal $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ crecerá y si ella se traslada en el sentido contrario, la función indicada decrecerá. Supongamos que al moverse la recta L en el sentido positivo del vector $\mathbf{C}$ ella tropieza por primera vez con el polígono de soluciones en su vértice, entonces en esta posición L_1 la recta L llega a ser *de apoyo y* sobre esta recta la función L toma el valor mínimo. Al moverse ulteriormente en el mismo sentido (positivo) la recta L pasará por otro vértice del polígono de soluciones saliendo del campo de soluciones y llega a ser también de apoyo, o sea, la recta L_2; en ella la función L toma el valor máximo en el polígono de soluciones.

De este modo la minimización y la maximización de la función lineal $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ sobre el polígono de soluciones se obtienen en los puntos de intersección de este polígono con las rectas de apoyo que son perpendiculares al vector $\mathbf{C}$ $(c_1;\ c_2)$. Una recta de apoyo puede tener con el polígono de soluciones un solo punto en común (un vértice del polígono) o un conjunto infinito de puntos (un lado del polígono).

Análogamente a lo dicho, la función lineal de tres variables $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_0$ toma un valor constante sobre el plano perpendicular al vector $\mathbf{C}$ $(c_1;\ c_2;\ c_3)$. Los valores mínimo y máximo de esta función en el poliedro de soluciones se alcanzan en los puntos de intersección de este poliedro con los planos de apoyo perpendiculares al vector $\mathbf{C}$ $(c_1;\ c_2;\ c_3)$. El plano de apoyo puede tener con el polígono de soluciones un solo punto común (un vértice del polígono) o un conjunto infinito de puntos (este conjunto es una arista o una cara del polígono).

1700. Maximizar la forma lineal de $L = 2x_1 + 2x_2$ para las limitaciones: $3x_1 - 2x_2 \geqslant -6$, $3x_1 + x_2 \geqslant 3$, $x_1 \leqslant 3$.

Resolución. Sustituyendo los signos de desigualdades por los de igualdades exactas, construimos el campo de soluciones por las ecuaciones de las rectas $3x_1 - 2x_2 + 6 = 0$, $3x_1 + x_2 - 3 = 0$, $x_1 = 3$ (fig. 67). El campo de soluciones de las desigualdades es el triángulo MNP. Trazamos el vector $\mathbf{C}$ (2; 2). Entonces la recta de apoyo al salir del triángulo de soluciones pasará por el

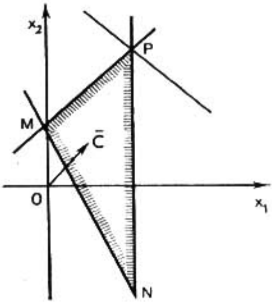

Fig. 67

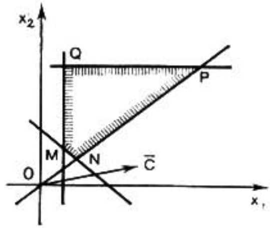

Fig. 68

punto P (3; 15/2) y por eso en el punto P la función lineal $L = 2x_1 + 2x_2$ toma el valor máximo, o sea, se maximiza y $L_{\max} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (15/2) = 21$.

1701. Minimizar la función lineal $L = 12x_1 + 4x_2$ para las restricciones: $x_1 + x_2 \geqslant 2$, $x_1 \geqslant 1/2$, $x_2 \leqslant 4$, $x_1 - x_2 \leqslant 0$.

Resolución. Sustituyendo los signos de desigualdades por los de igualdades exactas, construimos el campo de soluciones limitado por las rectas $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 4$, $x_1 - x_2 = 0$. El campo de soluciones es el polígono $MNPQ$ (fig. 68). Trazamos el vector $\mathbf{C}$ (12; 4). La recta de apoyo pasa por el punto M (1/2; 3/2); este es el primer punto de intersección del polígono de soluciones con la recta L al desplazarse esta recta en el sentido positivo del vector $\mathbf{C}$. En el punto M la función lineal $L = 12x_1 + 4x_2$ toma el valor mínimo $L_{\min} = 12 \cdot (1/2) + 4 \cdot (3/2) = 12$.

1702. Hallar el valor máximo de la función $L = x_1 + 3x_2 + 3x_3$ para las limitaciones: $x_2 + x_3 \leqslant 3$, $x_1 - x_2 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 1$, $3x_1 + x_2 \leqslant 15$.

Resolución. Construimos el campo de soluciones del sistema de desigualdades por las ecuaciones de los planos: $x_2 + x_3 = 3$, $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 = 1$, $3x_1 + x_2 = 15$. El campo de soluciones es el poliedro $MNPQRS$ (fig. 69).

Trazamos el vector $\mathbf{C}$ (1; 3; 3). El plano de apoyo al desplazarse, en el sentido positivo del vector $\mathbf{C}$ sale del poliedro de soluciones en el punto N (4; 3; 0). Por eso en el punto N la función lineal $L = x_1 + 3x_2 + 3x_3$ tomará el valor máximo, o sea, $L_{\max} = 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 13$.

1703. Hallar el valor máximo de la función $L = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$ para las restricciones: $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 6$, $x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leqslant 8$.

Resolución. Construimos el campo de soluciones del sistema de desigualdades lineales tomando los planos $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$, $x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 8$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Este campo es el poliedro $MNOPR$ (fig. 70). Construimos el vector **C** $(3; -6; 2)$. Al desplazarse el plano de apoyo en el sentido positivo del vector **C**, él saldrá del poliedro de soluciones en los puntos de la

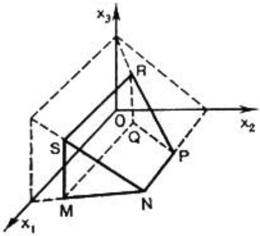

Fig. 69

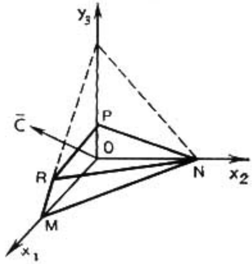

Fig. 70

arista MR. Por consiguiente, el valor máximo de la función dada se toma en los puntos del segmento MR. Cerciorémonos de ello sustituyendo las coordenadas de los puntos M $(2;\ 0;\ 0)$ y R $(16/11;\ 0;\ 9/11)$ en la forma lineal de L, obtendremos $L(M) = 6$, $L(R) = 6$.

1704. Hallar el valor máximo de la función $L = x_1 + 3x_2$ para las restricciones: $x_1 + 4x_2 \geqslant 4$, $x_1 + x_2 \leqslant 6$, $x_2 \leqslant 2$.

1705. Minimizar la función $L = x_1 - x_2$ para las restricciones: $3 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 7$, $1 \leqslant x_2 \leqslant 4$, $x_1 \leqslant 4$.

1706. Hallar el valor máximo de la función $L = 3x_1 - 4x_2$ para las restricciones: $x_1 - 2x_2 \geqslant 6$, $x_1 + 2x_2 \geqslant 0$, $x_1 \leqslant 6$.

1707. Hallar el valor máximo de la función $L = -x_1 + 2x_2$ para las restricciones: $x_1 - 8x_2 \leqslant 10$, $x_1 + x_2 \geqslant 1$, $x_1 - 5x_2 \geqslant -5$, $3x_1 + 10x_2 \leqslant 30$.

1708. Hallar el valor máximo de la función $L = 8x_1 - 2x_2$ para las restricciones: $3x_1 + 4x_2 \geqslant 18$, $3x_1 - x_2 \geqslant 3$, $x_2 \leqslant 6$, $2x_1 + x_2 \leqslant 18$, $4x_1 - x_2 \leqslant 24$.

1709. Minimizar la forma lineal de $L = -2x_1 - x_2 + 3x_3$ para las restricciones: $x_1 + x_2 \geqslant 2$, $3x_1 + x_2 \leqslant 6$, $x_3 \leqslant 3$.

1710. Hallar el valor máximo de la función $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ para las limitaciones: $x_1 + x_2 \leqslant 3$, $x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 0$, $3x_1 + 3x_2 - x_3 \geqslant 0$.

1711. Hallar el valor máximo de la función $L = 10x_1 + x_3$ para las limitaciones: $3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 6$, $3x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant 6$, $x_3 \leqslant 3$.

§ 3. Método simplex

1. Noción be método simplex. La resolución del problema principal de la programación lineal por el método geométrico es demostrativa en el caso de dos e incluso tres variables. Sin embargo, si se trata de un número mayor de variables el método geométrico es inaplicable. El llamado *método simplex* es uno de los métodos analíticos de resolución del problema principal de la programación lineal. El sistema de limitaciones en los métodos de cálculo suele definirse por un sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

y entre las soluciones no negativas del sistema de ecuaciones (1) es necesario hallar aquellas que maximicen la función lineal

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0.$$

Expresemos $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $(r \leqslant m)$ por medio de las variables restantes:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n + b'_1, \\ x_2 = a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n + b'_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_r = a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n + b'_r, \end{array}\right. \tag{2}$$

donde $b'_1 \geqslant 0$, $b'_2 \geqslant 0$, $\ldots$, $b'_r \geqslant 0$. *Si las condiciones limitativas están definidas* por las desigualdades, se puede transformarles en igualdades introduciendo nuevas variables no negativas, las llamadas variables *de balance* (igualadoras). Así, por ejemplo, en la desigualdad $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n \leqslant b$ basta añadir al primer miembro cierta cantidad $x_{n+1} \geqslant 0$ y se obtendrá la igualdad

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n + x_{n+1} = b.$$

Las condiciones restrictivas pueden definirse también de un modo mixto, o sea, por desigualdades y ecuaciones, entonces por la vía indicada ellas pueden reducirse sólo a ecuaciones. Las variables (incógnitas) $x_1, x_2, \ldots, x_r$ se llaman *básicas* y todo el conjunto de ellas $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ se denomina *base*, las demás variables han recibido el nombre de variables *independientes*, el sistema de limitaciones (2) se llama *sistema de reducción a la base unitaria*. Sustituyendo en la forma lineal de L en vez de las variables básicas sus expresiones por las variables independientes del sistema (2), obtendremos

$$L = \gamma_0 + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \gamma_nx_n.$$

Ahora, suponiendo que todas las variables independientes son iguales a cero, hallamos los valores de las variables básicas: $x_1 = b'_1$, $x_2 = b'_2$, $\ldots$, $x_r = b'_r$. De este modo, la solución $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_r, 0, \ldots, 0)$ del sistema es posible, tal solución se llama solución *básica*. Para la solución básica obtenida, el valor de la forma lineal de $L_B = \gamma_0$. La resolución del problema con ayuda del método *simplex se descompone en varios pasos consistentes en pasar de la base dada* B a otra B', de modo que el valor de L_B disminuye o, por lo menos, no aumente, o sea, $L_{B'} \leqslant L_B$.

Ilustramos la idea del método con ejemplos concretos.

1712. *Maximizar la forma lineal de* $L = -x_4 + x_5$ *para las restricciones* $x_1 + x_4 - 2x_5 = 1$, $x_2 - 2x_4 + x_5 = 2$, $x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$.

Resolución. El sistema dado de ecuaciones-restricciones es compatible, ya que los rangos de la matriz del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

y de la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3\end{array}\right)$$

coinciden y son iguales a 3. Por lo tanto el sistema de ecuaciones es compatible y tres variables (básicas) pueden expresarse linealmente mediante las dos variables independientes. Vamos a expresar, por ejemplo, x_1, x_2 y x_3 por medio de x_4 y x_5, o sea, reducimos el sistema a la base unitaria:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5. \end{cases} \qquad (*)$$

Expresemos la forma lineal de $L = -x_4 + x_5$ por las variables independientes x_4 y x_5 (en el ejercicio dado L ya está expresada por medio de x_4 y x_5). Ahora hallamos para $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ los valores de las variables básicas: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. De este modo, la primera solución posible del sistema de ecuaciones es $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, o bien (1, 2, 3, 0, 0). Para la solución posible hallada la forma lineal de L tiene el valor 0, o sea, $L_1 = 0$.

Ahora tratemos de incrementar el valor de L_1; el aumento de x disminuirá L_1, ya que x_4 tiene coeficiente negativo, mientras que el aumento de x_5 incrementará también L_1. Por eso vamos a aumentar x_5 de modo que x_1, x_2, x_3 no lleguen a ser negativas dejando $x_4 = 0$. De la segunda ecuación del sistema (*) resulta que x_5 se puede aumentar hasta 2. Ahora bien, obtenemos los valores siguientes de las variables: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$, o bien (5, 0, 1, 0, 2).

El valor de la forma lineal de L para la solución posible es igual a $L_2 = 2$. Con el segundo paso el valor de L ha aumentado.

Luego tomemos como variables independientes x_2 y x_4, o sea, precisamente aquellas que en la nueva solución tienen un valor nulo. Con este fin expresamos x_5 de la segunda ecuación del sistema (*) mediante x_2 y x_4, obteniendo que $x_5 = 2 - x_2 + 2x_4$. Entonces

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4, \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4, \end{cases} \qquad (**)$$
$$L = 2 - x_2 + x_4.$$

Para incrementar el valor de L vamos a aumentar x_4. De la segunda ecuación del sistema (**) se deduce que, a condición de que x_3 sea no negativa el valor de x_4 se puede llevar hasta $x_4 = 1/5$. Con esta condición la nueva solución posible es $x_1 = 28/5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1/5$, $x_5 = 12/5$, o bien (28/5, 0, 0, 1/5, 12/5). Con ello el valor de la forma lineal de $L_3 = 11/5$.

Expresemos ahora x_1, x_4, x_5 por las variables independientes x_2 y x_3:

$$\begin{cases} x_1 = 28/5 - (3/5)\, x_3 - (7/5)\, x_2, \\ x_4 = 1/5 - (1/5)\, x_3 + (1/5)\, x_2, \\ x_5 = 12/5 - (2/5)\, x_3 - (3/5)\, x_2, \end{cases} \qquad (***)$$
$$L = 11/5 - (1/5)\, x_3 - (4/5) x_2.$$

Puesto que en la última forma lineal ambas variables libres entran con coeficientes negativos, el valor máximo de L se alcanza cuando $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Esto quiere decir que la solución (28/5, 0, 0, 1/5, 12/5) es óptima y $L_{\max} = 11/5$.

1713. Maximizar la forma lineal de $L = x_2 + x_3$ para las restricciones: $x_1 - x_2 + x_3 = 1$, $x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$.

Resolución. El sistema de ecuaciones-restricciones es compatible, ya que los rangos de la matriz ampliada son los mismos e iguales a 2. Por consiguiente, dos variables básicas pueden expresarse linealmente por otras dos variables independientes. Tomamos como independientes las variables x_2 y x_3. Entonces

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - x_3, \\ x_4 = 2 - x_2 + 2x_3, \end{cases}$$
$$L = x_2 + x_3.$$

Cuando $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$, las variables básicas resultan: $x_1 = 1$, $x_4 = 2$, o sea, tenemos la primera solución posible (1, 0, 0, 2) y $L_1 = 0$. El incremento de L se puede realizar aumentando x_3 hasta 1. Entonces para $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ los valores de las variables básicas son $x_1 = 0$, $x_4 = 4$. La nueva solución posible es (0, 0, 1, 4) y $L_2 = 1$.

Expresamos ahora x_3 y x_4 por x_1 y x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_1 + x_2, \\ x_4 = 4 - 2x_1 + x_2, \end{cases}$$
$$L = 1 - x_1 + 2x_2.$$

El incremento de L es posible aumentando x_2. Sin embargo, el aumento de x_2 no es limitado a juzgar por el último sistema de ecuaciones. De este modo, L tomará valores positivos, cada vez más grandes, o sea, $L_{\max} = +\infty$.

Así, pues, la forma de L no está acotada superiormente y por eso la solución óptima no existe.

1714. Se da el sistema de limitaciones: $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$, $x_2 + 2x_4 = 1$ y la forma lineal $L = 5x_1 - x_3$. Hallar la solución óptima que minimice la forma lineal.

Resolución. Este problema podría reducirse al de determinación del máximo de la función $L_1 = -L$, o sea, $L_1 = -5x_1 + x_3$, pero esto no es obligatorio. Razonando análogamente al problema anterior, se puede resolverlo sin reducirlo a un problema de maximización. El sistema dado de ecuaciones es compatible, ya que los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada son los mismos e iguales a 2. Por lo tanto el sistema de ecuaciones puede reescribirse, por ejemplo, así:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4, \\ x_2 = 1 - 2x_4. \end{cases}$$
$$L = 10 - 11x_3 + 15x_4.$$

Aquí como variables básicas se toman x_1 y x_2 y como variables independientes x_3 y x_4. Si $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$, la primera solución básica es $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, o bien (2, 1, 0, 0) y $L_1 = 10$. La disminución de la forma lineal de L se provoca con el aumento de x_3, ya que en la forma de L, x_3 tiene coeficiente negativo, con ello el aumento de x_3 es posible sólo hasta 1, mientras que permanece el valor de $x_4 = 0$. Si tomamos $x_3 = 1$, entonces $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, o bien (0, 1, 1, 0) que es la segunda solución básica para la cual $L_2 = -1$.

Expresamos x_2 y x_3 por medio de nuevas variables independientes x_1 y x_4:

$$\begin{cases} x_2 = 1 - 2x_4, \\ x_3 = 1 - (1/2)\, x_1 + (3/2)\, x_4, \end{cases}$$
$$L = -1 + (11/2)\, x_1 - (3/2)\, x_4.$$

Ahora la disminución del valor de la forma de L depende del aumento de x_4 hasta $x_4 = 1/2$ (aquí x_2 es no negativa), mientras que permanece el valor de $x_1 = 0$ queda. En este caso tenemos una nueva solución posible $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7/4$, $x_4 = 1/2$, o bien (0, 0, 7/4, 1/2) para la cual $L = -7/4$.

Expresamos x_3 y x_4 mediante las variables independientes x_1 y x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 7/4 - (1/2)\,x_1 - (3/4)\,x_2, \\ x_4 = 1/2 - (1/2)\,x_2, \end{cases}$$
$$L = -7/4 + (11/2)\,x_1 + 3/4x_2.$$

Puesto que la disminución ulterior del valor de la forma de L es imposible debido a la positividad de los coeficientes de x_1 y x_2, la solución posible del problema (0, 0, 7/4, 1/2) es óptima. El valor mínimo de L es igual a $-7/4$).

