P.E. DANKÓ. A.G. POPOV. T.YA. KOZHÉVNIKOVA

MATEMÁTICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

2

PARTE

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Matemáticas superiores en ejercicios y problemas

П. Е. Данко,
А. Г. Попов,
Т. Я. Кожевникова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

II

ЧАСТЬ

Издательство
«Высшая школа»
Москва

P.E. DANKÓ,
A.G. POPOV,
T.YA. KOZHÉVNIKOVA

MATEMÁTICAS SUPERIORES EN EJERCICIOS Y PROBLEMAS

En dos partes

2
parte

EDITORIAL · MIR ·
MOSCÚ

Traducido del ruso por
A.I. Samojválov

Primera edición, 1983
Primera reimpresión, 1990

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-00164-5
ISBN 5-03-00162-9

Índice

Capítulo I. Integrales dobles y triples

§ 1. Integral doble en coordenadas rectangulares

Supongamos que la función $f(x, y)$ está definida en una región cerrada acotada D del plano xOy. Dividimos arbitrariamente la región D en n regiones elementales que tienen las áreas $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ y los diámetros $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (se llama *diámetro de una región* a la mayor de las distancias entre dos puntos de la frontera de esta región). Escogemos en cada región elemental un punto arbitrario $P_k(\xi_k; \eta_k)$ y multiplicamos el valor de la función en el punto P_k por el área de esta región.

Se denomina *suma integral* para la función $f(x, y)$ de la región D a la suma que tiene la forma siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k = f(\xi_1, \eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2)\Delta\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n, \eta_n)\Delta\sigma_n.$$

Se llama *integral doble* de la función $f(x, y)$ de la región D al límite de la suma integral a condición de que el mayor entre los diámetros de las regiones elementales tienda a cero:

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k.$$

Si la función $f(x, y)$ es continua en la región cerrada D, el límite de la suma integral existe y no depende del procedimiento de división de la región D en regiones elementales y de la selección de los puntos P_k (*teorema de existencia* de una integral doble).

Si $f(x, y) > 0$ en la región D, entonces la integral doble $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$ es igual al *volumen del cuerpo cilíndrico* limitado de arriba por la superficie $z = f(x, y)$, de costado por la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Oz y de abajo por la región D del plano xOy.

Propiedades principales de una integral doble

1ª. $\iint\limits_D [f_1(x, y) \pm f^2(x, y)]\,d\sigma = \iint\limits_D f_1(x, y)\,d\sigma \pm \iint\limits_D f_2(x, y)\,d\sigma.$

2ª. $\iint\limits_D c\cdot f(x, y)\,d\sigma = c\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$, donde c es una constante.

3ª. Si la región de integración D está dividida en dos regiones D_1 y D_2, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\, d\sigma.$$

En las coordenadas cartesianas la integral doble se suele escribir en la forma $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$.

Reglas de cálculo de las integrales dobles

Se distinguen dos tipos principales de regiones de integración.

1. La región de integración D está limitada de los lados izquierdo y derecho por las rectas $x = a$ y $x = b$ $(a < b)$ y de abajo y de arriba por las líneas curvas continuas $y = \varphi_1(x)$ e $y = \varphi_2(x)$ $[\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)]$ cada una de las cuales se interseca con la recta vertical sólo en un punto (fig. 1).

Para una región así la integral doble se calcula por la fórmula

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy,$$

además, primeramente se calcula la integral $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$ en la cual x se considera constante.

2. La región de integración D está limitada de abajo y de arriba por las rectas $y = c$ e $y = d$ $(c < d)$ y del lado izquierdo y del lado derecho por las

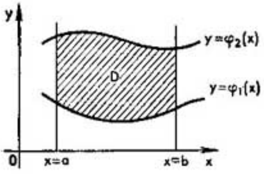

Fig. 1

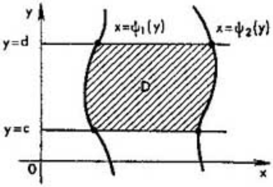

Fig. 2

líneas curvas continuas $x = \psi_1(y)$ y $x = \psi_2(y)$ $[\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)]$ cada una de las cuales se interseca por la recta horizontal sólo en un punto (fig. 2).

Para una región así la integral doble se calcula por la fórmula

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx,$$

además, primeramente se calcula la integral $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx$ en la cual y se considera constante.

Los segundos miembros de las fórmulas indicadas se llaman integrales *dobles* (o *reiteradas*).

En un caso más general la región de integración por medio de la división por partes se reduce a las principales.

1. Calcular $\iint\limits_D x \ln y \, dx \, dy$ si la región D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 4$, $1 \leqslant y \leqslant e$.

Resolución. Tenemos

$$\iint\limits_D x \ln y \, dx \, dy = \int\limits_0^4 x \, dx \int\limits_1^e \ln y \, dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 \cdot [y \ln y - y]_1^e = 8 \cdot (e - e + 1) = 8.$$

2. Calcular $\iint\limits_D (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 y) \, dx \, dy$ si la región D es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/4$.

Resolución. Hallamos

$$\iint\limits_D (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 y) \, dx \, dy = \int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\pi/4} (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 y) \, dy = \int\limits_0^{\pi/4} \left[y \cos^2 x + \frac{y}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2y \right]_0^{\pi/4} dx = \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{\pi}{4} \cos^2 x - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) dx = \left[\frac{\pi}{8} \left(x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) x \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}.$$

3. Calcular $I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (2x - y) \, dy$.

Resolución. Tenemos

$$I = \int\limits_1^2 \left[2xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_x^{x^2} dx = \int\limits_1^2 \left(2x^3 - \frac{1}{2} x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{2} x^3 \right]_1^2 = 0{,}9.$$

4. Calcular $\iint\limits_D (x - y) \, dx \, dy$, si la región D está limitada por las líneas $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

Resolución. Vamos a construir la región D. La primera línea es una parábola que tiene por vértice el punto $(0; 2)$, simétrica respecto al eje Oy. La segunda línea es una recta. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones $y = 2 - x^2$ e $y = 2x - 1$, determinamos las coordenadas de los puntos de intersección $A(-3; -7)$, $B(1; 1)$ (fig. 3).

La región de integración pertenece al primer tipo. Encontramos

$$\iint_D (x-y)\,dx\,dy=\int_{-3}^{1} dx\int_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)\,dy=$$

$$=\int_{-3}^{1}\left[xy-\frac{1}{2}y^2\right]_{2x-1}^{2-x^2}dx=\int_{-3}^{1}\left(2x-x^3-2+2x^2-\frac{1}{2}x^4-2x^3+\right.$$

$$\left.+x+2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx=\int_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_{-3}^{1}=4\,\frac{4}{15}.$$

5. Calcular $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$, si la región D está limitada por las rectas $y=x$, $y=2x$, $x=2$, $x=3$.

Resolución. Hallamos

$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy=\int_2^3 dx\int_x^{2x}(x+2y)\,dy=$$

$$\int_2^3 [xy+y^2]_x^{2x}\,dx=\int_2^3 (2x^2+4x^2-x^2-x^2)\,dx=4\int_2^3 x^2\,dx=\frac{3}{4}x^3\Big|_2^3=25\,\frac{1}{3}.$$

6. Calcular $\iint_D e^{x+\operatorname{sen} y}\cos y\,dx\,dy$ si la región D es un rectángulo $0\leqslant x\leqslant \pi$, $0\leqslant y\leqslant \pi/2$.

7. Calcular $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, si la región D está limitada por las líneas $y=x$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.

8. Calcular $\iint_D (3x^2-2xy+y)\,dx\,dy$, si la región D está limitada por las líneas $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

9. Cambiar el orden de integración en la integral $\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\,dy$.

Resolución. La región de integración D está limitada por las líneas $x=-1$, $x=1$, $y=-\sqrt{1-x^2}$, $y=1-x^2$ (fig. 4). Vamos a cambiar el orden de integración para lo cual representamos la región dada en forma de dos regiones (del segundo tipo): D_1 limitada de los lados izquierdo y derecho por

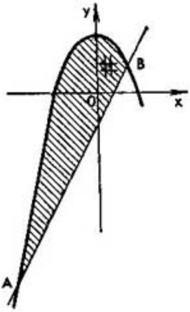

Fig. 3

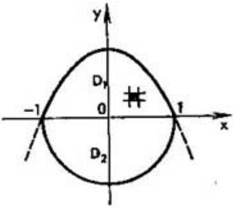

Fig. 4

las ramas de la parábola $x=\pm\sqrt{1-y}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$ y D_2 limitada por los arcos de la circunferencia $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ $(-1\leqslant y\leqslant 0)$. Entonces

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,\ y)\, dy=\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,\ y)\, dx+\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\, dx.$$

10. Calcular $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2 x\, dx \int\limits_{0}^{a} y\, dy$.

11. Calcular $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{x^2}^{x} (x-y)\, dy$.

12. Calcular $\iint\limits_{D} y \ln x\, dx\, dy$, si la región D está limitada por las líneas $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.

13. Calcular $\iint\limits_{D} (\cos 2x+\operatorname{sen} y)\, dx\, dy$, si la región D está limitada por las líneas $x=0$, $y=0$, $4x+4y-\pi=0$.

14. Calcular $\iint\limits_{D} (3x+y)\, dx\, dy$, si la región D se define por las desigualdades $x^2+y^2\leqslant 9$, $y\geqslant (2/3)\,x+3$.

15. Calcular $\iint\limits_{D} \operatorname{sen}(x+y)\, dx\, dy$, si la región D está limitada por las líneas $x=0$, $y=\pi/2$, $y=x$.

16. Calcular $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, si la región D es el triángulo que tiene por vértices A (2; 3), B (7; 2), C (4; 5).

Cambiar el orden de integración:

17. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x, y)\,dy.$

18. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x, y)\,dy.$

19. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$

20. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x, y)\,dy.$

21. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{(1-x)^2/2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$

22. $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\operatorname{sen} x} f(x, y)\,dy.$

§ 2. Cambio de variables en una integral doble

1. Integral doble en coordenadas polares. La transformación de una integral doble, haciéndola pasar de las coordenadas rectangulares x, y a *las polares* ρ, θ ligadas con las rectangulares por las relaciones $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, se lleva a cabo por la fórmula

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Si la región de integración D está limitada por dos semirrectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$ que salen del polo y por dos curvas $\rho = \rho_1(\theta)$ y $\rho = \rho_2(\theta)$, donde $\rho_1(\theta)$ y $\rho_2(\theta)$ son funciones unívocas para $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ y $\rho_1(\theta) \leqslant \rho_2(\theta)$, entonces la *integral doble se calcula por la fórmula*

$$\iint\limits_D F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho,$$

donde $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$, además, primeramente se calcula

$\int\limits_{\rho_1(\rho)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho$ en la cual θ se considera constante.

2. Integral doble en coordenadas curvilíneas. Supongamos que una integral doble se transforma pasando de las coordenadas rectangulares x, y a *las curvi-*

líneas u, v ligadas con las rectangulares por las relaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, donde las funciones $x(u, v)$ e $y(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas en la región D' del plano $uO'v$ y el *jacobiano de transformación* en la región D' no se anula:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Con ello se establece una correspondencia recíprocamente unívoca y continua en ambas direcciones entre los puntos de la región D del plano xOy y los puntos de la región D' del plano $uO'v$ (fig. 5).

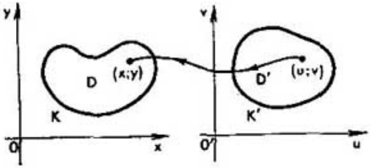

Fig. 5

En este caso la *fórmula de transformación de la integral doble* tiene el aspecto

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f[x(u,v), y(u, v)]\,|J|\,du\,dv.$$

Para el caso de las coordenadas polares

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

23. Pasando a las coordenadas polares, calcular $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ si D es el cuadrante I del círculo $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

Resolución. Haciendo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, tenemos

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{D} \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{a} \rho^2\,d\rho = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \rho^3\,\Big|_0^a\,d\theta = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi a^3}{6}.$$

24. Calcular $\iint\limits_{D} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$ si la región D es el anillo comprendido entre las circunferencias $x^2+y^2=e^2$ y $x^2+y^2=e^4$.

Resolución. Pasamos a las coordenadas polares:

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_D \ln \rho^2 \rho\,d\rho\,d\theta = 2\iint_D \rho \ln \rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_e^{e^2} \rho \ln \rho\,d\rho.$$

Tomando por partes la integral en función de ρ, obtenemos

$$2\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\rho^2 \ln \rho - \frac{1}{4}\rho^2\right]_e^{e^2} d\theta = \pi e^2(3e^2-1).$$

25. Calcular $\iint_D (x+y)^3 (x-y)^2\,dx\,dy$ si la región D es el cuadrado limitado por las rectas $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ (fig. 6).

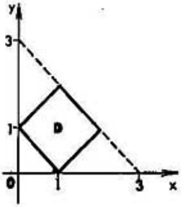

Fig. 6

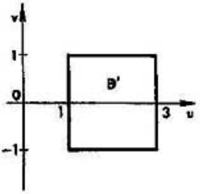

Fig. 7

Resolución. Hacemos $x+y=u$, $x-y=v$, de donde $x=(1/2)(u+v)$, $y=(1/2)(u-v)$. Entonces el jacobiano de transformación

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \quad \text{o sea} \quad |J| = \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, $\iint_D (x+y)^3 (x-y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{D'} u^3 v^2\,du\,dv$. Puesto que la región D' es también un cuadrado (fig. 7), entonces

$$\iint_D (x+y)^3 (x-y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3\,du \int_{-1}^{1} v^2\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 u^3 \cdot \left[\frac{1}{3}v^3\right]_{-1}^{1} du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^3(1+1)\,du = \frac{1}{12}u^4\Big|_1^3 = \frac{20}{3}.$$

Pasando a las coordenadas polares, calcular las integrales dobles:

26. $\iint\limits_D \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) dx\,dy$ si la región D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant \pi^2$.

27. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$ si la región D está limitada por la semicircunferencia $y=\sqrt{1-x^2}$ y el eje Ox.

28. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ si la región D está limitada por la circunferencia $x^2+y^2=2ax$.

29. $\iint\limits_D \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ si la región D está limitada por las líneas $x^2+y^2=\pi^2/9$, $x^2+y^2=\pi^2$.

30. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ si la región D está limitada por las $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=4a^2$.

31. Calcular $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} dy$, introduciendo las nuevas variables $x=u(1-v)$, $y=uv$.

32. Calcular $\iint\limits_D dx\,dy$ si la región D está limitada por las líneas $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=3x$.

Indicación: efectuar el cambio de las variables $x=(u/v)^{1/2}$, $y=(uv)^{1/2}$.

§ 3 Cálculo del area de una figura plana

El *área de la figura plana* limitada por la región D se determina por la fórmula

$$S=\iint\limits_D dx\,dy.$$

Si la región D está definida, por ejemplo, por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, entonces

$$S=\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$$

Si la región D en las coordenadas polares está definida por las desigualdades $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, $\varphi(\theta) \leqslant \rho \leqslant f(\theta)$, entonces

$$S=\iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_\alpha^\beta d\theta \int\limits_{\varphi(\theta)}^{f(\theta)} \rho\,d\rho.$$

33. Calcular el área de la figura limitada por las líneas $x=4y-y^2$, $x+y=6$.

Resolución. Hallamos las coordenadas de los puntos de intersección de las líneas dadas, resolviendo el sistema de ecuaciones $x = 4y - y^2$ y $x + y = 6$ (se recomienda hacer el dibujo por cuenta propia). Como resultado obtenemos A (4; 2), B (3; 3). Por lo tanto,

$$S = \iint_D dx\,dy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 x \,\Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy =$$

$$= \int_2^3 (-y^2+5y-6)\,dy = \left[-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y\right]_2^3 = \frac{1}{6} \quad \text{(unidades cuadradas).}$$

34. Calcular el área de la figura limitada por las circunferencias $\rho = 1$, $\rho = (2/\sqrt{3})\cos\theta$ (fuera de la circunferencia $\rho = 1$; fig. 8).

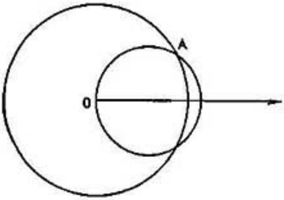

Fig. 8

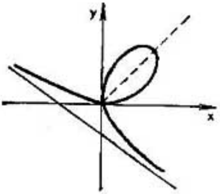

Fig. 9

Resolución. Determinamos las coordenadas del punto A; tenemos $1 = (2/\sqrt{3})\cos\theta$; $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, $\theta = \pi/6$, o sea, A $(1; \pi/6)$. Entonces

$$S = \iint_D \rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{\pi/6} d\theta \int_1^{(2/\sqrt{3})\cos\theta} \rho\,d\rho =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^{(2/\sqrt{3})\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/6} \left(\frac{4}{3}\cos^2\theta - 1\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/6} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cos 2\theta - 1\right) d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/6} (2\cos 2\theta - 1)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen} 2\theta - \theta\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{18}(3\sqrt{3} - \pi) \text{ (unidades, cuadradas)}$$

35. Hallar el área limitada por la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

Resolución. Haciendo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, llevamos la ecuación de la curva a las coordenadas polares. Como resultado obtenemos $\rho^2 = 2a^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = a^2\operatorname{sen} 2\theta$.

Es evidente que a la variación del ángulo polar θ de 0 a $\pi/4$ le corresponde un cuarto del área buscada. Por consiguiente,

$$S=4\iint\limits_{D}\rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_{0}^{\pi/4}d\theta\int\limits_{0}^{a\sqrt{\operatorname{sen}2\theta}}\rho\,d\rho=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\pi/4}\rho^2\Big|_0^{a\sqrt{\operatorname{sen}2\theta}}\,d\theta=2a^2\int\limits_{0}^{\pi/4}\operatorname{sen}2\theta\,d\theta=-a^2\cos 2\theta\Big|_0^{\pi/4}=a^2.$$

36. Hallar el área de la figura limitada por la línea $x^3+y^3=$ $=axy$ (área del bucle; fig. 9).

Resolución. Llevamos la ecuación dada a las coordenadas polares: $\rho^3(\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta)=a\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, o sea, $\rho=a\operatorname{sen}\theta\cos\theta/(\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta)$. De eje de simetría del bucle sirve la semirrecta $\theta=\pi/4$, por eso

$$S=2\iint\limits_{D}\rho\,d\rho\,d\theta=2\int\limits_{0}^{\pi/4}d\theta\int\limits_{0}^{a\operatorname{sen}\theta\cos\theta/(\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta)}\rho\,d\rho=$$

$$=a^2\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{(\operatorname{sen}^3\theta-\cos^3\theta)^2}\,d\theta=a^2\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}^2\theta\cos^4\theta}{\cos^6\theta\,(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}\,d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{3}\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{3\,\mathrm{gt}^2\theta\,(\operatorname{tg}\theta)}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=\frac{a^2}{3}\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{d\,(1+\operatorname{tg}^2\theta)}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=\left[-\frac{a^2}{3\,(1+\operatorname{tg}^2\theta)}\right]_0^{\pi/4}=\frac{a^2}{6}.$$

37. Calcular el área limitada por las líneas $x=y^2-2y$, $x+y=$ $=0$.

38. Calcular el área limitada por las líneas $y=2-x$, $y^2=$ $=4x+4$.

39. Calcular el área limitada por las líneas $y^2=4x-x^2$, $y^2=$ $=2x$ (fuera de la parábola).

40. Calcular el área limitada por las líneas $3y^2=25x$, $5x^2=9y$.

41. Calcular el área limitada por las líneas $y^2+2y-3x+1=$ $=0$, $3x-3y-7=0$.

42. Calcular el área de la figura más próxima a partir del origen de coordenadas, limitada por las líneas $y=\cos x$, $y=\cos 2x$, $y=0$.

43. Calcular el área limitada por las líneas $y=4x-x^2$, $y=$ $=2x^2-5x$.

44. Calcular el área limitada por las líneas $x=4-y^2$, $x+$ $+2y-4=0$.

45. Calcular el área limitada por las líneas $\rho=(2-\cos\theta)$, $\rho=2$ (fuera de la cardioide).

46. Calcular el área limitada por las líneas $\rho=2\,(1+\cos\theta)$, $\rho=2\cos\theta$.

47. Calcular el área limitada por las líneas $y^2=4\,(1-x)$, $x^2+y^2=4$ (fuera de la parábola).

§ 4. Cálculo del volumen de un cuerpo

El *volumen de un cuerpo cilíndrico* limitado de arriba por la superficie continua $z = f(x, y)$, de abajo por el plano $z = 0$ y del costado por la superficie cilíndrica recta que corta sobre el plano xOy la región D, se determina por la fórmula

$$V = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

48. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$ y situado en el octante I.

Resolución. El cuerpo cuyo volumen se ha de calcular está limitado de arriba por el plano $z = 3x$, del costado por el cilindro parabólico $y = 1 + x^2$ y el plano $y = 5$. Por lo tanto, es un cuerpo cilíndrico. La región D está limitada por la parábola $y = 1 + x^2$ y las rectas $y = 5$ y $x = 0$. Por consiguiente, tenemos

$$v = \iint_D 3x\, dx\, dy = 3\int_0^2 x\, dx \int_{1+x^2}^5 dy = 3\int_0^2 x \cdot [y]_{1+x^2}^5\, dx =$$

$$= 3\int_0^2 (4x - x^3)\, dx = 3\left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 12 \text{ (unidades cúbicas).}$$

49. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = 1 - x^2 - y^2$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $z = 0$ y situado en el octante I.

Resolución. El cuerpo dado está limitado de arriba por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. La región de integración D es un sector circular limitado por el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que no es más que la línea de intersección del paraboloide con el plano $z = 0$ y las rectas $y = x$ e $y = x\sqrt{3}$. Por consiguiente

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Puesto que la región de integración es una parte del círculo y la función subintegral depende de $x^2 + y^2$, es racional pasar a las coordenadas polares. La ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en estas coordenadas tomará la forma $\rho = 1$, la función subintegral es igual a $1 - \rho^2$ y los límites de integración respecto a θ los determinamos a partir de las ecuaciones de las rectas: $k_1 = \operatorname{tg}\theta_1 = 1$, o sea, $\theta_1 = \pi/4$; $k_2 = \operatorname{tg}\theta_2 = \sqrt{3}$, o sea, $\theta_2 = \pi/3$. De este modo, tenemos

$$V = \iint_D (1 - \rho^2)\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_0^1 (\rho - \rho^3)\, d\rho =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta = \frac{\pi}{48} \text{ (unidades cúbicas)}$$

50. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$.

Resolución. Examinemos la octava parte del cuerpo dado (fig. 10):

$$\frac{1}{8}V = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy =$$

$$= \int\limits_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{2}{3}a^3.$$

Por lo tanto, $V = 16a^3/3$.

51. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 4$.

52. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x = 2y^2$, $x + 2y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$.

53. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2 + 4y^2 + z = 1$, $z = 0$.

54. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

55. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = 4 - x^2$, $2x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

56. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z^2 = xy$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 4$.

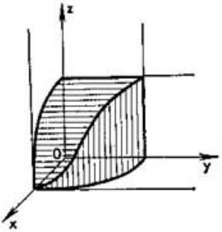

Fig. 10

57. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = 5x$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$.

58. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x + y + z = 6$, $3x + 2y = 12$, $3x + y = 6$, $y = 0$, $z = 0$.

59. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = x + y + 1$, $y^2 = x$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

60. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = 0$, $z = xy$, $x^2 + y^2 = 4$.

61. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $y = 0$, $z = x/2$, $z = x$.

§ 5. Cálculo del área de una superficie

Si una superficie lisa unívoca está definida por la ecuación $z = f(x, y)$, entonces el *área de la superficie* se expresa por la fórmula

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

donde D es la proyección de la superficie dada sobre el plano xOy. Análogamente, si la superficie está definida por la ecuación $x = f(y, z)$, entonces

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{dz}\right)^2}\, dy\, dz,$$

donde D es la proyección de la superficie sobre el plano yOz; si la ecuación de la superficie tiene la forma $y = f(x, z)$, entonces

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz,$$

donde D es la proyección de la superficie sobre el plano xOz.

62. Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, comprendida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$ (fig. 11).

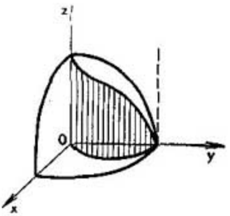

Fig. 11

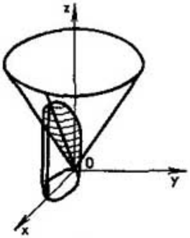

Fig. 12

Resolución. De la ecuación de la esfera tenemos (para el octante I):

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2+x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

La parte de la esfera situada en el octante I se proyecta en el semicírculo limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = ay$ y el eje Oy. Este semicírculo es precisamente la región de integración D.

La superficie está situada en cuatro octantes y por eso la superficie buscada

$$S=4a\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Pasamos a las coordenadas polares, entonces la ecuación de la circunferencia toma la forma $\rho = a \operatorname{sen} \theta$ y

$$S = 4a \iint_D \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = 4a \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \operatorname{sen} \theta} \frac{\rho\, d\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}} =$$

$$= -4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-\rho^2}\,\Big|_0^{a \operatorname{sen} \theta} d\theta = -4a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos\theta - 1)\, d\theta =$$

$$= -4a^2 [\operatorname{sen}\theta - \theta]_0^{\pi/2} = 4a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \text{ (unidades cuadradas).}$$

63. Hallar el área de la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ comprendida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ (fig. 12).

Resolución. De la ecuación del cono tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. La región de integración D es el círculo limitado por la cincunferencia $x^2+y^2=2x$, o bien $\rho = 2\cos\theta$.
Entonces

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \sqrt{2} \iint_D dx\, dy = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho\, d\rho =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_2^{\pi/2} \frac{1}{2} \rho^2 \,\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 4\cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = 2\sqrt{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \pi\sqrt{2} \text{ (unidades cuadradas).}$$

64. Calcular el área de la superficie del cilindro $x^2 = 2z$ cortada por los planos $x - 2y = 0$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$ (fig. 13).

Resolución. De región de integración sirve el triángulo OAB. De la ecuación del triángulo tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} = x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Entonces

$$S = \iint_D \sqrt{1+x^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\, dx \int_{x/2}^{2x} dy =$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{3}{2} x \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{2\sqrt{2}} (1+x^2)^{1/2}\,d(1+x^2) =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^{2\sqrt{2}} = 13 \text{ (unidades cuadradas).}$$

65. Calcular el área de la parte de la superficie del paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ cortada por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$.

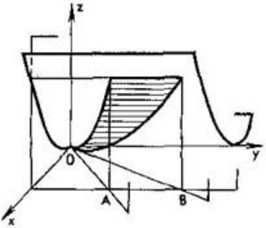

Fig. 13

Resolución. La región de integración es la circunferencia $y^2 + z^2 = 1$ (situada en el plano yOz). De la ecuación del paraboloide tenemos $\frac{\partial x}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial x}{\partial z} = -2z$. Entonces

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz = \iint_D \sqrt{1 + 4(y^2+z^2)}\,dy\,dz.$$

Pasando a las coordenadas polares, obtenemos

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+4\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \frac{5\sqrt{5}-1}{12}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi \text{ (unidades cuadradas).}$$

66. Hallar el área de la parte de la superficie $y = x^2 + z^2$ cortada por el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y situada en el octante I.

67. Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ cortada por el cilindro $x^2/4 + y^2 = 1$.

68. Hallar el área de la parte del plano $z = x$ encerrada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ por encima del plano $z = 0$.

69. Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro $z = x^2$ cortada por los planos $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$.

70. Calcular el área de la superficie del cono $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

71. Calcular el área de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

72. Hallar el área de la parte de la superficie $z^2 = 2xy$ cortada por los planos $x = 1$, $y = 4$, $z = 0$.

§ 6. Aplicaciones de la integral doble

Si una placa ocupa la región D del plano xOy y tiene una densidad superficial variable $\gamma = \gamma(x, y)$, entonces la *masa* M de la placa se expresa por la integral doble:

$$M = \iint_D \gamma(x, y)\, dx\, dy.$$

Los *momentos estáticos* de la placa respecto a los ejes Ox y Oy se determinan por las fórmulas

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y)\, dx\, dy, \qquad M_y = \iint_D x\gamma(x, y)\, dx\, dy.$$

Si la placa es homogénea, $\gamma = \text{const.}$

Las *coordenadas del centro de gravedad* de la placa se pueden determinar por las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M},$$

donde M es la masa de la placa y M_x, M_y, los momentos estáticos de ésta respecto a los ejes de las coordenadas.

Si la placa es homogénea, estas fórmulas adoptan la forma

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x\, dx\, dy}{S}, \qquad \bar{y} = \frac{\iint\limits_D y\, dx\, dy}{S},$$

donde S es el área de la región D.

Los *momentos de inercia* de la placa *respecto a los ejes* Ox y Oy se determinan por las fórmulas

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x, y)\, dx\, dy, \qquad I_y = \iint_D x^2\gamma(x, y)\, dx\, dy$$

y el *momento de inercia respecto al origen de las coordenadas* se calcula por la fórmula

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\,\gamma(x, y)\, dx\, dy = I_x + I_y.$$

Haciendo en estas fórmulas $\gamma(x, y) = 1$, obtendremos las expresiones para calcular los momentos geométricos de inercia de una figura plana.

73. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las líneas $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$ (fig. 14).

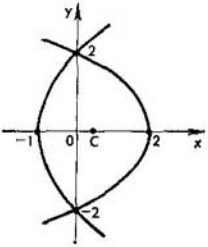

Fig. 14

Resolución. Puesto que la figura es simétrica respecto al eje Ox, $\bar{y} = 0$. Queda hallar $\bar{x}$.

Determinamos el área de la figura dada:

$$S=\iint_D dx\,dy=2\int_0^2 dy\int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} dx=$$

$$=2\int_0^2\left(\frac{4-y^2}{2}-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=2\int_0^2\left(3-\frac{3y^2}{4}\right)dy=6\left[y-\frac{1}{12}y^3\right]_0^2=8.$$

Entonces

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{1}{8}\cdot 2\int_0^2 dy\int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2\left[\frac{1}{4}(4-y^2)^2-\frac{1}{16}(y^2-4)^2\right]dy=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2\left(3-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{16}y^4\right)dy=\frac{1}{8}\left[3y-\frac{y^3}{2}+\frac{3y^5}{80}\right]_0^2=\frac{2}{5}.$$

74. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la elipse $x^2/25 + y^2/9 = 1$ y su cuerda $x/5 + y/3 = 1$.

Resolución. Hallamos el área del segmento:

$$S=\iint_D dx\,dy=\int_0^5 dx\int_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} dy=$$

$$=\int_0^5\left(\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}-3+\frac{3}{5}x\right)dx=\frac{15}{4}(\pi-2).$$

Entonces

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int_0^5 x\,dx\int_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} dy=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\int_0^5\left[\frac{3}{5}x\sqrt{25-x^2}-3x\left(1-\frac{x}{5}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\left[-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(25-x^2)^{3/2}-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{5}\right]_0^5=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\left(25-\frac{75}{2}+25\right)=\frac{10}{3(\pi-2)};$$

$$\bar{y}=\frac{1}{S}\iint_D y\,dx\,dy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int_0^5 dx\int_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} y\,dy=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\cdot\frac{1}{2}\int_0^5\left[\frac{9}{25}(25-x^2)-9\left(1-\frac{x}{5}\right)^2\right]dx=$$

$$=\frac{2\cdot 9\cdot 2}{15(\pi-2)\cdot 25}\int_0^5(5x-x^2)\,dx=\frac{12}{125(\pi-2)}\left[\frac{5x^2}{2}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^5=$$

$$=\frac{12}{125(\pi-2)}\left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right)=\frac{2}{\pi-2}.$$

75. Calcular el momento polar de inercia de la figura limitada por las líneas $x/a+y/b=1$, $x=0$, $y=0$.

Resolución. El momento de inercia respecto al origen de coordenadas es igual a

$$I_0=\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^a dx\int_0^{(b/a)(a-x)}(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\int_0^a\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^{(b/a)(a-x)}dx=\int_0^a\left[\frac{b}{a}x^2(a-x)+\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}(a-x)^3\right]dx=$$

$$=\left[\frac{1}{3}bx^3-\frac{b}{4a}x^4-\frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdot\frac{1}{4}(a-x)^4\right]_0^a=\frac{ab(a^2+b^2)}{12}.$$

76. Calcular el momento de inercia de la figura, limitada por la cardioide $\rho=a(1+\cos\theta)$, con respecto al eje Ox.

Resolución. Pasando a las coordenadas polares en la fórmula $I_x = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy$, obtenemos

$$I_x = \iint\limits_D \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \rho \, d\rho \, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta \int\limits_0^{a(1+\cos\theta)} \rho^3 \, d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \cdot \frac{1}{4}\rho^4 \Big|_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta = \frac{1}{4} a^4 \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta (1+\cos\theta)^4 \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4} a^4 \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta (1 + 4\cos\theta + 6\cos^2\theta + 4\cos^3\theta + \cos^4\theta) \, d\theta = \frac{21}{32}\pi a^4.$$

77. Determinar el centro de gravedad del área limitada por las líneas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$.

78. Determinar el centro de gravedad del área limitada por la cardioide $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

79. Determinar el centro de gravedad del semisegmento de la parábola $y^2 = ax$ cortado por las rectas $x = a$, $y = 0$ $(y > 0)$.

80. Hallar el centro de gravedad del área limitada por un bucle de la curva $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$.

81. Hallar el centro de gravedad del área limitada por las parábolas $y^2 = x$, $x^2 = y$.

82. Hallar el centro de gravedad del área limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $x = 2p$.

83. Hallar el centro de gravedad del área limitada por las líneas $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$.

84. Calcular el momento de inercia del área, limitada por las líneas $y = 2\sqrt{x}$, $x + y = 3$, $y = 0$, con respecto al eje Ox.

85. Calcular el momento polar de inercia del área limitada por las rectas $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

86. Calcular el momento de inercia del área limitada por las líneas $y = 4 - x^2$, $y = 0$, con respecto al eje Ox.

87. Calcular el momento de inercia del área de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, con respecto a su eje mayor.

88. Calcular la masa de una placa cuadrada de lado a, cuya densidad en un punto cualquiera es proporcional al cuadrado de la distancia entre este punto y uno de los vértices del cuadrado.

89. Calcular la masa de una placa circular de radio r si su densidad es inversamente proporcional a la distancia entre un punto y el centro y es igual a δ en el borde de la placa.

90. Calcular el momento estático de una placa, que tiene forma del triángulo rectángulo con catetos $|OA| = a$, $|OB| = b$, respecto al cateto OA, si la densidad de la placa en un punto cualquiera es igual a la distancia entre el punto y el cateto OA.

§ 7. Integral triple

Sea que la función $f(x, y, z)$ está definida en una región cerrada limitada T. Dividimos arbitrariamente la región T en n regiones elementales $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de diámetros $d_1, d_2, \ldots, d_n$ y volúmenes $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. Tomamos en cada región elemental un punto arbitrario $P_k(\xi_k; \eta_k; \zeta_k)$ y multiplicamos el valor de la función en el punto P_k por el volumen de esta región.

Se llama *suma integral* para la función $f(x, y, z)$ de la región T a la suma que tiene la forma $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta V_k$.

Se denomina *integral triple* de la función $f(x, y, z)$ de la región T al límite de la suma integral, a condición de que el mayor entre los diámetros de las regiones elementales tienda a cero:

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dV = \lim_{\text{máx}\, d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta V_k.$$

Para la función continua en la región T este límite existe y no depende del procedimiento de división de la región T en regiones elementales ni de la selección de los puntos P_k (*teorema de existencia* de una integral triple).

Si $f(x, y, z) > 0$ en la región T, entonces la integral triple $\iiint_T f(x, y, z)\,dV$ no es más que la *masa* del cuerpo que ocupa la región T y tiene una densidad variable $\gamma = f(x, y, z)$ (interpretación física de la integral triple).

Las propiedades principales de las integrales triples son análogas a las de las integrales dobles.

En las coordenadas cartesianas la integral triple se suele escribir en la forma $\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$.

Sea que la región de integración T se define por las desigualdades $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$, donde $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$ y $z_2(x, y)$ son funciones continuas. Entonces la integral triple de la función $f(x, y, z)$, extendida sobre la región T, se calcula por la fórmula

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Si para calcular una integral triple se necesita pasar de las variables x, y, z a las nuevas variables u, v, w ligadas con x, y, z por las relaciones $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, donde las funciones $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ son continuas junto con sus derivadas parciales de primer orden, establecen una correspondencia recíprocamente unívoca y continua en ambas direcciones entre los puntos de la región T del espacio $Oxyz$ y los puntos de cierta región T' del espacio $Ouvw$ y el jacobiano J en la región T' no se anula

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces se usa la fórmula

$$\iiint_T f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint_{T'} f[x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w)]\cdot|J|\,du\,dv\,dw.$$

En particular, al pasar de las coordenadas cartesianas x, y, z a las *coordenadas cilíndricas* ρ, φ, z (fig. 15) ligadas con x, y, z por las relaciones

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ z=z\ (0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\varphi<2\pi,\ -\infty<z<+\infty),$$

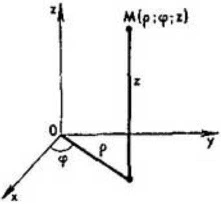

Fig. 15

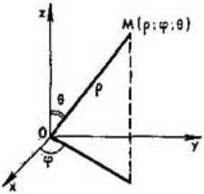

Fig. 16

el jacobiano de transformación $J=\rho$, y la *fórmula de transformación de la integral triple, representándola en las coordenadas cilíndricas*, tiene la forma

$$\iiint_T f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{T'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Al pasar de las coordenadas cartesianas x, y, z a las *coordenadas esféricas* ρ, φ, θ (fig. 16) ligadas con x, y, z por las relaciones

$$x=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\quad z=\rho\cos\theta$$
$$(0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant\theta<\pi),$$

el jacobiano de transformación $J=\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta$, y la *fórmula de transformación de la integral triple, representándola en las coordenadas esféricas*, tiene la forma

$$\iiint_T f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint_{T'} f(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\quad \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

91. Calcular $I=\iiint_T z\,dx\,dy\,dz$, donde la región T se define por las desigualdades $0\leqslant x\leqslant1/2$, $x\leqslant y\leqslant2x$, $0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Resolución. Tenemos

$$I=\int_0^{1/2} dx\int_x^{2x} dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{1/2} dx\int_x^{2x} z^2\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2} dx\int_x^{2x}(1-x^2-y^2)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left[y-yx^2-\frac{1}{3}y^3\right]_x^{2x} dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(2x-2x^3-\frac{8}{3}x^3-x+x^3+\frac{1}{3}x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(x-\frac{10}{3}x^3\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^4\right]_0^{1/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{16}\right)=\frac{7}{192}.$$

92. Calcular $I=\iiint\limits_T x^2\,dx\,dy\,dz$ si T es la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

Resolución. Pasamos a las coordenadas esféricas. En la región T las coordenadas ρ, φ y θ varían así: $0\leqslant\rho\leqslant R$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta<\pi$. Por consiguiente,

$$I=\iiint\limits_T \rho^4\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^{R}\rho^4\,d\rho=$$

$$=\frac{R^5}{5\cdot 2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta\left[\varphi+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi\right]_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{\pi R^5}{5}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta-1)\,d(\cos\theta)=\frac{4\pi R^5}{15}.$$

93. Calcular $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ si la región T está limitada por el cilindro $x^2+y^2=2x$ y los planos $y=0$, $z=0$, $z=a$.

Resolución. Pasamos a las coordenadas cilíndricas. En estas coordenadas la ecuación del cilindro tomará la forma $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi=2\rho\cos\varphi$, o bien $\rho^2(\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi)=2\rho\cos\varphi$, o sea, $\rho=2\cos\varphi$. Por consiguiente, en la región T las coordenadas ρ, φ y z varían así: $0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\varphi$, $0\leqslant\varphi<\pi/2$, $0\leqslant z\leqslant a$. Por eso

$$\iiint\limits_T z\sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T z\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho\int_0^{a} z\,dz=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sen}^2\varphi)\,d(\operatorname{sen}\varphi)=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left[\operatorname{sen}\varphi-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\varphi\right]_0^{\pi/2}=\frac{8}{9}a^2.$$

94. Calcular $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ si la región T es la mitad superior de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$.

Resolución. Introducimos las coordenadas esféricas: las nuevas variables varían dentro de los límites $0\leqslant\rho\leqslant r$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta<\pi/2$. Por lo tanto

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T \rho^4\operatorname{sen}^3\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int_0^r\rho^4\,d\rho\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\int_0^r\rho^4\,d\rho\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta-1)\,d(\cos\theta)=$$

$$=2\pi\int_0^r\rho^4\,d\rho\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{4}{15}\pi r^5.$$

95. Calcular $\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, si la región T es el paralelepípedo rectangular definido por las desigualdades $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$.

96. Calcular $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$, si la región T está limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$.

97. Calcular $\iiint\limits_T xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$ si la región T está limitada por las superficies $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

98. Calcular $\iiint\limits_T (2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$, si la región T es el prisma de tres caras limitado por los planos $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0$, $x+y=b$ $(a>0,\ b>0)$.

99. Calcular $\iiint\limits_T (x^2+y+z^2)^3\,dx\,dy\,dz$, si la región T está limitada por el cilindro $x^2+z^2=1$ y los planos $y=0$, $y=1$.

100. Calcular $\iiint\limits_T (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz$, donde la región T es la parte común del paraboloide $z\geqslant(x^2+y^2)/(2a)$ y de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$.

101. Calcular $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ donde la región T está limitada por las superficies $z=(x^2+y^2)/2$, $z=2$.

102. Calcular $\iiint\limits_T dx\,dy\,dz$, donde la región T es la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$.

103. Calcular $\iiint\limits_T \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$ si T es la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

§ 8. Aplicaciones de la integral triple

El *volumen del cuerpo* que ocupa la región T se determina por la fórmula

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz.$$

Si la densidad del cuerpo es variable, o sea, $\gamma=\gamma(x, y, z)$, entonces la masa del cuerpo que ocupa la región T se calcula por la fórmula

$$M=\iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Las *coordenadas del centro de gravedad* del cuerpo se determinan por las fórmulas

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_T \gamma x\,dx\,dy\,dz,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_T \gamma y\,dx\,dy\,dz,\quad \bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_T \gamma z\,dx\,dy\,dz,$$

Si $\gamma=1$, tenemos

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz,\quad \bar{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz,\quad \bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$$

($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ son las coordenadas del centro geométrico de gravedad).

Los *momentos de inercia* (geométricos) con respecto a los ejes de coordenadas son, respectivamente, iguales a

$$I_x=\iiint\limits_T (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,\quad I_y=\iiint\limits_T (z^2+x^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z=\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

104. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $hz=x^2+y^2$, $z=h$ (fig. 17).

Resolución. El cuerpo dado está limitado de abajo por el paraboloide $z=(x^2+y^2)/h$, de arriba por el plano $z=h$ y se proyecta al círculo $x^2+y^2\leqslant h^2$

del plano xOy. Utilizamos las coordenadas cilíndricas en las cuales la ecuación del paraboloide tomará la forma $z = \rho^2/h$. El volumen del cuerpo es igual a

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} \rho\,d\rho \int\limits_{\rho^2/h}^{h} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{b} \left(h - \frac{\rho^2}{h}\right) \rho\,d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{h\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4h}\right]_0^h d\varphi =$$

$$= \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{4}\right) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi h^3}{2}.$$

105. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo prismático limitado por los planos $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$.

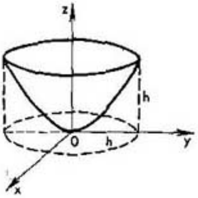

Fig. 17

Resolución. Determinamos el volumen del cuerpo examinado:

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{(3-x)/2} dz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 \frac{3-x}{2} dy =$$

$$= \int\limits_0^3 (3-x)\,dx = \left[3x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Entonces

$$\bar{x} = \frac{2}{9} \iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz = \frac{2}{9} \int\limits_0^3 x\,dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{(3-x)/2} dz =$$

$$= \frac{2}{9} \int\limits_0^3 x\,dx \int\limits_1^3 \frac{3-x}{2} dy = \frac{2}{9} \int\limits_0^3 x(3-x)\,dx = \frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 1;$$

$$\bar{y}=\frac{2}{9}\iiint_T y\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 y\,dy\int_0^{(3-x)/2} dz=$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^3 dx\int_1^3 y\,(3-x)\,dy=\frac{4}{9}\int_0^3 (3-x)\,dx=\frac{4}{9}\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3=2;$$

$$\bar{z}=\frac{2}{9}\iiint_T z\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int_0^3 dx\int_0^3 dy\int_0^{(3-x)/2} z\,dz=$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^3 \frac{(3-x)^2}{8}\,dx\int_1^3 dy=\frac{1}{18}\left[\frac{-(3-x)^3}{3}\right]_0^3=\frac{1}{2}.$$

106. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$.

107. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el plano $z=0$, la superficie cilíndrica $x=(x^2+y^2)/2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ (dentro del cilindro).

108. Hallar la masa del cubo $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ si la densidad en el punto $(x;\,y;\,z)$ es $\gamma\,(x,\,y,\,z)=x+y+z$.

109. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo limitado por las superficies $x+y=1$, $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

110. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo limitado por las superficies $z^2=xy$, $x=5$, $y=5$, $z=0$.

111. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo limitado por los planos $2x+3y-12=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ y la superficie cilíndrica $z=y^2/2$.

112. Hallar el momento de inercia del cubo $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ respecto a su arista.

§ 9. Integrales en función de un parámetro. Derivación e integración bajo el signo integral

Consideremos la integral

$$I\,(\lambda)=\int_a^b f\,(x,\,\lambda)\,dx \qquad (1)$$

en la cual λ es un parámetro variable y la función $f\,(x,\,\lambda)$ de dos variables está definida para todos los valores de x en el intervalo $[a,\,b]$ y para todos los valores de λ en el conjunto $\{\lambda\}$. En estas condiciones la integral (1) es la función del parámetro λ.

Reviste gran importancia la cuestión acerca de la derivada de la función $I\,(\lambda)$ del parámetro λ. Supongamos que la función $f\,(x,\,\lambda)$ y la derivada parcial

$\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ son continuas en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$. En este caso existe la derivada

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\lambda}{d\lambda} \int_a^b f(x, \lambda)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{d\lambda}\, dx. \tag{2}$$

Si es admisible la permutación del signo de la derivada (de λ) y del signo integral (de x), entonces se dice que la función (1) se puede *derivar respecto al parámetro bajo el signo integral*. En la fórmula (2) se supone que los límites de integración a y b no dependen del parámetro λ. Sin embargo, si a y b dependen de λ, entonces

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(x, \lambda)}{d\lambda}\, dx + b'(\lambda)\, f[b(\lambda), \lambda] - a'(\lambda)\, f[a(\lambda), \lambda]. \tag{3}$$

Para derivar respecto al parámetro una integral impropia $\int_0^\infty f(x, \lambda)\, dx$ con el límite infinito es necesario que las integrales $\int_0^\infty f(x, \lambda)\, dx$ y $\int_0^\infty \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\, dx$ existan para $0 < \lambda < \infty$.

La fórmula de integración respecto al parámetro λ de la integral definida (1) bajo el signo integral en el intervalo $[\alpha, \beta]$ tiene la forma

$$\int_\alpha^\beta I(\lambda) d\lambda = \int_\alpha^\beta d\lambda \int_a^b f(x, \lambda)\, dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, \lambda)\, d\lambda. \tag{4}$$

La función subintegral $f(x, \lambda)$ debe ser una función continua de dos variables en la región finita de integración. En caso de una región infinita de integración se obtendrá una integral múltiple impropia.

113. Hallar $\int_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx$, donde m y n son números enteros positivos.

Resolución. Examinemos la integral

$$\int_0^1 x^m\, dx = \frac{1}{m+1}\,,$$

aquí $f(x, m) = x^m$ es la función continua en el intervalo $0 < x < 1$ si $m > 0$. Hallamos la derivada de esta integral con respecto a m.

$$\frac{d}{dm} \int_0^1 x^m\, dx = \int_0^1 x^m \ln x\, dx = -\frac{1}{(m+1)^2}\,.$$

Derivando con respecto a m una vez más, obtenemos

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^2\, dx = \frac{2!}{(m+1)^3}.$$

Después de derivar n veces respecto a m nos queda

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

114. Hallar $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n+1}}$ donde n es un número entero positivo y $\lambda > 0$.

