Capítulo V. Elementos de la teoría de las probabilidades

§ 1. Suceso aleatorio, su frecuencia y probabilidad

Se llama *suceso aleatorio* al que puede tener lugar o no, cuando se cumple un conjunto de condiciones, ligadas con la posibilidad de la aparición de los sucesos dados.

Los sucesos aleatorios se designan por medio de las letras A, B, C, ... Cada realización del conjunto de condiciones que se examina se denomina *prueba*. El número de pruebas puede crecer infinitamente. La relación entre el número m de realización del suceso aleatorio dado A en una serie determinada de pruebas y el número total n de pruebas de esta serie se llama *frecuencia* relativa de manifestación del suceso A en esta serie de pruebas (o simplemente frecuencia relativa del suceso A) y se designa mediante $\overline{P}(A)$. De tal modo, $\overline{P}(A) = m/n$.

La frecuencia relativa de un suceso aleatorio siempre está comprendida entre el cero y la unidad: $0 \leqslant \overline{P}(A) \leqslant 1$.

Los sucesos aleatorios masivos poseen la propiedad de la *estabilidad* de la frecuencia: los valores de la frecuencia del suceso aleatorio dado que se observan en diferentes series de pruebas homogéneas (siempre que el número de pruebas en cada serie es suficientemente grande) varían poco de una serie a otra.

Al estudiar sucesos aleatorios, es precisamente esta circunstancia la que permite emplear los métodos matemáticos asignando a cada suceso aleatorio masivo su *probabilidad* por la cual se toma el número (hablando en general, de antemano desconocido) alrededor del cual oscila la frecuencia observada del suceso.

La probabilidad de un suceso aleatorio A se designa por $P(A)$. La probabilidad de un suceso aleatorio, al igual que su frecuencia relativa, está comprendida entre el cero y la unidad: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

A un suceso *cierto* (o sea, al suceso que debe producirse en cada prueba) se le atribuye la probabilidad $P(A) = 1$.

A un suceso *imposible* (o sea, al suceso que no puede producirse en ninguna prueba) se le atribuye la probabilidad $P(A) = 0$.

En algunos casos elementales la probabilidad de un suceso aleatorio puede ser determinada de antemano. Esto se puede hacer, por ejemplo, cuando los resultados posibles de cada una de pruebas homogéneas pueden representarse en forma de n resultados («casos») únicamente posibles, incompatibles entre sí y equiposibles (o sea, además de estos n sucesos no pueden haber ningunos otros, dos sucesos cualesquiera no pueden ocurrir simultáneamente y hay razones para suponer que la realización de cualquiera de ellos no es más posible que la de los restantes). Si entre estos n casos únicamente posibles, incompatibles y equiposibles hay m ligados a la manifestación del suceso A (o, como se dice en la teoría de las probabilidades, «favorecen» A), entonces como probabilidad del suceso A se toma la relación entre m y n: $P(A) = m/n$.

768. En una cajita hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se ha sacado una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la bola extraída no exceda de 10?

Resolución. Como el número de cualquier bola que se halla en la cajita no supera 10, el número de casos favorables al suceso A es igual al número de todos los casos posibles, o sea, $m = n = 10$ y $P(A) = 1$. En este caso el suceso A es cierto.

769. Una urna contiene 15 bolas: 5 blancas y 10 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que de la urna se extraiga una bola azul?

Resolución. En la urna no hay bolas azules, o sea, $m = 0$ y $n = 15$. Por consiguiente, $P(A) = 0/15 = 0$. En el caso dado el suceso A es imposible.

770. Una urna contiene 12 bolas: 3 blancas, 4 negras y 5 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que de la urna se saque una bola negra?

Resolución. Aquí $m = 4$, $n = 12$ y $P(A) = 4/12 = 1/3$.

771. Una urna contiene 10 bolas: 6 blancas y 4 negras. Se han sacado dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas salidas sean blancas?

Resolución. Aquí el número de todos los casos $n = C_{10}^2 = (10\cdot9)/(1\cdot2) = 45$. El número de los casos que favorecen el suceso A se determina por la igualdad $m = C_6^2$, o sea, $m = (6\cdot5)/(1\cdot2) = 15$. De suerte que $P(A) = 15/45 = 1/3$.

772. En una lotería hay 2000 billetes. Un billete se premia con 100 rublos, cuatro billetes con 50 rublos, diez billetes con 20 rublos, veinte billetes con 10 rublos, 165 billetes con 5 rublos y 400 billetes con 1 rublo cada uno. Los demás billetes no se premian. ¿Cuál es la probabilidad de ganar con un billete 10 rublos por lo menos?

Resolución. Aquí $m = 1 + 4 + 10 + 20 = 35$, $n = 2000$, o sea, $P(A) = m/n = 35/2000 = 0{,}0175$.

773. Una urna contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20. ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bola que lleva el número 37?

774. Una moneda se arroja dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que ella ambas veces caiga de cara?

775. La primera cajita contiene bolas numeradas del 1 al 5, y la segunda, bolas numeradas del 6 al 10. De cada cajita se ha sacado una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números salidos sea: 1) no menos de 7; 2) igual a 11; 3) no más de 11?

776. En una lotería hay 1000 billetes. Entre ellos 500 billetes se premian y 500 no se premian. Se han comparado dos billetes. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos billetes resulten premiados?

777. En un grupo de 30 alumnos, en un examen escrito 6 alumnos han obtenido calificación sobresaliente, 10 alumnos, calificación buena y 9 alumnos, regular. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los tres alumnos llamados a la pizarra hallan obtenido calificación de insuficiente en el examen?

§ 2. Axiomas de la suma y multiplicación de probabilidades

Se llama *unión* (o *suma*) de algunos sucesos aleatorios al suceso consistente en la realización de uno de los sucesos dados, por lo menos. La unión de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se designa por $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Si los sucesos que se asocian son incompatibles (no pueden producirse dos sucesos conjuntamente), entonces la *probabilidad de unir algunos sucesos es igual a la suma de probabilidades de los sucesos que se asocian (axioma de la suma de probabilidades)*:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Un suceso consistente en la no realización del suceso aleatorio A se denomina suceso *contrario* al A y se designa por $\overline{A}$.

La unión de los sucesos A y $\overline{A}$ da un suceso cierto y puesto que los sucesos A y $\overline{A}$ son incompatibles, entonces

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \quad \text{o bien} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Si como resultado de la prueba dada puede producirse sólo uno de los sucesos incompatibles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, entonces $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman el llamado *grupo completo de sucesos*. Como la unión de los sucesos de un grupo completo es un suceso cierto, para tales sucesos tiene lugar la igualdad

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Se llama *coincidencia* (o *producto*) de dos sucesos aleatorios A_1 y A_2 a un suceso compuesto consistente en la realización simultánea o sucesiva de ambos sucesos. La coincidencia de los acontecimientos A_1 y A_2 se designa por A_1A_2.

Por *probabilidad condicional* del suceso A_2 respecto al suceso A_1 [se designa por $P(A_2/A_1)$] se entiende la probabilidad de producción del suceso A_2 suponiendo de que el suceso A_1 tuvo lugar.

La probabilidad de coincidencia de dos sucesos A_1 y A_2 es igual al producto de la probabilidad de uno de ellos por la probabilidad condicional del segundo respecto al primero (axioma de multiplicación de probabilidades):

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1/A_2).$$

Dos sucesos aleatorios A_1 y A_2 se llaman *independientes* si la probabilidad condicional de uno de ellos respecto al otro es igual a la probabilidad incondicional de este mismo suceso: $P(A_2/A_1) = P(A_2)$ En este caso tienen lugar las igualdades:

$$P(A_2/\overline{A_1}) = P(A_2/A_1) = P(A_2); \quad P(A_1/A_2) = P(A_1/A_2) = P(A_1).$$

Para los sucesos independientes la probabilidad de su coincidencia es igual al producto de sus probabilidades:

$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

La coincidencia de n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (que se define análogamente) se designa por $A_1A_2 \ldots A_n$.

La probabilidad condicional del suceso A_k determinada en la suposición de que se han producido los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ se designa por

$P(A_k/A_1A_2 \ldots, A_{k-1})$. La probabilidad de coincidencia de n sucesos según el axioma de multiplicación de probabilidades se determina por la fórmula

$$P(A_1, A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2) \ldots$$
$$\ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Se dice que n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son *independientes en su conjunto*, si en la probabilidad de realización de cada uno de ellos no ejerce influencia la manifestación de cualesquiera otros, tomados en una combinación cualquiera.

La probabilidad de coincidencia de n sucesos independientes en su conjunto es igual al producto de sus probabilidades:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2) \ldots P(A_n).$$

778. Una urna contiene 10 bolas blancas, 15 negras, 20 azules y 25 rojas. Se ha sacado una bola. Hallar la probabilidad de que la bola salida sea: blanca; negra; azul; roja; blanca o negra; azul o roja; blanca, negra o azul.

Resolución. Tenemos $n = 10 + 15 + 20 + 25 = 70$, $P(B) = 10/70 = 1/7$, $P(N) = 15/70 = 3/14$, $P(A) = 20/70 = 2/7$, $P(R) = 25/70 = 5/14$. Utilizando el axioma de la suma de probabilidades, obtenemos

$$P(B + N) = P(B) + P(N) = 1/7 + 3/14 = 5/14;$$
$$P(A + R) = P(A) + P(R) = 2/7 + 5/14 = 9/14;$$
$$P(B + N + A) = 1 - P(R) = 1 - 5/14 = 9/14.$$

779. La primera cajita contiene 2 bolas blancas y 10 negras; la segunda cajita, 8 bolas blancas y 4 negras. De cada cajita se ha sacado una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean blancas?

Resolución. En el caso dado se trata de la coincidencia de los sucesos A y B, donde el suceso A es la salida de una bola blanca de la primera cajita y el suceso B es la salida de una bola blanca de la segunda cajita. Con ello A y B son sucesos independientes. Tenemos $P(A) = 2/12 = 1/6$, $P(B) = 8/12 = 2/3$. Aplicando el axioma de multiplicación de probabilidades, encontramos

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = (1/6)\cdot(2/3) = 1/9.$$

780. Con las condiciones del problema precedente, determinar la probabilidad de que una de las bolas sacadas sea blanca y la otra negra.

Resolución. Sean:

el suceso A, la salida de una bola blanca de la primera cajita;

el suceso B, la salida de una bola blanca de la segunda cajita;

el suceso C, la salida de una bola negra de la primera cajita ($C = \overline{A}$)

el suceso D, la salida de una bola negra de la segunda cajita ($D = \overline{B}$).

Entonces $P(A) = 1/6$, $P(B) = 2/3$, $P(C) = P(\overline{A}) = 1 - 1/6 = 5/6$, $P(D) = P(\overline{B}) = 1 - 2/3 = 1/3$.

Determinemos la probabilidad de que la bola sacada de la primera cajita sea blanca y la sacada de la segunda cajita sea negra. Aplicamos el axioma de la suma de probabilidades:

$$P(AD) = P(A)\cdot P(D) = (1/6)\cdot(1/3) = 1/18.$$

Determinemos la probabilidad de que la bola sacada de la primera cajita sea negra y la sacada de la segunda cajita sea blanca:

$$P(BC) = P(B)\cdot P(C) = (2/3)\cdot(5/6) = 5/9.$$

Determinamos ahora la probabilidad de que la bola sacada de una cajita (no importa si de la primera o de la segunda) resulte blanca y la sacada de la otra cajita, negra. Aplicamos el axioma de multiplicación de probabilidades:

$$P = P(AD) + P(BC) = 1/18 + 5/9 = 11/18.$$

781. Una cajita contiene 6 bolas blancas y 8 negras. De la cajita se han sacado dos bolas (sin reposición). Hallar la probabilidad de que ambas bolas sean blancas.

Resolución. Sean el suceso A la salida de una bola blanca en la primera extracción, y el B, la salida de una bola blanca en la segunda extracción. Según el axioma de multiplicación de probabilidades para el caso de sucesos dependientes tenemos $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$. Pero $P(A) = 6/(6+8) = 6/14 = 3/7$ (la probabilidad de que la primera bola sacada sea blanca); $P(B/A) = (6-1)/6+8-1) = 5/13$ (la probabilidad de salir una segunda bola blanca suponiendo que se extrajo la primera). Por consiguiente, $P(AB) = (3/7) \cdot (5/13) = 15/91$.

782. Tres tiradores disparan contra un blanco. La probabilidad de que el primer tirador dé en el blanco es igual a 0,75, para el segundo tirador esta probabilidad es de 0,8 y para el tercero, de 0,9. Determinar la probabilidad de que los tres tiradores den simultáneamente en el blanco.

Resolución. Tenemos

$$P(A) = 0{,}75, \quad P(B) = 0{,}8, \quad P(C) = 0{,}9;$$
$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}54.$$

783. Con los datos del problema precedente, determinar la probabilidad de que dé en el blanco al menos un tirador.

Resolución. Aquí $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ (la probabilidad de que yerre el blanco el primer tirador); $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ (la probabilidad de que yerre el blanco el segundo tirador); $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ (la probabilidad de que yerre el blanco el tercer tirador); entonces $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$ — o sea, la probabilidad de que yerren el blanco simultáneamente todos los tres tiradores se determina por el modo siguiente:

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}005.$$

Pero el suceso contrario del suceso $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ es el consistente en que al menos un solo tirador dé en el blanco. Por consiguiente, la probabilidad buscada $P = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$, o sea, $P = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$.

784. La probabilidad de que una máquina herramienta se estropee en el transcurso de un día de trabajo es igual a α (α es un número positivo pequeño cuyo cuadrado se puede despreciar). ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina herramienta no se estropee ninguna vez durante 5 días? Resolver el problema para $\alpha = 0{,}01$.

Resolución. Puesto que $1 - \alpha$ es la probabilidad de que la máquina herramienta no se estropee en el transcurso de un día, entonces, según el axioma de multiplicación de probabilidades, $(1-\alpha)^5$ es la probabilidad de que la máquina no se deteriore durante 5 días.

Valiéndonos del desarrollo binomial y despreciando los términos que contienen α^2, α^3, α^4 y α^5, obtenemos la igualdad aproximada $(1-\alpha)^5 \simeq 1-5\alpha$, o sea, $P \simeq 1-5\alpha$. Para $\alpha = 0,01$, tenemos $P \simeq 0,95$.

785. Una cajita contiene a bolas blancas y b negras. ¿Cuál es la probabilidad de que de dos bolas sacadas una sea blanca y la otra negra? (La bola sacada no vuelve a meterse en la cajita.)

Resolución. Sean:
el suceso A, la salida de una bola blanca en la primera extracción;
el suceso B, la salida de una bola negra en la segunda extracción;
el suceso C, la salida de una bola negra en la primera extracción;
el suceso D, la salida de una bola blanca en la segunda extracción.
Calculamos la probabilidad de que la primera bola salida sea blanca y la segunda negra:

$$P_1 = P(A)\cdot P(B/A) = \frac{a}{a+b}\,\frac{b}{a+b-1} = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Hallamos la probabilidad de que la primera bola salida sea negra y la segunda blanca:

$$P_2 = P(C)\cdot P(D/C) = \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b-1} = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

De este modo, la probabilidad de que una de las bolas sacadas sea blanca y la otra sea negra se determinará por el axioma de la suma: $P = P_1 + P_2$, o sea,

$$P = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

786. Una cajita contiene a bolas blancas, b negras y c azules. Se ha sacado una bola. Determinar la probabilidad de que la bola extraída sea: 1) blanca; 2) negra; 3) azul; 4) blanca o negra; 5) blanca o azul; 6) negra o azul.

787. La primera cajita contiene a bolas blancas y b negras; la segunda, c blancas y d negras. De cada cajita se ha sacado una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean negras?

788. La probabilidad de que el primer tirador dé en el blanco es igual a p_1 y para el segundo es igual a p_2. Los tiradores disparan simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de ellos dé en el blanco y el otro falle el tiro?

789. La probabilidad de que en una ciudad meridional N la temperatura en un día cualquiera del julio sea menor de 5 °C es igual a α (α es un número pequeño cuyo cuadrado se puede despreciar). ¿Cuál es la probabilidad de que durante los primeros tres días del julio la temperatura no descienda a menos de 5 °C?

790. La primera cajita contiene 1 bola blanca, 2 rojas y 3 azules; la segunda cajita contiene 2 bolas blancas, 6 rojas y 4 azules. De cada cajita se ha sacado una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que entre las bolas salidas no hayan bolas azules?

791. La probabilidad de que en el transcurso de un día no se estropee un torno sea igual a 0,03. ¿Cuál es la probabilidad de que durante cuatro días seguidas no tenga lugar ningún deterioro?

792. En un aula hay 12 niños y 18 niñas. Hace falta elegir una delegación de dos personas. ¿Cuál es la probabilidad (si la elección se efectúa al azar) de que resulten escogidos: 1) dos niños; 2) dos niñas; 3) una niña y un niño?

793. Una urna contiene 9 bolas blancas y 1 negra. Se extraen tres bolas conjuntamente. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean blancas?

794. Se efectúan tres disparos contra un blanco. La probabilidad de hacer el impacto en cada disparo es igual a 0,5. Hallar la probabilidad de que como resultado de estos disparos se logre un solo impacto.

§ 3. Fórmula de Bernoulli. El número más probable de realización de un evento

Si se efectúan n pruebas independientes en cada una de las cuales la probabilidad de realización del evento (suceso) A es la misma e igual a p, entonces la probabilidad de que el suceso A tenga lugar en estas n pruebas m veces se expresa por la *fórmula de Bernoulli*

$$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m},$$

donde $q = 1 - p$. De este modo,

$$P_{0,n}=q^n, \quad P_{1,n}=npq^{n-1}, \quad P_{2,n}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}p^2\cdot q^{n-2}, \ \ldots, \ P_{n,n}=p^n.$$

El número m_0 se llama *número más probable* de realización del evento A en n pruebas, si el valor de $P_{m,n}$ para $m = m_0$ no es menor de los demás valores de $P_{m,n}$, o sea, $P_{m_0,n} \geqslant P_{m_i,n}$ cuando $m_i \neq m_0$.

Si $p \neq 0$ y $p \neq 1$, entonces el número m_0 se puede determinar de la desigualdad doble

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p.$$

En esta desigualdad doble la diferencia de los valores de frontera es igual a 1. Si $np + p$ no es un número entero, la desigualdad doble define únicamente un solo valor más probable de m_0. Pero si $np + p$ es un número entero, entonces hay dos valores más probables: $m_0' = np - q$ y $m_0'' = np + p$.

795. Una urna contiene 20 bolillas blancas y 10 negras. Se han sacado seguidamente 4 bolas, con ello cada bolilla salida se repone y se mezclan las bolillas en la urna antes de extraer la siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que entre las cuatro bolillas salidas dos sean blancas?

Resolución. La probabilidad de extraer una bolilla blanca $p = 20/30 = 2/3$ se puede considerar igual para las cuatro pruebas; $q = 1 - p = 1/3$. Utilizando la fórmula de Bernoulli, obtenemos

$$P_{2,4}=C_4^2p^2q^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}.$$

796. La probabilidad de que se produzca el evento A es igual a 0,4. ¿Cuál es la probabilidad de que en 10 pruebas el suceso A se realice no más de tres veces?

Resolución. Aquí $p = 0,4$, $q = 0,6$. Tenemos:
la probabilidad de que el evento A se produzca: 0 veces es $P_{0,10} = q^{10}$;

1 vez es $P_{1,10} = 10pq^9$;

2 veces es $P_{2,10} = 45p^2q^8$;

3 veces es $P_{3,10} = 120p^3q^7$;

no más de tres veces es igual a

$$P = P_{0,10} + P_{1,10} + P_{2,10} + P_{3,10}.$$

o sea,

$$P = q^{10} + 10pq^9 + 45p^2q^8 + 120p^3q^7, \quad \text{o bien}$$
$$P = q^7(q^3 + 10q^2p + 45qp^2 + 120p^3).$$

Suponiendo $p = 0,4$, $q = 0,6$, obtenemos

$$P = 0,6^7(0,216 + 1,44 + 4,32 + 7,68) \simeq 0,38.$$

797. Determinar la probabilidad de que en una familia que tiene cinco hijos haya tres niñas y dos niños. Las probabilidades de nacimiento de un niño y de una niña se suponen iguales.

Resolución. La probabilidad de nacimiento de una niña $p = 0,5$, entonces $q = 1 - p = 0,5$ (probabilidad de nacimiento de un niño). Por lo tanto, la probabilidad buscada

$$P_{3,5} = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(0,5)^3\cdot(0,5)^2 = \frac{5}{16}.$$

798. Dejando vigentes los datos del problema precedente, hallar la probabilidad de que entre los hijos no haya más de tres niñas.

Resolución. Tenemos

$$P_{0,5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}; \quad P_{1,5} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32};$$

$$P_{2,5} = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}; \quad P_{3,5} = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16};$$

$$P = P_{0,5} + P_{1,5} + P_{2,5} + P_{3,5} = \frac{13}{16}.$$

799. Una moneda se arroja 8 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que ella caiga de cara 6 veces?

800. Una moneda se arroja 6 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga de cara no más de tres veces?

801. En un aula hay 20 niños y 10 niñas. A cada una de tres preguntas hechas por el maestro ha respuesto un alumno. ¿Cuál es la probabilidad de que entre quienes respondieron haya dos niños y una niña?

802. En cada una de cuatro cajitas hay 5 bolillas blancas y 15 negras. De cada cajita han sacado una. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos bolillas blancas y dos negras?

803. Una urna contiene 10 bolillas blancas y 40 negras. Se sacan seguidamente 14 bolillas, con ello el color de cada una se registra y luego la bolilla se repone en la urna. Determinar el número más probable de salidas de una bolilla blanca.

Resolución. Aquí $n = 14$, $p = 10/50 = 1/5$, $q = 1 - p = 4/5$. Utilizando la desigualdad doble $np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p$ para los valores indicados de n, p y q, obtenemos

$$14/5 - 4/5 \leqslant m_0 \leqslant 14/5 + 1/5, \quad \text{o sea,} \quad 2 \leqslant m_0 \leqslant 3.$$

Por lo tanto, el problema tiene dos soluciones: $m_0' = 2$, $m_0'' = 3$.

804. La probabilidad de que un tirador dé en el blanco es igual a 0,7. Se han efectuado 25 disparos. Determinar el número más probable de impactos.

Resolución. Aquí $n = 25$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Por consiguiente,

$$25 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \leqslant m_0 \leqslant 25 \cdot 0{,}7 + 0{,}7, \quad \text{o sea,} \quad 17{,}2 \leqslant m_0 \leqslant 18{,}2.$$

Como m es un número entero, $m_0 = 18$.

805. Como resultado de observaciones hechas durante muchos años, ha sido establecido que la probabilidad de que llueva el 1 de octubre en una ciudad dada es igual a 1/7. Determinar el número más probable de días lluviosos el 1 de octubre en esta ciudad durante 40 años.

Resolución. Tenemos $n = 40$, $p = 1/7$, $q = 6/7$. De este modo,

$$40 \cdot \frac{1}{7} - \frac{6}{7} \leqslant m_0 \leqslant 40 \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7}, \quad 4\frac{6}{7} \leqslant m_0 \leqslant 5\frac{6}{7}, \quad \text{o sea,} \quad m_0 = 5.$$

806. Hay 20 cajones de piezas homogéneas. La probabilidad de que en un cajón tomado al azar las piezas sean estándares es igual a 0,75. Hallar el número más probable de cajones en los cuales todas las piezas son estándares.