1715. Maximizar la forma lineal de $L = 2x_1 - x_4$ para el siguiente sistema de limitaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ \quad x_2 + 2x_4 \geqslant 5, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 8. \end{cases}$$

Resolución. Puesto que el sistema de limitaciones es mixto, reduzcámoslo a un sistema de ecuaciones, introduciendo una nueva variable no negativa x_5 en el primer miembro de la segunda condición, con coeficiente negativo, y x_6 en la tercera condición, con coeficiente positivo. Entonces obtendremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_32 = 20, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 8. \end{cases}$$

Reducimos este sistema a la base unitaria, escogiendo como variables básicas x_1, x_2, x_3 (en virtud del hecho de que el rango de la matriz del sistema es igual a 3):

$$x_1 = 15 + 2x_4 - x_5, \quad x_2 = 5 - 2x_4 + x_5, \quad x_3 = 28 - x_6. \qquad (*)$$

Entonces la forma lineal será de $L = 30 + 3x_4 - 2x_5$. Cuando $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, entonces las variables básicas tienen los valores: $x_1 = 15$, $x_2 = 5$, $x_3 = 28$, o sea, la primera solución posible es (15, 5, 28, 0, 0, 0); con ello $L_1 = 30$.

Para incrementar el valor de L es necesario aumentar x_4, ya que esta variable entra en la expresión de L con un coeficiente negativo. El aumento de x_4 es posible hasta $x_4 = 5/2$ lo que se ve de la segunda condición del sistema de restricciones (*). Cuando $x_4 = 5/2$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, entonces los valores de las variables restantes son los siguientes: $x_1 = 20$, $x_2 = 0$, $x_3 = 28$, o sea, obtendremos la segunda solución posible (20, 0, 28, 5/2, 0, 0) y la función lineal L tendrá la forma $L = 75/2 - (3/2)\,x_2 - (1/2)\,x_5$ y para la segunda solución posible su valor es igual a $L_2 = 75/2$.

Ahora, puesto que los coeficientes de las variables en L son negativos, el aumento del valor de L es imposible. Por consiguiente, $L_{\max} = 75/2 = 37{,}5$.

1716. Para fabricar los artículos de dos tipos hay 100 kg de metal. Para producir un artículo del tipo I se consumen 2 kg de metal y para producir un artículo del tipo II se gastan 4 kg. Hacer un plan de producción que permita el mayor ingreso de dinero por la venta de los artículos, si el precio de venta de un artículo del tipo I es de 3 rublos y de un artículo del tipo II es de 2 rublos, con ello se requiere elaborar no más de 40 artículos del tipo I y no más de 20 artículos del tipo II.

Resolución. Sean fabricados x_1 artículos del tipo I y x_2 artículos del tipo II. Entonces tenemos las siguientes restricciones para las variables x_1 y x_2:

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 40, \\ x_2 \leqslant 20, \\ 2x_1 + 4x_2 = 100. \end{cases}$$

La función objetivo tiene la forma de $L = 3x_1 + 2x_2$. Transformamos el sistema mixto de restricciones en otro de restricciones en forma de ecuaciones, introduciendo las nuevas variables x_3 y x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 20, \\ x_1 + 2x_2 = 50. \end{cases}$$

El rango de la matriz de este sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es igual a 3. Tomamos como básicas las variables x_1, x_2, x_3 y pasemos a la base unitaria

$$\begin{cases} x_1 = 10 + 2x_4, \\ x_2 = 20 - x_4, \\ x_3 = 20 - 2x_4. \end{cases}$$

La primera solución posible se obtiene cuando $x_4 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$. Para estos valores de las variables $L = 70$. Se puede incrementar valor de la función objetivo aumentando x_4 hasta $x_4 = 15$, a juzgar por la tercera ecuación. Entonces para $x_4 = 15$, $x_1 = 40$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, tenemos $L = 130$. La segunda solución posible es $(40, 5, 0, 15)$; $x_1 = 40 - x_3$, $x_2 = 5 + (1/2)\,x_3$, $x_4 = 15 - (1/2)\,x_3$, $L = 130 - 2x_3$. El coeficiente de x_3 en la función objetivo es negativo y por eso el aumento ulterior de L es imposible. Por lo tanto, la solución óptima es $x_1 = 40$, $x_2 = 5$ y $L_{\max} = 130$.

2. Tablas simplex. Reducimos el sistema de restricciones a la base unitaria:

$$\begin{array}{l} x_1 + \ldots + a_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i + \ldots + a_{i,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + \ldots + a_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{array}$$

y L a la forma

$$L + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \gamma_j x_j + \ldots + \gamma_n x_n = \gamma_0. \qquad (1)$$

La igualdad (1) la llamamos *expresión reducida* (a las variables independientes) de la función L, y los coeficientes γ_j los denominaremos *estimaciones* (índices) de las variables independientes respectivas x_j.

1. Se escoge la columna resolutiva a_p partiendo de la condición: estimación $\gamma_p < 0$ y al menos un elemento $a_{ip} > 0$.

2. Se escoge la q-ésima fila resolutiva partiendo de la condición

$$b_q/a_{qp} = \min \{b_i/a_{ip}\} \text{ para } a_{ip} > 0.$$

3. Se efectúa el recálculo de los elementos de la q-ésima fila resolutiva por la fórmula

$$a'_{qk} = a_{qk}/a_{qj}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

4. Se calculan los elementos de las demás filas (para $k \neq p$) por la fórmula $a'_{ik} = a_{ik} - a'_{qk} \cdot a_{ip}$ $(i = 0, 1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, r)$.

En forma de tabla estos datos pueden ser representados así:

Variables básicas	Términos independientes	x_1	...	x_l	...	x_r	x_{r+1}	...	x_j	...	x_n
x_1	b_1	1	...	0	...	0	$a_{1, r+1}$	...	a_{1l}	...	a_{1n}
....	....	...	...	...	...	...	....	...	......	...	......
x_l	b_l	0	...	1	...	0	$a_{l, r+1}$	...	a_{lj}	...	a_{ln}
....	....	...	...	...	...	...	....	...	......	...	......
x_r	b_r	0	...	0	...	1	$a_{r, r+1}$	...	a_{rj}	...	a_{rn}
L	γ_0	0	...	0	...	0	γ_{r+1}	...	γ_j	...	γ_n

Conviene tener en cuenta el teorema principal del método simplex que citamos sin demostración.

Teorema. *Si después de efectuada la iteración de turno:*

1) *se encuentra al menos una estimación negativa y en cada columna con tal estimación existe al menos un elemento positivo, o sea, $\gamma_k > 0$ para ciertas k y $a_{lk} > 0$ para las mismas k y alguna l, entonces se puede mejorar la solución realizando la iteración siguiente:*

2) *se encuentra al menos una estimación negativa cuya columna no contiene elementos positivos, o sea, $\gamma_k < 0$, $a_{lk} < 0$ para cierta k y para todas las l, entonces la función L no está limitada en el campo de soluciones posibles ($L_{\text{máx}} \to \infty$);*

3) *todas las estimaciones resultan no negativas, o sea $\gamma_k \geqslant 0$ para todas las k, entonces se ha obtenido la solución óptima.*

1717. Hallar el valor mínimo de la función lineal $L = 7x_1 + 5x_2$ sobre el conjunto de soluciones no negativas del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18. \end{cases}$$

Resolución. El rango de la matriz del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es igual a 4. El rango de la matriz ampliada también es igual a 4. Por consiguiente, cuatro variables (básicas) se pueden expresar por dos variables (independientes), o sea,

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 = 15 - 3x_2, \\ x_6 = 18 - 3x_1. \end{cases}$$

A propósito, la forma lineal de $L = 7x_1 + 5x_2$ o $L - 7x_1 - 5x_2 = 0$ ya está expresada mediante estas mismas variables independientes. Tenemos la tabla inicial (tabla 1).

Tabla 1

Variables básicas	Términos independientes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	19	2	3	1	0	0	0
x_4	13	2	1	0	1	0	0
x_5	15	0	3	0	0	1	0
x_6	18	3	0	0	0	0	1
L	0	−7	−5	0	0	0	0

Aclaramos si hay estimaciones negativas en la última fila (de índice). Hay dos números así: −7 y −5. Tomamos, por ejemplo, −5 y examinamos la columna para x_2, en esta columna tenemos tres elementos positivos 3, 1, 3.

Tabla 2

Variables básicas	Términos independientes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	4	2	0	1	0	−1	0
x_4	8	2	0	0	1	−1/3	0
x_2	5	0	1	0	0	1/3	0
x_6	18	3	0	0	0	0	1
L	25	−7	0	0	0	5/3	0

Dividimos por estos números los términos independientes respectivos: 19/3, 13/1, 15/3; entre los cocientes obtenidos el menor es 15/3. Por lo tanto, de resolutivo sirve el elemento 3 que está en la intersección de la fila de x y la columna de x_2. Destacamos esta fila y esta columna en cuadros. La nueva base se compone de x_3, x_4, x_2, x_6. Para hacer la siguiente tabla multiplicamos por 1/3 la fila encuadrada de la tabla 1 para lograr en el lugar del elemento resolutivo la unidad, y la fila obtenida de este modo la escribimos en el lugar de la anterior. Adicionamos a cada una de las demás filas la fila recién obtenida multiplicada por un número tal, que en las casillas de la columna de x_2 queden ceros y escribimos las líneas transformadas en el lugar de las anteriores. Así se finaliza la iteración I.

Ahora todos los razonamientos se repiten conforme a la tabla 2, o sea, efectuamos la iteración II. El nuevo elemento resolutivo que está en la intersección de la fila de x_3 y la columna para x_1 es 2. Pasamos a la tabla siguiente.

Tabla 3

Variables básicas	Términos independientes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2	1	0	1/2	0	—1/2	0
x_4	4	0	0	—1	1	2/3	0
x_2	5	0	1	0	0	1/3	0
x_6	12	0	0	—3/2	0	3/2	1
L	39	0	0	7/2	0	—11/6	0

Tabla 4

Variables básicas	Términos independientes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	0	—1/4	3/4	0	0
x_5	6	0	0	—3/2	3/2	1	0
x_2	3	0	1	1/2	—1/2	0	0
x_6	3	0	0	3/4	—9/4	0	1
L	50	0	0	3/4	11/4	0	0

Repetimos lo mismo conforme a la tabla 3. Aquí de resolutivo **sirve el** elemento 2/3 que está en la intersección de la fila de x_4 con la columna **de** x_5. Pasamos a la tabla 4. Puesto que en la fila del índice no hay estimaciones **negativas**, hemos obtenido el plan óptimo (5, 3, 0, 0, 6, 3) y el valor **máximo** de la forma lineal de L es $L_{\max} = 50$.

Hallar les soluciones óptimas no negativas que minimicen la forma lineal:

1718. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2, \end{cases}$ $L = x_1 - x_3$.

1719. $\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_3 - x_4, \\ x_2 = 1 + x_3 - 2x_4, \\ x_5 = 5 - x_3 + x_4, \end{cases}$ $L = x_1 + x_2$.

1720. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 - x_4 = 1, \end{cases}$ $L = 2x_3 - x_2$.

1721. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 180, \\ 4x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 900, \end{cases}$ $L = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3$.

1722. $\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \end{cases}$ $L = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$.

Hallar las soluciones óptimas no negativas que maximicen la forma lineal:

1723. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_2 + 2x_4 \geqslant 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 8, \end{cases}$ $L = 2x_1 + x_4$.

1724. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geqslant -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leqslant -1, \end{cases}$ $L = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$.

1725. La capacidad de producción de un taller de montaje es de 120 artículos del tipo A y 360 artículos del tipo B al día. El control técnico deja pasar por día 200 artículos de uno u otro tipo (indistintamente). Los artículos del tipo A son cuatro veces más caros que los del tipo B.Se planificará la producción de los artículos acabados de modo que permita a la empresa obtener los máximos beneficios.

1726. Para fabricar los artículos de dos tipos el depósito puede entregar 80 kg de metal, como máximo, con ello para confeccionar un artículo del tipo I se consume 2 kg de metal y para confeccionar un artículo del tipo II, 1 kg. Hace falta planificar la producción de modo que permita obtener los máximos beneficios, fabricando no más de 30 artículos del primer tipo y no más de 40 artículos del segundo tipo, con ello un artículo del tipo I cuesta 5 rublos y un artículo del tipo II, 3 rublos.

1727. Para alimentar los animales se utilizan dos especies de forraje; el precio de 1 kg de forraje de la especie I es de 5 kopek y de forraje de la especie II, 2 kopek. Cada kilogramo de forraje de la especie I contiene 5 unidades de sustancia nutritiva A, 2,5 unidades de sustancia nutritiva B y 1 unidad de sustancia nutritiva C y cada kilogramo de forraje de la especie II contiene 3, 3, y 1,3 unidades, respectivamente. ¿Qué cantidad de forraje de cada especie se necesita *consumir cada día para que los gastos de alimentación sean mínimos* si la ración diaria prevé no menos de 225 unidades nutritivas del tipo A, no menos de 150 del B y no menos de 80 del C?

3. Noción de solución degenerada. Al examinar el método simplex se suponía que $b_i > 0$ (véase la pág. 331) tanto en el sistema inicial como en los sistemas que se obtenían después de las iteraciones de turno. Sin embargo, si en algunas ecuaciones los términos independientes $b_i = 0$, entonces en la solución de apoyo correspondiente a este sistema las variables básicas respecto a las cuales estas ecuaciones están resueltas toman el valor nulo. La solución de apoyo en la cual al menos una de las variables básicas tome el valor nulo se llama *solución degenerada* y un problema de programación lineal que tenga al menos una solución degenerada se denomina *problema degenerado*. Empleando en este caso las iteraciones sucesivas, podemos regresar a un juego de variables básicas e independientes cerrado que hemos encontrado antes, o sea, se manifiestan *los ciclos* en el esquema de cálculo. Citamos la regla para eliminar los ciclos cerrados (no exponemos la argumentación teórica de esta regla que es una cuestión especial del llamado problema de degeneración).

Regla. *Si en una etapa cualquiera de cálculo surge una indeterminación en la selección de la línea resolutiva, o sea, aparecen varias relaciones mínimas iguales b_i/a_{ip}, entonces conviene escoger la fila para la cual la relación entre los elementos de la siguiente columna y la resolutiva es mínima. Si en este caso vuelven a aparecer relaciones mínimas iguales, entonces se hacen las relaciones de los elementos de la columna siguiente y así hasta que la fila resolutiva se determina unívocamente.*

1728. Maximizar la forma lineal de $L = 4x_5 + 2x_6$ para las restricciones: $x_1 + x_5 + x_6 = 12$, $x_2 + 5x_5 - x_6 = 30$, $x_3 + x_5 - 2x_6 = 6$, $2x_4 + 3x_6 - 2x_6 = 18$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 \geqslant 0$.

Resolución. Al sistema inicial le corresponde la solución de apoyo (12, 30-6, 9, 0, 0) y el valor de $L = 0$. A continuación se expone la sucesión de ite, raciones del método simplex:

Tabla inicial

x_i	b_i					4	2	b_i/a_{ip}	a_{i1}/a_{ip}
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_1	12	1				$\boxed{1}$	1	12	
x_2	30		1			5	−1	6	−1/5
x_3	6			1		1	−2	6	−2
x_4	18				2	3	−2	6	−2/3
L	0					$\boxed{-4}$	−2		

Iteración I

x_1	6	1		—1			3	2	
x_2	0		1	—5			9	0	**—5/9**
x_5	6			1		1	—2		
x_4	0			—3	2		4	0	**—3/4**
L	24			4			—10		

Después de efectuada la iteración I hemos obtenido el sistema resuelto con respecto a las variables básicas x_1, x_2, x_4, x_5 **al cual corresponde la solución de apoyo** (6, 0, 0, 0, 6, 0) y el valor de $L_1 = 24$. Las iteraciones II y III no

Iteración II

x_1	6	1		5/4	—3/2			24/5	
x_2	0		1	7/4	—9/2			0	
x_5	6			—1/2	1	1			
x_6	0			—3/4	1/2				
L	24			—7/2	5				

Iteración III

x_1	6	1	—5/7		12/7				
x_3	0		4/7	1	—18/7				
x_5	6		2/7		—2/7	1			
x_6	0		3/7		—10/7		1		
L	24		2		—4				

cambian la resolución de apoyo ni el valor de $L_2 = L_3 = 24$ y sólo la iteración IV brinda la solución óptima (0, 0, 9, 7/2, 7/5) y $L_{\max} = 38$. En el esquema dado de cálculos no ha aparecido el ciclo cerrado, aunque durante las tres iteraciones «no nos hemos movido del sitio» y sólo se cambiaron las variables básicas e independientes. En el ejemplo examinado en la tabla inicial hay tres relaciones mínimas iguales: $b_2/a_{25} = b_3/a_{35} = b_4/a_{45} = 6$. Por eso, valiéndonos de la regla de eliminación de un posible ciclo cerrado, tomamos las relaciones de los elementos de la columna que sigue a la columna independiente: $a_{26}/a_{25} = -1/5$, $a_{36}/a_{35} = -2$, $a_{46}/a_{45} = -2/3$. La relación $a_{36}/a_{35} = -2$ es la menor. Por consiguiente, la tercera fila debe ser tomada en calidad de resolutiva, etc. (véanse las tablas).

Iteración IV

x_4	7/2	7/12	$-5/12$		1				
x_3	9	3/2	$-1/2$	1					
x_5	7	1/6	1/6			1			
x_6	5	5/6	$-1/6$				1		
L	38	7/3	1/3						

1729. Maximizar la función lineal $L = 2x_1 + 4x_2$ para las limitaciones: $-2x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $-x_1 + (3/2)\,x_2 + x_4 = 9$, $-x_1 + 5x_2 + x_5 = 30$, $-x_1 + x_2 + x_6 = 12$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 \geqslant 0$.

§ 4. Problemas duales

A todo problema de programación lineal se le puede poner en correspondencia otro problema relacionado con él de un modo determinado, llamado *dual* con respecto al primero.

Por ejemplo, si el problema inicial (problema I) de programación lineal es el de *minimizar* la función lineal $L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ cuando se dan las restricciones en forma de desigualdades

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \end{cases}$$

a condición de no negatividad de x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, entonces con este problema está relacionado el problema dual (problema I′) que requiere *maximizar* la función lineal $T = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots b_my_m$ con las restricciones:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \leqslant c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \leqslant c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \leqslant c_n \end{cases}$$

y la no negatividad de $y_i \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Notemos que en el problema I y en el problema dual I′ las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

compuestas por los coeficientes de las variables se obtienen una de la otra por medio de la transposición. En los segundos miembros del sistema de restricciones de cada problema están los coeficientes de la función lineal tomada del otro problema. En el sistema de restricciones del problema I (minimización) todas las desigualdades son del tipo «$\geqslant$» y en el sistema de restricciones del problema I′ (maximización) todas las desigualdades son del tipo «$\leqslant$». La noción de dualidad es recíproca, o sea, si el problema I′ se escribe en la forma análoga a la del problema I, entonces dual respecto a él será el problema inicial I. Por eso los problemas I y I′ se llaman *recíprocamente duales* o *recíprocamente conjugados*. Se demuestra que $L_{\min} = T_{\max}$ así como que la condición necesaria y suficiente de óptimo de las soluciones de un par cualquiera de problemas duales es la igualdad $L(\overline{x}) = T(\overline{y})$, donde $\overline{x}$ e $\overline{y}$ son soluciones posibles de los problemas I e I′.