Resolución. Examinamos la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\lambda}}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\lambda^{1/2}}.$$

Derivando con respecto al parámetro λ, tenemos

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2\lambda^{3/2}}.$$

Después de derivar n veces nos queda

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2\lambda^n \cdot \sqrt{\lambda}}.$$

115. Hallar $I(k, \lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-kx} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x}\, dx$ e $I_1(\lambda) = \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x}\, dx$.

Resolución. Derivado la integral I con respecto a λ, encontramos

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_0^\infty e^{-kx} \cos \lambda x\, dx = \left[\frac{e^{-kx}}{k^2+\lambda^2} (\lambda \operatorname{sen} \lambda x - k \cos \lambda x) \right]_0^\infty = \frac{k}{k^2+\lambda^2}.$$

Ahora, de la ecuación $\frac{dI}{d\lambda} = \frac{k}{k^2+\lambda^2}$ se puede hallar I; tenemos

$$I(k, \lambda) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x}\, dx = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{k}.$$

Hallamos la integral $I_1(\lambda)$ sustituyendo en la expresión para $I(k, \lambda)$ el valor de $k = 0$:

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x}\, dx = \lim_{k \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{k} = \begin{cases} -\pi/2, & \text{si } \lambda < 0, \\ 0, & \text{si } \lambda = 0, \\ \pi/2, & \text{si } \lambda > 0. \end{cases}$$

El gráfico de la función $I_1(\lambda)=\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,dx$ se compone de dos semirrectas y el punto 0 (fig. 18).

116. Hallar $I=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}$.

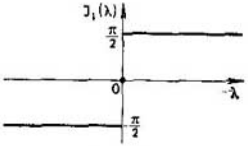

Fig. 18

Resolución. Derivando respecto al parámetro λ, tenemos

$$\frac{dI}{d\lambda}=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda},\quad \text{o sea,}\quad \frac{dI}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda},\ I=\ln\lambda.$$

117. Calcular $I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ (integral de Euler—Poisson).

Resolución. Hacemos $x=\lambda t$, donde $\lambda>0$; entonces $dx=\lambda\,dt$ e $I=\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2t^2}\,dt$. Multiplicamos por $e^{-\lambda^2}\,d\lambda$ ambos miembros de la última igualdad y, utilizando la fórmula (4), integramos con respecto a λ de 0 a ∞:

$$I\cdot\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda=I^2=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2}\cdot\lambda\,d\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2t^2}\,dt.$$

Cambiando el orden de integración, obtendremos

$$I^2=\int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty e^{-(1+t^2)\lambda^2}\cdot\lambda\,d\lambda=\int\limits_0^\infty\left[-\frac{1}{2(1+t^2)}e^{-(1+t^2)\lambda^2}\right]_0^\infty dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{4},\quad \text{o sea,}\ I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

118. Hallar $I(\lambda)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2-\lambda^2/x^2}\,dx$.

Resolución. Derivando con respecto al parámetro λ, tenemos

$$\frac{dI}{d\lambda}=-2\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2-\lambda^2/x^2}\lambda\cdot\frac{dx}{x^2}.$$

Cambiamos la variable de integración: $\lambda/x=z$, $(-\lambda/x^2)\,dx=dz$, $x^2=\lambda^2/z^2$; con ello z varía de ∞ a 0. De este modo,

$$\frac{dI}{d\lambda}=2\int\limits_{\infty}^{0} e^{-\lambda^2/z^2-z^2}dz=-2\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda^2/z^2-z^2}\,dz,\quad \text{o bien}\quad \frac{dI}{d\lambda}=-2I.$$

Por consiguiente, $\frac{dI}{I}=-2d\lambda$, $\ln I=-2\lambda+\ln C$, $I=Ce^{-2\lambda}$. Para hallar C hacemos $\lambda=0$; entonces $I(0)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=dx=\sqrt{\pi}/2$ (integral de Euler-Poisson), o sea, $C=\sqrt{\pi}/2$.

De suerte que la integral buscada $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\lambda}$.

119. Hallar $I=\int\limits_0^{\lambda}\frac{\ln(1+\lambda x)}{1+x^2}\,dx$.

Resolución. Hallamos la derivada total $\frac{dI}{d\lambda}$ por la fórmula (3);

$$\frac{dI}{d\lambda}=\int\limits_0^{\lambda}\frac{x}{(1+\lambda x)(1+x^2)}\,dx+\frac{\ln(1+\lambda\cdot\lambda)}{1+\lambda^2}\cdot\frac{d\lambda}{d\lambda},$$

o bien

$$\frac{dI}{d\lambda}=\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}+\int\limits_0^{\lambda}\frac{x}{(1+2x)(1+x^2)}\,dx.$$

Descomponemos la fracción subintegral en fracciones elementales e integramos:

$$\int\limits_0^{\lambda}\frac{x}{(1+\lambda x)(1+x^2)}\,dx=\int\limits_0^{\lambda}\frac{-\lambda\,dx}{(1+\lambda^2)(1+\lambda x)}+\int\limits_0^{\lambda}\frac{x+\lambda}{(1+\lambda^2)(1+x^2)}\,dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{1+\lambda^2}\ln(1+\lambda x)+\frac{1}{2(1+\lambda^2)}\ln(1+x^2)+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}x\right]_0^{\lambda}=$$

$$=-\frac{\ln(1+\lambda)^2}{1+\lambda^2}+\frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}\lambda.$$

De este modo,

$$\frac{dI}{d\lambda}=\frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}\lambda.$$

De aquí

$$I=\int_0^{\lambda}\left[\frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}\lambda\right]d\lambda.$$

Haciendo $\lambda=\operatorname{tg}\varphi$, obtendremos

$$I=\int_0^{\varphi}\frac{\ln\sec^2\varphi}{2\sec^2\varphi}\sec^2\varphi\,d\varphi+\int\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sec^2\varphi}\cdot\varphi\sec^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\int_0^{\varphi}\ln\cos\varphi\,d\varphi+\int_0^{\varphi}\varphi\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi.$$

Tomando por partes la primera integral, hallamos

$$I=-\varphi\ln\cos\varphi\Big|_0^{\varphi}-\int_0^{\varphi}\varphi\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi+\int_0^{\varphi}\varphi\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi=-\varphi\ln\cos\varphi,$$

o finalmente,

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\lambda\cdot\ln(1+\lambda^2).$$

Hallar las integrales:

120. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(\lambda\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\,dx$ **121.** $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\operatorname{arctg}\lambda x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

122. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{arctg}(\lambda\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$ **123.** $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1+\operatorname{sen}\alpha\cos x)\frac{dx}{\cos x}.$

124. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx.$ **125.** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\lambda x}{x(1+x^2)}\,dx.$

126. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^{\lambda}-x^{\mu}}{\ln x}\,dx;\quad \lambda>0,\quad \mu>0.$

127. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx;\quad \alpha>0,\beta>0.$

128. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln(1-\lambda^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx;\quad \lambda^2<1.$

§ 10. Función gamma. Función beta

1. Función gamma. Se llama *función gamma* (o *integral de Euler de segundo género*) a una integral que tiene la forma

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx. \tag{1}$$

La integral (1), función del parámetro p, es impropia, ya que el límite superior es igual a la infinidad y, además, porque para $x\to 0$ y $p<1$ la función subintegral crece indefinidamente. La integral (1) converge cuando $p>0$ y diverge cuando $p\leqslant 0$. La función gamma es una de las más importantes funciones (después de las elementales) para el análisis y sus aplicaciones.

Propiedades principales de la función gamma

1ª. La función $\Gamma(p)$ es continua y tiene la derivada continua $\Gamma'(p)$ para $p>0$.

2ª. Tiene lugar la igualdad

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p). \tag{2}$$

3ª. Después de aplicar n veces la fórmula (2), se obtiene la relación

$$\Gamma(p+n)=(p+n-1)(p+n-2)\ldots(p+1)\cdot p\cdot\Gamma(p). \tag{3}$$

4ª. Si en la fórmula (3) hacemos $p=1$ y tomamos en cuenta que $\Gamma(1)=$ $=\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=1$, se obtiene la igualdad

$$\Gamma(n+1)=n!. \tag{4}$$

Si $n=0$, entonces $0!=\Gamma(1)=1$.

5ª. La función $\Gamma(p)$ da la posibilidad de extender el concepto de factoria $n!$ determinado solamente para los valores naturales de n sobre el campo de cualesquiera valores positivos del argumento. De la fórmula (2) resulta que si $p\to 0$, enctonces $\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}\to+\infty$, o sea, $\Gamma(0)=+\infty$.

6ª. Cuando $p=-n$, de la fórmula (2) se deduce que

$$\Gamma(-n)=\frac{\Gamma(-n+1)}{-n}=\frac{\Gamma(-n+2)}{n(n-1)}=-\frac{\Gamma(-n+3)}{n(n-1)(n-2)}=\ldots$$
$$\ldots=(-1)^n\frac{\Gamma(0)}{n!}=(-1)^n\cdot\infty,$$

o sea, $\Gamma(-n)=(-1)^n\cdot\infty$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

7ª. En general, la función $\Gamma(p)$ se puede ampliar al caso de valores negativos del argumento p. Puesto que $\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$, entonces $\Gamma(p+1)$ tiene sentido si $-1<p<0$.

Si $-n<p<-(n-1)$, entonces de la fórmula (3) resulta que

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}.$$

Con ayuda de la sustitución $p+n=\alpha$, de donde $p=-n+\alpha$, la última fórmula se transforma obteniendo el aspecto

$$\Gamma(\alpha-n)=\frac{(-1)^n\,\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} \tag{5}$$

y para $-n<p<-(n-1)$ el signo $\Gamma(p)$ se determina por el factor $(-1)^n$.

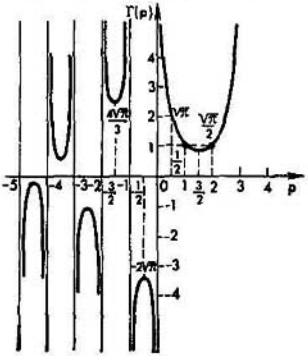

Fig. 19

8ª. Utilizando la fórmula (2) se pueden obtener los valores de $\Gamma(p)$ para un argumento semientero:

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left[1+\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]=\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(m-\frac{3}{2}\right)=\cdots$$

$$\cdots=\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{2^m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

o bien

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m)!}{m!\,2^{2m}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

9ª. Tiene lugar la *fórmula de complemento*

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\quad(0<p<1). \tag{7}$$

Si en esta fórmula hacemos $p=1/2$, entonces $[\Gamma(1/2)]^2=\pi/\operatorname{sen}(\pi/2)=\pi$, o sea, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Utilizando las propiedades principales, se puede calcular $\Gamma(p)$ para cualquier p. Los valores de la función gama se dan en la tabla 1, pág. 448).
El gráfico de la función $\Gamma(p)$ está representado en la fig. 19.

129. Calcular la integral de Euler—Poisson $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Resolución. Efectuamos la sustitución $x^2 = t$, de donde $x = \sqrt{t}$, $dx = dt/(2\sqrt{t})$ y, por consiguiente,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{1/2-1}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

130. Calcular $\Gamma(-1/2)$.

Resolución. Utilizando la fórmula $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$, obtenemos

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{(-1/2} = \frac{\Gamma(1/2)}{(-1/2)} = -2\sqrt{\pi}.$$

131. Calcular $\Gamma(-9/2)$.

Resolución. Utilizando la fórmula (5) para $\alpha = 1/2$ y $n = 5$, resulta

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-5\right) = \Gamma\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{(-1)^5\cdot\Gamma(1/2)}{(1-1/2)(2-1/2)\ldots(5-1/2)} =$$
$$= \frac{-\sqrt{\pi}}{(1/2)\cdot(3/2)\cdot(5/2)\cdot(7/2)\cdot(9/2)} = \frac{32\sqrt{\pi}}{945}.$$

132. Calcular $\Gamma(5/2)$.

Resolución. Haciendo $m = 2$ en la fórmula (6), nos queda

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4!\,\Gamma(1/2)}{2!\cdot 2^4} = \frac{24\sqrt{\pi}}{2\cdot 16} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

133. Calcular $\Gamma(-4/3)$.

Resolución. Utilizando la relación $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$, tenemos

$$\Gamma\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{\Gamma(-4/3+1)}{-4/3} = \frac{\Gamma(-1/3)}{-4/3} = \frac{\Gamma(-1/3+1)}{(-4/3)\cdot(-1/3)} =$$
$$= \frac{9}{4}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{4}\cdot\frac{\Gamma(5/3)}{2/3} = \frac{27}{8}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right).$$

De la tabla *I* (pág. 448) hallamos $\Gamma(5/3) = 0{,}9033$; por consiguiente, $\Gamma(-4/3) = (27/8)\cdot 0{,}9033 = 3{,}0486$.

134. Calcular: 1) $(-1/2)!$; 2) $(1/2)!$; 3) $(3/2)!$; 4) $(0{,}21)!$.

Resolución. Por la formula (4) determinamos:

1) $(-1/2)! = \Gamma(-1/2+1) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = 1{,}772$;

2) $(1/2)! = \Gamma(1/2+1) = \Gamma(3/2) = (1/2)\,\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2 = 0{,}886$;

3) $(3/2)! = \Gamma(3/2+1) = (3/2)\,\Gamma(3/2) = (3/2)\cdot(1/2)\,\Gamma(1/2) = 3\sqrt{\pi}/4 = 1{,}329$;

4) $(0{,}21)! = \Gamma(0{,}21+1) = \Gamma(1{,}21) = 0{,}9156$ (de la tabla 1).

135. Calcular $\Gamma(5/3)\cdot\Gamma(-5/3)$.

Resolución. Encontramos

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\Gamma(-2/3)}{-5/3}=\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\Gamma(1/3)}{(-5/3)(-2/3)}=$$

$$=\frac{3}{5}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right).$$

Puesto que por la fórmula de complemento $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/3)}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, entonces

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{5}.$$

136. Mostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)=\frac{\pi}{\cos p\pi}$.

Resolución. Haciendo en la fórmula (7) $p=\omega+1/2$, obtenemos

$$\Gamma\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left[1-\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/2+\omega\pi)},$$

o bien

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\omega\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-\omega\right)=\frac{\pi}{\cos\omega\pi}.$$

137. $\Gamma(0,8)$. **138.** $\Gamma(-2{,}1)$. **139.** $\Gamma(3{,}2)$. **140.** $\Gamma(7/2)$.
141. $(-1/4)!$. **142.** $(1/3)!$. **143.** $(-2)!$.
144. $\Gamma(7/3)\cdot\Gamma(/7/3)$. **145.** $\Gamma(10/3)\cdot\Gamma(-10/3)$.
146. $\Gamma(1/4)\cdot\Gamma(-1/4)$. **147.** $\Gamma(5/4)\cdot\Gamma(-5/4)$.
148. Mostrar que $\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-2)^m}{(2m-1)!!}\sqrt{\pi}$.

149. Mostrar que $\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)=(-1)^m\pi$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$.

2. Función beta. Se llama *función beta* (*o integral de Euler de primer género*) a la integral

$$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \qquad (1)$$

La integral (1) es la función de dos parámetros p y q que converge cuando $p > 0$, $q > 0$.

La función B es simétrica con respecto a los parámetros, o sea, $B(p, q) = B(q, p)$.

Si se hace el cambio de la variable de integración, haciendo $x = \operatorname{sen}^2 t$, $dx = 2 \operatorname{sen} t \cos t\, dt$, con ello t varía de 0 a $\pi/2$, entonces la fórmula (1) tomará la forma

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} t \cos^{2q-1} t\, dt,$$

o bien

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \quad (m > 0, n > 0). \tag{2}$$

A las formas (1) y (2) se reducen muchas integrales que se resuelven en problemas prácticos.

Para calcular los valores de la función beta se usa la siguiente dependencia entre la función beta y la función gamma:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{3}$$

Si $q = 1 - p$, entonces $B(p, 1-p) = \dfrac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$ $(0 < p < 1)$.

Utilizando la función beta es fácil determinar el valor de $\Gamma(1/2)$. Sea $p = q = 1/2$; entonces $B(1/2, 1/2) = \dfrac{[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(1)}$. Como $B(1/2, 1/2) = B(1/2, 1 - 1/2) = \pi/\operatorname{sen}(\pi/2) = \pi$ y $\Gamma(1) = 1$, entonces $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

150. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x \cos^8 x\, dx$.

Resolución. Utilizando la fórmula (2) para $m = 6$ y $n = 8$, obtenemos

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x \cos^8 x\, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(7/2)\, \Gamma(9/2)}{\Gamma(8)} = \frac{5\pi}{2^{12}}$$

(los valores de $\Gamma(7/2)$ y $\Gamma(9/2)$ están calculados por la fórmula (6) del punto 1 para $m = 3$ y $m = 4$ y $\Gamma(8) = 7!$).

151. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{3 - \cos t}}$.

Resolución. Hacemos $\cos t = 1 - 2\sqrt{u}$; entonces $dt = \dfrac{du}{2\sqrt[4]{u^3}\sqrt{1-\sqrt{u}}}$,

$\sqrt{3-\cos t}=\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{u}}$, con ello t varía de 0 a 1. Entonces obtenemos

$$\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 u^{-3/4}(1-u)^{-1/2}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma(1/4)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{[\Gamma(1/4)]^2}{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)}$$

Como $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/4)}=\pi\sqrt{2}$ y $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=$ $=\frac{\Gamma(1{,}25)}{1/4}=4\cdot 0{,}9064=3{,}6256$, entonces

$$\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(3{,}6256)^2}{\pi\sqrt{2}}=\frac{(3{,}6256)^2}{4\sqrt{\pi}}=1{,}8545.$$

152. Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}}$.

Resolución. Reescribimos la integral dada en la forma $\int_0^1 (1-x^{2/5})^{-1/2}\,dx$. Utilizamos la sustitución $x^{2/5}=t$; entonces $x=t^{5/2}$, $dx=(5/2)\,t^{3/2}\,dt$ y, por consiguiente,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}}=\frac{5}{2}\int_0^1 t^{3/2}(1-t)^{-1/2}\,dt=\frac{5}{2}B\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\frac{\Gamma(5/2)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)}=\frac{15\pi}{16}.$$

153. Demostrar que si $I_1=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ e $I_2=\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, entonces $I_1I_2=\frac{\pi}{4}$.

Resolución. Hacemos $x^4=t$, de donde $dx=(1/4)\,t^{1/4-1}\,dt$. Entonces obtenemos

$$I_1=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{1/4-1}(1-t)^{-1/2}\,dt=\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(1/4)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)};$$

$$I_2=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{3/4-1}(1-t)^{-1/2}\,dt=\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(3/4)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/4)}=\frac{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4)},$$

puesto que $\Gamma(5/4) = (1/4)\,\Gamma(1/4)$. Por consiguiente,

$$I_1 I_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(1/4)\cdot\Gamma(3/4)\cdot[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)} = \frac{1}{4}(\sqrt{\pi})^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Calcular:

154. $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x\,dx.$ **155.** $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx.$

156. $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^5 4x \cos^4 2x\,dx.$

157. $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{10} x \cos^4 x\,dx.$

158. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}},\ a>0.$

Indicación: se sustituye $x^a = t$.

159. $\int\limits_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0.$

Indicación: se sustituye $x^2/a^2 = t$.

160. $\int\limits_0^1 x^6\sqrt{1-x^2}\,dx.$

161. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx = \frac{\pi}{b\operatorname{sen}(a\pi/b)}.$

Indicación: se sustituye $(1+x^b)/x^b = 1/y$.

162. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^a(1+x)},\ 0<a<1.$

Indicación: se sustituye $x = u/(1-u)$.

163. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x}}.$ **164.** $\int\limits_0^\pi \operatorname{sen}^6 x \cos^2(x/2)\,dx.$

165. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$

166. $\int\limits_0^1 x^3(1-\sqrt[3]{x})^2\,dx.$

Indicación: se sustituye $x=t^3$.

167. $\int\limits_0^1 x^{n-1}(1-x^h)^{m-1}\,dx \quad (n>0,\ m>0).$

Indicación: se sustituye $x^h=t$.

168. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx.$

Indicación: se sustituye $\operatorname{tg} x=u^2$.

169. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$. **170.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

171. $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{2n-1} x\,dx \quad (0<n<1).$

172. Expresar $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$ mediante la función gamma

Capítulo II. Integrales curvilíneas e integrales de superficie

§ 1. Integrales curvilíneas por la longitud de un arco y por las coordenadas

1. Integral curvilínea de longitud de un arco (integral curvilínea de género I). Sea que la función $f(x, y)$ está definida y es continua en los puntos del arco AB de una curva lisa K con ecuación $y = \varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Dividimos arbitrariamente el arco AB en n arcos elementales por los puntos $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$; sea Δs_k la longitud del arco $A_{k-1}A_k$. Escogemos en cada arco elemental un punto arbitrario $M_k(\xi_k; \eta_k)$ y multiplicamos el valor de la función $f(\xi_k, \eta_k)$ en este punto por la longitud Δs_k del arco respectivo.

Se llama *suma integral* para la función $f(x, y)$ *de longitud del arco AB* a la suma que tiene la forma $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta s_k$.

Se denomina *integral curvilínea de longitud del arco AB* de la función $f(x, y)$ (o integral curvilínea de género I) al límite de la suma integral a condición de que $\max \Delta s_k \to 0$:

$$\int_{AB} f(x, y)\,ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta s_k$$

(ds es la diferencial del arco).

La integral curvilínea de género I se determina por la fórmula

$$\int_{AB} f(x, y)\,ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)]\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}\,dx.$$

Si la curva K está definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, entonces

$$\int_K f(x, y)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

Análogamente se determina y se calcula la integral curvilínea de género I de la función de tres variables $f(x, y, z)$ de una curva espacial. Si la curva espacial está definida por las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_1 \leqslant \leqslant t \leqslant t_2$) entonces

$$\int\limits_K f(x, y, z)\, ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Si $f(x, y) > 0$, entonces la integral curvilínea de género I $\int\limits_K f(x, y)\, ds$ no es más que la *masa de la curva* K que tiene la densidad variable lineal $\gamma = f(x, y)$ (interpretación física).

Propiedades principales de una integral curvilínea de género I

1ª. *Una integral curvilínea de género* I *no depende del sentido del camino de integración*

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, ds = \int\limits_{BA} f(x, y)\, ds.$$

2ª. $\int\limits_K [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]\, ds = \int\limits_K f_1(x, y)\, ds \pm \int\limits_K f_2(x, y)\, ds.$

3ª. $\int\limits_K cf(x, y)\, ds = c \int\limits_K f(x, y)\, ds$, donde $c = \text{const}$

4ª. *Si el contorno de integración K está dividido en dos partes K_1 y K_2, entonces*

$$\int\limits_K f(x, y)\, ds = \int\limits_{K_1} f(x, y)\, ds + \int\limits_{K_2} f(x, y)\, ds.$$

2. Integral curvilínea de coordenadas (integral curvilínea de género II). Sean las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ continuas en los puntos del arco AB de una curva lisa K que tiene la ecuación $y = \varphi(x)$ ($a \leqslant x \leqslant b$).

Se llama *suma integral* para las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ *en las coordenadas* a la suma que tiene la forma

$$\sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k],$$

donde Δx_k y Δy_k son las proyecciones del arco elemental sobre los ejes Ox y Oy.

Se denomina *integral curvilínea por los coordenadas* (o *integral curvilínea de género* II) de la expresión $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ en el arco orientado AB al límite de la suma integral a condición de que $\max \Delta x_k \to 0$ y $\max \Delta y_k \to 0$:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k].$$

La integral curvilínea de género II es el *trabajo* realizado por la fuerza variable $F = P(x, y)\,i + Q(x, y)\,j$ sobre el camino curvilíneo $\breve{AB}$ (interpretación mecánica).

Propiedades principales de la integral curvilínea de género II

1ª. ***La integral curvilínea de género II cambia su signo por el opuesto, al invertir el camino de integración:***

$$\int_{\breve{BA}} P\,dx+Q\,dy=-\int_{\breve{AB}} P\,dx+Q\,dy.$$

2ª. $\displaystyle\int_{\breve{AB}} P\,dx+Q\,dy=\int_{\breve{AB}} P\,dx+\int_{\breve{AB}} Q\,dy.$

Las demás propiedades son análogas a las de las integrales de género I. La integral curvilínea de género II se calcula por la fórmula

$$\int_K P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\int_a^b \{P[x, \varphi(x)]+\varphi'(x)\,Q[x, \varphi(x)]\}\,dx.$$

Si la curva K está definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, donde $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, entonces

$$\int_K P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t)]\,x'(t)+Q[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt.$$

La fórmula análoga tiene lugar para calcular la integral curvilínea de segundo género referente a la curva espacial K: si la curva está definida por las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, donde $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, entonces

$$\int_K P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t)+Q[x(t), y(t)\,z(t)]\,y'(t)+$$

$$+R[x(t), y(t), z(t)]\,z'(t)\}\,dt.$$

173. Calcular $\displaystyle\int_K (x-y)\,ds$ donde K es el segmento de la recta desde A (0; 0) hasta B (4; 3).

Resolución. La ecuación de la recta AB tiene la forma $y = (3/4)\,x$. Determinamos $y' = 3/4$ y, por consiguiente,

$$\int_K (x-y)\,ds=\int_0^4 \left(x-\frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dx=\frac{5}{16}\int_0^4 x\,dx=\frac{5}{32}x^2\Big|_0^4=\frac{5}{2}.$$

174. Calcular $\int\limits_K x^2y\,dy - y^2x\,dx$ si $x=\sqrt{\cos t}$, $y=\sqrt{\operatorname{sen} t}$, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$.

Resolución. Determinemos $dx=-\dfrac{\operatorname{sen} t}{2\sqrt{\cos t}}\,dt$, $dy=\dfrac{\cos t}{2\sqrt{\operatorname{sen} t}}\,dt$. Entonces

$$\int\limits_K x^2y\,dy-y^2x\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos t\cdot\sqrt{\operatorname{sen} t}\cdot\frac{\cos t}{2\sqrt{\operatorname{sen} t}}+\right.$$
$$\left.+\operatorname{sen} t\cdot\sqrt{\cos t}\cdot\frac{\operatorname{sen} t}{2\sqrt{\cos t}}\right)dt=\frac{\pi}{4}.$$

175. Hallar la masa M del arco de la curva $x=t$, $y=t^2/2$, $z=t^3/3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ cuya densidad lineal varía según la ley $\gamma=\sqrt{2y}$.

Resolución. Tenemos

$$M=\int\limits_K\sqrt{2y}\,ds=\int\limits_0^1\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}t^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=$$
$$=\int\limits_0^1 t\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t^2+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2+\frac{1}{2}}{2}\cdot\sqrt{t^4+t^2+1}+\frac{3}{8}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{t^4+t^2+1}\right)\right]_0^1=$$
$$=\frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

176. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la cicloide $x=t-\operatorname{sen} t$, $y=1-\cos t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$.

Resolución. Las coordenadas del centro de gravedad del arco homogéneo de la curva K se calculan por las fórmulas

$$\bar{x}=\frac{1}{s}\int\limits_K x\,ds,\qquad \bar{y}=\frac{1}{s}\int\limits_K y\,ds,$$

donde s es la longitud del arco. Tenemos

$$s=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\operatorname{sen}^2 t}\,dt=$$
$$=2\int\limits_0^{\pi}\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=4.$$

Entonces

$$\bar{x}=\frac{1}{4}\int_K x\,ds=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(t-\operatorname{sen} t)\,2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\operatorname{sen}\frac{t}{2}\operatorname{sen} t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2t\cos\frac{t}{2}+4\operatorname{sen}\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left(4+\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3};$$

$$\bar{y}=\frac{1}{4}\int_K y\,ds=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos t)\,2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{4}{3}.$$

Calcular las integrales curvilíneas:

177. $\int_{AB}(x^2-y^2)\,dx+xy\,dy$ si el camino desde A (1; 1) hasta B (3; 4) es el segmento de una recta.

178. $\int_K (x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy$ si K es la línea quebrada OAB donde O (0; 0), A (2; 0), B (4; 2).

179. $\int_{AB}\frac{y\,ds}{\sqrt{x}}$ si AB es el arco de la parábola semicúbica $y^2 = (4/9)\,x^3$ desde A $(3;\ 2\sqrt{3})$ hasta B $(8;\ 32\sqrt{2/3})$.

180. $\int_{AB} y\,dx-(y+x^2)\,dy$ si K es el arco de la parábola $y = 2x-x^2$, dispuesto sobre el eje Ox y recorrido en el sentido de las agujas del reloj.

181. $\int_K y\,dx+2x\,dy$ si K es el contorno del rombo, recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj, cuyos lados están sobre las rectas $x/3+y/2=\Gamma 1$, $x/3-y/2=\pm 1$.

182. $\int_K 2x\,dy-3y\,dx$ si K es el contorno del triángulo que tiene por vértices A (1; 2), B (3; 1), C (2; 5), recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

183. $\int_K \frac{dy}{x}-\frac{dx}{y}$ si K es el cuadrante I de la circunferencia $x = r\cos t$, $y=r\operatorname{sen} t$, recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

184. $\int\limits_K x^2y\,dx + x^3\,dy$ si K es el contorno limitado por las parábolas $y^2 = x$, $x^2 = y$ y recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

185. Hallar la masa del arco de la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ si su densidad lineal en el punto $(x;\,y)$ es igual a y.

186. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco homogéneo de la curva $y = \operatorname{ch} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \ln 2)$.

187. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco homogéneo de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ $(-\infty \leqslant t \leqslant 0)$.

188. Calcular $\int\limits_K \sqrt{x^2+y^2}\,ds$ donde K es la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$

189. Calcular $\int\limits_K \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$ donde K es la primera espira de la hélice $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$.

190. Hallar la masa de la primera espira de la hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$ si la densidad en cada punto es igual al radio vector de este punto.

191. Calcular $\int\limits_{OA} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$ donde OA es un cuadrante de la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 1$, recorrido en el sentido de crecimento del parámetro t.

§ 2. Independencia de una integral curvilínea de género II del contorno de integración. Determinación de una función por su diferencial total

Sean las funciones $P(x,\,y)$ y $Q(x,\,y)$ continuas al igual que sus derivadas parciales de primer orden en una región simplemente conexa D, y el contorno K, que se encuentra por completo en esta región.

Entonces la *condición necesaria y suficiente de independencia de la integral curvilínea* $\int\limits_K P(x,\,y)\,dx + Q(x,\,y)\,dy$ *con respecto al contorno de integración es el cumplimiento en la región* D *de la identidad*

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Al observar las condiciones indicadas la *integral curvilínea referente a cualquier contorno cerrado* C *contenida en la región* D *es igual a cero:*

$$\oint\limits_C P(x,\,y)\,dx + Q(x,\,y)\,dy = 0.$$

Para calcular la integral

$$\int_{(x_0;\, y_0)}^{(x_1;\, y_1)} P(x,\ y)\, dx + Q(x,\ y)\, dy$$

que no depende del contorno de integración (o sea, la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ está cumplida) en calidad de la vía más ventajosa de integración conviene elegir la línea quebrada que une los puntos $(x_0;\ y_0)$ y $(x_1;\ y_1)$ cuyos lados son paralelos a los ejes Ox y Oy.

En las condiciones mencionadas la expresión subintegral $P(x,\ y)\, dx + Q(x,\ y)\, dy$ es la *diferencial total* de cierta función unívoca $U = U(x,\ y)$, o sea,

$$dU(x,\ y) = P(x,\ y)\, dx + Q(x,\ y)\, dy.$$

La función $U(x,\ y)$ (primitiva) se puede hallar calculando la integral curvilínea por la línea quebrada A_0A_1B donde $A_0(x_0;\ y_0)$ es un punto fijo arbitrario, $B(x;\ y)$ es un punto variable y el punto A_1 tiene las coordenadas x e y_0. Entonces, a lo largo de A_0A_1 tenemos $y = y_0$ y $dy = 0$ y a lo largo de A_1B, $x = \text{const},\ dx = 0$.

Como resultado obtenemos la fórmula siguiente

$$U(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} P(x,\ y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,\ y)\, dy + C.$$

Análogamente, integrando en la línea quebrada A_0A_2B, donde $A_2(x_0;\ y)$, nos queda

$$U(x,\ y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y)\, dy + \int_{x^0}^{x} P(x,\ y)\, dx + C.$$

192. Calcular $I = \int_{(1;\,1)}^{(2;\,3)} (x + 3y)\, dx + (y + 3x)\, dy.$

Resolución. La integral dada no depende del contorno de integración, puesto que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x + 3y) = 3; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y + 3x) = 3,$$

o sea, $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ (sobre todo el plano xOy).

Escogemos como camino de integración la línea quebrada cuyos lados son paralelos a los ejes de las coordenadas. Tenemos en el primer tramo $y = 1$, $dy = 0$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, en el segundo tramo $x = 2$, $dx = 0$, $1 \leqslant y \leqslant 3$. Por consiguiente,

$$I = \int_{1}^{2} (x + 3)\, dx + \int_{1}^{3} (y + 6)\, dy = \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^2 + \left[\frac{y^2}{2} + 6y\right]_1^3 =$$

$$= 2 + 6 - \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} + 18 - \frac{1}{2} - 6 = 20\,\frac{1}{2}.$$

193. Hallar la función primitiva U si

$$dU = [y + \ln (x + 1)]\, dx + (x + 1 - e^y)\, dy.$$

Resolución. Tenemos $P = y + \ln (x + 1)$; $Q = x + 1 - e^y$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Sea $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ y de contorno K sirve la quebrada OMN (fig. 20). Entonces

$$U(x, y) = \int_0^x \ln (x+1)\, dx + \int_0^y (x+1-e^y)\, dy =$$

$$= [x \ln (x + 1) - x + \ln (x + 1)]_0^x + [xy + y - e^y]_0^y =$$

$$= (x + 1) \ln (x + 1) - x + xy + y - e^y + 1 + C.$$

194. Hallar $U(x, y)$ si

$$dU = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy.$$

Resolución. Tenemos

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad Q = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv -\frac{1}{y^2} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Aquí no se puede tomar el origen de coordenadas en calidad de punto $(x_0; y_0)$, ya que para $x = 0$ e $y = 0$ las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ no están definidas. Por eso, en calidad de punto $(x_0; y_0)$ tomemos, por ejemplo, $A_0 (1, 1)$. Entonces

$$U(x, y) = \int_1^x \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \int_1^y \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right) \times$$

$$\times\, dy = \ln x + 2 \ln y + \frac{x}{y} - 1 + C.$$

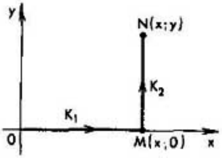

Fig. 20

Hallar la función primitiva $U(x, y)$ por su diferencial total.

195. $dU = [e^{x+y} + \cos (x - y)]\, dx + [e^{x+y} - \cos (x - y) + 2]\, dy$.

196. $dU = (1 - e^{x-y} + \cos x)\, dx + (e^{x-y} + \cos y)\, dy$.

197. $dU = (x^2 - 2xy^2 + 3)\, dx + (y^2 - 2x^2y + 3)\, dy$.

198. $dU = (2x - 3xy^2 + 2y)\, dx + (2x - 3x^2y + 2y)\, dy$.

199. $dU = (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} y)\, dx + (x \operatorname{sh} y + 1)\, dy$.

200. $dU = (\operatorname{arcsen} x - x \ln y)\, dx - \left(\operatorname{arcsen} y + \frac{x^2}{2y}\right) dy$.

201. Calcular $\int_{(0;\,0)}^{(\pi,\,\pi)} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$ por diversos contornos que unen los puntos $O\,(0; 0)$ y $M\,(\pi; \pi)$: 1) por la recta OM; 2) por la curva $y = x + \operatorname{sen} x$; 3) por la línea quebrada OPM, donde $P\,(\pi; 0)$; 4) por la parábola $y = x^2/\pi$.

202. Calcular $\oint\limits_K x\,dy + y\,dx$ por diversos contornos cerrados: 1) por la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; 2) por el contorno limitado por el arco de la parábola $y = x^2$ y el segmento $y = 1$.

§ 3. Fórmula de Green

Si C es la frontera de la región D y las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ son continuas en la región cerrada D (incluyendo la frontera C), entonces es válida la *fórmula de Green*

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

además el recorrido del contorno C se elige de modo que la región D quede a la izquierda.

203. Aplicando la fórmula de Green, calcular $I = 2\oint\limits_C (x^2 + y^2) \times \times dx + (x + y^2)\,dy$, si C es el contorno del triángulo con vértices $L(1; 1)$, $M(2; 2)$, $N(1; 3)$ recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Comprobar el resultado por medio de la integración

Resolución. Aquí $P(x, y) = 2(x^2 + y^2)$, $q(x, y) = (x + y)^2$. Hallamos $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x + y) - 4y = 2(x - y)$. De este modo,

$$I = \oint 2\,(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy = \iint\limits_D 2\,(x - y)\,dx\,dy,$$

donde la región D es el triángulo LMN. La ecuación de la recta $LM: y = x$, la de $MN: y = -x + 4$. Calculamos la integral doble por la región dada:

$$I = 2\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{4-x} (x - y)\,dy = 2\int\limits_1^2 \left[xy - \frac{1}{2}\,y^2 \right]_x^{4-x} dx =$$

$$= 2\int\limits_1^2 \left[x\,(4 - x) - \frac{1}{2}(4 - x)^2 - x^2 + \frac{1}{2}\,x^2 \right] dx =$$

$$= 4\int\limits_1^2 (4x - x^2 - 4)\,dx = 4\left[2x^2 - \frac{1}{3}\,x^3 - 4x \right]_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

Calculamos ahora inmediatamente la integral curvilínea por el contorno C compuesto por los lados LM, MN, NL:

$$I = \int\limits_{LM} 2\,(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy + \int\limits_{MN} 2\,(x^2 + y^2)\,dx +$$

$$+ (x + y)^2\,dy + \int\limits_{NL} 2\,(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy.$$

La ecuación $LM: y = xy$, por consiguiente, $dy = dx$, $1 \leqslant x \leqslant 2$.
La ecuación $MN: y = -x + 4$, por lo tanto, $dy = -dx$, $2 \geqslant y \geqslant 1$.

La ecuación $ML: x=1$, de suerte que $dx=0$, $3 \geqslant y \geqslant 1$. De este modo,

$$I=\int_1^2 [2(x^2+x^2)\,dx+(x+x)^2\,dx]+\int_2^1 \{2[x^2+(4-x)^2]\,dx+$$

$$+(x-x+4)^2(-dx)\}+\int_3^1 (1+y)^2\,dy=8\int_1^2 x^2\,dx+$$

$$+\int_2^1 (4x^2-16x+16)\,dx+\int_3^1 (1+y)^2\,dy=$$

$$=\left[\frac{8}{3}x^3-\frac{4}{3}x^3+8x^2-16x\right]_1^2+\frac{1}{3}(1+y)^3\Big|_3^1=-\frac{4}{3}.$$

204. Aplicando la fórmula de Green, calcular $\oint\limits_C -x^2y\,dx+xy^2\,dy$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=R^2$ recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Resolución. Aquí $P(x, y)=-x^2y$, $Q(x, y)=xy^2$. Entonces $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2$. Por consiguiente,

$$I=\oint\limits_C -x^2y\,dx+x^2y\,dy=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Introducimos las coordenadas polares: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$; de suerte que

$$I=\iint\limits_D \rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R \rho^3\,d\rho=\frac{1}{4}R^4\cdot\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{\pi R^4}{2}.$$

205. Con ayuda de la fórmula de Green transformar la integral curvilínea $I=\oint\limits_C [x+\ln(x^2+y^2)]\,dx+y\ln(x^2-y^2)\,dy$, donde el contorno C limita la región D.

206. Aplicando la fórmula de Green, calcular $\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\,[xy+\ln(x+(\sqrt{x^2+y^2})]\,dy$, donde C es el contorno del rectángulo $1 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

§ 4. Cálculo de un área

El área S de la figura limitada por un contorno cerrado simple C se determina por la fórmula

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy-y\,dx.$$

El contorno de integración es recorrido de modo que la región limitada por el mismo quede a la izquierda (sentido positivo).

207. Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = x^2$, $x = y^2$, $8xy = 1$ (se tiene en cuenta el área adyacente al origen de las coordenadas; fig. 21).

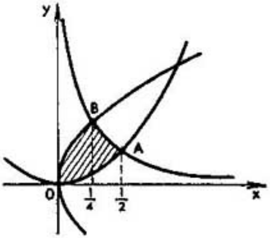

Fig. 21

Resolución. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones de las curvas, hallamos A (1/2; 1/4), B (1/4; 1/2). Por consiguiente,

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{OA} x\,dy-y\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{AB} x\,dy-y\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{BO} x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1/2} x^2\,dx-\frac{1}{8}\int\limits_{1/2}^{1/4}\frac{dx}{x}-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{1/4}^{0}\sqrt{x}\,dx=\frac{1+3\ln 2}{24}\approx 0{,}13 \text{ (unidades cuadradas).}$$

208. Calcular el área limitada por la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, construyendo previamente la curva.

Resolución. Para calcular el área utilizamos la fórmula

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{C} x\,dy-y\,dx, \text{ donde } dy=3a\operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt,\ dx=$$

$$=-3a\cos^2 t\operatorname{sen} t\,dt,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \text{ Por consiguiente,}$$

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(3a^2\cos^4 t\operatorname{sen}^2 t+3a^2\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t)\,dt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3a^2}{8}\int\limits_{0}^{2\pi}\operatorname{sen}^2 2t\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{16}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3}{16}a^2\left[t-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t\right]_0^{2\pi}=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

209. Calcular el área limitada por las parábolas $y^2 = x$, $x^2 = y$.

210. Calcular el área limitada por la elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$.

211. Calcular el área del cuadrilátero que tiene por vértices $A(6; 1)$, $B(4; 5)$, $C(1; 6)$, $D(-1; 1)$.

212. Calcular el área de la figura limitada por el contorno $OABCO$ si $A(1; 3)$, $B(0; 4)$, $C(-1; 2)$, $O(0; 0)$, OA, BC, CO, son los segmentos de las rectas y AB es el arco de la parábola $y = 4 - x^2$.

213. Calcular el área limitada por la cardioide $x = 2r \cos t - r \cos 2t$, $y = 2r \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} 2t$.

§ 5 Integrales de superficie

Sean $F(x, y, z)$ una función continua y $z = f(x, y)$ una superficie lisa S, donde $f(x, y)$ está definida en cierta región D del plano xOy. Se llama *integral de superficie de género* I al límite de la suma integral a condición de que $\max d_k \to 0$:

$$\lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k = \iint_S F(x, y, z)\, dS,$$

donde ΔS_k es el área del k-ésimo elemento de la superficie S, el punto $(\xi_k; \eta_k; \zeta_k)$ pertenece a este elemento, d_k es el diámetro de este elemento, $F(x, y, z)$ está definida en cada punto de la superficie S.

El valor de esta integral no depende de la selección del lado de la superficie S en la cual se efectúa la integración.

Si la proyección D de la superficie S sobre el plano xOy es unívoca, la respectiva *integral de superficie de género* I *se calcula por la fórmula*

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS = \iint_D F[x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Si $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ son las funciones continuas y S^+ es el lado (cara) de la superficie lisa S caracterizado por la dirección de la normal $\mathbf{n}(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$, entonces la respectiva *integral de superficie de género* II *se expresa así:*

$$\iint_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)\, dS.$$

Al pasar al otro lado (cara) S^- de la superficie esta integral cambia su signo por el opuesto.

Si la superficie S está definida por la ecuación implícita $\Phi(x, y, z) = 0$, entonces los cosenos directores de la normal a esta superficie se determinan por las fórmulas:

$$\cos \alpha = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}}{\pm \sqrt{\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

donde el signo delante del radical debe concordar con la cara de la superficie.

Los *momentos de inercia de una parte de la superficie* con respecto a los ejes de las coordenadas se expresan por las integrales de superficie:

$$I_{Ox}=\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dS,\quad I_{Oy}=\iint\limits_S (x^2+z^2)\,dS,$$

$$I_{Oz}=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS.$$

Las *coordenadas del centro de gravedad de una parte de la superficie* se puede determinar por las fórmulas

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint\limits_S x\,dS,\quad \bar{y}=\frac{1}{S}\iint\limits_S y\,dS,\quad \bar{z}=\frac{1}{S}\iint\limits_S z\,dS,$$

donde S es el área de la parte dada de la superficie.

214. Calcular $I=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, donde S es la parte de la superficie cónica $z^2=x^2+y^2$, comprendida entre los planos $z=0$ y $z=1$.

Resolución. Tenemos

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=$$
$$=\sqrt{2}\cdot dx\,dy.$$

Entonces la integral buscada se transforma en la integral doble:

$$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy\ .$$

La región de integración D es el círculo $x^2+y^2\leqslant 1$, por eso

$$I=\sqrt{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=4\sqrt{2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2} d\theta\int\limits_0^1 \rho^3\,d\rho=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

215. Hallar el momento de inercia de la semiesfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ con respecto al eje Oz.

Resolución. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$I_{Oz} = \iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS = \iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

De región de integración sirve la proyección de la semiesfera sobre el plano xOy, o sea, el círculo $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ y por eso, pasando a las coordenadas polares, obtenemos

$$I_{Oz} = \iint\limits_D \rho^2 \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 4a\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \frac{\rho^3\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = \frac{4}{3}\pi a^4.$$

(la integral interior se puede calcular con ayuda de la sustitución $\rho = a$ sen t).

216. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del plano $z = x$ limitado por los planos $x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$ (fig. 22).

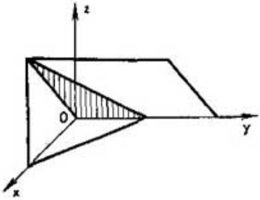

Fig. 22

Resolución. Determinamos el área de la parte indicada del plano $z=x$. Tenemos $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$; por consiguiente

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 (1-x)\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)^2\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint_S x\,dS=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}\sqrt{2}\,dy=2\int_0^1 x(1-x)\,dx=$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}\ ;\ \bar{y}=\frac{1}{S}\iint_S y\,dS=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\sqrt{2}\,y\,dy=$$

$$=\int_0^1 (1-x)^2\,dx=-\frac{1}{3}(1-x)^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ ;$$

$$\bar{z}=\frac{1}{S}\iint_S z\,dS=\frac{1}{S}\iint_S x\,\partial S=\frac{1}{3}$$

(se ha utilizado la ecuación del plano $z=x$).

217. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la parte de la superficie $z=2-(x^2+y^2)/2$, situada sobre el plano xOy.

218. Hallar el momento de inercia del paraboloide $z = (x^2+y^2)/2$ con respecto al eje Oz para $0\leqslant z\leqslant 1$.

219. Calcular $\iint_S xyz\,dS$, donde S es la parte de la superficie $z=x^2+y^2$, situada entre los planos $z=0$ y $z=1$.

§ 6. Fórmulas de Stokes y de Ostrogradski-Gauss. Elementos de la teoría del campo

Si las funciones $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ son continuas junto con sus derivadas parciales de primer orden sobre la superficie S y C es el contorno cerrado que limita la superficie S, entonces es válida la *fórmula de Stokes*

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal a la superficie S. La dirección de la normal se determina de modo que por parte de la normal el recorrido del contorno C parezca ocurrir en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Si las funciones $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ son continuas al igual que sus derivadas parciales de primer orden en la región cerrada T del espacio limitada por una superficie lisa cerrada S, entonces es válida la *fórmula de Ostrogradski—Gauss*

$$\oiint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie S.

Si un vector variable $\mathbf{F}$ es la función vectorial de un punto del espacio: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, donde $M(x;\ y;\ z)$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces este vector determina el campo vectorial. En la forma de coordenadas

$$\mathbf{F} = P(x,\ y,\ z)\,\mathbf{i} + Q(x,\ y,\ z)\,\mathbf{j} + R(x,\ y,\ z)\,\mathbf{k},$$

donde $P = P(x,\ y,\ z)$, $Q = Q(x,\ y,\ z)$, $R = R(x,\ y,\ z)$ son las proyecciones del vector $\mathbf{F}$ sobre los ejes de las coordenadas.