807. Una urna contiene 100 bolillas blancas y 80 negras. De la urna se sacan n bolillas (reponiendo en la urna cada bolilla salida). El número más probable de salidas de una bolilla negra es igual a 11. Hallar n.

Resolución. De la desigualdad doble $np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p$ resulta que

$$(m_0 - p)/p \leqslant n \leqslant (m_0 + q)/p.$$

Aquí $m_0 = 11$, $p = 100/180 = 5/9$, $q = 4/9$; por consiguiente,

$$\frac{11 - 5/9}{5/9} \leqslant n \leqslant \frac{11 + 4/9}{5/9}, \quad \text{o sea,} \quad 18.8 \leqslant n \leqslant 20.6.$$

De suerte que el problema tiene dos soluciones: $n_1 = 19$, $n_2 = 20$.

808. ¿Se puede en el problema precedente cambiar los valores numéricos de m_0 y p de modo que no tenga soluciones?

809. El primer obrero puede fabricar durante un turno 120 artículos y el segundo, 140 artículos, con ello las probabilidades de que estos artículos sean de calidad superior son 0,94 y 0,8 respectivamente. Determinar el número más probable de piezas de calidad superior fabricadas por cada obrero.

810. Hay 100 urnas llenas de bolillas blancas y negras. La probabilidad de que salga una blanca de cada urna es igual a 0,6. Hallar el número más probable de urnas en las cuales todas las bolillas sean blancas.

§ 4. Fórmula de la probabilidad total. Fórmula de Bayes

Si es sabido que el evento A puede acaecer junto con uno de los sucesos $H_1, H_2, \ldots, H_n$ que forman un grupo completo de eventos incompatibles, entonces A se puede representar como unión de los eventos $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$, o sea, $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$. La probabilidad del evento A puede ser determinada por la fórmula

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A/H_n),$$

o bien

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i).$$

Esta fórmula se llama *fórmula de la probabilidad total.*

La probabilidad condicional del evento H_i, suponiendo que el evento A tiene lugar, se determina por la *fórmula de Bayes:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)\cdot P(H_i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Las probabilidades $P(H_i/A)$ calculadas por la fórmula de Bayes se llaman frecuentemente *probabilidades de las hipótesis.*

811. Hay cuatro urnas. La primera contiene 1 bolilla blanca y 1 negra; la segunda, 2 blancas y 3 negras; la tercera, 3 bolillas blancas y 5 negras; la cuarta, 4 blancas y 7 negras. El suceso H_i es la elección de la i-ésima urna ($i = 1, 2, 3, 4$). Se sabe que la probabilidad de la elección de la i-ésima urna es igual a $i/10$, o sea, $P(H_1) = 1/10$, $P(H_2) = 1/5$, $P(H_3) = 3/10$, $P(H_4) = 2/5$. Se escoge al azar una de las urnas y se saca de ella una bolilla. Hallar la probabilidad de que ella sea blanca.

Resolución. De los datos resulta que $P(A/H_1) = 1/2$ (la probabilidad condicional de que se estraiga la bolilla blanca de la primera urna); análogamente, $P(A/H_2) = 2/5$, $P(A/H_3) = 3/8$, $P(A/H_4) = 4/11$. La probabilidad de que salga una bolilla blanca se determina por la fórmula de la probabilidad total:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) +$$
$$+ P(H_3)\cdot P(A/H_3) + P(H_4)\cdot P(A/H_4) =$$
$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{8} + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{11} = \frac{1707}{4400}.$$

812. Hay tres cajitas iguales. La primera contiene 20 bolillas blancas; la segunda, 10 blancas y 10 negras; la tercera, 20 negras. De una cajita escogida al azar se ha extraído una bolilla blanca. Calcular la probabilidad de que ella se haya sacado de la primera cajita.

Resolución. Sean H_1, H_2, H_3 las hipótesis consistentes en la elección de la primera, segunda y tercera cajita, respectivamente; el evento A es la salida de una bolilla blanca. Entonces $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$ (la elección de cualquiera de las cajitas es equiposible); $P(A/H_1) = 1$ (la probabilidad de que una bolilla blanca se extraiga de la primera cajita), $P/A/H_2) = 10/20 = 1/2$ (la probabilidad de que una bolilla blanca se extraiga de la segunda cajita), $P(A/H_3) = 0$ (la probabilidad de que una bolilla blanca se extraiga de la tercera cajita).

La probabilidad buscada $P(H_1/A)$ se determina por la fórmula de Bayes:

$$P(H_1/A) = \frac{1\cdot(1/3)}{1\cdot(1/3)+(1/2)\cdot(1/3)+0\cdot(1/3)} = \frac{2}{3}.$$

813. Un cajón contiene N artículos, entre ellos los hay desechados. El artículo escogido al azar está en buen estado. Determinar la probabilidad de que: todos los artículos contenidos en el cajón estén en buen estado; $N-1$ artículos estén en buen estado y un artículo esté desechado; $N-2$ artículos estén en buen estado y dos artículos estén desechados; . . .; todos los N artículos en el cajón estén desechados.

Resolución. Las hipótesis antes del experimento son las siguientes: H_0, o sea, todos los artículos en el cajón están en buen estado; H_1, o sea, un artículo está desechado; H_2, o sea, dos artículos están desechados; . . .; H_N, o sea, todos los artículos están desechados. El suceso A consiste en la salida de un artículo en buen estado. Se requiere hallar $P(H_0/A)$, $P(H_1/A)$, $P(H_2/A)$ . . . . . ., $P(H_N/A)$.

Supongamos que antes del experimento todas las hipótesis son equiposibles:

$$P(H_0) = P(H_1) = P(H_2) \dots = P(H_N) = \frac{1}{N+1},$$

o sea,

$$P(A/H_0) = 1, \quad P(A/H_1) = \frac{N-1}{N}, \quad P(A/H_2) = \frac{N-2}{N}, \dots,$$

$$P(A/H_{N-1}) = \frac{1}{N}, \quad P(A/H_N) = 0.$$

De ello encontramos

$$P(H_0/A) = \frac{1\cdot\frac{1}{N+1}}{1\cdot\frac{1}{N+1}+\frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}+\dots+\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}+0\cdot\frac{1}{N+1}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+\dots+\frac{N-1}{N}+1} = \frac{N}{1+2+\dots+N-1+N} = \frac{2}{N+1}.$$

Análogamente obtenemos

$$P(H_1/A) = \frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-1}{N}, \quad P(H_2/A) = \frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-2}{N}, \dots,$$

$$P(H_N/A) = \frac{2}{N+1}\cdot 0 = 0.$$

814. La primera urna contiene 5 bolillas blancas y 10 negras y la segunda, 3 blancas y 7 negras. Se ha metido en la primera urna una bolilla sacada de la segunda, y luego de la primera urna se ha extraído al azar una bolilla. Determinar la probabilidad de que la bolilla sacada sea blanca.

Resolución. Después de pasar una bolilla de la segunda urna a la primera en esta última hay dos conjuntos de bolillas 1) 5 blancas y 10 negras que desde el principio se encuentran en ella; 2) una bolilla procedente de la segunda urna. La probabilidad de que una bolilla blanca salga del primer conjunto es $P(A/H_1) = 5/15 = 1/3$ y la de que una bolilla así salga del segundo conjunto es $P(A/H_2) = 3/10$. La probabilidad de que una bolilla arbitrariamente extraída pertenezca al primer conjunto constituye $P(H_1) = 15/16$ y la de que ella pertenezca al segundo conjunto es $P(H_2) = 1/16$.

Utilizando la fórmula de la probabilidad total, obtenemos

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) = \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{3}{10} = \frac{53}{160}.$$

815. La primera urna contiene 1 bolilla blanca y 2 negras y la segunda, 100 blancas y 100 negras. De la segunda urna se ha pasado a la primera una bola y luego de la primera urna se ha sacado al azar una bolilla. ¿Cuál es la probabilidad de que al bolilla salida se encontrara antes en la segunda urna, si se sabe que ella es blanca?

§ 5 Variable aleatoria y la ley de su distribución

Si a cada evento elemental A de cierto conjunto de sucesos se le puede poner en correspondencia una magnitud determinada $X = X(A)$, entonces se dice que está definida una variable *aleatoria*. La variable aleatoria X se puede considerar como función del evento A con campo de definición ω.

Una variable aleatoria puede tomar uno u otro valor de cierto conjunto numérico; sin embargo, no se conoce de antemano, cuál es precisamente este valor. Las variables aleatorias suelen designarse con las letras mayúsculas $X, Y, \ldots$, y los valores tomados por ellas, con las minúsculas respectivas $x, y, \ldots$.

Si los valores que puede tomar la variable aleatoria dada X forman una serie discreta *) (finita o infinita) de números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, entonces la propia variable aleatoria X se llama *discreta*.

Sin embargo, si los valores que puede tomar la variable aleatoria dada X llenan un intervalo entero finito o infinito $]a, b[$ del eje numérico Ox, la variable aleatoria se denomina *continua*.

A cada valor de una variable aleatoria del tipo x_n le corresponde una probabilidad determinada p_n; a cada intervalo $]a, b[$ del campo de valores de una variable aleatoria del tipo continuo le corresponde una probabilidad determinada $P(a < X < b)$ de que el valor tomado por la variable aleatoria se encuentre en este intervalo.

La relación que establece de uno u otro modo el enlace entre valores posibles de una magnitud aleatoria y las probabilidades de los mismos se llama *ley de distribución* de la variable aleatoria.

---

*) Una serie finita o infinita de números se llama *discreta*, si a cada número x_n de esta serie se le puede poner en correspondencia un intervalo $]a_n, b_n[$ dentro del cual no hay otros números de la serie dada.

La ley de distribución de una variable aleatoria discreta se define generalmente por la serie de distribución:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Con ello $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, donde la sumación se extiende sobre todo el conjunto (finito o infinito) de valores posibles de la variable aleatoria X dada.

La ley de distribución de una variable aleatoria continua es cómodo definirla con ayuda de la llamada *función de densidad de la probabilidad* $f(x)$. La probabilidad $P\ (a < X < b)$ de que el valor tomado por la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $]a, b[$ se determina por la igualdad

$$P\,(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

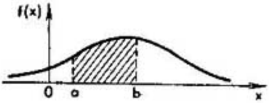

Fig. 35

El gráfico de la función $f(x)$ se denomina *curva de distribución*. Geométricamente la probabilidad de que una variable aleatoria se encuentre en el intervalo $]a, b[$ es igual al área del trapecio curvilíneo correspondiente limitado por la curva de distribución, el eje Ox y las rectas $x = a$, $x = b$ (fig. 35).

La función de densidad de la probabilidad $f(x)$ posee las propiedades siguientes:

1ª. $f(x) \geqslant 0$.

2ª. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

(si todos los valores de la variable aleatoria X se hallan comprendidos en el intervalo $]a, b[$, entonces la última propiedad se puede escribir en la forma) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$).

Examinemos ahora la función $F(x) = P\,(X < x)$. Ella se llama *función de distribución de la probabilidad* de la variable aleatoria X. La función $F(x)$ sxiste tanto para variables aleatorias discretas como para continuas. Si $f(x)$ a la función de densidad de distribución de la probabilidad de una función eleatoria continua X, entonces

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

De la última igualdad resulta que

$$(fx) = F'(x).$$

A veces la función $f(x)$ se llama *función diferencial de distribución de la probabilidad* y la función $F(x)$, *función integral de distribución de la probabilidad*.

Señalemos las propiedades más importantes de la función de distribución de una probabilidad:

1ª $F(x)$ es una función no decreciente.

2ª. $F(-\infty) = 0$.

3ª. $F(+\infty) = 1$.

816. Se dan las probabilidades de valores de una variable aleatoria X: el valor 10 tiene la probabilidad igual a 0,3; el 2, la probabilidad 0,4; el 8 la probabilidad 0,1; el valor 4, la probabilidad 0,2. Construir la serie de distribución de la variable aleatoria X.

Resolución. Situando los valores de la variable aleatoria en el orden creciente, obtenemos una serie de distribución:

x_i	2	4	8	10
p_i	0,4	0,2	0,1	0,3

Tomemos sobre el plano xOp los puntos (2; 0,4), (4; 0,2), etc. Uniendo los puntos sucesivos por segmentos rectilíneos, obtenemos el así llamado polígono de distribución de la variable aleatoria X (fig. 36).

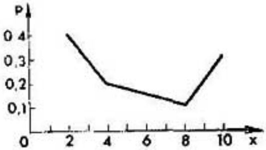

Fig. 36

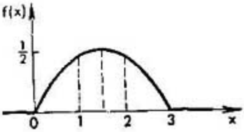

Fig. 37

817. La variable aleatoria X está subordinada a una ley de distribución con densidad $f(x)$, con ello

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0; \\ a(3x - x^2), & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3; \\ 0, & \text{si} \quad x > 3. \end{cases}$$

Se exige: 1) hallar el coeficiente a; 2) construir el gráfico de distribución de la densidad $y = f(x)$; 3) hallar la probabilidad de que X se encuentre en el intervalo $]1, 2[$.

Resolución. 1) Como todos los valores de la variable aleatoria dada se hallan comprendidos en el segmento $[0, 3]$, entonces $\int\limits_0^3 a(3x - x^2)\,dx = 1$, de donde

$$a\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 1, \quad \text{o bien} \quad a\left(\frac{27}{2} - 9\right) = 1, \quad \text{o sea,} \quad a = \frac{2}{9}.$$

2) El gráfico de la función $f(x)$ en el intervalo]0, 3[es la parábola $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2$ y fuera de este intervalo, de gráfico sirve el propio eje de las abscisas (fig. 37).

3) La probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo]1, 2[se determina por la igualdad

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{16}{27} - \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{13}{27}.$$

818. Se da la serie de distribución de la variable aleatoria X:

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Construir la función de distribución de la probabilidad de esta variable aleatoria.

Resolución. Si $x \leqslant 10$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0$;
si $10 < x \leqslant 20$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0,2$;
si $20 < x \leqslant 30$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 + 0,5$;
si $30 < x \leqslant 40$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 + 0,35 = 0,85$;
si $40 < x \leqslant 50$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 + 0,35 + 0,1 = 0,95$;
si $x > 50$, entonces $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 + 0,35 + 0,1 + 0,5 = 1$.

819. La variable aleatoria X está definida por la función de distribución (por la función integral)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1; \\ (x-1)/2, & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3; \\ 1, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en los intervalos]1,5; 2,5[y]2,5; 3,5[.

Resolución. Tenemos

$P_1 = F(2,5) - F(1,5) = (2,5 - 1)/2 - (1,5-1)/2 = 0,75 - 0,25 = 0,5$,
$P_2 = F(3,5) - F(2,5) = 1 - (2,5 - 1)/2 = 1 - 0,75 = 0,25$.

820. La variable aleatoria X está definida por la función de distribución

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<2; \\ (x-2)^2, & \text{si} \quad 2\leqslant x\leqslant 3; \\ 1, & \text{si} \quad x>3. \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en los intervalos]1; 2,5[y]2,5; 3,5[.

Resolución. Tenemos

$$P_1 = F(2{,}5) - F(1) = (2{,}5-2)^2 - 0 = 0{,}25,$$
$$P_2 = F(3{,}5) - F(2{,}5) = 1 - (2{,}5-2)^2 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

821. La variable aleatoria X está definida por la función de distribución indicada en el problema precedente. Hallar la densidad de distribución (función diferencial de distribución) de la variable aleatoria.

Resolución. La densidad de distribución es igual a la derivada de la función de distribución, o sea, $f(x) = F'(x)$, por eso

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<2 \\ 2(x-2), & \text{si } 2\leqslant x\leqslant 3; \\ 0, & \text{si } x>3. \end{cases}$$

822. Un tirador ejecuta tres disparos contra un blanco. La probabilidad de que dé en el blanco a cada disparo es igual a 0,3. Construir la serie de distribución del número de impactos certeros.

Indicación: valerse de la fórmula de Bernoulli.

823. En una urna hay cuatro bolillas numeradas del 1 al 4. Se extraen dos bolillas. La variable aleatoria X es la suma de los números que llevan las bolillas. Construir la serie de distribución de la variable aleatoria X.

824. La variable aleatoria X está subordinada a la ley de distribución con la densidad

$$f(x)=\begin{cases} a/\sqrt{a^2-x^2}, & \text{si} \quad |x|<a; \\ 0, & \text{si} \quad |x|\geqslant a. \end{cases}$$

Se exige: 1) hallar el coeficiente a; 2) hallar la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $]a/2, a[$; 3) construir el gráfico de distribución de la densidad de la probabilidad.

825. Mostrar que la función $f(x) = 1/(x^2+\pi^2)$ es la densidad de la probabilidad de cierta variable aleatoria X y calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $]\pi, \infty[$.

826. Se da la función de la densidad de distribución de la variable aleatoria X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<0; \\ a \operatorname{sen} x, & \text{si } 0\leqslant x\leqslant\pi; \\ 0, & \text{si } x>\pi. \end{cases}$$

Determinar a y $F(x)$.

827. En una urna hay 5 bolillas blancas y 25 negras. Se extrae una bolilla. La variable aleatoria X es el número de las bolillas blancas extraídas. Construir la función de distribución $F(x)$.

§ 6. Esperanza matemática y varianza de una variable aleatoria

Se llama *esperanza matemática de una variable aleatoria discreta* a la suma de los productos de los valores de la variable aleatoria por la probabilidad de estos valores.

Si una variable aleatoria X se caracteriza por una serie finita de distribución:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

entonces la esperanza matemática $M(X)$ se determina por la fórmula

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n, \text{ o bien } M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i. \quad (1)$$

Como $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$, entonces

$$M(x)=\frac{x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n},$$

Ahora bien, $M(X)$ es la media aritmética ponderada de los valores de la variable aleatoria $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para los pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Si $n=\infty$, entonces

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i$$

(a condición de que la suma de esta serie sea finita).

El concepto de esperanza matemática se extiende también a las variables aleatorias continuas. Sea $f(x)$ la densidad de la probabilidad de una variable aleatoria X. Entonces *la esperanza matemática de la variable aleatoria continua* X se determina por la igualdad

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

(a condición de que el valor de esta integral sea finito).

En lo que se refiere a la interpretación geométrica, la esperanza matemática, tanto de una variable aleatoria continua como discreta, es igual a la abscisa del centro de gravedad del área acotada por la curva (o el polígono) de distribución y el eje de abscisas. Por eso cuando la curva (o el polígono) de distribución es simétrica respecto a cierta recta paralela al eje de ordenadas, la esperanza matemática coincide con la abscisa del punto de intersección de este eje de simetría con el eje de las abscisas.

El punto del eje Ox cuya abscisa es igual a la esperanza matemática de una magnitud aleatoria, suele llamarse *centro de distribución* de esta magnitud aleatoria.

Se denomina *varianza* de una variable aleatoria a la esperanza matemática del cuadrado de la desviación de esta variable con respecto a su esperanza matemática:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

La varianza de una magnitud aleatoria es una medida de la dispersión de sus valores alrededor de su esperanza matemática.

Si introducimos la designación $M(X) = m$, las fórmulas para calcular la varianza de la variable aleatoria discreta X se escribirán en la forma

$$\left.\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - m)^2, \\ D(X) &= \sum_{i=1} p_i (x_i - m)^2 \quad (\text{para } n = \infty), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

mientras que para una variable aleatoria continua X la fórmula tendrá el aspecto

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x)\, dx. \tag{3}$$

Para la varianza de una variable aleatoria es válida la fórmula

$$D(X) = [M(X - a)^2] - [M(X) - a]^2 \tag{4}$$

o bien

$$D(X) = [M(x - a)^2] - (m - a)^2,$$

donde a es un número arbitrario. Esta fórmula se utiliza frecuentemente para calcular la varianza de una magnitud aleatoria, ya que generalmente es más fácil determinarla por ella que por (2) y (3).

Se llama *desviación típica* (*estándar*) de una variable aleatoria a la magnitud $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$.

828. Se da la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0; \\ (1/2) \operatorname{sen} x, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 0, & \text{si} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Mostrar que $f(x)$ puede servir de densidad de probabilidad de cierta variable aleatoria X. Hallar la espranza matemática y la varianza de la variable aleatoria X.

Resolución. Tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi} = 1.$$

Además, $f(x) \geqslant 0$. Por consiguiente, $f(x)$ puede servir de densidad de probabilidad de cierta variable aleatoria. Puesto que la recta $x = \pi/2$ es el eje de sime-

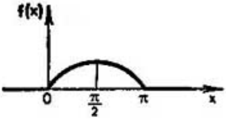

Fig. 38

tría del arco correspondiente de la curva $y = (1/2)\operatorname{sen} x$ (fig. 38), la esperanza matemática de la variable aleatoria X es igual a $\pi/2$, o sea $M(X) = \pi/2$.

Hallemos la varianza. Para esto en la fórmula (4) hacemos $a = 0$, $M(X) = \pi/2$, entonces queda sólo calcular la integral que determina $M(X^2)$; tenemos

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(\pi^2 - 4).$$

Por eso

$$D(X) = \frac{1}{2}(\pi^2 - 4) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2,$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2} \approx 0{,}69.$$

829. La variable aleatoria X se caracteriza por la serie de distribución:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Determinar la esperanza matemática y la varianza.

Resolución. Por la fórmula (1) encontramos la esperanza matemática:

$$M(X) = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}08 + 4\cdot 0{,}02 = 1{,}32.$$

Vamos a determinar la varianza con ayuda de la fórmula (4), tomando $a = 2$; de ello $M(X) - a = 1{,}32 - 2 = -0{,}68$. Construimos la tabla:

x_i	0	1	2	3	4
x_i-a	-2	-1	0	1	2
$(x_i-a)^2$	4	1	0	1	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02
$p_i(x_i-a)^2$	0,8	0,4	0	0,08	0,08

Ahora hallamos

$$M[(X-a)^2]=\sum_{i=0}^{4} p_i(x_i-a)^2=1,36$$

$$D(X)=1,36-(-0,68)^2=1,36-0,4634=0,8966;$$

$$\sigma_x=\sqrt{0,8966}=0,95.$$

830. Una urna contiene 6 bolillas blancas y 4 negras. De ella se extrae, una bolilla que luego se repone en la urna y las bolillas se mezclan. Esta operación se repite cinco veces. Tomando por variable aleatoria X el número de bollilas blancas extraídas, es necesario determinar la ley de distribución de esta magnitud, su esperanza matemática y su varianza.

831. Se la da función

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<0; \\ \lambda(4x-x^3), & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 2; \\ 0, & \text{si} \quad x>2. \end{cases}$$

¿Para qué valor de λ la función $f(x)$ puede ser tomada por densidad de probabilidad de una magnitud aleatoria X? Determinar este valor de λ, hallar la esperanza matemática y la desviación típica de la variable aleatoria respectiva X.

§ 7. Moda y mediana

Se llama *moda de una variable aleatoria discreta* X a su valor más probable.

Se llama *moda de una variable aleatoria continua* X a su valor con densidad de distribución máxima. Designamos la moda con el símbolo $\overline{M}$.

Se denomina *mediana* de una variable aleatoria continua X a su valor μ tal, para el cual es igualmente probable que la variable aleatoria resulte menor o mayor que μ, o sea,

$$P(X<\mu)=P(X>\mu)=0,5.$$

En lo que concierne a la interpretación geométrica, la moda es la abscisa de aquel punto de la curva (polígono) de distribución con ordenada máxima. La ordenada trazada en el punto con abscisa $x = \mu$ divide por la mitad el área aco-

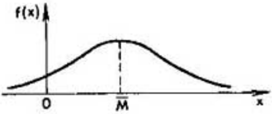

Fig. 39

tada por la curva de distribución. Si la recta $x = a$ es el eje de simetría de la curva de distribución $y = f(x)$, entonces $\overline{M} = \mu = M(X) = a$ (fig. 39).