1730. Problema inicial (I): hallar los valores no negativos (x_1, x_2) a condición de que $x_1 + 2x_2 \geqslant 4$, $x_1 - x_2 \geqslant -1$, con la minimización de la función lineal $L = 3x_1 + 2x_2$.

Problema dual (I′): hallar los valores no negativos (y_1, y_2) a condición de que $y_1 + y_2 \leqslant 3$, $2y_1 - y_2 \leqslant 2$, con la maximización de la función lineal $T = 4y_1 - y_2$.

Resolución. Damos la solución geométrica de estos problemas. Construimos el sistema de limitaciones de los problemas I y I′. En el punto P (2/3; 5/3) se

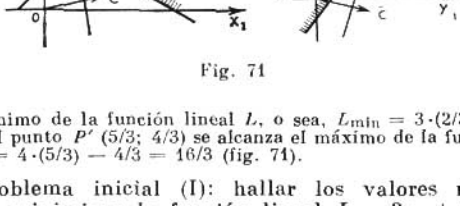

Fig. 71

alcanza el mínimo de la función lineal L, o sea, $L_{\min} = 3\cdot(2/3) + 2\cdot(5/3) = 16/3$ y en el punto P' (5/3; 4/3) se alcanza el máximo de la función lineal T, o sea, $T_{\max} = 4\cdot(5/3) - 4/3 = 16/3$ (fig. 71).

1731. Problema inicial (I): hallar los valores no negativos (x_1, x_2) que minimicen la función lineal $L = 3x_1 + 2x_2$, dado el sistema de restricciones $7x_1 + 2x_2 \geqslant 14$, $4x_1 + 5x_2 \geqslant 20$. Formular el problema dual y resolverlo.

1732. Problema inicial (I): hallar los valores no negativos (x_1, x_2) que maximicen la función lineal $L = 5x_1 + 4x_2$ para el sistema de restricciones $4x_1 + 3x_2 \leqslant 24$, $3x_1 + 4x_2 \leqslant 24$. Formular el problema dual y resolverlo.

1733. Problema inicial (I): hallar los valores no negativos (x_1, x_2) que minimicen la función lineal $L = 3x_1 + 3x_2$ para el sistema de restricciones $5x_1 - 4x_2 \geqslant -2$, $x_1 + 2x_2 \geqslant 6$. Escribir el problema dual y resolverlo.

§ 5. El problema del transporte

Uno de los problemos típicos de programación lineal es el llamado *problema del transporte*. Aparece al planificar los tráficos más racionales de mercancías. En unos casos esto significa la determinación de un plan de tráfico tal, que los gastos de transporte sean mínimos y en otros casos tiene mayor importancia la ganancia del tiempo. El primer problema ha recibido el nombre de *problema de transporte según el criterio de costo* y el segundo, *problema de transporte según el criterio de tiempo*.

El primer problema es un caso particular del problema de programación lineal y puede resolverse por el método simplex. No obstante, en virtud de su particularidad, se resuelve más sencillamente.

Supongamos que en p lugares de expedición se encuentran $a_1, a_2, \ldots, a_p$ unidades de mercancías homogéneas que deben ser enviadas a q consumidores en cantidades de $b_1, b_2, \ldots, b_q$ unidades. Se dan los costos c_{ik} de transporte de una unidad de mercancía del i-ésimo lugar de expedición al k-ésimo lugar de consumo. Designamos por $x_{ik} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, q)$ la cantidad de unidades de mercancía que se transporta del i-ésimo almacén al k-ésimo consumidor; entonces las variables x_{ik} deben satisfacer las restricciones siguientes: 1) $\sum_{k=1}^{q} x_{ik} = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$; 2) $\sum_{i=1}^{p} x_{ik} = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$; 3) $x_{ik} \geqslant 0$. Los gastos totales para el transporte son iguales a $L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{pq}x_{pq}$. Por lo tanto, es necesario hallar pq variables x_{ik} que satisfagan las condiciones indicadas y minimicen la función objetivo L.

La resolución de tal problema se divide en dos etapas:

1) determinación de la solución de apoyo inicial;

2) construcción de las iteraciones sucesivas, o sea, aproximación a la solución óptima.

Determinación de la solución de apoyo inicial. Supongamos que tenemos la tabla de los datos iniciales del problema (véase la pág. 345). Vamos a construir la solución de apoyo inicial por la llamada regla de «ángulo noroeste».

Llenamos la tabla indicada a partir del ángulo superior izquierdo, moviéndonos luego por la fila hacia la derecha, o bien por la columna hacia abajo. En la casilla (1, 1) escribamos el menor entre los números a_1 y b_1, o sea, $x_{11} = \text{mín}\,\{a_1, b_1\}$.

Si $a_1 > b_1$, entonces $x_{11} = b_1$ y la primera columna está «cubierta», o sea, las necesidades del primer consumidor están satisfechas por completo. Nos movemos luego por la primera fila, escribiendo en la casilla vecina (1, 2) el menor entre los números $a_1 - b_1$ y b_2, o sea, $x_{12} = \text{mín}\,\{a_1 - b_1, b_2\}$.

Pero si $b_2 > a_1$, entonces «se cubre» análogamente la primera fila y luego pasamos al llenado de la casilla vecina (2, 1) en la cual escribimos $x_{21} = \text{mín}\,\{a_2, b_1 - a_1\}$. Continuamos este proceso hasta que en una etapa dada, queden agotados los recursos a_p y satisfechas las necesidades b_q.

1734. En dos lugares de expedición A y B se encuentran 150 y 90 t de combustible, respectivamente. Es necesario enviar 60, 70 y 110 t de combustible a los lugares 1, 2 y 3, respectivamente. Los costos de

$a_i \backslash b_k$	b_1	b_2	$\ldots$	b_k	$\ldots$	b_q
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\ldots$	c_{1k} x_{1k}	$\ldots$	c_{1q} x_{1q}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\ldots$	c_{2k} x_{2k}	$\ldots$	c_{2q} x_{2q}
$\vdots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots$
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\ldots$	c_{ik} x_{ik}	$\ldots$	c_{iq} x_{iq}
$\vdots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots\ldots$
a_p	c_{p1} x_{p1}	c_{p2} x_{p2}	$\ldots$	c_{pk} x_{pk}	$\ldots$	c_{pq} x_{pq}

transporte de una tonelada de combustible del lugar A a los lugares 1, 2, 3 son de 6, 10 y 4 rublos, y los costos de transporte de una tonelada de combustible del lugar B a los lugares mencionados son de 12, 2 y 8 rublos, respectivamente. Confeccionar el plan óptimo de tráfico del combustible de modo que la suma total de gastos de transporte sea mínima.

Resolución. Escribimos los datos iniciales en la tabla 1. Comenzamos el llenado a partir de la casilla (1, 1): $x_{11} = \min\{150, 60\} = 60$, la primera co-

Tabla 1

		1	2	3
	$a_i \backslash b_k$	60	70	110
A	150	6 60	12 70	4 20
B	90	12	2	8 90

lumna queda cubierta. Pasamos a la casilla (1, 2): $x_{12} = \text{mín}\ \{150 - 60,\ 70\} = 70$, la segunda columna queda cubierta; luego pasamos a la casilla (1, 3): $x_{13} = \text{mín}\ \{150 - 60 - 70,\ 110\} = 20$. Como en la tercera columna resulta el resto igual a 90, pasamos al llenado de la casilla (2, 3) en la cual escribimos $x_{23} = \text{mín}\ \{90,\ 90\} = 90$. Puesto que los restos en la línea y la columna son iguales a cero, la solución inicial de apoyo está construida. A este plan le corresponden los gastos cuya cantidad $L = 6 \cdot 60 + 10 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 90 = 1860$ rublos.

En la regla de «ángulo del noroeste» no se tiene en cuenta la cantidad de gastos c_{ik} y por eso la solución inicial de apoyo puede distinguirse mucho de la óptima. Se emplea también el procedimiento de «elemento mínimo» en el cual se atiende a la cantidad c_{ik}. En este caso la construcción de la solución inicial de apoyo se empieza de la casilla en que la cantidad de c_{ik} es mínima, en el ejemplo dado la construcción se comienza a partir de la casilla (2, 2) en que $c_{22} = 2$(tabla 2). En esta casilla escribamos $x_{22} = \text{mín}\ \{a_2,\ b_2\} = \text{mín}\ \{90,\ 70\} = 70$.

Tabla 2

		1	*2*	*3*	
	a_i \ b_k	60	70	110	Resto
A	150	6 60	10 	4 90	60,0
B	90	12 	2 70	8 20	20,0
	Resto	0	0	20,0	

Escribimos los restos quedados en la línea y la columna en las casillas respectivas de la línea y la columna de los restos. La columna b_2 está cubierta. Ahora pasamos a la casilla (1, 3), ya que después de $c_{22} = 2$ $c_{13} = 4$ es la cantidad mínima. Escribimos en la casilla (1, 3) $x_{13} = \text{mín}\ \{a_1 - b_1,\ b_3\} = \text{mín}\ \{150 - 60,\ 110\} = 90$. Luego pasamos a la casilla (1, 1): $x_{11} = \text{mín}\ \{a_1,\ b_1\} = \text{mín}\ \{150,\ 60\} = 60$. Y, por último, pasamos a la casilla (2, 3) en la cual escribamos $x_{23} = \text{mín}\ \{a_2 - b_2,\ b_3\} = \text{mín}\ \{90 - 70,\ 110\} = 20$.

Aplicando esta regla, hemos obtenido otra variante de solución inicial de apoyo, en la cual los gastos $L = 6 \cdot 60 + 4 \cdot 90 + 2 \cdot 70 + 8 \cdot 20 = 1020$ rublos, o sea, la suma de gastos es más próxima al plan óptimo.

2. Construcción de las iteraciones sucesivas. Obtenida la solución inicial de apoyo, pasamos ahora a la construcción de nuevas soluciones de apoyo que se mejoren sucesivamente; para eso aplicamos el método de potenciales.

Pues bien, después de construida la solución inicial de apoyo todas las variables quedan divididas en dos grupos: x_{kl}, o sea, las variables básicas y x_{pq}, es decir, las variables libres y las funciones lineales del costo de transporte se expresarán por las variables independientes del modo siguiente:

$$L = \sum_{pq} \gamma_{pq} x_{pq} + \gamma_0. \tag{1}$$

Para determinar los coeficientes γ_{pq} de las variables independientes, ponemos en correspondencia a cada lugar de expedición A_i cierta cantidad u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) que llamamos *potencial* del punto A_i y a cada lugar de destino B_j le asignamos en correspondencia la cantidad v_j, o sea, el potencial del lugar B_j. Relacionamos estas cantidades mediante la igualdad $u_k + v_l = c_{kl}$, donde c_{kl} es el costo de transporte de una tonelada de mercancías del lugar A_k al lugar B_l. Se demuestra que el conjunto de ecuaciones $u_k + v_l = c_{kl}$, escritas para todas las variables básicas, constituye un sistema conjunto de ecuaciones lineales, con ello el valor de una de las variables puede asignarse arbitrariamente y entonces los valores de las demás variables se determinan unívocamente a partir del sistema. Designamos para las variables independientes la suma de potenciales respectivos por c'_{pq}, o sea, $u_p + v_q = c'_{pq}$ y la llamamos *costo indirecto* (a distinción del costo dado c_{pq}). Entonces los coeficientes de las variables libres se determinan en la relación (1) con ayuda de la igualdad $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$.

Si todas las cantidades γ_{pq} son no negativas, la solución inicial es óptima. Pero si entre ellas las hay negativas, entonces pasamos a la base siguiente por medio del aumento del término con coeficiente negativo, dejando iguales a cero las otras variables.

Valgámonos de las nociones generales expuestas y continuemos la resolución del problema 1734. Hemos obtenido la solución inicial de apoyo (siguiendo la regla de «elemento mínimo»): $x_{11} = 60$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 90$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 70$, $x_{23} = 20$, $L = 1020$. Para determinar los potenciales es necesario resolver el sistema

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 6, \quad u_1 + v_3 = c_{13} = 4, \quad u_2 + v_2 = c_{22} = 2,$$
$$u_2 + v_3 = c_{23} = 8.$$

Asignamos arbitrariamente el valor a una de las incógnitas, por ejemplo, $u_1 = 1$. Entonces $v_1 = 5$, $v_3 = 3$, $u_2 = 5$, $v_2 = -3$. Luego calculamos los costos indirectos c'_{pq}:

$$c'_{12} = u_1 + v_2 = -2, \quad c'_{21} = u_2 + v_1 = 10.$$

Determinamos ahora las diferencias $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\gamma_{12} = c_{12} - c'_{12} = 10 - (-2) = 12,$$
$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2.$$

Por consiguiente, la expresión de L por las variables independientes tiene la forma de $L = 1020 + 12x_{12} + 2x_{21}$. En el segundo miembro entre los coeficientes de las variables no los hay negativos. Esto quiere decir que la solución inicial de apoyo es óptima.

De este modo la regla del «elemento mínimo» brinda inmediatamente la solución óptima. Vamos a resolver ahora este problema a condición de que la solución inicial se haya obtenido por la regla de «ángulo del noroeste», o sea, $x_{11} = 60$, $x_{12} = 70$, $x_{13} = 20$, $x_{23} = 90$, $L = 1860$.

Para determinar los potenciales hace falta resolver el sistema

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 6, \quad u_1 + v_2 = c_{12} = 10,$$
$$u_1 + v_3 = c_{13} = 4, \quad u_2 + v_3 = c_{23} = 8.$$

Haciendo $u_1 = 1$, obtenemos $v_1 = 5$, $v_2 = 9$, $v_3 = 3$, $u_2 = 5$.

Hallamos los costos indirectos c'_{pq}:

$$c'_{21} = u_2 + v_1 = 10, \quad c'_{22} = u_2 + v_2 = 14.$$

Calculamos ahora las diferencias $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2, \quad \gamma_{22} = c_{22} - c'_{22} = 2 - 14 = -12$$

Por lo tanto, la expresión de L por las variables independientes tiene la forma de $L = 1860 + 2x_{21} - 12x_{22}$. En el segundo miembro entre los coeficientes de las variables hay uno negativo, adjunto a x_{22}; por consiguiente, intentamos *disminuir L aumentando x_{22} (conservando el valor cero de x_{21})*. Hacemos $x_{22} = \lambda$. Puesto que las sumas de valores de las incógnitas en las filas y columnas deben quedar invariables, hay que efectuar el siguiente recálculo de balance:

60	$70 - \lambda$	$20 + \lambda$
	λ	$90 - \lambda$

La adición de λ a x_{22} se compensa por la sustracción de λ a partir de x_{12} y esto, a su vez, por la adición de λ a x_{13}, etc. hasta que regresamos a x_{22}. Recorriendo las casillas por la línea quebrada punteada en uno de los vértices de la cual se encuentra la variable independiente x_{22} y en los demás vértices, variables básicas (no es obligatorio que estén presentes todas), hemos obtenido el llamado *ciclo de recálculo* (la línea quebrada se denomina *ciclo*) que responde a la casilla libre de x_{22}. Como se ve en la tabla, para la no negatividad de las variables λ se puede aumentar hasta $\lambda = 70$; entonces obtendremos la segunda solución de apoyo:

60	0	90
0	70	20

o sea, $x_{11} = 60$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 90$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 70$, $x_{23} = 20$.

Para esta solución el valor de la función $L = 1860 - 12 \cdot 70 = 1020$, o sea hemos obtenido la solución óptima (a juzgar por la solución precedente)

De este modo las reglas de cálculos por el método de potenciales se reducen a lo siguiente:

1. Se determinan los potenciales u_k y v_l de todos los lugares de expedición A_k y de destino B_l.

2. Se escoge una variable libre cualquiera para la cual la suma de potenciales es rigurosamente mayor que el costo respectivo lo que corresponde al elemento que tiene un coeficiente negativo de la variable independiente en el segundo miembro de la función L.

3. Para la variable escogida en el punto 2 se determina el ciclo de recálculo que le corresponde y se efectúa el desplazamiento según este ciclo. Este desplazamiento conduce a una nueva solución posible.

4. Las operaciones 1 a 3 indicadas se repiten hasta que se obtenga la base óptima o sea los coeficientes no negativos de las variables libres en el segundo miembro de la función lineal L.

1735. Dos depósitos A y B contiene cada uno 90 t de combustible. El transporte de una tonelada de combustible procedente del almacén A a los lugares 1, 2 y 3 cuesta 1, 3 y 5 rublos, respectivamente, mientras que el transporte de una tonelada de combustible procedente del almacén B a los mismos lugares vale 2, 5 y 4 rublos, respectivamente. Se requiere suministrar a cada lugar una misma cantidad de toneladas de combustible. Determinar un plan de tráfico tal que los gastos de transporte sean mínimos.

1736. En reserva de tres estaciones ferroviarias A, B y C hay 60, 80 y 100 vagones, respectivamente. Hacer el plan óptimo de traslado de estos vagones a cuatro lugares de carga de granos si para el lugar N° 1 se necesitan 40 vagones; para el lugar N° 2, 60; para el lugar N° 3, 80, y para el lugar N° 4, 60 vagones. Los gastos de traslado de un vagón desde la estación A a los lugares indicados son iguales a 1, 2, 3 y 4 rublos, desde la estación B son iguales a 4, 3, 2 y 0 rublos y desde la estación C son iguales a 0, 2, 2 y 1 rublos, respectivamente.

1737. En una fábrica hay tres talleres A, B y C y cuatro almacenes N° 1, 2, 3 y 4. El taller A produce 30 mil piezas de artículos; el B, 40 mil; y el taller C 20 mil piezas. Para el mismo período de tiempo el rendimiento de los almacenes se caracteriza por los índices siguientes: el almacén N° 1, 20 mil piezas; el N° 2, 30 mil; el N° 3, 30 mil, y el almacén N° 4, 10 mil piezas. Los gastos de transporte de 1000 piezas desde el taller A a los almacenes N°N° 1, 2, 3 y 4 son iguales a 2, 3, 2 y 4 rublos; desde el taller B: 3, 2, 5 y 1 rublo, y desde el taller C: 4, 3, 2 y 6 rublos, respectivamente. Hacer un plan de tráfico de los artículos tal que permita reducir al mínimo los gastos de transporte de 90 mil piezas.

1738. En tres almacenes A, B y C hay 10, 15 y 25 t de granos seleccionados, respectivamente, que se deben suministrar a cuatro lugares: al lugar N° 1, 5 t, al N° 2, 10 t; al N° 3, 20 t, y al lugar N° 4, 15 t. Los gastos de transporte de una tonelada desde el almacén A a los lugares indicados son iguales a 8, 3, 5 y 2 rublos; desde el almacén B: 4, 1, 6 y 7 rublos, y desde el almacén C: 1, 9, 4 y 4 rublos, respectivamente. Hacer el plan óptimo de tráfico de granos a los cuatro lugares, de modo que minimice los gastos de transporte.