Se llama *divergencia* del campo vectorial $\mathbf{F}(M) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ al escalar

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

Se denomina *rotor* del campo vectorial $\mathbf{F}(M) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ al vector

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Se llama *flujo* del campo vectorial $\mathbf{F}(M)$, a través de la superficie S en la dirección determinada por el vector unitario de la normal $\mathbf{n} = \cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \cos\beta\cdot\mathbf{j} + \cos\gamma\cdot\mathbf{k}$ a la superficie S, a la integral de superficie

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\mathbf{n}\,dS = \iint\limits_S F_n\,dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

La fórmula de Ostrogradski—Gauss en la forma vectorial tiene el aspecto

$$\oiint\limits_S F_n\,dS = \iiint\limits_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV,$$

o sea, *la integral de divergencia del campo vectorial* $\mathbf{F}$, *extendida sobre cierto volumen* T, *es igual al flujo del vector a través de la superficie* S *que limita el volumen dado.*

Se denomina *integral lineal* del vector $\mathbf{F}$ por la curva K a la integral curvilínea

$$\int\limits_K \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int\limits_K P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

que no es más que el *trabajo* del campo vectorial a lo largo de la curva K. Si el contorno C es cerrado, entonces la integral lineal

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

se denomina *circulación* del campo vectorial $\mathbf{F}(M)$ a lo largo del contorno C.

La *fórmula de Stokes en la forma vectorial* tiene el aspecto

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \iint\limits_S \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}\,dS,$$

o sea, *la circulación del vector a lo largo del contorno de cierta superficie es igual al flujo del rotor a través de esta superficie.*

220. Hallar la integral $\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$ extendida sobre la superficie de cualquier cuerpo.

Resolución. Por la fórmula de Ostrogradski—Gauss tenemos

$$\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = 3\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = 3V,$$

donde V es el volumen del cuerpo.

221. Aplicando la fórmula de Ostrogradski-Gauss, transformar la integral de superficie

$$I = \oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz + \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dz + \frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy$$

en integral de volumen.

Resolución. La integral dada se puede escribir así:

$$I = \oiint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS$$

y la última integral según la fórmula de Ostrogradski—Gauss es igual a

$$\iiint\limits_T \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx\,\partial y\,dz.$$

Por consiguiente,

$$I = \iiint\limits_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,z$$

222. Aplicando la fórmula de Stokes, hallar $I = \oint\limits_C x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$, si C es la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

Resolución. Según la fórmula de Stokes tenemos

$$I=\oint_C x^2y^3\,dx+dy+z\,dz=$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

donde $P=x^2y^3$, $Q=1$, $R=z$. Por lo tanto, en el segundo miembro obtendremos $-\iint_S 3x^2y^2\cos\gamma\,dS$, donde $dS\cos\gamma=dx\,dy$. Ahora bien,

$$I=-3\iint_D x^2y^2\,dx\,dy.$$

Suponiendo $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, obtendremos

$$I=-3\iint_D \rho^5\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta=-12\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_0^r\rho^5\,d\rho=$$

$$=-2r^6\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=-\frac{r^6}{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2 2\theta\,d\theta=$$

$$=-\frac{r^6}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\,d\theta=-\frac{r^6}{4}\left[\theta-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,4\theta\right]_0^{\pi/2}=-\frac{\pi r^6}{8}.$$

223. Hallar el flujo del radio vector $\mathbf{r}$ a través de la cara exterior de la superficie de un cilindro circular recto, si el origen de las coordenadas coincide con el centro de la base inferior del cilindro, R es el radio de la base del cilindro, h es su altura (fig. 23).

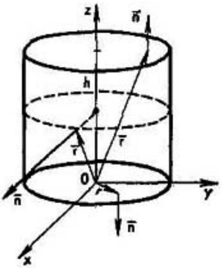

Fig. 23

Resolución. Para calcular el flujo del vector $\mathbf{r}$ a través de la cara exterior de la superficie del cilindro es necesario determinar el flujo de este vector a través de la base inferior, la supericie lateral y la base superior del cilindro.

Tenemos $Q_{\text{b. inf}}=\iint_S r_n\,dS$, pero la proyección del radio vector $\mathbf{r}$ sobre la normal exterior a la base del cilindro es igual a cero y, por eso, $Q_{\text{b. inf.}}=0$.

La proyección del radio vector sobre la normal a la superficie lateral es igual al radio de la base del cilindro, o sea $r_n=R$; entonces $Q_{\text{s. lat}}=$ $=\iint_S R\,dS=R\cdot S_{\text{s. lat}}=2\pi R^2h.$

La proyección del radio vector sobre la normal a la base superior es igual a h, por consiguiente, $Q_{\text{b. sup}} = h \cdot \iint\limits_S dS = h \cdot S_{\text{b}} = \pi R^2 h$.

De este modo, el flujo del vector $\mathbf{r}$ a través de la cara exterior de la superficie del cilindro es igual a

$$Q = 2\pi R^2 h + \pi R^2 h = 3\pi R^2 h.$$

224. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = (2z - x)\,\mathbf{i} + (x + 2z)\,\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ a través del lado del triángulo S, recortado del plano $x + 4y + z - 4 = 0$, por los planos de las coordenadas en aquella dirección de la normal al plano que forma con el eje Oz un ángulo agudo.

Resolución. Tenemos

$$\Pi = \iint\limits_S (2z - x)\,dy\,dz + (x + 2z)\,dz\,dx + 3z\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_S (2z + 4y + z - 4)\,dy\,dz + (x + 2z)\,dz\,dx + 3\,(4 - x - 4y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{4-4y} (3z + 4y - 4)\,dz + \int\limits_0^4 dz \int\limits_0^{4-z} (x + 2z)\,dx +$$

$$+ 3\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{1-x/4} (4 - x - 4y)\,dy = \int\limits_0^1 \left[\frac{3}{2}\,16\,(1-y)^2 - 16\,(1-y)^2\right] dy +$$

$$+ \int\limits_0^4 \left[\frac{1}{2}\,(4-z)^2 + 2z\,(4-z)\right] dz + 3\int\limits_0^4 \left[\frac{1}{4}\,(4-x)^2 - \frac{(4-x)^2}{8}\right] dx = 42\frac{2}{3}.$$

225. Hallar la circulación del campo vectorial $\mathbf{F} = (x + 3y + 2z)\,\mathbf{i} + (2x + z)\,\mathbf{j} + (x - y)\,\mathbf{k}$ por el contorno del triángulo MNP, donde $M\,(2;\,0;\,0)$, $N\,(0;\,3;\,0)$, $P\,(0;\,0;\,1)$.

Resolución. Según la fórmula de Stokes $\oint\limits_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \iint\limits_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}\,dS$, donde

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + 3y + 2z & 2x + z & x - y \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial (x-y)}{\partial y} - \frac{\partial (2x+z)}{\partial z}\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial (x-y)}{\partial x} - \frac{\partial (x + 3y + 2z)}{\partial z}\right]\mathbf{j} +$$

$$+ \left[\frac{\partial (2x+z)}{\partial x} - \frac{\partial (x + 3y + 2z)}{\partial y}\right]\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Aquí C es el contorno del triángulo MNP para la orientación positiva. Este triángulo descansa en el plano $x/2 + y/3 + z/1 = 1$, o bien $3x + 2y + 6z - 6 = 0$. Por consiguiente,

$$\text{Ц} = \iint_S \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F}\, dS = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F})_x\, dy\, dz + (\operatorname{rot} \mathbf{F})_y\, dz\, dx +$$

$$+ (\operatorname{rot} \mathbf{F})_z\, dx\, dy = -2 \iint_{D_{yz}} dy\, dz + \iint_{D_{zx}} dz\, dx - \iint_{D_{xy}} dx\, dy =$$

$$= -2 \int_0^3 dy \int_0^{1-y/3} dz + \int_0^1 dz \int_0^{2-2z} dx - \int_0^2 dx \int_0^{3-3x/2} dy =$$

$$= -2 \left[y - \frac{y^2}{6} \right]_0^3 + [2z - z^2]_0^1 - \left[3x - \frac{3}{4} x^2 \right]_0^2 = -5.$$

226. Hallar la divergencia del campo vectorial $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$.

Resolución. Según la definición $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$, donde $A_x = x^2$, $A_y = y^2$, $A_z = z^2$. Por lo tanto, $\operatorname{div} \mathbf{A} = 2(x+y+z)$.

227. Hallar la circulación del vector $\mathbf{A} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$ por la circunferencia $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$ en el sentido positivo.

Resolución. Tenemos

$$\oint_C \mathbf{A}\, d\mathbf{r} = \oint_C -\omega y\, dx + \omega x\, dy = \omega \int_0^{2\pi} (a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t)\, dt = 2\pi a^2 \omega.$$

228. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = (y - x)\,\mathbf{i} + (x + y)\,\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ a través del lado del triángulo S, recortado del plano $x + y + z - 1 = 0$ por los planos de las coordenadas.

229. Hallar la circulación del campo vectorial $\mathbf{F} = (x + y)\,\mathbf{i} + (x - z)\,\mathbf{j} + (y - z)\,\mathbf{k}$ por el contorno del triángulo ABC, donde $A\,(0;\, 0;\, 0)$, $B\,(0;\, 1;\, 0)$, $C\,(0;\, 0;\, 1)$.

230. Mostrar que $\operatorname{rot} (\operatorname{grad} u) = 0$, o sea, el rotor del gradiente de un escalar cualquiera es igual a cero.

Resolución. Puesto que las proyecciones del vector del gradiente son las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, entonces

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} u) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} \right) = 0.$$

231. Aplicando la fórmula de Stokes, hallar la integral curvilínea $\oint\limits_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.

232. Hallar la integral $\iint\limits_C (x^3 \cos\alpha + y^3 \cos\beta + z^3 \cos\gamma)\, dS$ tomada en la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, donde α, β, γ son los ángulos de la normal exterior con los ejes de coordenadas.

233. Hallar $\iint\limits_C [(z^2 - y^2)\cos\alpha + (x^2 - z^2)\cos\beta + (y^2 - x^2)\cos\gamma]\, dS$, donde S es la cara exterior de la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

234. Calcular $\iint\limits_C (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)\, dS$, donde S es la cara exterior de la superficie del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

235. Calcular $\iint\limits_S x\, dy\, dz + y\, dx\, dz + z\, dx\, dy$, donde S es la cara exterior de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ $(-h \leqslant x \leqslant h)$.

236. Hallar el flujo del vector $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ a través de la superficie lateral del cono $x^2 + y^2 \leqslant (R^2/h^2)\, z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

237. Hallar la divergencia del gradiente de la función $u = e^{x+y+z}$.

238. Hallar div $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, donde $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

239. Hallar el flujo del radio vector $\mathbf{r}$ a través de la cara exterior de la superficie de un cono circular recto si h es la altura del cono y R, el radio de la base.

240. Hallar la circulación del vector $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ por la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

241. Hallar la circulación del vector $\mathbf{u} = (x + z)\,\mathbf{i} + (x - y)\,\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

242. Hallar rot $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

243. Hallar rot $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

244. Mostrar que div $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}$ rot $\mathbf{a} - \mathbf{a}$ rot $\mathbf{b}$.

245. Mostrar que div $(f\mathbf{A}) = f$ div $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ grad f.

Capítulo III. Series

§ 1. Series numéricas

Sea $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, donde $u_n = f(n)$ es una sucesión numérica infinita. La expresión

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

se llama *serie numérica* infinita y los números $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ se dicen *términos* de la serie; $u_n = f(n)$ se denomina *término general*. Una serie se escribe frecuentemente en la forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

La suma de los primeros n términos de una serie numérica se designa por S_n y se llama *suma parcial n-ésima de la serie*:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Una serie se dice *convergente* si su suma parcial n-ésima S_n tiende, con un crecimiento ilimitado de n, a un límite finito, o sea, si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. El número S ha recibido el nombre de *suma* de la serie. Por el contrario, si la suma parcial n-ésima de una serie no tiende, cuando $n \to \infty$, a un límite finito, la serie se denomina *divergente*.

La serie

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (|q| < 1)$$

compuesta por los términos de una progresión geométrica decreciente cualquiera es convergente, siendo su suma $a/(1-q)$.

La serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

llamada *armónica*, diverge.

Enunciamos los teoremas principales sobre las series numéricas convergentes.

1. *Si converge la serie*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

entonces converge también la serie

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots,$$

obtenida de la serie dada omitiendo los primeros m términos (esta última serie se denomina *m-ésimo resto* de la serie inicial); y viceversa, *de la convergencia del m-ésimo resto de la serie se desprende la convergencia de la serie dada.*

2. *Si converge la serie*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

y su suma es el número S, entonces converge también la serie

$$au_1 + au_2 + au_3 + \ldots,$$

además , la suma de la última serie es igual a aS.

3. *Si convergen las series*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

que tienen las sumas S y σ, respectivamente, entonces converge también la serie

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots,$$

siendo la suma de esta última serie igual a S + σ.

4. *Si la serie*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, *o sea, cuando* $n \to \infty$, *el límite del término general de la serie convergente es igual a cero* (*criterio necesario* de convergencia de una serie).

Por lo tanto, si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, entonces la serie diverge.

Citamos los criterios más importantes de convergencia y divergencia de las series que tienen términos positivos.

Primer criterio de comparación. Sean dadas dos series con términos positivos:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

y

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{2}$$

además, cada término de la serie (1) *no supere el término respectivo de la serie* (2), *o sea,* $u_n \leqslant v_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. *Entonces si converge la serie* (2), *converge también la serie* (1); *si diverge la serie* (1), *diverge también la serie* (2).

Este criterio sigue en vigencia si las desigualdades $u_n < v_n$ se cumplen no para todos los n, sino comenzando de cierto número $n = N$.

Segundo criterio de comparación. Si existe un límite finito y distinto de cero $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n/v_n) = k$, *entonces ambas series* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *simultáneamente convergen o simultáneamente divergen.*

Criterio de Cauchy. Si para una serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$, *entonces esta serie converge cuando* $C < 1$ *y diverge cuando* $C > 1$.

Criterio de d'Alembert. Si para una serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

existe $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1}/u_n) = D$, *esta serie converge cuando* $D < 1$ *y diverge cuando* $D > 1$.

Criterio integral. Si $f(x)$ para $x \geqslant 1$ es una función continua, positiva y monótona decreciente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, donde $u_n = f(n)$, converge o diverge en dependencia del hecho de que converja o diverja la integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Examinemos ahora las series cuyos términos tienen signos distintos.

Se llama *serie alternada* a la que tiene la forma

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

donde $u_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Criterio de convergencia de una serie alternada (criterio de Leibniz). Una serie alternada converge si los valores absolutos de sus términos decrecen y el término general tiende a cero, o sea, si se cumplen dos condiciones siguientes: 1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ y 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Tomamos la suma parcial n-ésima de una serie alternada para la cual se cumple el criterio de Leibniz:

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n.$$

Supongamos que R_n es el n-ésimo resto de la serie. Este resto se puede escribir como diferencia entre la suma de la serie S y la suma parcial n-ésima S_n, o sea, $R_n = S - S_n$. No es difícil ver que

$$R_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots).$$

El valor $|R_n|$ se estima con ayuda de la desigualdad $|R_n| < u_{n+1}$.

Vamos a exponer ahora algunas propiedades de las series de términos de signos cualesquiera (o sea, series alternadas y series con alteración arbitraria de los signos de sus términos).

La serie alternada

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

converge si converge la serie

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

En este caso la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se llama *absolutamente convergente.*

La serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se denomina *condicionalmente convergente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge absolutamente, entonces la serie obtenida después de cualquier reordenación de un conjunto infinito de sus términos converge absolutamente y tiene la misma suma que la serie inicial.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge condicionalmente, entonces al reordenar un conjunto infinito de sus términos la suma de la serie puede cambiar. En particular, reordenando (permutando) los términos de una serie condicionalmente convergente, se la puede transformar en serie divergente.

Si las series $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ y $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ convergen absolutamente y tienen por sumas respectivas S_1 y S_2, entonces converge también absolutamente la serie

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + v_1u_2) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots$$
$$\ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1) + \ldots.$$

Esta serie se llama *producto* de las series

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ y } v_1 + v_2 + v_3 + \ldots.$$

Su suma es igual a S_1S_2.

246. Se da el término general de la serie $u_n = \frac{n}{10^n+1}$. Escribir los primeros cuatro términos de la serie.

Resolución. Si $n = 1$, entonces $u_1 = 1/11$; si $n = 2$, entonces $u_2 = 2/101$; si $n = 3$, entonces $u_3 = 3/1001$; si $n_4 = 4$, entonces $u = 4/10001$; la serie se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{11} + \frac{2}{101} + \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} + \ldots.$$

247. Hallar el término general de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots.$$

Resolución. Los numeradores consecutivos forman la progresión aritmética 1, 3, 5, 7, ...; el n-ésimo término de la progresión lo determinamos por la fórmula $a_n = a_1 + d\,(n - 1)$. Aquí $a_1 = 1$, $d = 2$, por eso $a_n = 2n - 1$. Los denominadores consecutivos forman la progresión geométrica 2, 2^2, 2^3, 2^4, ...; el n-ésimo término de esta progresión es $b_n = 2^n$. Por consiguiente, el término general de la serie $u_n = (2n - 1)/2^n$.

248. Hallar el término general de la serie

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \ldots$$

Resolución. El exponente de la potencia de cada término coincide con el número de este término, por eso el exponente de la potencia del n-ésimo término es igual a n. Los numeradores de las fracciones 2/3, 3/7, 4/11, 5/15... forman una progresión aritmética con el primer término 2 y la diferencia igual a 1. Por eso el n-ésimo término es igual a $n + 1$. Los denominadores forman una progresión aritmética con el primer término igual a 3 y la diferencia igual a 4. Por consiguiente el n-ésimo denominador es igual a $4n - 1$. Por lo tanto, el término general de la serie es $u_n = \left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^n$.

249. Hallar la suma de la serie $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots$.

Resolución. Tenemos $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Puesto que

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

entonces

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right),\ u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right),\ u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right),\ u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \ldots$$

Por consiguiente,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$, la serie converge y su suma es igual a $\frac{1}{2}$.

250. Hallar la suma de la serie $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$.

Resolución. Representamos el término general de la serie $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ en forma de la suma de las fracciones elementales:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Multiplicando por el denominador del primer miembro, llegamos a la identidad

$$1=A(n+1)(n+2)+B_n(n+2)+Cn(n+1).$$

Suponiendo sucesivamente $n=0, -1, -2$, encontramos: para $n=0$: $1=2A$; $A=1/2$; para $n=-1$; $1=-B$; $B=-1$; para $n=-2$: $1=2C$; $C=1/2$. De este modo,

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}, \text{ o sea, } u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

De aquí,

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right),\quad u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right),$$
$$u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right),\quad u_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right),\ldots$$

y

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

De suerte que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1/4$; por consiguiente la serie converge y su suma es $1/4$.

251. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\ldots .$$

Resolución. La serie está compuesta por los términos de la progresión geométrica infinita decreciente y por eso converge. Vamos a determinar la suma de la serie. Aquí $a = 2/3$, $q = 1/2$ (denominador de la progresión). Por consiguiente,

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{2/3}{1-1/2}=\frac{4}{3}.$$

252. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\ldots$$

Resolución. La serie dada está obtenida por la omisión armónica de los primeros diez términos. Por consiguiente, ella diverge.

253. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\ldots$$

Resolución. Encontramos el término general de la serie $u_n = n/(3n-1)$. Como

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-1/n}=\frac{1}{3},$$

o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, la serie diverge (no se cumple la condición necesaria).

254. Investigar la convergencia de la serie

$$0{,}6+0{,}51+0{,}501+0{,}5001+\ldots$$

Resolución. Aquí $u_n = 0{,}5+(0{,}1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0{,}5 \neq 0$ y la serie diverge.

255. Investigar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

Resolución. Los términos de esta serie son menores que los términos respectivos de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, o sea, de la serie $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$. Pero la última serie converge como progresión geométrica infinita decreciente. Por lo tanto, converge también la serie dada.

256. Investigar la convergencia de la serie

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots \text{ si } p<1.$$

Resolución. Los términos de esta serie, comenzando del segundo, son mayores que los términos respectivos de la serie armónica. Por consiguiente, la serie diverge.

257. Investigar la convergencia de la serie que tiene el término general $u_n=\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$.

Resolución. Comparamos esta serie con la serie en la cual el término general $v_n = 1/2^n$ (o sea, con una progresión geométrica infinita decreciente). Apliquemos el segundo criterio de comparación de las series:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4\cdot 2^n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4 - 3/2^n} = \frac{1}{4}.$$

Puesto que el límite es finito y distinto de cero y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, entonces converge también la serie dada.

258. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \ldots$$

Resolución. Aquí $u_n = 1/(3n-1)$. Comparamos la serie dada con la serie armónica en la cual $v_n = 1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, la serie dada diverge.

259. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \ldots$$

Resolución. Tenemos $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Aquí es cómodo aplicar el criterio de Cauchy, puesto que $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1}$ y el límite de la última fracción se determina sencillamente:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2}.$$

Como $C = 1/2 < 1$, la serie converge.

260. Investigar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Resolución. Aplicamos también en este caso el criterio de Cauchy:

$$u_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} e;$$

como $C > 1$, la serie converge.

261. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \ldots + \frac{2^n}{n^{10}} + \ldots$$

Resolución. Aplicamos el criterio de d'Alembert; tenemos $u_n = 2^n/n^{10}$, $u_{n+1} = 2^{n+1}/(n+1)^{10}$, $u_{n+1}/u_n = 2n^{10}/(n+1)^{10}$, es decir,

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}} = 2.$$

Como $D > 1$, la serie diverge.

262. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\sqrt{3}} + \dots$$

Resolución. Aquí $u_n = n/3^{n/2}$, $u_{n+1} = (n+1)/3^{(n+1)/2}$, $u_{n+1}/u_n = (n+1)/(n\sqrt{3})$; por eso

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};\ D < 1.$$

Por lo tanto, la serie converge.

263. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{10}{1!} + \frac{10^2}{3!} + \frac{10^3}{3!} + \dots$$

Resolución. Tenemos $u_n = 10^n/n!$, $u_{n+1} = 10^{n+1}/(n+1)!$, $u_{n+1}/u_n = 10/(n+1)$. $D = \lim\limits_{n\to\infty} 10/(n+1) = 0$; $D < 1$, o sea, la serie converge.

264. Investigar la convergencia de la serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Resolución. Tenemos $u_n = 1/n^2$, $u_{n+1} = 1/(n+1)^2$, $u_{n+1}/u_n = n^2/(1+n^2) = 1/(1+1/n)^2$, $D = \lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1}/u_n) = 1$. Puesto que $D = 1$, entonces con ayuda del criterio de d'Alembert no se logra resolver la cuestión acerca de la convergencia de la serie.

Aplicamos el criterio integral: $u_n = \frac{1}{n^2}$, por consiguiente, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1$. La integral converge (es una cantidad finita), por eso converge también la serie dada.

265. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \dots$$

Resolución. Aplicamos el criterio integral:

$$u_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, \quad f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)},$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int\limits_1^\infty \frac{\frac{dx}{x+1}}{\ln(x+1)} = \ln\ln(x+1)\Big|_1^\infty = \infty.$$

La integral diverge, por eso diverge también la serie dada.

266. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\dots$$

Resolución. Apliquemos el criterio de Leibniz. Puesto que

$$\frac{2}{2^2+1}=\frac{1}{2+1/2}, \quad \frac{3}{3^2+1}=\frac{1}{3+1/3}, \quad \frac{4}{4^2+1}=\frac{1}{4+1/4}, \dots,$$

entonces

$$\frac{1}{2}>\frac{2}{2^2+1}>\frac{3}{3^2+1}>\frac{4}{4^2+1}\dots.$$

Por consiguiente, está cumplida la primera condición del criterio de Leibniz. Puesto que $u_n = n/(n^2+1)$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1/n}=0,$$

o sea, está cumplida la segunda condición. La serie converge.

267. Investigar la convergencia de la serie

$$1{,}1-1{,}01+1{,}001-1{,}0001+\dots.$$

Resolución. La primera condición del criterio de Leibniz se cumple: $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > 1{,}0001 \dots$; por otro lado, $u_n = 1+\frac{1}{10^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)=1$. Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, no está cumplida la condición necesaria de convergencia de la serie. La serie diverge.

268. Investigar la convergencia de la serie

$$1-1+1-1+\dots.$$

Resolución. El término general de la serie no tiende a cero, por eso la serie diverge.

269. Investigar la convergencia de la serie

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\dots.$$

Resolución. Compongamos la serie de valores absolutos:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots.$$

Esta serie es una progresión geométrica infinita decreciente y, por consiguiente, converge. Así, pues, la serie dada también converge y, además, converge absolutamente.

270. Hallar el producto de las series absolutamente convergentes

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2^2}{1!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\dots+\frac{2^n}{n!}+\dots$$

y

$$1+\frac{2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\dots+\frac{3^n}{n!}+\dots.$$

Resolución. El producto de las series (según la definición dada en la pág. 73 es la serie

$$1+\left(\frac{2}{1!}+\frac{3}{1!}\right)+\left(\frac{2^2}{2!}+\frac{2}{1!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}\right)+$$
$$+\left(\frac{2^3}{3!}+\frac{2^2}{2!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{2}{1!}\cdot\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{2^n}{n!}+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{2^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{3^2}{2!}+\ldots+\frac{3^n}{n!}\right)+\ldots,$$

o bien

$$1+\frac{1}{1!}(2+3)+\frac{1}{2!}(2^2+2\cdot 2\cdot 3+3^2)+\frac{1}{3!}\cdot(2^3+3\cdot 2^2\cdot 3+3\cdot 2\cdot 3^2+3^3)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(2^n+\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}\cdot 2^{n-1}\cdot 3+\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}\cdot 2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+3^n\right)+\ldots.$$

Puesto que $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=C_n^k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, la serie se puede escribir en la forma

$$1+\frac{2+3}{1!}+\frac{(2+3)^2}{2!}+\frac{(2+3)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2+3)^n}{3!}+\ldots,$$

o bien

$$1+\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\ldots+\frac{5^n}{n!}+\ldots.$$

271. Escribir los primeros cuatro términos de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n+1}$.

272. Escribir los primeros cuatro términos de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{100^n-1}$.

Escribir las fórmulas de los términos generales de las series:

273. $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\frac{10\,000}{13}+\ldots.$

274. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots.$

275. $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$

276. $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots.$

Hallar las sumas de las series:

277. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots.$

278. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

279. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\ldots.$

280. $1+\frac{m-1}{m}+\left(\frac{m-1}{m}\right)^2+\left(\frac{m-1}{m}\right)^3+\ldots\ (m>1)$.

281. Con ayuda del criterio necesario mostrar que la serie $\frac{1}{9}+\frac{9}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{39}+\ldots$ diverge.

282. Mostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(2^n+1)^2}$ diverge.

Investigar la convergencia de las series con ayuda del primer criterio de comparación:

283. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$.

284. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$.

Investigar la convergencia de las series, valiéndose del segundo criterio de comparación:

285. $\frac{2+1}{5+1}+\frac{2^2+1}{5^2+1}+\frac{2^3+1}{5^3+1}+\ldots$.

Indicación: comparar con la serie $\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots$.

286. $\frac{1}{2\cdot 1-1}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2-1}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 4-1}+\frac{\sqrt{4}}{2\cdot 4-1}+\ldots$.

Valiéndose del criterio de Cauchy, investigar la convergencia de las series:

287. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$.

288. $3+(2{,}1)^2+(2{,}01)^3+(2{,}001)^4+\ldots$.

Valiéndose del criterio de d'Alembert, investigar la convergencia de las series:

289. $\frac{10}{11}+\left(\frac{10}{11}\right)^2\cdot 2^5+\left(\frac{10}{11}\right)^3\cdot 3^5+\left(\frac{10}{11}\right)^4\cdot 4^5+\ldots$.

290. $\frac{11}{10}+\left(\frac{11}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{2^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{3^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{4^5}+\ldots$.

Valiéndose del criterio integral, investigar la convergencia de las series:

291. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ si $p>1$.

292. $\frac{1}{9\ln 9}+\frac{1}{19\ln 19}+\frac{1}{29\ln 29}+\ldots$.

Investigar la convergencia de las series de términos de signos cualesquiera y determinar el carácter de la convergencia (absoluta, condicional):

293. $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+\ldots$.

294. $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+\ldots$.

295. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$.

296. $\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10^2}-\dfrac{13}{10^3}+\dfrac{19}{10^4}+\dfrac{25}{10^5}-\dfrac{31}{10^6}+\ldots$.

297. $3\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}-3\frac{1}{8}-3\frac{1}{16}+3\frac{1}{32}+3\frac{1}{64}-3\frac{1}{128}-3\frac{1}{256}+\ldots$

Investigar la convergencia de las series:

298. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots$.

299. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots$.

300. $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{40}+\ldots$.

301. $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{38}+\ldots$.

302. $1+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5^2}+\dfrac{4}{5^3}+\ldots$.

303. $\dfrac{1!}{5}+\dfrac{2!}{5^2}+\dfrac{3!}{5^3}+\ldots$.

304. $1+\dfrac{2!}{2^2}+\dfrac{3!}{3^3}+\dfrac{4!}{4^4}+\ldots$.

305. $1+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{4^4}+\ldots$.

306. $\dfrac{1}{2\ln 2\cdot\ln\ln 2}+\dfrac{1}{3\ln 3\cdot\ln\ln 3}+\dfrac{1}{4\ln 4\cdot\ln\ln 4}+\ldots$

307. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^3+1}+\dfrac{1}{3^3+1}+\dfrac{1}{4^3+1}+\ldots$.

308. $\dfrac{2}{2^3+1}-\dfrac{3}{3^3+2}+\dfrac{4}{4^3+3}-\dfrac{5}{5^3+4}+\ldots$

309. $1-2+3-4+5-6+\ldots$.

310. $1-\dfrac{1}{2^4}-\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{4^4}-\dfrac{1}{5^4}-\dfrac{1}{6^4}+\ldots$.

311. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{6}-\dfrac{6}{7}+\ldots$.

312. $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\ldots$.

313. $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}-\dfrac{1}{\ln 5}+\ldots$.

314. Hallar el producto de las series absolutamente convergentes $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\ldots$ y $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots$.

315. Mostrar que la serie $1-\dfrac{2}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}-\dfrac{2^3}{3!}+\ldots$ converge absolutamente y elevarla al cuadrado (multiplicarla por sí misma).

§ 2 Series de funciones

La serie

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

cuyos términos son funciones de x se llama serie *de funciones*. El conjunto de valores de x con los cuales las funciones $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x) \ldots$ están determinadas y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge se denomina *región de convergencia* de la serie de funciones. La región de convergencia de una serie de funciones suele ser con más frecuencia un intervalo cualquiera del eje Ox. A cada valor en la región de convergencia X le corresponde un valor determinado de $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Esta cantidad que es una función de x ha recibido el nombre de *suma* de una serie de funciones y se designa por $S(x)$.

Representemos la suma de una serie en forma $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, donde

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x), \quad R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

[$R_n(x)$ es el resto de la serie de funciones].

La serie convergente de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ se llama *uniformemente convergente* en cierta región X si para cada número $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se desee, existe un número entero positivo N tal que, cuando $n \geqslant N$, se cumpla la desigualdad $|R_n(x)| < \varepsilon$ para cualquier x en la región X. Además, la suma $S(x)$ de una serie uniformemente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ en la región X, donde $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ son funciones continuas, es una función continua.

Formulemos el criterio suficiente de la convergencia uniforme de una serie de funciones, o sea, el *criterio de Weierstrass*.

Si las funciones $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ por su valor absoluto no superan en cierta región X los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, y además, la serie numérica

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

converge, entonces la serie de funciones

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

converge uniformemente en esta región.

Finalmente enunciamos dos teoremas referentes a la integración y derivación de las series funcionales.

1. *Si la serie $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$, donde $u_1(x), u_2(x), u_3(x) \ldots$ son funciones continuas, converge uniformemente en cierta región X y tiene la suma $S(x)$, entonces la serie*

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \ldots$$

converge y tiene la suma $\int_a^b S(x)\,dx$ (el intervalo $[a, b]$ pertenece a la región X).

2. Sea que las funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ están definidas en cierta región X y tienen en esta región las derivadas $u_1'(x), u_2'(x), u_3'(x), \ldots$

Si en esta región la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *converge uniformemente, entonces su suma es igual a la derivada de la suma de la serie inicial:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]_x'.$$

316. Se da la serie de funciones

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2 + -\frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3 + \ldots .$$

Investigar la convergencia de la serie en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

Resolución. En el punto $x = 0$ obtenemos la serie

$$2 + \frac{1}{3}\cdot 2^2 + \frac{1}{5}\cdot 2^3 + \frac{1}{7}\cdot 2^4 + \ldots$$

Aquí $u_n = 2^n/(2n-1)$, $u_{n+1} = 2^{n+1}/(2n+1)$. Aplicamos el criterio de d'Alembert:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n}{2+1/n} = 2.$$

o sea, $D > 1$. Por consiguiente, la serie diverge.

En el punto $x = 1$ obtenemos la serie

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots .$$

Aquí $u_n = 1/(3^n(2n-1))$, $u_{n+1} = 1/(3^{n+1}\cdot(2n+1))$; hallamos

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot(2n-1)}{3^{n+1}\cdot(2n+1)} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{3},$$

o sea, la serie converge.

317. Hallar la región de convergencia de la serie

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^6} + \ldots .$$

Resolución. Encontramos el término general de la serie $u_n = 1/(1+x^{2n})$. Si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1$; puesto que $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, la serie diverge. Si $|x| = 1$, entonces también obtenemos la serie divergente $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots .$

Si $|x| > 1$, entonces los términos de la serie dada son menores que los de la serie geométrica infinita decreciente $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \ldots$, o sea la serie converge.

De suerte que la región de convergencia de la serie se define por la desigualdad $|x| > 1$. De ello resulta que la serie converge si $1 < x < +\infty$ o bien $-\infty < x < -1$.

318. Mostrar que la serie

$$\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^4+2}+\frac{1}{x^6+3}-\frac{1}{x^8+4}+\cdots$$

converge uniformemente para todos los valores de x $(-\infty < x < +\infty)$.

Resolución. La serie dada converge, cualquiera que sea el valor de x según el criterio de Leibniz, por eso su resto se estima con ayuda de la desigualdad $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|$, o sea

$$|R_n(x)| < \frac{1}{x^{2n+2}+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Puesto que las desigualdades $\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$ y $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}-1$ son equivalentes, entonces, tomando $n \geqslant N$, donde N es un número entero positivo cualquiera que satisfaga la condición $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}-1$, llegamos a la desigualdad $|R_n(x)| < \varepsilon$. De suerte que la serie dada converge uniformemente en el intervalo $]-\infty, +\infty[$.

319. Mostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ converge uniformemente en el intervalo $]-1, 1[$.

Resolución. En el intervalo indicado la serie converge como progresión geométrica infinitamente decreciente. Tenemos $R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \ldots$, o sea, $R_n(x) = x^{n+1}/(1-x)$. Pero $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 1/2$, $\lim\limits_{n\to\infty} R(x) = \infty$. Por consiguiente, tomando $\varepsilon > 1/2$, no podemos lograr que la desigualdad se cumpla para cualquier valor de x. Por lo tanto, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ converge no uniformemente.

320. Con ayuda del criterio de Weierstrass mostrar que la serie

$$\operatorname{sen} x+\frac{1}{2^2}\cdot\operatorname{sen}^2 2x+\frac{1}{3^2}\cdot\operatorname{sen}^3 3x+\ldots$$

converge uniformemente en el intervalo $]-\infty, +\infty[$.

Resolución. Puesto que $\left|\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}^n nx\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ y la serie $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$ converge, entonces la serie dada converge uniformemente cualesquiera que sean los valores de x.

321. ¿Se le puede aplicar a la serie $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{2}}+\operatorname{arctg}\frac{x}{3\sqrt{3}}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{x}{n\sqrt{n}}$ el teorema de derivación término a término de las series?

Resolución. Vamos a comparar la serie dada con la convergente

$$x+\frac{x}{2^{3/2}}+\frac{x}{3^{3/2}}+\dots\frac{x}{n^{3/2}}+\dots$$

(para una x fija cualquiera). Entonces $u_n(x)=\operatorname{arctg}(x/n^{3/2})$, $v_n(x)=x/n^{3/2}$. Puesto que $\operatorname{arctg}\alpha$ y α son infinitésimos equivalentes, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n(x)}{v_n(x)}=$ $=1$ y según el segundo criterio de comparación llegamos a la conclusión de que la serie dada converge.

Hallamos la derivada del término general de la serie dada:

$$u_n'(x)=\frac{1/n^{3/2}}{1+x^2/n^3}=\frac{n^{3/2}}{x^2+n^3}.$$

La serie compuesta por las derivadas tiene la forma

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{2\sqrt{2}}{x^2+2^3}+\frac{3\sqrt{3}}{x^2+3^3}+\frac{4\sqrt{4}}{x^2+4^3}+\dots.$$

Notemos que los términos de la última serie son menores que los términos respectivos de la serie convergente $1+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}+\dots$. Por consiguiente, conforme al criterio de Weierstrass la serie compuesta por las derivadas converge uniformemente en el intervalo $]-\infty, +\infty[$ y a la serie dada se le puede aplicar el teorema de derivación de las series.

322. ¿Es correcto que a la serie

$$\cos x+\frac{1}{2}\cdot\cos 2x+\frac{1}{2^2}\cdot\cos 3x+\frac{1}{2^3}\cdot\cos 4x+\dots$$

se le aplique el teorema de integración de las series de funciones en el intervalo $[\pi/4, \pi/3]$?

Resolución. Los términos de la serie dada, cualquiera que sea el valor de x, son en valor absoluto menores que los términos respectivos de la progresión geométrica infinita decreciente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots.$$

Por eso según el criterio de Weierstrass la serie dada converge uniformemente en el intervalo $]-\infty, +\infty[$ y, por consiguiente, se le puede aplicar el teorema de integración de las series para un intervalo finito cualquiera $[a, b]$, en particular, para el intervalo $[\pi/4, \pi/3]$.

323. Se da la serie de funciones

$$\frac{3x+1}{x^2+x+1}+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^3+\dots.$$

¿Converge la serie en los puntos $x=1$, $x=2$ y $x=3$?

324. Investigar la convergencia de la serie de funciones

$$\frac{1!}{1}(x^2-4x+6)+\frac{2!}{2^2}(x^2-4x+6)^2+\frac{3!}{3^3}(x^2-4x+6)^3+\dots$$

en los puntos $x=1$ y $x=2$.

325. Hallar la región de convergencia de la serie

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\ldots.$$

326. Hallar la región de convergencia de la serie

$$1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots.$$

327. Hallar la región de convergencia de la serie

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2^2(x^2+1)^2}-\frac{1}{3^2(x^2+1)^3}+\frac{1}{4^2(x^2+1)^4}+\ldots.$$

328. Mostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{x^4+n^2}$ converge uniformemente en el intervalo $]-\infty, +\infty[$.

329. Mostrar que la serie

$$\frac{2x+1}{x+2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^3+\frac{1}{8}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^4+\ldots$$

converge uniformemente en el intervalo $[-1, 1]$.

330. Mostrar que la serie

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{8}+\ldots$$

converge no uniformemente en el intervalo $]-2, 2[$.

331. Mostrar que la serie

$$\frac{\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x}{3}+\frac{(\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x)^2}{3^2}+\frac{(\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x)^3}{3^3}+\ldots$$

converge en el intervalo $]-\infty, +\infty[$ y determinar el carácter de la convergencia.

332. ¿Se puede aplicar a la serie

$$\operatorname{sen} x+\frac{1}{2^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\frac{1}{3^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{3}+\frac{1}{4^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{4}+\ldots$$

el teorema de derivación de las series de funciones?

333. ¿Se puede aplicar a la serie $1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos^2 x}{2!}+\frac{\cos^3 x}{3!}+$ $+\ldots$ el teorema de integración de las series de funciones en un intervalo finito cualquiera $[a, b]$?

334. ¿Se puede aplicar a la serie

$$(x^2+1)+2(x^2+1)^2+3(x^2+1)^3+4(x^2+1)^4+\ldots$$

el teorema de derivación de las series de funciones?

§ 3. Series de potencias

Una serie de funciones de la forma

$$a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + \ldots + a_n (x - a)^n + \ldots,$$

donde a, a_0, a_1, ..., a_n son números reales, se llama serie *de potencias*.

La propiedad principal de series de potencias consiste en que *si la serie de potencias converge cuando $x = x_0$, entonces ella converge (y, además, absolutamente) para cualquier valor de x que satisfaga la desigualdad $|x - a| < |x_0 - a|$ (teorema de Abel)*.

Uno de los corolarios del teorema de Abel es el hecho de que para toda serie de potencias existe un *intervalo de convergencia* $|x - a| < R$, o bien $a - R < x < a + R$ con centro en el punto a, dentro del cual una serie de potencias converge absolutamente y fuera del cual ella diverge. En los extremos del intervalo de convergencia (en los puntos $x = A \pm R$) diversas series de potencias se comportan de un modo diferente: unas convergen absolutamente en ambos extremos; otras convergen condicionalmente en ambos extremos, o bien en uno de ellos convergen condicionalmente y en el otro divergen; unas terceras divergen en ambos extremos.

El número R, o sea, la mitad de la longitud del intervalo de convergencia, se llama *radio de convergencia* de una serie de potencias. En casos particulares el radio de convergencia R de una serie puede ser igual a cero o infinito. Si $R = 0$, entonces una serie de potencias sólo converge que para $x = a$; si $R = \infty$, entonces la serie converge sobre todo el eje numérico.

Para encontrar el intervalo o el radio de convergencia de una serie de potencias se puede usar uno de los procedimientos siguientes.

1. Si ninguno de los coeficientes de la serie a_1, a_2, ..., a_n, ... es igual a cero, o sea, la serie contiene sólo las potencias enteras positivas de la diferencia $x - a$, entonces

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{1}$$

a condición de que este límite (finito o infinito) exista.

2. Si la serie inicial tiene la forma

$$a_0 + a_1 (x - a)^p + a_2 (x - a)^{2p} + \ldots + a_n (x - a)^{np} + \ldots,$$

(donde p es un cierto número positivo entero: 2, 3, ...), entonces

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}. \tag{2}$$

3. Si la serie tiene coeficientes iguales a cero y la sucesión de los exponentes de la diferencia $x - a$ que han quedado en la serie es cualquiera (o sea, no forma una progresión aritmética, como en el caso precedente), entonces el radio de convergencia se puede determinar por la fórmula

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{3}$$

en la cual se utilizan solamente los valores a_n distintos del cero. (Esta fórmula es útil también en los casos 1 y 2).

4. En todos los casos el intervalo de convergencia se puede determinar aplicando directamente el criterio de d'Alembert o el de Cauchy a una serie compuesta por los valores absolutos de los términos de la serie inicial.

Escribiendo la serie en la forma

$$u_0 (x) + u_1 (x) + u_2 (x) + \ldots + u_n (x) + \ldots$$

(aquí $u_0 = a_0$, $u_n(x) = a_n(x-a)^N$, donde la dependencia de N con respecto a n puede ser cualquiera, con ello por a_n no se designa el coeficiente de $(x-a)^n$ sino el coeficiente del n-ésimo término de la serie), se encuentra el intervalo de convergencia con ayuda de las desigualdades:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1 \text{ o bien } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Notemos la siguiente propiedad de series de potencias: *las series obtenidas mediante derivación o integración término a término de una serie de potencias tienen el mismo intervalo de convergencia y la suma de las mismas dentro del intervalo de convergencia es igual, respectivamente, a la derivada y a la integral de la suma de la serie inicial.*

De este modo, si $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, entonces $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$,

$$\int\limits_a^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-a)^{n+1}}{n+1}, \text{ donde } -R < x-a < R.$$

Las operaciones de derivación e integración término a término se pueden efectuar todas las veces que se quiera con una serie de potencias. Por consiguiente ,la suma de una serie de potencias dentro de su intervalo de convergencia es función infinitamente derivable.

335. Investigar la convergencia de la serie de potencias

$$x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \ldots.$$

Resolución. Aquí $a_n = 1/n$, $a_{n+1} = 1/(n+1)$. Determinamos el radio de convergencia de la serie:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Por lo tanto, la serie converge para los valores de x que satisfacen la desigualdad $-1 < x < 1$.

Investigamos la convergencia de la serie en los extremos del intervalo. Si $x = 1$, entonces obtenemos la serie armónica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ la cual, como es sabido, diverge. Si $x = -1$, entonces obtenemos la serie $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$. Esta serie converge, ya que satisface las condiciones del criterio de Leibniz.

De suerte que la región de convergencia de la serie de potencias se determina por la desigualdad doble $-1 \leqslant x < 1$.

336. Investigar la convergencia de la serie

$$(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \ldots.$$

Resolución. Aquí $a_n = 1/n^2$, $a_{n+1} = 1/(n+1)^2$;

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

Por consiguiente, la serie converge si $-1 < x - 2 < 1$, o sea, $1 < x < 3$. Investigamos la convergencia de la serie en los extremos del intervalo. Si $x = 3$, obtenemos la serie $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ la cual converge, ya que la serie $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots$ converge cuando $p > 1$. Si $x = 1$, obtenemos la serie $-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots$. Esta serie converge (además, absolutamente), puesto que converge la serie compuesta por los valores absolutos de sus términos.

De suerte que la serie de potencias converge para los valores de x que satisfacen la desigualdad doble $1 \leqslant x \leqslant 3$.

337. Investigar la convergencia de la serie

$$1!\,(x-5) + 2!\,(x-5)^2 + 3!\,(x-5)^3 + \ldots.$$

Resolución. Aquí $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n+1)!$;

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

La serie converge solamente cuando $x - 5 = 0$, o sea, en el punto $x = 5$.

338. Investigar la convergencia de la serie

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Resolución. Tenemos $a_n = 1/n!$, $a_{n+1} = 1/(n+1)!$, $a_0 = 0$;

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Por consiguiente, la serie converge para cualquier valor de x. De ello, entre otras cosas, sacamos la conclusión de que el límite del término general para todo valor de x es igual a cero, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

339. Investigar la convergencia de la serie

$$1 + \frac{x^3}{10} + \frac{x^6}{10^2} + \frac{x^9}{10^3} + \ldots.$$

Resolución. La serie es una progresión geométrica con denominador igual a $q = x^3/10$. La serie converge si $|x^3/10| < 1$ y diverge si $|x^3/10| \geqslant 1$. Por lo tanto, el intervalo de convergencia de la serie se determina por la desigualdad doble $-\sqrt[3]{10} < x < \sqrt[3]{10}$. El mismo resultado se puede obtener utilizando las fórmulas (2) y (3).

340. Investigar la convergencia de la serie

$$2x^5 + \frac{4x^{10}}{3} + \frac{8x^{15}}{5} + \frac{16x^{20}}{7} + \ldots.$$

Resolución. Haciendo $x^5 = t$, obtenemos la serie

$$2t + \frac{4t^2}{3} + \frac{8t^3}{5} + \frac{16t^4}{7} + \ldots \qquad (*)$$

Aquí $a_n = 2^n/(2n-1)$, $a_{n+1} = 2^{n+1}/(2n+1)$. Determinamos el radio de convergencia de la serie (*):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(2n+1)}{2^{n+1}(2n-1)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1/n}{2-1/n} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la serie converge si $|t| < 1/2$.

Investigamos la convergencia de la serie en los extremos del intervalo. Si $t = 1/2$, entonces obtenemos la serie $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$. Esta serie diverge (se puede compararla con la serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$ cuyos términos son los de una serie armónica multiplicados por 1/2.) Para $t = -1/2$ obtenemos la serie $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$. Esta serie converge condicionalmente. Por consiguiente, la serie (*) converge si $-1/2 \leqslant t < 1/2$. Ahora bien, la serie dada converge si $-1/2 \leqslant x^5 < 1/2$, o sea $-1/\sqrt[5]{2} \leqslant x \leqslant 1/\sqrt[5]{2}$. El mismo resultado se puede obtener utilizando la fórmula (2).