832. Se da la densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua $f(x) = ae^{2x-x^2}$ $(a > 0)$. Hallar la moda de esta variable.

Resolución. Hallamos el máximo de la función $y = f(x)$. Para esto encontramos las derivades de primer y segundo orden:

$$f'(x) = 2a(1-x)e^{2x-x^2}, \quad f''(x) = -2ae^{2x-x^2} + 4a(1-x)^2 e^{2x-x^2}.$$

De la ecuación $f'(x) = 0$ obtenemos $x = 1$. Como $f''(1) = -2ae < 0$, entonces en $x = 1$ la función $f(x)$ presenta el máximo, o sea, $\overline{M} = 1$. No hemos determinado los valores de la constante a, puesto que el máximo de la función $f(x) = ae^{2x-x^2}$ no depende del valor numérico de a.

833. Se da la densidad de probabilidad de la variable aleatoria X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0; \\ x - x^3/4, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0, & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Hallar la mediana de esta variable aleatoria.

Resolución. Hallamos la mediana μ partiendo de la condición $P(X < \mu) = 0{,}5$. En este caso

$$P(X < \mu) = \int_0^{\mu} \left(x - \frac{1}{4}x^3\right) dx = \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^4}{16}.$$

Así, pues, llegamos a la ecuación $\mu^2/2 = \mu^4/16 = 0{,}5$, o bien $\mu^4 - 8\mu^2 + 8 = 0$, de donde $\mu = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{8}}$. Entre las cuatro raíces de esta ecuación es necesario escoger la que está comprendida entre 0 y 2. Por lo tanto, $\mu = \sqrt{4 - \sqrt{8}} \approx 1{,}09$.

834. Se da la serie de distribución de la variable aleatoria:

x_i	10	20	30	40	50	60
p_i	0,24	0,36	0,20	0,15	0,03	0,02

Hallar la moda.

835. Se da la densidad de distribución de la variable aleatoria:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<2; \\ a(x-2)(4-x), & \text{si } 2\leqslant x\leqslant 4 \\ 0, & \text{si } x>4. \end{cases}$$

Determinar el valor de a, la moda y la mediana.

§ 6. Distribución uniforme

Se dice *uniforme* a la distribución de tales variables aleatorias en las cuales todos los valores están sobre cierto segmento $[a, b]$ y tienen una densidad constante de probabilidad sobre este segmento (fig. 40). De este modo,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<a; \\ h, & \text{si } a\leqslant x\leqslant b; \\ 0, & \text{si } x>b. \end{cases}$$

Puesto que $h(b-a)=1$, entonces $h=1/(b-a)$ y, por consiguiente,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<a; \\ 1/(b-a), & \text{si } a\leqslant x\leqslant b; \\ 0, & \text{si } x>b. \end{cases}$$

836. Determinar la esperanza matemática de una variable aleatoria con distribución uniforme.

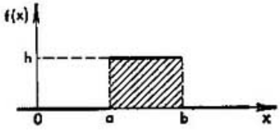

Fig. 40

Resolución. Tenemos

$$M(X)=\int_a^b xf(x)\,dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2},$$

o sea, $M(X)=(a+b)/2$ que es lo que debe ser en virtud de la simetría de distribución.

837. Calcular la dispersión y la desviación típica para una variable aleatoria con distribución uniforme.

Resolución. Utilizamos la fórmula $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ teniendo en cuenta el valor de $M(X) = (a+b)/2$, hallado en el problema precedente. Por lo tanto, queda calcular $M(X^2)$; tenemos

$$M(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{3(b-a)}\,x^3\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

De donde

$$D(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Por consiguiente

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

838. Todos los valores de una variable aleatoria distribuida uniformemente están sobre el segmento [2, 8]. Hallar la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor perteneciente al intervalo]3, 5[.

839. Los tranvías de la línea urbana dada pasan con intervalo de 5 minutos. Un pasajero se acerca a la parada del tranvía en un momento determinado. ¿Cuál es la probabilidad de que el pasajero aparezca no antes que pase un minuto después de la partida del tranvía precedente y no más tarde que dos minutos antes que salga el tranvía siguiente?

§ 9. Ley de distribución binomial. Ley de Poisson

Si la probabilidad de que se produzca un evento aleatorio en cada prueba es igual a p, entonces, como es sabido, la probabilidad de que durante n pruebas el evento se produzca m veces se determina por la fórmula de Bernoulli:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (\text{donde } q = 1 - p).$$

La ley de distribución de una variable aleatoria que puede tomar $n+1$ valor $(0, 1, \ldots, n)$, descrita por la fórmula de Bernoulli, se llama *binomial*.

La ley de distribución de una variable aleatoria X que puede tomar cualesquiera valores enteros no negativos $(0, 1, 2, \ldots, n)$, descrita por la fórmula

$$P(X=m) = \frac{a^m}{m!}\,e^{-a},$$

ha recibido el nombre de *ley de Poisson*.

La ley de Poisson es la de distribución de las probabilidades para las variables aleatorias siguientes.

a) Supongamos que sobre el intervalo $]0, N[$ del eje Ox se sitúan aleatoriamente n puntos, además, los eventos consistentes en que un punto llegue a parar a un segmento cualquiera, anteriormente fijado, de longitud constante (por ejemplo, de longitud unitaria) son equiprobables.

Si $N \to \infty$, $n \to \infty$ y $a = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{n}{N}$, entonces una variable aleatoria X, igual al número de puntos que llegan a parar al segmento prefijado de longitud unitaria (que puede tomar valores $0, 1, \ldots, m, \ldots$), se distribuye según la ley de Poisson.

b) Si n es igual al número medio de llamadas de los abonados que llegan durante una hora a la central telefónica dada, entonces el número de llamadas que llegan durante un minuto se distribuye aproximadamente por la ley de Poisson, con ello $a = n/60$.

La esperanza matemática y la dispersión de variables aleatorias distribuidas por la ley binomial y la ley de Poisson se determinan por las fórmulas siguientes:

para la ley binomial: $M(X) = np$; $D(X) = npq$;
para la ley de Poisson: $M(X) = a$; $D(X) = a$.

840. Una central telefónica automática recibe, por término medio durante una hora 300 llamadas. ¿Cuál es la probabilidad de que ella durante un minuto dado reciba exactamente dos llamadas?

Resolución. Durante un minuto la CTA recibe, por término medio, $300/60 = 5$ llamadas, o sea, $a = 5$. Se requiere hallar P_2. Utilizando la fórmula de Poisson, hallamos

$$P_2 = \frac{5^2}{2!} e^{-5} = \frac{25}{2e^5} \cong 0,09.$$

841. En un libro de 1000 páginas hay 100 erratas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una página aleatoriamente escogida haya no menos de cuatro erratas?

Resolución. La cantidad media de erratas para una página es $a = 100/1000 = 0,1$. En el caso dado conviene aplicar la fórmula de Poisson:

$$P_m = \frac{(0,1)^m}{m!} e^{-0,1}.$$

Aquí P_m es la probabilidad de que se tengan m erratas en una página.

Si $m = 0$, entonces $P_0 = e^{-0,1}$; si $m = 1$, $P_1 = 0,1 \cdot e^{-0,1}$; si $m = 2$, $P_2 = 0,005 \cdot e^{-0,1}$; si $m = 3$, $P_3 = 0,000167 \cdot e^{-0,1}$. La suma $P_0 + P_1 + P_2 + P_3$ es la probabilidad de que en una página resulte no más de tres erratas. Esta suma es igual a $1,105167 \cdot e^{-0,1}$. Entonces la probabilidad de que en una página escogida al azar haya cuatro erratas, como mínimo, es igual a

$$1 - 1,105167 \cdot e^{-0,1} = 1 - 1,105167 \cdot 0,904837 = 1 - 0,999996 = 0,000004.$$

842. Entre las semillas de centeno hay 0,4% de semillas de hierbas malas. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar 5000 semillas se descubran 5 semillas de hierbas malas?

843. Determinar la espreranza matemática y la dispersión de la frecuencia de m/n llegadas de un evento aleatorio durante n pruebas, si la probabilidad de que el suceso se produzca durante una prueba es igual a p.

844. Mostrar que la distribución binomial se convierte, pasando al límite, en distribución de Poisson si $n \to \infty$, $p \to 0$, pero $np = a$.

Indicación: valerse de la igualdad

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{(np)^m \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{m!} (1-p)^{\frac{np}{p} - m}$$

y pasar al límite.

845. Una variable aleatoria X está subordinada a la ley de distribución binomial $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$. Determinar la esperanza matemática de esta variable aleatoria.

Resolución. Tenemos

$$M(X)=\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}=\sum_{m=1}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}=np\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}C_n^m p^{m-1}q^{n-m}.$$

Pero

$$\frac{m}{n}C_n^m=\frac{m}{n}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)m}=C_{n-1}^{m-1}.$$

Por consiguiente,

$$M(X)=np\sum_{m=1}^{n}C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}=np(p+q)^{n-1},$$

o sea, $M(X)=np$.

846. Determinar la varianza de una variable aleatoria X subordinada a la ley de distribución binomial.

Resolución. Hallemos previamente la esperanza matemática de la variable aleatoria X^2:

$$M(X^2)=\sum_{m=1}^{n} m^2C_n^m p^m q^{n-m}=np\sum_{m=1}^{n} m\cdot\frac{m}{n}C_n^m p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}=$$

$$=np\sum_{m=1}^{n} mC_{n-1}^{m-1}p^{m-1}p^{(n-1)-(m-1)}=np\Big(\sum_{m=1}^{n}(m-1)\,C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}\times$$

$$\times q^{(n-1)-(m-1)}+\sum_{m=1}^{n}C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}q^{(n-1)-(m-1)}\Big).$$

La primera de las sumas entre paréntesis es la esperanza matemática de la variable aleatoria X subordinada a la ley binomial $P(X=m-1)=C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}\cdot q^{(n-1)-(m-1)}$, por eso ella es igual a $(n-1)p$ (véase el problema precedente). La segunda suma es igual a $(p+q)^{n-1}=1$.
De suerte que $M(X^2)=np(n-1)p+np$. Pero $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$, por eso;

$$D(X)=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p)=npq.$$

847. Hallar la esperanza matemática de una variable aleatoria X subordinada a la ley de Poisson $P(X=m)=\frac{a^m e^{-a}}{m!}$.

Resolución. Tenemos

$$M(X)=\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{a^m e^{-a}}{m!}=\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}=ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Pero $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}=e^a$, por consiguiente, $M(X)=a$.

848. Hallar la dispersión de una variable aleatoria X subordinada a la ley de Poisson.

Resolución. Primeramente encontramos

$$M(X^2)=\sum_{m=1}^{\infty} m^2 \frac{a^m e^{-a}}{m!}=\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!}=$$

$$=a\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{a^{m-1}e^{-a}}{(m-1)!}+ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}.$$

La primera suma es la esperanza matemática de la variable aleatoria X subordinada a la ley de Poisson y la segunda suma es igual a e^a. De aquí obtenemos $M(X^2)=a^2+a$.

Por lo tanto, $D(X)=a^2+a-a^2=a$.

849. La probabilidad de que un tirador dé en el blanco es igual a 2/3. El tirador ha efectuado 15 disparos. La variable aleatoria X es el número de impactos. Hallar la esperanza matemática y la varianza de la variable aleatoria X.

Resolución. Aquí conviene utilizar los valores de la esperanza matemática y de la varianza para la ley de distribución binomial:

$$M(X)=np=15\cdot 2/3=10,\quad D(X)=npq=15\cdot 2/3\cdot 1/3=10/3.$$

§ 10. Distribución exponencial. Función de fiabilidad

De análogo de la ley de Poisson para variables aleatorias continuas sirve la ley exponencial, cuya función de densidad de distribución es monoparamétrica y tiene la forma

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } a\geqslant 0,\end{cases}$$ donde $\lambda>0$ es un parámetro constante.

La función de distribución (función integral) de la ley exponencial será

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}.$$

Por consiguiente,

$$F(x)=\begin{cases}0. & \text{si } x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{si } x\geqslant 0.\end{cases}$$

La probabilidad de que la variable aleatoria χ tome los valores pertenecientes al intervalo (α, β) será

$$P(\alpha<\chi<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta},$$

o sea,

$$P(\alpha<\chi<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Las características numéricas de la ley exponencial de distribución es fácil obtenerlas partiendo de la definición de las mismas:

$$M[X]=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda},\quad D[X]=\int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx-(M[X])^2=$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\frac{1}{\lambda},$$

o sea,

$$M[X]=\sigma[X]=\frac{1}{\lambda}.$$

En otras palabras, la magnitud inversa del parámetro λ es la esperanza matemática y la desviación típica.

Si por T se designa una variable aleatoria que exprese la duración del funcionamiento irreprochable, por ejemplo, de un elemento cualquiera y por λ, la densidad de fallas (número medio de fallas en la unidad de tiempo), entonces se admite con frecuencia que la duración del buen funcionamiento de este elemento es una variable aleatoria que se distribuye por la ley exponencial con la función de distribución

$$F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t},\quad \lambda>0.$$

La función de distribución determina la probabilidad de fallo de un elemento durante el tiempo t.

Se llama *función de fiabilidad* $R(t)$ a la que determina la probabilidad del buen funcionamiento de un elemento durante un tiempo t: $R(t)=e^{-\lambda t}$.

849a. ¿Para qué valor de k la función $f(x)=ke^{-\lambda x}$ $(x\geqslant 0)$, $f(x)=0$, si $x<0$, será la función de densidad de la ley exponencial?

Resolución. Es sabido que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$. Entonces

$$\int_0^{\infty} ke^{-\lambda x}dx=1.$$

De ello

$$k\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)\Big]_0^{\infty}=1,\quad \frac{k}{\lambda}=1,$$

o sea,

$$k=\lambda.$$

849b. La variable aleatoria X está distribuida según la ley exponencial $f(x)=4e^{-4x}$ para $x\geqslant 0$ y $f(x)=0$ para $x<0$. Hallar la probabilidad de que, como resultado de pruebas, X toma valores pertenecientes al intervalo (0,2; 0,5).

Resolución. Utilizamos la fórmula

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta},$$

$$P(0{,}2<X<0{,}5)=e^{-4\cdot 0{,}2}-e^{-4\cdot 0{,}5}=e^{-0{,}8}-e^{-2}$$

Hallemos los valores de las funciones exponenciales en la tabla VII (pág. 454); $e^{-0,8} = 0,4493$, $e^{-2} = 0,1353$. Por consiguiente,

$$P(0,2 < X < 0,5) = 0,4493 - 0,1353 = 0,314 \approx 31\%.$$

849c. El tiempo de descomposición t de un tren con ayuda de la albardilla es una variable aleatoria subordinada a la ley exponencial. Designemos por $\lambda = 5$ la cantidad media de trenes que la albardilla puede descomponer en 1 hora. Determinar la probabilidad de que el tiempo de descomposición del tren sea: a) menor de 30 min, b) mayor de 6 min y no menos de 24 min.

Resolución. Partiendo de la función de distribución de la ley exponencial $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, obtendremos:

a) la probabilidad de que la descomposición del tren ocupe menos de 30 min $= 0,5$ h será

$$F(0,5) = P(T < 0,5) = 1 - e^{-5\cdot 0,5} = 1 - e^{-2,5} = 1 - 0,082 =$$
$$= 0,918 \text{ para } \bar{t} = \frac{1}{\lambda}\, 0,2 \text{ h};$$

b) la probabilidad de que el tiempo de descomposición esté entre 6 y 24 min será

$$P(0,1 < T < 0,4) = e^{-5\cdot 0,1} - e^{-5\cdot 0,4} = e^{-0,5} - e^{-2} =$$
$$= 0,6065 - 0,1353 = 0,4712.$$

849d. La probabilidad de buen funcionamiento de un elemento se distribuye según la ley exponencial $f(t) = 0,02\, e^{-0,02t}$ $(t > 0)$. Hallar la probabilidad de que el elemento funciona sin fallas 50 h.

Resolución. La probabilidad de que el elemento funcione bien durante 50 h se determina por la función de fiabilidad $R(t) = e^{-\lambda t}$, o sea, $R(50) = e^{-0,02\cdot 50} = e^{-1} = 0,3679$.

849e. La variable aleatoria continua X está distribuida por la ley exponencial $f(x) = 2,5\; e^{-2,5x}$ si $x \geqslant 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$. Hallar la esperanza matemática, la varianza y la desviación típica.

849f. La variable aleatoria continua X está distribuida por la ley exponencial con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0; \\ 7e^{-7x}, & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Hallar la probabilidad de que, como resultado de las pruebas, X tome los valores pertenecientes al intervalo $(0,15;\ 0,6)$.

849g. Hallar la esperanza matemática de la distribución exponencial definida por la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0; \\ 1 - e^{-0,25x}, & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

849h. El tiempo de descomposión t de un tren con ayuda de la albardilla es una variable aleatoria subordinada a la ley exponencial. Designemos por $\lambda = 5$ la cantidad media de trenes que la albardilla puede descomponer durante una hora. Determinar la probabilidad de que el tiempo de descomposición del tren sea mayor de 0,3 h.

849i. La duración del buen funcionamiento de un elemento tiene la distribución exponencial $F(x)=1-e^{-0,02\,t}$, $t>0$. Hallar la probabilidad de que durante el tiempo $t=24$ h:
a) el elemento falle, b) el elemento no falle.

849j. La probabilidad de buen funcionamiento de un televisor está distribuida por la ley exponencial $f(t)=0,002\, e^{-0,02\,t}$, $t>0$. Hallar la probabilidad de que el televisor funcione bien durante 1000 horas.

§ 11. Ley de distribución normal. Función de Laplace

La ley de distribución normal se caracteriza por la densidad

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}.$$

No es difícil ver que la función $f(x)$ satisface dos condiciones que debe reunir la densidad de distribución: 1) $f(x)>0$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

La curva $y=f(x)$ tiene la forma representada en la fig. 41. Ella es simétrica con respecto a la recta $x=m$, la ordenada máxima de la curva (para $x=$

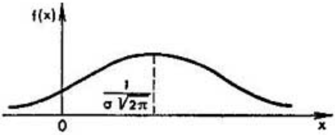

Fig. 41

$=m$) es igual a $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ y el eje de abscisas sirve de asíntota de esta curva. Puesto que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=m$, el parámetro m es la esperanza matemática de la variable aleatoria X. Por otro lado, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 f(x)\,dx=\sigma^2$, de donde $D(x)=\sigma^2$, o sea, σ es la desviación típica de la variable X.

Introduzcamos la designación

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt.$$

La función $\Phi(x)$ se llama *función de Laplace* o *integral de probabilidades*. Esta función se denomina también *función de errores* y se designa por erf x. A veces se utilizan también otras formas de la función de Laplace, por ejemplo, $\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ (*función normada de Laplace*) que está enlazada con la función de errores $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ por la relación $\overline{\Phi}(x) = 0,5\ \Phi(x/\sqrt{2})$, o bien $\overline{\Phi}(x\sqrt{2}) = 0,5\ \Phi(x)$.

Para calcular los valores de la función de Laplace se utiliza una tabla especial (véase la tabla II en la pág. 449).

La probabilidad de que una variable aleatoria X subordinada a la ley normal vaya a parar al segmento $]a, b[$ se determina por los valores de la función de Laplace, valiéndose de la fórmula

$$P(a < X < b) = 0,5\left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

Señalemos las propiedades siguientes de la función de Laplace.

1ª. $\Phi(0) = 0$, ya que $\int\limits_0^0 e^{-t^2}dt = 0$;

2ª. $\Phi(+\infty) = 1$, puesto que $\Phi(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$;

3ª. $\Phi(x)$ es una función impar.

Es válida también la fórmula

$$P(|X-m| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{2}}\right).$$

Con ayuda de esta fórmula se puede hallar la probabilidad de que una variable aleatoria subordinada a la ley normal vaya a parar a un intervalo simétrico con respecto al punto m.

850. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley normal con esperanza matemática $m = 40$ y varianza $D = 200$. Calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor perteneciente al intervalo $]30, 80[$.

Resolución. Aquí $a = 30$, $b = 80$, $m = 40$, $\sigma = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$; valiéndose de la tabla II en la pág 449, hallamos

$$P(30 < X < 80) = 0,5\left[\Phi\left(\frac{80-40}{10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{30-40}{10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)\right] =$$

$$= 0,5\,[\Phi(2) + \Phi(0,5)] = 0,5\,[0,995 + 0,521] = 0,758.$$

851. Se considera que la desviación de la longitud de las piezas fabricadas respecto al estándar es una variable aleatoria distribuida por la ley normal. Si la longitud estándar es igual a $m = 40$ cm y la desviación típica es igual a $\sigma = 0,4$ cm, entonces ¿que precisión de la longitud del artículo se puede garantizar con una probabilidad de 0,8?

Resolución. Se exige hallar un número positivo ε tal que $P(|X-40| < \varepsilon) = 0,8$. Puesto que

$$P(|X-40|<\varepsilon)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,4\sqrt{2}}\right)=\Phi(1,77\varepsilon),$$

el problema se reduce a la solución de la desigualdad $\Phi(1,77\varepsilon) > 0,8$. Con ayuda de la tabla II determinamos que $1,77\varepsilon > 0,91$. Queda por hallar el valor mínimo de ε que satisfaga esta desigualdad, de donde $\varepsilon = 0,52$.

852. El tiro se ejecuta desde el punto O a lo largo de la recta Ox. El alcance medio de vuelo del proyectil es igual a m. Suponiendo que el alcance de vuelo X está distribuido por la ley normal, con disviación típica $\sigma = 80$ m, hallar qué porcentaje de proyectiles disparados ofrecerá un tiro largo de 120 a 160 m.

853. Una variable aleatoria X está subordinada a la ley normal, con esperanza matemática m y desviación típica σ. Calcular con una precisión de 0,01 las probabilidades de que X tome valores pertenecientes a los intervalos $]m, m+\sigma[$, $]m+\sigma, m+2\sigma[$, $]m+2\sigma, m+3\sigma[$.

854. Mostrar que la probabilidad de que una variable aleatoria X, con la esperanza matemática m y desviación típica σ, subordinada a la ley normal, tome un valor perteneciente al intervalo $]a, b[$ que no cambiará si cada uno de los números a, b, m y σ aumenta λ veces ($\lambda > 0$).

854a. La masa de un vagón es una variable aleatoria distribuida según la ley exponencial con esperanza matemática de 65 t y desviación típica $\sigma = 9$ t. Hallar la probabilidad de que el tren de turno tenga una masa que no exceda de 70 t, pero no sea menos de 60 t.

854b. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley normal con esperanza matemática $a = 6$ y desviación típica $\sigma = 1$. ¿Cuál es la probabilidad de que, como resultado de pruebas, X tome un valor perteneciente al intervalo $[4, 7]$.

854c. El taller fabrica varillas cuya longitud l es una variable aleatoria distribuida según la ley normal con esperanza matemática y desviación típica iguales a 25 y 0,1 cm, respectivamente. Hallar la probabilidad de que la desviación de la longitud de la varilla en uno u otro sentido a partir de la esperanza matemática no rebase los 0,25 cm.