Respuestas

Capítulo I

4. 1) 8; 2) 3. **5.** 1) 1/2; 2) $-9/4$. **6.** $M(7)$. **7.** $C(1)$ $D(3)$. **8.** $C(-9)$ $D(-1)$ **16.** 1) 13; 2) 3. **19.** 5. **20.** $(-1;\ 8)$ $(1;\ 9)$ $(3;\ 10)$. **21.** $S = 0$ o sea los puntos A, B, C están en una misma recta. **22.** $D(17;\ 12)$. **23.** $C\ (-10;\ -7)$. **24.** $\sqrt{53}$, $\sqrt{82}$, $\sqrt{185}$. **25.** 24 unidades cuadradas. **29** $A\ (4;\ \pi/6)$; $B\ (3;\ -\pi/2)$; $C\ (4\sqrt{2};\ 3\pi/4)$; $D\ (2;\ -\pi/4)$; $E\ (2\sqrt{2};\ 4\pi/3)$; $F\ (7;\ \pi)$. **30.** $A\ (0;\ 10)$, $B\ (-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$; $C\ (0;\ 0)$; $D\ (\sqrt{2}/2;\ -\sqrt{2}/2)$; $E\ (-\sqrt{2}/2;\ -\sqrt{2}/2)$, $F\ (-\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2)$. **31.** $\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$. **32.** 5. **33.** $M_1\ (\rho;\ -\theta)$. **34.** $M_1\ (\rho;\ \pi + \theta)$. **35.** 1) $(3;\ 7\pi/6)$, $(5;\ -\pi/3)$ y $(2;\ 5\pi/6)$; 2) $(3;\ -\pi/6)$, $(5;\ -2\pi/3)$ y $(2;\ \pi/6)$. **36.** $M_1\ (\rho;\ \pi - \theta)$. **44.** $y = 2x - 1{,}5$. **45.** La bisectriz de los ángulos I y III de las coordenadas. **46.** La bisectriz de los ángulos II y IV de las coordenadas. **47.** $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$. **48.** $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$. **49.** $\rho = a$. **50.** $\theta = \alpha$. **51.** $\rho = a \cos\theta$. **57.** La recta $y = 2x$. **58.** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (la curva se llama *elipse*). **59.** $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (la curva se llama *hipérbola*). **60.** El segmento de la recta (AB), donde $A\ (1;\ 0)$, $B\ (0;\ 1)$. **61.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. **62.** $x = a\ (t \operatorname{sen} t + \cos t)$, $y = a\ (\operatorname{sen} t - t \cos t)$ (la curva se llama *evolvente del círculo*). **67.** 1) $x + 2y - 2\sqrt{5} = 0$; 2) $y = (-1/2)\,x + \sqrt{5}$; 3) $x/(2\sqrt{5}) + y/\sqrt{5} = 1$; 4) $(1/\sqrt{5})x + (2/\sqrt{5})\,y - 2 = 0$. **68.** 135°. **69.** 54 unidades cuadradas. **70.** No. **72.** $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$. **73.** $x + y - 4 = 0$. **74.** $3x - 2y = 0$. **75.** $x + y - 7 = 0$. **76.** $x + 3 = 0$, $y + 4 = 0$. **77.** $x + y - 5 = 0$, $x + y + 5 = 0$. **99.** $\operatorname{tg} \alpha = 27/11$. **100.** $x - y = 0$, $5x + 3y - 26 = 0$, $3x + 5y - 26 = 0$. **101.** $14x + 14y - 45 = 0$, $2x - 2y + 35 = 0$. **102.** $3x - y + 14 = 0$, $x - 5y - 14 = 0$, $x + 2y = 0$. **103.** $x - 2 = 0$, $y - 7 = 0$. **104.** 4,4. **105.** 2,4. **106.** $m = 4$. **107.** $x - y = 0$, $x + 5y - 14 = 0$, $5x + y - 14 = 0$. **108.** $\pi/6$. **109.** $(0;\ 5)$ y $(4;\ 3)$. **110.** $(7/8;\ 0)$ y $(-27/8;\ 0)$. **111.** $13x + 6y - 82 = 0$, $3x + 4y - 23 = 0$, $S = 31{,}5$ unidades cuadradas. **112.** $3x - 2y = 0$, $5x + y + 6 = 0$. **113.** $5x + 4 = 0$. **114.** $5x + 8y + 11 = 0$. **115.** $5y + 2 = 0$. **116.** $17x + 11y = 0$. **117.** $x + y + 1 = 0$. **118.** $x = a$, $y = b$. **119.** $x = 1$; $y = x$. **120.** 30°. **121.** $\varphi = 53°8'$. **122.** $5x - 3y + 2 = 0$. **123.** $\sqrt{3}$ unidades cuadradas. **125.** $B\ (1;\ 3)$, $C\ (11;\ 6)$. **126.** 1) $x/4 + y/6 = 1$; 2) $x/4\,(\sqrt{2} - 1) + y/(-6)\,(\sqrt{2} + 1) = 1$; 3) $x/(-4)\,(\sqrt{2} + 1) + y/6\,(\sqrt{2} - 1) = 1$. **127.** $3x - 4y - 9 = 0$, $3x - 4y + 16 = 0$, $4x + 3y - 37 = 0$, o bien, $4x + 3y + 13 = 0$. **134.** 1) $a = 4$, $b = -3$, $r = 5$; 2) $a = -5$, $b = 2$, $r = 0$; la ecuación define un punto; 3) $a = 2$, $b = -7$, $r^2 = -1$; la ecuación no tiene ninguna interpretación geométrica (circunferencia imaginaria). **135.** $\operatorname{tg} \varphi = -2{,}4$. **136.** $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$. **137.** $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **138.** $x = 3{,}2$. **139.** $3x - 4y + 8 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$. **140.** $(x - 2)^2 + y^2 = 16$.

142. (4; 1,8); (4; —1,8); (—4; 1,8); (—4; —1,8). **143.** b^2/a. **144.** $4x + 3y + 12 = 0$. **145.** $16x^2 + 25y^2 = 41$. **146.** El punto M está fuera de la elipse; el punto N, sobre la elipse; el punto P, dentro de la elipse. **147.** $e = \operatorname{sen}(\alpha/2)$. **148.** $M(-5; 7)$. **149.** $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$. **150.** $x^2/3 + y^2/4 = 1$. **151.** La curva buscada es una elipse. Si se orienta el eje de coordenadas por los lados del ángulo recto (el punto A está sobre el eje Ox), entonces la ecuación de esta elipse es $9x^2 + 36y^2 = 4a^2$. **155.** $x^2/9 - y^2/8 = 1$. **156.** $x^2/3 - y^2/5 = 1$. **157.** $(-4; -3)$. **158.** $x^2/64 + y^2/48 = 1$. **159.** $x^2 - y^2 = 8/225$. **160.** $e = 2/\sqrt{3}$. **161.** $(-8; 0)$. **162.** $x^2/4 - y^2/12 = 1$. **163.** 6 y 14. **166.** La rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2/3 = 1$. **169.** $y^2 = 4x$. **170.** $M_1(2; 4)$ y $M_2(2; -4)$. **171.** $y^2 = 4x$; $y^2 = -4x$. **172.** $y = \pm 2\sqrt{2x}$. **173.** $y^2 = \sqrt{2}x$. **174.** $M(0; 0)$, $M_1(18; -24)$. **175.** $y^2 = x$, $\operatorname{tg}\alpha = 8/15$. **179.** (3; 2). **180.** (8; —6). **183.** 1) $O_1(1; 2)$, $p = -1/4$; $x'^2 = -(1/2)y'$; 2) $O_1(1; 3)$, $p = -1/2$; $x'^2 = -y'$; 3) $O_1(1/16; 1/8)$, $p = -1/8$; $y'^2 = (-1/4)x'$; 4) $O_1(1; -2)$, $p = 1/2$; $y'^2 = x'$. **184.** 1) $x'y' = 1/8$; 2) $x'y' = 13/9$; 3) $x'y' = -6/5$; 4) $x'y' = 1/2$. **187.** La circunferencia $(x - 1/2)^2 + (y - 1/3)^2 = 1$. **188.** La elipse $x'^2/25 + y'^2/16 = 1$; el nuevo origen $O'(1; -1)$. **189.** La hipérbola $x'^2/4 - y'^2/9 = 1$; el nuevo origen $O'(2; 3)$. **190.** El punto $O'(2; 1)$. **191.** La elipse imaginaria $x'^2/(-1) + y'^2/(-1/4) = 1$; $x' = x$, $y' = y + 1$. **192.** La hipérbola $y'^2 - x'^2 = 1$; el nuevo origen $O'(3; 0)$. **193.** La parábola $x'^2 = -y'$; el nuevo origen $O'(1; 5/2)$. **194.** Las rectas $x = 2$ y $x = 4$. **195.** Rectas imaginarias. **202.** El conjunto de dos rectas paralelas $5x + y + 1 = 0$ y $5x + y - 1 = 0$. **203.** El conjunto de dos rectas asíntotas $x + y + 1 = 0$. **204.** El conjunto de dos rectas intersecadas $2x - 3y + 1 = 0$. $4x - 3y - 1 = 0$. **205.** $x''^2/30 + y''^2/5 = 1$. **206.** $x''^2/9 - y''^2/36 = 1$. **207.** $y''^2 = -2x''$. **210.** $x = 1/2$, $y = 1/2$. **211.** El sistema es contradictoria (no tiene soluciones). **212.** $x = a + b$, $y = a - b$. **213.** El sistema es indeterminado (tiene un conjunto innumerable de soluciones; x queda arbitrario e $y = -(3/2)x + 1/12$. **214.** $x = y = z = t$. **215.** $x = \cos\alpha$, $y = \operatorname{sen}\alpha$. **216.** $x = 2t$, $y = t$, $z = 2t$. **222.** 0. **223.** 2. **224.** $2(ad - bc)$. **225.** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. **226.** $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. **228.** $x = t$, $y = 2t$, $z = -3t$. **229.** $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$. **230.** $x = t$, $y = t$, $z = -t$.

Capítulo II

234. $C(5/3; 11/3; 13/3)$, $D(1/3; 13/3; 17/3)$. **236.** $M(3; 1; 3)$. **237.** Por la mitad. **238.** $M(0; 0; 17/8)$. **239.** $M(16; -5; 0)$. **245.** $\overline{AM} = (\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c})/(1 + \lambda)$. **247.** $a_x = 0$, $a_y = 2$, $a_z = -2$. **248.** $m^2 + m + 1$. **250.** $a = 3/5$; $\cos\alpha = 1/3$, $\cos\beta = \cos\gamma = 2/3$. **251.** $|\overline{M_1M_2}| = 7$; $\cos\alpha = 2/7$; $\cos\beta = -6/7$, $\cos\gamma = 3/7$. **252.** $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ó $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. **253.** $M(-4; 4; 4\sqrt{2})$. **267.** —96. **268.** arccos (17/50). **269.** $m = 1$. **270.** 547. **271.** $A = \mathrm{Fs} = Fs\cos\varphi = 5\sqrt{3}$. **272.** $(\pm 1/\sqrt{11})(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$. **273.** $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ ó $\mathbf{c} = (1/3)(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})$. **274.** 20/3 y 20/7. **275.** $\mathbf{r}_D = 7\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$. **278.** No, ya que los vectores complanares no pueden ser perpendiculares de par en par. **279.** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -17\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$. **280.** $\sqrt{65/2}$ unidades cuadradas. **281.** 4. **283.** 20 unidades cúbicas. **284.** $4\sqrt{510}/17$.

Capítulo III

296. 1) $(x + y - z - 2)/\sqrt{3} = 0$; 2) $-3/(5\sqrt{2})\,x - (1/\sqrt{2})\,y + 4/(5\sqrt{2})\,z - 7/(5/\sqrt{2}) = 0$. **297.** $d = 13/\sqrt{29}$; el origen de las coordenadas y el punto M_0 están en distintos lados respecto al plano. **298.** $d = 7\sqrt{5/3}$. **299.** 1) $x + y + z - 5 = 0$, 2) $2x + 2y + z - 6 = 0$. **300.** $7x - 11y - z - 15 = 0$. **301.** $M(5; 5; 5)$. **302.** $4x - 3y + 12z - 169 = 0$. **303.** $5y + 4z = 0$; $5x - 3z = 0$; $4x + 3y = 0$. **304.** $6x + 5y - 7z - 27 = 0$. **305.** $x/2 + y/2 +$

$+ z/(\pm\sqrt{2}) = 1$. **306.** $60°$. **307.** $x + 7y + 10z = 0$. **308.** $x - z = 0$. **309.** $x + y + z - 3 = 0$. **310.** $5x + 2y + 5z - 9 = 0$. **311.** $\sqrt{2}x + y + z - 5 = 0$. **312.** $4x + 3y - 2z - 1 = 0$. **313.** $(A_1D_2 - A_2D_1)x + (B_1D_2 - B_2D_1)y + (C_1D_2 - D_1C_2)z = 0$. **314.** $x - y + 2 = 0$. **315.** Arcsen $(5/6)$. **327.** $5y + 5z - 64 = 0$, $x = 0$ (yOz); $5x + 5z - 2 = 0$, $y = 0$ (xOz); $5x - 5y + 62 = 0$, $z = 0$ (xOy). **328.** $(x + 1)/5 = (y - 3)/2 = z/1$. **329.** $\cos\alpha = 6/7$, $\cos\beta = 3/7$, $\cos\gamma = 2/7$. **330.** $(x - 1)/\sqrt{2} = (y + 2)/1 = (z - 3)/(\pm 1)$. **331.** $(x - 5)/1 = (y + 1)/3 = (z + 3)/(-11)$. **332.** $M\,(0;\ 7;\ -2)$. **333.** $(x - 3)(-1) = y/5 = (z + 1)/2$; $x/2 = (y - 7)/(-2) = (z + 2)/3$. **334.** $x = -3t - 1$, $y = 6t + 1$, $z = t + 2$. **335.** $5\sqrt{30/6}$. **336.** $(x - 3)/3 = (y + 1)/(-5) = (z - 2)/(-2)$. **337.** $\cos\varphi = 20/21$. **338.** $x/0 = y/1 = z/2$. **339.** $(x - 4)/2 = (y - 1)/1 = (z + 2)/(-2)$. **340.** $x/2 = (y - 2)/(-1) = (z - 1)/0$. **341.** $(x - 1)/2 = (y - 1)/(-3) = (z - 1)/2$. **342.** $x/1 = (y - 2)/(-1) = (z - 1)/(-1)$. **343.** $x - 5y - 2z + 11 = 0$. **344.** $x/(-10) = (y - 3{,}4)/13 = (z - 5{,}2)\,19$. **348.** 1) $C\,(-1;\ -2;\ 0)$; $r = 5$; 2) $C\,(2;\ -3;\ -1)$, $r = 4$; 3) $C\,(0;\ -1;\ 3/4)$, $r = 3/4$; 4) $C\,(1;\ 0;\ 0)$, $r = 1$; 5) $C\,(0;\ 0;\ 2)$ $r = 1$. **349.** 1) Dentro de la esfera; 2) fuera de la esfera; 3) sobre la esfera. **350.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$. **351.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$, $z = 0$. **352.** $C\,(4;\ 4;\ -2)$, $r = 8$. **356.** 1) Cilindro circular; 2) cilindro elíptico; 3) cilindro hiperbólico; 4) cilindro parabólico; 5) cilindro parabólico; 6) cilindro parabólico; 7) cilindro circular; 8) eje de las z-coordenadas $x = 0$, $y = 0$; 9) planos bisectores $x = z$ y $x = -z$; 10) planos $y = 0$ e $y = x$. **357.** 1) $x^2 + z^2 = 9$, $y = 3$ (circunferencia); 2) $y^2 - x^2 = 1$, $z = 1$ (hipérbola); 3) $z^2 - y^2 = 0$, $x = 0$ (dos rectas). **358.** 1) $y^2/b^2 + z^2/b^2 - x^2/a^2 = 0$; 2) $x^2/a^2 + z^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$; 3) $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$. **361.** $4x^2 + 4y^2 - (z - 2)^2 = 0$. **362.** $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$; $z + 1 = x^2$; $y = 1$; $y^2 = 1 - z$; $x = 1$; $y^2 - x^2 = 1$, $z = -1$. **363.** 1) paraboloide hiperbólico; 2) cono con el vértice en el origen de las coordenadas. **364.** $3z = 2x^2 + y^2$. **365.** $x^2/9 + y^2/5 + z^2/1 = 1$. **366.** $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ (circunferencia). **367.** 1) Eje de ordenadas; 2) cono con el eje Oy y el vértice en el origen de las coordenadas; 3) cono con el eje Ox y el vértice en el origen de las coordenadas; 4) origen de las coordenadas; 5) par de planos que se intersecan en el eje Oz. **374.** Dos planos $x = y$ y $x = z$. **375.** Cilindro circular $(x - 2)^2 + (z - 2)^2 = 4$. **376.** Recta $x = y = z$. **377.** Cono de segundo orden $x^2 + (y - 1)^2 - (z - 1)^2 = 0$ con el vértice $S\,(0;\ 1;\ 1)$. **378.** Punto $(0;\ 1;\ -1)$. **379.** Hiperboloide de una hoja con la ecuación canónica $x'^2 + y'^2/4 - z'^2/4 = 1$. **380.** Hiperboloide de dos hojas con la ecuación canónica $x'^2 + y'^2 - z'^2 = -1$. **381.** Paraboloide de revolución con la ecuación canónica $x'^2 + y'^2 = 4z'$. **382.** Paraboloide hiperbólico con la ecuación canónica $x'^2 - z'^2/9 = 2y'$.