341. Investigar la convergencia de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k \times (x-2)^{2k}$.

Resolución. En el caso dado tenemos $a_n = 0$ para $n = 2k-1$ y $a_n = \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$ si $n = 2k$. Para determinar el radio de convergencia lo más cómodo es aplicar la fórmula (3). Hallamos

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{2k+1}{k+1}} = \sqrt{2}.$$

Vamos a investigar la serie en los extremos del intervalo de convergencia. Haciendo $x - 2 = \sqrt{2}$, obtenemos la serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k\cdot 2^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k+\frac{1}{2}}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^k.$$

Pero $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^k = \sqrt{e} \neq 0$. Por lo tanto, para $x-2 = \sqrt{2}$ la serie diverge. Lo mismo tiene lugar también para $x-2 = -\sqrt{2}$. De suerte que la región de convergencia de la serie dada es $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$.

342. Investigar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$.

Resolución. Aplicamos el criterio de Cauchy haciendo $u_n = \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$. Entonces

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|x-1|^{n+1}}{n}; \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x-1| \leqslant 1, \\ \infty & \text{si} \quad |x-1| > 1. \end{cases}$$

De este modo, la serie converge si $|x-1| \leqslant 1$, o sea, en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2$.

343. Investigar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(n-1)/2}}{n!}$.

Resolución. Aplicamos el criterio de d'Alembert, haciendo $u_n = x^{n(n-1)/2}/n!$; $u_{n+1} = x^{n(n+1)/2}/(n+1)!$. Entonces

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^n}{n+1}; \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \leqslant 1, \\ \infty & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

De suerte que la serie converge si $|x| \leqslant 1$, o sea, sobre el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

344. Hallar la suma de la serie $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ $\dots (|x| < 1)$, diferenciando de término a término la serie $1 + x + x^2 + x^3 + \dots (|x| < 1)$.

Resolución. Valiéndonos de la fórmula de la suma de los términos de la progresión geométrica infinitamente decreciente $\left(S = \frac{a}{1-q}\right)$, obtenemos

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Queda por derivar la igualdad obtenida:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

345. Hallar la suma de la serie $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$ $\dots (|x| < 1)$.

Resolución. Integrando la igualdad

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

dentro de los límites de 0 a x, obtenemos

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = -\ln(1-x).$$

Esta serie converge en el intervalo $[-1, 1[$.

Investigar la convergencia de las series de potencias:

346. $\frac{x+1}{1!} \; \frac{(x+1)^2}{3!} \; \frac{(x+1)^3}{5!} + \dots$.

347. $(x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \dots$.

348. $\frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(x-1)^3}{2^3} + \dots$.

349. $x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \dots$.

350. $5x+\frac{5^2\cdot x^2}{2!}+\frac{5^3\cdot x^3}{3!}+\frac{5^4\cdot x^4}{4!}+\dots$.

351. $x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\frac{x^8}{4}+\dots$.

Indicación Hacer $x^2=t$.

352. $\frac{x^3}{8}+\frac{x^6}{8^2\cdot 5}+\frac{x^9}{8^3\cdot 9}+\frac{x^{12}}{8^4\cdot 13}+\dots$.

353. $\frac{x}{2+3}+\frac{x^2}{2^2+3^2}+\frac{x^3}{2^3+3^3}+\dots$.

354. $\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3+\frac{4}{5}\left(\frac{x-1}{2}\right)^4+\dots$.

355. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\frac{x^4}{4\cdot 5}+\dots$.

Hallar las sumas de las series:

356. $\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\frac{3x^2}{a^3}+\frac{4x^3}{a^4}+\dots$, si $|x|<a$.

357. $\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^4}{4a^3}+$, $\dots$, si $-a\leqslant x<a$.

358. $\frac{1\cdot 2}{a^2}+\frac{2\cdot 3}{a^3}\cdot x+\frac{3\cdot 4}{a^4}\cdot x^2+\dots$, si $|x|<a$

359. $-2x+4x^3-6x^5+8x^7-\dots$, si $|x|<1$.

§ 4 Desarrollo de funciones en series de potencias

1. Toda función infinitamente derivable en un intervalo $|x-x_0|<r$, o sea, $x_0-r<x<x_0+r$, puede ser desarrollada en este intervalo con una serie infinita de potencias, o sea, una *serie de Taylor* que converge hacia ella.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dots,$$

si en este intervalo se cumple la condición

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}=0,$$

donde $R_n(x)$ es el término residual de la fórmula de Taylor, $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$. Cuando $x_0=0$, obtenemos la llamada *serie de Maclaurin*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

Si en cierto intervalo que contiene el punto x_0 para cualquier n se cumple la desigualdad $|f^{(n)}(x)|<M$, donde M es una constante positiva, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$ y la función $f(x)$ es desarrollable en la serie de Taylor.

Citamos los desarrollos de las funciones siguientes en serie de Taylor:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots,\ -\infty<x<+\infty;$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \qquad -\infty < x < +\infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots. \qquad -\infty < x < +\infty;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots.$$

Este último desarrollo sirve:

$$\begin{array}{llll} \text{para} & m \geqslant 0, & \text{si} & -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ \text{para} & -1 < m < 0, & \text{si} & -1 < x \leqslant 1; \\ \text{para} & m \leqslant -1, & \text{si} & -1 < x < 1; \end{array}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \qquad -1 < x \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

2. Fórmula de Taylor para una función de dos variables independientes. Si una función $f(x, y)$ es derivable $n+1$ veces en cierto entorno del punto $P_0(x_0, y_0)$, entonces para todo punto $P(x, y) \in U(P_0)$ es válida la fórmula de Taylor

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[(x-x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y-y_0) f'_y(x_0, y_0)] +$$

$$+ \frac{1}{2!}[(x-x_0)^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0) + f''_{xy}(x_0, y_0) +$$

$$+ (y-y_0)^2 f''_{yy}(x_0, y_0)] + \frac{1}{3!}[(x-x_0)^3 f'''_{xxx}(x_0, y_0) +$$

$$+ 3(x-x_0)^2 (y-y_0) f'''_{xxy}(x_0, y_0) + 3(x-x_0)(y-y_0)^2 f'''_{yyy}(x_0, y_0) +$$

$$+ (y-y_0)^3 f'''_{yyy}(x_0, y_0)] + \ldots + \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial y} +\right.$$

$$\left. + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0\ y_0) + 0\rho^n),$$

donde

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

En el caso particular, cuando $x_0 = y_0 = 0$, la fórmula indicada reviste el aspecto:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}[x f'_x(0, 0) + y f'_y(0, 0)] + \frac{1}{2!}[x^2 f''_{xx}(0, 0) +$$

$$+ 2xy f''_{xy}(0, 0) + y^2 f''_{yy}(0, 0)] + \ldots + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0, 0) + 0(\rho^n),$$

donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, se llama *fórmula de Maclaurin.*

360. Desarrollar en serie de potencias la función $f(x) = 2^x$.

Resolución. Hallamos los valores de la función y de sus derivadas para $x = 0$:

$$f(x) = 2^x, \qquad f(0) = 2^0 = 1,$$
$$f'(x) = 2^x \ln 2, \qquad f'(0) = \ln 2,$$
$$f''(x) = 2^x \ln^2 2, \qquad f''(0) = \ln^2 2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x) = 2^x \cdot \ln^n 2; \qquad f^{(n)}(0) = \ln^n 2.$$

Como $0 < \ln 2 < 1$, entonces para una x fija tiene lugar la desigualdad $|f^{(n)}(x)| < 2^x$ para cualquier n. Por consiguiente, la función puede ser representada en la forma de la suma de la serie Taylor:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots .$$

En el caso dado

$$2^x = 1 + x\cdot\ln 2 + \frac{x^2\cdot\ln^2 2}{2!} + \frac{x^3\cdot\ln^3 2}{3!} + \dots, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Este desarrollo se puede obtener también de otro modo; basta en el desarrollo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

sustituir x por $x \ln 2$.

361. Desarrollar en serie de potencias la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Resolución. Derivamos la función $n + 1$ veces:

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x,$$
$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x,$$
$$f''(x) = 2\cos 2x = 2 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f'''(x) = -2^2\cdot\operatorname{sen} 2x = 2^2 \operatorname{sen}\left(2x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$f^{IV}(x) = -2^3\cdot\cos 2x = 2^3 \operatorname{sen}\left(2x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \operatorname{sen}\left[2x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right],$$
$$f^{(n+1)}(x) = 2^n\cdot\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right).$$

Hallamos los valores de las funciones $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}x$ en el punto $x = 0$ y el valor de $f^{(n+1)}(x)$ lo determinamos en el punto $x = c$ (véase la igualdad para determinar R_n). Obtenemos $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 0$, $f^{IV}(0) = -2^3$, $f^{V}(0) = 0$, $f^{VI}(0) = 2^5$, ..., $f^{(n+1)}(c) = 2^n\cdot\operatorname{sen}(2c + \pi n/2)$.

Hallamos el término residual:

$$R_n=\frac{2^n\cdot \operatorname{sen}(2c+\pi n/2)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}, \text{ o sea } R_n=\frac{1}{2}\,\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}\operatorname{sen}(2c+\pi n/2),$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2)x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ para cualquier x y $\operatorname{sen}(2c+\pi n/2)$ es una magnitud limitada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$. Por consiguiente, la función $f(x)=$ $=\operatorname{sen}^2 x$ puede ser representada en forma de la suma de una serie de Taylor:

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}2^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{3^7}{8!}x^8+\ldots$$

Este problema puede ser resuelto también de otro modo. Sustituimos $\cos 2x$ en la igualdad $\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ por su desarrollo en serie de potencias:

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{x!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots.$$

Efectuando transformaciones simples, obtenemos el desarrollo hallado anteriormente del $\operatorname{sen}^2 x$.

362. Desarrollar en serie de potencias la función e^{-x^2}.

Resolución. En el desarrollo

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty)$$

sustituimos x por $-x^2$; obtenemos

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots\ (-\infty<x<+\infty).$$

363. Desarrollar $\ln x$ en serie de potencias de $x-1$.

Resolución. En el desarrollo

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{1}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ (-1<x\leqslant 1)$$

sustituimos x por $x-1$, obtenemos

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots\ (0<x\leqslant 2).$$

364. Desarrollar $1/x$ en serie de potencias de $x-2$.

Resolución. Utilizamos la igualdad $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1/2}{1+(x-2)/2}$. El segundo miembro de esta igualdad se puede considerar la suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente cuyo primer término es $a=1/2$ y cuyo denominador es $q=-(x-2)/2$. De aquí obtenemos

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots,$$

o sea,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\ldots$$

Puesto que $|(x-2)/2|<1$, entonces $0<x<4$.

364a. Desarrollar por la fórmula de Taylor la función $f(x, y) = x^2-xy+2y^2-3x+4y+8$ en el entorno del punto $P_0(-3, 1)$

Resolución. Hallemos las derivadas parciales y calculemos sus valores en el punto $P_0(-3, 1)$:

$$f'_x(x, y)=2x-y-3,\quad f'_y(x, y)=-x+3y+4,$$

$$f''_{xx}(x, y)=2,\quad f''_{xy}(x, y)=-1,\quad f''_{yy}(x, y)=4,$$

$$f(-3, 1)=35,\quad f'_x(-3, 1)=-10,\quad f'_y(-3, 1)=11,$$

$$f''_{xx}(-3, 1)=2,\quad f''_{xy}(-3, 1)=-1,\quad f''_{yy}(-3, 1)=4.$$

Por la fórmula de Taylor obtenemos el desarrollo buscado

$$f(x, y)=35-10(x+3)+11(y-1)+(x+3)^2-(x+3)(y-1)+ \\ +2(y-1)^2.$$

364b. Desarrollar por la fórmula de Taylor en el entorno del punto $P_0(1, 1)$ hasta los términos de segundo orden, inclusive, la función $f(x, y)=x^2\ln y$.

Resolución. Hallemos las derivadas parciales hasta el segundo orden, inclusive, $f'_x(x, y)=2x\ln y$, $f'_y(x, y)=\dfrac{x^2}{y}$,

$$f''_{xx}(x, y)=2\ln y)\quad f''_{xy}(x, y)=\frac{2x}{y},\quad f''_{yy}(x, y)=-\frac{x^2}{y^2}.$$

Determinemos los valores de la función y de las derivadas en el punto $P_0(1, 1)$:

$$f(1, 1)=0,\quad f'_x(1, 1)=0,\quad f'_y(1, 1)=1,\quad f''_{xx}(1, 1)=0,$$

$$f''_{xy}(1, 1)=2,\quad f''_{yy}(1, 1)=-1.$$

Por la fórmula de Taylor tenemos el desarrollo

$$f(x, y)=(y-1)+2(x-1)(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+0(\rho^2),$$

donde $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

364c. Desarrollar por la fórmula de Maclaurin hasta los términos de tercer orden, inclusive, la función $f(x, y)=\operatorname{sh} y\cdot\cos x$.

Resolución. Hallemos las derivadas parciales hasta los términos de tercer orden, inclusive:

$$f'_x(x, y)=-\operatorname{sh} y\cdot\operatorname{sen} x,\quad f'_y(x, y)=\operatorname{ch} y\cdot\cos x,$$

$$f''_{xx}(x, x)=-\operatorname{sh} y\cdot\cos x,\quad f''_{xy}(x, y)=-\operatorname{ch} y\cdot\operatorname{sen} x,$$

$$f''_{yy}(x, y)=\operatorname{sh} y\cdot\cos x,\quad f'''_{xxx}(x, y)=\operatorname{sh} y\cdot\operatorname{sen} x,\quad f'''_{xxy}(x, y)=-\operatorname{ch} y\cdot\cos x,$$

$$f'''_{xyy}(x, y)=-\operatorname{sh} y\cdot\operatorname{sen} x,\quad f'''_{yyy}(x, y)=\operatorname{ch} y\cdot\cos x,$$

Determinemos los valores de la función y de las derivadas para $x_0 = y_0 = 0$:

$$f(0,\ 0) = 0,\quad f'_x(0,\ 0) = 0,\quad f'_y(0,\ 0) = 1,\quad f''_{xx}(0,\ 0) = 0,$$
$$f''_{xy}(0,\ 0) = 0,\quad f''_{yy}(0,\ 0) = 0,\quad f'''_{xxx}(0,\ 0) = 0,\quad f'''_{xyy}(0,\ 0) = -1,$$
$$f'''_{xyy}(0,\ 0) = 0,\quad f'''_{yyy}(0,\ 0) = 1.$$

Por consiguiente, utilizando la fórmula de Maclaurin, obtenemos el desarrollo

$$f(x,\ x) = y - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{6}y^3 + 0(\rho^3),$$

donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

364d. Desarrollar por la fórmula de Maclaurin hasta los términos de cuarto orden, inclusive, la función $f(x,\ y) = e^{-y}\operatorname{sen} x$.

Resolución. Hallemos las derivadas parciales hasta el cuarto orden inclusive

$$f'_x(x,\ y) = e^{-y}\cos x,\quad f'_y(x,\ y) = -e^{-y}\operatorname{sen} x,\quad f''_{xx}(x,\ y) = -e^{-y}\operatorname{sen} x,$$
$$f''_{xy}(x,\ y) = -e^{-y}\cos x,\quad f''_{yy}(x,\ y) = e^{-y}\operatorname{sen} x\quad f'''_{xxx}(x,\ y) = -e^{-y}\cos x,$$
$$f'''_{xxy}(x,\ y) = e^{-y}\operatorname{sen} x,\quad f'''_{xyy}(x,\ y) = e^{-y}\cos x,\quad f'''_{yyy}(x,\ y) = -e^{-y}\operatorname{sen} x,$$
$$f^{IV}_{xxxx}(x,\ y) = e^{-y}\operatorname{sen} x,\quad f^{IV}_{xxxy}(x,\ y) = e^{-y}\cos x,\quad f^{IV}_{xxyy}(x,\ y) = -e^{-y}\operatorname{sen} x$$
$$f^{IV}_{xyyy}(x,\ y) = -e^{-y}\cos x,\quad f^{IV}_{yyyy}(x,\ y) = e^{-y}\operatorname{sen} x.$$

Determinemos ahora los valores de la función y de las derivadas para $x_0 = y_0 = 0$:

$$f(0,\ 0) = 0,\quad f'_x(0,\ 0) = 1,\quad f'_y(0,\ 0) = 0\quad f''_{xx}(0,\ 0) = 0,$$
$$f''_{xy}(0,\ 0) = -1,\quad f''_{xy}(0,\ 0) = 0,\quad f'''_{xxx}(0,\ 0) = -1,\quad f'''_{xxy}(0,\ 0) = 0,$$
$$f'''_{xyy}(0,\ 0) = 1,\quad f'''_{yyy}(0,\ 0) = 0,\quad f^{IV}_{xxxx}(0,\ 0) = 0,\quad f^{IV}_{xxxy}(0,\ 0) = 1,$$
$$f^{IV}_{xxyy}(0,\ 0) = 0,\quad f^{IV}_{xyyy}(0,\ 0) = -1,\quad f^{IV}_{yyyy}(0,\ 0) = 0.$$

Utilizando la fórmula de Maclaurin, obtenemos el desarrollo

$$f(x,\ y) = x - xy - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}x^3y - \frac{1}{6}xy^3 + 0(\rho^4),$$

donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Desarrollar en series de potencias las funciones siguientes:

365. $f(x) = 3^x$. **366.** $f(x) = e^{-2x}$. **367.** $f(x) = \cos^2 x$.

368. $f(x) = \operatorname{sh}^2 x$. **369.** $f(x) = \ln(x + a)$, $a > 0$.

370. $f(x) = \sqrt{x + a}$, $a > 0$.

370a. Desarrollar por la fórmula de Taylor la función $f(x,\ y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ en el entorno del punto $P(2,\ 1)$.

370b. Desarrollar por la fórmula de Taylor la función $f(x,\ y) = 4x^3 - x^2 + 2xy - y^2 + 5x + y - 8$ en el entorno del punto $P(1,\ -1)$.

370c. Desarrollar por la fórmula de Taylor la función $f(x,\ y) = 5x^2 + 9y^2 - 2x + 3y - 5$ en el entorno del punto $P(1,\ -1)$.

370d. Desarrollar por la fórmula de Taylor la función $f(x, y) = \frac{x}{y}$ en el entorno del punto $P(-1, 1)$ hasta los términos de tercer orden, inclusive.

370e. Desarrollar la función $f(x, y) = xe^{-y}$ por la fórmula de Taylor en el entorno del punto $(1, 0)$ hasta los términos de segundo orden, inclusive.

370f. Desarrollar la función $f(x, y) = x\cos^2 y$ por la fórmula de Taylor en el entorno del punto $(-1, 0)$ hasta los términos de tercer orden, inclusive.

371. $f(x) = \operatorname{ch}^2(x^2)$.

§ 5. Cálculos aproximados de los valores de las funciones mediante series de potencias

Aquí es útil tener en cuenta los desarrollos en series de potencias de las funciones e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, citados en el parágrafo precedente.

Para calcular los logaritmos es efectiva la fórmula

$$\ln(t+1) = \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \ldots\right].$$

La serie en el segundo miembro de la igualdad converge tanto más rápidamente cuanto mayor es t.

Para calcular el valor aproximado de la función $f(x)$ desarrollada en una serie de potencias se conservan los primeros n términos (n es una magnitud finita), omitiendo los demás. Para la evaluación del error del valor aproximado hallado, es necesario estimar la suma de los términos omitidos. Si la serie dada es de términos de signo constante, entonces la serie formada por los términos omitidos se compara con una progresión geométrica infinita decreciente. Si se trata de una serie de términos de signos cualesquiera que satisfagan el criterio de Leibniz, se utiliza la estimación $|R_n| < u_{n+1}$, donde u_{n+1} es el primero de los términos omitidos de la serie.

372. Estimar el error de la igualdad aproximada

$$e^x \cong 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < x < n+1.$$

Resolución. El error de esta igualdad aproximada se determina por la suma de los términos que siguen $x^n/n!$ en el desarrollo de e^x:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \ldots,$$

o bien

$$R_n = \frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right].$$

Sustituyendo cada uno de los factores $n+2$, $n+3$, $n+4$, ... por una menor cantidad $n+1$, obtenemos la desigualdad

$$R_n < \frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{n+1}\right)^3 + \ldots\right].$$

Sumamos la progresión geométrica infinita decreciente indicada entre corchetes:

$$R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x/(n+1)}{1-x/(n+1)}, \quad \text{o sea,} \quad R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}.$$

373. Calcular $\sqrt{e}$ con precisión hasta 0,00001.

Resolución. Utilizando el desarrollo de e^n en serie, obtenemos

$$\sqrt{e} = e^{1/2} = 1 + \frac{1}{1!\cdot 2} + \frac{1}{2!\cdot 2^2} + \frac{1}{3!\cdot 2^3} + \dots .$$

Determinemos el número n de modo que el error de la igualdad aproximada

$$\sqrt{e} \cong 1 + \frac{1}{1!\cdot 2} + \frac{2}{2!\cdot 2^2} + \frac{1}{n!\, 2^n}$$

no exceda de 0,00001. Utilizamos la estimación del error dada en el problema precedente. Hacemos $x = 1/2$; entonces

$$R_n < \frac{1}{n!\, 2^n} \cdot \frac{1/2}{n+1/2}, \quad \text{o sea,} \quad R_n < \frac{1}{n!\, 2^n} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Efectuando la selección, determinamos para qué valor de n se cumplirá la desigualdad $R_n < 0{,}00001$. Haciendo, por ejemplo, $n = 3$, obtenemos $R_3 < 1/(8\cdot 6\cdot 7)$, o sea, $R_3 < 1/366$. Sea, luego, $n = 5$; de ello $R_5 < 1/(32\cdot 120\cdot 11)$, o sea, $R_5 < 1/42240$. Sea, por último, $n = 6$, de ello $R_6 < 1/(64\cdot 720\cdot 13)$, o sea, $R_6 < 1/100000$. De suerte que tomamos $n = 6$:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1!\, 2} + \frac{1}{2!\, 2^2} + \frac{1}{3!\, 2^3} + \frac{1}{4!\, 2^4} + \frac{1}{5!\, 2^5} + \frac{1}{6!\, 2^6}.$$

Adicionamos los sumandos:

1,000000
0,500000
0,125000
0,020833 (6 veces menos que el sumando precedente)
0,002604 (8 veces menos que el sumando precedente)
0,000260 (10 veces menos que el sumando precedente)
0,000022 (12 veces menos que el sumando precedente)
1,648719.

Esto quiere decir que $\sqrt{e} = 1{,}64872$. A cada sumando lo hemos calculado con precisión de hasta 0,000001, para no obtener, al sumar, un error que exceda de 0,00001.

374. Calcular $1/\sqrt[5]{e}$ con precisión de hasta 0,00001.

Resolución. Tenemos

$$1/\sqrt[5]{e} = e^{-1/5} = 1 - \frac{1}{1!\, 5} + \frac{1}{2!\cdot 5^2} - \frac{1}{3!\, 5^3} + \dots .$$

Utilizamos la igualdad aproximada

$$1/\sqrt[5]{e} \cong 1 - \frac{1}{1!\, 5} + \frac{1}{2!\, 5^2} - \frac{1}{3!\, 5^3} + \frac{1}{4!\, 5^4}.$$

Hemos tomado 5 sumandos, ya que la serie de términos de signos cualesquiera satisface las condiciones del criterio de Leibniz y por eso el error admisible debe ser, en valor absoluto, menor que el primero entre los términos omitidos de la serie. El primero entre los términos omitidos es igual a $1/(5!\ 5^5)$. No es difícil ver que $1/(5!\ 5^5) < 0,00001$.

Vamos a adicionar los sumandos que están en los lugares impares y pares:

$$\begin{array}{r} 1,000000 \\ +0,020000 \\ 0,000067 \\ \hline 1,020067; \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,200000 \\ +0,001333 \\ \hline 0,201333. \end{array}$$

Restando de la primera suma la segunda, obtenemos $1,020067 - 0,201333 = 0,818734$. De suerte que $1/\sqrt[5]{e} \cong 0,81873$.

375. Valiéndose del desarrollo de $\cos x$ en serie calcular $\cos 18°$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Tenemos

$$\cos 18° = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - \ldots;$$

$$\pi/10 = 0,31416, \quad (\pi/10)^2 = 0,09870, \quad (\pi/10)^4 = 0,00974.$$

Basta tomar tres términos de la serie, ya que $(1/6)\cdot(\pi/10)^6 < 0,0001$. Entonces

$$\cos 18° \cong 1 - \frac{0,09870}{2} + \frac{0,00974}{24}; \quad \cos 18° \cong 0,9511.$$

376. Calcular $\sqrt[5]{1,1}$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Utilizamos el desarrollo de $(1+x)^m$ en serie, haciendo $x = 0,1$, $m = 1/5$. Tenemos

$$\sqrt[5]{1,1} = (1+0,1)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0,1 + \frac{(1/5)(1/5-1)}{2!}\,0,01 +$$

$$+ \frac{(1/5)(1/5-1)(1/5-2)}{3!}\,0,001 + \ldots = 1 + 0,02 - 0,0008 + 0,000048 - \ldots.$$

Omitimos el cuarto término y los que le siguen, ya que el cuarto término es menor que 0,0001. De suerte que $\sqrt[5]{1,1} \cong 1,0192$.

377. Calcular $\sqrt[3]{130}$ con precision de hasta 0,001.

Resolución. Puesto que 5^3 es el cubo del número entero más próximo al número 130, es conveniente representar el número 130 en forma de la suma de dos sumandos: $130 = 5^3 + 5$. Entonces

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}} = 5(1+0,04)^{1/3} = 5\left[1 + \frac{1}{3}\cdot 0,04 + \right.$$

$$\left. + \frac{(1/3)(1/3-1)}{2!}\cdot 0,0016 + \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{3!}\cdot 0,000064 + \ldots\right] =$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\cdot 0,2 - \frac{1}{9}\cdot 0,008 + \frac{5}{81}\cdot 0,00032 - \ldots.$$

El cuarto término es menor que 0,001, por eso este término y los que le siguen pueden ser omitidos. De suerte que $\sqrt[3]{130} \cong 5 + 0{,}0667 - 0{,}0009$, o sea, $\sqrt[3]{130} \cong 5{,}066$.

378. Calcular $\ln 1{,}04$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Valgámonos del desarrollo de $\ln(1+x)$ en serie:

$$\ln 1{,}04 = \ln(1+0{,}04) = 0{,}04 - \frac{0{,}04^2}{2} + \frac{0{,}04^3}{4} - \frac{0{,}04^4}{4} + \ldots$$

o bien

$$\ln 1{,}04 = 0{,}04 - 0{,}0008 + 0{,}000021 - 0{,}00000064 + \ldots,$$

de donde $\ln 1{,}04 \cong 0{,}0392$.

379. En un triángulo rectángulo los catetos son iguales a 1 cm y 5 cm. Determinar el ángulo agudo del triángulo que está opuesto al cateto menor con precisión de hasta 0,001 radianes.

Resolución. Puesto que $\operatorname{tg} \alpha = 1/5$, entonces $\alpha = \operatorname{arctg}(1/5)$. Utilizamos el desarrollo

$$\alpha = \operatorname{arctg}(1/5) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \ldots,$$

de donde $\alpha \cong 0{,}2 - 0{,}0027$, o sea, $\alpha \cong 0{,}197$.

380. Estimar el error de la igualdad aproximada

$$\ln(t+1) \cong \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2t+1)^{2n-1}}\right].$$

Resolución. El problema se reduce a la estimación de la suma del resto de la serie

$$R_n = 2\left[\frac{1}{(2n+1)(2t+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)(2t+1)^{2n+3}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(2n+5)(2t+1)^{2n+5}} + \ldots\right].$$

Sustituyendo cada uno de los factores $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$, ... por el número menor $2n+1$, obtenemos la desigualdad

$$R_n < \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{(2t+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+3}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+5}} + \ldots\right].$$

Sumamos la progresión geométrica infinita decreciente puesta entre corchetes:

$$R_n < \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1/(2t+1)^{2n+1}}{1 - 1/(2t+1)^2} = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2t+1)^{2n-1}[(2t+1)^2-1]} =$$
$$= \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2t+1)^{2n-1} \cdot 4t(t+1)}, \text{ o sea,}$$
$$R_n < \frac{1}{2(2n+1) \cdot t(t+1) \cdot (2t+1)^{2n-1}}.$$

381. Calcular $\ln 2$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. En la fórmula para determinar $\ln(t+1)$ y en la desigualdad para estimar R_n suponemos $t=1$:

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots\right); \quad R_n < \frac{1}{4(2n+1)\cdot 3^{2n-1}}.$$

Por medio de la selección vamos a determinar n de modo que se cumpla la desigualdad $R_n < 0{,}0001$. Si $n=2$, entonces $R_2 < 1/(4\cdot 5\cdot 3^3)$; $R_2 < 1/540$; si $n=3$, entonces $R_3 < 1/(4\cdot 7\cdot 3^5)$; $R_3 < 1/6804$; si $n=4$, entonces $R_4 < 1/(4\cdot 9\cdot 3^7)$; $R_4 < 1/10\,000$.

De suerte que $n=4$ y para determinar $\ln 2$ obtenemos la igualdad aproximada

$$\ln 2 \cong 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}\right).$$

Adicionando estos cuatro sumandos, nos queda
$\ln 2 \approx 0{,}66667+0{,}02469+0{,}00165+0{,}00013=0{,}69314 \approx 0{,}6931.$

382. Calcular $\ln 5$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Hacemos $t=4$. Entonces

$$\ln 5 = 2\ln 2 + 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\ldots\right); \quad R_n < \frac{1}{40\cdot(2n+1)\cdot 9^{2n-1}}.$$

Si $n=1$, entonces $R_1 < 1/(40\cdot 3\cdot 9)$; $R_1 < 1/1080$; si $n=2$, entonces $R_2 < 1/(40\cdot 5\cdot 9^3)$; $R_2 < 1/10\,000$. Esto quiere decir que basta tomar dos términos de la serie. Por consiguiente,

$$\ln 5 \cong 2\ln 2 + 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}\right) \approx 1{,}38628+0{,}22222+0{,}00090=1{,}60940.$$

383. Demostrar la validez de la identidad

$$\pi/4 = \operatorname{arctg}(1/2) + \operatorname{arctg}(1/3)$$

y calcular π con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Suponiendo que en la igualdad

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$$

$x=1/2$, $y=1/3$, obtenemos

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}, \text{ o bien } \pi = 4\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right).$$

Utilizando el desarrollo de $\operatorname{arctg} x$ en serie, tenemos

$$\pi = 4\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\ldots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots\right)\right].$$

Efectuamos la adición:

$$\begin{array}{r} 2,00000 \\ 0,02500 \\ 0,00087 \\ +0,00004 \\ 1,33333 \\ 0,00329 \\ 0,00002 \\ \hline 3,36255 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,16667 \\ 0,00446 \\ +0,00018 \\ 0,04938 \\ 0,00026 \\ \hline 0,22095 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3,36255 \\ -\,0,22095 \\ \hline 3,14160 \end{array}$$

De suerte que $\pi = 3,1416$.

Para calcular el número π se pueden utilizar series que convergen más rápidamente que las recién citadas.

384. Calcular el número e con precisión de hasta 0,00001.

385. Calcular $1/\sqrt{e}$ con precisión de hasta 0,00001.

386. Calcular $\operatorname{sen} 9^\circ$ con precisión de hasta 0,0001.

387. Calcular $\operatorname{ch} 0,3$ con precisión de hasta 0,0001.

388. Calcular $\sqrt[3]{1,06}$ con precisión de hasta 0,0001.

389. Calcular $\sqrt{27}$ con precisión de hasta 0,001.

390. Calcular $\ln 0,98$ con precisión de hasta 0,0001.

391. Calcular $\ln 1,1$ con precisión de hasta 0,0001.

392. Calcular $\ln 3$ con precisión de hasta 0,0001.

393. Calcular $\ln 10$ con precisión de hasta 0,0001.

394. Hallar el valor positivo mínimo de x que satisfaga la ecuación trigonométrica $2 \operatorname{sen} x - \cos x = 0$.

395. Calcular π con precisión de hasta 0,001, haciendo $x = 1/\sqrt{3}$ en el desarrollo de $\operatorname{arctg} x$.

§ 6 Aplicación de series de potencias para el cálculo de límites e integrales definidas

396. Hallar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \operatorname{sen} x}$.

Resolución sustituyendo e^x y $\operatorname{sen} x$ por sus desarrollos en series de potencias, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!}}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \dots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots} = 2.$$

397. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\ldots}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)x^2+\ldots\right]=\frac{1}{6}.$$

398. Calcular $\int\limits_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ con precisión de hasta 0,001.

Resolución. Sustituyendo en la expresión subintegral $\cos x$ por su desarrollo en serie de potencias, obtendremos

$$\int\limits_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx=\int\limits_0^{1/2}\frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx=\left[\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\ldots\right]_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{4}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\ldots\approx 0{,}25-0{,}0017=0{,}2483.$$

399. Calcular $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Hallamos

$$\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\int\limits_0^{0,1}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots}{x}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{0,1}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\ldots\right)dx=$$

$$=\left[x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{16}x^4+\ldots\right]_0^{0,1}=0{,}1-\frac{1}{4}\cdot 0{,}01+$$

$$+\frac{1}{9}\cdot 0{,}001-\ldots\approx 0{,}098.$$

400. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

401. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

402. Calcular $\int_0^{0,2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ con precisión de hasta 0,0001.

403. Calcular $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$ con precisión de hasta 0,001.

§ 7. Números complejos y series con términos complejos

1. Numeros complejos. Se llaman *números complejos* a los que tienen la forma $x + iy$, donde x e y son números reales e i es la *unidad imaginaria* definida por la igualdad $i^2 = -1$. Los números reales x e y se denominan, respectivamente, *parte real* y *parte imaginaria* del número complejo z. Para ellos se introducen las designaciones $x = \operatorname{Re} z$; $y = \operatorname{Im} z$.

Geométricamente cada número complejo $z = x + iy$ se representa por el punto $M(x, y)$ del plano de coordenadas xOy (fig. 24).

En este caso el plano xOy se llama plano numérico complejo o *plano de la variable compleja z*.

Las coordenadas polares r y φ del punto M del plano, que es la representación del número complejo z, se llaman *módulo* o *argumento* del número complejo z; para ellas se introducen las designaciones: $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

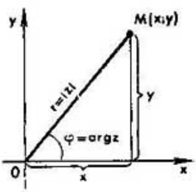

Fig. 24

Como a cada punto del plano corresponde un conjunto innumerable de los valores del ángulo polar que se distinguen uno del otro en $2k\pi$ (k es un número entero, positivo o negativo), $\operatorname{Arg} z$ es una función de infinitos valores de z.

Aquel valor entre los del ángulo polar φ que satisface la desigualdad $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ se denomina *valor principal* del argumento z y se designa por $\arg z$.

En adelante, la designación φ la conservaremos solamente para el valor principal del argumento z, o sea, hacemos $\varphi = \arg z$, en virtud de lo cual para todos los demas valores de z obtendremos la igualdad

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \varphi + 2k\pi.$$

La relación entre el módulo y el argumento del número complejo z y sus partes real e imaginaria se establecen por las fórmulas:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \operatorname{sen} \varphi.$$

De ello

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos \varphi = x/|z| = x/\sqrt{x^2 + y^2}; \ \operatorname{sen} \varphi = y/|z| = y/\sqrt{x^2 + y^2}.$$

El argumento de z se puede determinar también por la fórmula

$$\arg z = \operatorname{arctg} (y/x) + C,$$

donde $C = 0$ para $x > 0$, $C = \pi$ para $x < 0$, $y > 0$; $C = -\pi$ para $x < 0$, $y < 0$.

Sustituyendo x e y en la notación del número complejo $z = x + iy$ por sus expresiones mediante r y φ, obtenemos la así llamada *forma trigonométrica del número complejo*:

$$z = r (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

Los números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se consideran iguales si, y sólo si, ellos tienen iguales, por separado, las partes reales e imaginarias:

$$z_1 = z_2 \text{ si } x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

Para los números representados en la forma trigonométrica la igualdad tiene lugar si los módulos de estos números son iguales y los argumentos se distinguen en un entero múltiplo de 2π:

$$z_1 = z_2 \text{ si } |z_1| = |z_2| \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi.$$

Dos números complejos $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$ que tienen partes reales iguales y partes imaginarias contrarias se dicen *conjugados*. Para los números complejos conjugados se cumplen las relaciones

$$|z_1| = |z_2|;\ \arg z_1 = -\arg z_2$$

(esta última igualdad se puede expresar en la forma $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = 2k\pi$).

Las operaciones sobre los números complejos se determinan por las reglas siguientes.

Adición. Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

La adición de los números complejos se subordina a las leyes conmutativa y asociativa:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3.$$

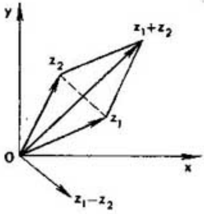

Fig. 25

Sustracción. Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Para la interpretación geométrica de adición y sustracción de los números complejos es útil no representarlos por puntos sobre el plano z sino por los vectores: el número $z = x + iy$ se representa por el vector OM que tiene el origen en el punto O (punto «nulo» del plano, o sea, el origen de las coordenadas) y el extremo en el punto $M(x, y)$. Entonces la adición y la sustracción de los puntos complejos se cumple según la regla de adición y sustracción de vectores (fig. 25).

Tal interpretación geométrica de las operaciones de adición y sustracción de los vectores permite definir fácilmente los teoremas sobre el módulo de suma y diferencia de dos números complejos y sobre la suma de varios números complejos, expresados por las desigualdades:

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_k| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_k|.$$

Además, es útil recordar que el *módulo de diferencia de dos números complejos z_1 y z_2 es igual a la distancia entre los puntos que son sus representaciones sobre el plano z*: $|z_1 - z_2| = d(z_1, z_2)$.

Multiplicación. Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Ahora bien, los números complejos se muittplican como binomios y en este caso i^2 se sustituye por -1.

Si $z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 - i \operatorname{sen}\varphi_2)$, entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Por lo tanto, el *módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores y el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores.*

La multiplicación de los números complejos se subordina a las leyes conmutativa, asociativa y distributiva (respecto a la adición):

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1; \qquad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3;$$
$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

División. Para determinar el cociente de dos números complejos representados en la forma algebraica es necesario multiplicar el dividendo y el divisor por el número conjugado con el divisor:

$$z_1 : z_2 = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$
$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i\,(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Si z_1 y z_2 se dan en forma trigonométrica, entonces

$$z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Así, pues, el *módulo del cociente es igual al cociente de los módulos del dividendo y del divisor y el argumento del cociente es igual a la diferencia los argumentos del dividendo y del divisor.*

Elevación a potencia. Si $z = x + iy$, entonces

$$z^n = (x + iy)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot iy + \ldots + (iy)^n$$

(n es un número entero positivo); en la expresión obtenida es necesario sustituir las potencias de i por sus valores:

$$i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1; \quad i^5 = i, \ \ldots$$

y en el caso general

$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i.$$

Si $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, entonces

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$$

(aquí n puede ser tanto un número entero positivo como un número negativo).

En particular,

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi$$

(*fórmula de Moivre*).

Extracción de una raíz. Si n es un número entero positivo y $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, entonces la raíz de n-ésima potencia extraída del número complejo z tiene n difrentes valores que se determinan por la fórmula

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

404. Hallar $(z_1z_2)/z_3$ si $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = 1 + 2i$.

Resolución. Tenemos

$$z_1z_2 = (3 + 5i)(2 + 3i) = 6 + 9i + 10i - 15 = -9 + 19i,$$

$$\frac{z_1z_2}{z_3} = \frac{-9+19i}{1+2i} = \frac{(-9+19i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-9+18i+19i+38}{1+4} = \frac{29}{5} + \frac{37}{5}i.$$

405. Representar en la forma trigonométrica el número complejo $z = 2 + 5i$.

Resolución. Obtenemos el módulo del número complejo: $r = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \cong 5{,}385$. Hallamos el valor principal del argumento: $\operatorname{tg} \varphi = 5/2 = 2{,}5$, $\varphi = 68°12'$. Por lo tanto, $z = 5{,}385\ (\cos 68°12' + i \operatorname{sen} 68°12')$.

406. Representar en forma trigonométrica el número complejo $z = 2\sqrt{3} - 2i$.

Resolución. Hallamos

$r = \sqrt{12+4} = 4$; $\quad \operatorname{sen} \varphi = -2/4 = -1/2$; $\quad \cos \varphi = 2\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}/2$; $\quad \varphi = -\pi/6$,

o sea,

$$z = 4\,[\cos(-\pi/6) + i \operatorname{sen}(-\pi/6)].$$

407. Representar en forma trigonométrica los números complejos $1,\ i,\ -1,\ -i$.

Resolución. Tenemos

$$1 = 1 + 0i = 1 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0),$$
$$i = 0 + 1 \cdot i = 1 \cdot [\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)],$$
$$-1 = -1 + 0 \cdot i = 1 \cdot (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi),$$
$$-i = 0 - 1 \cdot i = 1 \cdot [\cos(-\pi/2) + i \operatorname{sen}(-\pi/2)].$$

408. Representar los números $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$, $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ en la forma trigonométrica y luego hallar el número complejo $z_1/(z_2z_3)$.

Resolución. Hallamos

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = 1, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \pi/4,$$
$$z_1 = \sqrt{2}\,[\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)];$$
$$r_2 = |z_2| = \sqrt{3+1} = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = 1/\sqrt{3}, \quad \varphi_2 = \arg z_2 = \pi/6,$$
$$z_2 = 2\,[\cos(\pi/6) + i \operatorname{sen}(\pi/6)];$$
$$r_3 = |z_3| = \sqrt{3+1} = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \sqrt{3}, \quad \varphi_3 = \arg z_3 = \pi/3,$$
$$z_3 = 2\,[\cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3)].$$

Por consiguiente,

$$z_2z_3 = 2 \cdot 2\,[\cos(\pi/6 + \pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/6 + \pi/3)] = 4\,[\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)].$$

$$\frac{z_1}{z_2z_3} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,[\cos(-\pi/4) + i \operatorname{sen}(-\pi/4)] =$$
$$= \frac{1}{4}(1 - i).$$

409. Hallar todos los valores de $\sqrt[3]{8+i}$.

Resolución. Escribimos el número complejo $z=\sqrt[3]{8+i}$ en forma trigonométrica. Tenemos $r=|z|=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}\cong 8{,}062$, $\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}(1/8)=7°6'$, o sea, $z=8{,}062\,(\cos 7°6'+i\,\operatorname{sen} 7°6')$. Por lo tanto,

$$\sqrt[3]{8+i}=\sqrt[3]{8{,}062}\cdot\left(\cos\frac{7°6'+360°k}{3}+i\,\operatorname{sen}\frac{7°6'+360°k}{3}\right)=$$

$$=2{,}0052\,[\cos(2°22'+120°k)+i\,\operatorname{sen}(2°22'+120°k)].$$

Si $k=0$, entonces $w_0=2{,}0052\,(\cos 2°22'+i\,\operatorname{sen} 2°22')$;

si $k=1$, entonces $w_1=2{,}0052\,(\cos 122°22'+i\,\operatorname{sen} 122°22')$;

si $k=2$, entonces $w_2=2{,}0052\,(\cos 242°22'+i\,\operatorname{sen} 242°22')$.

Por consiguiente, $w_0=2{,}0034+0{,}0828i$; $w_1=-1{,}0734+1{,}7120i$; $w_2=-0{,}9300-17764i$.

410. Resolver la ecuación binomial $w^5+32i=0$.

Resolución. Escribimos la ecuación en la forma $w^5=-32i$. Representamos el número $-i$ trigonométricamente:

$$w^5=32\,[\cos(-90°)+i\,\operatorname{sen}(-90°)],\ \text{o bien}\ w=$$
$$=2\sqrt[5]{\cos(-90°)+i\,\operatorname{sen}(-90°)},$$

o sea,

$$w=2\left[\cos\frac{-90°+360°k}{5}+i\,\operatorname{sen}\frac{-90°+360°k}{5}\right]=$$
$$=2\,[\cos(-18°+72°k)+i\,\operatorname{sen}(-18°+72°k)].$$

Si $k=0$, entonces $w_0=2\,[\cos(-18°)+i\,\operatorname{sen}(-18°)]=$
$=1{,}9022-0{,}6180i\ (A)$.

Si $k=1$, entonces $w_1=2\,(\cos 54°+i\,\operatorname{sen} 54°)=$
$=1{,}1756+1{,}6180i\ (B)$.

Si $k=2$, entonces $w_2=2\,(\cos 126°+i\,\operatorname{sen} 126°)=$
$=-1{,}1756+1{,}6180i\ (C)$.

Si $k=3$, entonces $w_3=2\,(\cos 198°+i\,\operatorname{sen} 198°)=$
$=-1{,}9022-0{,}6180i\ (D)$.

Si $k=4$, entonces $w_4=2\,(\cos 270°+i\,\operatorname{sen} 270°)=-2i\ (E)$.

A las raíces de la ecuación binomial les corresponden los vértices del pentágono regular inscripto en la circunferencia de radio $R=2$ que tiene por centro el origen de las coordenadas (fig. 26).

En general, a las raíces de una ecuación binomial $w^n=a$, donde a es un número complejo, les corresponden los vértices de un polígono regular de n lados incripto en la circunferencia con centro en el origen de las coordenadas y radio igual a $\sqrt[n]{|a|}$.

411. Utilizando la fórmula de Moivre, expresar $\cos 5\varphi$ y $\operatorname{sen} 5\varphi$ mediante $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$.

Resolución. Transformamos el primer miembro de la igualdad $(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i \operatorname{sen} 5\varphi$ con ayuda de la fórmula del binomio de Neuton:

$$\cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^3\varphi \operatorname{sen}^2\varphi - 10i\cos^2\varphi \operatorname{sen}^3\varphi + $$
$$+ 5\cos\varphi \operatorname{sen} 4\varphi + i \operatorname{sen}^5\varphi = \cos 5\varphi + i \operatorname{sen} 5\varphi.$$

Queda igualar las partes reales e imaginarias de la igualdad:

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + 5\cos\varphi \operatorname{sen}^4\varphi,$$
$$\operatorname{sen} 5\varphi = 5\cos^4\varphi \operatorname{sen}\varphi - 10\cos^2\varphi \operatorname{sen}^3\varphi + \operatorname{sen}^5\varphi.$$

412. Se da el número complejo $z = 2 - 2i$. Hallar $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

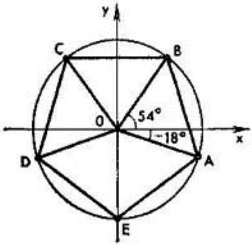

Fig. 26

413. Representar en forma trigonométrica el número complejo $z = -12 + 5i$.

414. Calcular por la fórmula de Moivre la expresión $(\cos 2^\circ + i \operatorname{sen} 2^\circ)^{45}$.

415. Calcular por la fórmula de Moivre $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$.

416. Representar en la forma trigonométrica el número complejo $z = 1 + \cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ$.

417. Calcular la expresión $(2 + 3i)^3$.

418. Calcular la expresión $\frac{(1-2i)(2-3i)}{(3-4i)(4-5i)}$.

419. Calcular la expresión $1/(3 - 2i)^2$.

420. Representar en forma trigonométrica el número complejo $5 - 3i$.

421. Representar en forma trigonométrica el número complejo $-1 + i$.

422. Calcular la expresión $\frac{(\cos 77^\circ + i \operatorname{sen} 77^\circ)(\cos 23^\circ + i \operatorname{sen} 23^\circ)}{\cos 55^\circ + i \operatorname{sen} 55^\circ}$.

423. Calcular la expresión $\frac{(1+i)(-\sqrt{3}+i)}{(1-i)(\sqrt{3}+i)}$, representando previamente en forma trigonométrica los factores del numerador y del denominador.

424. Hallar todos los valores de $\sqrt[4]{i}$.

425. Resolver la ecuación binomial $w^3 - 4\sqrt{2}(1+i) = 0$.

426. Expresar $\cos 4\varphi$ y $\operatorname{sen} 4\varphi$ mediante $\cos \varphi$ y $\operatorname{sen} \varphi$.

427. Mostrar que la distancia comprendida entre los puntos z_1 y z_2 es igual a $|z_2 - z_1|$.

Resolución. Tenemos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$, de ello

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

o sea, $|z_2 - z_1|$ es igual a la distancia entre los puntos dados.

428. ¿Qué línea describe el punto z que satisface la ecuación $|z - c| = R$, donde c es un número complejo y $R > 0$?

429. ¿Cuál es la interpretación geométrica de las desigualdades: 1) $|z - c| < R$; 2) $|z - c| > R$?