854d. Al pesar un cuerpo se ha obtenido un peso medio $a = 12,3$ N; la desviación típica del peso distribuido según la ley normal $\sigma = 0,03$ N. ¿Qué desviación del peso del cuerpo a partir del peso medio se puede garantizar con una probabilidad de 90%?

854e. El tren se compone de 100 vagones. La masa de cada vagón es una variable aleatoria distribuida según la ley normal con esperanza matemática $a = 65$ t y desviación típica $\sigma = 0,9$ t. La locomotora puede tirar un tren cuya masa sea de 6600 t, como máximo, en otro caso es necesario enganchar una segunda locomotora. Hallar la probabilidad de que no haga falta enganchar la segunda locomotora.

854f. El diámetro de una pieza que se fabrica en un torno es una variable aleatoria distribuida según la ley normal con esperanza matemática $a = 25$ cm y desviación típica $\sigma = 0,4$ cm. Hallar la probabilidad de que dos piezas tomadas al azar tengan una desviación, en valor absoluto, con respecto a la esperanza matemática, que no exceda de 0,16 cm.

Resolución. Es sabido que la probabilidad de que una pieza, tomada al azar, tenga la desviación δ en uno u otro sentido con respecto a la esperanza matemática, es igual a

$$P(a-\delta < X < a+\delta) = P(|X-a| < \delta) = 2\overline{\Phi}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

De aquí

$$P(|X-25| < 0,16) = 2\overline{\Phi}\left(\frac{0,16}{0,4}\right) = 2\overline{\Phi}(0,4) = 2\cdot 0,1554 = 0,3108.$$

Entonces para dos piezas tomadas al azar la probabilidad buscada será

$$0,3108^2 \approx 0,096.$$

854g. La variable aleatoria X está subordinada a la ley normal con esperanza matemática $a = 1,6$ y desviación típica $\sigma = 1$. Calcular la probabilidad de que en cuatro pruebas la variable aleatoria toma, al menos una vez, un valor perteneciente al intervalo [1, 2].

Resolución. La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor perteneciente al intervalo [1, 2] la calculamos por la fórmula

$$P(1 < X < 2) = \overline{\Phi}\,\frac{2-1,6}{1} - \overline{\Phi}\,\frac{1-1,6}{1} = \overline{\Phi}(0,4) + \overline{\Phi}(0,6) =$$
$$= 0,1554 + 0,2257 = 0,3811.$$

Entonces la probabilidad de que la variable aleatoria no caiga en el intervalo [1, 2] en una prueba, es igual a $1 - 0,3811 = 0,6189$, y en cuatro pruebas será $0,6189^4 = 0,1467$. Por lo tanto, la probabilidad buscada será $1 - 0,1467 = 0,8533$.

854h. El diámetro de una pieza fabricada es una variable aleatoria subordinada a la ley normal con esperanza matemática de 5 cm y desviación típica de 0,9 cm. Hallar: a) la probabilidad de que una pieza tomada al azar tenga un diámetro dentro de los límites de 4 a 7 cm, b) la probabilidad de que el tamaño del diámetro de una pieza tomada al azar se distingue de la esperanza matemática en no más de 2 cm; ¿en qué límites conviene esperar el tamaño del diámetro de la pieza para que la probabilidad de que el tamaño indicado no salga fuera de estos límites sea igual a 0,95.

Resolución. a) $P(4<d<7)=\overline{\Phi}\left(\frac{7-5}{0,9}\right)-\overline{\Phi}\left(\frac{4-5}{0,9}\right)=\overline{\Phi}(2,22)+$ $+\overline{\Phi}(1,11)=0,4867+0,3664=0,8531$; b) $P(|d-5|<2)=2\overline{\Phi}\left(\frac{2}{0,9}\right)=2\overline{\Phi}(2,22)=$ $=0,9734$; c) $P(|d-5|<\delta)=2\overline{\Phi}\left(\frac{\delta}{0,9}\right)=0,95$, $\overline{\Phi}\left(\frac{\delta}{0,9}\right)=0,475$.

Por la tabla de valores de la función normada de Laplace tenemos

$$\frac{\delta}{0,9}=1,96, \quad \delta=1,76.$$

854i. La variable aleatoria X está subordinada a la ley normal con esperanza matemática igual a 2,2 y desviación típica igual a 0,5. ¿Quál es la probabilidad de que en la primera prueba la variable aleatoria tome un valor perteneciente al intervalo [3, 4] y en la segunda prueba, un valor perteneciente al intervalo [1, 2]?

854j. La variable aleatoria X está subordinada a la ley normal con esperanza matemática igual a 65 y desviación típica igual a 4,1. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera prueba la variable aleatoria tome un valor perteneciente al intervalo [55, 60] y en la segunda prueba, un valor perteneciente al intervalo [70, 75]?

854k. La variable aleatoria X está distribuida normalmente con esperanza matemática $a = 10$. ¿Cuál debe ser la desviación típica σ de la variable aleatoria para que con una probabilidad igual a 0,8 la desviación, en valor absoluto, a partir de la esperanza matemática no exceda de 0,2.

§ 1. Momentos, asimetría y exceso de una variable aleatoria

Se llama *momento inicial* de s-ésimo orden de una variable aleatoria discreta X definida por la serie de distribución:

x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

a la suma de la serie

$$\alpha_s=x_1^s p_1+x_2^s p_2+\ldots+x_n^s p_n+\ldots .$$

Para una variable aleatoria continua X con densidad de distribución $f(x)$ se denomina momento inicial de s-ésimo orden a la integral $\alpha_s=$ $=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\,dx$.

No es difícil ver que el momento inicial de primer orden de una variable aleatoria X es igual a la esperanza matemática de esta magnitud aleatoria: $\alpha_1=M(X)$.

Se llama *momento central* de s-ésimo orden de una variable aleatoria X a la suma de la serie $\mu_s = (x_1 - m_x)^s \cdot p_1 + (x_2 - m_x)^s \cdot p_2 + \ldots + (x_n - m_x)^s \times \times p_n + \ldots$, donde m_x es la esperanza matemática de la variable aleatoria X.

Para una variable aleatoria continua se llama momento central de s-ésimo orden a la integral $\mu_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x)\, dx$.

Para una variable aleatoria cualquiera el momento central de primer orden es igual a cero, o sea, $\mu_1 = 0$.

El momento central de segundo orden de una variable aleatoria cualquiera es igual a la dispersión de la variable aleatoria, o sea, $\mu_2 = D(X)$.

Los momentos centrales e iniciales de primero, segundo, tercero y cuarto orden están vinculados por las relaciones:

$$\mu_1 = 0, \qquad \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$
$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3, \qquad \mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4.$$

Si la distribución es simétrica respecto a la esperanza matemática, entonces todos los momentos centrales de orden impar son iguales a cero, o sea, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \ldots = 0$.

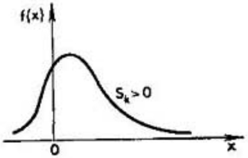

Fig. 42

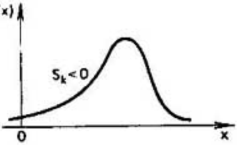

Fig. 43

La relación entre el momento central de tercer orden y el cubo de la desviación típica se llama *asimetría*: $S_k = \mu_3/\sigma_x^3$.

La curva de distribución ha recibido el nombre de *histograma*.

Si la distribución es simétrica con respecto a la esperanza matemática, entonces $S_k = 0$

En las figs. 42 y 43 se muestran los histogramas para $S_k > 0$ y $S_k < 0$.

Se llama *exceso* de una variable aleatoria X a la magnitud E_x determinada por la igualdad $E_x = \mu_4/\sigma_x^4 - 3$. Para la ley de distribución normal $E_x = 0$.

Las curvas de crestas más agudas en comparación con la normal (la llamada *curva de Gauss*) poseen un exceso positivo; para las curvas de crestas más planas $E_x < 0$ (fig. 44).

855. Se da la serie de distribución de la variable aleatoria X:

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Hallar los momentos iniciales y centrales de los primeros cuatro órdenes de esta magnitud aleatoria, determinar también la asimetría y el exceso.

Resolución. El momento inicial de primer orden

$$\alpha_1 = 1\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}4 + 5\cdot 0{,}2 + 7\cdot 0{,}2 + 9\cdot 0{,}1 = 4{,}6.$$

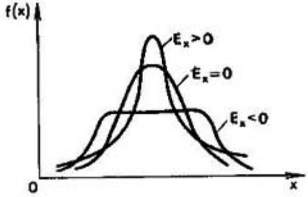

Fig. 44

El momento inicial de primer orden es la esperanza matemática, por eso $M(X) = 4{,}6$.

Hallamos el momento inicial de segundo orden:

$$\alpha_2 = 1\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}4 + 25\cdot 0{,}2 + 49\cdot 0{,}2 + 81\cdot 0{,}1 = 26{,}6.$$

El momento inicial de tercer orden es

$$\alpha_3 = 1\cdot 0{,}1 + 27\cdot 0{,}4 + 125\cdot 0{,}2 + 343\cdot 0{,}2 + 729\cdot 0{,}1 = 177{,}4.$$

El momento inicial de cuarto orden

$$\alpha_4 = 1\cdot 0{,}1 + 81\cdot 0{,}4 + 625\cdot 0{,}2 + 2401\cdot 0{,}2 + 6561\cdot 0{,}1 = 1293{,}8.$$

Determinamos ahora los momentos centrales. Es sabido que $\mu_1 = 0$. El momento central de segundo orden se encuentra por la fórmula

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 26{,}6 - 4{,}6^2 = 26{,}6 - 21{,}16 = 5{,}44.$$

Este momento central es la dispersión de la variable aleatoria, o sea, $D(X) = 5{,}44$.

De aquí es fácil determinar la desviación típica:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5{,}44} = 2{,}33.$$

El momento central de tercer orden se hallará por la fórmula

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = 177{,}4 - 3\cdot 4{,}6\cdot 26{,}6 + 2\cdot 4{,}6^3 =$$
$$= 177{,}4 - 367{,}08 + 194{,}672 = 4{,}992.$$

Ahora no es difícil determinar la asimetría:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\delta_x^3} = \frac{4{,}992}{5{,}44\cdot 2{,}33} = \frac{4{,}992}{12{,}675} = 0{,}394.$$

Para el momento central de cuarto orden utilizamos la fórmula

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 = 1293{,}8 - 4\cdot 4{,}6\cdot 177{,}4 + 6\cdot 4{,}6^2\cdot 26{,}6 -$$
$$- 3\cdot 4{,}6^4 = 1293{,}8 - 3264{,}16 + 3377{,}136 - 1343{,}227 = 64{,}55.$$

Ahora se puede encontrar el exceso:

$$E_x=\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3=\frac{64,55}{5,44^2}-3=\frac{64,55}{29,59}-3=2,18-3=-0,82.$$

856. Se da la función

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<0; \\ ax^2, & \text{si} \quad 0\leqslant x<1; \\ a(2-x)^2, & \text{si} \quad 1\leqslant x<2; \\ 0, & \text{si} \quad x\geqslant 2 \end{cases}$$

(fig. 45). ¿Para qué valor de a la función $f(x)$ es la densidad de distri-

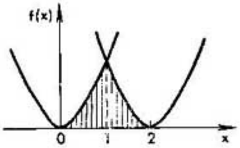

Fig. 45

bución de la variable aleatoria X? Determinar los momentos iniciales y centrales de primeros cuatro órdenes, la asimetría y el exceso.

Resolución. Para hallar a tenemos la ecuación

$$a\int_0^1 x^2dx+a\int_1^2 (2-x)^2\,dx=1,$$

de donde

$$a\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-a\cdot\frac{(2-x)^3}{3}\Big|_0^2=1;\qquad \frac{a}{3}+\frac{a}{3}=1,\quad \text{o sea,}\quad a=\frac{3}{2}.$$

Hallamos los momentos iniciales:

$$\alpha_1=\frac{3}{2}\int_0^1 x^3dx+\frac{3}{2}\int_1^2 x(2-x)^2\,dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\left(6-\frac{28}{3}+\frac{15}{4}\right)=1;$$

$$\alpha_2=\frac{3}{2}\int_0^1 x^4dx+\frac{3}{2}\int_1^2 x^2(2-x)^2\,dx=$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{2}\left[\frac{4x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right]_1^2=\frac{3}{10}+14-\frac{45}{2}+\frac{93}{10}=1,1;$$

$$\alpha_3=\frac{3}{2}\int_0^1 x^5dx+\frac{3}{2}\int_1^2 x^3(2-x)^2\,dx=$$

$$=\frac{3}{12}+\frac{3}{2}\left[x^4-\frac{4}{5}x^5+\frac{x^6}{6}\right]_1^2=\frac{1}{4}+\frac{45}{2}-\frac{186}{5}+\frac{63}{4}=1,3;$$

$$\alpha_4=\frac{3}{2}\int_0^1 x^6 dx+\frac{3}{2}\int_0^2 x^4(2-x)^2\,dx=$$

$$=\frac{3}{14}+\frac{3}{2}\left[\frac{4x^5}{5}-\frac{2x^6}{3}+\frac{x^7}{7}\right]_1^2=\frac{3}{14}+\frac{186}{5}-63+\frac{381}{14}=1\frac{22}{35}.$$

Hallamos los momentos centrales:

$$\mu_1=0;$$
$$\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2=1,1-1=0,1;$$
$$\mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3=1,3-3\cdot 1,1+2=0$$

(en efecto, la curva tiene un eje de simetría vertical);

$$\mu_4=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\alpha_2-3\alpha_1^4=1\frac{22}{35}-4\cdot 1,3+6\cdot 1,1-3=\frac{1}{35}.$$

De aquí obtenemos:

$$D(X)=\mu_2=0,1 \text{ (varianza)};$$
$$\delta_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,1}=0,316 \text{ (desviación típica)}.$$

Encontramos la asimetría: $S_k=\mu_3/\sigma_x^3=0$.

Hallamos el exceso: $E_x=\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3=\frac{1/35}{0,01}-3=-\frac{1}{7}$.

857. Se da la serie de distribución de la variable aleatoria:

x_i	2	4	6	8
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

Hallar los momentos iniciales y centrales de los primeros cuatro órdenes de esta variable aleatoria, determinar también la asimetría y el exceso.

858. La densidad de distribución de la variable aleatoria X está definida del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x<0;\\ x, & \text{si } 0\leqslant x<1;\\ 2-x, & \text{si } 1\leqslant x<2;\\ 0, & \text{si } x\geqslant 2.\end{cases}$$

Hallar los momentos iniciales y centrales de los primeros cuatro órdenes, la asimetría y el exceso.

859. Una variable aleatoria X está subordinada a la ley con densidad de distribución $f(x)=\lambda e^{-x}$. Determinar el valor de λ y el exceso de la variable aleatoria X.

§ 13. Ley de los grandes números

1. Teorema de Chébishev. Se dice que una variable aleatoria X converge en probabilidad hacia a si para un n suficientemente grande se cumple la desigualdad

$$P(|X_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta,$$

donde ε es un número positivo pequeño arbitrario y el valor de δ depende de la elección de ε y n. Ateniéndose a los términos usados en la definición dada, el teorema de Chébishev puede ser enunciado del modo siguiente: para un número suficientemente grande de pruebas independientes la media aritmética de valores observados de una variable aleatoria converge en probabilidad hacia su esperanza matemática, o sea,

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n - M(X)\right| < \varepsilon\right) > 1-\delta.$$

En esta desigualdad se puede tomar $0 < \delta < \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}$, donde $D(X)$ es la varianza de la variable aleatoria X.

El teorema de Chébishev es una de aquellas leyes de los grandes números que sirven de base para todas las aplicaciones prácticas de la teoría de las probabilidades.

2. Teorema de Bernoulli. El teorema de Ja. Bernoulli es otra ley, más simple, de los grandes números (que ha sido descubierta antes que las demás).

El *teorema de Bernoulli* enuncia que *para un aumento ilimitado del número de pruebas la frecuencia de un suceso aleatorio converge en probabilidad hacia la probabilidad del evento*, o sea,

$$P\left(\left|\frac{M}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1-\delta$$

$\left(\text{además se puede tomar que } 0 < \delta < \frac{pq}{n\varepsilon^2}\right)$, si la probabilidad del evento no cambia de una prueba a otra y es igual a p $(q = 1 - p)$.

860. Una moneda se arroja 1000 veces. Evaluar superiormente la probabilidad de que la frecuencia de aparición de la cara se desvíe de la probabilidad de su aparición menos que en 0,1.

Resolución. Aquí $n = 1000$, $p = q = 1/2$, $\varepsilon = 0{,}1$. Utilizando la desigualdad (1), obtenemos

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}1\right) > 1 - \frac{1/2 \cdot 1/2}{1000 \cdot 0{,}01} = \frac{39}{40}.$$

Como la desigualdad $\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}1$ es equivalente a la desigualdad doble $4000 < m < 600$, se puede decir que la probabilidad de que el número de salidas de la cara se encuentre en el intervalo $]400, 600[$ es más de 39/40.

861. En una urna hay 1000 bolillas blancas y 2000 negras. Se han sacado (con reposición) 3000 bolillas. Estimar superiormente la probabilidad de que el número m de bolillas blancas extraídas satisfaga la desigualdad doble $80 < m < 120$.

Resolución. La desigualdad doble dada se puede escribir en la forma

$$-20 < m - 100 < 20, \text{ o bien} -\frac{1}{15} < \frac{m}{300} - \frac{1}{3} < \frac{1}{15}.$$

De suerte que se requiere evaluar la probabilidad de la desigualdad $\left|\frac{m}{300} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{15}$; por consiguiente, $\varepsilon = \frac{1}{15}$ y

$$P\left(\left|\frac{m}{300} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{15}\right) > 1 - \frac{1/3 \cdot 2/3}{300 \cdot 1/225} = \frac{5}{6}$$

862. Supongamos que como resultado de 100 pruebas independientes han sido determinados los valores de la variable aleatoria X: $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$. Sea la esperanza matemática $M(X) = 10$ y la varianza $D(X) = 1$. Estimar superiormente la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media aritmética de los valores observados de la variable aleatoria $\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)/100$ y la esperanza matemática sea menor que 1/2.

Resolución. Valgámonos de la desigualdad

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\Big/ n - M(X)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}.$$

Haciendo $n = 100$, $M(X) = 10$, $D(X) = 1$, $\varepsilon = 1/2$, obtenemos

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)\Big/ 100 - 10\right| < \frac{1}{2}\right) > 1 - \frac{1}{100 \cdot (1/4)} = \frac{24}{25}.$$

Por lo tanto, la probabilidad buscada es mayor que 0,96.

863. En cada una de dos urnas hay 10 bolillas, numeradas del 1 al 10. La prueba consiste en sacar de cada urna una bolilla con reposición. La variable aleatoria X es la suma de los números que llevan las bolillas extraídas de dos urnas. Han sido realizadas 100 pruebas. Evaluar superiormente la probabilidad de que la suma $\sum_{i=1}^{100} x_i$ tome un valor perteneciente al intervalo $]800, 1400[$.

Resolución. Determinamos la ley de distribución de la variable aleatoria X. Esta magnitud aleatoria (la suma de los números que llevan las bolillas extraídas de dos urnas) puede tomar valores: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; ...; $x_{19} = 20$.

Hallamos la probabilidad de que X tome el valor $x_k = k + 1$. Si $k \leqslant 10$, entonces la suma de los números que llevan las bolillas sacadas puede ser igual a $k + 1$ en los k casos equivalentes siguientes:

la primera bolilla está marcada con el número 1; la segunda, con k;

la primera bolilla está marcada con el número 2; la segunda, con $k - 1$;

. . . .

la primera bolilla está marcada con el número k, la segunda con 1.

Como la probabilidad de cada una de estas combinaciones es igual a $(1/10) \times \times (1/10) = 1/100$, entonces la probabilidad p_k de que en cada par de bolillas se obtenga la suma de los números igual a $k + 1$ (si $k \leqslant 10$) es de $k/100$. De suerte que $p_k = k/100$ (si $k \leqslant 10$).

Si $k > 10$, la suma de los números que llevan dos bolillas extraídas puede ser igual a $k + 1$ en los casos equiposibles siguientes (cuya cantidad es igual a $20 - k$):

la primera bolilla está marcada con el número $k-9$; la segunda, con el 10;

la primera bolilla está marcada con el número $k-8$; la segunda, con el 9;

. . . .

la primera bolilla está marcada con el número 10; la segunda, con el $k-9$.

Puesto que la probabilidad de cada una de estas combinaciones es, como antes, igual a 1/100, entonces para $k > 10$ tenemos $p_k = (20 - k)/100$.

Para determinar $M(X)$ y $D(X)$ confeccionamos la tabla:

k	x_k	p_k	$p_k x_k$	$x_k - M(x)$	$[x_k - M(X)]^2$	$p_k [x_k - M(X)]^2$
1	2	0,01	0,02	−9	81	0,81
2	3	0,02	0,06	−8	64	1,28
3	4	0,03	0,12	−7	49	1,47
4	5	0,04	0,20	−6	36	1,44
5	6	0,05	0,30	−5	25	1,25
6	7	0,06	0,42	−4	16	0,96
7	8	0,07	0,56	−3	9	0,63
8	9	0,08	0,72	−2	4	0,32
9	10	0,09	0,90	−1	1	0,09
10	11	0,10	1,10	0	0	0
11	12	0,09	1,08	1	1	0,09
12	13	0,08	1,04	2	4	0,32
13	14	0,07	0,98	3	9	0,63
14	15	0,06	0,90	4	16	0,96
15	16	0,05	0,80	5	25	1,25
16	17	0,04	0,68	6	36	1,44
17	18	0,03	0,54	7	49	1,47
18	19	0,02	0,38	8	64	1,28
19	20	0,01	0,20	9	81	0,81
$\sum$		1,00	11,0	—	—	16,50

De este modo,

$$M(X) \sum_{k=1}^{19} p_k x_k = 11, \quad D(X) = 16,5.$$

Es evidente que

$$\left(800 < \sum_{i=1}^{100} x_i < 1400\right) \Leftrightarrow \left(-300 < \sum_{i=1}^{100} x_i - 1100 < 300\right) \Leftrightarrow$$

$$-3 < \left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)/100 - 11 < 3 \Leftrightarrow \left|\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)/100 - 11\right| < 3.$$

Así, pues, $\varepsilon=3$. Por consiguiente,

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)\Big/100-11\right|<3\right)>1-\frac{16{,}5}{900}\cong 0{,}982.$$

864. Un dado de seis caras se lanza 10 000 veces. Estimar la probabilidad de que la frecuencia de salida de seis puntos se desvíe de la probabilidad de salida del mismo número de puntos menos que en 0,01.

865. La urna contiene 100 bolillas blancas y 100 negras. Se han sacado con reposición 50 bolillas. Evaluar superiormente la probabilidad de que la cantidad de bolillas blancas entre el número de las sacadas satisfaga la desigualdad doble $15<m<35$.

866. Como resultado de 200 pruebas independientes han sido hallados los valores de la variable aleatoria $x_1, x_2, \ldots, x_{200}$, además $M(X)=D(X)=2$. Estimar superiormente la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media aritmética de valores de la variable aleatoria $\left(\sum_{i=1}^{200} x_i\right)/200$ y la esperanza matemática sea menor que 1/5.

§ 14. Teorema de Moivre-Laplace

Si se realizan n pruebas, en cada una de las cuales la probabilidad de que se produzca el evento A es igual a p, entonces la frecuencia m/n de producciones del evento es una variable aleatoria distribuida por la ley binomial; la esperanza matemática y la varianza de esta variable son iguales a p y $\sqrt{pq/n}$, respectivamente. La variable aleatoria $\tau_n=\dfrac{m/n-p}{\sqrt{pq/n}}$ con esperanza matemática igual a cero y varianza unitaria, ha recibido el nombre de frecuencia *normada* del suceso aleatorio (su distribución es también binomial).