Capítulo IV

387. 900. **388.** 12. **389.** 21 280. **390.** a^2b^2. **391.** $x=1$, $y=2$, $z=1$, $t=-1$. **392.** $x=1$, $y=1$, $z=0$, $t=-2$. **393.** $x=1$, $y=2$, $z=3$. $u=4$, $v=5$, **412.** $B = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -3 & -1 & -5 \\ -7 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. **413.** $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. **414.** $\begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 & 7/10 \\ 0 & 1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}$.
416. $\lambda_1=2$, $\lambda_2=11$; $\mathbf{e}_1=(4/\sqrt{41})\,\mathbf{i}-(5/\sqrt{41})\,\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2=(1/\sqrt{2})\,\mathbf{i}+(1/\sqrt{2})\,\mathbf{j}$. **417.** $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$; $\mathbf{r}_1=\alpha\,(\mathbf{i}-\mathbf{k})$; $\mathbf{r}_2=\beta\,(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $\mathbf{r}_3=\gamma\,(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})$. **418.** $x''^2/16+y''^2/4=1$. **419.** $x=1$, $y=2$, $z=3$. **420.** $x''^2/25-y''^2/9=1$. **421.** $y''^2=2\sqrt{2}x''$. **422.** $x'^2+y'^2/1-z'^2/3=1$ (hiperboloide de una hoja). **423.** $2y''^2+3z''^2=\sqrt{6}\,x''$ (paraboloide elíptico). **424.** (t; $2t$; $3t$, donde t es un número real arbitrario). **425.** ($2t$; $2t$; t, donde t es un número real arbitrario). **426.** $(0;\ 0)$. **427.** La recta $x'\cos\alpha - y'\,(1+\operatorname{sen}\alpha)=0$. **434.** $r\,(A)=0$,

si $\lambda = 0$; $r(A) = 2$, si $\lambda \neq 0$. **435.** $r(A) = 3$. **436.** $r(A) = 3$; los menores básicos $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. **437.** $r(A) = 2$; los menores básicos $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$. **441.** El sistema es compatible, $r(A) = r(A_1) = 2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$. **442.** $r(A) = 1$, $r(A_1) = 2$, el sistema es incompatible. **443.** El sistema es compatible, $r(A) = r(A_1) = 2$. **446.** $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$. **447.** $x_1 = 1$ $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. **448.** $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$. **449.** El sistema es incompatible. **450.** $x = 1{,}96$, $y = 2{,}96$, $z = 5{,}04$. **451.** $x = 1{,}50$, $y = 1{,}16$, $z = 1{,}40$. **457.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. **458.** $x_1 = u$, $x_2 = u + 1$, $x_3 = u + 2$, $x_4 = u + 3$. **459.** El sistema es incompatible. **460.** $r(A) = 3$.

Capítulo V

463. Sí. **464.** No, ya que la suma de dos elementos del conjunto no es un elemento de este conjunto. **465.** No, ya que la suma de dos polinomios de segundo grado puede ser un polinomio de primer grado o una constante. **466.** Sí. **467.** 1) Sí; 2) sí; 3) sí; 4) no. **468.** Sí. **469.** 1) Sólo en el caso si esto es un vector nulo; 2) no, ya que en este espacio, además de los vectores **x** e **y**, deben haber también otros vectores de la forma $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$. **470.** No, ya que en el conjunto obtenido habrá vectores cuya suma será igual a **x**, por ejemplo, los vectores $(\mathbf{x} - \mathbf{y})/2$ y $(\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$. **471.** Sí, puede ser. Por ejemplo, eliminando del conjunto de vectores geométricos los vectores que no son perpendiculares al eje Oz, obtendremos el conjunto de vectores $\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j}$ que forma un espacio lineal. **473.** No, ya que $\lambda(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ no pertenece a este conjunto si λ no es un número entero. **474.** No. **475.** No, puesto que los vectores opuestos no están en el octante I. **488.** Conjunto de todos los polinomios no superiores a grado n. **501.** $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4$. **502.** $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3' + \ldots + \mathbf{e}_n'$. **504.** $\xi_1 = \varepsilon\xi_5'$, $\xi_2 = \alpha\xi_1'$, $\xi_3 = \beta\xi_2'$, $\xi_4 = \gamma\xi_3'$, $\xi_5 = \delta\xi_4'$. **505.** No, puesto que tiene lugar la igualdad $\mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3' = 0$, lo que es imposible en virtud de la independencia lineal de los vectores de base $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ y $\mathbf{e}_3'$. **506.** Se puede sólo en el caso en que este elemento sea un vector nulo. **508.** La intersección es el conjunto de los elementos $\mathbf{x}_{12} = (0; 0; \xi_3; \xi_4)$, $\mathbf{y}_{12} = (0; 0; \eta_3; \eta_4)$, $\mathbf{z}_{12} = (0; 0; \zeta_3; \zeta_4)$, ... La suma coincide con el espacio R. **509.** $d(R_1) = 3$, $d(R_2) = 3$, $d(R_3) = 2$, $d(R_4) = 4$. **510.** No. **513.** R_3 es un conjunto de constantes, R_4 es un conjunto de polinomios del tipo $c_0t^4 + c_1t^2 + c_2t + c_3$. **514.** R_3 es el conjunto de todos los vectores paralelos al eje Ox y $R_4 = R$. **516.** El conjunto de todas las funciones pares forma un subespacio, mientras que el conjunto de funciones impares no lo forma, puesto que el producto de dos funciones impares es una función par. **517.** No, puesto que todo vector $\lambda\mathbf{a}$ no pertenece a este conjunto si λ es un número irracional. **522.** $k = 3$; $\mathbf{f}_1 = (-1; 0; 1; 0; 0)$, $\mathbf{f}_2 = (-1; 0; 0; 1; 0)$, $\mathbf{f}_3 = (0; -1/2; 0; 0; 1)$, $\mathbf{f} = (-c_1 - c_2; -0{,}5c_3; c_1, c_2, c_3)$. **526.** Sí. **527.** No, puesto que la igualdad $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b}$ no se cumple si $ab \neq 0$. **528.** Sólo en el caso en que $\mathbf{x}_0 = 0$. **529.** Sólo para $a = 0$. **530.** Sí.

533. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha \end{pmatrix}$. **536.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **538.** $3A - 2B = E$. **544.** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **545.** $A^{-1} = A$. **546.** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **547.** $B = 2E\cos\alpha$.

548. La transformación lineal A no tiene la transformación inversa, ya que $|A| = 0$. **549.** $A^{-2} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **550.** Para $\lambda = -2$. **552.** 1) Si $\alpha \neq \beta$, entonces $\lambda_1 = \alpha$, $\mathbf{u} = c_1\mathbf{e}_1$, $\lambda_2 = \beta$, $\mathbf{v} = c_2\mathbf{e}_2$; 2) si $\alpha = \beta$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$, $\mathbf{u} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2$. **553.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. **554.** 1) Si $b \neq 0$, entonces la transformación lineal no tiene vectores propios; 2) si $b = 0$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = a$, $\mathbf{u} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2$. **556.** $\lambda = 2$, $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$; $\lambda = 3$, $\mathbf{v} = c_2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$; $\lambda = 6$; $\mathbf{w} = c_3(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. **558.** $\lambda = -1$, $\mathbf{u} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$. **560.** $\lambda = 1$, $\mathbf{u} = c_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$; $\lambda = -1$, $\mathbf{v} = c_2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)$. **561.** $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$, $\mathbf{u} = c(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. **563.** $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es el precio total de todos los artículos confeccionados por la fábrica. **565.** Sí. **566.** No, ya que no se cumplen las condiciones 2ª y 3ª si $\lambda < 0$. **567.** Sí. **569.** arccos $(1/n)$. **573.** Sí. **576.** $|\mathbf{x}| = 5$. **577.** $\mathbf{x}/|\mathbf{x}| = (1/15)\,\mathbf{e}_1 + (2\sqrt{2}/15)\,\mathbf{e}_2 + (\sqrt{3}/5)\,\mathbf{e}_3 + (8/15)\,\mathbf{e}_4 + (\sqrt{5}/3)\,\mathbf{e}_5$. **579.** $\mathbf{x}$ es el vector normalizado. **580.** $\varphi = \pi/3$. **581.** $\pm 0{,}5 \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$. **582.** $\lambda = \pm 1$. **587.** Sí. **588.** Sí. **589.** Para $\lambda = \pm 1$. **590.** Sí, ya que los vectores $\mathbf{Ae}_1$, $\mathbf{Ae}_2$ y $\mathbf{Ae}_3$ forman una base ortonormal. **591.** Sí.

Capítulo VI

602. $n = 4$. **603.** $\delta = 0{,}16\%$. **604.** $\delta = 0{,}0005\%$. **605.** $\delta = 0{,}022\%$; $n = 4$; $S = 8765 \pm 0{,}1$ (m²). **613.** 1) $[-2, 0[\, \cup\,]0, 2]$; 2) $[0, 4]$; 3) $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$; 4) $x \neq \pi(2n + 1)/4$, $n \in Z$; 5) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$; 6) $]1/3, +\infty[$; 7) $[0, 2[$. **614.** 1) $]1, +\infty[$; 2) $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$; 3) $[-4; 4]$; 4) $]-\infty, 3[$; 5) $[-2, 4]$; 6) $]0, 1]$. **615.** 1) Impar; 2) par; 3) no par, ni impar; 4) par; 5) no par, ni impar; 6) par; 7) impar. **616.** 1) $2\pi/5$; 2) 6π; 3) π; 4) π. **653.** 1/2. **654.** -1. **655.** 1/6. **656.** -2. **657.** $-$ sen a. **658.** m/n. **659.** $\sec^2 x_0$. **660.** $-\sqrt{2}/4$. **661.** 1/2. **662.** ∞. **663.** 2. **664.** 3/4. **665.** $-1/4$. **666.** 1/2. **667.** 3. **668.** $\sqrt{7}/4$. **669.** 25/9. **670.** 1/2. **671.** m. **672.** 1 si $x \to +\infty$; -1 si $x \to -\infty$. **673.** $(a - c)/2$. **674.** 0. **675.** 0. **676.** ln 5. **677.** ln (8/7): ln (6/5). **678.** 2. **679.** ln 5. **680.** 1/4. **681.** 1 si $x \to +0$; -1 si $x \to -0$. **682.** $+\infty$. **683.** 2. **684.** 0. **685.** No existe. **686.** 5/4. **687.** ln a. **688.** e. **689.** e^3. **690.** 1/6. **691.** ln (5/4). **692.** 1. **693.** -3. **694.** 0. **695.** 1/2. **696.** e^{10}. **697.** $\sqrt{e}$. **698.** e^{a-b}. **699.** $\sqrt{e}$. **704.** $y \sim x$. **705.** 2. **706.** 1/2. **707.** $\alpha = 0\,(\beta)$. **708.** $\alpha \sim \beta$. **709.** $\alpha \sim \beta$. **710.** 1/3. **711.** 9/4. **712.** $-1/2$. **713.** $-1/2$. **714.** $-1/2$. **715.** 1. **716.** 9/25. **717.** (ln 5·ln 4)/(ln 3·ln 6). **718.** 1,6. **722.** $x = 2$ es el punto de salto. **723.** $x = 1$, $x = 5$ son los puntos de discontinuidad de segunda especie. **724.** Discontinuidad de segunda especie. **725.** $x = 0$ es el punto de discontinuidad evitable. **726.** $x = 3$ es el punto de salto; $x = 5$ es el punto de discontinuidad de especie II; $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable; $x = \pi/2 + \pi n$ $(n \in Z)$ es el punto de discontinuidad de segunda especie. **727.** $x = 1$, $x = 2$ son puntos de discontinuidad evitable. **728.** $x = -2$, $x = -3$ son puntos de discontinuidad de segunda especie, $x = -1$ es el punto de discontinuidad evitable. **729.** La función es continua en el intervalo infinito $]-\infty, +\infty[$. **730.** 1) La función es continua; 2) tiene un punto de discontinuidad de especie II; 3) tiene dos puntos de discontinuidad de especie II. **731.** 1) La función es continua; 2) tiene dos puntos de discontinuidad de segunda especie; 3) tiene cuatro puntos de discontinuidad de segunda especie.

Capítulo VII

735. $y' = -2/x^3$. **736.** $y' = 2/(3\sqrt[3]{x})$. **737.** $y' = 5\cos x - 3\,\mathrm{sen}\, x$. **738.** $y' = 5\,\mathrm{tg}^2 x$. **739.** $y' = -e^x/(e^x + 1)^2$. **740.** $y' = 2x^2 \cdot 2x \cdot \ln 2$. **767.** $y' = -21/x^4$. **768.** $y' = \sqrt[3]{x}$. **769.** $y' = x^2\sqrt{x}\,(1 - x^2)^2$. **770.** $y' = -x^2 e^{-x}$. **771.** $y' = 9x^2 \ln x$. **772.** $y' = (8/9)^x \ln (8/9)$. **773.** $y' = x^2 \cos x$. **774.** $y' = 6\,(x + 1)/(2x^2 + 3x)$. **775.** $y' = -3x/\sqrt{1 - 3x^2}$. **776.** $y' = \arccos (x/2)$. **777.** $y' = 1/(2\sqrt{x})\ \mathrm{arcsen}\,\sqrt{x}$. **778.** $y' = -\cos x$. **779.** $y' = -\cos^2 (x/3)\ \mathrm{sen}\,(x/3)$.

780. $y' = \operatorname{cosec}(2x+1)/2$. **781.** $y' = 1/\cos x$. **782.** $y' = 2\sec^6 2x$. **783** $y' = 1/(2\sqrt{x})\,\operatorname{sen}^2\sqrt{x}\cos^5\sqrt{x}$. **784.** $y' = 6x/\sqrt{9x^4+1}$. **785.** $y' = \sqrt{a^2-x^2}$. **786.** $y' = -2\sec^2 x/\sqrt{\operatorname{tg} x\,(4\operatorname{tg} x+1)}$. **787.** $y' = \operatorname{ctg}^3(x/2)$. **788.** $y' = 1/(x\sqrt{4x^2-1})$. **789.** $y' = 1/\sqrt{a^2-x^2}$. **790.** $y' = 1/(2\sqrt{1-x^2})$. **791.** $y' = 6x^2/(1+x^6)$. **792.** $y' = 6\operatorname{sen} x/(x^2+9)$. **793.** $y' = -2e^{-x}\operatorname{sen}^2 e^{-x}$. **794.** $y' = -1/(2\sqrt{1-x^2})$. **795.** $y' = -6/[(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)]$. **796.** $y' = 3e^{\operatorname{sen}^2 3x}\operatorname{sen} 6x\operatorname{sen}^2 3x$. **797.** $y' = -24\ln\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{ctg} x/(4\ln^4\operatorname{sen} x-9)$.
798. $y' = \sec x$. **799.** $y' = \operatorname{cosec} x$. **800.** $y' = e^{\sqrt{2x}}$. **801.** $y' = 10/[x(x^5+2)]$. **802.** $y' = 2\operatorname{sen} x/(1+\cos x)^2$. **803.** $y' = \cos x/(1+\operatorname{sen}^2 x)$. **804.** $y' = \operatorname{cosec}^2(x/2)\operatorname{ctg}(x/2)$. **805.** $y' = (2/x)\cos^2(\ln x)$. **806.** $y' = 5x^4\ln(x^5+3)$, **807.** $y' = -x/(|x|\sqrt{5-x^2})$. **808.** $y' = \sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}$. **809.** $y' = 0$. **810.** $y' = (mx+n)/\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}$. **811.** $y' = 1/(1-mx^2)^{3/2}$. **812.** $y' = 4x\cos^2 x$.
813. $y' = -2\operatorname{cosec}^3 x$. **814.** $y' = \dfrac{\cos x\ln\operatorname{sen} x}{(1+\ln\operatorname{sen} x)^2}$. **815.** $y' = 9x\operatorname{sen}^2 x\cos x$.
816. $y' = 2/(x\sqrt{1+x^2})$. **817.** $y' = 2e^x\operatorname{sen}^2 e^x$. **818.** $y' = 2/(x^2+2x+2)^2$. **819.** $y' = \ln^3 x$. **820.** $y' = (\ln\operatorname{sen}\sqrt{x})/(2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x})$. **821.** $y' = 2(1+\ln x)/(x^x+x^{-x})$. **822.** $y' = 1/\operatorname{sen}^5 x$. **823.** $y' = \cos^4 x/\operatorname{sen} x$. **824.** $y' = 1/(3\operatorname{sen} x+4\cos x+5)$. **825.** $y' = \cos x\operatorname{tg}^3\operatorname{sen} x$. **826.** $y' = 1/[x^2(x-1)]$. **827.** $y' = 1/[x(x+1)(x+2)]$. **828.** $y' = 4x\operatorname{tg}^2 2x$. **829.** $y' = -2e^x/\sqrt{1-e^{2x}}$. **830.** $y' = (\ln\ln\ln x)/(x\ln x)^2$. **831.** $y' = 2e^{2x}\times(1-2x)/(x+e^{2x})^2$. **832.** $y' = 2(\ln x+1)/(x^2\ln x-1)$. **833.** $y' = 3/(1+x^2)$. **834.** $y' = (e^{2\operatorname{sen} x}\cos x)$: $\operatorname{sen}(e^{2\operatorname{sen} x}/2)$. **835.** $y' = a\operatorname{sen} 2x$. **836.** $y' = 3\sec^2 x\sec^4\operatorname{tg} x$. **837.** $y' = (-1/x^2)\operatorname{arctg} x$. **838.** $y' = (-5/x^6)\ln x$. **839.** $y' = (1/\sqrt{2x+1})\ln(2x+1)$. **840.** $y' = \sec x\operatorname{tg} x\ln\sec x$. **841.** $y' = -2e^{3x}/\sqrt{1-e^{2x}}$. **842.** $y' = 3\cdot 2^{\cos^3 x-3\cos x}\cdot\operatorname{sen}^3 x\cdot\ln 2$. **843.** $y' = (e^x\cdot 2^{5x}/3^{4x})\cdot\ln(32e/81)$. **844.** $y' = 0$. **845.** $y' = x\cos 2x$. **846.** $y' = 2e^{x^2}x(x^4+x^2+1)/(x^2+1)^2$. **847.** $y' = x\cos x/\operatorname{sen}^2 x$. **848.** $y' = (1/\sqrt{x})\times\operatorname{tg}^2\sqrt{x}$. **849.** $y' = x^2/(x^4-a^4)$. **850.** $y' = -4x/\sqrt{x^4+1}$. **851.** $y' = e^{0,5\operatorname{tg}^2 x}\times\operatorname{sen} x\operatorname{tg}^2 x$. **852.** $y' = 8x^3/(1+x^8)$. **853.** $y' = xe^{x^2}(2x^2\ln x+2\ln x+1)$.
854. $y' = 0{,}5\ln 2\sqrt{2^x/(1-2^x)}$. **855.** $y' = -\ln 2/(2x\ln^2 x)$. **856.** $y' = (mx+n)/\sqrt{-x^2+2\alpha x+\beta}$. **857.** $y' = (2/\ln 2)\operatorname{ctg} x$. **858.** $y' = 1/(\sqrt{x^2+9}\ln a)$. **859.** $y' = x^{\operatorname{arcsen} x}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}\right)$.