430. ¿Cuál es la interpretación geométrica de las desigualdades: 1) $\operatorname{Re} z > 0$; $\operatorname{Im} z < 0$?

2. Series con términos complejos. Examinemos una sucesión de números complejos $z_1, z_2, z_3, \ldots$, donde $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

El número constante $c = a + bi$ se llama límite de la sucesión $z_1, z_2, z_3, \ldots$ si para todo número $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, existe un número N tal, que todos los valores de z_n con números $n > N$ satisfacen la desigualdad $|z_n - c| < \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = c$.

La condición necesaria y suficiente de existencia del límite de una sucesión de números complejos consiste en lo siguiente: el número $c = a + bi$ es el límite de la sucesión de números complejos $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3, \ldots$ si, y sólo si, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$.

La serie

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots, \tag{1}$$

cuyos términos son números complejos se llama *convergente* si la n-ésima suma parcial de la serie S_n para $n \to \infty$ tiende a cierto límite. En el caso contrario la serie (1) se denomina *divergente*.

La serie (1) converge si, y sólo si, convergen las series con términos reales

$$\operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Re} w_2 + \operatorname{Re} w_3 + \ldots \tag{2}$$

y

$$\operatorname{Im} w_1 + \operatorname{Im} w_2 + \operatorname{Im} w_3 + \ldots. \tag{3}$$

Si la suma de la serie (2) es el número S' y la suma de la serie (3) es S'', entonces de suma de la serie (1) sirve el número complejo $S = S' + iS''$.

Si la serie

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots \text{ (donde } w_n = u_n + iv_n\text{)}$$

converge, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = 0$ (o sea, $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = 0$)

Si converge la serie

$$|w_1| + |w_2| + |w_3| + \ldots,$$

entonces converge también la serie

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots.$$

En este caso la última serie se llama *absolutamente convergente*.

Sea dada la serie de potencias

$$a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \ldots,$$

donde z_0, a_0, a_1, a_2, a_3, . . . son números complejos, los coeficientes de la serie son distintos de cero y z es una variable compleja.

Esta serie converge en el círculo $|z - z_0| < R$, donde $R = \lim\limits_{n \to \infty} |a_n/a_{n+1}|$ y diverge fuera del círculo indicado, o sea, para valores de z que satisfacen la desigualdad $|z - z_0| > R$.

431. Investigar la convergencia de la serie

$$(1+i)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}i\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{27}i\right)+\ldots$$

Resolución. Las series

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots \quad \text{y} \quad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$$

convergen, puesto que están compuestas por los términos de una progresión geométrica infinita decreciente. Por consiguiente, converge también la serie dada con números complejos.

Hallamos las sumas de estas progresiones:

$$S_1=\frac{1}{1-1/2}=2, \quad S_2=\frac{1}{1-1/3}=\frac{3}{2}.$$

Por consiguiente, la suma de la serie que examinamos es el número complejo $S = 2 + (3/2)\,i$.

432. Investigar la convergencia de la serie

$$(1+0{,}1i)+\left(\frac{1}{2}+0{,}01i\right)+\left(\frac{1}{3}+0{,}001i\right)+\ldots.$$

Resolución. Examinamos las series

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots \quad \text{y} \quad 0{,}1+0{,}01+0{,}001+\ldots.$$

La primera de ellas diverge, por lo tanto, diverge también la serie dada con términos complejos.

433. Investigar la convergencia de la serie

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}i\right)+\ldots.$$

Resolución. La serie diverge, ya que su término general $w_n=\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}i$ no tiende a cero (recomendamos convencerse de esto por sí mismo).

434. Mostrar que la serie

$$\frac{1+i}{2}+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2+\left(\frac{1+i}{2}\right)^3+\cdots$$

converge absolutamente.

Resolución. Puesto que $1+i=\sqrt{2}\,[\cos(\pi/4)+i\operatorname{sen}(\pi/4)]$, entonces

$$w_n=\left(\frac{1+i}{2}\right)^n=\left[\frac{\cos(\pi/4)+i\operatorname{sen}(\pi/4)}{\sqrt{2}}\right]^n=\frac{1}{2^{n/2}}\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi n}{4}\right).$$

Por consiguiente, $w_n=1/2^{n/2}$. Componemos la serie de los módulos

$$\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{2^2}+\ldots .$$

Esta serie cuyos términos forman una progresión geométrica infinita decreciente converge; por lo tanto, la serie dada con términos complejos converge absolutamente.

435. Hallar la región de convergencia de la serie

$$\frac{\sqrt{3}+i}{3}(z-i)+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^2(z-i)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^3(z-i)^3+\ldots .$$

Resolución. Tenemos

$$a_n=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n,\quad a_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^{n+1},\quad \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}+i},$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{3}{|\sqrt{3}+i|}=\frac{3}{\sqrt{3+1}}=\frac{3}{2},\quad R=\frac{3}{2}.$$

La región de convergencia es el círculo $|z-i|<3/2$.

436. Mostrar que la serie

$$\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{4}i\right)+\left(\frac{1}{125}-\frac{1}{8}i\right)+\cdots$$

converge y hallar su suma.

437. Investigar la convergencia de la serie

$$\left(1+\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2^2}i\right)+\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2^3}i\right)+\cdots .$$

438. Investigar la convergencia de la serie con término general $w_n=\frac{1}{m!}+\frac{i}{n}$.

439. Mostrar que la serie

$$1+\frac{1}{2!}(1+i)+\frac{1}{3!}(1+i)^2+\frac{1}{4!}(1+i)^3+\ldots$$

converge absolutamente.

440. Hallar la región de convergencia de la serie

$$z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots.$$

441. Hallar la región de convergencia de la serie

$$(z-1-i)+2!\,(z-1-i)^2+3!\,(z-1-i)^3+\ldots.$$

3. Funciones exponencial y trigonométricas de una variable compleja. *Las funciones exponencial y trigonométricas de una variable compleja z se definen por las igualdades*

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots;$$

$$\operatorname{sen} z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots;$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots.$$

Entre las funciones indicadas existen las relaciones siguientes:

$$e^{zi}=\cos z+i\operatorname{sen} z, \tag{1}$$

$$e^{-zi}=\cos z-i\operatorname{sen} z, \tag{2}$$

$$\cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}, \tag{3}$$

$$\operatorname{sen} z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i} \tag{4}$$

denominadas *fórmulas de Euler*.

Con ayuda de la fórmula (1) el número complejo representado en forma trigonométrica $z=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$ puede ser dado en forma exponencial $z=re^{\varphi i}$.

442. Representar en las formas trigonométrica y exponencial el número complejo $z=3+i\sqrt{3}$.

Resolución. Hallamos $r=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$, $\varphi=\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3)=\pi/6$. Por consiguiente, la forma trigonométrica del número dado tiene la forma

$$z=2\sqrt{3}\,[\cos(\pi/6)+i\operatorname{sen}(\pi/6)]$$

y la forma exponcional tiene la forma

$$z=2\sqrt{3}\,e^{\pi i/6}.$$

443. Representar en forma exponencial el número $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

Resolución. Tenemos $r=\sqrt{2+2}=2$, $\operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot 2=-1$, $\varphi=-\pi/4$, o sea, $z=2e^{-\pi i/4}$.

444. Hallar el valor numérico $e^{\pi i/2}$.

Resolución. Utilizamos la fórmula (1):

$$e^{\pi i/2}=\cos(\pi/2)+i\operatorname{sen}(\pi/2)=i.$$

445. Demostrar con ayuda de la fórmula de Euler que

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

Resolución. Puesto que $\cos x = (e^{xi} + e^{-xi})/2$, entonces

$$\cos^3 x = \frac{e^{3xi} + 3e^{xi} + 3e^{-xi} + e^{-3xi}}{8} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

446. Representar en forma exponencial el número complejo $z = \sqrt{3} + i$.

447. Representar el número $-i$ en forma exponencial.

448. ¿A qué es igual $e^{\pi i}$?

449. Mostrar que

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x.$$

450. Expresar $\operatorname{sen}^3 x$ linealmente mediante $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen} 3x$.

451. Mostrar con ayuda de la fórmula de Euler que i^i tiene un conjunto innumerable de valores, y que todos son reales.

§ 8. Serie de Fourier

Se llama *serie de Fourier* de la función $f(x)$ definida sobre el segment $[-\pi, \pi]$ a la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx),$$

donde

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} mx\,dx \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Para toda función $f(x)$ derivable por partes sobre $[-\pi, \pi]$ la serie de Fourier converge hacia esta función en cada punto de su continuidad o hacia la magnitud $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ si x_0 es el punto de discontinuidad.

Convengamos también en tomar por el valor de la función $f(x)$ en cada uno de los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$ la magnitud $(1/2)\,[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)$.

Si la función $f(x)$ en el segmento $[-\pi, \pi]$ tiene un número finito de extremos y es continua, a excepción, quizas, de un número finito de puntos con discontinuidad de primer género (o sea, satisface las llamadas condiciones de Dirichlet), entonces la serie de Fourier en cada punto del segmento $[-\pi, \pi]$ converge hacia la función $f(x)$ (teorema de Dirichlet).

No es dificil ver que la suma de la serie de Fourier de la función $f(x)$ es una función periódica con período de 2π.

Si la función $f(x)$ se define en el segmento $[-l, l]$, donde l es un número arbitrario, entonces, siempre que sobre el segmento $[-l, l]$ se cumplan las condiciones de Dirichlet, la función indicada puede ser representada como suma de la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\right),$$

donde

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx,\qquad b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Si $f(x)$ es una función par, entonces su serie de Fourier contiene solamente un término independiente y cosenos, o sea,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\frac{m\pi x}{l},$$

donde

$$a_m=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Si $f(x)$ es una función impar, entonces su serie de Fourier contiene solamente senos, o sea,

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l},$$

donde

$$b_m=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Si la función $f(x)$ se define en el segmento $[0, l]$, entonces para desarrollarla en serie de Fourier es suficiente definirla adicionalmente en el segmento $[-l, 0]$ por un procedimiento arbitrario y luego desarrollarla en serie de Fourier considerándola definida en el segmento $[-l, l]$. Conviene definir adicionalmente la función de modo que sus valores en los puntos del segmento $[-l, 0]$ se encuentren de la condición $f(x) = f(-x)$ o bien $f(x) = -f(-x)$. En el primer caso la función $f(x)$ en el segmento $[-l, l]$ será par y en el segundo caso, impar. Con ello los coeficientes del desarrollo de esta función (a_m si se trata del primer caso y b_m si se trata del segundo) se pueden determinar por las fórmulas citadas anteriormente para los coeficientes de las funciones pares e impares.

452. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ por la ecuación $f(x) = \pi + x$.

Resolución. El gráfico de esta función es el segmento que une los puntos $(-\pi; 0)$ y $(\pi; 2\pi)$. En la fig. 27 se muestra el gráfico de la función $y = S(x)$, donde $S(x)$ es la suma de la serie de Fourier de la función $f(x)$. Esta suma es una función periódica con período de 2π y coincide con la función $f(x)$ en el segmento $[-\pi, \pi]$.

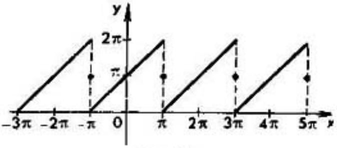

Fig. 27

Determinamos los coeficientes de la serie de Fourier. Primeramente hallamos

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx.$$

La segunda integral es igual a cero como integral de función impar, tomada en el intervalo simétrico respecto al origen de coordenadas. De este modo, $a_0 =$

$$=\int_{\pi}^{\pi}dx=2\pi.$$

Luego hallamos los coeficientes de a_m. Tenemos

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos mx\,dx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos mx\,dx.$$

No es difícil ver que ambas integrales son iguales a cero (la función subintegral de la segunda integral es impar como producto de una función par por una impar). De suerte que $a_m = 0$, o sea, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0$.

Ahora determinamos los coeficientes de b_m:

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} mx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\operatorname{sen} mx\,dx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen} mx\,dx.$$

La primera integral es igual a cero. La función subintegral de la segunda integral es par como producto de dos funciones impares. Por lo tanto,

$$b_m=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\operatorname{sen} mx\,dx.$$

Integrando por partes, obtenemos $u = x$, $dv = \operatorname{sen} mx\, dx$, $du = dx$, $v = -(1/m)\cdot\cos mx$, o sea,

$$b_m = -\frac{2x}{m\pi}\cos mx\Big|_0^\pi + \frac{2}{m\pi}\int_0^\pi \cos mx\, dx \frac{2}{m}\cdot\cos m\pi +$$

$$+\frac{2}{\pi m^2}\operatorname{sen} mx\Big|_0^\pi = -\frac{2}{m}(-1)^m = \frac{2}{m}(-1)^{m+1}.$$

Por consiguiente, el desarrollo de la función $f(x)$ en serie de Fourier tiene la forma

$$f(x) = \pi + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\operatorname{sen} mx =$$

$$= \pi + 2\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \ldots\right).$$

453. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-1, 1]$ por la ecuación $f(x) = x^2$ (fig. 28).

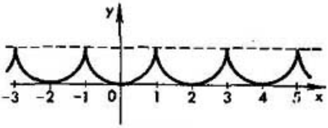

Fig. 28

Resolución. La función dada es par. Su gráfico es el arco de la parábola comprendida entre los puntos $(-1; 1)$ y $(1; 1)$. Aquí $l = 1$; por eso

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\, dx = 2\int_0^1 x^2\, dx = \frac{2}{3},$$

$$a_m = \frac{2}{1}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\, dx = 2\int_0^1 x^2\cos m\pi x\, dx.$$

Aquí es necesario integrar por partes dos veces:

1) $u = x^2$, $dv = \cos m\pi x\, dx$, $du = 2x\, dx$, $v = \dfrac{1}{\pi m}\operatorname{sen} m\pi x$;

$$a_m = \frac{2x^2}{m\pi}\operatorname{sen} m\pi x\Big|_0^1 - \frac{4}{m\pi}\int_0^1 x\operatorname{sen} m\pi x\, dx = -\frac{4}{m\pi}\int_0^1 x\operatorname{sen} m\pi x\, dx;$$

2) $u = x$, $dv = \operatorname{sen} m\pi x\, dx$, $du = dx$, $v = -\dfrac{1}{m\pi}\cos m\pi x$;

$$a_m = \frac{4x}{m^2\pi^2}\cos m\pi x\Big|_0^1 - \frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^1 \cos m\pi x\, dx = \frac{4}{m^2\pi^2}(-1)^m.$$

Como la función que se examina es par, $b_m=0$. Por consiguiente,

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}\cos m\pi x=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x-\frac{\cos 2\pi x}{2^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}-\frac{\cos 4\pi x}{4^2}+\ldots\right).$$

454. Desarrollar en serie de Fourier la función definida sobre el semiperíodo en el segmento $[0, 2]$ por la ecuación $f(x)=x-x^2/2$.

Resolución. La función puede ser desarrollada en serie de Fourier por una cantidad innumerable de procedimientos. Aquí daremos las dos variantes más importantes del desarrollo.

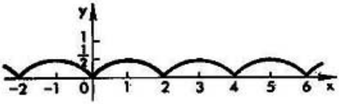

Fig. 29

1) Determinamos adicionalmente la función $f(x)$ sobre el segmento $[-2, 0]$ del modo par (fig. 29). Tenemos $l=2$.

$$a_0=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=\frac{2}{3},$$

$$a_m=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx.$$

Integramos por partes:

$$u=x-\frac{1}{2}x^2\quad dv=\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx,\quad du=(1-x)\,dx,\quad v=\frac{2}{m\pi}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2};$$

$$a_m=\frac{2}{m\pi}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=-\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx.$$

Integramos por partes una vez más:

$$u=1-x,\quad dv=\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx,\quad du=-dx,\quad v=-\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2}:$$

$$a_m=\frac{4}{m^2\pi^2}(1-x)\cdot\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^2\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=-\frac{4}{m^2\pi^2}\cos m\pi-\frac{4}{m^2\pi^2}=-\frac{4}{m^2\pi^2}[1+(-1)^m],\qquad b_m=0.$$

Por lo tanto,

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^m}{m^2}\cos\frac{m\pi x}{2}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 3\pi x+\dots\right).$$

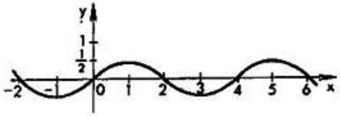

Fig. 30

2) Determinemos adicionalmente la función $f(x)$ sobre el segmento $[-2, 0]$ del modo impar (fig. 30):

$$b_m=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx;$$

$$u=x-\frac{1}{2}x^2,\quad dv=\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx,$$

$$du=(1-x)\,dx,\quad v=-\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2};$$

$$b_m=-\frac{2}{m\pi}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx;$$

$$u=1-x,\quad dv=\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx,\quad du=-dx,\quad v=\frac{2}{m\pi}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2};$$

$$b_m=\frac{4}{m^2\pi^2}(1-x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^2\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=-\frac{8}{m^3\pi^3}\cdot\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2=-\frac{8}{m^3\pi^3}\cos m\pi+\frac{8}{m^3\pi^3}=\frac{8}{m^3\pi^3}[1-(-1)^m];$$

$$a_m=0\ (m=0,1,2,\dots).$$

De suerte que

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^m}{m^3}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}=\frac{16}{\pi^3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5^3}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{2}+\dots\right).$$

455. Desarrollar en serie de Fourier la función (fig. 31) definida en el segmento $[-l, l]$ del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad -l\leqslant x\leqslant 0; \\ x, & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant l/2; \\ l/2, & \text{si} \quad l/2\leqslant x\leqslant l. \end{cases}$$

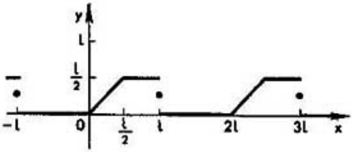

Fig. 31

Resolución. Hallamos

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\,dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} f(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l} f(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} x\,dx+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l}\frac{l}{2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{l/2}+\frac{1}{2}\,x\Big|_{l/2}^{l}=\frac{l}{8}+\frac{l}{4}=\frac{3}{8}\,l;$$

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} x\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l}\frac{l}{2}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Aplicamos a la primera integral la integración por partes:

$$u=x, \quad dv=\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx; \quad du=dx, \quad v=\frac{l}{m\pi}\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{l},$$

de donde

$$a_m=\frac{x}{m\pi}\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}-\frac{1}{m\pi}\int_{0}^{l/2}\text{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\,dx+$$

$$+\frac{l}{2m\pi}\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}=\frac{l}{2m\pi}\cdot\text{sen}\,\frac{m\pi}{2}+\frac{l}{m^2\pi^2}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}+$$

$$+\frac{l}{2m\pi}\left(\text{sen}\,m\pi-\text{sen}\,\frac{m\pi}{2}\right)=\frac{l}{m^2\pi^2}\left(\cos\frac{m\pi}{2}-1\right).$$

Determinamos los coeficientes de b_m:

$$b_m=\frac{1}{l}\int_0^{l/2} x\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{2}\int_{l/2}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Aplicamos a la primera integral la integración por partes:

$$u=x,\quad dv=\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx,\quad du=dx,\quad v=-\frac{l}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}.$$

Tenemos

$$b_m=-\frac{x}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}+\frac{1}{m\pi}\int_0^{l/2}\cos\frac{m\pi x}{l}dx-\frac{l}{2m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}=$$

$$=-\frac{1}{2m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}+\frac{l}{m^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}-\frac{l}{2m\pi}\left(\cos m\pi-\cos\frac{m\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{m^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}-\frac{l}{2m\pi}(-1)^m.$$

Si $m=1$, entonces $a_1=-\frac{l}{\pi^2}$, $b_1=\frac{l}{\pi^2}+\frac{l}{2\pi}=l\cdot\frac{2+\pi}{2\pi^2}$.

Si $m=2$, entonces $a_2=-\frac{l}{2\pi^2}$, $b_2=-\frac{1}{4\pi}$.

Si $m=3$, entonces $a_3=-\frac{l}{9\pi^2}$, $b_3=-\frac{l}{9\pi^2}+\frac{l}{6\pi}=l\cdot\frac{3\pi-2}{18\pi^2}$.

Si $m=4$, entonces $a_4=0$, $b_4=-\frac{l}{8\pi}$.

Si $m=5$, entonces $a_5=-\frac{l}{25\pi^2}$, $b_5=\frac{l}{25\pi^2}+\frac{l}{10\pi}=l\cdot\frac{2+5\pi}{50\pi^2}$.

. . . .

Por consiguiente,

$$f(x)=l\Big[\frac{3}{16}+\left(-\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{2+\pi}{2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\right)+\left(-\frac{1}{2\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{l}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{l}\right)+\left(-\frac{1}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{l}+\frac{-2+3\pi}{18\pi^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{l}\right)+\ldots\Big].$$

456. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ por la ecuación $f(x)=x$.

457. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-1, 1]$ por la ecuación $f(x)=|x|$.

458. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ por la ecuación $f(x)=e^x$.

459. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ por la ecuación $f(x)=x^3$.

460. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[0, \pi]$ por la ecuación $f(x)=\pi-2x$, continuándola sobre el segmento $[-\pi, 0]$: 1) del modo par; 2) del modo impar.

461. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} -h, & \text{si} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0; \\ h, & \text{si} \quad 0<x\leqslant \pi. \end{cases}$$

462. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[-\pi, \pi]$ del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{si} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0; \\ 3x, & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant \pi. \end{cases}$$

463. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en el segmento $[0, \pi]$ por la ecuación $f(x) = x^2$, continuándola del modo impar sobre el segmento $[-\pi, 0]$.

464. Desarrollar en serie de Fourier en el segmento $[-\pi, \pi]$ la función

$$f(x)=\begin{cases} -x, & \text{si} \quad -\pi< x< 0; \\ 0, & \text{si} \quad 0<x< \pi. \end{cases}$$

465. Desarrollar en senos en el segmento $[0, \pi]$ la función $f(x) = \cos 2x$.

466. Desarrollar en senos en el segmento $[0, 1]$ la función $f(x) = x$.

467. Desarrollar en cosenos en el segmento $[0, 2]$ la función

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{si} \quad 0< x\leqslant 1; \\ 2-x, & \text{si} \quad 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

§ 9 Integral de Fourier

Si la función $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en un segmento finito cualquiera del eje Ox y es absolutamente integrable a lo largo de todo el eje (o sea, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge), entonces para ella es justa la *fórmula integral de Fourier* (que se obtiene por el paso al límite de la serie de Fourier cuando $l \to \infty$):

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du$$

(en los puntos de discontinuidad de primer género como valor $f(x)$ se toma, como antes, $1/2\,[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$, donde x_0 es la abscisa del punto de discontinuidad).

La integral de Fourier se puede representar en *forma compleja*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,e^{iz(u-x)}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izx}\,dz\int_{-\infty}^{+8}e^{izu}f(u)\,du.$$

La integral exterior se entiende en el sentido del valor principal, o sea, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,du=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}f(u)\,du$.

Para la función par la integral de Fourier puede ser representada en la forma

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos zx\,dz\int_{0}^{+\infty}f(u)\cos zu\,du,$$

y para la función impar, en la forma

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\operatorname{sen} zx\,dz\int_{0}^{+\infty}f(u)\operatorname{sen} zu\,du.$$

Con las tres últimas fórmulas se vinculan las llamadas transformaciones integrales de Fourier:

1. *Transformación de Fourier de forma general*:

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{izx}f(x)\,dx\ \ (\textit{directa}),$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izx}F(z)\,dz\ \ (\textit{inverza}).$$

2. *Coseno-transformación de Fourier* (para las funciones pares):

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(x)\cos zx\,dx\ \ (\textit{directa}),$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f_c(z)\cos zx\,dz\ \ (\textit{inversa}).$$

3. *Seno-transformación de Fourier* (para las funciones impares):

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(x)\operatorname{sen} zx\,dx\ \ (\textit{directa}),$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f_s(z)\operatorname{sen} zx\,dz\ \ (\textit{inversa}).$$

Las seno- y coseno-transformaciones de Fourier pueden aplicarse a las funciones definidas solamente sobre el semieje positivo Ox, si ellas son absolutamente integrables a lo largo de este semieje y satisfacen sobre un segmento finito cualquiera del mismo las condiciones de Dirichlet. Con ello la seno-transformación continúa la función $f(x)$ sobre el semieje negativo del modo impar y la coseno-transformación, del modo par.

468. Hallar las coseno- y seno-transformaciones de la función $f(x) = e^{-x}$ $(x \geqslant 0)$.

Resolución. Tenemos

$$f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u} \cos zu \, du.$$

Puesto que $\int\limits_0^{+\infty} e^{-u} \cos zu \, du = \frac{1}{z^2+1}$, entonces

$$f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{z^2+1}.$$

Análogamente obtenemos

$$f_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{z}{z^2+1}.$$

Aplicando, a su vez, las coseno- y seno-transformaciones de Fourier a las funciones $f_c(z)$ y $f_s(z)$, obtenemos la función $f(x)$, o sea,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos zx}{z^2+1} \, dz = e^{-x}, \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{z \operatorname{sen} zx}{z^2+1} \, dz = e^{-x}.$$

De ello obtenemos las *integrales de Laplace*:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos zx}{z^2+1} \, dz = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{z \operatorname{sen} zx}{z^2+1} \, dz = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

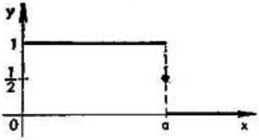

Fig. 32

469. Sea la función $f(x)$ definida por las igualdades

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leqslant x < a; \\ 1/2, & \text{si } x = a; \\ 0, & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Hallar las coseno- y seno-transformaciones de la misma (fig. 32)

Resolución. Hallamos la coseno-transformación de la función dada:

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(u)\cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a}\cos zu\,du+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int^{+\infty} 0\cdot\cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a}\cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen} az}{z}.$$

Hallamos ahora la seno-transformación:

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(u)\operatorname{sen} zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a}\operatorname{sen} zu\,du+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^{\infty} 0\cdot\operatorname{sen} zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a}\operatorname{sen} zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1-\cos az}{z}.$$

De ello obtenemos

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} az}{z}\cos xz\,dz=\begin{cases}1, & \text{si } 0\leqslant x<a;\\ 1/2, & \text{si } x=a;\\ 0, & \text{si } x>a\end{cases}$$

(*factor discontinuo de Dirichlet*) y

$$\frac{2}{\pi}\int_0\frac{1-\cos az}{z}\operatorname{sen} xz\,dz=\begin{cases}1, & \text{si } 0\leqslant x<a;\\ 1/2, & \text{si } x=a\\ 0, & \text{si } x>a.\end{cases}$$

470. Hallar la transformación de Fourier de la función

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{si } -1\leqslant x\leqslant -1/2;\\ 1, & \text{si } |x|<1/2;\\ -x+1, & \text{si } 1/2\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{si } 1<|x|.\end{cases}$$

Resolución. Según la fórmula de transformación de Fourier

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{izu}\,du,$$

utilizando la forma de la función $f(x)$, encontramos que

$$\sqrt{2\pi}\,F(z)=\int_{-\infty}^{-1}0\cdot e^{izu}\,du+\int_{-1}^{-1/2}(u+1)\,e^{izu}\,du+$$

$$+\int_{-1/2}^{1/2}1\cdot e^{izu}\,du+\int_{1/2}^{1}(-u+1)\,e^{izu}\,du+\int_1^{+\infty}0\cdot e^{izu}\,du.$$

Es evidente que la primera y última integral son iguales a cero. Designemos las demás integrales por I_1, I_2 e I_3, respectivamente, y las calculamos:

$$I_1=\int_{-1}^{-1/2}(u+1)e^{izu}\,du=\left[\frac{1}{zi}(u+1)e^{izu}-\frac{1}{i^2z^2}e^{izu}\right]_{-1}^{-1/2}=$$

$$=\frac{1}{zi}\cdot\frac{1}{2}e^{-iz/2}-\frac{1}{i^2z^2}e^{-iz/2}+\frac{1}{i^2z^2}e^{-iz}=\frac{1}{2zi}e^{-zi/2}+$$

$$+\frac{1}{z^2}e^{-zi/2}-\frac{1}{z^2}e^{-zi};$$

$$I_2=\int_{-1/2}^{1/2}e^{izu}du=\frac{1}{zi}e^{izu}\Big|_{-1/2}^{1/2}=\frac{1}{zi}(e^{zi/2}-e^{-zi/2})=\frac{2\operatorname{sen}(z/2)}{z};$$

$$I_3=\int_{1/2}^{1}(-u+1)e^{izu}du=\left[\frac{1}{zi}(-u+1)e^{izu}+\frac{1}{i^2z^2}e^{izu}\right]_{1/2}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{z^2}e^{zi}-\frac{1}{2zi}e^{zi/2}+\frac{1}{z^2}e^{zi/2}.$$

De suerte que

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{2zi}e^{-zi/2}+\frac{1}{z^2}e^{-zi/2}-\frac{1}{z^2}e^{-zi}+\frac{2\operatorname{sen}(z/2)}{z}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{z^2}e^{zi}-\frac{1}{2zi}e^{zi/2}+\frac{1}{z^2}e^{zi/2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2\cos z}{z^2}+\frac{\operatorname{sen}(z/2)}{z}+\frac{2\cos(z/2)}{z^2}\right].$$

471. Hallar la transformación de Fourier de la función

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x/2), & \text{si } |x|\leqslant\pi;\\ 0, & \text{si } |x|>\pi.\end{cases}$$

472. Hallar la transformación de Fourier de la función

$$f(x)=\begin{cases}-e^{x}, & \text{si } -1\leqslant x<0;\\ e^{-x}, & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{si } |x|>1.\end{cases}$$

473. Hallar las seno- y coseno-transformación de Fourier de la función

$$f(y)=\begin{cases}-1, & \text{si } -1\leqslant x\leqslant -1/2;\\ 0, & \text{si } -1/2\leqslant x<1/2;\\ 1, & \text{si } 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Capítulo IV. Ecuaciones diferenciales ordinarias

§ 1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Conceptos básicos. Se llama *ecuación diferencial* a la que vincula variables independientes, su función y las derivadas (o diferenciales) de esta función. Si la variable independiente es una sola, la ecuación se denomina *ordinaria*; si hay dos variables independientes o más, *ecuación* diferencial *en derivadas parciales*.

El orden superior de la derivada que forma parte de la ecuación se llama orden de la ecuación diferencial. Por ejemplo:

1) $x^2y' + 5xy = y^2$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden;

2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4xy\frac{dy}{dx} = x^2$ es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden;

3) $y'^3 + y''y''' = x$ es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden;

4) $F(x, y, y', y'') = 0$ es la forma general de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden);

5) $x^2\frac{dz}{dx} + y^2\frac{dz}{dy} = 0$ es una ecuación en derivadas parciales de primer orden.

En este parágrafo se consideran ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, o sea, las que tienen la forma $F(x, y, y') = 0$ o $y' = f(x, y)$ (la forma resuelta con respecto a y').

Se denomina *solución* de una ecuación diferencial a aquella función derivable $y = \varphi(x)$ que el sustituir en la ecuación a la función incógnita, la transforma en identidad.

Se denomina *solución general* de una ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$ en el dominio D a la función $y = \varphi(x, C)$ que posee las propiedades siguientes: 1) es la solución de la ecuación dada cualesquiera que sean los valores de la constante arbitraria C que pertenecen a cierto conjunto; 2) para toda condición inicial $y(x_0) = y_0$, tal que $(x_0; y_0) \in D$, existe un valor único de $C = C_0$, con el cual la solución $y = \varphi(x, C_0)$ satisface la condición inicial dada.

Toda solución $y = \varphi(x, C_0)$ que se obtiene de la solución general $y = \varphi(x, C)$ para cada valor concreto de $C = C_0$ se llama *solución particular.*

Un problema en el cual se requiere hallar una solución particular de la ecuación $y' = f(x, y)$ que satisfaga la condición inicial $y(x_0) = y_0$ se denomina problema de Cauchy.

El gráfico, construido sobre el plano xOy, de toda solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación diferencial dada se llama *curva integral* de esta ecuación. De este modo, a la solución general $y = \varphi(x, C)$ sobre el plano xOy le corresponde una familia de curvas integrales que depende de un solo parámetro, o sea, de la constante arbitraria C y a la solución particular que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ le corresponde una curva de esta familia que pasa por el punto dado $M_0(x_0; y_0)$.

Sin embargo, existen ecuaciones diferenciales que tienen tales soluciones que no se obtienen de la solución general para ningún valor de C (incluso cuando $C = \pm\infty$). Tales soluciones se llaman *singulares*. Por ejemplo, efectuando la comprobación, se puede verificar que la ecuación $y' = \sqrt{1-y^2}$ tiene la solución general $y = \operatorname{sen}(x + C)$, mientras que la función $y = 1$ es también una solución de esta ecuación, pero ella no puede obtenerse en la solución general para ningún valor de C, o sea, es singular.

El gráfico de la solución singular es una curva integral que en cada punto tiene una tangente común a una de las curvas integrales definidas por la solución general. Esta curva se denomina *envolvente* de una familia de curvas integrales.

El proceso de obtención de las soluciones de una ecuación diferencial se llama *integración* de la ecuación diferencial.

2. Ecuaciones diferenciales con variables separables. La ecuación diferencial que tiene la forma

$$f_1(x)\,\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\,\varphi_2(y)\,dy = 0$$

pertenece al tipo de ecuaciones con variables separables. Si ninguna de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ no es idénticamente igual a cero, entonces, como resultado de la división de la ecuación inicial por $f_2(x)\,\varphi_1(y)$, ella se reduce a la forma

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = 0.$$

La integración término a término de la última ecuación conduce a la relación

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = C$$

que precisamente determina (en forma implícita) la solución de la ecuación inicial. (La solución de una ecuación diferencial expresada en forma implícita se denomina *integral* de esta ecuación.)

474. Hallar la integral particular de la ecuación $y' \cos x = y/\ln y$ que satisface la condición inicial $y(0) = 1$.

Resolución. Haciendo $y' = \dfrac{dy}{dx}$, escribimos la ecuación dada en la forma

$$\cos x\,\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}.$$

Separamos las variables:

$$\frac{\ln y}{y}\,dy = \frac{dx}{\cos x}.$$

Integramos ambos miembros de la ecuación:

$$\int \frac{\ln y}{y}\,dy = \int \frac{dx}{\cos x} + C, \text{ o bien, } \frac{1}{2}\ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Utilizando la condición inicial $y = 1$ para $x = 0$, hallamos $C = 0$. Finalmente obtenemos

$$\frac{1}{2}\ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

475. Hallar la integral general de la ecuación $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Resolución. Haciendo $y' = \frac{dy}{dx}$ y separando las variables, llegamos a la ecuación $\operatorname{ctg} y\, dy = \operatorname{tg} x\, dx$. Integrando, tenemos

$$\int \operatorname{ctg} y\, dy \int \operatorname{tg} x\, dx, \text{ o bien } \ln|\operatorname{sen} y| = -\ln|\cos x| + \ln C$$

(aquí es más cómodamente designar la constante de integración por $\ln C$). De ello encontramos $\operatorname{sen} y = C/\cos x$, o bien $\operatorname{sen} y \cos x = C$ (integral general).

476. Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $(1 + x^2)\, dy + y\, dx = 0$ para la condición inicial $y(1) = 1$.

Resolución. Transformamos la ecuación dada reduciéndola a la forma $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$. Integrando, obtendremos

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2}, \text{ o bien } \ln|y| = -\operatorname{arctg} x + C.$$

Esto es precisamente la integral general de la ecuación dada.

Ahora, utilizando la condición inicial, hallemos la constante arbitraria C; tenemos $\ln 1 = -\operatorname{arctg} 1 + C$, o sea, $C = \pi/4$. Por lo tanto,

$$\ln y = -\operatorname{arctg} x + \pi/4,$$

de donde obtenemos la solución particular buscada

$$y = e^{\pi/4 - \operatorname{arctg} x}.$$

Vamos a resolver algunos problemas geométricos y físicos que conducen a las ecuaciones diferenciales del tipo examinado.

477. Hallar las curvas en las cuales la suma de longitudes de la normal y de la subnormal es una constante igual a a.

Resolución. La longitud de la subnormal es igual a $|yy'|$ y la longitud de la normal es igual a $|y\sqrt{1+y'^2}|$. Ahora bien, la ecuación a la cual deben satisfacer las curvas buscadas tiene la forma

$$|yy'| + |y\sqrt{1+y'^2}| = a.$$

Despejando en ella y', encontramos (teniendo en cuenta ambos signos posibles):

$$y' = \pm \frac{a^2 - y^2}{2ay}.$$

Separamos las variables:

$$\frac{2y\, dy}{a^2 - y^2} = \pm \frac{dx}{a}.$$

Integrando, obtenemos la integral general: $\ln|a^2 - y^2| = \pm x/a + \ln C$. Cumpliendo la potenciación, reducimos la ecuación de curvas buscadas a la forma

$$y^2 = a^2 - Ce^{\pm x/a}.$$

A los datos del problema les corresponden solamente los valores de $C > 0$. Efectivamente, de la ecuación de la familia de curvas encontramos:

$$|yy'| = \frac{|a^2 - y^2|}{2a}, \quad |y\sqrt{1+y'^2}| = \frac{a^2+y^2}{2a}.$$

Por eso, para cumplir la condición $|yy'| + |y\sqrt{1+y'^2}| = a$ es necesario que $|a^2 - y^2| = a^2 - y^2$, o sea, $y^2 < a^2$; de aquí resulta precisamente que C toma sólo valores positivos.

478. Un recipiente cilíndrico que tiene la altura de 6 m y el diámetro de la base igual a 4 m está puesto verticalmente y llenado de agua. ¿Cuánto tiempo el agua contenida en el recipiente tarda en salir de él por un orificio redondo de 1/12 m de radio practicado en el fondo del mismo?

Resolución. Para resolver el problema planteado hace falta valerse de la fórmula de Bernoulli que determina la velocidad v (en m/s) con la cual un líquido sale de un orificio practicado en el recipiente h m inferior al nivel libre del líquido:

$$v = \sigma\sqrt{2gh}.$$

Aquí $g = 9{,}8$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad, σ es un coeficiente constante (adimensional) que depende de las propiedades de un líquido (para el agua $\sigma \approx 0{,}6$).

Supongamos que, pasados t s después de que el agua comienza a salir, el nivel del agua que en el recipiente sea igual a h m y dentro del tiempo dt descienda más dh m ($dh < 0$). Vamos a calcular el volumen del agua salida durante este intervalo infinitamente pequeño de tiempo dt por dos procedimientos.

Por un lado, este volumen $d\omega$ es igual al volumen de la capa cilíndrica que tiene la altura $|dh|$ y el radio igual al radio r de la base del recipiento ($r = 2$ m). Por lo tanto, $d\omega = \pi r^2 |dh| = -\pi r^2 \, dh$.

Por otro lado, este volumen es igual al del cilindro de cuya base sirve el orificio practicado en el fondo del recipiente y cuya altura es igual a $v\,dt$ (donde v es la velocidad de salida del agua). Si el radio del orificio es igual a ρ ($\rho = 1/12$ m), entonces $d\omega = \pi\rho^2 v\,dt = \pi\rho^2\sigma\sqrt{2gh}\,dt$.

Igualando estas dos expresiones, para un mismo volumen, llegamos a la ecuación

$$-r^2\,dh = \sigma\rho^2\sqrt{2gh}\,dt.$$

Separando las variables e integrando, obtenemos

$$dt = -\frac{r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}}; \quad t = C - \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h}.$$

Para $t = 0$ tenemos $h = h_0 = 6$ m. De ello hallamos

$$C = \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h_0}.$$

Ahora bien, la relación entre t y h se determina por la ecuación

$$t = \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right)$$

y el tiempo total de salida T lo encontramos suponiendo en esta fórmula $h = 0$:

$$T = \frac{2r^2\sqrt{h_0}}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}.$$

Utilizando los datos del problema ($r = 2$ m, $h_0 = 6$ m, $\sigma = 0{,}6$, $\rho = 1/12$ m, $g = 9{,}8$ m/s²), hallamos $T \approx 1062$ s $\approx 17{,}7$ min.

479. En una habitación en que la temperatura es de 20 °C un cuerpo se ha enfriado durante 20 min desde 100 °C hasta 60 °C. Hallar la ley de refrigeración del cuerpo; ¿dentro de cuántos minutos se enfriará hasta 30 °C? El aumento de la temperatura en la habitación es de despreciar.

Resolución. En virtud de la ley de Newton (la velocidad de refrigeración es proporcional a la diferencia de temperaturas) podemos escribir:

$$\frac{dT}{dt} = k(T-20), \text{ o bien } \frac{dT}{T-20} = k\,dt, \text{ o sea } \ln(T-20) = kt + \ln C.$$

Si $t = 0$, entonces $T = 100°$; de donde $C = 80$. Si $t = 20$, entonces $T = 60°$; por consiguiente, $\ln 40 = 20k + \ln 80$, de donde $k = -(1/20)\ln 2$. De suerte que la ley de refrigeración del cuerpo tiene la forma

$$T - 20 = 80\cdot e^{-(1/20)t\cdot\ln 2} = 80\,(1/2)^{t/20}, \text{ o bien } T = 20 + 80\,(1/2)^{t/20}.$$

Para $T = 30°$ tenemos $10 = 80\,(1/2)^{t/20}$, o bien $(1/2)^{t/20} = 1/8$. De este modo, $t/20 = 3$, de donde $t = 60$ min.

480. Determinar el tiempo necesario para que en dos vasos comunicantes se iguale el nivel del líquido. El pequeño orificio entre los vasos tiene el área de ω m². Las áreas de secciones horizontales del primer y el segundo vaso constituyen S_1 m² y S_2 m², en el instante inicial el nivel del líquido en el primer vaso se encontraba a la altura h_1 m a partir del orificio y en el segundo vaso a la altura h_2 m ($h_2 < h_1$).

Resolución. Supongamos que, pasados t s después de que el líquido comience a salir, el nivel del agua en el primer vaso descienda hasta z_1 m y en el segundo vaso ascienda hasta z_2 m. Durante el siguiente infinitamente pequeño intervalo de tiempo dt el nivel del líquido en el primer vaso se rebaja dz_1 m ($dz_1 < 0$) y en el segundo vaso se eleva dz_2 m ($dz_2 > 0$).

Puesto que la disminución del volumen del líquido en el primer vaso es igual a su aumento en el segundo vaso, entonces $S_1\,|dz_1| = S_2\,|dz_2|$, o bien $-S_1\,dz_1 = S_2\,dz_2$, de donde $dz_2 = -(S_1/S_2)\,dz_1$.

Si se introduce la designación $u = z_1 - z_2$, la velocidad de paso del líquido por el orificio entre los vasos se puede hallar valiéndose de la fórmula $v = \sigma\sqrt{2gu}$; ella se determina por la fórmula de Bernoulli (véase el problema 478) en la cual conviene suponer que el orificio se encuentra a la profundidad $u = z_1 - z_2$ debajo del nivel libre del líquido.

Por eso el volumen del líquido que pasa durante el tiempo dt, el cual es igual conforme a lo dicho anteriormente a $S_1\,dz_1$, es igual también a $v\omega\,dt = \sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt$. Igualando estas expresiones para un mismo volumen, llegamos a la ecuación

$$-S_1\,dz_1 = \sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt.$$

Pero $du = dz_1 - dz_2 = dz_1 + (S_1/S_2)\,dz_1$, o sea, $dz_1 = S_2\,du/(S_1 + S_2)$. Sustituyendo la expresión obtenida para dz_1 en la ecuación precedente, encontramos la ecuación diferencial que liga u y t:

$$-\frac{S_1S_2}{S_1+S_2}\,du = \sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt, \quad \text{o bien} \quad dt = -\frac{S_1S_2}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Integrando, hallamos

$$t = C - \frac{S_1S_2}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}\cdot 2\sqrt{u}.$$

Para $t=0$ tenemos $u=h_1-h_2$, de donde $C=\dfrac{S_1S_2\sqrt{2(h_1-h_2)}}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}$. El tiempo buscando T necesario para igualar los niveles en los vasos lo hallamos, hacieodo $u=0$:

$$T = C = \frac{S_1S_2\sqrt{2(h_1-h_2)}}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}.$$

Resolver las ecuaciones:

481. $\ln\cos y\,dx + x\,\mathrm{tg}\,y\,dy = 0$.

482. $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$; $y(1) = 0$.

483. $3e^x\,\mathrm{tg}\,y\,dx + (1 + e^x)\sec^2 y\,dy = 0$; $y(0) = \pi/4$.

484. $e^{1+x^2}\,\mathrm{tg}\,y\,dx - \dfrac{e^{2x}}{x-1}\,du = 0$; $y(1) = \pi/2$.

485. $(1 + e^{2x})\,y^2dy = e^x\,dx$; $y(0) = 0$.

486. $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y)$; $y(0) = \pi/4$.

487. $y' = 2^{x-y}$; $y(-3) = -5$.

488. $y\ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0$; $y(-15/16) = e$.

489. $y/y' = \ln y$; $y(2) = 1$.

490. $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$.

491. $\dfrac{x\,dy}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{y\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

492. $y' + \mathrm{sen}\,(x + y) = \mathrm{sen}\,(x - y)$.

493. $yy' = -2x\sec y$.

494. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$; $y(0) = 0$.

495. $y' = \mathrm{sh}\,(x + y) + \mathrm{sh}\,(x - y)$.

496. $y' = \sqrt{(a^2 - y^2)/(a^2 - x^2)}$.

497. $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+2)} = 0$; $y(1) = 1$.

498. $x(y^6 + 1)\,dx + y^2(x^4 + 1)\,dy = 0$; $y(0) = 1$.

499. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})\,dx + (\sqrt{xy} + \sqrt{y})\,dy = 0$.

500. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\mathrm{sen}\,y}} + y' = 0$; $y(\pi/4) = 0$.

501. $y' = \dfrac{\cos y - \mathrm{sen}\,y - 1}{\cos x - \mathrm{sen}\,x + 1}$.

502. $\dfrac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \dfrac{3y+2}{x+1}\,y'$

503. $\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x\, dy = 0$; $y(\pi/4) = \pi/4$.

504. $5e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$.

505. Hallar una curva en la cual el segmento de la tangente comprendido entre los ejes de coordenadas se divida por la mitad en el punto de tangencia.

506. La velocidad de desvalorización de un equipo debido a su desgaste es proporcional en cada instante dado de tiempo a su precio real. El precio inicial es igual a A_0. Hallar el precio del equipo al expirar t años.

507. Una sustancia se transforma en otra con velocidad proporcional a la cantidad de sustancia no transformada. Es sabido que la cantidad de la primera sustancia es igual a 31,4 g al pasar 1 h y 9,7 g al pasar 3 h. Determinar: 1) cuánta sustancia se tenía al comienzo del proceso; 2) cuánto tiempo pasará después del comienzo del proceso para que quede 1% de substancia primaria.

508. Un recipiente cilíndrico de 6 m de largo y 4 m de diámetro está situado horizontalmente. ¿Cuánto tiempo el agua tardará en salir del recipiente si el orificio de 1/12 m de radio se encuentra al nivel de la generatriz más baja del cilindro?

509. Un embudo cónico con orificio de ω cm² de área y ángulo de 2α al vértice del cono, está lleno con agua hasta el nivel H cm por encima del orificio. Hallar la dependencia existente entre la altura variable del nivel del agua h en el embudo y el tiempo de su salida t. Determinar el tiempo total de su salida. Calcularlo para $\omega = 0{,}1$ cm², $\alpha = 45°$, $H = 20$ cm.

510. Hallar el tiempo que tarda en salir toda el agua de un embudo cónico, si se sabe que la mitad de esta cantidad sale durante 2 min.

3. Ecuaciones diferenciales homogéneas. La ecuación que tiene la forma $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ se llama *homogénea* si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones homogéneas unidimensionales. La función $f(x, y)$ se denomina *homogénea m-dimensional* si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y).$$

La ecuación homogénea puede ser reducida a la forma $y' = f(y/x)$. Con ayuda de la sustitución $y = tx$ una ecuación homogénea se reduce a la ecuación con variables separables respecto a la nueva función incógnita t.