El teorema de Moivre-Laplace enuncia que para un crecimiento ilimitado del número de n pruebas la ley binomial de distribución de la frecuencia normada se convierte, pasando al límite, en distribución normal con la misma esperanza matemática (iqual a 0) y la misma varianza (igual a 1). En virtud de esto, cuando hay grandes valores de n, para las probabilidades de las desigualdades a las cuales debe satisfacer la frecuencia (o el número de salidas) del evento, se puede utilizar una estimación aproximada con ayuda de la integral de probabilidades (función de Laplace), es decir son válidas las fórmulas aproximadas siguientes:

$$P\left(a<\frac{m/n-p}{\sqrt{pq/n}}<b\right)=P\left(a<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<b\right)\approx$$
$$\approx\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

867. ¿Cuál es la probabilidad de que durante n pruebas el evento A se produzca de α a β veces? La probabilidad de producirse el evento A es igual a p.

Resolución. Es evidente que

$$\left(a<\frac{x-np}{\sqrt{npq}}<b\right) \Leftrightarrow (np+a\sqrt{npq}<x<np+b\sqrt{npq}).$$

Tomamos $np+a\sqrt{npq}=\alpha$, $np+b\sqrt{npq}=\beta$. De aquí, $a=(\alpha-pn)/\sqrt{npq}$, $b=(\beta-np)/\sqrt{npq}$. Aplicando el teorema de Moivre-Laplace, obtenemos

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-np}{\sqrt{2npq}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-np}{\sqrt{2npq}}\right)\right].$$

868. La probabilidad del evento A para cada prueba es igual a 0,7. ¿Cuántas veces es suficiente repetir la prueba para que con una probabilidad de 0,9 se pueda esperar que la frecuencia de producción del evento A se desviará de la probabilidad no más que en 0,05?

Resolución. De la condición dada resulta que $\left|\frac{X}{n}-0{,}7\right|<0{,}05$. Por lo tanto, $0{,}65\,n<X<0{,}75\,n$. En la fórmula obtenida durante la resolución del problema 867 pongamos $\alpha=0{,}65\,n$, $\beta=0{,}75\,n$. Entonces

$$P(0{,}65\,n<X<0{,}75\,n)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{0{,}75\,n-0{,}7\,n}{\sqrt{2n\,(1/2)\cdot(1/2)}}\right)-\Phi\left(\frac{0{,}65\,n-0{,}7\,n}{\sqrt{2n\,(1/2)\cdot(1/2)}}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\sqrt{2n}}{20}\right).$$

De la ecuación $\Phi(\sqrt{2n}/20)=0{,}9$, utilizando la tabla II en la pág. 449, hallamos $\sqrt{2n}/20=1{,}17$, o sea, $n=273$.

869. ¿Cuál es la probabilidad de que efectuados 100 lanzamientos de la moneda la cara salga de 40 a 60 veces?

Indicación: aprovechar el resultado de resolución del problema 867 para $\alpha=40$, $\beta=60$, $n=100$, $p=q=1/2$.

870. En la urna hay 80 bolillas blancas y 20 negras. ¿Cuántas bolillas es necesario sacar (con devolución) de la urna para que con una probabilidad de 0,95 se pueda esperar que la frecuencia de salida de una bolilla blanca se desviará de la probabilidad menos que en 0,1?

§ 15. Sistemas de variables aleatorias

Con frecuencia el resultado de una prueba no se describe por una sola variable aleatoria X sino por varias magnitudes: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. En este caso se suele decir que las variables aleatorias indicadas forman el sistema $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

El sistema constituido por dos variables aleatorias (X, Y) se puede representar por un punto aleatorio sobre el plano.

El evento consistente en que el punto aleatorio $(X; Y)$ toma un valor perteneciente al campo D suele designarse en la forma $(X; Y)\subset D$.

La ley de distribución de un sistema de dos variables aleatorias discretas puede estar definida con ayuda de la tabla

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}

donde $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} es la probabilidad del evento consistente en el cumplimiento simultáneo de las desigualdades $X = x_i$, $Y = y_j$. Con ello $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. La tabla puede contener un conjunto infinito de filas y columnas.

La ley de distribución de un sistema de variables aleatorias continuas (X, Y) vamos a definirla con ayuda de la función de densidad de probabilidad $f(x, y)$.

La probabilidad de que un punto aleatorio $(X; Y)$ se encuentre en el campo D se determina por la igualdad

$$P[(X;\ Y) \subset D] = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

La función de densidad de probabilidad posee las propiedades siguientes:

1ª. $f(x, y) \geqslant 0$.

2ª. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$.

Si todos los puntos aleatorios $(X; Y)$ pertenecen a un campo finito D, entonces la última condición toma la forma

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias discretas X e Y que forman parte del sistema se determinan por las fórmulas

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, \quad m_y = M(Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij}$$

y las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias continuas, por las fórmulas

$$m_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x, y)\,dx\,dy, \quad m_y = M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(x, y)\,dx\,dy.$$

El punto $(m_x; m_y)$ se llama *centro de dispersión* del sistema de variables aleatorias (X, Y).

Las esperanzas matemáticas m_x y m_y se pueden determinar también más simplemente si las variables aleatorias X e Y son independientes. En este caso, partiendo de las leyes de distribución de estas variables aleatorias se puede hallar las esperanzas matemáticas m_x y m_y con ayuda de la fórmula citada en el § 6 de este capítulo.

Las varianzas de las variables aleatorias discretas X e Y se determinan por las fórmulas

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i - m_x)^2, \quad D(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(y_j - m_y)^2.$$

Las varianzas de las variables aleatorias continuas X e Y que forman parte del sistema se hallan con ayuda de las fórmulas

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2\cdot f(x, y)\,dx\,dy, \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 \times$$

$$\times f(x, y)\,dx\,dy.$$

Las desviaciones típicas de variables aleatorias X e Y se determinan por las fórmulas

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Para calcular las varianzas pueden aplicarse las fórmulas

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2, \quad D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2.$$

Un papel importante en la teoría de sistemas de variables aleatorias pertenece al llamado *momento de correlación* (*covarianza*)

$$C_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)].$$

Para variables aleatorias discretas el momento de correlación se encuentra por la fórmula

$$C_{xy} = \sum_m \sum_n (x_n - m_x)(y_m - m_y)\,p_{nm},$$

y para variables aleatorias continuas, por la fórmula

$$C_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y)\,f(x, y)\,dx\,dy.$$

El momento de correlación se puede hallar también por la fórmula

$$C_{xy} = M(XY) - M(X)\,M(Y).$$

Aquí

$$M(XY) = \sum_m \sum_n x_n y_m p_{mn}$$

para variables aleatorias discretas X e Y y

$$M(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y)\, dx\, dy$$

para variables continuas.

Las variables aleatorias X e Y se llaman *independientes* si la probabilidad de tomar una de ellas un valor perteneciente a un intervalo cualquiera del campo de sus valores no depende del hecho de qué valor haya tomado la segunda variable. En este caso

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y); \quad C_{xy} = 0.$$

Para caracterizar el enlace existente entre las variables X e Y se examina el llamado *coeficiente de correlación*

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

que es una magnitud adimensional.

Si las variables aleatorias X e Y son independientes, entonces $r_{xy} = 0$. Sin embargo, si las variables aleatorias X e Y están enlazadas por una dependencia lineal exacta $Y = aX + b$, entonces $r_{xy} = \text{sign. } a$, o sea, $r_{xy} = 1$ cuando $a > 0$, y $r_{xy} = -1$ cuando $a < 0$.

En general, el coeficiente de correlación satisface la condición $-1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1$.

871. Dos cajas contienen seis bolillas cada una. En la primera cajita hay: 1 bolilla con No 1, dos con No 2, 3 con No 3 y en la segunda cajita hay: 2 bolillas con No 1, 3 con No 2 y 1 con No 3. Supongamos que X es el número que lleva la bolilla sacada de la primera cajita, Y es el número que lleva la extraida de la segunda cajita. De cada cajita ha sido sacada una bolilla. Confeccionar la tabla de la ley de distribución de las variables aleatorias (X, Y).

Resolución.

El	punto	aleatorio	(1; 1) tiene	la	multiplicidad		$1 \times 2 = 2$;
»	»	»	(1; 2)	»	»	»	$1 \times 3 = 3$;
»	»	»	(1; 3)	»	»	»	$1 \times 1 = 1$;
»	»	»	(2; 1)	»	»	»	$2 \times 2 = 4$;
»	»	»	(2; 2)	»	»	»	$2 \times 3 = 6$;
»	»	»	(2; 3)	»	»	»	$2 \times 1 = 2$;
»	»	»	(3; 1)	»	»	»	$3 \times 2 = 6$;
»	»	»	(3; 2)	»	»	»	$3 \times 3 = 9$;
»	»	»	(3; 3)	»	»	»	$3 \times 1 = 3$.

En total hay $6 \times 6 = 36$ puntos aleatorios (el punto de multiplicidad n tomamos por n puntos).

Puesto que la relación entre la multiplicidad de un punto y toda la cantidad de puntos es igual a la probabilidad de aparición de este punto, la tabla de la ley de distribución del sistema de las variables aleatorias tiene la forma

X \ Y	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1.12

La suma de todas las probabilidades indicadas en la tabla es igual a la unidad.

872. Hallar las esperanzas matemáticas de las variabls aleatorias X e Y según los datos del problema precedente.

Resolución. Tenemos

$$m_x = 1\cdot\frac{1}{18} + 2\cdot\frac{1}{9} + 3\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{12} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{1}{18} + 3\cdot\frac{1}{12} = \frac{3}{7};$$

$$m_y = 1\cdot\frac{1}{18} + 2\cdot\frac{1}{12} + 3\cdot\frac{1}{36} + 1\cdot\frac{1}{9} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{18} + 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{12} = \frac{11}{6}.$$

El punto (7/3; 11/6) es el centro de dispersión para el sistema dado (X, Y).

Como las variables aleatorias X e Y son independientes (véanse los datos del problema 871), las esperanzas matemáticas m_x y m_y se pueden calcular más sencillamente, utilizando las series de distribución:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

y_j	1	2	3
p_j	1/3	1/2	1/6

De aquí, encontramos

$$m_x = \sum p_i x_i = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{7}{3}, \quad m_y = \sum p_j y_j = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{11}{6}.$$

873. Hallar las dispersiones de las variables aleatorias X e Y según los datos del problema 871.

Resolución. Pasamos del sistema de variables (X, Y) al de variables centradas (normalizadas) $(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y})$, donde $\overset{\circ}{X} = X - m_x = X - 7/3$, $\overset{\circ}{Y} = Y - m_y = Y - 11/6$. Componemos la tabla

$\overset{\circ}{X}$ \ $\overset{\circ}{Y}$	$-5/6$	$1/16$	$7/6$
$-4/3$	1/18	1/12	1/36
$-1/3$	1/9	1/6	1/18
$2/3$	1/6	1/4	1/12

Tenemos

$$D(X) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{9};$$

$$D(Y) = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{17}{36}.$$

De aquí, $\sigma_x = \sqrt{5}/3$, $\sigma_y = \sqrt{17}/6$.

Notemos que $D(X)$ y $D(Y)$ se pueden determinar por las fórmulas $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, $D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2$.

874. Hallar el coeficiente de correlación según los datos del problema 871.

Resolución. Utilicemos la tabla de distribución del sistema $(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y})$ de variables aleatorias centradas.

Determinemos la covarianza:

$$C_{xy}=\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{36}+$$
$$+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{18}+$$
$$+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{12}=$$
$$=-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{5}{108}+\frac{1}{72}+\frac{7}{216}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{54}+\frac{1}{36}+\frac{7}{108}\right)+$$
$$+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{36}+\frac{1}{24}+\frac{7}{72}\right)=-\frac{4}{3}\cdot0-\frac{1}{3}\cdot0+\frac{2}{3}\cdot0=0\cdot$$

Como $C_{xy}=0$, también el coeficiente de correlación $r_{xy}=0$.

Este mismo resultado podríamos obtener sin determinar la covariancia C_{xy}. En efecto, suponiendo $Y=1$, obtenemos que el valor de $X=1$ se repite 2 veces; el valor de $X=2$, 4 veces y el valor de $X=3$, 6 veces. Por lo tanto, para $Y=1$ obtenemos la serie de distribución de la variable aleatoria X:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

Si $Y=2$, entonces el valor de $X=1$ se repite 3 veces; el valor de $X=2$, 6 veces y el valor de $X=3$, 9 veces. Por consiguiente, para $Y=2$ se obtiene la serie de distribución de la variable aleatoria X:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

Por último, si $Y=3$, entonces el valor de $X=1$ se repite 1 vez; el valor de $X=2$, 2 veces y el valor de $X=3$, 3 veces. La serie de distribución de la variable aleatoria X para $Y=3$ tiene la forma

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

De suerte que para diferentes valores de Y obtenemos la misma serie de distribución de la variable aleatoria X. Puesto que la serie de distribución de la variable aleatoria X no depende de los valores de la variable aleatoria Y, entonces las magnitudes X e Y son independientes. De ello resulta que el coeficiente de correlación es igual a cero.

875. El sistema de variables aleatorias (X, Y) está subordinado a la ley de distribución con la densidad

$$f(x, y)=\begin{cases} a(x^2+y^2), & \text{si} \quad x^2+y^2\leqslant r^2; \\ 0, & \text{si} \quad x^2+y^2>r^2. \end{cases}$$

Hallar el coeficiente a.

Resolución. Determinamos el coeficiente a de la ecuación

$$a\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=1,$$

donde D es el círculo limitado por la circunferencia $x^2+y^2=r^2$. Pasando a las coordenadas polares, obtenemos

$$a\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^r \rho^3\,d\rho\,d\theta=1, \quad \frac{r^4}{4}\cdot 2\pi a=1, \quad \text{o sea,} \quad a=\frac{2}{\pi r^4}.$$

876. El sistema de variables aleatorias (X, Y) está subordinado a la ley de distribución con la densidad

$$f(x, y)=\begin{cases} a(x+y) & \text{en el fominio } D; \\ 0 & \text{fuera de este dominio.} \end{cases}$$

El dominio D es el cuadrado limitado por las rectas $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=3$. Se exige: 1) determinar el coeficiente a; 2) calcular la probabilidad de que el punto aleatorio $(X; Y)$ se encuentre en el cuadrado Q limitado por las rectas $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$; 3) hallar las esperanzas matemáticas m_x y m_y; 4) Hallar las desviaciones típicas σ_x y σ_y.

Resolución. 1) El coeficiente a se determina de la ecuación

$$a\int\limits_0^3\int\limits_0^3 (x+y)\,dx\,dy=1,$$

ee donde

$$a\int\limits_0^3\int\limits_0^3 (x+y)dx\,dy=a\int\limits_0^3\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^3 dx=a\int\limits_0^3\left(3x+\frac{9}{2}\right)dx=$$

$$=a\left[\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x\right]_0^3=a\left(\frac{27}{2}+\frac{27}{2}\right)=27a, \quad 27a=1, \quad \text{o sea,} \quad a=\frac{1}{27}.$$

$$2) \quad P[(X; Y)\subset Q]=\frac{1}{27}\int\limits_1^2\int\limits_1^2 (x+y)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{27}\int\limits_1^2\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx=\frac{1}{27}\int\limits_1^2\left(2x+2=x-\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int\limits_1^2\left(x+\frac{3}{2}\right)dx=\frac{1}{27}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right]_1^2=\frac{1}{27}\left(2+3-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{9}.$$

3) Hallamos las esperanzas matemáticas m_x y m_y; tenemos

$$m_x=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 x(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{27}\int_0^3\left[x^2y+\frac{xy^2}{2}\right]_0^3 dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\left(3x^2+\frac{9}{2}x\right)dx=\frac{1}{27}\left[x^3+\frac{9}{4}x^2\right]_0^3=\frac{1}{27}\left(27+\frac{81}{4}\right)=7/4.$$

Por consiguiente, también $m_y=7/4$.

4) Hallamos las desviaciones típicas σ_x y σ_y:

$$\sigma_x^2=\iint_D (x-m_x)^2\cdot f(x,\,y)\,dx\,dy=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\times$$

$$\times(x+y)\,dy\,dx=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(x-\frac{7}{4}+y+\frac{7}{4}\right)dy\,dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^3 dy\,dx+\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(y+\frac{7}{4}\right)dy\,dx=$$

$$=\frac{1}{27}\cdot\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^3\cdot y\Big|_0^3 dx+\frac{1}{27\cdot 2}\int_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(y+\frac{7}{4}\right)^2\Big|_0^3 dx=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{\left(x-\frac{7}{4}\right)^4}{4}\Bigg|_0^3+\frac{1}{27\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{361}{16}-\frac{49}{16}\right)\Big|_0^3=\frac{11}{16}.$$

De suerte que $\sigma_x=\sigma_y=\sqrt{11}/4$.

877. El sistema de variables aleatorias $(X,\,Y)$ está subordinado a la ley de distribución con la densidad

$$f(x,\,y)=\begin{cases} a\,\mathrm{sen}\,(x+y) & \text{en el dominio } D; \\ 0 & \text{fuera de este dominio.}\end{cases}$$

El dominio D está definido por las desigualdades $0\leqslant x\leqslant \pi/2$, $0\leqslant y\leqslant \pi/2$. Hallar: 1) el coeficiente a; 2) las esperanzas matemáticas m_x y m_y; 3) las desviaciones típicas σ_x y σ_y; 4) el coeficiente de correlación r_{xy}.

Resolución. 1) El coeficiente a se determina de la ecuación

$$a\cdot\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}\,(x+y)\,dy\,dx=1.$$

De donde

$$a\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x+y)\,dy\,dx=-a\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}dx=$$

$$=a\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}x+\cos x)\,dx=a(\operatorname{sen}x-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=2a.$$

De suerte que $a=1/2$, o sea $f(x, y)=(1/2)\operatorname{sen}(x+y)$ en el dominio D.

$$2)\ m_x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x\operatorname{sen}(x+y)\,dy\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x\,dx\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x+y)\,dy=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\right]x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x(\operatorname{sen}x+\cos x)\,dx=\frac{1}{2}x(\operatorname{sen}x-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}x-\cos x)\,dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{sen}x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$$

De igual modo $m_y=\pi/4$.

$$3)\ \sigma_x^2=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x^2\operatorname{sen}(x+y)\,dy\,dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x^2\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}dx-\frac{\pi^2}{16}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x^2(\operatorname{sen}x+\cos x)\times$$

$$\times dx-\frac{\pi^2}{16}=\frac{1}{2}x^2(\operatorname{sen}x-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}x(\operatorname{sen}x-\cos x)\,dx-$$

$$-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{8}+x(\operatorname{sen}x+\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}x+\cos x)\,dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}+(\operatorname{sen}x-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$$

Por consiguiente, $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_x\sigma_y=(\pi^2+8\pi-32)/16$.

4) Determinamos la covarianza:

$$C_{xy}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} xy \operatorname{sen}(x+y)\,dy\,dx-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\,dx\int_0^{\pi/2} y \operatorname{sen}(x+y)\,dy-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[y\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)\,dy\right]x\,dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen} x\right]dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2} x\left(-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x-\cos x+\operatorname{sen} x\right)dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x+\cos x-\operatorname{sen} x\right)dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{2}x\left(\operatorname{sen} x-\frac{\pi}{2}\cos x+\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\operatorname{sen} x-\frac{\pi}{2}\cos x+\cos x\right)dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} x-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x-\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{16}=\frac{8\pi-16-\pi^2}{16}.$$

De donde

$$r_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{8\pi-16-\pi^2}{\pi^2+8\pi-32}\approx-\frac{0,73688}{3,00232}\sim-0,2454.$$

878. Se da la tabla que determina la ley de distribución del sistema de dos variables aleatorias (X, Y):

X \ Y	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Hallar: 1) el coeficiente λ; 2) las esperanzas matemáticas m_x y m_y; 3) las varianzas σ_x^2 y σ_y^2; 4) el coeficiente de correlación r_{xy}.

879. El sistema de variables aleatorias (X, Y) está subordinado a la ley de distribución con la densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} axy & \text{en el dominio } D; \\ 0 & \text{fuera de este dominio.} \end{cases}$$

El dominio D es el triángulo limitado por las rectas $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Hallar: 1) el coeficiente a; 2) las esperanzas matemáticas m_x y m_y; 3) las varianzas σ_x^2 y σ_y^2; 4) el coeficiente de correlación r_{xy}.

880. El sistema de variables aleatorias está subordinado a la ley de distribución con la densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} a^2 - x^2 - y^2, & \text{si} \quad x^2 + y^2 \leqslant a^2 \ (a > 0); \\ 0, & \text{si} \quad x^2 + y^2 > a^2. \end{cases}$$

Hallar: 1) el coeficiente a; 2) las esperanzas matemáticas m_x y m_y; 3) las varianzas σ_x^2 y σ_y^2; 4) el coeficiente de correlación r_{xy}.

[illegible] Correlación

Se da un sistema de variables aleatorias (X, Y). Supongamos que como resultado de n pruebas se han obtenido n puntos $(x_1; y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n; y_n)$ (entre ellos pueden haberlos coincidentes). Se exige calcular el coeficiente de correlación de este sistema de variables aleatorias.

Tomando en consideración la ley de los grandes números, cuando n es suficientemente grande, en las fórmulas para determinar σ_x^2, σ_y^2 y C_{xy} se pueden reemplazar las esperanzas matemáticas $M(X)$ y $M(Y)$ por los valores medios aritméticos de las variables aleatorias correspondientes. Con ello tienen lugar las igualdades aproximadas siguientes:

$$M(X) \approx \bar{x} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)/n; \quad M(Y) \approx \bar{y} = \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big)/n,$$

$$\sigma_x^2 \approx \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)/n - \bar{x}^2; \quad \sigma_y^2 \approx \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)/n - \bar{y}^2,$$

$$C_{xy} \approx \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)/n - \bar{x}\bar{y}.$$

De aquí se puede hallar el coeficiente de correlación con ayuda de la fórmula

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Si $|r_{xy}| \sqrt{n-1} \geqslant 3$, entonces el enlace (vinculación) entre las variables aleatorias X e Y es bastante probable. Si el enlace entre X e Y está determinado, entonces la aproximación lineal $\bar{y}_x$ de x se da por la fórmula de *la regresión lineal*

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}), \quad \text{o bien} \quad \bar{y}_x = ax + b.$$

La aproximación lineal $\bar{x}_y$ de y se de por la fórmula de la regresión lineal

$$\bar{x}_y-\bar{x}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y}),\quad \text{o bien}\quad \bar{x}_y=cy+d.$$

Hay que tener en cuenta que $\bar{y}_x=ax+b$ y $\bar{x}_y=cy+d$ son rectas diferentes (fig. 46). La primera recta se obtiene como resultado de la solución del problema sobre la minimización de la suma de cuadrados de las desviaciones

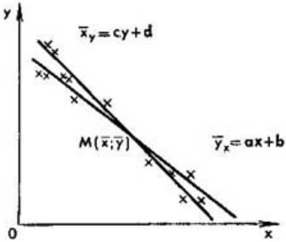

Fig. 46

por la vertical y la segunda, al resolver el problema sobre la minimización de la suma de cuadrados de las desviaciones por la horizontal.