860. $y' = 8(x-1)^3/(x+1)^5$. **861.** $y' = \dfrac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}\left(\ln 2+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{2x+1}\right)$. **862.** $y' = -1/(|x|(\sqrt{1+x^2})$. **863.** $y' = x^m\cos(n\ln x)$.
864. $y' = (x\operatorname{tg} x+\ln\cos x)\sec^2(x\operatorname{tg} x+\ln\cos x)\,x\sec^2 x$. **865.** $y' = -x\operatorname{sen}\times\ln(x\cos x-\operatorname{sen} x)$. **866.** $y' = 3\cos^3(xe^x-e^x)\cdot xe^x$. **867.** $y' = -2(1-2x^2)/(|1-2x^2|\sqrt{1-x^2})$. **868.** $y' = \begin{cases} 1, & \text{si } x>0;\\ -1, & \text{si } x<0.\end{cases}$

869. $y' = \begin{cases} f'(x), & \text{si } f(x)>0;\\ -f'(x), & \text{si } f(x)<0.\end{cases}$ **870.** $y' = \begin{cases} 3, & \text{si } x>5/3;\\ -3, & \text{si } x<5/3.\end{cases}$

871. $y' = \begin{cases} e^x, & \text{si } x>0;\\ -e^{-x}, & \text{si } x<0.\end{cases}$ **872.** $y' = \begin{cases} -2, & \text{si } x<0;\\ 0, & \text{si } 0<x<2;\\ 2, & \text{si } x>2.\end{cases}$

873. $y' = 2xe^x\operatorname{sen} x$.

874. $y' = (x\cos x)/\sqrt{(x\operatorname{sen} x+\cos x)^2+1}$. **875.** $y' = x^{x+1}\ln x(\ln x-1)/e^x$.

876. $y' = (\text{ctg}\, x \cdot \ln \cos x + \text{tg}\, x \cdot \ln \text{sen}\, x)/\ln^2 \cos x$. **877.** $y' = nx^{n-1}/(2\sqrt{x^{2n}+1})$. **878.** $y' = -(\log_x e)^2/x$. **879.** $y' = 0$. **880.** $y' = 1/2$. **881.** $y' = 0$. **882.** $y' = x^x(1+\ln x)$. **883.** $y' = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2 (\ln 2 + 2x^{-1} - 1 - \ln x)$. **884.** $y' = 2x^{\ln x - 1} \ln x$. **885.** $y' = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3 \sqrt[5]{5x-1}} \cdot \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5x-1}\right]$. **889.** $(\text{arcsec}\ x)' = 1/(x\sqrt{x^2-1})$, $(\text{arccosec}\ x)' = -1/(x\sqrt{x^2-1})$. **890.** $4\ \text{cosec}^2\, x$. **894.** $y' = (x^2-y)/(x-y^2)$. **895.** $y' = -(Ax+By+D)/(Bx+Cy+E)$. **896.** $y' = x/(3y)$. **897.** $y' = y(y - x\ln y)/x(x - y\ln x)$. **898.** $y' = -(y\cos x + \text{sen}\, y)/(x\cos y + \text{sen}\, x)$. **899.** $y' = -(e^x - y \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2)/(e^y - x \cdot 2^{xy} \cdot \ln 2)$. **900.** $y' = 2x$. **901.** $y' = y/x$. **902.** $y' = -y/(2x\ln x)$. **903.** $y' = -(2x\,\text{sen}\, y - y^3\,\text{sen}\, x - 2)/(x^2\cos y + 3y^2\cos x - 3)$. **905.** $-\text{ctg}\, t$. **906.** e^{2t}. **907.** $2\sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}}$. **908.** $\text{cth}\, t$. **910.** $\alpha = \pi/4$; $y = x+1$. **913.** $y - y_0 = (-y_0/p)(x - x_0)$. **914.** $x - y + 1 = 0$. **915.** $x + y - 1 = 0$; $x - y = 0$. **916.** $x - y + 2 - \pi/2 =$. $x + y - \pi/2 = 0$. **917.** $3x - y - 4 = 0$; $x + 3y - 28 = 0$. **919.** $\pi/4$. **920** $3x - 8y + 10 - 6\ln 2 = 0$; $32x + 12y - 15 - 64\ln 2 = 0$. **921.** $x\,\text{ch}\, t_0 - y\,\text{sh}\, t_0 - 1 = 0$. **922.** $\text{tg}\,\varphi = 2/3$. **923.** $\pi/4$. **924.** $\pi/4$; $3\pi/4$. **925.** $\text{tg}\,\varphi_1 = 3$, $\text{tg}\,\varphi_2 = -3$. **926.** $\pi/2$. **929.** 1,76 m/s. **929a.** $x_t' = \sqrt[3]{a}$. **930.** 5) $\text{tg}\,\omega = -\frac{1}{3}$, $\omega = \pi - \text{arctg}\,\frac{1}{3}$. 6) $\text{tg}\,\omega = \varphi$, cuando $\varphi \to \infty$ la intersección será bajo un ángulo $\frac{\pi}{2}$. 7) $\omega = \frac{\pi}{2} + \varphi$. 8) $\omega = 0$; 9) $\omega = \text{arctg}\, 2{,}4$. 10) $\omega = 3\pi/4$. 11) $\text{arctg}\, 1/m$. 12) $\omega = \pi - \text{arctg}\,\frac{125}{64}$. **936.** $y'' = -44/(x+5)^3$. **937** $y'' = \ln x$. **938.** $y'' = 2\sqrt{1 = x^2}$. **939.** $y'' = x\,\text{sen}\, 3x$. **940.** $y'' = 1/\sqrt{x^2+a^2}$. **941.** $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a}\,\text{cosec}^4\,\frac{t}{2}$. **942.** $\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sqrt{t - t^2}$.

945. $-1/32$ m/s². **946.** $y''' = 1/(x+1)^4$. **947.** $y''' = (2\ln x - 3)/x^3$. **948.** $y''' = 105\sqrt{2x+3}$. **949.** $y''' = 4\,\text{sh}\, 2x$. **950.** $y^{(n)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}{2^n}\sqrt{x}$. **951.** $y^{(n)} = \frac{n!\,(-2)^n}{(2x+1)^{n+1}}$. **952.** $y^{(n)} = -1{,}5 \cdot 2^n \cdot \cos(2x + \pi n/2)$. **953.** $y^{(n)} = [2^x + (-1)^n \times 2^{-x}] \ln^n 2$. **954.** $y^{(n)} = \frac{n!\,(ad-bc)(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$. **955.** $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

956. $y^{(n)} = \cos(x + \pi n/2)$. **957.** $\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{t}$.

958. $y''' = y^{\text{IV}} = \ldots = 0$. **968.** $dy = \sqrt{49 - x^2}\, dx$.

969. $dy = \frac{dx}{x^2 - 36}$. **970.** $dy = \text{th}\,(x/2)\, dx$. **971.** $dy = \frac{2e^{2x}\, dx}{1 + e^{4x}}$. **972.** $dy = \ln x\, dx$, $d^2y = \frac{(dx)^2}{x}$, $d^3y = -\frac{(dx)^3}{x^2}$. **973.** $d^2y = \frac{-x\,(dx)^2}{(x^2+4)^{3/2}}$, **974.** $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x\,(x + \Delta x)}$, $dy = -\frac{\Delta x}{x^2}$. **975.** $\Delta y = 0{,}0401$; $dy = 0{,}04$. **976.** 0,811. **977.** 34,04 m³. **978.** 1,035. **979.** 0,078. **980.** $\pi/4 + 1/13$. **981.** 1,9938. **993.** $\xi = 5/2$. **994.** $\frac{1}{x_0} - \frac{x - x_0}{x_0^2} + \frac{(x - x_0)^2}{x_0^3} - \frac{(x - x_0)^3}{x_0^4} + R_3$, donde $R_3 = \frac{(x - x_0)^4}{\xi^5}$ $(x_0 \gtrless \xi \lessgtr x)$. **995.** $M(\sqrt{3};\ 0)$.

996. 0,754. **997.** 4,946. **998.** 1,395. **999.** 2,002. **1000.** 0,587. **1010. 3/5. 1011.** 2. **1012.** 2/3. **1013.** 1/3. **1014.** 0,18. **1015.** 18. **1016.** 1. **1017.** 0. **1018.** 1/2. **1019.** ∞. **1020.** 0. **1021.** $1/\pi$. **1022.** 1. **1023.** 0. **1024.** $-1/2$. **1025.** $(p-q)/2$. **1026.** 2/3. **1027.** 1. **1028.** e^{-6}. **1029.** 2. **1030.** $e^{1/3}$. **1041.** Crece en $]-\infty, -1[$ y en $]1, +\infty[$, decrece en $]-1, 1[$. **1042.** Decrece en $]-\infty, -1[$, crece en $]-1, +\infty[$. **1043.** Crece en$]-\infty, 1,$ [decrece en $]1, +\infty[$. **1044.** Decrece en $]-\infty, -1[$y en $]1, +\infty[$, decrece en $]-1, 1[$. **1045.** $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(2\sqrt[3]{2/49}) = (12/49)\sqrt[3]{4/7}$. **1046.** $y_{\max} = y(11/4) = 13/4$. **1047.** $y_{\min} = y(0) = 0$. **1048.** $y_{\min} = y(0) = 1$. **1049.** $y_{\min} = y(e) = e$. **1050.** $y_{\max} = y(1) = 1/\sqrt{e}$, $y_{\min} = y(-1) = -1/\sqrt{e}$. **1051.** $y_{\min} = y(1) = 0$. **1052.** $y_{\min} = y(3) = 0$, $y_{\max} = y(2) = 3$. **1053.** $y_{\min} = y(1) = -1$. **1054.** $y_{\max} = (\pi - 12 + 6\sqrt{3})/12$, $y_{\min} = (5\pi - 12 - 6\sqrt{3})/12$. **1055.** $y_{\max} = e^{3/2}$, $y_{\min} = e^{-3/2}$. **1056.** $y_{\min} = 2$, $y_{\text{máx}} = 66$. **1057.** (0; 4) y (0; -4). **1058.** 25 km; 8 h 15 min. **1059.** $5\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$. **1060.** $l/4$, $l/4$. **1061.** $V = 2\pi l^3\sqrt{3}/27$. **1062.** $V = (S/3)\sqrt{S/(6\pi)}$. **1063.** A una distancia de 9 km a partir de A. **1064.** 125 m. **1065.** $a/\sqrt{2}$. **1069.** Es convexa en $]-\infty, -2[$, es cóncava en $]-2, +\infty[$. **1070.** (4; 20). **1071.** (1; 0). **1072.** No hay puntos de inflexión. **1077.** $x = 0$; $y = 2x$. **1078.** $x = 0$; $y = -3x$. **1079.** $y = x - 6$. **1080.** $y = x/2 + \pi$ e $y = x/2$. **1081.** $y = \pi x/2 + 1$ e $y = -\pi x/2 + 1$. **1084.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$; la función es par y periódica con el período de π. Crece en $]\pi k, \pi/2, +\pi k[$, decrece en $]\pi/2 + \pi k, \pi + \pi k[$; $y_{\min} = y(\pi k) = 0$, $y_{\text{máx}} = y(\pi/2 + \pi k) = 1$, $k \in Z$. La curva es cóncava en $]-\pi/4 + \pi k, \pi/4 + \pi k[$ y convexa en$]\pi/4 + \pi k, 3\pi/4 + \pi k[$; los puntos de inflexión son $(-\pi/4 + \pi k;\ 1/2)$ y $(\pi/4 + \pi k;;\ 1/2)$ $k \in Z$. **1085.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$, la función es impar. Decrece en $]-\infty, -1[$ y en $]1, +\infty[$, crece en $]-1, 1[$; $y_{\min} = y(-1) = -2$, $y_{\max} = y(1) = 2$. La curva es cóncava en $]-\infty, 0]$ y convexa en $]0, +\infty[$; el punto de inflexión es (0; 0). **1086.** $D(y) =]1, +\infty[$; las asíntotas son $x = 1$, $y = 0$. Decrece en todo el campo de definición. La curva es cóncava por doquier. No hay extremos ni puntos de inflexión. **1087.** $D(y) =]-\infty; 0[\cup]1, +\infty[$; las asíntotas son $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. Crece en$][-\infty, 0[$, decrece en $]1, +\infty[$.La curva es cóncava por doquier. No hay extremos ni puntos de inflexión. **1088.** $D(y) =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$; la función es impar; las asíntotas son $x = -2$, $x = 2$, $y = x$. Crece en $]-\infty, -2\sqrt{3}[$ y en $]2\sqrt{3}, +\infty[$, decrece en $]-2\sqrt{3}, -2[$, $]-2, 2[$ y en $]2, 2\sqrt{3}[$; $y_{\min} = y(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$, $y_{\max} = y(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$. La curva es convexa en $]-\infty, -2[$ y en $]0, 2[$, es cóncava en $]-2, 0[$y en$]2, +\infty[$; el punto de inflexión es (0; 0). **1089.** $D(y) =]0, +\infty[$; la asíntota $y = 0$. Crece en $]0, e^2[$, decrece en $]e^2, +\infty[$; $y_{\text{máx}} = y(e^2) = 2/e$. La curva es convexa en $]0, e^{8/3}[$ y cóncava en $]e^{8/3}, +\infty[$; el punto de inflexión es $(e^{8/3}; 8e^{-4/3}/3)$. **1090.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$. Decrece en $]-\infty, 1/4[$, crece en $]1/4, +\infty[$; $y_{\min} = y(1/4) = -27/16$. La curva es cóncava en $]-\infty, 1/2[$ y en $]1, +\infty[$, convexa en $]1/2, 1[$; los puntos de inflexión son $(1/2; -1)$ y (1; 0). **1091.** $D(y) = [0, +\infty[$. Decrece en $]0, 1/3[$, crece en $]1/3, +\infty[$; $y_{\min} = y(1/3) = -2/3\sqrt{3})$. La curva es cóncava por doquier. **1092.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$; la asíntota $y = x$. Decrece en $]-\infty, 0[$, crece en $]0, +\infty[$; $y_{\min} = y(0) = 1$. La curva es cóncava por doquier. **1093.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$; la función es impar, las asíntotas $y = -1$ e $y = 1$. Crece en$]-\infty, +\infty[$. La curva es cóncava en $]-\infty, 0[$ y convexa en $]0, +\infty[$; el punto de inflexión es (0; 0). **1094.** $D(y) =]-\infty, +\infty[$, la asíntota $y = 0$. Crece en $]-\infty, 1[$, decrece en $]1, +\infty[$; $y_{\text{máx}} = y(1) = e$. La curva es cóncava en $]-\infty, 1 - \sqrt{2}/2[$ y en $]1 + \sqrt{2}/2, +\infty[$, convexa en $]1 - \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2[$; los puntos de inflexión son $(1 + \sqrt{2}/2; \sqrt{e})$ y $(1 - \sqrt{2}/2; \sqrt{e})$. **1095.** $D(y) =]-\infty, 2[\cup]2 + \infty[$; las asíntotas $x = 2$ e $y = x + 4$. Crece en $]-\infty, 2[$ y en $]6, +\infty[$, decrece en $]2, 6[$; $y_{\min} = y(6) = 27/2$. La curva es convexa en $]-\infty, 0[$, cóncava en

$]0, 2[$ y en $]2, +\infty[$; el punto de inflexión es $(0; 0)$. **1100.** $R = 25/3$. **1101.** $R = (4a/3)\cos(\theta/2)$. **1102.** $k = 1/(e\sqrt{2})$. **1103.** $(2; 2)$. **1104.** La circunferencia $\xi^2 + \eta^2 = 1$. **1107.** Primero. **1108.** Primero. **1109.** Tercero. **1110.** Primero. **1111.** Tercero. **1112.** Segundo. **1114.** Circunferencia $x^2 + z^2 = 1$, $y = 1$. **1115.** La recta que pasa por el origen de las coordenadas y forma con los ejes de las mismas ángulos iguales. **1116.** La recta paralela al eje Oz que pasa por el punto $(1; 1; 0)$. **1117.** La hipérbola equilátera que está en el plano xOz. **1120.** $(\mathbf{i} + \mathbf{k})\,\mathrm{sh}\,2t + \mathbf{j}\,\mathrm{ch}\,2t$. **1121.** 0. **1122.** $3(t^2 - 2t^5)\,\mathbf{i} + (5t^4 - 2t)\,\mathbf{j}$. **1124.** $x/(-1) = (y-1)/0 = (z - \pi\sqrt{3}/2)/\sqrt{3}$, $2x - 2z\sqrt{3} + 3\pi = 0$. **1125.** $M_1(0; 0; -1)$ y $M_2(2/3; -8/9; -1/27)$. **1126.** $70° 23'$. **1127.** $x/1 = (y-1)/0 = (z - \sqrt{2}/2)/1$, $x + z - \sqrt{2}/2 = 0$. **1128.** $(x-1)/2 = (y+1)/0 = (z-1)/1$. **1129.** $(x-1)/2 = (y-1)/3 = (z-1)/4$. **1130.** $\arccos(14/(3\sqrt{29}))$. **1132.** $ds = \sqrt{a^2+b^2}\,dt$. **1133.** $h = 2\sqrt{3}\pi$. **1134.** $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = -3\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,t + 3\mathbf{j}\cos t + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -3\mathbf{i}\cos t - 3\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,t$. **1135.** $\mathbf{v}|_{t=1} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w}|_{t=1} = 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. **1137.** $\tau = (5/13)\,\mathbf{i} - (12/13)\,\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,t + (12/13)\,\mathbf{k}\cos t$. **1138.** $\tau = -(1/3)\,\mathbf{j} + (2\sqrt{2}/3)\,\mathbf{k}$. **1147.** $(2/3)\,\mathbf{i} + (2/3)\,\mathbf{j} + (1/3)\,\mathbf{k}$. **1148.** $(1/3)\,\mathbf{i} - (2/3)\,\mathbf{j} + (2/3)\,\mathbf{k}$. **1149.** $(-2/3)\,\mathbf{i} + (1/3)\,\mathbf{j} + (2/3)\,\mathbf{k}$. **1150.** $2/27$. **1151.** $2/27$. **1152.** $X - 2Y + 2Z - 2 = 0$. **1153.** $2X - Y - 2Z - 7 = 0$. **1154.** $2X + 2Y + Z - 19 = 0$.