511. Hallar la integral general de la ecuación

$$(x^2 + 2xy)\, dx + xy\, dy = 0.$$

Resolución. Aquí $P(x, y) = x^2 + 2xy$, $Q(x, y) = xy$. Ambas funciones son homogéneas de segunda dimensión. Introducimos la sustitución $y = tx$, de donde $dy = x\, dt + t\, dx$. Entonces la ecuación tendrá la forma

$$(x^2 + 2x^2 t)\, dx + tx^2 (x\, dt + t\, dx) = 0, \quad \text{o bien}$$

$$(x^2 + 2x^2 t + t^2 x^2)\, dx + tx^3\, dt = 0.$$

Separando las variables e integrando, tenemos

$$\frac{dx}{x} + \frac{t\, dt}{(t+1)^2} = 0; \quad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{t\, dt}{(t+1)^2} = C.$$

Transformamos la segunda integral:

$$\ln|x|+\int \frac{t+1-1}{(t+1)^2}\,dt=C, \quad \text{o bien} \quad \ln|x|+\ln|x+1|+\frac{1}{t+1}=C.$$

Retornando a la función incógnita anterior y ($t = y/x$), obtenemos la respuesta final:

$$\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=C.$$

512. Hallar la solución particular de la ecuación $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{sen}\frac{y}{x}$, con la condición inicial $y(1) = \pi/2$.

Resolución. Realizamos la sustitución $y/x = t$, de donde $y = tx$, $dy = x\,dt + t\,dx$. Como resultado obtenemos

$$x\,dx+t\,dx=(t+\operatorname{sen} t)\,dx; \quad x\,dt=\operatorname{sen}=t\,dx; \quad \frac{dt}{\operatorname{sen} t}=\frac{dx}{x}.$$

Integrando, tenemos
$\ln|\operatorname{tg}(t/2)| = \ln|x| + \ln C$, de donde $t/2 = \operatorname{arctg}(Cx)$.
Efectuando la sustitución inversa $t = y/x$, hallamos la solución general de la ecuación inicial $y = 2x \operatorname{arctg}(Cx)$. Utilizando la condición inicial dada, obtendremos $\pi/2 = 2 \operatorname{arctg} C$, de donde $C = 1$. De suerte que la solución particular buscada tiene la forma $y = 2x \operatorname{arctg} x$.

513. Hallar la curva que pasa por el punto A (0; 1) para la cual el triángulo formado por el eje Oy, la tangente a la curva en su punto arbitrario y el radio vector del punto de tangencia es isósceles (con ello de base de este triángulo sirve el segmento de la tangente comprendido entre el punto de tangencia y el eje Oy).

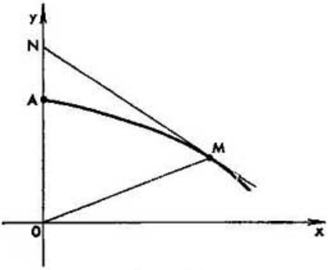

Fig. 33

Resolución. Sea $y = f(x)$ la ecuación buscada de la curva. Trazamos la tangente MN en un punto arbitrario M (x; y) de la curva hasta la intersección con el eje Oy en el punto N (fig. 33). De acuerdo con el enunciado del problema debe cumplirse la igualdad $|ON| = |OM|$. Pero $|OM| = \sqrt{x^2+y^2}$, y $|ON|$ la hallamos de la ecuación de la tangente $Y - y = y'(X - x)$, haciendo $X = 0$, o sea, $Y = |ON| = y - xy'$.
De este modo llegamos a la ecuación homogénea

$$\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'.$$

Haciendo $y = tx$, después de la sustitución y la separación de las variables obtendremos

$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\frac{dx}{x}, \quad \text{o bien} \quad \ln(t+\sqrt{1+t^2})=\ln C-\ln x.$$

de donde

$$x^2 = C\,(C-2y)$$

(una familia de parábolas cuyo eje es Oy).

Sustituyendo las coordenadas del punto A en la solución general hallada, obtendremos $0 = C\,(C-2)$; entre dos valores de $C=0$ y $C=2$ es útil solamente el segundo, puesto que para $C=0$ la parábola se degenera en eje Oy. De suerte que la curva buscada es la parábola

$$x^2 = 4\,(1-y), \quad \text{o bien} \quad y = 1 - x^2/4.$$

514. Hallar la forma de un espejo que haga converger todos los rayos paralelos en un punto.

Resolución. Es evidente que el espejo debe tener la forma de una superficie de revolución cuyo eje sea paralelo a la dirección de los rayos incidentes. Tomamos Ox como este eje y hallamos la ecuación de la curva $y = f(x)$ por cuya rotación se forma la superficie buscada.

Llevamos el origen de coordenadas al punto en el cual convergen los rayos reflejados. Designamos el rayo incidente por KM y el rayo reflejado por MO (fig. 34). Trazamos la tangente TT_1 y la normal MN en el punto M a la curva buscada. Entonces el triángulo OMT es isósceles con el vértice en el punto O (puesto que $\widehat{OMT} = \widehat{KMT_1} = \widehat{OTM} = \alpha$). Por consiguiente, $|OM| = |OT|$; pero $|OM| = \sqrt{x^2+y^2}$ y $|OT|$ lo hallamos de la ecuación de la tangente $Y - y = y'(X-x)$, haciendo $Y=0$; tenemos $X = x - \dfrac{y}{y'}$, de donde $|OT| = |X| = -X = -x + \dfrac{y}{y'}$.

De este modo, obtenemos la ecuación diferencial

$$\sqrt{x^2+y^2} = -x + \frac{y}{y'}, \text{ o bien } \left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) y' = y, \text{ o sea,}$$

$$\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) dy - y\,dy = 0.$$

Esta ecuación diferencial es homogénea. Para su integración es racional introducir la sustitución $x = ty$, tomando y por argumento y x (y t) por funciones incógnitas de este argumento. Entonces obtendremos

$$\left(\sqrt{t^2y^2+y^2}+ty\right) dy - y\,(t\,dy + y\,dt) = 0, \text{ o bien } \sqrt{t^2+1}\,dy - y\,dt = 0.$$

Separamos las variables e integramos:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 0; \quad \ln y = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + \ln C.$$

De donde $y = C\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$ o retornando a las variables iniciales x e y, tenemos

$$x+\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y^2}{C}.$$

Efectuada la simplificación, hallamos la solución final en la forma

$$y^2 = 2C\left(x+\frac{C}{2}\right).$$

La curva buscada es una parábola y el espejo tiene la forma de un paraboloide de revolución.

515. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $x = ay^2$ (a es el parámetro de la familia).

Resolución. Se llaman *trayectorias ortogonales* de una familia de curvas a tales curvas de otra familia, cada una de las cuales interseca a cada una de las curvas de la primera familia bajo el ángulo recto.

Si la ecuación de la familia dada es $F(x, y, a) = 0$, entonces para hallar las trayectorias ortogonales hace falta:

1) escribir la ecuación diferencial de la familia dada $f(x, y, y') = 0$;

2) partiendo de la condición de ortogonalidad ($y_I' y_{II}' = -1$), sustituir en esta ecuación diferencial y' por $-1/y'$;

3) integrar la ecuación obtenida $f(x, y, -1/y') = 0$.

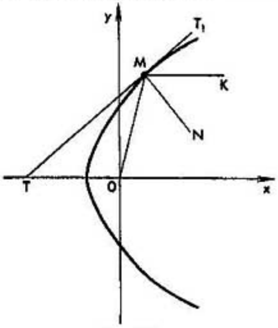

Fig. 34

Para resolver el problema planteado, derivamos la ecuación de la familia dada de parábolas: $1 = 2ayy'$. Eliminando el parámetro de la familia a en las ecuaciones $x = ay^2$ y $1 = 2ayy'$, hallamos la ecuación diferencial de la familia dada de parábolas: $2xy' = y$. Sustituimos y' por $-1/y'$ y obtenemos la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales:

$$2x + yy' = 0, \quad \text{o bien } 2x\,dx + y\,dy = 0.$$

Integrando la ecuación obtenida, hallamos la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales:

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C, \text{ o bien } \frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{2C} = 1.$$

De este modo, las trayectorias ortogonales de la familia dada de parábolas son elipses semejantes unas a otras en las cuales el semieje mayor (vertical) supera en $\sqrt{2}$ veces el menor.

Resolver las ecuaciones:

516. $xy' \operatorname{sen}(y/x) + x = y \operatorname{sen}(y/x)$.

517. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\, y'$.

518. $xy' \ln(y/x) = x + y \ln(y/x)$.

519. $xyy' = y^2 + 2x^2$.

520. $xy' - y = x \operatorname{tg}(y/x)$; $y(1) = \pi/2$.

521. $y' = (y/x) + \cos(y/x)$.

522. $y' = 4 + y/x + (y/x)^2$; $y(1) = 2$.

523. $(x^2 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0$.

524. $y' = (x + y)/(x - y)$.

525. $xy' = xe^{y/x} + y$; $y(1) = 0$.

526. $xy' - y = \dfrac{x}{\operatorname{arctg}(y/x)}$.

527. $(x^4 + 6x^2y^2 + y)\,dx + 4xy\,(x^2 + y^2)\,dy = 0$; $y(1) = 0$.

528. $xy' = 2\,(y - \sqrt{xy})$.

529. $3y \operatorname{sen}(3x/y)\,dx + [y - 3x \operatorname{sen}(3x/y)]\,dy = 0$.

530. Hallar la curva en la cual el producto de la abscisa de todo punto perteneciente a la curva por el segmento truncado por la normal sobre el eje Ox es igual al doble del cuadrado de la distancia entre este punto y el origen de las coordenadas.

531. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = R^2$.

4. Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas. Las ecuaciones que tienen la forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2x + c_2}\right),$$

cuando $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ se reducen a homogéneas sustituyendo $x = u + \alpha$ $y = v + \beta$, donde $(\alpha;\ \beta)$ es el punto de intersección de las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, la sustitución $a_1x + b_1y = t$ permite separar las variables.

532. Hallar la integral general de la ecuación

$$(2x + y + 1)\,dx + (x + 2y - 1)\,dy = 0.$$

Resolución. La ecuación pertenece al primer tipo, puesto que $y' = -\dfrac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Hallamos el punto de intersección de las rectas $2x + y + 1 = 0$ y $x + 2y - 1 = 0$; tenemos $x = \alpha = -1$; $y = \beta = 1$.

En la ecuación inicial efectuamos la sustitución de las variables haciendo $x = u + \alpha = u - 1$, $y = v + \beta = v + 1$; $dx = du$, $dy = dv$. La ecuación se transforma reduciéndose a la forma

$$(2u + v)\,du + (u + 2v)\,dv = 0.$$

En la ecuación homogénea obtenida hacemos $v = ut$, de donde $dv = u\,dt + t\,du$; llegaremos a la ecuación con variables separables

$$2\,(t^2 + t + 1)\,u\,du + u^2\,(1 + 2t)\,dt = 0$$

cuya integral general es $u\sqrt{t^2 + t + 1} = C$, o bien (efectuadas la sustitución $t = v/u$ y la elevación al cuadrado)

$$u^2 + uv + v^2 = C^2.$$

Retornando a las variables x e y ($u = x + 1$, $v = y - 1$), después de realizar transformaciones elementales, hallamos la integral general de la ecuación inicial

$$x^2 + y^2 + xy + x - y = C_1$$

(aquí se ha puesto $C_1 = C^2 - 1$).

533. Hallar la integral general de la ecuación

$$(x + y + 2)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0.$$

Resolución. La ecuación pertenece al segundo tipo, puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Por eso hacemos $y + x = t$, $dy = dt - dx$. La ecuación dada adopta la forma

$$(t + 2)\,dx + (2t - 1)\,(dt - dx) = 0, \quad \text{o bien}$$
$$(3 - t)\,dx + (2t - 1)\,dt = 0.$$

Separando las variables e integrando, tenemos

$$\int \frac{2t-1}{3-t}\,dt + \int dx = C, \text{ o bien } -2t - 5\ln|t-3| + x = -C.$$

Retomando a las viejas variables ($t = x + y$), obtendremos la respuesta final:

$$x + 2y + 5\ln|x + y - 3| = C.$$

Resolver las ecuaciones:

534. $2(x + y)\,dy + (3x + 3y - 1)\,dx = 0$; $y(0) = 2$.

535. $(x - 2y + 3)\,dy + (2x + y - 1)\,dx = 0$.

536. $(x - y + 4)\,dy + (x + y - 2)\,dx = 0$.

537. Hallar la curva integral de la ecuación diferencial $y' = (x + y - 2)/(y - x - 4)$, que pasa por el punto $M(1; 1)$.

5. Ecuaciones diferenciales exactas. Una ecuación diferencial

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

donde $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$ se llama *ecuación diferencial exacta*, o sea, el primer miembro de tal ecuación es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$. Si esta ecuación se escribe en la forma $du = 0$, su solución general se determina por la igualdad $u = C$. La función $u(x, y)$ se puede determinar por la fórmula

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy.$$

Con ello en la última fórmula los límites inferiores de las integrales, x_0 e y_0, son arbitrarios; su selección está limitada por una sola condición: las integrales en el segundo miembro de esta fórmula deben tener sentido (o sea, no deben ser integrales impropias divergentes de segundo género). Si la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ no se cumple, entonces en algunos casos se puede reducir la ecuación en examen al tipo indicado, multiplicándola por el así llamado *actor integrante* que, en el caso general, es la función de x e y $\mu(x, y)$. Si en la ecuación dada existe un factor integrante que depende sólo de x, este factor se determina por la fórmula

$$\mu = e^{\int \left(\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q\,dx},$$

donde la relación $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q$ debe ser función sólo de x. Análogamente, el actor integrante que depende solamente de y se determina por la fórmula

$$\mu = e^{-\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/P\,dy},$$

donde $\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)/P$ debe ser función sólo de y (la ausencia de y, en el primer caso, y de x, en el segundo caso, en estas relaciones es el criterio de existencia del factor integrante del tipo examinado).

538. Hallar la integral general de la ecuación

$$(e^x+y+\operatorname{sen} y)\,dx+(e^y+x+x\cos y)\,dy=0.$$

Resolución. Aquí $P(x, y)=e^x+y+\operatorname{sen} y$, $Q(x, y)=e^y+x+x\cos y$, $\frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y$. Por consiguiente, el primer miembro de la ecuación es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, o sea,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x+y+\operatorname{sen} y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^y+x+x\cos y.$$

Integramos $\frac{u}{x}$ con respecto a x:

$$u=\int(e^x+y+\operatorname{sen} y)\,dx+C(y)=e^x+xy+x\operatorname{sen} y+C(y).$$

Hallamos la función $C(y)$, derivando la última expresión respecto a y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+C'(y).$$

Obtenemos la ecuación

$$x+x\cos y+C'(y)=x+x\cos y+e^y,$$

de donde encontramos $C'(y)=e^y$, o sea $C(y)=e^y$. De este modo, la integral general de la ecuación tiene la forma

$$e^x+xy+x\operatorname{sen} y+e^y=C.$$

539. Hallar la integral general de la ecuación

$$(x+y-1)\,dx+(e^y+x)\,dy=0.$$

Resolución. Aquí $P(x, y)=x+y-1$, $Q(x, y)=e^y+x$, $\frac{\partial P}{\partial y}=1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$; por lo tanto, la condición de la diferencial total está cumplida, o sea, la ecuación dada es una ecuación diferencial exacta.

Determinemos la integral general por la fórmula

$$\int_{x_0}^{x}P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x, y)\,dy=C.$$

Tomando $x_0=0$, $y_0=0$, obtendremos

$$\int_0^x(x+y+1)\,dx+\int_0^y e^y\,dy=C_1,\ \text{o bien}\ \left[\frac{1}{2}x^2+xy-x\right]_0^x+e^y\Big|_0^y=C_1.$$

Sustituyendo los límites, encontramos

$$\frac{1}{2}x^2+xy-x+e^y-1=C_1,\ \text{o bien}\ e^y+\frac{1}{2}x^2+xy-x=C,$$

donde $C=C_1+1$.

540. Hallar la integral general de la ecuación
$(x \cos y - y \operatorname{sen} y)\, dy + (x \operatorname{sen} y + y \cos y)\, dx = 0.$

Resolución. Tenemos

$$P(x, y) = x \operatorname{sen} y + y \cos y, \quad Q(x, y) = x \cos y - y \operatorname{sen} y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Big/ Q = \frac{x \cos y - y \operatorname{sen} y}{x \cos y - y \operatorname{sen} y} = 1.$$

Por eso la ecuación dada tiene un factor integrante que depende solamente de x. Determinemos este factor integrante:

$$\mu = e^{\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q \, dx} = e^{\int dx} = e^x.$$

Multiplicando la ecuación inicial por e^x, obtenemos la ecuación

$$e^x (x \cos y - y \operatorname{sen} y)\, dy + e^x (x \operatorname{sen} y + y \cos y)\, dx = 0$$

la cual, como es fácil convencerse, es ya una ecuación diferencial exacta; en efecto, tenemos $P_1(x, y) = e^x (x \operatorname{sen} y + y \cos y)$, $Q_1(x, y) = e^x (x \cos y - y \operatorname{sen} y)$. De ello

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [e^x (x \operatorname{sen} y + y \cos y)] = e^x (x \cos y + \cos y - y \operatorname{sen} y);$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [e^x (x \cos y - y \operatorname{sen} y)] = e^x [x \cos y - y \operatorname{sen} y + \cos y].$$

Estas derivadas son iguales y, por consiguiente, el primer miembro de la ecuación obtenida es igual a $du(x, y)$.

De este modo, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x (x \cos y - y \operatorname{sen} y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = e^x (x \operatorname{sen} y + y \cos y).$$

Integrando la primera de estas igualdades respecto a y, hallamos

$$u = \int e^x (x \cos y - y \operatorname{sen} y)\, dy + C(x) = xe^x \operatorname{sen} y + e^x y \cos y - e^x \operatorname{sen} y + C(x).$$

Hallamos la derivada de la función obtenida con respecto a x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y + ex^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y + e^x y \cos y + C'(x) =$$
$$= e^x (x \operatorname{sen} y + y \cos y) + C'(x).$$

Comparando el valor obtenido de $\frac{\partial u}{\partial x}$ con $P(x, y)$, obtenemos $C'(x) = 0$, o sea, $C(x) = 0$. Por consiguiente, la integral general de la ecuación inicial tiene la forma

$$u(x, y) = xe^x \cdot \operatorname{sen} y + e^x y \cdot \cos y - e^x \cdot \operatorname{sen} y = C, \quad \text{o bien}$$
$$e^x (x \operatorname{sen} y + y \cos y - \operatorname{sen} y) = C.$$

Resolver las ecuaciones:

541. $(x + \operatorname{sen} y)\, dx + (x \cos y + \operatorname{sen} y)\, du = 0.$

542. $(y + e^x \operatorname{sen} y)\, dx + (x + e^x \cos y)\, dy = 0.$

543. $(xy + \operatorname{sen} y)\,dx + (0{,}5x^2 + x\cos y)\,dy = 0$.
544. $(x^2 + y^2 + y)\,dx + (2xy + x + e^y)\,dy = 0;\ y(0) = 0$.
545. $(2xye^{x^2} + \ln y)\,dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y}\right)dy = 0;\ y(0) = 1$.
546. $[\operatorname{sen} y + (1 - y)\cos x]\,dx + [(1 + x)\cos y - \operatorname{sen} x]\,dy = 0$.
547. $(y + x\ln y)\,dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0$.
548. $(x^2 + \operatorname{sen} y)\,dx + (1 + x\cos y)\,dy = 0$.
549. $ye^x\,dx + (y + e^x)\,dy = 0$.
550. $(e^x \operatorname{sen} y + x)\,dx + (e^x\cos y + y)\,dy = 0$.
551. $(\ln y - 5y^2 \operatorname{sen} 5x)\,dx + \left(\frac{x}{y} + 2y\cos 5x\right)dy = 0;\ y(0) =$
$= e$.
552. $(\operatorname{arcsen} x + 2xy)\,dx + (x^2 + 1 + \operatorname{arctg} y)\,dy = 0$.
553. $(3x^2y + \operatorname{sen} x)\,dx + (x^3 - \cos y)\,dy = 0$.
554. $(e^{x+y} + 3x^2)\,dx + (e^{x+y} + 4y^3)\,dy = 0;\ y(0) = 0$.
555. $(\operatorname{tg} y - y\operatorname{cosec}^2 x)\,dx + (\operatorname{ctg} x + x\sec^2 y)\,dy = 0$.
556. $\left(\frac{y}{x^2+y^2} - y\right)dx + \left(e^y - x - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$.

Integrar las siguientes ecuaciones que tienen un factor integrante que depende sólo de x o de y:
557. $y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0\ \ (\mu = \varphi(x))$.
558. $(x^2\cos x - y)\,dx + x\,dy = 0\ \ (\mu = \varphi(x))$.
559. $y\,dx - (x + y^2)\,dy = 0\ \ (\mu = \varphi(y))$.
560. $y\sqrt{1-y^2}\,dx + (x\sqrt{1-y^2} + y)\,dy = 0\quad (\mu = \varphi(y))$.

561. Demostrar que la ecuación $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, la cual es simultáneamente homogénea y ecuación diferencial exacta, tiene la integral general $Px + Qy = C$.

Indicación: valerse del teorema de Euler sobre funciones homogéneas conforme al cual

$$x\cdot\frac{\partial P}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial P}{\partial y} = tP(x, y),$$

donde t es el índice de homogeneidad de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$.

6. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Ecuaciones de Bernoulli. La ecuación de la forma

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

se llama *lineal* (y e y' entran en primeros grados sin multiplicarse entre sí). Si $Q(x) \not\equiv 0$, la ecuación se llama lineal *no homogénea* y si $Q(x) \equiv 0$, lineal *homogénea*.

La solución general de una ecuación homogénea lineal $y' + P(x)\,y = 0$ se obtiene fácilmente separando las variables

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx;\quad \int\frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx;\quad \ln y = -\int P(x)\,dx + \ln C,$$

o bien, finalmente

$$y=Ce^{-\int P(x)\,dx},$$

donde C es una constante arbitraria.

La solución general de una ecuación lineal no homogénea se puede hallar partiendo de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente con ayuda del *método de Lagrange*, haciendo variar la constante arbitraria, o sea, suponiendo $y = C(x)e^{-\int P(dx)dx}$, donde $C(x)$ es cierta función derivable de x que debe ser definida.

Para hallar $C(x)$ es necesario sustituir y en la ecuación inicial lo que conduce a la ecuación

$$C'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}=Q(x).$$

De aquí,

$$C(x)=\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx+C,$$

donde C es una constante arbitraria. Entonces la solución general buscada de la ecuación no homogénea tiene la forma

$$y=e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx+C\right].$$

Las ecuaciones lineales de primer orden se pueden integrar también por el *método de Bernoulli* que consiste en lo siguiente. Con ayuda de la sustitución $y = uv$, donde u y v son dos funciones desconocidas, la ecuación inicial se transforma reduciéndose a la forma

$$u'v+uv'+P(x)\,uv=Q(x), \quad \text{o bien} \quad u\,[v'+P(x)\,v]+vu'=Q(x).$$

Valiéndose del hecho de que una de las funciones desconocidas, (por ejemplo, v) puede ser elegida arbitrariamente (puesto que sólo el producto uv debe satisfacer la ecuación inicial), por v se toma una *solución particular cualquiera* de la ecuación $v'+P(x)\,v=0$ (por ejemplo, $v=e^{-\int P(x)\,dx}$ que anula, por consiguiente, el coeficiente de u en la última ecuación. Entonces la ecuación precedente se reduce a la ecuación

$$vu'=Q(x), \quad \text{o bien} \quad u'=\frac{Q(x)}{v}=Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx},$$

de donde

$$u=C+\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx.$$

La solución general de la ecuación inicial se halla multiplicando u por v:

$$y=e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx+C\right].$$

La ecuación (no lineal) de la forma

$$y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^m,$$

donde $m \neq 0$, $m \neq 1$, se llama *ecuación de Bernoulli*. Puede ser transformada en ecuación lineal, reemplazando la función desconocida con ayuda de la sustitución $z = y^{1-m}$ debido a la cual la ecuación inicial se reduce a la forma

$$\frac{1}{1-m} z' + P(x) z = Q(x).$$

Al integrar ecuaciones concretas de Bernoulli no hace falta transformarlas previamente en lineales sino aplicar directamente el método de Bernoulli o el de variación de la constante arbitraria.

562. Integrar la ecuación $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$, con la condición inicial $y(0) = 0$.

Resolución. Integramos la ecuación homogénea $y' \cos^2 x + y = 0$; separando las variables, obtendremos

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\cos^2 x} = 0, \quad \ln y + \operatorname{tg} x = \ln C, \quad y = Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

Buscamos la solución de la ecuación inicial no homogénea en la forma $y = C(x) e^{-\operatorname{tg} x}$, donde $C(x)$ es la función desconocida. Sustituyendo en la ecuación inicial $y = C(x) e^{-\operatorname{tg} x}$ e $y' = C'(x) e^{-\operatorname{tg} x} - C(x) e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x$, llegamos a la ecuación

$$\cos^2 x\, C'(x) e^{-\operatorname{tg} x} - C(x) e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x \cos^2 x + C(x) e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x.$$

o bien

$$C'(x) \cos^2 x\, e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x,$$

de donde

$$C(x) = \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = e^{\operatorname{tg} x} (\operatorname{tg} x - 1) + C.$$

De este modo, obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$y = \operatorname{tg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

Utilizando la condición inicial $y(0) = 0$, hallamos $0 = -1 + C$, de donde $C = 1$. Por consiguiente, la solución particular buscada tiene la forma

$$y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}.$$

563. Integrar la ecuación $y' - y \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x$.

Resolución. Es una ecuación lineal. La resolvemos por el método de Bernoulli. Haciendo $y = uv$, tenemos

$$u'v + v'u - uv \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x, \quad \text{o bien} \quad u(v' = v \operatorname{th} x) + u'v = \operatorname{ch}^2 x.$$

Hacemos $v' - v \operatorname{th} x = 0$, de donde $\frac{dv}{v} = \operatorname{th} x\, dx$; integrando, hallamos $\ln v = \ln \operatorname{ch} x$, o bien $v = \operatorname{ch} x$ (no introducimos la constante de integración, ya que es suficiente hallar una solución particular cualquiera de esta ecuación auxiliar).

Para determinar u tenemos la ecuación $u'v = \operatorname{ch}^2 x$ o $u' \operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 x$, de donde hallamos $u = \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$. Multiplicando u por v, logramos la solución general

$$y = \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x + C).$$

564. Integrar la ecuación

$$y'+\frac{xy}{1-x^2}=\operatorname{arcsen} x+x.$$

Resolución. Integramos la ecuación homogénea respectiva:

$$y'+\frac{xy}{1-x^2}=0;\quad \frac{dy}{y}=-\frac{x\,dx}{1-x^2};\quad \ln y=\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+\ln C,$$

o sea, $y=C\sqrt{1-x^2}$. Ahora hacemos $y=C(x)\sqrt{1-x^2}$; entonces

$$y'=C'(x)\sqrt{1-x^2}-\frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Efectuada la sustitución en la ecuación inicial no homogénea, obtenemos

$$C'(x)\sqrt{1-x^2}-\frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{1-x^2}C(x)\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc\,sen} x+x,$$

o sea,

$$C'(x)=\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integrando, hallamos

$$C(x)=\int\left[\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx=\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2-\sqrt{1-x^2}+C,$$

De este modo, la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y=\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2-\sqrt{1-x^2}+C\right].$$

565. Resolver la ecuación $x'+\frac{y}{x}=x^2y^4$.

Resolución. Es una ecuación de Bernoulli. La integramos por el método de variación de la constante arbitraria. Para esto integramos primeramente la ecuación homogénea lineal correspondiente $y'+\frac{y}{x}=0$ cuya solución es $y=\frac{c}{x}$.

Buscamos la solución de la ecuación inicial de Bernoulli, haciendo $y=\frac{C(x)}{x}$, $y'=\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}$. La sustitución de y e y' en la ecuación inicial ofrece:

$$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=x^2\left[\frac{C(x)}{x}\right]^4,\quad \text{o bien}\quad \frac{C'(x)}{x}=\frac{[C(x)]^4}{x^2}.$$

Integramos la ecuación obtenida:

$$\frac{dC(x)}{[C(x)]^4}=\frac{dx}{x};\quad -\frac{1}{3[C(x)]^3}=\ln x-\ln C;\quad C(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{3\ln(C/x)}}.$$

De esto modo, la solución general de la ecuación inicial es

$$y=\frac{C(x)}{x}=\frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln(C/x)}}.$$

566. Integrar la ecuación

$$y'-\frac{2xy}{1+x^2}=4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x.$$

Resolución. Es también una ecuación de Bernoulli. La integramos por el método de Bernoulli, para lo cual hacemos $y = uv$. Sustituyendo en la ecuación inicial $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, agrupemos los términos que contienen u en el primer grado:

$$u'v+u\left(v'-\frac{2xv}{1+x^2}\right)=4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x.$$

Tomemos por v una solución particular cualquiera de la ecuación

$$v'-\frac{2xv}{1+x^2}=0.$$

Separando en ella las variables, hallamos

$$\frac{dv}{v}=\frac{2x\,dx}{1+x^2}; \quad \ln v=\ln(1+x^2); \quad v=1+x^2$$

(no introducimos la constante de integración).

Para hallar u tenemos la ecuación

$$u'v=4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x,$$

o bien (puesto que $v=1+x^2$)

$$u'=\frac{4\sqrt{u}\operatorname{arctg} x}{1+x^2}.$$

Separamos las variables e integramos:

$$\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx; \quad \sqrt{u}=\operatorname{arctg}^2 x+C.$$

Ahora bien, $u = (\operatorname{arctg}^2 x + C)^2$ e $y = uv = (1 + x^2)(\operatorname{arctg}^2 x + C)^2$ es la solución general de la ecuación inicial.

567. Integrar la ecuación $y = xy' + y' \ln y$.

Resolución. Esta ecuación se puede integrar fácilmente, si se cambian de papel x e y: tomando por argumento y y por la función desconocida x. Para esto hace falta solamente (utilizando la fórmula de derivación de la función inversa) poner $y'_x = 1/x'_y$. Entonces la ecuación dada se transforma en la siguiente:

$$yx'_y = x + \ln y.$$

Esto es una ecuación lineal respecto a x. Integramos la ecuación homogénea respectiva $yx' = x$; tenemos

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}; \quad x=Cy.$$

Buscamos la solución de la ecuación inicial no homogénea, haciendo $x = C(y)\,y$, de donde $x'_y = C'(y)\,y + C(y)$. La sustitución en la ecuación da

$$C'(y)\,y^2 + C(y)\,y = C(y)\,y + \ln y, \quad \text{de donde} \quad C'(y) = \frac{\ln y}{y^2},$$

$$C(y) = C - \frac{1+\ln y}{y}.$$

Multiplicando $C(y)$ por y, hallamos la solución de la ecuación inicial

$$x = Cy - 1 - \ln y.$$

568. Integrar la ecuación $(x^2 \ln y - x)\,y' = y$.

Resolución. Esta ecuación se puede integrar con ayuda de la misma transformación que la precedente. Tomando y por argumento y x por función desconocida, reducimos esta ecuación a la forma

$$x^2 \ln y - x = yx', \quad \text{o bien} \quad yx' + x = x^2 \ln y.$$

Esta es una ecuación de Bernoulli con respecto a x. Integrando la ecuación homogénea lineal respectiva $yx' + x = 0$, hallamos $x = C/y$.

Tomamos en la ecuación inicial $x = \frac{C(y)}{y}$, de donde $x' = \frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2}$; llegamos a la ecuación siguiente para determinar $C(y)$:

$$C'(y) - \frac{C(y)}{y} + \frac{C(y)}{y} = \frac{[C(y)]^2}{y} \ln y, \quad \text{o bien} \quad C'(y) = \frac{[C(y)]^2 \ln y}{y^2}.$$

Separamos las variables e integramos:

$$\frac{dC(y)}{[C(y)]^2} = \frac{\ln y}{y^2}\,dy; \quad -\frac{1}{C(y)} = C - \frac{\ln y + 1}{y}; \quad C(y) = \frac{y}{\ln y + 1 - Cy}.$$

Multiplicando $C(y)$ por $1/y$, hallamos la solución general de la ecuación inicial:

$$x = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}.$$

Resolver las ecuaciones:

569. $xy' - y = x^2 \cos x$.

570. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

571. $y' \cos x + y = 1 - \operatorname{sen} x$.

572. $y' + \frac{n}{x} y = \frac{a}{x^n}$; $y(1) = 0$.

573. $(1 + x^2)\,y' + y = \operatorname{arctg} x$.

574. $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \operatorname{arcsen} x$; $y(0) = 0$.

575. $y' - \frac{y}{\operatorname{sen} x} = \cos^2 x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

576. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$; $y(e) = e^2/2$.

577. $y' \operatorname{sen} x - y \cos x = 1$; $y(\pi/2) = 0$.

578. $y'(x + y^2) = y$.

Indicación: tomar x por función desconocida.

579. $y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \operatorname{sen} 6x$; $y(0) = 1/3$.

580. $(2xy + 3)\, dy - y^2\, dx = 0$.

Indicación: tomar x por función desconocida.

581. $(y^4 + 2x)\, y' = y$.

Indicación: tomar x por función desconocida.

582. $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{4/3}$.

583. $x' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$.

584. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

585. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$.

586. $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$; $y(0) = 9/4$.

587. $y' + \frac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2 (x^3 + 1) \operatorname{sen} x$; $y(0) = 1$.

588. $y\, dx + (x + x^2 y^2)\, dy = 0$.

Indicación: tomar x por función desconocida.

589. $y' - 2y \operatorname{tg} x + y^2 \operatorname{sen}^2 x = 0$.

590. $(y^2 + 2y + x^2)\, y' + 2x = 0$; $y(1) = 0$.

Indicación: tomar x por función desconocida.

7. Ecuaciones de la forma $x = \varphi(y')$ e $y = \varphi(y')$. Estas ecuaciones se integran fácilmente en forma paramétrica si se hace $y' = p$ y se toma p por parámetro, con cuya ayuda conviene expresar tanto x como y. En efecto, haciendo $y' = p$ en la ecuación $x = \varphi(y')$, inmediatamente obtenemos la expresión para x por medio del parámetro p : $x = \varphi(p)$. De aquí, derivando, encontramos $dx = \varphi'(p)\, dp$, pero, puesto que $dy = y'\, dx = p\, dx$, entonces, por consiguiente, $dy = p\varphi'(p)\, dp$, e y se determina por la integración: $y = \int p\varphi'(p)\, dp + C$.

De este modo, la solución de la ecuación $x = \varphi(y')$ se escribe en la forma paramétrica

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = \int p\varphi'(p)\, dp + C. \end{cases}$$

Análogamente, tomando $y' = p$ en la ecuación $y = \varphi(y')$, hallamos $y = \varphi(p)$. Derivando y, obtenemos $dy = \varphi'(p)\, dp$. Pero, como antes, $dy = p\, dx$. Por lo tanto, $p\, dx = \varphi'(p)\, dp$, de donde $dx = \frac{\varphi'(p)dp}{p}$ y encontramos x por la integración: $x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p} + C$. La solución genera de la ecuación $y = \varphi(y')$ tiene la forma

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(p)\, dp}{p} + C, \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

Si esto se logra, en ambos casos se puede eliminar el parámetro p y hallar la integral general de la ecuación.

591. Integrar la ecuación $x = y' \operatorname{sen} y' + \cos y'$.

Resolución. Hacemos $y' = p$. Entonces $x = p \operatorname{sen} p + \cos p$. Derivaremos esta igualdad:

$$dx = (\operatorname{sen} p + p \cos p - \operatorname{sen} p)\, dp = p \cos p\, dp$$

y sustituimos la expresión para dx en la igualdad $dy = p\, dx$:

$$dy = p^2 \cos p\, dp,$$

o sea,

$$y = \int p^2 \cos p\, dp = (p^2 - 2) \operatorname{sen} p + 2p \cos p + C.$$

De este modo, la solución general en la forma paramétrica tiene el aspecto

$$\begin{cases} x = p \operatorname{sen} p + \cos p, \\ y = (p^2 - 2) \operatorname{sen} p + 2p \cos p + C. \end{cases}$$

592. Integrar la ecuación $y' = \operatorname{arctg} (y/y'^2)$.

Resolución. Hallamos previamente $y = y'^2 \operatorname{tg} y'$. Tomamos $y' = p$; entonces $y = p^2 \operatorname{tg} p$. Derivamos esta igualdad: $dy = (2p \operatorname{tg} p + p^2 \sec^2 p)\, dp$ y, reemplazando dy por $p\, dx$, obtenemos $p\, dx = p\, (2 \operatorname{tg} p + p \sec^2 p)\, dp$, de donde, simplificando p e integrando, hallamos

$$x = \int (2 \operatorname{tg} p + p \sec^2 p)\, dp = p \operatorname{tg} p - \ln \cos p + C.$$

La solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$\begin{cases} y = p^2 \operatorname{tg} p, \\ x = p \operatorname{tg} p - \ln \cos p + C. \end{cases}$$

593. Integrar la ecuación $x = y' + \ln y'$.

Resolución. Pongamos $y' = p$. Por lo tanto, $x = p + \ln p$; derivando, encontramos $dx = dp + \frac{dp}{p}$. Como $dy = p\, dx$, entonces

$$dy = p\left(dp + \frac{dp}{p}\right) = (p+1)\, dp.$$

Integrando, hallamos

$$y = \frac{1}{2}(p+1)^2 + C.$$

La solución general de la ecuación dada escrita en la forma paramétrica reviste el aspecto

$$\begin{cases} x = p + \ln p, \\ y = \frac{1}{2}(p=1)^2 + C. \end{cases}$$

Aquí el parámetro p es fácil eliminarlo; de la segunda igualdad obtenemos $p = \sqrt{2(y - C)} - 1$ ($p > 0$ y por eso delante de la raíz hace falta poner el signo «+»). Sustituyendo la expresión encontrada para p en la primera igualdad, hallamos la solución general de la ecuación en la forma siguiente:

$$x=\sqrt{2(y-C)}-1+\ln[\sqrt{2(y-C)}-1].$$

Resolver las ecuaciones:

594. $\operatorname{arcsen}(x/y')=y'$.
595. $y=e^{y'}(y'-1)$.
596. $x=2(\ln y'-y')$.
597. $y(1+y'^2)^{1/2}=y'$.
598. $x=2y'+3y'^2$.
599. $x=y'(1+e^{y'})$.
600. $x=e^{2y'}(2y'^2-2y'+1)$.
601. $y=y'\ln y'$.

8. Ecuaciones de Lagrange y de Clairaut. Se llama ecuación de Lagrange a una ecuación diferencial de primer orden, lineal respecto a x e y, de cuyos coeficientes sirven las funciones de y':

$$P(y')x+Q(y')y+R(y')=0.$$

La ecuación de Lagrange se integra del modo siguiente. Vamos a resolverla respecto a y y tomamos como parámetro y', haciendo $y'=p$:

$$y=xf(p)+\varphi(p).$$

Aquí se introducen las designaciones $f(y')=-P(y')/Q(y')$, $\varphi(y')=-R(y')/Q(y')$]. Derivando la ecuación obtenida y sustituyendo en el primer miembro dy por $p\,dx$, llegamos a la ecuación

$$p\,dx=f(p)\,dx+xf'(p)\,dp+\varphi'(p)\,dp.$$

La ecuación obtenida es lineal con respecto a x (como función de p) y por eso puede ser integrada. Si su solución es $x=F(p,\ C)$, entonces la solución general de la ecuación inicial de Lagrange se escribirá en la forma

$$\begin{cases} x=F(p,\ C), \\ y=xf(p)+\varphi(p)=F(p,\ C)f(p)+\varphi(p). \end{cases}$$

Se llama *ecuación de Clairaut* a la ecuación que tiene la forma

$$y=xy'+\varphi(y'),$$

es un caso particular de la ecuación de Lagrange. Integrándola por el procedimiento indicado, es fácil obtener la solución general $y=Cx+\varphi(C)$ la cual define una familia de rectas sobre un plano.

No obstante, la ecuación de Clairaut, además de la solución general, tiene aún una solución singular definida por las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\begin{cases} x=-\varphi'(p), \\ y=-p\varphi'(p)+\varphi(p). \end{cases}$$

La solución singular de una ecuación de Clairaut (ella existe si $\varphi'(p)\neq$ $\neq$ const) es la envolvente de una familia de rectas determinadas por la solución general (en otras palabras, *de solución general de la ecuación de Clairaut sirve la familia de tangentes para la solución singular*).

Una ecuación de Lagrange también puede tener soluciones singulares, con ello las soluciones singulares de esta ecuación (si ellas existen) son las tangentes comunes a todas las curvas integrales definidas por la solución general.

602. Integrar la ecuación $y = xy' - e^{y'}$.

Resolución. Esta es una ecuación de Clairaut. Hacemos $y' = p$ y escribimos la ecuación en la forma $y = px - e^p$. La derivamos, $dy = p\,dx + x\,dp - e^p\,dp$; pero $dy = p\,dx$, por eso la última ecuación adopta la forma $x\,dp - e^p\,dp = 0$, o bien $(x - e^p)\,dp = 0$. Por lo tanto, o $dp = 0$, o bien $x = e^p$. Si se hace $dp = 0$, entonces $p = C$; sustituyendo este valor de p en la igualdad $y = px - e^p$, obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$y = Cx - e^C.$$

Si hacemos $x = e^p$, entonces $y = pe^p - e^p\ (p - 1)\,e^p$ y llegamos a la solución singular de la ecuación inicial

$$\begin{cases} x = e^p, \\ y = (p-1)\,e^p. \end{cases}$$

Eliminando el parámetro p (en el caso dado $p = \ln x$), hallamos la solución singular en la forma explícita:

$$y = x\,(\ln x - 1).$$

Verifiquemos que el conjunto de rectas determinadas por la solución general es una familia de tangentes a la curva integral singular.

Derivando la solución singular, hallamos $y' = \ln x$. La ecuación de la tangente a la curva integral singular en el punto $M\ (x_0;\ y_0)$ [donde $y_0 = x_0 \times \times (\ln x_0 - 1)$] se escribirá en la forma

$$y - y_0 = y_0'\,(x - x_0), \qquad \text{o bien} \qquad y - x_0\,(\ln x_0 - 1) = \ln x_0\,(x - x_0),$$

lo que, efectuada la simplificación, resulta $y = x \ln x_0 - x_0$. Si aquí se pone $\ln x_0 = C$, la ecuación de la familia de tangentes a la curva integral singular tendrá la forma $y = Cx - e^C$ que es lo que se necesitaba demostrar.

603. Integrar la ecuación $y = xy'^2 + y'^2$.

Resolución. Esta es una ecuación de Lagrange. Procedemos análogamente al ejercicio anterior, o sea, hacemos $y' = p$, entonces $y = xp^2 + p^2$. Derivamos la última igualdad: $dy = p^2\,dx + 2px\,dp + 2p\,dp$. Efectuando la sustitución $dy = p\,dx$, llegamos a la ecuación $p\,dx = p^2\,dx + 2px\,dp + 2p\,dp$. De aquí, simplificando p, obtenemos la ecuación con variables separables

$$(1-p)\,dx = 2\,(x+1)\,dp, \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p}.$$

Integrándola, encontramos

$$\ln(x+1) = -2\ln|1-p| + \ln C; \qquad x + 1 = C/(p-1)^2.$$

Utilizando la ecuación dada $y = p^2\,(x+1)$, obtenemos

$$y = Cp^2/(1 - p^2).$$

La simplificación de p efectuada, puede provocar (y en este caso provocó la pérdida de la solución singular; haciendo $p = 0$, de la ecuación dada hallamos $y = 0$; esto es una solución singular.

De suerte que

$$\begin{cases} x+1 = C/(p-1)^2, \\ y = Cp^2/(p-1)^2 \end{cases}$$ es la solución general; $y = 0$ es la solución particular.

En la solución general el parámetro p se puede eliminar y reducir a la forma $(\sqrt{y} + \sqrt{x+1})^2 = C$.

Resolver las ecuaciones:

604. $y = xy' + \sqrt{b^2 + a^2 y'^2}$.

605. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

606. $y = xy' + y' - y'^2$.

607. $y = x\left(\frac{1}{x} + y'\right) + y'^2$.

608. $2y(y' + 1) = xy'^2$.

§ 2. Ecuaciones diferenciales de órdenes superiores

1. Coceptos básicos. Se llama *ecuación diferencial de n-ésimo orden* a la que tiene la forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

De solución de tal ecuación sirve toda función n veces derivable $y = \varphi(x)$ que convierte la ecuación dada en identidad, o sea,

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)] = 0.$$

El problema de Cauchy para esta ecuación consiste en hallar una solución tal que satisfaga las condiciones: $y = y_0$, $y' = y'_0$, ..., $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ para $x = x_0$, donde x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ son números dados, llamados *datos* o *condiciones iniciales*.

La función $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ se denomina *solución general* de la ecuación diferencial de n-ésimo orden dada si, escogidas respectivamente las constantes arbitrarias C_1, C_2, ..., C_n, esta función es la solución de todo problema de Cauchy planteado para la ecuación dada.

Cualquier solución obtenida a partir de la solución general para valores concretos de las constantes C_1, C_2, ..., C_n (en particular, toda solución del problema de Cauchy) se llama solución particular de esta ecuación. Para separar del conjunto de soluciones de la ecuación diferencial una solución particular determinada se utilizan, a veces, las llamadas condiciones de contorno. Estas condiciones (cuyo número no debe superar el orden de la ecuación) no se dan en un punto sino en los extremos de cierto intervalo. Es evidente que las condiciones de contorno se ponen solamente para las ecuaciones cuyo orden es superior al primero.

La integración de las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden se logra efectuar solamente en algunos casos particulares.

2. Ecuación de la forma $y^{(n)} = f(x)$. La solución de esta ecuación se encuentra integrando n veces, a saber:

$$y^{(n)} = f(x), \quad y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1 = f_1(x) + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int [f_1(x) + C_1]\,dx = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

donde

$$f_n(x)=\underbrace{\iiint\ldots\int}_{n\text{ veces}} f(x)\,dx^n.$$

Puesto que $\frac{C_1}{(n-1)!}$, $\frac{C_2}{(n-2)!}$, ... son constantes, la solución general se puede escribir también así:

$$y=f_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$$

609. Hallar la solución particular de la ecuación $y''=xe^{-x}$ que satisface las condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Resolución. Hallemos la solución general por integración sucesiva de la ecuación dada:

$$y'=\int xe^{-x}\,dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1,$$

$$y=\int[-xe^{-x}-e^{-x}+C_1]\,dx=xe^{-x}+2e^{-x}+C_1x+C_2,$$

o bien

$$y=(x+2)e^{-x}+C_1x+C_2.$$

Valgámonos de las condiciones iniciales: $1=2+C_2$; $C_2=-1$; $0=-1+C_1$; $C_1=1$. Por consiguiente, la solución particular buscada tiene la forma

$$y=(x+2)e^{-x}+x-1.$$

Esta misma solución se puede hallar también del modo siguiente, utilizando las condiciones iniciales dadas:

$$y'=y'(0)+\int_0^x xe^{-x}\,dx=[-xe^{-x}-e^{-x}]_0^x=-xe^{-x}-e^{-x}+1;$$

$$y=y(0)+\int_0^x[-xe^{-x}-e^{-x}+1]\,dx=1+[(x+2)e^{-x}+x]_0^x=(x+2)e^{-x}+x-1.$$

Resolver las ecuaciones:

610. $y^{\text{IV}}=\cos^2 x$; $y(0)=1/32$; $y'(0)=0$, $y''(0)=1/8$, $y'''(0)=0$.

611. $y'''=x\operatorname{sen}x$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

612. $y'''\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}2x$.

613. $y''=2\operatorname{sen}x\cos^2 x-\operatorname{sen}^3 x$.

614. $y'''=xe^{-x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=2$.

3. Ecuaciones diferenciales de la forma F $(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots y^{(n)})=0$ que no contienen la función buscada. El orden de tal ecuación se puede reducir, tomando por nueva función desconocida la inferior entre las derivadas de la ecuación dada, o sea, haciendo $y^{(k)}=z$. Entonces obtenemos la ecuación

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)})=0.$$

De este modo, el orden de la ecuación se reduce en k unidades.