Para construir las ecuaciones de la regresión lineal es necesario:

1) con ayuda de la tabla inicial de valores (X, Y) calcular $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y, C_{xy}, r_{xy};

2) Comprobar la hipótesis acerca de la existencia del enlace (vínculo) entre X e Y;

3) escribir las ecuaciones de ambas líneas de regresión y representar los gráficos de estas ecuaciones.

881. Se da la tabla:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	0,25	0,37	0,44	0,55	0,60	0,62	0,68	0,70	0,73
Y	2,57	2,31	2,12	1,92	1,75	1,71	1,60	1,51	1,50

i	10	11	12	13	14	15	16	17
X	0,75	0,82	0,84	0,87	0,88	0,90	0,95	1,00
Y	1,41	1,33	1,31	1,25	1,20	1,19	1,15	1,00

Determinar el coeficiente de correlación r_{xy} y las ecuaciones de las líneas de regresión.

Resolución. Componemos la tabla de cálculo:

i	X	Y	X^2	Y^2	XY
1	0,25	2,57	0,0625	6,6049	0,6425
2	0,37	2,31	0,1369	5,3361	0,8547
3	0,44	2,12	0,1936	4,4944	0,9328
4	0,55	1,92	0,3025	3,6864	1,0560
5	0,60	1,75	0,3600	3,0625	1,0500
6	0,62	1,71	0,3844	2,9241	1,0602
7	0,68	1,60	0,4624	2,5600	1,0880
8	0,70	1,51	0,4900	2,2801	1,0570
9	0,73	1,50	0,5329	2,2500	1,0950
10	0,75	1,41	0,5625	1,9881	1,0575
11	0,82	1,33	0,6724	1,7689	1,0906
12	0,84	1,31	0,7056	1,7161	1,1004
13	0,87	1,25	0,7569	1,5625	1,0875
14	0,88	1,20	0,7744	1,4400	1,0560
15	0,90	1,19	0,8100	1,4161	1,0710
16	0,95	1,15	0,9025	1,3225	1,0925
17	1,00	1,00	1,0000	1,0000	1,0000
$\sum$	11,95	26,83	9,1095	45,4127	17,3917

De la tabla obtenemos: $\sum_{i=1}^{17} x_i = 11,95$, $\sum_{i=1}^{17} y_i = 26,83$, $\sum_{i=1}^{17} x_i^2 = 9,1095$, $\sum_{i=1}^{17} y_i^2 = 45,4127$, $\sum_{i=1}^{17} x_i y_i = 17,3917$.

Ahora hallamos

$$\bar{x} = 11,95/17 = 0,7029,\ \bar{y} = 26,83/17 = 1,5782;$$
$$\sigma_x^2 = 9,1095/17 - (0,7029)^2 = 0,0418,\ \sigma_x = 0,2042;$$
$$\sigma_y^2 = 45,4127/17 - (1,5782)^2 = 0,1806,\ \sigma_y = 0,4250;$$
$$C_{xy} = 17,3917/17 - 0,7029 \cdot 1,5782 = -0,0863;$$
$$r_{xy} = (-0,0863)/(0,2042 \cdot 0,4250) = -0,09943.$$

Determinamos el valor del producto $|r_{xy}| \cdot \sqrt{n-1}$; puesto que $|r_{xy}| \times \sqrt{n-1} = 0,9943 \cdot 4 = 3,9772 > 3$, la vinculación está suficientemente fundamentada.

Las ecuaciones de las líneas de regresión son:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \bar{x}),$$

o sea,

$$\bar{y}_x - 1,5782 = -\frac{0,9943 \cdot 0,4250}{0,2042}(x - 0,7029); \quad \bar{y}_x = -2,0695x + 3,0329;$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}),$$

o sea,

$$\bar{x}_y - 0,7029 = -\frac{0,9943 \cdot 0,2042}{0,4250} \cdot (y - 1,5782); \quad \bar{x}_y = -0,4776y + 1,4566.$$

Una vez construidos los puntos determinados por la tabla y las líneas de regresión, vemos que ambas líneas pasan por el punto M (0,7029; 1,5782). La primera línea corta sobre el eje de las ordenadas el segmento 3,0329 y la segunda, sobre el eje de las abscisas, el segmento 1,4566. Los puntos $(x_i; y_i)$ están próximos a las líneas de regresión.

882. Como resultado de 79 pruebas se obtuvo la siguiente tabla de correlación de las variables $X = \sigma_S/\sigma_B$ e Y: Por σ_S se designa el

X \ Y	0,5	0,6	0,7	0,8
0,5	0	2	0	8
0,6	0	4	2	9
0,7	2	12	3	1
0,8	21	14	0	0
0,9	1	0	0	0

límite de fluencia del acero y por σ_B, el límite de rotura del mismo; Y es el porcentaje del carbono contenido en el acero. Los números enteros citados en la tabla son multiplicadades de los valores de puntos aleatorios respectivos. Así, por ejemplo, el punto para el cual $x = 0,8$, $y = 0,6$ tiene la multiplicidad 14, o sea, en 14 pruebas al valor de $x = 0,8$ le ha correspondido el valor de $y = 0,6$.

Se requiere determinar el coeficiente de correlación y las ecuaciones de las líneas de regresión.

Resolución. Encontramos

$$\bar{x}=\frac{0,5\,(2+8)+0,6\,(4+2+9)+0,7\,(2+12+3+1)+0,8\,(21+14)+0,9\cdot 1}{79}=$$

$$=\frac{55,5}{79}=0,703;$$

$$\bar{y}=\frac{0,5\,(2+21+1)+0,6\,(2+4+12+14)+0,7\,(2+3)+0,8\,(8+9+1)}{79}=$$

$$=\frac{49,1}{79}=0,622.$$

Determinemos los valores medios aritméticos de las variables x^2, y^2 y xy:

$$\frac{\sum x^2}{79}=\frac{1}{79}\,[(0,5)^2\cdot(2+8)+(0,6)^2\cdot(4+2+9)+(0,7)^2\cdot(2+12+3+1)+$$

$$+(0,8)^2\cdot(21+14)+(0,9)^2\cdot 1]=\frac{39,93}{79}=0,505;$$

$$\frac{\sum y^2}{79}=\frac{1}{79}\,[(0,5)^2\cdot(0,5)^2\cdot(2+21+1)+(0,6)^2\cdot(2+4+12+14)+(0,7)^2\cdot(2+3)+$$

$$+(0,8)^2\cdot(8+9+1)]=\frac{31,49}{79}=0,398;$$

$$\frac{\sum xy}{79}=\frac{1}{79}\,[0,5\cdot 0,6\cdot 2+0,5\cdot 0,8\cdot 8+0,6\cdot 0,6\cdot 4+0,6\cdot 0,7\cdot 2+0,6\cdot 0,8\cdot 9+$$

$$+0,7\cdot 0,5\cdot 2+0,7\cdot 0,6\cdot 12+0,7\cdot 0,7\cdot 3+0,7\cdot 0,8\cdot 1+0,8\cdot 0,5\cdot 21+$$

$$+0,8\cdot 0,6\cdot 14+0,9\cdot 0,5\cdot 1]=\frac{33,74}{79}=0,427.$$

Determinamos las dispersiones y la covarianza:

$$\sigma_x^2=0,505-(0,703)^2=0,505-0,493=0,012;\qquad \sigma_x=0,11;$$

$$\sigma_y^2=0,398-(0,622)^2=0,398-0,387=0,011;\qquad \sigma_y=0,105;$$

$$C_{xy}=0,427-0,703\cdot 0,622=0,427-0,437=-0,01.$$

Determinamos el coeficiente de correlación:

$$r_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=-\frac{0,01}{0,11\cdot 0,105}=-0,867.$$

Calculamos el valor del producto $|r_{xy}|\sqrt{n-1}$; tenemos

$$|r_{xy}|\sqrt{n-1}=0,867\ \sqrt{78}=0,867\cdot 8,84=7,66.$$

Puesto que $|r_{xy}|\cdot\sqrt{n-1}>3$, la vinculación es bastante probable.

Las ecuaciones de las líneas de regresión son:

$$\bar{y}_x-\bar{y}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\bar{x}),$$

o sea,

$$\bar{y}_x - 0,622 = -0,867 \cdot \frac{0,105}{0,11} \cdot (x - 0,703), \quad \bar{y}_x = -0,828x + 1,204;$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot (y - \bar{y}),$$

o sea,

$$\bar{x}_y - 0,703 = -0,867 \cdot \frac{0,11}{0,105} (y - 0,622), \quad \bar{x}_y = -0,908y + 1,268.$$

883. Se da la tabla de correlación para las variables X e Y, donde X es la duración de servicio de una rueda de vagón en años e Y es el valor medio del desgaste referente al espesor de la llanta de la rueda, en milímetros:

X \ Y	0	2	7	12	17	22	27	32	37	42
0	3	6								
1	25	108	44	8	2					
2	3	50	60	21	5	5				
3	1	11	33	32	13	2	3	1		
4		5	5	13	13	7	2			
5			1	2	12	6	3	2	1	
6		1		1			2	1		1
7			1	1				1		

Determinar el coeficiente de correlación y las ecuaciones de las líneas de regresión.

884. Se da la tabla de correlación para las variables X e Y, donde X es la flecha de curvatura del carril, en centímetros, e Y la cantidad de defectos del carril (en centímetros para un riel de 25 m):

X \ Y	0	5	10	15	20
7,0	2				
7,5	1	1		1	1
8,0		1			1
8,5	2				
9,0	2		1	1	3
9,5				2	
10,0	3	2	4	3	3
10,5	4	5	1	3	1
11,0	3		3	2	6
11,5	3	5	1		9
12,0	5	3	6	4	4
12,5	1	1	3	10	6
13,0	1		1	4	5
13,5	1	1		1	6
14,0	2		1		3
14,5			2		1
15,0					
15,5		1	1		
16,0					3

Determinar el coeficiente de correlación y las ecuaciones de las líneas de regresión.

§ 17. Determinación de las características de las variables aleatorias a base de datos experimentales

1. **Poblaciones madre y muestral.** Se llama *población muestral* (*o muestra*) a un conjunto de objetos homogéneos escogidos de un modo aleatorio.

Se denomina *población madre* al conjunto de todos los objetos homogéneos entre los cuales se lleva a cabo el muestreo.

Ha recibido el nombre de *volumen* de una población (muestral o madre) el número de objetos de esta población.

La muestra se dice *representativa* si representa suficientemente bien las relaciones cuantitativas de la población madre.

2. **Frecuencia absoluta y frecuencia relativa.** Supongamos que hay una muestra cuyo volumen es n. Colocamos los resultados del muestreo en la tabla

i	1	2	3	...	n
ξ_i	ξ_1	ξ_2	ξ_3	...	ξ_n

donde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ son los valores de la variable aleatoria X en las pruebas 1, 2, 3, . . ., n, respectivamente. Algunos de los valores citados de la variable aleatoria X pueden ser iguales entre sí. Uniendo los valores iguales de la variable aleatoria, obtendremos la tabla

X	x_1	x_2	x_3	...	x_l
n_x	n_1	n_2	n_3	...	n_l

donde n_i es el número de apariciones del valor x_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ Las magnitudes $n_1, n_2, \ldots, n_l$ se llaman *frecuencias* (absolutas) de los valores respectivos $x_1, x_2, \ldots, x_l$ de la variable aleatoria X. Es evidente que $\sum\limits_{i=1}^{l} n_i = n$, o sea, la suma de frecuencias de todos los valores de la variable aleatoria es igual al volumen de la muestra.

La relación entre la frecuencia n_i y el volumen de una muestra n se denomina *frecuencia relativa* del valor x_i y se designa por w_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$. Es evidente que

$$\sum_{i=1}^{l} w_i = \sum_{i=1}^{l} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} n_i = \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

o sea, para la variable aleatoria X la suma de frecuencias relativas de todos los valores de la misma es igual a la unidad.

La tabla que establece la correspondencia entre los valores de una variable aleatoria y las frecuencias relativas de los mismos se llama *distribución estadística* de la variable aleatoria X:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_l
W	w_1	w_2	w_3	...	w_l

Conviene señalar que muy a menudo se denomina también distribución estadística a la tabla que determina la correspondencia entre los valores de una variable aleatoria y las frecuencias absolutas de los mismos.

Si X es una variable aleatoria continua, entonces es conveniente representar su distribución estadística en la forma

I	$]\xi_0, \xi_1[$	$]\xi_1, \xi_2[$	$]\xi_2, \xi_3[$	...	$]\xi_{l-1}, \xi_l[$
W	w_1	w_2	w_3	...	w_l

Aquí w_i es la frecuencia relativa con que la variable aleatoria toma un valor perteneciente al intervalo $]\xi_{i-1}, \xi_i[$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Si la variable aleatoria toma λ valores iguales a x_i, entonces, en caso de que λ es par, una mitad de estos valores se puede llevar al intervalo $]\xi_{i-1}, \xi_i[$ y la segunda mitad, al intervalo $]\xi_i, \xi_{i+1}[$, $1 \leqslant i \leqslant 1 - 1$. Cuando λ es impar a uno de estos dos intervalos se le puede llevar $(\lambda + 1)/2$ valores y al segundo, $(\lambda - 1)/2$ valores. Si la muestra tiene un gran volumen n, no tiene importancia esencial a cual de los dos intervalos se le asigna un número mayor de valores.

Para mayor evidencia la distribución estadística de una variable discreta se ilustra mediante el polígono de distribución. Con este fin los puntos sucesivos $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, $\ldots$, $(x_l; w_l)$ se representan sobre el plano de coordenadas y se unen por segmentos rectilíneos. Conviene señalar que los puntos que no son vértices del polígono no tienen interés desde el punto de vista de la estadística matemática.

Para ilustrar la distribución de una variable aleatoria continua se usan diagramas llamados *histogramas* de frecuencias.

1. Histograma que determina las frecuencias en función de los órdenes de los intervalos a los cuales pertenecen los valores de una variable aleatoria.

Supongamos que una variable aleatoria continua X está determinada por la tabla:

I	$]\xi_0, \xi_1[$	$]\xi_1, \xi_2[$	$]\xi_2, \xi_3[$	...	$]\xi_{l-1}, \xi_l[$
n_x	n_1	n_2	n_3	...	n_l

Suponiendo que las diferencias $\xi_i - \xi_{i-1}$ son constantes, pongamos $\xi_i - \xi_{i-1} = h$ para $i = 1, 2, \ldots, l$ (h es el paso de la tabla). Anotamos sobre el eje Ox los puntos $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l$. Examinamos la función definida por las igualdades $y = n_i/h$ si $x \in]\xi_{i-1}, \xi_i[$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Calculamos las áreas S_i de los rectángulos cuyas bases inferiores son los segmentos $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ del eje Ox y sus bases superiores los segmentos del gráfico de la función $y = n_i/h$ (fig. 47); tenemos

$$S_i = (n_i/h) \cdot h = n_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

2. Histograma que caracteriza la distribución estadística de una variable aleatoria. El determina la dependencia existente entre los órdenes y las frecuencias relativas de los valores de la variable aleatoria que se encuentran en estos órdenes.

En este caso se examina la función que tiene la forma $y = w_i/h$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. De un modo análogo al precedente el área del i-ésimo rectángulo respectivo es igual numéricamente a w_i. Ahora bien, el área de la figura limitada por las rectas $x = x_0$, $x = x_l$, $y = 0$, $y = w_i/h$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ es igual a 1 (fig. 48).

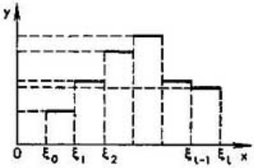

Fig. 47

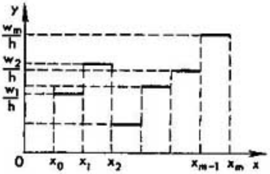

Fig. 48

885. Como resultado de la prueba la variable aleatoria X ha tomado los valores siguientes:

$$\begin{array}{lllll}
\xi_1 = 2, & \xi_2 = 5, & \xi_3 = 7, & \xi_4 = 1, & \xi_5 = 10, \\
\xi_6 = 5, & \xi_7 = 9, & \xi_8 = 6, & \xi_9 = 8, & \xi_{10} = 6, \\
\xi_{11} = 2, & \xi_{12} = 3, & \xi_{13} = 7, & \xi_{14} = 6, & \xi_{15} = 8, \\
\xi_{16} = 3, & \xi_{17} = 8, & \xi_{18} = 10, & \xi_{19} = 6, & \xi_{20} = 7, \\
\xi_{21} = 3, & \xi_{22} = 9, & \xi_{23} = 4, & \xi_{24} = 5, & \xi_{25} = 6.
\end{array}$$

Se requiere: 1) hacer la tabla que determina la dependencia entre los valores de la variable aleatoria y las frecuencias de la misma; 2) construir la distribución estadística: 3) representar el polígono de distribución.

Resolución. 1) Hallamos el volumen de la muestra: $n = 25$. Confeccionamos la tabla

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_x	1	2	3	1	3	5	3	3	2	2

2) La distribución estadística tiene la forma

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	1/25	2/25	3/25	1/25	3/25	5/25	3/25	3/25	2/25	2/25

Control: $\frac{1}{25}+\frac{2}{25}+\frac{3}{25}+\frac{1}{25}+\frac{3}{25}+\frac{5}{25}+\frac{3}{25}+\frac{3}{25}+\frac{2}{25}+\frac{2}{25}=1.$
La última tabla puede ser escrita en la forma

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	0,04	0,08	0,12	0,04	0,12	0,2	0,12	0,12	0,08	0,08

3) Tomamos sobre el plano xOw los puntos (1; 0,04), (2; 0,08), (3, 012), etc. Uniendo sucesivamente estos puntos con segmentos rectilíneos, obtendremos el polígono de distribución de la variable aleatoria X (fig. 49).

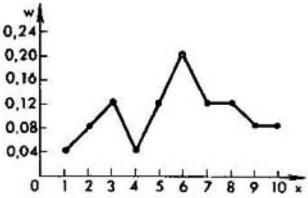

Fig. 49

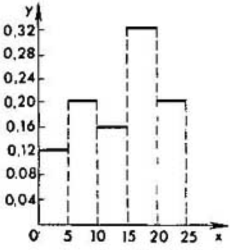

Fig. 50

886. Como resultado de la prueba la variable aleatoria X ha tomado los valores siguientes:

$$\xi_1 = 16,\quad \xi_2 = 17,\quad \xi_3 = 9,\quad \xi_4 = 13,\quad \xi_5 = 21,$$
$$\xi_6 = 11,\quad \xi_7 = 7,\quad \xi_8 = 7,\quad \xi_9 = 19,\quad \xi_{10} = 5,$$
$$\xi_{11} = 17,\quad \xi_{12} = 5,\quad \xi_{13} = 20,\quad \xi_{14} = 18,\quad \xi_{15} = 11,$$
$$\xi_{16} = 4,\quad \xi_{17} = 6,\quad \xi_{18} = 22,\quad \xi_{19} = 21,\quad \xi_{20} = 15,$$
$$\xi_{21} = 15,\quad \xi_{22} = 23,\quad \xi_{23} = 19,\quad \xi_{24} = 25,\quad \xi_{25} = 1.$$

Se requiere: construir la tabla de distribución estadística dividiendo el intervalo]0, 25[en cinco órdenes de longitudes iguales; construir el histograma de frecuencias relativas.

Resolución. Componemos previamente la tabla

I	]0, 5[	]5, 10[	]10, 15[	]15, 20[	]20, 25[
n_x	3	5	4	8	5

La distribución estadística tiene la forma

I	]0, 5[	]5, 10[	]10, 15[	]15, 20[	]20, 25[
W	0,12	0,2	0,16	0,32	0,2

El histograma de frecuencias relativas se muestra en la fig. 50.

3. **Función estadística.** Sea $F^*(x)$ la frecuencia relativa de aparición de los valores de una variable aleatoria X que satisfacen la desigualdad $X < x$. La función $F^*(x)$ se llama *función estadística de distribución*. De este modo,

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<x_1; \\ \sum\limits_{j=1}^{h} w_i, & \text{si} \quad x_h \leqslant x < x_{h+1} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1); \\ 1, & \text{si} \quad x \geqslant x_s. \end{cases}$$

Puesto que según le teorema de Bernoulli las frecuencias relativas, al crecer indefinidamente n, tienden en probabilidad hacia las probabilidades respectivas del evento, entonces, al ser grande el volumen de la muestra, la función estadística de distribución $F^*(x)$ es próxima a la función integral de distribución $F(x) = P(X < x)$.

Los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_l$ son puntos de discontinuidad de I género de la función $F^*(x)$.

887. Se da la distribución estádística:

X	11	12	13	14
W_x	0,4	0,1	0,3	0,2

Hallar la función estadística de distribución y construir su gráfico.

Resolución. Tenemos

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & \text{si} \quad x\leqslant 11;\\ 0{,}4, & \text{si} \quad 11<x\leqslant 12;\\ 0{,}5, & \text{si} \quad 12<x\leqslant 13;\\ 0{,}8, & \text{si} \quad 13<x\leqslant 14;\\ 1, & \text{si} \quad x>14.\end{cases}$$

El gráfico de la función $F^*(x)$ se muestra en la fig. 51.

Fig. 51

4. Determinación del valor medio de una variable aleatoria. Se llama *valor medio* de una variable aleatoria X, definida por la distribución estadística, a la expresión

$$\bar{x}=w_1x_1+w_2x_2+\ldots+w_lx_l=\sum_{i=1}^{l} w_ix_i,$$

o bien

$$\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_lx_l}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_ix_i. \tag{1}$$

La igualdad (1) determina el valor medio de X para la muestra.

De un modo análogo se determina el valor medio de una variable aleatoria X para la población madre:

$$\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_Nx_N}{N}, \tag{2}$$

donde N es el volumen de la población madre. Dado que $n_i/N=p_i$ es la probabilidad con la cual X toma el valor x_i $(1\leqslant i\leqslant N)$, la igualdad (2) se puede escribir en la forma

$$\bar{x}=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_Np_N=M(X).$$

De acuerdo con la ley de los grandes números de Bernoulli se puede considerar que para la población muestral $\bar{x}\simeq M(X)$. En adelante, suponiendo n suficientemente grande, escribiremos $\bar{x}=M(X)$.

Si todos los valores de una variable aleatoria X son próximos a un número constante a, el cálculo de $\bar{x}$ se simplifica:

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{l} w_i x_i=\sum_{i=1}^{l} w_i (x_i-a+a)=\sum_{i=1}^{l} w_i (x_i-a)+a\sum_{i=1}^{l} w_i=\overline{x-a}+a\sum_{i=1}^{l} w_i,$$

o sea,

$$\bar{x}=a+\overline{x-a}, \tag{3}$$

donde $\overline{x-a}$ es el valor medio de la variable aleatoria $X-a$. Ahora bien, cuando n es suficientemente grande, se cumple la igualdad

$$M(x)=a+M(X-a). \tag{4}$$

888. Hallar el valor medio de la variable aleatoria definida por la distribución:

X	13,8	13,9	14	14,1	14,2
n_x	4	3	7	6	5

Resolución. Todos los valores de X son próximos a $a=14$. Calculamos las frecuencias relativas y construimos la tabla:

$X-14$	$-0,2$	$-0,1$	0	0,1	0,2
W	0,16	0,12	0,28	0,24	0,2

Ahora encontramos

$$\overline{x-14}=\sum_{i=1}^{5} w_i (x_i-14)=-0,16\cdot 0,2-0,12\cdot 0,1+0,28\cdot 0+$$
$$+0,24\cdot 0,1+0,2\cdot 0,2=-0,032-0,012+0,024+0,04=0,02.$$

Por consiguiente, $\bar{x}=14+0,02=14,02$.