Capítulo VIII

1160. $x^2 + y^2 \geqslant 1$ es la parte del plano fuera del círculo unitario que tiene por centro el origen de las coordenadas. **1161.** La parte del plano dentro del círculo $x^2 + y^2 < 1$. **1162.** La franja comprendida entre las rectas paralelas $x + y \leqslant 1$ y $x + y \geqslant -1$. **1163.** Los anillos concéntricos $\pi/2 \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 0$, $5\pi/2 \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 3\pi/2$, ... **1164.** $y > x$ es el semiplano que está por encima de la bisectriz $y = x$. **1165.** Semiplano $x \geqslant 0$. **1166.** La esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$. **1167.** La parte del espacio que está fuera del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **1168.** La parte del espacio que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ a excepción del origen de las coordenadas. **1169.** La parte del espacio ubicada por encima del plano $x + y + z = 0$ incluyendo este plano. **1170.** La familia de las rectas paralelas $2x + y = C$. **1171.** La familia de las rectas $y = Cx$. **1172.** La familia de las rectas $y = e^{2C}x$, o bien $y = C_1x$ $(C > 0)$. **1173.** La familia de las parábolas $y = C\sqrt{x}$. **1174.** La familia de las hipérbolas equiláteras $xy = C$ (para $C \neq 0$); el conjunto de los ejes de las coordenadas Ox y Oy (para $C = 0$). **1175.** La familia de los planos $x + y + 3z = C$. **1176.** La familia de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = C$. **1177.** La familia de los hiperboloides de dos hojas $x^2 - y^2 - z^2 = C$ (para $C > 0$); la familia de los hiperboloides de una hoja $x^2 - y^2 - z^2 = C$ (para $C < 0$); el cono $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ (para $C = 0$). **1183.** $\dfrac{du}{dx} = 2x - 3y - 4$, $\dfrac{du}{dy} = 4y - 3x + 2$. **1184.** $\dfrac{\partial r}{\partial \rho} = 2\rho\,\mathrm{sen}^4\,\theta$, $\dfrac{\partial r}{\partial \theta} = 4\rho^2\,\mathrm{sen}^3\,\theta\cos\theta$. **1185.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^2} - \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{2x^2}{y^3}$. **1186.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{xy(x^2+y^2)}(3x^2y + y^3)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{xy(x^2+y^2)}(x^3 + 3xy^2)$. **1187.** $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}$. **1188.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y}e^{x/y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}e^{x/y} + \dfrac{z}{y^2}e^{-z/y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{y}e^{-z/y}$. **1189.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}$. **1190.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x^2(x^3+y^2)\,e^{(x^3+y^2)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=4y(x^3+y^2)e^{(x^3+y^2)^2}$. **1191.** $\frac{\partial u}{\partial x}=(y-z)(2x-y-z)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=(x-z)(x-2y+z)$, $\frac{\partial u}{\partial z}=(x-y)(-y+2z-x)$. **1192.** $\frac{\partial u}{\partial x}=(6x-y)e^{3x^2+2y^2-xy}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=(4y-x)e^{3x^2+2y^2-xy}$. **1193.** $\frac{\partial u}{\partial y}=xze^{xyz}\operatorname{sen}\frac{y}{x}+\frac{1}{x}e^{xyz}\cos\frac{y}{x}$. **1195.** ρ. **1200.** $dz=\frac{2(x\,dx+y\,dy)}{x^2+y^2}$. **1201.** $dz=\frac{2(x\,dy-y\,dx)}{x^2\operatorname{sen}(2y/x)}$. **1202.** $2(x\,dx+y\,dy)\cos(x^2+y^2)$. **1203.** $dz=x^y\left(\frac{y}{x}dx+\ln x\,dy\right)$. **1204.** $dy=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(dx+\frac{y\,dy}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. **1205.** $dz=e^x[(x\cos y-\operatorname{sen}y)\,dy+(\operatorname{sen}y+\cos y+x\operatorname{sen}y)\,dx]$. **1206.** $dz=e^{x+y}\{[(x+1)\cos y+y(\operatorname{sen}x+\cos x)]\,dx+[x(\cos y-\operatorname{sen}y)+(y+1)\operatorname{sen}x]\,dy\}$. **1027.** $dz=\frac{2dx}{x^2+4}+\frac{2\cos y\,dy}{\operatorname{sen}^2 y+4}$. **1208.** $du=e^{xyz}(yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz)$. **1209.** 1,08. **1210.** $-0{,}03$. **1211.** 1,013. **1212.** 3,037. **1213.** 1,05. **1218.** $6(x+y)$. **1219.** $-\operatorname{sen}(x+y)$. **1220.** $-4\cos(2x+2y)/\operatorname{sen}^2(2x+2y)$. **1221.** 0. **1222.** $x(x+2y)/(x+y)^2$. **1223.** $y(2-y^2)\cos xy-xy^2\operatorname{sen}xy$. **1224.** $\operatorname{sen}y\cos(x+\cos y)$. **1225.** $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}[(dy)^2-dx)^2]-\frac{4xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$. **1226.** $-\cos(x+y)(dx+dy)^2$. **1227.** $ae^y[e^y\operatorname{sen}(ax+e^y)-\cos(ax+e^y)]$. **1228.** 4. **1230.** $2[(dx)^2-dx\,dy+(dy)^2]$. **1232.** 3) $e^{xy}[y\,dx+x\,dy)^2+2\,dx\,dy]$ 4) $-\left(\frac{dx+dy}{x+y}\right)^2$; 5) $6\,dx\,dy\,dz$; 6) $-\frac{6dx^2}{x^4}(y\,dx-x\,dy)$; 7) $\frac{2}{y^4}(4y\,dx-3x\,dy)\,dy^3$; 8) $e^{x+y}(dx+dy)^5$. **1235.** $4/\operatorname{sen}2x$. **1236.** $2x(3x+2)/(x^2+3x+1)^2$. **1237.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos x$, $\frac{\partial z}{\partial x}=x(2\cos x-x\operatorname{sen}x)$. **1238.** 0. **1239.** $\frac{\partial z}{\partial\xi}=4\xi$, $\frac{dz}{d\eta}=4\eta$. **1240.** $\frac{\partial u}{\partial\xi}=\frac{2}{\xi}$, $\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{2(\eta^4-1)}{\eta(\eta^4+1)}$. **1246.** $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_M=\frac{7}{5}$. **1247.** $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M=\frac{1}{6}$. **1248.** $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M=\frac{7}{9}$. **1249.** $|\operatorname{grad}\times u|_M=1/r_0^2$; $\cos\alpha=-x_0/r_0$, $\cos\beta=-y_0/r_0$, $\cos\gamma=-z_0/r_0$, donde $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. **1250.** $|\operatorname{grad}u|_M=3$, $\cos\alpha=1/3$, $\cos\beta=\cos\gamma=2/3$. **1251.** 1/3. **1256.** $-x/y$. **1257.** y/x. **1258.** $y'=-y/x$, $y''=2y/x^2$. **1259.** $(y\sqrt{2xy}-x^2)/(2y^2-x\sqrt{2xy})$. **1260.** y/x. **1261.** $(a^2-b^2)/(2b^2-a^2)$. **1262.** $y/(2x)$. **1263.** $(x+y)/(x-y)$. **1264.** $1/(2^y\ln 2)$. **1265.** $y'=-1$, $y''=0$. **1266.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}$. **1267.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2-yz}{z^2-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y^2-xz}{z^2-xy}$. **1268.** $\frac{dx+(z/y)\,dy}{1+\ln(z/y)}$. **1269.** $-\frac{x\cos y+\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}$. **1270.** $-\frac{(y+z)\,dx+(x+z)\,dy}{x+y}$. **1271.** $-y-z-e^{y-x}$. **1272.** 1. **1275.** $2x+2y-z=1$, $(x-1)/2=(y-1)/2=(z-3)/(-1)$. **1276.** $2x+2y-3z+1=0$, $(x-2)/2=(y-2)/2=(z-3)/(-3)$. **1277.** $z-2x+2=0$, $(x-1)/2=y/0=z/(-1)$. **1278.** $x-y-2z+1=0$, $(x-\pi/4)/1=(y-\pi/4)/(-1)=(z-1/2)/(-2)$. **1279.** $x+4y+6z\pm 21=0$. **1281.** $(4/3;\ 4/3;\ 1/3)$ y $(-4/3;\ -4/3;\ -1/3)$. **1285.** $z_{max}=1/64$. **1286.** $z_{min}=-125$. **1287.** $z_{max}=4$. **1288.** $z_{min}=0$. **1289.** $z_{max}=a\sqrt{3}/9$ cuando $x=y=2a/3$. **1293.** $z_{min}=144/25$ en el punto (36/25;

48/25). **1294.** $z_{\min}=-16/3$, $z_{\max}=16$. **1295.** $z_{\min}=5$, $z_{\max}=11$. **1296.** $z_{\min}=-1/2$, $z_{\max}=1/2$. **1297.** $z_{\min}=1$, $z_{\max}=4$. **1298.** $z_{\min}=-2(\sqrt{2}+1)\cong-4{,}8$, $z_{\max}=2(\sqrt{2}-1)\cong=0{,}8$. **1299.** $z_{\min}=0$, $z_{\max}=3\sqrt{3}/2$. **1300.** $z_{\min}=-3$ cuando $x=y=3\pi/2$, $z_{\max}=1+\sqrt{3}/2$ cuando $x=y=5\pi/6$. **1301.** $z_{\min}=-1/8$, $z_{\max}=1$. **1302.** El equilátero. **1303.** El equilátero. **1304.** El cuadrado; $P_{\min}=4\sqrt{S}$. **1305.** El cubo; $V_{\max}=(S/6)\sqrt{S/6}$.

Capítulo IX

1315. $(2/5)x^2\sqrt{x}+C$. **1316.** $(5/4)\sqrt[5]{x^4}+C$. **1317.** $2\operatorname{arcsen} x-x+C$. **1318.** $\operatorname{arctg} x+x-x^3/3+C$. **1319.** $e^{3x}\cdot 3^x/(3+\ln 3)+C$. **1320.** $\operatorname{tg} x-x+C$. **1321.** $\operatorname{ch} x+\cos x+C$. **1322.** $x^2/2-2x+\ln|x|+C$. **1323.** $4\operatorname{tg} x-9\operatorname{ctg} x-x+C$. **1324.** $(1/2)\operatorname{sen}(x^2)+C$. **1325.** $\ln|\ln x|+C$. **1326.** $3(ax^2+b)^{4/3}/(8a)+C$. **1327.** $(2/3)\operatorname{sen} x\sqrt{\operatorname{sen} x}+C$. **1328.** $-(1/b)\cos(a+bx)+C$. **1329.** $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)+C$.

1346. $e^{\sqrt{2x-1}}+C$. **1347.** $-(1/32)(1-2x^4)^4+C$. **1348.** $(1/3)\cos(2-3x)+C$. **1349.** $(1/10)\operatorname{sh}(5x^2+3)+C$. **1350.** $2\operatorname{arct}\sqrt{x}+C$. **1351.** $(1/5)(x^2+1)^{5/2}+C$. **1352.** $(1/2)\ln|x^2-1|+C$. **1353.** $(1/2)\ln|x^2+\sqrt{x^4-1}|+C$. **1354.** $(-1/4)\times\operatorname{arctg}\times(0{,}5\cos^2 2x)+C$. **1355.** $(1/\sqrt{7})\ln|(\sqrt{x}-\sqrt{7})/(\sqrt{x}+\sqrt{7})|+C$. **1356.** $2\operatorname{arcsen}(e^{x/2}/4)+C$. **1357.** $\ln|x+\sqrt{2+x^2}|+\operatorname{arcsen}(x/\sqrt{2})+C$. **1358.** $(-2/9)\sqrt{2-3x^3}+C$. **1359.** $-5\sqrt{3-x^2}+3\operatorname{arcsen}(x/\sqrt{3})+C$. **1360.** $(1/4)\operatorname{arctg}(x-3)/4+C$. **1361.** $2\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}\ln|(\sqrt{3x+5}-\sqrt{5})/(\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}|+C$. **1362.** $1/(2\sqrt{10})\operatorname{arctg}(x^2\sqrt{2/5})+C$. **1368.** 2) $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+\lambda}+\dfrac{\lambda}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}|+C$. **1370.** $(x^2/4)(2\ln x-1)+C$.

1371. $x\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}+C$. **1372.** $(x^2/3)\operatorname{arctg} x-(1/6)x^2+(1/6)\ln(x^2+1)+C$. **1373.** xe^x+C. **1374.** $-x^2\cos x+2x\operatorname{sen} x+2\cos x+C$. **1375.** $(1/2)e^{x^2}\times(x^4-2x^2+2)+C$. **1376.** $(x+1)^2\operatorname{sen} x+2(x+1)\cos x+C$. **1377.** $(e^{2x}/5)\times(\operatorname{sen} x+2\cos x)+C$. **1378.** $(x/2)(\operatorname{sen}\ln x-\cos\ln x)+C$. **1379.** $-2\sqrt{x}\times\cos\sqrt{x}+2\operatorname{sen}\sqrt{x}+C$. **1387.** $-1/[3(x-1)^3]+C$. **1388.** $-1/[4(2x+3)^2]+C$. **1389.** $(1/3)\operatorname{arctg}(x-3)/3+C$. **1390.** $1/(3\sqrt{2})\operatorname{arctg}(x^3+1)/\sqrt{2}+C$. **1391.** $(1/2)\ln(x^2-4x+7)+C$. **1392.** $(5/2)\ln(x^2+10x+29)-11\operatorname{arctg}(x+5)/2+C$. **1393.** $(1/10)\ln(5x^2+2x+1)+(2/5)\operatorname{arctg}(5x+1)/2+C$. **1394.** $x/[8(x^2+2)^2]+3x/[32(x^2+1)]+(3\sqrt{2}/64)\operatorname{arctg}(x/\sqrt{2})+C$. **1395.** $(x-7)/[8(x^2+2x+5)]+(1/16)\operatorname{arctg}(x+1)/2+C$. **1405.** $-(2/3)\ln|x|+(5/3)\ln|x-3|+C$. **1406.** $-(1/2)\ln(x^2+x+1)+3\ln|x+2|+(1/\sqrt{3})\operatorname{arctg}(2x+1)/\sqrt{3}+C$. **1407.** $1/[2(x-1)^2]+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$. **1408.** $(1/12)\ln|x-2|-(1/24)\ln(x^2+2x+4)-1/4)\sqrt{3})\operatorname{arctg}(x+1)/\sqrt{3}+C$. **1409.** $(31/108)\ln\times|x-3|+(29/108)\ln|x+3|+(2/9)\ln(x^2+9)-(1/54)\operatorname{arctg}(x/3)+C$. **1410.** $(1/4)\ln|x/(x-2)|-(x-1)/[2x(x-2)]+C$. **1411.** $(1/16)[\ln(x^2+1)/(x^2+9)]+(1/8)\operatorname{arctg} x-(1/24)\operatorname{arctg}(x/3)+C$. **1412.** $(1/4)\ln[(x^2+4)/(x^2+2x+5)]+(1/8)\operatorname{arctg}(x/2)+(7/32)\operatorname{arctg}(x+1)/2+C$. **1413.** $(1/2)[\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg}(x+1)]+C$. **1414.** $x+(9/2)\ln|x-3|-(1/2)\ln|x-1|+C$. **1415.** $x^2/2+7x+(75/2)\ln|x-5|-(1/2)\ln|x-1|+C$. **1416.** $x+(1/2)\ln|(x-$

$-2)/(x+2)\,|$ $-$ arctg $(x/2)+C$. **1417.** $3x+\ln|x|+2\,\mathrm{arctg}\,x+C$. **1427.** $-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln|\sqrt[4]{1-2x}-1|+C$. **1428.** $(6/5)\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x}+C$. **1429.** $\ln|x-1/2+\sqrt{x^2-x-1}|+C$. **1430.** arcsen $\times(x+1)/3+C$. **1431.** $-5\sqrt{-x^2+4x+5}+13$ arcsen $(x-2)/3+C$. **1432.** $3\sqrt{x^2+x+2}+(1/2)\ln|x+1/2+\sqrt{x^2+x+2}|+C$. **1433.** $\sqrt{x/(x+2)}+C$. **1434.** $-$arcsen $[(x+1)/(x\sqrt{3})]+C$. **1435.** $\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+\sqrt{2}\ln\times$

$\times\left|\dfrac{1-x\sqrt{2(x^2+1)}}{2(x+1)}\right|+C$. **1436.** $-(x/2+5)\sqrt{-x^2+4x}+13$ arcsen $(x-2)/2+C$. **1440.** $3/\sqrt[3]{x+1}+\ln[x/(\sqrt[3]{x}+1)^3]+C$. **1441.** $4\sqrt{\sqrt{x}+1}\,[(1/5)\times(\sqrt{x}+1)^2-(2/3)(\sqrt{x}+1)+1]+C$. **1442.** $(1/6)\ln[(t^2+t+1)/(t^2-2t+1)]-(1/\sqrt{3})\,\mathrm{arctg}\,(2t+1)/\sqrt{3}+C$, donde $t=\sqrt[3]{1+x^3}/x$. **1443.** $(1/3)\ln\times[(\sqrt{1+x^3}-1)^2/|x^3|]+C$. **1444.** $(1/10)(5x^{4/3}+3)^{3/2}+C$. **1445.** $-(2-x^3)^{2/3}/(4x^2)+C$. **1463.** $(1/5)\ln|5\,\mathrm{tg}\,(x/2)+3|+C$. **1464.** $-2/[\mathrm{tg}\,(x/2)-1]+C$. **1465.** $-(1/17)x+(1/4)\ln|\mathrm{sen}\,x|-(1/68)\ln|\mathrm{sen}\,x+4\cos x|+C$. **1466.** $\ln|\mathrm{sen}\,x|-\mathrm{sen}\,x+C$. **1467.** $-(2/5)\ln(1-\cos x)+(1/5)\ln(\cos^2x+2\cos x+2)-(6/5)\,\mathrm{arctg}\,(1+\cos x)+C$. **1468.** $(1/3)\cos^3x-\cos x+C$. **1469.** $\ln|\mathrm{sen}\,x|-\mathrm{sen}^2x+(1/4)\,\mathrm{sen}^4x+C$. **1470.** $(1/8)x-(1/8)\,\mathrm{sen}\,x+C$. **1471.** $(3/8)x+(1/4)\,\mathrm{sen}\,2x+(1/32)\,\mathrm{sen}\,4x+C$. **1472.** $(2/3)\,\mathrm{tg}^3(x/2)-2\,\mathrm{tg}\,(x/2)+x+C$. **1473.** $-(1/6)\,\mathrm{ctg}^2\,3x-(1/3)\ln|\mathrm{sen}\,3x|+C$. **1474.** $\mathrm{tg}\,x+(2/3)\,\mathrm{tg}^3x+(1/5)\,\mathrm{tg}^5x+C$. **1475.** $-(1/3)\,\mathrm{ctg}^3x+C$. **1476.** $(1/2)\,\mathrm{tg}\,x\sec x+(1/2)\ln|\mathrm{tg}\,(x/2+\pi/4)|+C$. **1477.** $-(1/2)\,\mathrm{ctg}\,x\,\mathrm{cosec}\,x-(1/2)\ln|\mathrm{tg}\,(x/2)|+C$. **1478.** $(1/4)\,\mathrm{sen}\,2x-(1/8)\,\mathrm{sen}\,4x+C$. **1479.** $(3/5)\,\mathrm{sen}\,(5x/6)+3\,\mathrm{sen}\,(x/6)+C$. **1483.** $x/\sqrt{1-x^2}+C$. **1484.** $x/(a^2\sqrt{a^2+x^2})+C$. **1485.** $(1/2)(\arccos(1/x)+\sqrt{x^2-1}/x^2)+C$. **1486.** $-(1/6)\cos 3x+(1/20)\cos 5x+(1/4)\cos x+C$. **1487.** $-2(2x^2+6x+13)\,e^{-x/2}+C$. **1488.** $-(2\ln x+1)/(4x^2)+C$. **1489.** $x\,\mathrm{arctg}\,x-(3/2)(\mathrm{arctg}\,x)^2-(1/2)\ln(1+x^2)+C$. **1490.** $(x^2-1)\,\mathrm{sen}\,2x+x\cos 2x+C$. **1491.** $(1/4)x^2(2\ln^2x-2\ln x+1)+C$. **1492.** $x+\ln|e^x+3|+C$. **1493.** $(x+1)\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$. **1496.** $(2/\ln 2)\times(\sqrt{2^x-1}-\mathrm{arctg}\,\sqrt{2^x-1})+C$. **1495.** $(1/4)\ln|(t+1)/(t-1)|-(1/2)\,\mathrm{arctg}\,t+C$, donde $t^4=1+x^{-4}$. **1496.** $\sqrt{2}\,[(1/2)(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}+2$ arcsen $(x-1)/2]+C$. **1497.** $\mathrm{sen}\,e^x-e^x\cos e^x+C$. **1498.** $(1/\sqrt{5})\ln|\mathrm{tg}\,x+\sqrt{\mathrm{tg}^2x+2/5}|+C$. **1499.** $(1/2)\cos^2x\,(1-2\ln\cos x)+C$. **1500.** $(1/2)\times\mathrm{sen}\,(x^2+4x+1)+C$. **1501.** $-0{,}5\,(x/\mathrm{sen}^2x+\mathrm{ctg}\,x)+C$. **1502.** $2(x-2)\times\sqrt{1+e^x}-2\ln[((\sqrt{1+e^x}-1)/(\sqrt{1+e^x}+1))]+C$. **1503.** $x\ln(x^2+x)+\ln|x+1|-x+C$. **1504.** $-1/x-\mathrm{arctg}\,x+C$. **1505.** $(x/2)(\cos\ln x+\mathrm{sen}\ln x)+C$. **1506.** $12\{\sqrt[12]{x}+\ln[(\sqrt[12]{x}-1)^2/\sqrt[12]{x}]\}+C$. **1507.** $[e^{\alpha x}/(\alpha^2+\beta^2)](\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta x-\beta\cos\beta x)+C$. **1508.** $[e^{\alpha x}/(\alpha^2+\beta^2)](\beta\,\mathrm{sen}\,\beta x+\alpha\cos\beta x)+C$. **1509.** $[1/(ab)]\,\mathrm{arctg}\,[(b/a)\,\mathrm{tg}\,x]+C$. **1510.** $\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x+C$. **1511.** $0{,}5\,(\mathrm{arctg}\,x+x/(1+x^2))+C$.