615. Hallar la ecuación general de la ecuación $xy'' = y' \ln (y'/x)$.

Resolución. Haciendo $y' = z$, reducimos la ecuación a la forma

$$xz' = z \ln (z/x), \quad \text{o bien} \quad z' = (z/x) \ln (z/x).$$

Esta es una ecuación homogénea de primer orden. Tomando $z/x = t$, de donde $z = tx$, $z' = t'x + t$, obtenemos la ecuación

$$t' x + t = t \ln t, \quad \text{o bien} \quad \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando, hallamos

$$\ln (\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1, \quad \text{o bien} \quad \ln t - 1 = C_1 x,$$

de donde $t = e^{1+C_1x}$; retornando a la variable y, llegamos a la ecuación $y' = xe^{1+C_1x}$. Por consiguiente,

$$y = \int xe^{1+C_1x}\,dx = \frac{1}{C_1} xe^{1+C_1x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1x} + C_2.$$

616. Un cuerpo de masa m se deja caer por la vertical desde cierta altura sin poseer ninguna velocidad inicial. Durante la caída el cuerpo experimenta la resistencia del aire la cual es proporcional al cuadrado de la velociddad del cuerpo. Hallar la ley de movimiento del cuerpo.

Resolución. Introducimos las designaciones siguientes: s, el camino recorrido por el cuerpo; $v = \frac{ds}{dt}$, su velocidad; $w = \frac{d^2s}{dt^2}$, su aceleración. Sobre el cuerpo actúan estas fuerzas: su peso $P = mg$ (en el sentido de su movimiento) y la resistencia del aire $F = kv^2 = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ (en el sentido contrario a su movimiento).

Basándonos en la segunda ley de Newton, llegamos a la siguiente ecuación diferencial del movimiento del cuerpo:

$$mw = P - kv^2, \quad \text{o bien} \quad m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Valgámonos de las condiciones iniciales: si $t = 0$, entonces $s = 0$, $v = \frac{ds}{dt} = 0$. Sustituyendo $\frac{ds}{dt}$ por v, reescribimos la ecuación en la forma

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2,$$

de donde, haciendo $\frac{mg}{k} = a^2$, tenemos $\frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{k}{m} dt$. Integrando, hallamos ($v \leqslant a$):

$$\frac{1}{2a} \ln \frac{a+v}{a-v} = \frac{k}{m} t + C_1.$$

Si $t = 0$, entonces $v = 0$, de donde $C_1 = 0$. Por lo tanto,

$$\ln = \frac{a+v}{a-v} = \frac{2ak}{m} t.$$

De ello

$$v = a\frac{e^{2akt/m} - 1}{e^{2akt/m} + 1} = a\frac{e^{akt/m} - e^{-akt/m}}{e^{akt/m} + e^{-akt/m}} = a\, th\, (akt/m).$$

Pero $\frac{ak}{m}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\frac{k}{m}=\sqrt{\frac{kg}{m}}$; sustituyendo v por $\frac{ds}{dt}$, obtenemos para determinar s la ecuación

$$\frac{ds}{dt}=a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t,$$

de donde, integrando, hallamos

$$s=\sqrt{\frac{m}{kg}}\,a\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t+C_2=\frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t+C_2.$$

Puesto que $s=0$ para $t=0$, tenemos $C_2=0$.

De suerte que la ley de caída de un cuerpo al cual se opone la resistencia del aire, es proporcional al cuadrado de su velocidad y se describe por la fórmula

$$s=\frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t$$

y la velocidad de movimiento, por la fórmula $v=a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t$. Aquí $a=\sqrt{\frac{mg}{k}}$ es útil señalar que la velocidad de movimiento no crece ilimitadamente, ya que $\lim\limits_{t\to\infty} v=a=\sqrt{\frac{P}{k}}$ (puesto que $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t=1$), donde P es el peso del cuerpo; además, prácticamente la velocidad de caída alcanza su valor límite con mucha rapidez, distinguiéndose de éste en una magnitud muy pequeña. Precisamente un cuadro así se observa en la práctica cuando se ejecuta un salto en paracaídas de apertura retardada desde gran altura.

Resolver las ecuaciones:

617. $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1)$; $y(2)=1$, $y'(2)=-1$.

618. $(1-x^2)\,y''-xy'=2$.

619. $2xy'''y''=y''^2-a^2$.

620. $(1+x^2)\,y''+1+y'^2=0$.

621. $y'''(x-1)-y''=0$; $y(2)=2$; $y'(2)=1$, $y''(2)=1$.

4. Ecuaciones diferenciales de la forma F $(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$ sin variable independiente. La ecuación de esta forma admite la reducción del orden, si se pone $y'=z$ y por nuevo argumento se toma el mismo y. En este caso y'', y''', ... se expresarán con ayuda de las fórmulas (que se deducen según la regla de derivación de la función compuesta) $y''=z\frac{dz}{dy}$, $y'''=z\left[z\frac{d^2z}{d^2y}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]$, ... por z y las derivadas de z con respecto a y, además, el orden de la ecuación se reducirá en una unidad.

622. Resolver la ecuación $1+y'^2=yy''$.

Resolución. Hacemos $y'=z$, $y''=z\frac{dz}{dy}$. La ecuación toma la forma $1+z^2=yz\frac{dz}{dy}$; o sea, una ecuación de primer orden con respecto a z, con variables separables. Separamos las variables e integramos:

$$\frac{z\,dz}{1+z^2}=\frac{dy}{y}; \quad \ln(1+z^2)=2\ln y+2\ln C_1; \quad 1+z^2=$$
$$=C_1^2y^2; \quad z=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}.$$

De aquí, retornando a la variable y, tenemos:

$$y'=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2y^2-1}}=\pm dx,$$
$$\frac{1}{C_1}\ln\left(C_1y+\sqrt{C_1^2y^2-1}\right)=\pm(x+C_2),$$

o bien,

$$y=\frac{1}{2C_1}\left(e^{\pm(x+C_2)C_1}+e^{\mp(x+C_2)C_1}\right)=\frac{1}{C_1}\operatorname{ch}C_1(x+C_2)-C_1^*\operatorname{ch}\frac{x+C_2}{C_1^*}.$$

622a. Hallar la primera integral (o sea, y') de la ecuación $y''=b\operatorname{sen}y-ky'^2$ que satisfaga las condiciones iniciales: $y(0)=0$ e $y'(0)=0$.

Resolución. Pongamos $y'^2=z$, $2y'y''=z'=y'\cdot\frac{dz}{dy}$, o sea, $y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{dy}$. La ecuación tomará la forma $\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{dy}=b\operatorname{sen}y-kz$. Es una ecuación lineal de primer orden respecto a z: $\frac{dz}{dy}+2kz=2b\operatorname{sen}y$. Resolviéndola por el método de Bernoulli, o sea, haciendo la susticución $z=uv$, obtendremos

$$u\frac{dv}{dy}+v\left(\frac{du}{dy}+2ku\right)=2b\operatorname{sen}y, \quad \frac{du}{dy}+2ku=0,$$
$$u=e^{-2ky} \quad \text{y} \quad dv=2b\operatorname{sen}y\cdot e^{2ky}\,dy.$$

Integrando, encontramos

$$v=\frac{2b}{1+4k^2}e^{2ky}(2k\operatorname{sen}y-\cos y)+C.$$
$$z=uv+Ce^{-2ky}+\frac{2b}{1+4k^2}(2k\operatorname{sen}y-\cos y)=y'^2.$$

Utilicemos las condiciones iniciales y determinemos: $C-\frac{2b}{1+4k^2}=0$, o sea, $C=\frac{2b}{1+4k^2}$.

Por consiguiente, la primera integral buscada tiene la forma

$$y'=\pm\sqrt{\frac{2b}{1+4k^2}\left(e^{-2ky}+2k\operatorname{sen}y-\cos y\right)}.$$

623. Hallar la curva en la cual el radio de curvatura es igual al cubo de la normal; la curva buscada debe pasar por el punto $M(0; 1)$ y tener en este punto una tangente que forme con el eje Ox un ángulo de 45°.

Resolución. Puesto que el radio de curvatura de la curva plana se expresa por la fórmula $R = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$ y la longitud de la normal $N = y\sqrt{1+y'^2}$, entonces la ecuación diferencial del problema tendrá la forma

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = (y\sqrt{1+y'^2})^3.$$

De ello, reduciendo en $(1 + y'^2)^{3/2}$, llegamos a la ecuación $y''\cdot y^3 = 1$.

Tomando $y' = z$, $y'' = z\cdot\frac{dz}{dy}$, obtenemos para z la ecuación $z\cdot\frac{dz}{dy}\cdot y^3 = 1$. Integrándola, hallamos

$$z\,dz = y^{-3}\cdot dy, \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}y^{-2} + \frac{1}{2}C_1, \quad \text{o sea,} \quad z^2 = C_1 - y^{-2};$$

retornando a la variable y, llegamos a la ecuación $y'^2 = C_1 - y^{-2}$.

La constante arbitraria C_1 la hallamos partiendo de la condición de que la tangente en el punto M (0, 1) forme con el eje Ox un ángulo de 45°, o sea, tg 45° $= y'_M| = 1$, o bien $y'(0) = 1$. Por consiguiente, $1 = C_1 - 1$, o sea, $C_1 = 2$.

Ahora bien, para determinar y se ha obtenido la ecuación de primer orden $y'^2 = 2 - y^{-2}$, de donde $y' = \frac{\sqrt{2y^2-1}}{y}$; separamos las variables e integramos:

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{2y^2-1}} = dx; \quad \frac{1}{2}\sqrt{2y^2-1} = x + \frac{1}{2}C_2; \quad y^2 = \frac{1}{2}[(x+C_2)^2+1].$$

Encontramos la constante arbitraria C_2 partiendo de la condición de que la curva pase por el punto M (0; 1), o sea, $1 = \frac{1}{2}[(2\cdot 0 + C_2)^2 + 1]$; $C_2 = 1$. Por lo tanto, la curva buscada se define por la ecuación

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

Resolver las ecuaciones:

624. $y''(2y + 3) - 2y'^2 = 0$.
625. $yy'' - y'^2 = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
626. $a^2y''^2 = 1 + y'^2$.
627. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.
628. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$.
629. $y''(1 + y) = y'^2 + y'$.
630. $y'' = y'/\sqrt{y}$.

5. Ecuaciones de la forma F (y, y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ = 0) homogéneas con respecto a y, y', y'', ..., $y^{(n)}$. La ecuación de la forma indicada admite la reducción del orden en una unidad al sustituir $y'/y = z$, donde z es la nueva función desconocida.

631. Resolver la ecuación $3y'^2 = 4yy'' + y^2$.

Resolución. Dividimos ambos miembros de la ecuación por y^2:

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - 4\cdot\frac{y''}{y} = 1.$$

Hacemos $\frac{y'}{y}=z$, de donde $\frac{y''}{y}-\frac{y'^2}{y^2}=z'$, o bien, $\frac{y''}{y}=z'+z^2$. Como resultado obtenemos la ecuación

$$3z^2-4z^2-4z'=1, \quad \text{o bien} \quad -4z'=1+z^2, \quad \text{o sea,} \quad \frac{dz}{1+z^2}=-\frac{1}{4}dx.$$

De ello, integrando, hallamos

$$\operatorname{arctg} z=C_1-\frac{1}{4}x, \quad \text{o bien} \quad z=\operatorname{tg}\left(C_1-\frac{x}{4}\right), \quad \text{o} \quad \frac{y'}{y}=$$
$$=\operatorname{tg}\left(C_1-\frac{x}{y}\right).$$

Integrando la última ecuación, obtenemos

$$\ln y=4\ln\cos\left(C_1-\frac{x}{4}\right)+\ln C_2, \quad \text{o bien} \quad y=C_2\cdot\cos^4\left(C_1-\frac{x}{4}\right).$$

632. Resolver la ecuación $y'^2+yy''=yy'$.

Resolución. Aunque esta ecuación pertenece al tipo precedente, ella puede ser integrada por un procedimiento más sencillo. En la misma el primer miembro es $(yy')'$ en virtud de lo cual la ecuación toma la forma $(yy')'=yy'$, o bien $\frac{d(yy')}{yy'}=dx$. De aquí

$$\ln(yy')=x+\ln C_1, \quad \text{o bien} \quad yy'=C_1e^x, \quad \text{o sea,} \quad y\,dy=C_1e^x\,dx.$$

Integrando, encontramos la respuesta definitiva:

$$y^2/2=C_1e^x+C_2.$$

Resolver las ecuaciones:

633. $yy''-y'^2=0$.

634. $(y+y')y''+y'^2=0$.

635. $2xy'''y''=y''^2-a^2$.

636. $y''=y'e^y$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

636a. Hallar la primera integral (o sea y') de la ecuación $2yy''=ky-y'^2$ que satisfaga las condiciones iniciales: $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Indicación: efectuar la sustitución $y'^2=z$.

637. Hallar la curva si la proyección del radio de curvatura sobre el eje Oy es constante e igual a a y el eje Ox es tangente a la curva buscada en el origen de las coordenadas.

638. Hallar la curva en la cual el radio de curvatura en un punto cualquiera es igual a $\sec\alpha$, donde α es el ángulo formado por la tangente en el punto respectivo con el eje Ox. La curva buscada pasa por el punto $M(0;1)$ y la tangente a la curva en este punto es paralela al eje Ox.

639. Un cuerpo en el instante inicial se encontraba en un líquido, se sumerge en éste accionado por su propio peso sin poseer ninguna velocidad inicial. La resistencia que opone el líquido es directamente proporcional a la velocidad del cuerpo. Hallar la ley de movimiento del cuerpo si su masa es igual a m.

§ 3 Ecuaciones lineales de órdenes superiores

1. Conceptos básicos. Se llama *ecuación diferencial de n-ésimo orden* a la que tiene la forma

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+a_2(x)\,y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=f(x). \quad (1)$$

Aquí las funciones $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ y $f(x)$ están definidas y son continuas en cierto intervalo $]a, b[$.

La ecuación (1) se llama lineal *no homogénea*, o sea, ecuación *con segundo miembro*. Si $f(x)\equiv 0$, la ecuación se denomina lineal *homogénea*. La ecuación lineal que tiene el primer miembro igual a la dada no homogénea, se llama *correspondiente a esta última*.

Conociendo una solución particular y_1 de la ecuación lineal homogénea, se puede, mediante la sustitución lineal de la función buscada $y=y_1\cdot\int z\,dx$, reducir su orden y, por consiguiente, el orden de la ecuación no homogénea correspondiente, en una unidad. La ecuación obtenida de orden $(n-1)$ con respecto a z también es lineal.

640. Se da la ecuación $y'''+\frac{2}{x}y''-y'+\frac{1}{x\ln x}y=x$ y se conoce la solución particular $y_1=\ln x$ de la ecuación homogénea correspondiente. Reducir el orden de la ecuación.

Resolución. Valgámonos de la sustitución $y=\ln x\cdot\int z\,dx$, donde z es la nueva función incógnita. Entonces sustituyendo las derivadas correspondientes

$$y'=\frac{1}{x}\int z\,dx+z\ln x,\quad y''=-\frac{1}{x^2}\int z\,dx+\frac{2z}{x}+z'\ln x,$$

$$y'''=\frac{2}{x^3}\int z\,dx-\frac{3z}{x^2}+\frac{3z'}{x}+z''\ln x$$

en la ecuación dada, obtenemos la ecuación de segundo orden

$$z''\ln x+\frac{2\ln x+3}{3}\cdot z'+\left(\frac{1}{x^2}-\ln x\right)z=x.$$

Nota. Señalemos que al efectuar la sustitución indicada en la ecuación lineal de segundo orden y teniendo en cuenta que la ecuación lineal de primer orden se integra en cuadraturas, se puede integrar en cuadraturas toda ecuación lineal de segundo orden si se conoce una solución particular de la ecuación homogénea correspondiente.

641. Integrar la ecuación $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ que tiene la solución particular $y_1=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Resolución. Realizamos la sustitución $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\int z\,dx$; entonces

$$y'=\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2}\cdot\int z\,dx+\frac{\operatorname{sen} x}{x}z,$$

$$y''=\frac{\operatorname{sen} x}{x}z'+\frac{2(x\cos x-\operatorname{sen} x)}{x^2}\cdot z-\frac{(x^2-2)\operatorname{sen} x+2x\cos x}{x^3}\cdot\int z\,dx.$$

Obtenemos la ecuación

$$\operatorname{sen} x \cdot z' + 2\cos x \cdot z = 0, \quad \text{o sea,} \quad z = \frac{C_1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Por consiguiente,

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \int \frac{C_1\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}(C_2 - C_1 \operatorname{ctg} x) = C_2 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} - C_1 \frac{\cos x}{x}.$$

642. Reducir el orden e integrar la ecuación $y'' \operatorname{sen}^2 x = 2y$ que tiene la solución particular $y = \operatorname{ctg} x$.

643. La ecuación $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$ tiene la solución particular $y = x$. Reducir el orden e integrar esta ecuación.

644. La ecuación $y'' + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)\, y' + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0$ tiene la solución particular $y = \operatorname{sen} x$. Reducir el orden e integrar esta ecuación.

2. Ecuaciones homogéneas lineales. Una de las propiedades destacables de las ecuaciones lineales consiste en que la solución general de tales ecuaciones se puede hallar a partir de un número de sus soluciones particulares. Enunciemos el teorema sobre la estructura de la solución general de una ecuación lineal homogénea.

Teorema. Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0,$$

entonces $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ es la solución general de esta ecuación ($C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias).

Nota. Las funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ se llaman *linealmente independientes en el intervalo* $]a, b[$ si no están ligadas por ninguna identidad

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son cualesquiera arbitrarias, distintas de cero simultáneamente. Para el caso de dos funciones esta condición se puede enunciar también así: dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes si su relación no es una constante: $y_1/y_2 \neq \text{const}$. Por ejemplo: 1) $y_1 = x$; $y_2 = x^2$ son linealmente independientes; 2) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ son linealmente independientes; 3) $y_1 = 2e^{3x}$, $y_2 = 5e^{3x}$ son linealmente dependientes.

La condición suficiente de independencia lineal de n funciones, continuas junto con sus derivadas hasta el orden $(n-1)$ en el intervalo $]a, b[$, es la de que el determinante de Wronski (*wronskiano*) $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ de estas funciones no sea igual a cero en ningún punto del intervalo $]a, b[$, o bien

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si las n funciones dadas son soluciones particulares de una ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden, esta condición (no anulación) no es sólo suficiente sino también necesaria de independencia lineal de estas n soluciones.

El wronskiano de n soluciones de una ecuación homogénea lineal de n-ésimo orden

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\,y=0$$

está ligado al primer coeficiente $a_1(x)$ de esta ecuación *por la fórmula de Liouville-Ostrogradski*:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n]=W[y_1, y_2, \ldots, y_n]\,|_{x=x_0}\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)dx}.$$

El conjunto de n soluciones de una ecuación homogénea lineal de n-ésimo orden, definidas y linealmente independientes en el intervalo $]a, b[$, se llama *sistema fundamental* de soluciones de esta ecuación.

Para una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden

$$y''+a_1(x)\,y'+a_2(x)\,y=0$$

el sistema fundamental consta de dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ e $y_2(x)$; su solución general se determina por la fórmula

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

Si para tal ecuación se conoce una solución particular $y_1(x)$, su segunda solución, linealmente independiente con la primera, se puede determinar por la fórmula (que es una colorario de la fórmula de Liouville-Ostrogradski)

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx.$$

Esto brinda la posibilidad de integrar inmediatamente ecuaciones homogéneas lineales de segundo orden, para las cuales se conoce una solución particular, sin recurrir a la reducción de sus órdenes

Así, en el problema 641 para la ecuación $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ se conoce la solución $y_1(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Hallemos por la fórmula citada anteriormente la segunda solución:

$$y_2(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}\int\frac{e^{-2\int\frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}\,dx=\frac{\operatorname{sen} x}{x}\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}=-\frac{\cos x}{x}.$$

Por eso la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y=C_1\frac{\operatorname{sen} x}{x}-C_2\frac{\cos x}{x}.$$

Recomendamos al lector resolver por este procedimiento los problemas 642-644.

645. Mostrar que $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ es la solución general de la ecuación $y''-9y=0$.

Resolución. Efectuando la sustitución en la ecuación, es fácil cerciorarse de que las funciones $y_1=e^{3x}ey_2=e^{-3x}$ son sus soluciones. Estas soluciones particulares son linealmente independientes, ya que $y_1/y_2=e^{3x}/e^{-3x}=e^{6x}\neq$ $\neq$ const, por eso constituyen un sistema fundamental de soluciones y, en consecuencia, $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ es la solución general.

646. Se da la ecuación $y''' - y' = 0$. ¿Constituyen el sistema fundamental de soluciones las funciones e^x, e^{-x}, ch x que son, como es fácil de comprobar, las soluciones de esta ecuación?

Resolución. Para comprobar la independencia lineal de estas ecuaciones calculamos el wronskiano:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \\ e^x & -e^{-x} & \operatorname{sh} x \\ e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x \end{vmatrix}.$$

Este determinante es igual a cero, puesto que los elementos de las primera y tercera filas son iguales.

Por consiguiente, las funciones dadas son linealmente dependientes y por eso no se puede escribir la solución general basándose en estas soluciones particulares. El mismo resultado se puede obtener con más rapidez, puesto que ch $x = (e^x + e^{-x})/2$ y, por consiguiente, estas tres funciones son linealmente dependientes.

647. A la ecuación $y'' - y = 0$ la satisfacen dos soluciones particulares $y_1 = \operatorname{sh} x$, $y_2 = \operatorname{ch} x$. ¿Constituyen ellas un sistema fundamental?

648. ¿Se puede escribir la solución general de la ecuación $y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0 \; (x \neq 0)$ por sus dos soluciones particulares $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{sen} x$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos x$?

649. ¿Son linealmente independientes las funciones $x + 1$, $2x + 1$, $x + 2$?

650. Responder a la misma pregunta con respecto a las funciones $2x^2 + 1$, $x^2 - 1$, $x + 2$.

651. Responder a igual pregunta con respecto a las funciones $\sqrt{x}$, $\sqrt{x + a}$, $\sqrt{x + 2a}$.

652. Responder a esta pregunta, para las funciones $\ln(2x)$, $\ln(3x)$, $\ln(4x)$.

3. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes. Se llama *ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes* a una ecuación que tiene la forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{1}$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son ciertos números reales. Para hallar las soluciones particulares de la ecuación (1) se escribe la *ecuación característica*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0 \tag{2}$$

la cual se obtiene de la ecuación (1) sustituyendo en ella las derivadas de la función buscada por grados correspondientes de k, además, la propia función se reemplaza por la unidad. La función (2) es una ecuación de n-ésimo grado y tiene n raíces (reales o complejas, entre las cuales pueden haber también iguales).

Entonces la solución general de la ecuación diferencial (1) se construye según el carácter de las raíces de la ecuación (2):

1) a cada raíz real simple k le corresponde en la solución general el sumando de la forma Ce^{kx};

2) a cada raíz real de orden de multiplicidad m le corresponde en la solución general el sumando de la forma $(C_1 + C_2x + \ldots + C_mx^{m-1})\, e^{kx}$;

3) a cada par de raíces simples conjugadas complejas $k^{(1)} = \alpha + \beta i$ y $k^{(2)} = \alpha - \beta i$ le corresponde en la solución general el sumando de la forma $e^{\alpha x}\,(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$;

4) a cada par de raíces conjugadas complejas $k^{(1)} = \alpha + \beta i$ y $k^{(2)} = \alpha - \beta i$ de orden de multiplicidad m le corresponde en la solución general el sumando de la forma

$$e^{\alpha x}\,[(C_1 + C_2x + \ldots + C_{m-1}x^{m-1}) \cos \beta x] +$$
$$+ [(C_1' + C_2'x + \ldots + C_{m-1}'x^{m-1}) \operatorname{sen} \beta x].$$

653. Hallar la solución general de la ecuación $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Resolución. Escribimos la ecuación característica $k^2 - 7k + 6 = 0$; sus raíces son $k_1 = 6$; $k_2 = 1$. Por consiguiente, e^{6x} y e^x son soluciones particulares linealmente independientes y la solución general tiene la forma

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^x.$$

654. Hallar la solución general de la ecuación $y^{\text{IV}} - 13y'' + 36y = 0$.

Resolución. La solución característica tiene la forma $k^4 - 13k^2 + 36 = 0$; sus raíces son $k_{1,2} = \pm 3$, $k_{3,4} = \pm 2$, les corresponden las soluciones particulares linealmente independientes e^{3x}, e^{-3x}, e^{2x} y e^{-2x}. Por lo tanto, la solución general

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}.$$

655. Hallar la solución de la ecuación $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$ que satisface las condiciones iniciales: $x = 0$, $\dot{x} = 3$ para $t = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - k - 2 = 0$ tiene las raíces $k_1 = 2$, $k_2 = -1$. Por lo tanto, la solución general es $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-t}$. Sustituyendo las condiciones iniciales en la solución general y su derivada, obtendremos un sistema de ecuaciones con respecto a C_1 y C_2:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 3 = 2C_1 - C_2, \end{cases}$$

de donde $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. De suerte que la solución que satisface las condiciones iniciales dadas tiene la forma $y = e^{2t} - e^{-t}$.

656. Hallar la solución de la ecuación $\ddot{x} - 2\dot{x} = 0$ que satisface las condiciones de contorno: $x = 0$ para $t = 0$ y $x = 3$ para $t = \ln 2$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - 2k = 0$ tiene las raíces $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Por consiguiente, la solución general se escribe en la forma $x = C_1 + C_2e^{2t}$. Sustituyendo las condiciones de contorno en la solución general hallada, obtenemos

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2e^{2\ln 2} = 3, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + 4C_2 = 3. \end{cases}$$

De donde $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. De suerte que $x = e^{2t} - 1$ es la solución particular buscada que satisface las condiciones de contorno dadas.

657. Hallar la solución general de la ecuación $y''' - 2y'' + y' = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^3 - 2k^2 + k = 0$ tiene las raíces $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = 1$. Aquí 1 es raíz doble y por eso de soluciones particulares linealmente independientes sirven 1, e^x, xe^x. La solución general tiene la forma

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

658. Hallar la solución general de la ecuación $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - 4k + 13 = 0$ tiene las raíces $k = 2 \pm 3i$. Las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas y por eso les corresponden las soluciones particulares $e^{2x} \cos 3x$ y $e^{2x} \operatorname{sen} 3x$. Por consiguiente, la solución general es

$$y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x).$$

659 Un punto material de masa m se mueve por el eje Ox bajo la acción de la fuerza de recuperación orientada hacia el origen de las coordenadas y proporcional a la distancia del punto en movimiento al origen; el medio en que ocurre el movimiento opone al movimiento del punto una resistencia proporcional a la velocidad con que éste avanza. Hallar la ley del movimiento.

Resolución. Sea $\dot{x}$ la velocidad del punto; $\ddot{x}$, su aceleración. Sobre el punto actúan dos fuerzas: la de recuperación $f_1 = -ax$ y la de resistencia del medio $f_2 = -b\dot{x}$. De acuerdo con la segunda ley de Newton tenemos

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - ax, \quad \text{o bien} \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + ax = 0.$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Su ecuación característica $mk^2 + bk + a = 0$ tiene las raíces

$$k_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ma})/(2m).$$

1) Si $b^2 - 4ma > 0$, entonces las raíces son reales, diferentes y ambas negativas; introduciendo para ellas las designaciones

$$k_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ma})/(2m) = -r_1, \quad k_2 = -(b + \sqrt{b^2 - 4ma})/2m = -r_2,$$

hallamos la solución general de la ecuación de movimiento en la forma

$$x = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t}$$

(es el caso del llamado movimiento *aperiódico*).

2) Si $b^2 - 4ma = 0$, entonces las raíces de la ecuación característica son reales e iguales:

$$k_1 = k_2 = -b/(2m) = -r.$$

En este caso la solución general de la ecuación de movimiento tiene la forma

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{-rt},$$

3) Por último, si $b^2 - 4ma < 0$, entonces la ecuación característica tiene las raíces complejas conjugadas:

$$k_1 = -\alpha + \beta i, \quad k_2 = -\alpha - \beta i,$$

donde

$$\alpha = b/(2m), \quad \beta = (\sqrt{4am - b^2})/(2m).$$

La solución general de la ecuación de movimiento tiene la forma

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t) \quad \text{o bien} \quad x = Ae^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \varphi_0),$$

donde

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{sen} \varphi_0 = C_1/A, \quad \cos \varphi_0 = C_2/A$$

(oscilaciones amortiguadas).

Hallar las soluciones generales de las ecuaciones:

660. $y'' - y' - 2y = 0.$

661. $y'' + 25y = 0.$

662. $y'' - y' = 0.$

663. $y'' - 4y' + 4y = 0.$

664. $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + y'' = 0.$

665. $y^{\mathrm{IV}} + a^4 y = 0.$

666. $y^{\mathrm{IV}} + 5y'' + 4y = 0.$

Hallar las soluciones de las ecuaciones, que satisfacen las condiciones dadas iniciales o de contorno:

667. $y'' + 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -6.$

668. $y'' - 10y' + 25y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1.$

669. $y'' - 2y' + 10y = 0$; $y(\pi/6) = 0$, $y'(\pi/6) = e^{\pi/6}.$

670. $9y'' + y = 0$; $y(3\pi/2) = 2$, $y'(3\pi/2) = 0.$

671. $y'' + 3y' = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2.$

672. $y'' + 9y = 0$; $y(0) = 0$, $y(\pi/4) = 1.$

673. $y'' + y = 0$; $y'(0) = 1$; $y'(\pi/3) = 0.$

674. Resolver el problema 659 si la fuerza de resistencia del medio es igual a cero.

4. Ecuaciones lineales no homogéneas. La estructura de la solución general de una ecuación lineal no homogénea, o sea, de una ecuación con segundo miembro:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x),$$

se define según el teorema siguiente.

Si $u = u(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente, entonces la solución general de la ecuación lineal no homogénea tiene la forma $y = u + C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$; en otras palabras, la solución general de la ecuación no homogénea es igual a la suma de una solución particular cualquiera de ésta y de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

Por consiguiente, para construir la solución general de una ecuación no homogénea hace falta hallar una solución particular de ésta (suponiendo ya conocida la solución general de la ecuación homogénea correspondiente).

Examinemos dos métodos para encontrar una solución particular de una ecuación lineal no homogénea.

Método de variación de las constantes arbitrarias. Este método se emplea para buscar una solución particular de una ecuación lineal no homogénea de n-ésimo orden, ya sea con coeficientes variables o constantes, si se conoce la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

El método de variación consiste en lo siguiente. Sea conocido el sistema fundamental de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación homogénea correspondiente. Entonces la solución general de la ecuación no homogénea conviene buscarla en la forma

$$u(x) = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + \ldots + C_n(x)\, y_n,$$

donde las funciones $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ se determinan por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 + \ldots + C_n'(x)\, y_n = 0, \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' + \ldots + C_n'(x)\, y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

[$f(x)$ es el segundo miembro de la ecuación].

Para la ecuación de segundo orden $y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x)$ el sistema correspondiente tiene la forma

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0, \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = f(x). \end{cases}$$

La solución de este sistema se halla por las fórmulas

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)\, dx}{W(y_1, y_2)}; \qquad C_2(x) = \int \frac{y_1 \cdot f(x)\, dx}{W(y_1, y_2)},$$

en virtud de lo cual $u(x)$ se puede determinar directamente por la fórmula

$$u(x) = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot f(x)\, dx}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f(x)\, dx}{W(y_1, y_2)}.$$

Aquí $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano de las soluciones y_1 e y_2.

Supongamos, por ejemplo, que se requiere integrar la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x}\, y' + y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}.$$

Para la ecuación homogénea correspondiente hemos encontrado soluciones particulares $y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $y_2 = \frac{\cos x}{x}$ (véase la pág. 160); su wronskiano $W(y_1, y_2) = -\frac{1}{x^2}$.

Por eso $u(x)$ se puede hallar por la fórmula

$$u(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{x} \int \frac{\frac{\cos x}{x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} x}{x}}{(-1/x^2)}\, dx + \frac{\cos x}{x} \int \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} x}{x}}{(-1/x^2)}\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx - \frac{\cos x}{x} \cdot \int \cos x\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x} [\ln |\operatorname{tg}(x/2)| + \cos x] - \frac{\cos x}{x} \cdot \operatorname{sen} x.$$

De este modo, $u(x) = \frac{\operatorname{sen} x \ln |\operatorname{tg}(x/2)|}{x}$, y la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y = C_1 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2 \cdot \frac{\cos x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \ln |\operatorname{tg}(x/2)|.$$

Nota. Una vez más presteinos atención al hecho de que una ecuación lineal no homogénea de segundo orden puede ser integrada en cuadraturas si se conoce una solución particular $y_1(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente; la solución general de tal ecuación tiene la forma $y = C_1y_1 + C_2y_2 + u(x)$, donde y se determina por y_1 con ayuda de la fórmula

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

y $u(x)$ se determina mediante y_1 e y_2 valiéndose de la fórmula citada anteriormente.

Método de selección de una solución particular (método de los coeficientes indeterminados). Este método es aplicable solamente a las ecuaciones lineales de coeficientes constantes y sólo cuando su segundo miembro tiene la forma siguiente:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,\mathrm{sen}\,\beta x\right]$$

(o es la suma de funciones de tal tipo). Aquí α y β son constantes, $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de x de grados n y m, respectivamente.

La solución particular de la ecuación de n-ésimo orden

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = f(x),$$

donde $f(x)$ tiene la forma indicada y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son coeficientes reales constantes) conviene buscarla en la forma

$$u(x) = x^re^{\alpha x}\left[P_l(x)\cos\beta x + Q_l(x)\,\mathrm{sen}\,\beta x\right].$$

Aquí r es igual al índice de multiplicidad de la raíz $\alpha + \beta i$ en la ecuación característica $k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ (si la ecuación característica no tiene una raíz así, hay que tomar $r = 0$); $P_l(x)$ y $Q_l(x)$ son polinomios completos de x de grado l con coeficientes indeterminados, con ello l es igual al mayor entre los números n y m ($l = n \geqslant m$, o bien $l = m \geqslant n$):

$$P_l(x) = A_0x^l + A_1x^{l-1} + \ldots + A_l;$$
$$Q_l(x) = B_0x^l + B_1x^{l-1} + \ldots + B_l.$$

Cabe subrayar que los polinomios $P_l(x)$ y $Q_l(x)$ deben ser completos (o sea, contener todas las potencias de x a partir del cero hasta l) con coeficientes indefinidos diferentes para las mismas potencias de x en ambos polinomios y en este caso, si de la expresión de la función $f(x)$ forma parte al menos una de las funciones $\cos\beta x$ o $\mathrm{sen}\,\beta x$, entonces en $u(x)$ es necesario introducir siempre ambas funciones.

Los coeficientes indeterminados pueden encontrarse del sistema de ecuaciones algebraicas lineales que se obtienen por la identificación de los coeficientes de términos semejantes en los miembros primero y segundo de la ecuación inicial, después de sustituir en ella $u(x)$ en lugar de y.

La comprobación de la validez de la forma escogida de la solución particular ofrece la posibilidad de comparar todos los términos del segundo miembro de la ecuación con los términos semejantes a ellos en el primer miembro, aparecidos en éste después de la sustitución de $u(x)$.

Si el segundo miembro de la ecuación inicial es igual a la suma de algunas funciones diferentes de la estructura examinada, entonces, para buscar la solución particular de esta ecuación hace falta utilizar el *teorema de superposición de soluciones*: hay que hallar las soluciones particulares correspondientes a los sumandos del segundo miembro, tomados por separado, y tomar la suma de ellas, que es precisamente la solución particular de la ecuación inicial (o sea, de la ecuación con la suma de las funciones correspondientes en el segundo miembro).

Nota. Los casos particulares de la función $f(x)$ de la estructura examinada (con la presencia de las cuales en el segundo miembro de la ecuación es aplicable el método de selección de una solución particular) son las funciones siguientes:

1) $f(x) = Ae^{\alpha x}$, A es constante $\{\alpha + \beta i = \alpha\}$.
2) $f(x) = A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x$, A y B son constantes $\{\alpha + \beta i = \beta i\}$.
3) $f(x) = P_n(x)$ (un polinomio de grado n) $\{\alpha + \beta i = 0\}$.
4) $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$ $\{\alpha + \beta i = \alpha\}$.
5) $f(x) = P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \operatorname{sen} \beta x$ $\{\alpha + \beta i = \beta i\}$.
6) $f(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x)$, A y B son constantes.

675. Hallar una solución particular de la ecuación $y'' = 2y' - 3y = e^{4x}$ que satisfaga las condiciones de contorno $y\,|_{x=\ln 2} = 1$; $y\,|_{x=2\ln 2} = 1$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - 2k - 3 = 0$ tiene las raíces $k_1 = 3$, $k_2 = -1$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$. La solución particular de la ecuación inicial conviene buscarla en la forma $u = Ae^{4x}$ (puesto que en el segundo miembro no hay seno ni coseno, de coeficiente de la función exponencial sirve el polinomio de grado nulo, o sea, $l = n = 0$, y $r = 0$, ya que $\alpha = 4$ no es una raíz de la ecuación característica).

Por lo tanto,

$$\begin{array}{r|r|l} & -3 & u = Ae^{4x} \\ + & -2 & u' = 4Ae^{4x} \\ & 1 & u'' = 16Ae^{4x} \\ \hline \end{array}$$
$$u'' - 2u' - 3u = 5Ae^{4x} \equiv e^{4x}.$$

De este modo, $A = 1/5$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación dada

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}.$$

Para hallar C_1 y C_2 valgámonos de las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} C_1e^{3\ln 2} + C_2e^{-\ln 2} + \frac{1}{5}e^{4\ln 2} = 1, \\ C_1e^{6\ln 2} + C_2e^{-2\ln 2} + \frac{1}{5}e^{8\ln 2} = 1. \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} 8C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{16}{5} = 1. \\ 64C_1 + \frac{1}{4}C_2 + \frac{256}{5} = 1. \end{cases}$$

De aquí, $C_1 = -491/600$, $C_2 = 652/75$. De suerte que

$$y = \frac{1}{5}e^{4x} + \frac{652}{75}e^{-x} - \frac{491}{600}e^{3x}.$$

676. Integrar la ecuación $y'' + y' - 2y = \cos x - 3 \operatorname{sen} x$, para las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 + k - 2 = 0$ tiene las raíces $k_1 = 1$, $k_2 = -2$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$. La solución particular de la ecuación no homogénea hay que buscarla en la forma de

$$u = A \cos x + B \operatorname{sen} x$$

[en el caso dado $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\alpha + \beta i = i$; puesto que en la ecuación característica no hay una raíz así, entonces $r = 0$; $m = n = 0$ y, por consiguiente, también $l = 0$].

Por lo tanto,

$$+\left|\begin{array}{r|l} -2 & u = A\cos x + B \operatorname{sen} x \\ 1 & u' = -A \operatorname{sen} x + B\cos x \\ 1 & u'' = -A\cos x - B \operatorname{sen} x \end{array}\right.$$

$$u'' + u' - 2u = (B - 3A)\cos x + (-3B - A)\operatorname{sen} x \equiv \cos x - 3\operatorname{sen} x.$$

De este modo, tenemos el sistema

$$\begin{cases} B - 3A = 1, \\ 3B + A = 3, \end{cases} \quad \text{o sea,} \quad A = 0,\ B = 1.$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \operatorname{sen} x.$$

Hallamos C_1 y C_2, utilizando las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + \operatorname{sen} 0 = 1, \\ -2C_1 e^0 + C_2 e^0 + \cos 0 = 2, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -2C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$$

De aquí $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, o sea, $y = e^x + \operatorname{sen} x$.

677. Integrar la ecuación $y'' - y' = \operatorname{ch} 2x$, siendo las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - k = 0$ tiene las raíces $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. La solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 + C_2 e^x$. La solución particular de la ecuación no homogénea en este caso se puede buscar en la forma de $u = A \operatorname{ch} 2x + B \operatorname{sh} 2x$. Derivando y sustituyendo en la ecuación inicial, obtenemos:

$$+\left|\begin{array}{r|l} 0 & u = A \operatorname{ch} 2x + B \operatorname{sh} 2x \\ -1 & u' = 2A \operatorname{sh} 2x + 2B \operatorname{ch} 2x \\ 1 & u'' = 4A \operatorname{ch} 2x + 4B \operatorname{sh} 2x \end{array}\right.$$

$$u'' - u' = (4A - 2B)\operatorname{ch} 2x + (4B - 2A)\operatorname{sh} 2x \equiv \operatorname{ch} 2x.$$

De este modo,

$$\begin{cases} 4A - 2B = 1 \\ -2A + 4B = 0; \end{cases} \quad A = 1/3, \quad B = 1/6$$

Por lo tanto, la solución general tiene la forma

$$y = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{3}\operatorname{ch} 2x + \frac{1}{6}\operatorname{sh} 2x.$$

Para hallar C_1 y C_2 utilizamos las condiciones iniciales:

$$\begin{array}{c} C_1 + C_2 \cdot e^0 + \frac{1}{3}\operatorname{ch} 0 + \frac{1}{6}\operatorname{sh} 0 = 0, \\ C_2 \cdot e^0 + \frac{2}{3}\operatorname{sh} 0 + \frac{1}{3}\operatorname{ch} 0 = 0, \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{1}{3}, \\ C_2 + \frac{1}{3} = 0. \end{cases}$$

Por consiguiente, $C_1 = 0$, $C_2 = -1/3$. De suerte que la solución particular buscada tiene la forma

$$y = -\frac{1}{3} e^x + \frac{1}{3} \operatorname{ch} 2x + \frac{1}{6} \operatorname{sh} 2x.$$

Nota. Conforme a la teoría general deberíamos representar el segundo miembro de la ecuación dada en la forma $(1/2)(e^{2x} + e^{-2x})$ aplicando además el teorema de superposición, o sea, buscar por separado las soluciones correspondientes a los sumandos $(1/2)\, e^{2x}$ y $(1/2)\, e^{-2x}$ del segundo miembro. Nos hubiese quedado:

para $(1/2)\, e^{2x}$: $\alpha = 2$, $\beta = 0$; $\alpha + \beta i = 2$; $r = 0$, $n = l = 0$; por lo tanto, $u_1(x) = A_1 e^{2x}$;

para $(1/2)\, e^{-2x}$: $\alpha_1 = -2$; $\beta_1 = 0$; $\alpha_1 + \beta_1 i = -2$; $r = 0$; $n_1 = l_1 = 0$; por lo tanto, $u_2(x) = B_1 e^{-2x}$.

Por eso la solución particular conviene buscarla en la forma de

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) = A_1 e^{2x} + B_1 e^{-2x},$$

pero

$$A_1 e^{2x} + B_1 e^{-2x} = A_1 (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x) + B_1 (\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} 2x) =$$
$$= (A_1 + B_1) \operatorname{ch} 2x + (A_1 - B_1) \operatorname{sh} 2x = A \operatorname{ch} 2x + B \operatorname{sh} 2x.$$

Hemos buscado precisamente en esta forma la solución de la ecuación dada.

En general, cabe señalar que al aplicar el método de selección de una solución particular, esta última siempre es buscada en la forma de una función con igual estructura que el segundo miembro de la ecuación dada, pero convenientemente completada por sumandos y factores adicionales para asegurar la posibilidad de que los términos aparecidos después de la sustitución en el primer miembro de la ecuación se identifiquen con todos los términos (semejantes a ellos) del segundo miembro.

678. Resolver la ecuación $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 - 2k + 2 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = 1 \pm i$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$. La solución particular conviene buscarla en la forma $u = Ax^2 + Bx + C$ (en el caso dado $\alpha = 0$, $\beta = 0$; $\alpha + \beta i = 0$; puesto que en la ecuación característica no hay una raíz 0, entonces $r = 0$; $n = l = 2$). De suerte que

$$\begin{array}{c|r|l} & 2 & u = Ax^2 + Bx + C \\ + & -2 & u' = 2Ax + B \\ & 1 & u'' = 2A \\ \hline \end{array}$$
$$u'' - 2u' + 2u = 2Ax^2 + (2B - 4A)\, x + (2C - 2B + 2A) \equiv x^2.$$

De aquí,

$$2A = 1, \quad 2B - 4A = 0, \quad 2C - 2B + 2A = 0,$$

o sea, $A = 1/2$, $B = 1$, $C = 1/2$.

Por consiguiente, la solución general de la ecuación inicial es

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2}(x + 1)^2.$$

679. Resolver la ecuación $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 + 1 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = \pm i$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 \cos x +$

$+ C_2$ sen x. Sirviéndose del principio de superposición, la solución particular de la ecuación inicial conviene buscarla en la forma $u = u_1 + u_2 = (Ax + B) e^x + Ce^{-x}$ (tenemos para u_1: $f_1(x) = xe^x$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$; $\alpha_1 + \beta_1 i = 1$; puesto que no hay una raíz así, entonces $r_1 = 0$; $n = l = 1$; para u_2: $f_2(x) = 2e^{-x}$; $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = 0$; $\alpha_2 + \beta_2 i = -1$; $r_2 = 0$; $n_1 = l_1 = 0$).

De suerte que

$$+\left|\begin{array}{c|l} 1 & u = (Ax+B)e^x + Ce^{-x} \\ 0 & u' = Ae^x + (Ax+B)e^x - Ce^{-x} \\ 1 & u'' = 2Ae^x + (Ax+B)e^x + Ce^{-x} \end{array}\right.$$

$$u'' + u = 2Axe^x + (2A+2B)e^x + 2Ce^{-x} \equiv xe^x + 2e^{-x}.$$

De aquí

$2A = 1$, $2A + 2B = 0$, $2C = 2$, o sea, $A = 1/2$, $B = -1/2$, $C = 1$.

Por consiguiente, la solución general de la ecuación inicial es

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}.$$

680. Resolver la ecuación $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$.

Resolución. La ecuación característica $k^3 + k^2 - 2k = 0$ tiene las raíces $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -2$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x}$. Buscamos la solución particular, valiéndonos del principio de superposición, en la forma $u = u_1 + u_2 = x(Ax + B) + Cxe^x$.

Por lo tanto, tenemos:

$$+\left|\begin{array}{r|l} 0 & u = (Ax+B)x + Cxe^x \\ -2 & u' = 2Ax + B + Ce^x + Cxe^x \\ 1 & u'' = 2A + 2Ce^x + Cxe^x \\ 1 & u''' = 3Ce^x + Cxe^x \end{array}\right.$$

$$u''' + u'' - 2u' = -4Ax + (2A - 3B) + 3Ce^x \equiv x - e^x.$$

De aquí $-4A = 1$, $2A - 2B = 0$, $3C = -1$, o sea, $A = -1/4$, $B = -1/4$, $C = -1/3$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación inicial es

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x} - \frac{1}{4}x(x+1) - \frac{1}{3}xe^x.$$

681. Hallar la solución de la ecuación $y'' + y = 3 \operatorname{sen} x$, que satisface las condiciones de contorno $y(0) + y'(0) = 0$, $y(\pi/2) + y'(\pi/2) = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 + 1 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = \pm i$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. La solución particular conviene buscarla en la forma $u = x(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$ (en el caso dado $\alpha = 0$, $\beta = i$, $\alpha + \beta i = i$; como i es una raíz simple de la ecuación característica, entonces $r = 1$; $m = n = l = 0$).

Por lo tanto, tenemos:

$$+\left|\begin{array}{c|l} 1 & u = (A\cos x + B \operatorname{sen} x)\cdot x \\ 0 & u' = (-A \operatorname{sen} x + B\cos x) + (A\cos x + B\operatorname{sen} x) \\ 1 & u'' = 2(-A\operatorname{sen} x + B\cos x) + (-A\cos x - B\operatorname{sen} x)\cdot x \end{array}\right.$$

$$u'' + u = -2A \operatorname{sen} x + 2B\cos x \equiv 3 \operatorname{sen} x.$$

De aquí $-2A = 3$, $2B = 0$, o sea, $A = -3/2$, $B = 0$.
Por consiguiente, la solución general de la ecuación inicial es

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{3}{2} x \cos x.$$

Hallamos las constantes C_1 y C_2, utilizando las condiciones de contorno. Tenemos

$$y' = -C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + \frac{3}{2} x \operatorname{sen} x - \frac{3}{2} \cos x$$

y luego

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen} 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \cdot \cos 0 = C_1,$$

$$y'(0) = -C_1 \operatorname{sen} 0 + C_2 \cos 0 + \frac{3}{2} \cdot 0 \cdot \operatorname{sen} 0 \, \frac{3}{2} \cos 0 = C_2 - \frac{3}{2},$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = C_2,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + C_2 \cos \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{\pi}{2} = -C_1 + \frac{3}{4} \pi.$$

De este modo,

$$y(0) + y'(0) = C_1 + C_2 - 3/2 = 0,$$
$$y(\pi/2) + y'(\pi/2) = C_2 - C_1 + 3\pi/4 = 0,$$

de donde obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3/2, \\ C_1 - C_2 = 3\pi/4, \end{cases}$$

resolviendo el cual hallamos $C_1 = 3(2 + \pi)/8$, $C_2 = 3(2 - \pi)/8$. De suerte que la solución de la ecuación inicial que satisface las condiciones de contorno dadas tiene la forma

$$y = \frac{3}{8} [(\pi + 2) \cos x - (\pi - 2) \operatorname{sen} x] - \frac{3}{2} x \cos x.$$

681a. Hallar la solución de la ecuación $y'' + 6y' + 10y = 80$ $= 80e^x \cos x$ que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 4$, $y'(0) = 10$.