5. Varianza y desviación típica. Se llama *varianza estadística* de una variable aleatoria, definida por una distribución estadística, a la expresión

$$D^*(X)=w_1(x_1-\bar{x})^2+w_2(x_2-\bar{x})^2+\ldots+w_l(x_l-\bar{x})^2. \tag{1}$$

De la igualdad (1) se desprende que la dispersión estadística es el valor medio de la variable aleatoria $(X-\bar{x})^2$. Al crecer n el valor medio $\bar{x}$ tiende en probabilidad hacia $M(X)$ y las frecuencias $w_1, w_2, \ldots, w_l$, hacia las probabilidades respectivas. Así, pues, cuando el volumen de la muestra es grande, tiene lugar la igualdad aproximada

$$D^*(X)\simeq D(X).$$

La magnitud $\sigma^*(X)=\sqrt{D^*(X)}$ se denomina *desviación típica* (estándar). Tiene la misma dimensión que la variable aleatoria X.

A continuación, estimando el volumen de la muestra n suficientemente grande, en vez de $D^*(X)$ y $\sigma^*(X)$ escribiremos $D(X)$ y $\sigma(X)$, respectivamente.

Si los valores de la variable aleatoria X son próximos a una constante a, entonces el cálculo de la dispersión estadística se simplifica:

$$D^*(X)=\sum_{i=1}^{l} w_i (x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{l} w_i\,[(x_i-a)-$$

$$-(\bar{x}-a)]^2=\sum_{i=1}^{l} w_i (x_i-a)^2-2(\bar{x}-a)\sum_{i=1}^{l} w_i (x_i-1)+$$

$$+(\bar{x}-a)^2\sum_{i=1}^{l} w_i=\sum_{i=1}^{l} w_i (x-a)^2-2(\bar{x}-a)\,(\overline{x-a})+(\bar{x}-a)^2.$$

De la ecuación (3), del punto 4, se deduce que $\bar{x}-a=\overline{x-a}$, por eso

$$D^*(X)=\overline{(x-a)^2}-(\overline{x-a})^2,$$

donde $\overline{(x-a)^2}$ es el valor medio de la variable aleatoria $(X-a)^2$ y $(\overline{x-a})^2$ es el cuadrado del valor medio de la variable aleatoria $X-a$. Puesto que el primer miembro de la igualdad (2) no depende de a, en el segundo miembro de la igualdad, efectuadas las simplificaciones, a debe eliminarse. En particular, si $a=0$, se obtiene la fórmula

$$D^*(X)=\overline{x^2}-(\bar{x})^2. \tag{2}$$

Una fórmula análoga se utiliza frecuentemente en le teoría de las probabilidades.

Si las variables aleatorias X e Y están vinculadas por la dependencia lineal $Y=kX+b$, los valores medios de estas variables están enlazados por la misma dependencia lineal:

$$\bar{y}=k\bar{x}+b \text{ o bien } M(Y)=kM(X)+b. \tag{3}$$

Si la varianza de la variable Y se expresa por la de la variable X, entonces

$$D(Y)=D(kX+b)=D(kX)+D(b)=k^2 D(X),$$

puesto que $D(b)=0$. Por consiguiente,

$$D(Y)=k^2[\overline{x^2}-(\bar{x})^2]. \tag{4}$$

889. Calcular $D(X)$ y $\sigma(X)$ para la distribución estadística dada en el ejemplo 888.

Resolución. Construimos la tabla

$(X-14)^2$	0,04	0,01	0	0,01	0,04
W	0,16	0,12	0,28	0,24	0,2

Luego tenemos $\bar{x}-14=0{,}02$, $\overline{(x-14)^2}=0{,}0064+0{,}0012+0{,}0024+$ $+0{,}008=0{,}018$.

Por consiguente, $D(X)=0{,}018-0{,}0004=0{,}0176$; $\sigma(X)=\sqrt{0{,}0176}\approx$ $\approx 0{,}133$.

890. Determinar $\bar{y}$ y $D(Y)$ para la distribución estadística

Y	3	7	11	15	19	23
W	0,02	0,18	0,35	0,3	0,1	0,05

Resolución. Los valores de Y forman una progresión aritmética con el primer término 3 y la diferencia 4. Por eso $Y = 3 + 4(X - 1)$, o sea, $Y = 4X - 1$, $k = 4$, $b = -1$. Si X toma sucesivamente los valores 1, 2, 3, 5, 6, entonces Y tomará los valores 3, 7, 11, 15, 19 y 23, respectivamente. De este modo, se pueden escribir las varianzas de las variables X y X^2:

X	1	2	3	4	5	6
W	0,02	0,18	0,35	0,3	0,1	0,05
X^2	1	4	9	16	25	36
W	0,02	0,18	0,35	0,3	0,1	0,05

De donde hallamos

$$\overline{x} = 0{,}02 + 0{,}36 + 1{,}05 + 1{,}2 + 0{,}5 + 0{,}3 = 3{,}43;$$
$$\overline{x^2} = 0{,}02 + 0{,}72 + 3{,}15 + 4{,}8 + 2{,}5 + 1{,}8 = 12{,}99.$$

Utilizando la fórmula (3), obtendremos

$$\overline{y} = 4\ 3{,}43 - 1 - 12{,}72,$$

y por la fórmula (4)

$$D(Y) = 4^2(12{,}99 - 11{,}76) = 16 \cdot 1{,}23 = 19{,}68.$$

891. Hallar el valor medio, la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria definida por la distribución:

X	9,8	9,9	10	10,1	10,2
n_x	1	5	8	4	2

892. Determinar $\bar{y}$ y $D(Y)$ para la distribución estadística:

Y	2	5	8	11	14	17	20	23
W	0,10	0,20	0,15	0,25	0,05	0,12	0,08	0,05

6. Determinación de los momentos de una variable aleatoria por los datos del muestreo. Asimetría y exceso. Se llama *momento inicial* de s-ésimo orden de una variable aleatoria X a la magnitud $\alpha_s(X) = M(X^s)$ y se llama *momento central* a la magnitud $\mu_s(X) = M[(X - m_x)^s]$, donde m_x es la esperanza matemática de la variable aleatoria ...

Si la muestra se considera representativa y es de un volumen suficientemente grande, entonces para determinar $\alpha_s(X)$ y $\mu_s(X)$ sirven las fórmulas aproximadas

$$\alpha_s(X) \approx \sum_{i=1}^{l} w_i x_i^s, \quad \mu_s(X) \approx \sum_{i=1}^{l} w_i (x_i - \bar{x})^s.$$

El momento central de primer orden de una variable aleatoria cualquera es idénticamente igual a cero. En efecto, $\mu_1 = M(X - m_x) = M(X) - m_x = 0$.

En caso de una distribución simétrica de la variable aleatoria X respecto a la esperanza matemática son también iguales a cero los otros momentos centrales de orden impar.

Conviene también tener en cuenta que $\alpha_1(X) = M(X)$ y $\mu_2(X) = D(X)$.

Si los valores de la variable aleatoria son próximos a cierto número a, entonces para calcular los momentos centrales de los primeros cuatro órdenes es conveniente utilizar las fórmulas:

$$\mu_1(X) = 0,$$

$$\mu_2(X) = \overline{(x-a)^2} - (\overline{x-a})^2,$$

$$\mu_3(X) = \overline{(x-a)^3} - 3(\overline{x-a}) \cdot \overline{(x-a)^2} + 2(\overline{x-a})^3,$$

$$\mu_4(X) = \overline{(x-a)^4} - 4(\overline{x-a})\,\overline{(x-a)^3} + 6(\overline{x-a})^2\,\overline{(x-a)^2} - 3(\overline{x-a})^4.$$

Con ayuda de la designación $\nu_s = \overline{(x-a)^s}$ estas fórmulas se transforman obteniendo la forma

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,\ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,\ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4. \qquad (1)$$

En particular, si $a = 0$, se obtienen las igualdades que determinan las dependencias entre los momentos centrales μ_s e iniciales α_s de los primeros cuatro órdenes:

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,\ \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3,\ \mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4. \qquad (2)$$

Los momentos inicial y central de s-ésimo orden tienen una dimensión igual a la del s-ésimo grado de la variable aleatoria.

Si las variables aleatorias X e Y están vinculadas por la dependencia lineal $Y = kX + b$, entonces el momento central de s-ésimo orden de la variable aleatoria Y se determina del modo siguiente:

$$\mu_s(Y) = \mu_s(kX + b) = k^s\mu_s(X + b) = k^s\mu_s(X). \qquad (3)$$

Es fácil demostrar que $\mu_s(X+C)=\mu_s(X)$, donde C es una constante arbitraria.

La desviación típica se determina así:

$$\sigma(Y)=\sqrt{\mu_2(Y)}=\sqrt{k^2\mu_2(X)}=|k|\sqrt{\mu_2(X)}=|k|\sigma(X). \quad (4)$$

Sea X una variable aleatoria continua. Para determinar sus características numéricas construimos la tabla

X	x_1	x_2	...	x_l
W_x	w_1	w_2	...	w_l

donde x_i es un número cualquiera perteneciente al intervalo $]\xi_{i-1}, \xi_i[$, $i=1, 2, \ldots, l$. Generalmente se supone $x_i=(\xi_{i-1}+\xi_i)/2$. Expresando la asimetría y el exceso de la variable aleatoria $Y=kX+b$ por la asimetría y el exceso de la variable aleatoria X cuyas fórmulas se citan en la pág. 226, obtenemos

$$S_k(Y)=\frac{\mu_3(Y)}{\sigma^3(Y)}=\frac{k^3\mu_3(X)}{|k|^3\sigma^3(X)}=\operatorname{sign} k\cdot S_k(X); \quad (5)$$

$$E_x(Y)=\frac{\mu_4(Y)}{\sigma^4(Y)}-3=\frac{k^4\mu_4(X)}{|k|^4\sigma^4(X)}-3=E_x(X) \quad (6)$$

Es evidente que si $k>0$, entonces $S_k(kX+b)=S_k(X)$; pero si $k<0$ entonces $S_k(kX+b)=-S_k(X)$.

893. Calcular los momentos centrales de los primeros cuatro órdenes de la variable aleatoria que tiene la distribución estadística siguiente:

X	11	12	13	14
W	0,35	0,25	0,15	0,25

Resolución. Tomemos $a=10$. Para determinar $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ componemos la tabla de cálculo:

$X-a$	W	$W(X-a)$	$W(X-a)^2$	$W(X-a)^3$	$W(X-a)^4$
1	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
2	0,25	0,50	1,00	2,00	4,00
3	0,15	0,45	1,35	4,05	12,15
4	0,25	1,00	4,00	16,00	64,00
		2,30	6,70	22,40	80,50

De suerte que $\nu_1 = 2,3$; $\nu_2 = 6,7$; $\nu_3 = 22,4$; $\nu_4 = 80,5$. Por las fórmulas (1) hallamos

$$\mu_1(X) = 0; \quad \mu_2(X) = 6,7 - 2,3^2 = 1,41;$$
$$\mu_3(X) = 22,4 - 3\cdot 6,7\cdot 2,3 + 2\cdot 2,3^3 = 0,504;$$
$$\mu_4(X) = 80,5 - 4\cdot 22,4\cdot 2,3 + 6\cdot 6,7\cdot 2,3^2 - 3\cdot 2,3^4 = 3,1257.$$

894. Calcular los momentos centrales de los primeros cuatro órdenes de la variable aleatoria que tiene la distribución estadística siguiente:

Y	4	9	14	19
W	0,4	0,2	0,3	0,1

Resolución. Los números 4, 9, 14, 19 forman una progresión aritmética, por eso $Y = 4 + 5(X - 1)$, o sea, $Y = 5X - 1$, $k = 5$, $b = -1$. Construimos la tabla

X	W	WX	WX^2	WX^3	WX^4
1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
2	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2
3	0,3	0,9	2,7	8,1	24,3
4	0,1	0,4	1,6	6,4	25,6
		2,1	5,5	16,5	53,5

Por consiguiente, $\alpha_1 = 2,1$; $\alpha_2 = 5,5$; $\alpha_3 = 16,5$; $\alpha_4 = 53,5$.
Por las fórmulas (2) encontramos:

$$\mu_1(X) = 0; \quad \mu_2(X) = 5,5 - 4,41 = 1,09;$$
$$\mu_3(X) = 16,5 - 6,3\cdot 5,5 + 2\cdot 2,1^3 = 0,372;$$
$$\mu_4(X) = 53,5 - 8,4\cdot 16,5 + 6\cdot 4,41\cdot 5,5 - 3\cdot 4,41^2 = 2,0857.$$

Ahora, utilizando la fórmula (3) obtenemos $\mu_s(Y) = 5^s\,\mu_s(X)$, O sea,

$$\mu_1(Y) = 0; \quad \mu_2(Y) = 25\cdot 1,09 = 27,25;$$
$$\mu_3(Y) = 125\cdot 0,372 = 46,5; \quad \mu_4(Y) = 625\cdot 2,0857 = 1303,5625.$$

895. Valiéndose de los datos del muestreo, determinar los momentos iniciales y centrales de los primeros cuatro órdenes, la asimetría y el exceso si la variable aleatoria X está definida por la tabla.

I	]0, 2[	]2, 4[	]4, 6[	]6, 8[	]8, 10[
n_x	3	4	10	5	3

Resolución. El volumen de la muestra es $n = 25$. Construimos la tabla

X	W_x	$W_x X$	$W_x X^2$	$W_x X^3$	$W_x X^4$
1	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
3	0,16	0,48	1,44	4,32	12,96
5	0,40	2,00	10,00	50,00	250,00
7	0,20	1,40	9,80	68,60	480,20
9	0,12	1,08	9,72	87,48	787,32
		5,08	31,08	210,52	1530,60

Por consiguiente, $\alpha_1 = 5{,}08$; $\alpha_2 = 31{,}08$; $\alpha_3 = 210{,}52$; $\alpha_4 = 1530{,}60$, o sea, $M(X) = 5{,}08$; $\mu_1 = 0$.
Utilizando las fórmulas (2), encontramos:

$$\mu_2 = 31{,}08 - 25{,}8064 = 5{,}1736, \text{ o sea, } D(X) = 5{,}1736;$$
$$\mu_3 = 210{,}52 - 3\cdot 5{,}08\cdot 31{,}08 + 2\cdot 5{,}08^3 = -0{,}9462;$$
$$\mu_4 = 1530{,}60 - 4\cdot 5{,}08\cdot 210{,}52 + 6\cdot 5{,}08^2\cdot 31{,}08 - 3\cdot 5{,}08^4 = 67{,}3004.$$

De ello obtenemos

$$\sigma(X) = \sqrt{5{,}1736} = 2{,}275;$$
$$S_k(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = -\frac{0{,}9462}{2{,}275^3} \simeq -0{,}0804;$$
$$E_x(X) = \frac{\mu^4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{67{,}3004}{2{,}275^4} - 3 \simeq -0{,}488.$$

896. Valiéndose de los datos del muestreo, determinar los momentos iniciales y centrales de los primeros cuatro órdenes, la asimetría y el exceso para la variable aleatoria definida por la tabla.

I	]1, 3[	]3, 5[	]5, 7[	]7, 9[	]9, 11[
n_x	2	4	10	6	3

§ 18. Determinación de las leyes de distribución de variables aleatorias basándose en datos experimentales

1. Distribución con densidad uniforme. Sea dada la distribución estadística:

I	$]\xi_0, \xi_1[$	$]\xi_1, \xi_2[$	...	$]\xi_{l-1}, \xi_l[$
W	w_1	w_2	...	w_l

Si los números $w_1, w_2, \ldots, w_l$ son próximos unos a otros, entonces para la elaboración de las observaciones es cómodo valerse de la lay de distribución con densidad uniforme. Como se sabe (véase la pág. 214), en este caso la densidad de distribución se determina del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<a; \\ 1/(b-a), & \text{si} \quad a\leqslant x\leqslant b; \\ 0, & \text{si} \quad x>b. \end{cases}$$

La esperanza matemática, la varianza y la desviación típica para la distribución con densidad uniforme se determinan por las fórmulas

$$M(X)=(a+b)/2, \quad D(X)=(b-a)^2/12, \quad \sigma(X)=(b-a)/(2\sqrt{3}),$$

Así, pues, resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a+b)/2=M(X), \\ (b-a)/(2\sqrt{3})=\sigma(X), \end{cases}$$

se puede hallar a y b y luego la densidad de distribución buscada.

897. Igualar los datos experimentales, aplicando la ley de distribución con densidad uniforme:

I	$]0, 10[$	$]10, 20[$	$]20, 30[$	$]30, 40[$	$]40, 50[$	$]50, 60[$
n_x	11	14	15	10	14	16

Resolución. Aquí $n=80$. Confeccionamos la tabla

X	5	15	25	35	45	55
W	11/80	14/80	15/80	10/80	14/80	16/80

Suponiendo $X = 5T$, obtendremos la tabla siguiente:

T	W	WT	WT^2
1	11/80	11/80	11/80
3	7/40	21/40	63/40
5	3/16	15/16	75/16
7	1/8	7/8	49/8
9	7/40	63/40	567/40
11	1/5	11/5	121/5
		25/4	509/10

Luego tenemos

$$M(X) = 5M(T) = 5\cdot(25/4) = 31{,}25;$$

$$M(X^2) = 5^2M(T^2) = 25\cdot(509/10) = 1272{,}5;$$

$$D(X) = 1272{,}5 - 976{,}5625 = 295{,}9375;$$

$$\begin{cases}(a+b)/2 = 31{,}25,\\ (b-a)/(2\sqrt{3}) = \sqrt{295{,}9375}.\end{cases}$$

Resolviendo el último sistema, hallamos $a = 1{,}46$, $b = 61{,}04$ de donde $1/(b-a) = 1/(61{,}04-1{,}46) = 0{,}017$. Por lo tanto,

$$f(x) = \begin{cases}0, & \text{si} \quad x < 1{,}46;\\ 0{,}017, & \text{si} \quad 1{,}46 \leqslant x \leqslant 61{,}04;\\ 0 & \text{si} \quad x > 61{,}04.\end{cases}$$

Para construir el histograma componemos la tabla (donde $h = 10$):

I	]0, 10[	]10, 20[	]20, 30[	]30, 40[	]40, 50[	]50, 60[
W/h	0,0138	0,0175	0,0188	0,0125	0,0175	0,02

En la fig. 52 se muestra el histograma de frecuencias relativas de la distribución estadística dada y el gráfico de densidad de distribución.

Puesto que la distribución con densidad uniforme es simétrica con respecto a la esperanza matemática, $\mu_s(X) = 0$ y $S_k(X) = 0$. Se sabe también que para tal distribución el exceso vale $-1{,}2$ independientemente de los valores de a y b.

898. Efectuar la igualación de los datos experimentales con ayuda de la ley de distribución con densidad uniforme:

I	]−1, 1[	]1, 3[	]3, 5[	]5, 7[	]7, 9[
n_x	6	7	4	5	8

2. **Distribución de Poisson.** La distribución de Poisson determina la correspondencia entre los valores de una variable aleatoria X y las probabilidades de estos valores con ayuda de la igualdad

$$P=\frac{e^{-\lambda}}{x!}\lambda^{x}, \tag{1}$$

donde x toma los valores 0, 1, 2, 3, ...

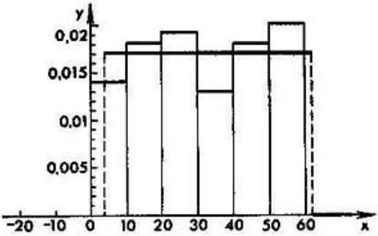

Fig. 52

De este modo, la serie de distribución de una variable aleatoria X tiene la forma

X	0	1	2	3	...
P	$e^{-\lambda}$	$e^{-\lambda}\cdot\lambda$	$\frac{e^{-\lambda}}{2!}\cdot\lambda^2$	$\frac{e^{-\lambda}}{3!}\cdot\lambda^3$	...

En la práctica la variable aleatoria X toma un número limitado de valores 0, 1, 2, . . ., l, ya que, al ser suficientemente grande λ, la magnitud $\frac{e^{-\lambda}\lambda^{l}}{l!}$ es pequeña.

Recordemos que para la distribución de Poisson $M(X)=D(X)=\lambda$.
Sea dada la distribución estadística:

X	0	1	2	...	l
n_x	n_0	n_1	n_2	...	n_l

Esta distribución puede escribirse también en la forma

X	0	1	2	...	l
W	w_0	w_1	w_2	...	w_l

Si para la distribución dada las magnitudes $M(X)$ y $D(X)$ no son próximas entre sí, entonces ella no es una distribución de Poisson. Pero si $M(X) \approx \approx \lambda$ y $D(x) \approx \lambda$, entonces para resolver la cuestión acerca del carácter de la distribución conviene sustituir el valor de λ en la expresión (1) y calcular los valores de esta expresión para $x = 0, 1, 2, \ldots, l$. En el caso en que los valores de P resultan próximos a los respectivos valores de W, se puede considerar que la variable aleatoria está distribuida por la ley de Poisson.

899. Se da la distribución estadística:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
n_x	7	21	26	21	13	7	3	2

Mostrar que ella es próxima a la distribución de Poisson y determinar la dependencia entre los valores de la variable aleatoria y las probabilidades de estos valores.

Resolución. Hallamos $n = \sum_{i=0}^{7} n_i = 7+21+26+21+13+7+3+2=100.$

Componemos la tabla

X	0	1	2	3	4	5	6	7
W	0,07	0,21	0,26	0,21	0,13	0,07	0,03	0,02

Determinemos la esperanza matemática de la variable aleatoria:

$$M(X) = 0,21 + 0,52 + 0,63 + 0,52 + 0,35 + 0,18 + 0,14 = 2,55.$$

Ahora construimos la tabla

X^2	0	1	4	9	16	25	36	49
W	0,07	0,21	0,26	0,21	0,13	0,07	0,03	0,02

Por consiguiente,

$M(X^2) = 0,21 + 1,04 + 1,89 + 2,08 + 1,75 + 1,08 + 0,98 = 9,03$, de donde $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 9,03-6,503 = 2,527$. Hacemos $\lambda = 2,52$; entonces la dependencia entre los valores de la variable aleatoria y las probabilidades de los mismos se puede escribir en la forma

$$P=\frac{e^{-2,52}}{x!}\cdot 2,52^x.$$

Determinando por esta fórmula los valores de P para $x = 0, 1, 2, \ldots, 7$, obtenemos la tabla

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P	0,08	0,20	0,25	0,21	0,13	0,07	0,03	0,01

900. Resolver el poblema, análogo al precedente, para la distribución estadística.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_x	1	3	8	14	17	17	15	10	7	5	2	1

3. Distribución normal. Sea que la distribución estadística

I	$]\xi_0, \xi_1[$	$]\xi_1, \xi_2[$	...	$]\xi_{l-1}, \xi_l[$
W	w_1	w_2	...	w_l

tiene el histograma representado en la fig. 53. Componemos la tabla

X	x_1	x_2	...	x_l
W	w_1	w_2	...	w_l

haciendo $x_i = (\xi_{i-1} + \xi_i)/2$, $i = 1, 2, \ldots, l$. En la figura están unidos por una línea continua los puntos $(x_1; w_1/h)$, $(x_2, w_2/h)$, $\ldots$, $(x_l, w_l/h)$, donde h es el paso de la tabla.