Capítulo X

1521. $1/2$. **1522.** $e-1$. **1523.** $0<I\leqslant 4/27$. **1524.** $\pi/2\leqslant I\leqslant e\pi/2$. **1525.** $0<I<1$. **1526.** $464\sqrt{2}/15$. **1527.** $\pi/8$. **1528.** $e-\sqrt{e}$. **1529.** e^e-e.

1530. $(e^{\pi/2}-1)/2$. **1531.** $(\ln 3-1)/2$. **1532.** $\ln 1{,}5$. **1533.** 0. **1534.** 2/5. **1535.** $\pi/2$. **1536.** $\ln(4/3)$. **1537.** $(e^{\pi/2}-1)/2$. **1538.** 0. **1539.** $\pi/2-1$. **1546.** $\pi^2/8$. **1547.** $\pi/4$. **1548.** 256/15. **1549.** π. **1550.** $+\infty$. **1551.** 1/4. **1552.** $\pi/6$. **1559.** Diverge. **1560.** Converge. **1561.** Diverge. **1562.** Converge. **1563.** Diverge. **1564.** Converge. **1565.** Diverge. **1569.** 4,5 (unidades cuadradas). **1570.** 18 (unidades cuadradas). **1571.** 2/15 (unidades cuadradas). **1572.** $(41/2)\times\times\operatorname{arcsen}(9/41)+20\ln 0{,}8$ (unidades cuadradas). **1573.** $\sqrt{2}-1$ (unidades cuadradas). **1574.** 8 (unidades cuadradas). **1575.** $(9\pi/4)-\sqrt{2}+4\sqrt{2}\ln 2-(9/2)\operatorname{arcsen}(1/3)$ (unidades cuadradas). **1576.** 169π (unidades cuadradas). **1577.** $(3/8)\pi a^2$. **1578.** $8\sqrt{3}/3$ (unidades cuadradas). **1579.** $(3/2)\pi a^2$. **1580.** $(3\pi-8)/32$ (unidades cuadradas). **1581.** $\pi a^2/12$. **1582.** $\pi/3+\sqrt{3}/2$ (unidades cuadradas). **1586.** $(1/2)\ln 3$. **1587.** $(20/9)\sqrt{5/3}$. **1588.** $0{,}5[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **1589.** $(1/2)\ln 3$. **1590.** $\operatorname{sh} 1\approx 1{,}17$. **1591.** 12. **1592.** $\sqrt{2}\times(\pi-1)$. **1593.** 5π. **1594.** 72. **1595.** $[(\pi^2+4)\sqrt{\pi^2+4}-8]/3$. **1596.** πa. **1597.** $a(2\pi+3\sqrt{3})/8$. **1598.** 8. **1601.** $16\pi(5\pi+8)/5$ (unidades cúbicas). **1602.** $0{,}3\pi$ (unidades cúbicas). **1603.** $\pi(e^2+1)/4$ (unidades cúbicas). **1604.** $4\pi/35$ (unidades cúbicas). **1605.** 72 (unidades cúbicas). **1606.** $2a^2h/3$.

1607. $\pi r^2h/2$. **1609.** $\pi(e^2-e^{-2}+4)$ (unidades cuadradas). **1610.** $61\pi/1728$ (unidades cuadradas). **1611.** $2\pi b[b+(a^2/c^2)\operatorname{arcsen}(c/a)]$, donde $c^2=a^2-b^2$. **1612.** $64\pi/3$ (unidades cuadradas). **1617.** $M_x=a^2(e^2-e^{-2}+4)/8$; $I_x=a^3\times(e-e^{-1})(e^2+e^{-2}+10)/24$. **1618.** $M_a=ah^2/6$; $I_a=ah^3/12$. **1619.** $I_x==1628/105$. **1620.** $I_x=ab^3/12$; $I_y=a^3b/12$. **1621.** $I_0=\pi d^4/32$. **1626.** $\bar{x}=0$, $\bar{y}=2r/\pi$ (para la circunferencia); $\bar{x}=0$, $\bar{y}=4r/(3\pi)$ (para el semicírculo). **1627.** $\bar{x}=(\pi-2)/2$, $\bar{y}=\pi/8$. **1628.** $\bar{x}=0$, $\bar{y}=8/5$. **1629.** $\bar{x}=\bar{y}=2a/5$. **1630.** $\bar{x}=1$, $\bar{y}=2/5$. **1631.** $\bar{x}=1$, $\bar{y}=\pi/8$. **1632.** $\pi r^3(3\pi-4)/3$. **1634.** 480π (unidades cúbicas). **1643.** $\pi\rho g r^2h^2/4$. **1644.** $\pi\rho g a d^3/8$. **1645.** $51\,450\pi$j. **1646** $547{,}8\pi$ J. **1647.** 50,7 J. **1648.** $\rho g a h^2/3$. **1649.** $17{,}64\pi$ kN; $70{,}56\pi$ kN; $158{,}76\pi$ kN; $282{,}24\pi$ kN; **1650.** $\rho g\pi d^3/8$. **1651.** 150 kg. **1652.** 1400 m. **1653.** $x=e^{10}$. **1654.** 36 m. **1663.** 1) $y'=\operatorname{sh} x/\sqrt{\operatorname{ch}^2 x+1}$; 2) $y'=\operatorname{sh}^2(x/15)\operatorname{sh}^3(x/15)$; 3) $y'=1/\operatorname{ch} x$; 4) $y'=1/\operatorname{ch}^6 x$; 5) $y'=1/\operatorname{ch} x$; 6) $y'=x/\operatorname{sh}(x^2/2)$. **1664** $M[\ln(1+\sqrt{2});\ \sqrt{2}]$. **1665.** $y_{\min}=0$ si $x=0$. **1666.** 1) $x^2\operatorname{sh} x-2x\operatorname{ch} x++2\operatorname{sh} x+C$; 2) $(1/32)\operatorname{sh} 4x-(1/4)\operatorname{sh} 2x+6x+C$; 3) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ch} x-1}++C$; 4) $(1/2)(\operatorname{ch} x\operatorname{sen} x-\operatorname{sh} x\cos x)+C$; 5) $\operatorname{th}^2(x/2)+C$; 6) $(3/5)\operatorname{ch}^5(x/3)-\operatorname{ch}^3(x/3)+C$. **1667.** 1) $\pi/6$; 2) $\ln 2-0{,}6$; 3) $2(2\ln 3-1)/3$. **1668.** $\operatorname{sh}(x-a)=\operatorname{sh} x\ \operatorname{ch} a-\operatorname{ch} x\ \operatorname{sh} a$; $\operatorname{ch}(x-a)=\operatorname{ch} x\ \operatorname{ch} a-\operatorname{sh} x\operatorname{sh} a$. **1669.** $\operatorname{th}(x+a)=(\operatorname{th} x+\operatorname{th} a)/(1+\operatorname{th} x\operatorname{th} a)$; $\operatorname{th}(x-a)=(\operatorname{th} x-\operatorname{th} a)/(1-\operatorname{th} x\operatorname{th} a)$; $\operatorname{th} 2x=2\operatorname{th} x/(1+\operatorname{th}^2 x)$. **1670.** $\operatorname{sh}(x/2)=\pm\sqrt{(\operatorname{ch} x-1)/2}$; $\operatorname{ch}(x/2)=\sqrt{(\operatorname{ch} x+1)/2}$; $\operatorname{th}(x/2)=\pm\sqrt{(\operatorname{ch}) x-1)/(\operatorname{ch} x+1)}$. **1671.** $2\operatorname{sh}\times\times(x\pm y)/2\cdot\operatorname{ch}(x\pm y)/2$; $2\operatorname{ch}(x+y)/2\cdot\operatorname{ch}(x-y)/2$; $2\operatorname{sh}(x+y)/2\times\operatorname{sh}(x-y)/2$; $\operatorname{sh}(x\pm y)/(\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ch} y)$. **1672.** $\operatorname{sh} x=2\operatorname{th}(x/2)/[1-\operatorname{th}^2(x/2)]$; $\operatorname{ch} x=[1+\operatorname{th}^2(x/2)]/[1-\operatorname{th}^2(x/2)]$. **1673.** $(1/2)\cdot[\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y]$; $(1/2)\cdot[\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)]$; $(1/2)\cdot[\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y)]$. **1674.** 8/5 (unidades cuadradas). **1675.** 1, 17a. **1676.** $a^2(t_2-t_1)/2$. **1677.** El arco de la elipse situado sobre el eje de las abscisas. **1678.** La semirrecta $x - y - 1 = 0$ situada en el cuadrante I. **1679.** $\cos\alpha = \pm 1/\operatorname{ch} t$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm \operatorname{sh} t$. **1680.** 1. **1681.** $x^2 - y^2$.

Capítulo XI

1692. Bajo la recta $x_1 - x_2 - 10 = 0$. **1693.** Triángulo. **1694.** Campo infinito. **1695.** Campo vacío. **1696.** Punto (2; 3). **1697.** El campo de solución es el trapecio, la desigualdad (e) puede ser eliminada. **1698.** Pirámide triangular. **1699.** Prisma de tres caras. **1704.** $L_{max} = 10$, cuando $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. **1705.** $L_{min} = -4$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. **1706.** $L_{max} = 18$, cuando $x_1 = 6$, $x_2 = 0$. **1707.** $L_{max} = 2$, cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. **1708.** $L_{max} = 48$ en cada punto del segmento AB, donde A (6; 0), B (7; 4). **1709.** $L_{min} = -4$, cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. **1710.** $L_{max} = 33$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 9$. **1711.** $L_{max} = 20$ cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. **1718.** (0, 1, 3, 0); $L = -3$. **1719.** (3/2, 0, 0, 1/2, 11/2); $L = 3/2$. **1720.** (0, 3, 1, 0), $L = -1$. **1721.** (0, 50, 30, 215/6); $L = 340$. **1722.** (0, 5, 3/2, 0, 0, 3/2); $L = -5$. **1723.** $L = \infty$. **1724.** (0, 4/5, 1/5); $L = -11/5$. **1725.** (80, 120); $L_{max} = 440$. **1726.** (20, 40); $L_{max} = 220$. **1727.** 15 kg de forraje de especie I; 50 kg de forraje de especie II. **1729.** (5, 7, 9, 7/2, 0, 0); $L_{max} = 38$. **1731.** $L_{min} = 86/9$; (10/9; 28/9); $T_{max} = 86/9$; (7/27, 8/27). **1732.** $L_{max} = 216/7$; (24/7, 34/7); $T_{min} = 216/7$; (8/7, 1/7). **1733.** $L_{min} = 78/7$; (10/7, 16/7), $T_{max} = 78/7$; (27/14, 3/14). **1735.** $L_{min} = 510$ rublos; $x_{11} = 30$, $x_{12} = 60$, $x_{21} = 30$, $x_{23} = 60$. **1736.** $L_{min} = 280$ rublos. Plan óptimo: $x_{12} = x_{24} = x_{33} = 60$, $x_{23} = 20$, $x_{31} = 40$. **1737.** $L_{min} = 395$ rublos. Plan óptimo: $x_{11} = 25$, $x_{13} = x_{32} = 20$, $x_{12} = x_{21} = 5$, $x_{23} = 35$. **1738.** $L_{min} = 140$ rublos. Plan óptimo: $x_{14} = x_{22} = 10$, $x_{23} = x_{31} = x_{34} = 5$, $x_{33} = 15$.

Están en la venta

Artobolevski I.

Mecanismos en la técnica moderna

En 6 tomos

El manual del académico I. Artobolevski está dedicado a los mecanismos, en la *constitución de los cuales entran sistemas eléctricos. Se describen mecanismos* eléctricos y complejos, así como de palancas y dentados. Los mecanismos se dan con las indicaciones correspondientes de sus estructuras y los movimientos reproducidos por ellos. Para algunos mecanismos se brinda información de su cinemática, con respecto a las proporciones métricas de sus partes, etc. Las *representaciones esquemáticas de los mecanismos y sus descripciones*, en la medida de lo posible, se ofrecen del mismo modo que en los tomos precendentes del manual.

Como base de la sistemática de los mecanismos descritos se introduce la clasificación estructural-constructiva con indicación paralela del destino funcional de los *mecanismos. Para mayor comodidad en el manejo del texto se insertan dos* tablas indicadoras, con ayuda de las cuales se pueden fácilmente hallar los mecanismos que respondan a las exigencias de estructura y funcionalidad. Además, se tiene indicador alfabético de los mecanismos, impreso de acuerdo con el principio de sus destinos funcionales.

El manual está destinado a ingenieros, constructores, científicos investigadores, docentes y estudiantes de institutos de enseñanza superior.

Guerásimov Ya. y otros

Curso de química física

En dos tomos

El libro está escrito por un colegio de çientíficos encabezado por el miembro-correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS, profesor Ya. Guerásimov. En el líbro se estudian los fundamentos de la termodinámica, la termodinámica de soluciones, el equilibrio químico (termodinámica química), los equilibrios de fase heterogéneos, los fenómenos superficiales, la absorción.
En el suplemento se dan constantes físicas universales, tablas de las principales propiedades termodinámicas de algunas combinaciones químicas en las condiçiones estandartizadas, coeficientes de ecuaciones de Tiómkin y Shwarzman, *funciones termodinámicas de* Planck-Einstéin y Debye.
En el segundo tomo se estudian detalladamente la cinética de las reacciones químicas, los fundamentos de la teoria cinético-molecular y su aplicación a las reacciones bimoleculares, la teoría del complejo activado (del estado de transiçión), la teoría de la catálisis y la electroquímica. Los autores exponen el material de manera accesible, poniendo de relieve la interrelación de los fenómenos. El material de la obra, expuesto con claridad y plenitud, tiene gran número de ejemplos de cálculo, así como tablas y gráficas que caracterizan el curso de los procesos y las propiedades físicas y químicas de las diferentes sustancias. Este libro se recomienda a los estudiantes y postgraduados de facultades de química, así como a profesores de química física. Está traducida a otros idiomas.

Kotliakov V.

En los glaciares del Pamir

Una de las corrientes más importantes de las ciencias modernas es la geología, la cual incluye el estudio: de la glaciación, de los valles y de los montes, de las oscilaciones de los glaciares en relación con las variaciones del clima, del equilibrio de la masa, de los procesos del intercambio de calor y de la predicción de su régimen.

Desde «el Año geofísico internacional» (1957-59) realizan los científicos soviéticos un trabajo muy importante y complicado referente al estudio, catalogación y cartografía de los fenómenos glaciales y de nieve en las Tierras Antárticas y Articas: así mismo se hicieron expediciones a las regiones glaciales de los montes en el territorio de la Unión Soviética.

Una de estas expediciones se describe en el libro «En los glaciares del Pamir» de V. Kotliakov, conocido glaciólogo soviético, miembro-correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS. El autor, participante de la expedición, expone a un elevado nivel científico, en una forma concisa y al mismo tiempo comprensible, los principales problemas de la glaciología moderna y su solución tomando como un ejemplo concreto el Pamir. Las cuestiones tratadas en el libro son muy urgentes ya que abarcan una de las tareas más importanres de la actualidad: abastecimiento de agua a las zonas premontañosas áridas. Este problema es muy importante para los habitantes de muchos países de Europa, Asia y América donde los glaciares en los montes, por un lado, representan grandes reservas potenciáles de agua y, por otro lado, pueden causar las crecidas peligrosas de agua y de hielo. Además el libro les brinda a los lectores de otros países la posibilidad de conocer la organización y los métodos de trabajo empleados en una expedición científica alpina así como la historia del descubrimiento del Pamir, su naturaleza y a los pueblos que habitan esta región.

Makienko N.

Manual del ajustador

Este libro, escrito por el ingeniero soviético Nikolai Makienko, da las nociones necesarias para: organizar el puesto de trabajo del ajustador; habla sobre la tecnología de las operaciones generales (corte de metal, taladrado, trazado, concelado, afilado, enderezado, etc.), la herramienta, los dispositivos y los utencillos empleados en estas labores.
La obra examina también los procesos tecnológicos de la fabricación de herramientas y los problemas que conlleva la mecanización de los trabajos del ajustador. El libro trata con bastante detalle los fundamentos de la metalografía, es deçir, se dan las nociones necesarias sobre los metales y aleaciones, sus propiedades, los medios usados para su obtención, la tecnologia de tratamiento y el campo de su aplicación.
Es libro de texto para escuelas técnicas profesionales, así como también para la preparación de obreros.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Diríjan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.