Resolución: la ecuación característica $k^2 + 6k + 10 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = -3 \pm i$ y la solución general de la ecuación homogénea $y = e^{-3} \times$ $\times (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$. La solución particular la buscaremos en la forma $u = e^x (A \cos x + B \operatorname{sen} x)$.

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{array}{c|c|l} & 10 & u = e^x (A \cos x + B \operatorname{sen} x) \\ + & 6 & u' = e^x (A \cos x + B \operatorname{sen} x - A \operatorname{sen} x + B \cos x) \\ & 1 & u'' = e^x (-2A \operatorname{sen} x + 2B \cos x) \\ \hline \end{array}$$

$$u'' + 6u' + 10u = e^x [(16A + 8B) \cos x + (16B - 8A) \operatorname{sen} x] \equiv 80e^x \cos x.$$

De aquí, $16A + 8B = 80$, $16B - 8A = 0$, o sea $A = 4$, $B = 2$.
Por consiguiente, la solución general de la ecuación inicial $y = e^{-3x} \times$ $\times (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + 2e^x (2 \cos x + \operatorname{sen} x)$.

Las constantes C_1 y C_2 las encontraremos, utilizando las condiciones iniciales. Tenemos

$$y' = e^{-3x}(-3C_1 \cos x - 3C_2 \operatorname{sen} x - C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x) + \\ + 2e^{x}(3 \cos x - \operatorname{sen} x)$$

y luego

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = C_1 + 4 = 4 \\ y'(0) = -3C_1 + C_2 + 6 = 10 \end{array}\right\}, \quad \text{de donde} \quad C_1 = 0 \text{ y } C_2 = 4.$$

De suerte que la solución de la ecuación inicial que satisface las condiciones iniciales tiene la forma

$$y = 4e^{-3x} \operatorname{sen} x + 2e^{x}(2 \cos x + \operatorname{sen} x).$$

682. Hallar la solución de la ecuación $y'' + y = \operatorname{tg} x$, que satisface las condiciones de contorno $y(0) = y(\pi/6) = 0$.

Resolución. La ecuación característica $k^2 + 1 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = \pm i$ y por eso la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. Por el método de coeficientes indeterminados no se puede buscar la solución particular [la función $f(x)$ a distinción de la anterior tiene otra estructura] y por eso utilizamos el método de variación de las constantes arbitrarias. Buscamos la solución de la ecuación en la forma

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \operatorname{sen} x,$$

donde las funciones $C_1(x)$ y $C_2(x)$ es necesario encontrarlas del sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0 \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = f(x), \end{array}\right. \quad \text{o bien} \quad \left\{\begin{array}{l} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \operatorname{sen} x = 0, \\ -C_1'(x) \operatorname{sen} x + C_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x. \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $C_1'(x) = -\operatorname{sen}^2 x/\cos x$, $C_2'(x) = \operatorname{sen} x$, de donde

$$C_1(x) = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\, dx + A = \operatorname{sen} x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + A;$$
$$C_2(x) = -\cos x + B.$$

(En vez de la resolución de este sistema se puede utilizar las fórmulas citadas en la pág. 166).

De este modo, la solución general de la ecuación inicial es

$$y = A \cos x + B \operatorname{sen} x - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

donde A y B son las constantes arbitrarias que se han de determinar de las condiciones de contorno:

$$\left\{\begin{array}{l} A \cos 0 + B \operatorname{sen} 0 - \cos 0 \cdot \ln \operatorname{tg}(\pi/4) = 0, \\ A \cos(\pi/6) + B \operatorname{sen}(\pi/6) - \cos(\pi/6) \ln \operatorname{tg}(\pi/3) = 0. \end{array}\right.$$

De aquí $A = 0$, $B = (\sqrt{3}/2) \ln 3$. Por consiguiente, la solución que satisface las condiciones de contorno dadas tiene la forma

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 3 \operatorname{sen} x - \cos x \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

683. Una cadena homogénea que cuelga libremente de un gancho se desliza de éste por la acción de la gravedad (se puede despreciar el rozamiento). Determinar cuánto tiempo tardará toda la cadena en deslizarse del gancho, si en el instante inicial por un lado del gancho había 10 m de cadena y por el otro 8 m, la velocidad de la cadena es igual a cero.

Resolución. Sea el peso de un metro lineal de cadena igual a P N. Designemos por x la longitud (en m) de la parte mayor de la cadena que cuelga del gancho pasados t s después del inicio del movimiento. Al centro de gravedad se aplica una fuerza $F = [x - (18 - x)]\, P$ N. La masa de la cadena es igual a $18P/g$ kg, su aceleración es de $\ddot{x}$ m/s². De suerte que llegamos a la ecuación de movimiento del centro de gravedad de la cadena:

$$\frac{18}{g} P\ddot{x} = (2x - 18)\, P, \quad \text{o bien} \quad \ddot{x} - \frac{g}{9} x = -g.$$

Esta ecuación se debe integrar para las condiciones iniciales: $x = 10$, $\dot{x} = 0$, para $t = 0$.

Las raíces de la ecuación característica $k_{1,2} = \pm\sqrt{g}/3$; la solución particular de la ecuación no homogénea conviene buscarla en la forma de $u = A$. Después de efectuar la sustitución en la ecuación hallamos $A = 9$. Ahora bien, la solución general tiene la forma

$$x = C_1 e^{t\sqrt{g}/3} + C_2 e^{-t\sqrt{g}/3} + 9.$$

Utilizando las condiciones iniciales, obtenemos

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 9 = 10, \\ \dfrac{\sqrt{g}}{3}(C_1 - C_2) = 0, \end{cases}$$

de donde $C_1 = C_2 = 0{,}5$. Por lo tanto,

$$x = (e^{t\sqrt{g}/3} + e^{-t\sqrt{g}/3})/2 + 9 = 9 + \operatorname{ch}(t\sqrt{g}/3).$$

El tiempo que tarda toda la cadena en deslizarse se determina de la condición: $x = 18$ para $t = T$. Por consiguiente,

$$18 = 9\operatorname{ch}\left(\frac{T\sqrt{g}}{3}\right), \quad \text{o bien} \quad \frac{e^{T\sqrt{g}/3} + e^{-T\sqrt{g}/3}}{2} = 9.$$

Despejando T en la ecuación obtenida, encontramos

$$T = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln(9 + 4\sqrt{5}) \approx 2{,}76 \text{ s}.$$

Resolver las ecuaciones:

684. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.
685. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
686. $y'' - 6y' + 25y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$.
687. $y'' + y = \cos 3x$; $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 1$.
688. $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$.
689. $2y'' - y' = 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
690. $y'' + 4y = \operatorname{sen} 2x + 1$; $y(0) = 1/4$, $y'(0) = 0$.
691. $y'' - 4y' = 2 \operatorname{sh} 2x$.
692. $y'' + 4y = \cos 2x$; $y(0) = y(\pi/4) = 0$.
693. $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$.

694. $y'' - (\alpha + \beta) y' + \alpha\beta y = ae^{\alpha x} + be^{\beta x}$.
695. $y'' - y = x \cos^2 x$.
696. $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$.
697. $y'' - y = 2 \operatorname{sh} x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
698. $y'' - 4y = \operatorname{ch} 2x$.
699. $y'' - 2y' \cos \varphi + y = 2 \operatorname{sen} x \cos \varphi$.
700. $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$.
701. $y'' + 9y = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$; $y(0) = y(\pi/2) = 0$.
701a. $y'' - 4y' + 8y = 61e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

702. Mostrar que la solución general de la ecuación diferencial $y'' - m^2 y = 0$ se puede representar de la forma $y = C_1 \operatorname{ch} mx + C_2 \operatorname{sh} mx$.

703. Mostrar que la solución general de la ecuación diferencial $y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 - \beta^2) y = 0$ se puede representar de la forma $y = e^{\alpha x} (C_1 \operatorname{ch} \beta x + C_2 \operatorname{sh} \beta x)$.

704. Determinar la ley del movimiento de un punto material de masa m que se traslada por una recta bajo la acción de la fuerza de recuperación orientada hacia el origen de la lectura y directamente proporcional a la distancia del punto al origen de la lectura, si el medio no ofrece resistencia pero sobre el punto actúa una fuerza externa $F = A \operatorname{sen} \omega t$.

En los problemas 705—708 aplicar el método de variación de las constantes arbitrarias:

705. $y'' + y = 1/\sqrt{\cos 2x}$.
706. $y'' + 5y' + 6y = 1/(1 + e^{2k})$.
707. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$.
708. $y'' \cos (x/2) + (1/4) y \cos (x/2) = 1$.

709. Resolver el problema 683 teniendo en cuenta el rozamiento de la cadena contra el gancho, si la fuerza de rozamiento es igual al peso de 1 m de cadena.

Indicación: la ecuación de movimiento del centro de gravedad de la cadena tiene la forma

$$18 \frac{d^2x}{dt^2} = gx - (18 - x) g - g \cdot 1.$$

5. Ecuación de Euler. Una ecuación lineal de coeficientes variables que tiene la forma

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{1}$$

o, en forma más general,

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} (ax + b) y' + a_n y = f(x) \tag{2}$$

se llama *ecuación de Euler*. Aquí los a_i son coeficientes constantes. Con ayuda de las sustituciones $x = e^t$ para la ecuación (1) y $ax + b = e^t$ para la (2), ambas se transforman en ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

710. Resolver la ecuación $x^2 y'' - xy' + y = 0$.

Resolución. Haciendo $x=e^t$, o bien $t=\ln x$, de donde $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}$, obtenemos

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot{y}e^{-t},$$

$$y''=\frac{d}{dt}\,e^{-t}\dot{y}\,\frac{dt}{dx}=(\dot{y}e^{-t})'_t\cdot e^{-t}=(\ddot{y}-\dot{y})\,e^{-2t}$$

(connotamos con puntos la derivación respecto a t). Entonces la ecuación inicial tendrá la forma

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}\,(\ddot{y}-\dot{y})-e^t\cdot e^{-t}\cdot\dot{y}+\dot{y}=0,\quad \text{o bien}\quad \ddot{y}-2\dot{y}+y=0.$$

La ecuación característica $k^2-2k+1=0$ tiene las raíces $k_1=k_2=1$. Por consiguiente, la solución general es

$$y=(C_1+C_2t)\,e^t,\quad \text{o bien}\quad y=(C_1+C_2\ln x)\,x.$$

711. Resolver la ecuación $(4x-1)^2\,y''-2\,(4x-1)\,y'+8y=0$.

Resolución. Tomamos $4x-1=e^t$, entonces $dx=\frac{1}{4}e^t\,dt$, $\frac{dt}{dx}=4e^{-t}$. De aquí

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=4e^{-t}\cdot\dot{y},\quad y''=16e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y}).$$

La ecuación inicial adopta la forma

$$16e^{2t}\cdot e^{-2t}\,(\ddot{y}-\dot{y})-4\cdot 2e^t\cdot e^{-t}\cdot\dot{y}+8y=0,\ \text{o bien}$$

$$2\ddot{y}-3\dot{y}+y=0.$$

La ecuación característica $2k^2-3k+1=0$ tiene las raíces $k_1=1$, $k_2=1/2$. Por consiguiente, la solución general es

$$y=C_1e^t+C_2e^{t/2},\ \text{o bien}\ y=C_1\,(4x-1)+C_2\,\sqrt{4x-1}.$$

712. Resolver la ecuación $y''-xy'+y=\cos\ln x$.

Resolución. Hacemos $x=e^t$, entonces $t=\ln x$, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}$, por consiguiente, $y'=\dot{y}\cdot e^{-t}$, $y''=(\ddot{y}-\dot{y})\,e^{-2t}$. La ecuación dada adopta la forma

$$\ddot{y}-2\dot{y}+y=\cos t.$$

La solución general de la ecuación homogénea es $y=(C_1+C_2t)\,e^t$ y la solución particular de la ecuación no homogénea conviene buscarla en la forma de $u=A\cos t+B\,\text{sen}\,t$. Entonces

$$\begin{array}{c|r|l}
 & 1 & u=A\cos t+B\,\text{sen}\,t\\
+ & -2 & u'=-A\,\text{sen}\,t+B\cos t\\
 & 1 & u''=-A\cos t-B\,\text{sen}\,t\\
\hline
\multicolumn{3}{c}{u''-2u'+u=-2B\cos t-2A\,\text{sen}\,t\equiv\cos t,}
\end{array}$$

de donde $B = -1/2$, $A = 0$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación inicial es

$$y = (C_1 + C_2 t)\, e^t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} t, \quad \text{o bien} \quad y = (C_1 + C_2 \ln x)\, x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \ln x.$$

Resolver las ecuaciones:

713. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$.

714. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 3 \ln^2 x$.

715. $x^2y'' + xy' + y = \operatorname{sen} (2 \ln x)$.

716. $x^2y'' + 3xy' + y = 1/x$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

717. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3/2$; $y(1) = 1/2$, $y(4) = 0$.

§ 4. Integración de ecuaciones integrales con ayuda de series

1. Aplicación de las series a la resolución de las ecuaciones diferenciales. En algunos casos, cuando la integración de una ecuación diferencial en las funciones elementales es imposible, se busca la solución de tal ecuación en forma de una serie de potencias

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n.$$

Los coeficientes indeterminados C_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) se encuentran sustituyendo la serie en la ecuación e igualando los coeficientes de potencias iguales de la diferencia $x - x_0$ en ambos miembros de la igualdad obtenida. Si se logra hallar todos sus coeficientes, entonces la serie obtenida determina la solución en toda su región de convergencia.

En los casos en que para la ecuación $y' = f(x, y)$ se necesita resolver el problema de Cauchy con una condición inicial $y\,|_{x=x_0} = y_0$ la solución se puede buscar con ayuda de la serie de Taylor:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

donde $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, en adelante las derivadas $y^{(n)}(x_0)$ se determinan por la derivación sucesiva de la ecuación inicial sustituyendo en el resultado de la derivación a $x, y, y', \ldots$ por los valores de x_0, y_0, y_0' y de todas las demás derivadas sucesivas halladas. Análogamente, con ayuda de la serie de Taylor se pueden integrar también ecuaciones de órdenes superiores.

718. Integrar la ecuación $y'' - x^2y = 0$.

Resolución. Buscamos la solución de esta ecuación en la forma de la serie

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots .$$

Sustituyendo y e y'' en la ecuación inicial, encontramos

$$[2\cdot 1C_2 + 3\cdot 2C_3x + 4\cdot 3C_4x^2 + \ldots + (n+2)(n+1)\, C_{n+1}x^n + \ldots] -$$
$$- x^2 [C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots] = 0.$$

Agrupamos los términos de iguales potencias de x:

$$2\cdot 1C_2 + 3\cdot 2C_3x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+4)(n+3)\, C_{n+4} - C_n]\, x^{n+2} = 0.$$

Igualando a cero todos los coeficientes de la serie obtenida (para que la ecuación se convierta en identidad), hallamos:

$$C_2=C_3=0;\quad C_{n+4}=\frac{C_n}{(n+3)(n+4)}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

La última relación permite hallar sucesivamente todos los coeficientes del desarrollo buscado (C_0 y C_1 siguen siendo arbitrarios y desempeñan el papel de constantes arbitrarias de integración):

$$C_{4k}=\frac{C_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\ \ldots\ (4k-1)\cdot 4k},\quad C_{4k+1}=\frac{C_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ \ldots\ 4k\,(4k+1)};$$
$$C_{4k+2}=C_{4k+3}=0\quad (k=0,\ 1,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

De este modo,

$$y=C_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\ \ldots\ (4k-1)\,4k}+C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ \ldots\ 4k\,(4k+1)},$$

Las series obtenidas convergen en todo el eje numérico y determinan dos soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación inicial.

Con ayuda del desarrollo en serie de potencias de x integrar las ecuaciones siguientes y definir el campo de existencia de la solución obtenida:

719. $y'+xy=0$.

720. $y'=x-2y$; $y(0)=0$.

Indicación: en virtud de la condición inicial hacer $C_0=0$.

721. $y''+xy'+y=0$.

722. $y''-xy'-2y=0$.

723. $y''+x^2y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$.

Indicación: en virtud de las condiciones iniciales hacer $C_0=0$, $C_1=1$.

724. Integrar aproximadamente con ayuda de la serie de Taylor la ecuación $y'=x^2+y^2$, $y(0)=1$, tomando los seis primeros términos del desarrollo, distintos de cero.

Resolución. A partir de la ecuación y de las condiciones iniciales hallamos $y'(0)=0^2+1^2=1$. Derivando la ecuación dada, sucesivamente obtenemos

$$y''=2x+2yy',\quad y'''=2+2y'^2+2y'y'',\quad y^{\mathrm{IV}}=6y'y''+2yy''',$$
$$y^{\mathrm{V}}=6y''^2+8y'y'''+2yy^{\mathrm{IV}}.$$

Haciendo $x=0$ y utilizando los valores de $y(0)=1$, $y'(0)=1$, encontramos sucesivamente: $y''(0)=2$, $y'''(0)=8$, $y^{\mathrm{IV}}(0)=28$, $y^{\mathrm{V}}(0)=144$. La solución buscada tiene la forma

$$y=1+\frac{x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{28x^4}{4!}+\frac{144x^5}{5!}+\cdots.$$

725. $y''=x+y^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Hallar los cuatro primeros términos (distintos de cero) del desarrollo.

Resolución. Derivando la ecuación $y' = x + y^2$, tenemos

$$y''' = 1 + 2yy', \quad y^{IV} = 2yy'' + 2y'^2, \quad y^{V} = 2yy''' + 6y'y'',$$
$$y^{VI} = 2yy^{IV} + 8y'y^{IV} + 6y''^2.$$

Para $x = 0$ obtenemos

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1, \quad y^{VI}(0) = 2,$$
$$y^{V}(0) = 0, \quad y^{VI}(0) = 16.$$

La solución tiene la forma

$$y = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{16x^6}{6!} + \dots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \dots .$$

726. $y' = x^2y + y^3$, $y(0) = 1$. Hallar los cuatro primeros términos (distintos de cero) del desarrollo.

727. $y' = x + 2y^2$, $y(0) = 0$. Hallar los dos primeros términos (distintos de cero) del desarrollo.

728. $y'' - xy^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Hallar los cuatro primeros términos (distintos de cero) del desarrollo.

729. $y' = 2x - y$; $y(0) = 2$. Hallar la solución exacta.

730. $y' = y^2 + x$; $y(0) = 1$. Hallar los cinco primeros términos del desarrollo.

731. $y'' = (2x - 1)y - 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Hallar los cinco primeros términos del desarrollo.

2. Ecuaciones de Bessel. Una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0 \quad (\lambda = \text{const}) \tag{1}$$

se llama *ecuación de Bessel* (se reduce a la misma forma la ecuación $x^2y'' + xy' + (m^2x^2 - \lambda^2)y = 0$ efectuando la sustitución $mx = \xi$).

Buscamos la solución de la ecuación (1) en la forma de una serie de potencia generalizada, o sea, en la forma del producto de cierta potencia de x por la serie de potencias:

$$y = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^{r+k}. \tag{2}$$

Sustituyendo la serie de potencias generalizada en la ecuación (1) e igualando a cero los coeficientes de cada potencia de x en el primer miembro de la ecuación, obtenemos el sistema

$$\begin{array}{c|l}
x^r & (r^2 - \lambda^2)\cdot a_0 = 0, \\
x^{r+1} & [(r+1)^2 - \lambda^2]\cdot a_1 = 0, \\
x^{r+2} & [(r+2)^2 - \lambda^2]\cdot a_2 + a_0 = 0, \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\
x^{r+k} & [(r+k)^2 - \lambda^2]\cdot a_k + a_{k-2} = 0. \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Teniendo en cuenta que $a_0 \neq 0$, hallamos del sistema dado $r_{1,2} = \pm\lambda$. Sea $r_1 = \lambda$. Entonces de la segunda ecuación del sistema hallamos $a_1 = 0$ y de la ecuación $[(r+k)^2 - \lambda^2]\,a_k = -a_{k-2}$, asignando a k los valores de 3, 5, 7, ..., sacamos la conclusión de que $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = a_{ak+1} = 0$. Para los coeficientes con numeración par obtenemos las expresiones

$$a_2 = \frac{-a_0}{(2\lambda+2)\cdot 2}, \quad a_4 = \frac{-a_2}{(2\lambda+4)\cdot 4} = \frac{a_0}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdot 1\cdot 2\cdot 2^4}, \ \ldots,$$

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k}-2}{(2\lambda+2)\cdot 2\cdot k} = (-1)^{k+1}\cdot \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2k(2\lambda+2)(2\lambda+4)\ldots(2\lambda+2k)}.$$

Sustituyendo los coeficientes hallados en la serie (2), obtenemos la solución

$$y_1(x) = a_0\cdot x^{\lambda}\left[1 - \frac{x^2}{2(2\lambda+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2\lambda+2)(2\lambda+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2\lambda+2)(2\lambda+4)(2\lambda+6)} + \ldots\right] =$$
$$= a_0\cdot\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\lambda+2k}}{4^k k!\,(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)},$$

donde el coeficiente a_0 sigue siendo arbitrario.

Para $r_2 = -\lambda$ todos los coeficientes a_k se determinan análogamente sólo en el caso en que λ no es igual a un número entero. Entonces la solución se puede obtener sustituyendo en la solución precedente $y_1(x)$ la magnitud λ por $-\lambda$:

$$y_2(x) = a_0 x^{-\lambda}\left[1 - \frac{x^2}{2(-2\lambda+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)(-2\lambda+6)} + \ldots\right] =$$
$$= a_0\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{-\lambda+2k}}{4^k k!\,(-\lambda+1)(-\lambda+2)\ldots(-\lambda+k)}.$$

Las series de potencias obtenidas convergen para todos los valores de x lo que se determina fácilmente basándose en el criterio de d'Alembert. Las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes, ya que la relación entre ellas no es constante.

La solución $y_1(x)$ multiplicada por la constante $a_0 = \dfrac{1}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)}$ se llama *función de Bessel* (o *función cilíndrica*) *de orden* λ *de primer género* y se designa por el símbolo $J_{\lambda}(x)$. La solución y_2 se designa por $J_{-\lambda}(x)$.

Por consiguiente, la solución general de la ecuación (1) cuando λ no es igual a un número entero tiene la forma

$$y(x) = C_1 J_{\lambda}(x) + C_2 J_{-\lambda}(x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

En la selección universalmente adoptada de la constante a_0 participa la función gamma $\Gamma(\lambda+1)$, definida por la integral impropia (véase la pág. 41):

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\lambda-1}\,dx \quad (\lambda > 0).$$

Se puede mostrar que para λ igual a la mitad del número impar la función Bessel se expresa por funciones elementales, ya que en este caso la función gamma que forma parte de la definición de la función de Bessel

$$J_\lambda(x)=\frac{1}{2^\lambda\cdot\Gamma(\lambda+1)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{\lambda+2k}}{4^k\cdot k!\,(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k},$$

[el producto $(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)\,\Gamma(\lambda+1)$ sustituido, conforme a la propiedad de la función gamma, por $\Gamma(\lambda+k+1)$], toma los valores siguientes:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{-1/2}\,dx=2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

(aquí se utiliza el valor de la integral de Poisson):

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi};\ \ldots$$

Para $\lambda=n$ (natural) la función de Bessel J_λ se puede escribir brevemente así:

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}=\sum_{k=0}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Para una λ negativa y entera la solución particular no se puede expresar mediante la función de Bessel de primer género y conviene buscarla en la forma

$$K_n(x)=J_n(x)\cdot\ln x+x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1), determinamos los coeficientes b_k. La función $K_n(x)$ multiplicada por cierta constante se llama *función de Bessel de n-ésimo orden de segundo género.*

732. Hallar la función de Bessel para $\lambda=0$.

Resolución. Valiéndonos de la igualdad

$$J_\lambda(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\lambda},$$

para $\lambda = 0$ obtenemos

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{4^k \cdot k! \cdot k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{4^k \cdot (k!)^2} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4^2 \cdot (1\cdot 2)^2} - \frac{x^6}{4^3\,(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \dots\,.$$

733. Resolver la ecuación $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$

Resolución. Como $\lambda = 1/2$, la solución general de la ecuación tiene la forma

$$y = C_1 J_{1/2} + C_2 J_{-1/2},$$

donde

$$J_{1/2} = \frac{1}{2^{1/2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot x^{1/2} \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \dots\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}.$$

Procediendo del mismo modo, obtenemos $J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$. Por consiguiente, la solución general

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x).$$

734. Hallar $J_1(x)$.

735. Resolver la ecuación $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) y = 0.$

736. Resolver la ecuación $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{4}{9}\right) y = 0.$

§ 5. Sistemas de ecuaciones diferenciales

1. Sistema normal de ecuaciones diferenciales. El sistema de ecuaciones diferenciales que tienen la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t,\, x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t,\, x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t,\, x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n), \end{cases}$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las funciones incógnitas de la variable independiente t se llama *sistema normal*.

Si los segundos miembros del sistema normal de las ecuaciones diferenciales son funciones lineales respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$, el sistema de ecuaciones lineales se llama *lineal*.

A veces el sistema normal de ecuaciones diferenciales puede reducirse a una sola ecuación de n-ésimo orden que contiene una sola función incógnita. La reducción del sistema normal a una sola ecuación puede ser alcanzada derivando una de las ecuaciones del sistema y eliminando todas las incógnitas a excepción de una de ellas (el llamado *método de eliminación*).

En algunos casos, combinando las ecuaciones del sistema, después de transformaciones poco complicadas se logra obtener ecuaciones fácilmente integrables (el llamado *método de combinaciones integrables*) lo que permite hallar la solución del sistema.

737. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt}=x+y, \quad \frac{dy}{dt}=x-y$$

para las condiciones iniciales: $x(0)=2$, $y(0)=0$.

Resolución. Derivamos con respecto a t la primera ecuación $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}$; eliminando de la ecuación obtenida $\frac{dy}{dt}$ e y tenemos $\frac{d^2x}{dt^2}-2x=0$. La ecuación característica $k^2-2=0$ tiene las raíces $k_{1,2}=\pm\sqrt{2}$. Por consiguiente, la ecuación general para x se escribe

$$x=C_1e^{t\sqrt{2}}+C_2e^{-t\sqrt{2}}.$$

La solución general para y se halla de la primera ecuación:

$$y=\frac{dx}{dt}-x=C_1(\sqrt{2}-1)e^{t\sqrt{2}}-C_2(\sqrt{2}+1)e^{-t\sqrt{2}}.$$

Valgámonos de las condiciones iniciales para hallar las constantes arbitrarias:

$$C_1+C_2=2, \quad \sqrt{2}(C_1-C_2)-(C_1+C_2)=0.$$

De aquí $C_1=(\sqrt{2}+2)/2$, $C_2=(2-\sqrt{2})/2$. Ahora bien, la solución particular buscada tiene la forma

$$x=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)e^{t\sqrt{2}}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-t\sqrt{2}}, \quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{t\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t\sqrt{2}}.$$

738. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{2x+3y}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{y}{2x+3y}$$

para las condiciones iniciales: $x(0)=1$, $y(0)=2$.

Resolución. Escribimos la primera combinación integrable. Dividiendo la primera ecuación por la segunda, obtenemos

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}; \quad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}; \quad \ln x=\ln y+\ln C_1, \quad \text{o sea,} \quad x=C_1y.$$

Escribimos la segunda combinación integrable. Sumando el duplo de la primera ecuación mas el triple de la segunda obtenemos

$$2\cdot\frac{dx}{dt}+3\cdot\frac{dy}{dt}=1;\quad 2dx+3dy=dt,\quad \text{o sea,}\quad 2x+3y=t+C_2.$$

Del sistema de ecuaciones $x = C_1y$, $2x + 3y = t + C_2$ hallamos la solución general del sistema

$$x=\frac{C_1(t+C_2)}{2C_1+3},\quad y=\frac{t+C_2}{2C_1+3}$$

Utilizando las condiciones iniciales, obtenemos

$$1=\frac{C_1C_2}{2C_1+3},\quad 2=\frac{C_2}{2C_1+3},\quad \text{o sea,}\quad C_1=\frac{1}{2},\quad C_2=8$$

Sustituyendo en la solución general los valores hallados de C_1 y C_2, obtenemos las soluciones particulares que satisfacen las condiciones iniciales:

$$x=\frac{1}{8}t+1,\quad y=\frac{1}{4}t+2.$$

739. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt}=2y,\quad \frac{dy}{dt}=2z,\quad \frac{dz}{dt}=2x.$$

Resolución. Derivando con respecto a t la primera ecuación: $\frac{d^2x}{dt^2}=2\cdot\frac{dy}{dt}$. Eliminando de la ecuación obtenida $\frac{dy}{dt}$, tenemos $\frac{d^2x}{dt^2}=4z$. Derivamos una vez más respecto a t la ecuación obtenida de segundo orden $\frac{d^3x}{dt^3}=4\cdot\frac{dz}{dt}$. Eliminando $\frac{dz}{dt}$, obtenemos

$$\frac{d^3x}{dt^3}-8x=0,$$

o sea, hemos llegado a la ecuación con una sola función desconocida. Resolviendo esta ecuación lineal homogénea de tercer orden, hallamos

$$x=C_1e^{2t}+e^{-t}\left(C_2\cos t\sqrt{3}+C_3\operatorname{sen} t\sqrt{3}\right).$$

La solución general para y se obtiene de la primera ecuación del sistema

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left[2C_1e^{2t}-e^{-t}\left(C_2\cos t\sqrt{3}+C_3\operatorname{sen} t\sqrt{3}\right)+\right.$$

$$\left.+e^{-t}\sqrt{3}\left(C_3\cos t\sqrt{3}-C_2\operatorname{sen} t\sqrt{3}\right)\right]$$

o bien

$$y=C_1e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-t}\left[(C_3\sqrt{3}+C_2)\cos t\sqrt{3}-(C_2\sqrt{3}+C_3)\operatorname{sen} t\sqrt{3}\right].$$

De la segunda ecuación del sistema hallamos z;

$$z=\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dt}=C_1e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-t}\left[(C_3\sqrt{3}+C_2)\cos t\sqrt{3}-(C_2\sqrt{3}-C_3)\operatorname{sen} t\sqrt{3}\right].$$

Resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales:

740. $\frac{dx}{dt}+2x+y,\ \frac{dy}{dt}=x+2y;\quad x(0)=1,\ y(0)=3.$

741. $\frac{dx}{dt}=4x+6y,\ \frac{dy}{dt}=2x+3y+t.$

742. $\frac{dx}{dt}=e^{3t}-y,\ \frac{dy}{dt}=2e^{3t}-x.$

743. $y'=e^{x}-z,\quad z'=e^{-x}+y.$

744. $\frac{dx}{dt}=y+t,\quad \frac{dy}{dt}=x+e^{t}\quad x(0)=1,\ y(0)=0.$

745. $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{x+y},\ \frac{dy}{dt}=\frac{y}{x+y};\quad x(0)=2,\ y(0)=4.$

746. $\frac{dx}{dt}=2x+y+\cos t,\ \frac{dy}{dt}=-x+2\operatorname{sen} t.$

747. $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=2(x+y),\ \frac{dy}{dt}=3x+y.$

748. $\frac{dx}{dt}+\frac{2x}{t}=1,\ \frac{dy}{dt}=x+y+\frac{2x}{t}-1.$

749. $\frac{dx}{dt}=x^2+xy,\ \frac{dy}{dt}=xy+y^2.$

Indicación. Considerar dos combinaciones integrables: 1) sumar las ecuaciones; 2) dividir miembro a miembro la primera ecuación obtenida por la segunda.

750. $\frac{dx}{dt}+\frac{2dy}{dt}-2(x-y)=3e^{t},\ \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+2x+y=4e^{2t}.$

751. $\frac{d^2x}{dt^2}+m^2y=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}-m^2x=0.$

752. $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{dy}{dt}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{dz}{dt}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$

2. Resolución de los sistemas lineales homogéneos de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes por medio de matrices (método modificado de Euler). Sea dado un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con n funciones desconocidas cuyos coeficientes son constantes:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n.\end{array}\right.$$

Este sistema se puede escribir en forma de una sola ecuación diferencial matricial

$$\frac{dX}{dt}=Ax.$$

Aquí

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Buscamos la solución del sistema en la forma

$$x_1=p_1e^{\lambda t}, \quad x_2=p_2e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad x_n - p_ne^{\lambda t}.$$

Sustituyendo los valores de x_1, x_2, . . ., x_n en el sistema de ecuaciones diferenciales, obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales respecto a p_1, p_2, . . ., p_n:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\, p_1+a_{12}p_2+\dots+a_{1n}p_n=0, \\ a_{21}p_1+(a_{22}+\lambda)\, p_2+\dots+a_{2n}p_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}p_1+a_{n2}p_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)\, p_n=0. \end{cases}$$

El sistema debe tener una solución no nula, por eso para determinar λ obtenemos la ecuación de n-ésimo grado

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

La última ecuación es la ecuación característica de la matriz A y, al mismo tiempo, la ecuación característica del sistema.

Supongamos que la ecuación característica tiene n raíces diferentes λ_1, λ_2, . . ., λ_n, que son los números característicos de la matriz A. A cada número característico le corresponde el propio vector. Supongamos que a cada número característico λ_k le corresponde el vector propio $(p_{1k};\ p_{2k};\ \dots;\ p_{nk})$, donde $k = 1, 2, \dots, n$. Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales tiene n soluciones:

la primera solución correspondiente a la raíz $\lambda = \lambda_1$:

$$x_{11}=p_{11}e^{\lambda_1 t}, \quad x_{21}=p_{21}e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad x_{n1}=p_{n1}e^{\lambda_1 t};$$

la segunda solución correspondiente a la raíz $\lambda = \lambda_2$:

$$x_{12}=p_{12}e^{\lambda_2 t}, \quad x_{22}=p_{22}e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad x_{n2}=p_{n2}e^{\lambda_2 t};$$

. . . .

la n-ésima solución correspondiente a la raíz $\lambda = \lambda_n$:

$$x_{1n}=p_{1n}e^{\lambda_n t}, \quad x_{2n}=p_{2n}e^{\lambda_n t}, \quad \dots, \quad x_{nn}=p_{nn}e^{\lambda_n t}.$$

Hemos obtenido el sistema fundamental de soluciones. La solución general del sistema es la siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1x_{11} + C_2x_{12} + \dots + C_nx_{1n}, \\ x_2 &= C_1x_{21} + C_2x_{22} + \dots + C_nx_{2n}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= C_1x_{n1} + C_2x_{n2} + \dots + C_nx_{nn}. \end{aligned}$$

Los casos de raíces complejos y múltiples se examinan en los ejemplos.

753. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=7x_1+3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=6x_1+4x_2. \end{cases}$$

Resolución. Componemos la ecuación característica de la matriz del sistema

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \text{o bien} \quad \lambda^2-11\lambda+10=0.$$

Sus raíces $\lambda_1=1$, $\lambda_2=10$, son los números característicos de la matriz.

Cuando $\lambda=1$, las ecuaciones para determinar el vector propio tienen la forma $(7-1)\,p_1+3p_2=0$ y $6p_1+(4-1)\,p_2=0$ y se reducen a una sola ecuación $2p_1+p_2=0$. Esta última ecuación determina el vector $(1;\ -2)$.

Para $\lambda=10$ obtenemos la ecuación $(7-10)\,p_1+3p_2=0$, $6p_1+(4-10)\,p_2=0$, o bien $p_1-p_2=0$. Esta ecuación determina el vector $(1;\ 1)$.

Obtenemos el sistema fundamental de soluciones: para $\lambda=1$: $x_{11}=e^t$, $x_{21}=-2e^t$; para $\lambda=10$: $x_{12}=e^{10t}$, $x_{22}=e^{10t}$.

La solución general del sistema tiene la forma

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{10t}, \quad x_2=-2C_1e^t+C_2e^{10t}.$$

754. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=6x-12y-z, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-3y-z. \\ \dfrac{dz}{dt}=-4x+12y+3z. \end{cases}$$

Resolución. Escribimos la ecuación característica de la matriz del sistema:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Desarrollando el determinante, hallamos
$(6-\lambda)(\lambda^2-9)-48-12+12+4\lambda+72-12\lambda+36-12\lambda=0$,
o finalmente,

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0.$$

Esta ecuación tiene las raíces $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.

Determinamos los vectores propios de la matriz A.

Para $\lambda=1$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5p_1-12p_2-\ p_3=0, \\ \ p_1-\ 4p_2-\ p_3=0, \\ -4p_1+12p_2+2p_3=0, \end{cases}$$

una de las cuales es la consecuencia de dos otras.

Tomemos, por ejemplo, las primeras dos ecuaciones:

$$5p_1-12p_2-p_3=0,\quad p_1-4p_2-p_3=0.$$

De aquí

$$p_1=\begin{vmatrix}-12 & -1\\ -4 & -1\end{vmatrix}\cdot k=8k,\quad p_2=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\cdot k=4k,$$

$$p_3=\begin{vmatrix}5 & -12\\ 1 & -4\end{vmatrix}k=-8k.$$

Haciendo $k=1/4$, obtenemos el vector propio (2; 1; -2).

Para $=2$ tenemos el sistema

$$\begin{cases}4p_1-12p_2-p_3=0,\\ p_1-\ 5p_2-p_3=0,\\ -4p_1+12p_2+p_3=0.\end{cases}$$

Volviendo a utilizar las primeras dos ecuaciones (la tercera, es consecuencia de ellas), hallamos:

$$p_1=\begin{vmatrix}-12 & -1\\ -5 & -1\end{vmatrix}\cdot k=7k,\quad p_2=-\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\cdot k=3k,$$

$$p_3=\begin{vmatrix}4 & -12\\ 1 & -5\end{vmatrix}\cdot k=-8k.$$

Tomando $k=1$, encontramos el vector propio (7: 3; -8).

Para $\lambda=3$ tenemos el sistema

$$\begin{cases}3p_1-12p_2-p_3=0,\\ p_1-\ 6p_2-p_3=0,\\ -4p_1+12p_2\qquad=0.\end{cases}$$

De la última ecuación hallamos $p_1=3p_2$. Sustituimos este valor de p_1 en la primera ecuación y hallamos $p_3=-3p_2$. Tomando $p_2=1$, obtenemos $p_1=3$, $p_3=-3$, o sea, el vector propio (3; 1; -3).

El sistema fundamental de soluciones es:

para $\lambda=1$: $x_{11}=2e^t$, $x_{21}=e^t$, $x_{31}=-2e^t$,

para $\lambda=2$: $x_{12}=7e^{2t}$, $x_{22}=3e^{2t}$, $x_{32}=-8e^{2t}$,

para $\lambda=3$: $x_{13}=3e^{3t}$, $x_{23}=e^{3t}$, $x_{33}=-3e^{3t}$.

La solución general se escribe de la forma

$$x_1=2C_1e^t+7C_2e^{2t}+3C_3e^{3t},$$
$$x_2=C_1e^t+3C_2e^{2t}+C_3e^{3t},$$
$$x_3=-2C_1e^t-8C_2e^{2t}-3C_3e^{3t}.$$

755. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=4x_1-3x_2,\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=3x_1+4x_2.\end{cases}$$

Resolución. Escribimos la ecuación característica de la matriz del sistema:

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0;\quad (4-\lambda)^2=-9,\quad \lambda-4=\pm 3i,\quad \lambda=4\pm 3i.$$

Determinamos los vectores propios.

Para $\lambda_1 = 4 + 3i$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 + 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

De este modo, $p_2 = ip_1$. Tomando $p_1 = 1$, obtenemos $p_2 = i$, o sea, el vector propio $(1;\ i)$.

Para $\lambda_2 = 4 - 3i$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 - 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

De aquí encontramos el vector propio $(1;\ -i)$.

El sistema fundamental de ecuaciones es:

para $\lambda_1 = 4 + 3i$:

$$x_{11} = e^{(4+3i)t} = e^{4t}(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t),$$
$$x_{21} = ie^{(4+3i)t} = e^{4t}(-\operatorname{sen} 3t + i \cos 3t);$$

para $\lambda_2 = 4 - 3i$:

$$x_{12} = e^{(4-3i)t} = e^{4t}(\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t),$$
$$x_{22} = e^{4t}(-\operatorname{sen} 3t - i \cos 3t).$$

De este modo, obtenemos la solución general

$$x_1 = C_1e^{4t}(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) + C_2e^{4t}(\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t),$$
$$x_2 = C_1e^{4t}(-\operatorname{sen} 3t + i \cos 3t) + C_2e^{4t}(-\operatorname{sen} 3t - i \cos 3t),$$

o sea,

$$x_1 = e^{4t}[(C_1 + C_2)\cos 3t + (C_1 - C_2)\, i \operatorname{sen} 3t],$$
$$x_2 = e^{4t}[-(C_1 + C_2)\operatorname{sen} 3t + (C_1 - C_2)\, i \cos 3t].$$

Haciendo $C_1 + C_2 = C_1^*$, $(C_1 - C_2)\, i = C_2^*$, obtenemos

$$x_1 = e^{4t}(C_1^* \cos 3t + C_2^* \operatorname{sen} 3t),$$
$$x_2 = e^{4t}(-C_1^* \operatorname{sen} 3t + C_2^* \cos 3t).$$

La solución general puede ser hallada también de otro modo. En las soluciones correspondientes a uno de los números característicos complejos separaremos la parte real y la parte imaginaria (el número característico conjugado no lo examinamos):

$$e^{(4+3i)t} = e^{4t}\cos 3t + ie^{4t}\operatorname{sen} 3t,$$
$$ie^{(4+3i)t} = -e^{4t}\operatorname{sen} 3t + ie^{4t}\cos 3t.$$

Obtenemos dos soluciones particulares linealmente independientes: $x_{11} = e^{4t}\cos 3t$, $x_{21} = -e^{4t}\operatorname{sen} 3t$, $x_{12} = e^{4t}\operatorname{sen} 3t$, $x_{22} = e^{4t}\cos 3t$,

La solución general es

$$x_1 = C_1x_{11} + C_2x_{12}, \quad x_2 = C_1x_{21} + C_2x_{22},$$

o sea,

$$x_1 = e^{4t}(C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t), \quad x_2 = e^{4t}(-C_1 \operatorname{sen} 3t + C_2 \cos 3t).$$

756. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1 \\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_1-x_2. \end{cases}$$

Resolución. Escribimos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \text{o bien} \quad (1-\lambda)(1+\lambda^2)=0.$$

Los números característicos son: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=i$, $\lambda_3=-i$.

Cuando $\lambda=1$, para determinar el vector propio obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -p_3=0, \\ p_1-p_2=0, \\ p_1-p_2-p_3=0. \end{cases}$$

Este sistema determina el vector propio $(1;\ 1;\ 0)$.

Para $\lambda=i$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1-i)\,p_1-p_3=0, \\ p_1-ip_2=0, \\ p_1-p_2-ip_3=0. \end{cases}$$

Este sistema determina el vector propio $(1;\ -i;\ 1-i)$.

El vector propio correspondiente al número característico $\lambda=-i$ no se examina.

Al valor de $\lambda=1$ le corresponden las soluciones

$$x_{11}=e^t, \quad x_{21}=e^t, \quad x_{31}=0.$$

Al valor de $\lambda=i$ le corresponden las soluciones

$$e^{it}=\cos t+i\operatorname{sen} t, \quad -ie^{it}=-\operatorname{sen} t+i\cos t,$$
$$(1-i)\,e^{it}=(\cos t+\operatorname{sen} t)+i(\operatorname{sen} t-\cos t).$$

Separando las partes reales, obtenemos las soluciones

$$x_{12}=\cos t, \quad x_{22}=-\operatorname{sen} t, \quad x_{32}=\cos t+\operatorname{sen} t.$$

Separando las partes imaginarias, encontramos las soluciones

$$x_{13}=\operatorname{sen} t, \quad x_{23}=\cos t, \quad x_{33}=\operatorname{sen} t-\cos t.$$

La solución general es

$$x_1=C_1e^t+C_2\cos t+C_3\operatorname{sen} t,$$
$$x_2=C_1e^t-C_2\operatorname{sen} t+C_3\cos t,$$
$$x_3=C_2(\cos t+\operatorname{sen} t)+C_3(\operatorname{sen} t-\cos t).$$

757. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=5x_1-x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2. \end{cases}$$

Resolución. Resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0; \quad (5-\lambda)(3-\lambda)+1=0; \quad \lambda^2-8\lambda+16=0; \quad \lambda_1=\lambda_2=4.$$

Si λ_1 es la raíz de la ecuación característica de multiplicidad m, entonces a esta raíz le corresponde la solución

$$x_1=p_1(t)\,e^{\lambda_1 t}, \quad x_2=p_2(t)\,e^{\lambda_1 t}, \quad \ldots, \quad x_n=p_n(t)\,e^{\lambda_1 t},$$

donde $p_1(t)$, $p_2(t)$, . . ., $p_n(t)$ son polinomios de grado no mayor que $m-1$. De este modo, a la raíz doble $\lambda=4$ le corresponde la solución

$$x_1=e^{4t}(a_1t+a_2), \quad x_2=e^{4t}(b_1t+b_2).$$

Derivando x_1 y x_2, obtenemos

$$\frac{dx_1}{dt}=a_1e^{4t}+4(a_1t+a_2)\,e^{4t}, \quad \frac{dx_2}{dt}=b_1e^{4t}+4(b_1t+b_2)\,e^{4t}.$$

Los valores de x_1, x_2, $\dfrac{dx_1}{dt}$, $\dfrac{dx_2}{dt}$ se sustituyen en el sistema de ecuaciones. Después de reducir en e^{4t} tenemos

$$a_1+4(a_1t+a_2)=5(a_1t+a_2)-(b_1t+b_2),$$
$$b_1+4(b_1t+b_2)=a_1t+a_2+3(b_1t+b_2).$$

Igualando los coeficientes de t y los términos libres, obtenemos los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4a_1=5a_1-b_1, \\ 4b_1=a_1+3b_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+4a_2=5a_2-b_2, \\ b_1+4b_2=a_2+3b_2. \end{cases}$$

De ello se deduce que $a_1=b_1$; $a_2-b_2=a_1=b_1$. Haciendo $a_1=C_1$, $a_2=C_2$ (C_1 y C_2 son constantes arbitrarias), obtenemos $b_1=C_1$, $b_2=C_2-C_1$. Por consiguiente,

$$x_1=e^{4t}(C_1t+C_2), \quad x_2=e^{4t}(C_1t+C_2-C_1).$$

Este sistema se resuelve más sencillamente por el método de eliminación. En efecto, expresando x_2 de la primera ecuación y efectuando la derivación, sustituimos luego los valores de x_2 y $\dfrac{dx_2}{dt}$ en la segunda ecuación. Como resultado obtendremos una ecuación lineal homogénea de segundo orden respecto a x_1. Recomendamos al lector resolver por cuenta propia el sistema dado por el método de eliminación.

Hallar las soluciones generales de los sistemas:

758. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-ax_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-ax_1. \end{cases}$$

759. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 8x_2 - x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases}$$

760. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

761. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

762. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 12x_1 - 5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2. \end{cases}$$

763. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dx} = x_1 - x_2. \end{cases}$$

764. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -15x_1 - 6x_2 + 16x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -15x_1 - 7x_1 + 18x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -19x_1 - 8x_2 + 21x_3. \end{cases}$$

765. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a+1)x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + (a-1)y. \end{cases}$$

766. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

767. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y. \end{cases}$$