Si la curva continua obtenida es próxima a la de Gauss, entonces se puede elaborar, los datos estadísticos con ayuda de la ley normal de distribución. Determinadas la esperanza matemática $m = M(X)$ y la desviación típica $\sigma = \sigma(X)$, examinemos la función

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}. \qquad (1)$$

Hallamos los valores de esta función en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_l$. No es difícil ver que los productos $hf(x_1)$, $hf(x_2)$, $\ldots$, $hf(x_l)$ son iguales a las probabilidades de que la variable aleatoria distribuida por la ley normal (1) tome los valores pertenecientes a los intervalos $]\xi_0, \xi_1[$, $]\xi_1, \xi_2[$, . . . $[\xi_{l-1}, \xi_l[$. Si la distribución estadística dada es próxima a la normal, se cumplirán las igualdades aproximadas $hf(x_i) \approx w_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Más adelante se expondrán criterios más exactos de concordancia de las leyes de distribución empírica y teórica.

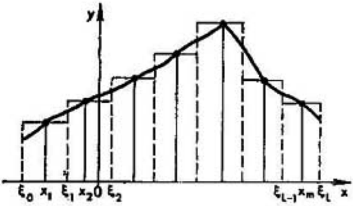

Fig. 53

901. Se da la distribución estadística:

I	]0, 3[	]3, 6[	]6, 9[	]9, 12[	]12, 15[	]15, 18[	]18, 21[	]21, 24[	]24, 27[	]27, 30[
n_x	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

Mostrar que ella es próxima a la distribución normal y construir el histograma de sus frecuencias relativas.

Resolución. Aquí $n = 50$, Construimos la tabla

X	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
W	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

Efectuando la sustitución de la variable por la fórmula $X = 3T - 1,5$, escribimos la distribución estadística para T y T^2:

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02
T^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
W	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

Luego tenemos

$$M(T) = 0{,}02 + 0{,}12 + 0{,}24 + 0{,}48 + 1{,}1 + 1{,}2 + 0{,}98 + 0{,}8 + 0{,}36 + $$
$$+ 0{,}2 = 5{,}5;$$
$$M(T^2) = 0{,}02 + 0{,}24 + 0{,}72 + 1{,}92 + 5{,}5 + 7{,}2 + 6{,}86 + 6{,}4 + 3{,}24 +$$
$$+ 2 = 34{,}1;$$
$$M(X) = 3M(T) - 1{,}5 = 3\cdot 5{,}5 - 1{,}5 = 15;$$
$$\sigma^2(X) = 9\,(34{,}1 - 30{,}25) = 34{,}65; \quad \sigma(X) = \sqrt{9\cdot 3{,}85} = 3\cdot 1{,}962 \simeq 5{,}9.$$

Por consiguiente,

$$f(x) = \frac{1}{5{,}9\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(x-15)^2/69{,}3}.$$

Hacemos $(x - 15)/5{,}9 = u$; entonces

$$f(x) = \frac{1}{5{,}9\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-u^2/2} \approx 0{,}17 z_u, \quad \text{donde} \quad z_u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-u^2/2}.$$

Los valores de la función z_u se citan en la tabla III, pág. 450.

Utilizando estos valores, componemos ahora la tabla ($h = 3$):

X	U	z_u	$f(x)$	$hf(x)$
1,5	−2,29	0,029	0,005	0,02
4,5	−1,78	0,082	0,014	0,04
7,5	−1,27	0,178	0,030	0,09
10,5	−0,76	0,299	0,051	0,15
13,5	−0,25	0,387	0,066	0,20
16,5	0,25	0,387	0,066	0,20
19,5	0,76	0,299	0,051	0,15
22,5	1,27	0,178	0,030	0,09
25,5	1,78	0,082	0,014	0,04
28,5	2,29	0,029	0,005	0,02

Notemos que los resultados obtenidos pueden ser confrontados con las probabilidades de que la variable aleatoria se encuentre en el intervalo dado, que se calculan por la fórmula

$$P(a < X < b) = 0{,}5\left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right],$$

donde $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ es la función de Laplace cuyos valores se citan en la tabla II, pág. 449, y $m = M(X) = 15$. Valiéndonos de esta tabla, encontramos

$$P(0 < X < 3) = 0{,}5 - [\Phi(1{,}44) + \Phi(1{,}80)] = 0{,}5\ (-0{,}9583 + 0{,}9891) =$$
$$= 0{,}0514 \approx 0{,}02;$$
$$P(3 < X < 6) = 0{,}5\ [-\Phi(1{,}08) + \Phi(1{,}44)] = 0{,}5\ (-0{,}8733 + 0{,}9583) =$$
$$= 0{,}0425 \approx 0{,}04;$$
$$P(6 < X < 9) = 0{,}5\ [-\Phi(0{,}72) + \Phi(1{,}08)] = 0{,}5\ (-0{,}6914 + 0{,}8733) =$$
$$= 0{,}0905 \approx 0{,}09;$$

$$P(9 < X < 12) = 0{,}5\,[-\Phi(0{,}36) + \Phi(0{,}72)] = 0{,}5\,(-0{,}3893 + 0{,}6914) = 0{,}151 \approx 0{,}15;$$

$$P(12 < X < 15) = 0{,}5\,[-\Phi(0) + \Phi(0{,}36)] = 0{,}5 \cdot 0{,}3893 = 0{,}1946 \approx 0{,}19;$$

$$P(15 < X < 18) = 0{,}5\,[\Phi(0{,}36) - \Phi(0)] = 0{,}5 \cdot 0{,}3893 = 0{,}1946 \approx 0{,}19;$$

$$P(18 < X < 21) = 0{,}5\,[\Phi(0{,}72) - \Phi(0{,}36)] = 0{,}5\,(0{,}6914 - 0{,}3893) = 0{,}151 \approx 0{,}15;$$

$$P(21 < X < 24) = 0{,}5\,[\Phi(1{,}08) - \Phi(0{,}72)] = 0{,}5\,(0{,}8733 - 0{,}6914) = 0{,}091 \approx 0{,}09;$$

$$P(24 < X < 27) = 0{,}5\,[\Phi(1{,}44) - \Phi(1{,}08)] = 0{,}5\,(0{,}9583 - 0{,}8733) = 0{,}0425 \approx 0{,}04;$$

$$P(27 < X < 30) = 0{,}5\,[\Phi(1{,}80) - \Phi(1{,}44)] = 0{,}5\,(0{,}9891 - 0{,}9583) = 0{,}0154 \approx 0{,}02.$$

Como resultado tenemos la tabla

I	]0, 3[	]3, 6[	]6, 9[	]9, 12[	]12, 15[	]15, 18[	]18, 21[	]21, 24[	]24, 27[	]27, 30[
W	0,02	0,04	0,09	0,15	0,19	0,19	0,15	0,09	0,04	0,02

Comparando los valores de w y de $hf(x)$ (o bien los de w y de P), nos convencemos de que la distribución estadística dada se puede considerar subordinada a la ley normal (fig. 54).

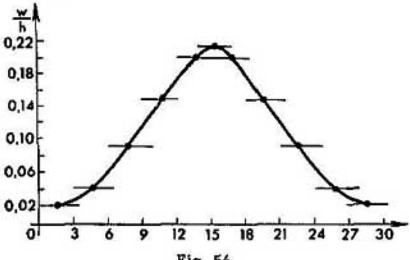

Fig. 54

902. Resolver el problema, análogo al precedente, para la distribución estadística

I	]1, 2[	]2, 3[	]3, 4[	]4, 5[	]5, 6[	]6, 7[	]7, 8[	]8, 9[	]9, 10[	]10, 11[	]11, 12[	]12, 13[	]13, 14[	]14, 15[
n_x	4	4	8	16	18	20	30	28	22	18	14	10	4	4

4. Distribución de Charlier. La distribución normal es simétrica, o sea, la curva $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$ es simétrica con respecto a la recta $x = m$. No obstante, en la práctica se encuentran frecuentemente también las distribuciones asimétricas. En el caso en que la asimetría no es muy grande, en valor absoluto, la distribución puede ser igualada con ayuda de la llamada ley de Charlier. La densidad de la ley de Charlier se determina por la igualdad

$$f_{\mathrm{Ch}}(x) = f(x) + \frac{1}{\sigma}\left[\frac{S_k(X)}{6} z_u (u^3 - 3u) + \frac{E_x(X)}{24} z_u (u^4 - 6u^2 + 3)\right], \qquad (1)$$

donde $f(x)$ es la densidad de la ley normal de distribución, $u = (x - m)/\sigma$, $z_u = (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-u^2/2}$, $S_k(X)$ es la asimetría, $E_x(X)$ es el exceso. Ahora bien, el segundo sumando en el segundo miembro de la igualdad (1) es la corrección a la ley normal de distribución. No es difícil ver que si $S_k(X) = 0$ y $E_x(X) = 0$, la distribución de Charlier coincide con la normal. La distribución de Charlier se puede escribir en la forma

$$P = \frac{h}{\sigma} \cdot z_u \left[1 + \frac{S_k(X)}{6} (u^3 - 3u) + \frac{E_x(X)}{24} (u^4 - 6u^2 + 3)\right]. \qquad (2)$$

903. Valerse de la distribución de Charlier para los datos de la tabla estadística

I	]0, 3[	]3, 6[	]6, 9[	]9, 12[	]12, 15[	]15, 18[	]18, 21[	]21, 24[	]24, 27[	]27, 30[
n_x	1	5	8	15	28	21	10	6	3	3

Resolución. Aquí $n = 100$. Construimos la tabla

X	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
W_x	0,01	0,05	0,08	0,15	0,28	0,21	0,1	0,06	0,03	0,03

Pasamos a una variable nueva T vinculada con X por la dependencia $X = 3T - 1,5$. La distribución estadística de la variable aleatoria T tiene la forma

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	0,01	0,05	0,08	0,15	0,28	0,21	0,1	0,06	0,03	0,03

Elaboramos la tabla de cálculo:

T	W	WT	WT^2	WT^3	WT^4
1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
2	0,05	0,10	0,20	0,40	0,80
3	0,08	0,24	0,72	2,16	6,48
4	0,15	0,60	2,40	9,60	38,40
5	0,28	1,40	7,00	35,00	175,00
6	0,21	1,26	7,56	45,36	272,16
7	0,1	0,70	4,90	34,30	240,10
8	0,06	0,48	3,84	30,72	245,76
9	0,03	0,27	2,43	21,97	197,73
10	0,03	0,30	3,00	30,00	300,00
		5,36	32,06	209,52	1476,44

Luego tenemos

$M(T) = 5,36;\quad M(X) = 3\cdot 5,36 - 1,5 = 14,58;\quad M(T^2) = 32,06;$

$D(T) = 32,06 - 28,73 = 3,33;\quad \sigma(T) = \sqrt{3,33} = 1,83;\quad \sigma(X) = 3\sigma(T) = 5,49;$

$$\mu_3(T) = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = 209,52 - 3\cdot 5,36\cdot 32,06 + 2\cdot 5,36^3 = 1,98;$$

$$S_k(T) = \mu_3(T)/\sigma^3(T) = 1,98/1,83^3 = 0,32;$$

$$\mu_4(T) = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 =$$
$$= 1476,44 - 4\cdot 5,36\cdot 209,52 + 6\cdot 5,36^2\cdot 32,06 - 3\cdot 5,36^4 = 34,59;$$

$$\sigma^4(T) = 3,33^2 = 11,09;\quad E_x(T) = \mu_4(T)/\sigma^4(T) - 3 = 34,59/11,09 - 3 = 0,12.$$

Puesto que $h = 3$, $M(X) = 14,58 = m$, $\sigma(X) = 5,49$, $u = (x - 14,58)/5,49$, $S_k(X) = 0,32$, $E_x(X) = 0,12$, entonces la frecuencia relativa de la distribución de Chalier se expresa por la igualdad

$$w = \frac{3}{5,49} z_u \left[1 + \frac{0,32}{6}(u^3 - 3u) + \frac{0,12}{24}(u^4 - 6u^2 + 3)\right],\ \text{o bien}\ w = 0,55$$

$z_u \cdot S$, donde $S = 1 + 0,05(u^3 - 3u) - 0,005(u^4 - 6u^2 + 3)$.

Confeccionamos la tabla para determinar las frecuencias igualadas por la ley de Charlier:

X	U	z_u	U^2	U^3	U^4	$3U$	$6U^2$	$0,05(U^3-3U)$	$0,005(U^4-6U^2+3)$	S	P
1,5	−2,38	0,02	5,66	−13,48	32,08	−7,14	33,96	−0,32	0,005	0,69	0,01
4,5	−1,84	0,07	3,39	−6,23	11,46	−5,52	20,34	−0,04	−0,03	0,9	0,04
7,5	−1,29	0,17	1,66	−2,15	2,77	−3,87	9,96	0,09	−0,02	1,05	0,09
10,5	−0,74	0,30	0,55	−0,41	0,30	−2,22	3,30	0,09	0,00	1,09	0,18
13,5	−0,19	0,39	0,04	−0,01	0,00	−0,57	0,24	0,03	0,015	1,06	0,23
16,5	0,35	0,38	0,12	0,04	0,01	1,05	0,72	−0,05	0,01	0,97	0,20
19,5	0,90	0,27	0,81	0,73	0,66	2,7	4,86	−0,10	−0,005	0,89	0,13
22,5	1,44	0,14	2,07	2,99	4,30	4,32	12,42	−0,07	−0,025	0,88	0,07
25,5	1,99	0,06	3,96	7,88	15,68	5,97	23,76	0,10	−0,025	1,05	0,03
28,5	2,54	0,02	6,45	16,39	41,62	7,62	38,70	0,44	0,03	1,5	0,02

Comparando las frecuencias obtenidas, después de igualarlas por la ley de Charlier, con las frecuencias respectivas dadas por la tabla estadística, llegamos a la conclusión de que son suficientemente próximas las unas a las otras. Sin embargo, la cuestión acerca de la concordancia de las distribuciones estadística y teórica no se puede resolver sino que después de examinar los criterios de aceptación (de Pearson, Romanovski, Kolmogórov).

5. Criterios de aceptación de Pearson y Romanovski. Examinemos la cuestión acerca de la concordancia de las distribuciones estadística y teórica. Supongamos que la distribución estadística está igualada con ayuda de una ley conocida de distribución (con densidad uniforme, ley normal, ley de Charlier, etc.).

Pearson propuso el siguiente criterio de concordancia de las distribuciones estadística y teórica. Primeramente se introduce la variable

$$\chi^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{l} \frac{(w_i - p_i)^2}{p_i},$$

donde w_i son las frecuencias relativas definidas por la tabla estadística y p_i son las probabilidades obtenidas por cierta ley teórica de distribución. Luego se examina la diferencia $r = l - t$, donde l es el número de órdenes de la tabla estadística y t es el número de condiciones que se imponen sobre las frecuencias $w_1, w_2, \ldots, w_l$; el número r se llama número de *grados de libertad*.

Por ejemplo, para la ley de distribución normal $t = 3$, ya que se utilizan las condiciones siguientes:

$$1)\ \sum_{i=1}^{l} w_i = 1; \quad 2)\ \sum_{i=1}^{l} w_i x_i = m_x; \quad 3)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^2 w_i = D_x,$$

donde m_x y D_x son la esperanza matemática y la varianza en la ley de distribución teórica.

Para la ley de Charlier $t = 5$, ya que hay cinco ecuaciones lineales que vinculan los valores $p_1, p_2, \ldots, p_l$:

$$1)\ \sum_{i=1}^{l} p_i = 1; \quad 2)\ \sum_{i=1}^{l} p_i x_i = m_x; \quad 3)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^2 p_i = D_x;$$

$$4)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^3 p_i = \mu_3(x); \quad 5)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^4 p_i = \mu_4(X).$$

Utilizando la tabla IV (véanse las págs. 451 y 452), por los valores χ^2 y r se determina la magnitud P que caracteriza la probabilidad de concordancia de las distribuciones teórica y estadística. Si $P < 0{,}1$, se puede deducir que la teoría reproduce mal el experimento. No obstante, si $P > 0{,}1$, esto quiere decir que la hipótesis acerca de la distribución teórica tomada no contradice los datos experimentales.

V. I. Romanovski propuso el siguiente criterio de aceptación: si la magnitud $|\chi^2 - r|/\sqrt{2r} \geqslant 3$, entonces la divergencia entre las frecuencias teóricas y experimentales no deben considerarse casuales; si $|\chi^2 - p|/\sqrt{2r} < 3$, esta divergencia se puede tomar como aleatoria.

904. Comprobar si concuerda o no la distribución estadística del problema 897 con la teórica que tiene una densidad uniforme.

Resolución. Por los datos de la tabla estadística en el problema 897 ha sido determinada la densidad de distribución

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1{,}46; \\ 0{,}017, & \text{si } 1{,}46 \leqslant x \leqslant 61{,}04 \\ 0, & \text{si } x > 61{,}04. \end{cases}$$

Hallamos la probabilidad de que la variable aleatoria distribuida por la ley indicada con densidad uniforme tome los valores pertenecientes a los intervalos]−10, 0[,]0, 10[,]10, 20[....,]60, 70[,]70, 80[:

I	]−10, 0[	]0, 10[	]10, 20[	]20, 30[	]30, 40[	]40, 50[	]50, 60[	]60, 70[	]70, 80[
P	0	0,14	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,01	0

Conviene señalar que $P(0 < X < 10) = P(1,46 < X < 10) = (10 - 1,46) \times 0,017 = 0,14$; $P(60 < X < 70) = P(60 < X < 61,04) = 0,01$. Componemos la tabla de cálculo para determinar χ^2:

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,14	0,14	0	0	0
0,17	0,17	0	0	0
0,19	0,17	0,02	0,0004	0,0023
0,13	0,17	−0,04	0,0016	0,0094
0,17	0,17	0	0	0
0,2	0,17	0,03	0,0009	0,0052
0	0,01	−0,01	0,0001	0,01

Por consiguiente, $\chi^2 = 80 \cdot 0,0269 = 2,152$; $l = 7$, $t = 3$, $r = 4$. Cuando $r = 4$, de la tabla IV encontramos: si $\chi^2 = 2$, $p = 0,7358$; si $\chi^2 = 3$, $p = 0,5578$; si $\chi^2 = 2,152$, $p = 0,7358 - 0,152 \cdot 0,178 = 0,7358 - 0,0271 = 0,7087$.

Así, pues, se puede considerar que la distribución estadística dada concuerda plenamente con la ley de distribución que tiene una densidad uniforme.

905. Se da la distribución estadística

I	]0, 5[	]5, 10[	]10, 15[	]15, 20[	]20, 25[	]25, 30[	]30, 35[	]35, 40[	]40, 45[	]45, 50[
n_x	2	12	8	4	14	6	10	2	1	11

Aclarar si concuerda o no esta distribución con la teórica que tiene una densidad uniforme.

Resolución. Aquí $n = 70$. Componemos la tabla

X	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
W	0,029	0,171	0,114	0,057	0,2	0,086	0,143	0,029	0,014	0,157

Luego, hallamos

$$M(X) = \sum_{i=1}^{10} w_i x_i = 2{,}5\,(0{,}029 + 3\cdot 0{,}171 + 5\cdot 0{,}114 + 7\cdot 0{,}057 +$$

$$+ 9\cdot 0{,}2 + 11\cdot 0{,}086 + 13\cdot 0{,}14 + 15\cdot 0{,}029 + 17\cdot 0{,}014 + 19\cdot 0{,}157) =$$

$$= 24{,}4285;$$

$$M(X^2) = 2{,}5^2\,(0{,}029 + 9\cdot 0{,}171 + 25\cdot 0{,}114 + 49\cdot 0{,}057 + 81\cdot 0{,}2 +$$

$$121\cdot 0{,}086 + 169\cdot 0{,}143 + 225\cdot 0{,}029 + 289\cdot 0{,}014 + 361\cdot 0{,}157) = 782{,}67;$$

$$D(X) = 782{,}67 - 596{,}75 = 185{,}92; \quad \sigma(X) = \sqrt{185{,}92} = 13{,}63.$$

Planteemos y resolvamos el sistema de ecuaciones para determinar a y b:

$$\begin{cases} (a+b)/2 = 24{,}43 \\ (b-a)/(2\sqrt{3}) = 13{,}63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 48{,}86 \\ b-a = 47{,}16 \end{cases} \Leftrightarrow (b = 48{,}01;\ a = 0{,}85);$$

$$1/(b-a) = 1/47{,}16 = 0{,}0212.$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0{,}85; \\ 0{,}0212, & \text{si} \quad 0{,}85 \leqslant x \leqslant 48{,}01 \\ 0 & \text{si} \quad x > 48{,}01. \end{cases}$$

Ahora hallamos las probabilidades de que la variable aleatoria distribuida por la ley indicada tome los valores pertenecientes a los intervalos]0, 5[,]5, 10[,]10, 15[, . . .,]45, 50[:

I	]−5, 0[	]0, 5[	]5, 10[	]10, 15[	]15, 20[	]20, 25[
P	0	0,088	0,106	0,106	0,106	0,106
I	]25, 30[	]30, 35[	]35, 40[	]40, 45[	]45, 50[	]50, 55[
P	0,106	0,106	0,106	0,106	0,064	0

Notemos que

$$P(0 < X < 5) = P(0{,}85 < X < 5) = 4{,}15\cdot 0{,}0212 = 0{,}088;$$

$$P(45 < X < 50) = P(45 < X < 48{,}01) = 3{,}01\cdot 0{,}0212 = 0{,}064.$$

La tabla de cálculo para determinar χ^2 tiene la forma

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,029	0,088	−0,059	0,003	0,034
0,171	0,106	0,065	0,004	0,038
0,114	0,106	0,008	0,006	0,057
0,057	0,106	−0,049	0,002	0,019
0,2	0,106	0,094	0,009	0,085
0,086	0,106	−0,020	0,000	0,000
0,143	0,106	0,037	0,001	0,009
0,029	0,106	−0,077	0,006	0,057
0,014	0,106	−0,092	0,008	0,075
0,157	0,064	−0,093	0,009	0,141
				0,515

De suerte que $\chi^2 = 70\cdot 0{,}515 = 36{,}05$; $l = 10$, $t = 3$, $r = 7$. Cuando el valor $r = 7$ para $\chi^2 = 30$ de la tabla IV encontramos $P = 0{,}0001$. Como para el valor constante de r con el aumento de χ^2 la probabilidad P disminuye, entonces para $\chi^2 = 36{,}05$ la probabilidad $P \leqslant 0{,}0001$. Esto quiere decir que en el caso dado la teoría reproduce mal la prueba.

Se puede llegar a la misma conclusión utilizando el criterio de Romanovski. En efecto, hallamos

$$\frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} = \frac{|36{,}05 - 7|}{\sqrt{14}} = \frac{29{,}05}{3{,}742} \simeq 7{,}763 > 3.$$

Así, pues, la hipótesis acerca de que la distribución estadística dada sea una distribución con densidad uniforme debe considerarse inverosímil.

906. Aplicar los criterios de Pearson y Romanovski para establecer la verosimilitud de la hipótesis acerca de una distribución normal de la variable aleatoria en el problema 901.

Resolución. La tabla de cálculo tiene la forma

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,02	0,02	0	0,0000	0,00
0,06	0,04	0,02	0,0004	0,01
0,08	0,09	−0,01	0,0001	0,001
0,12	0,15	−0,03	0,0009	0,006
0,22	0,20	0,02	0,0004	0,02
0,2	0,20	0,00	0,0000	0,00
0,14	0,15	−0,01	0,0001	0,0007
0,1	0,09	0,01	0,0001	0,001
0,04	0,04	0	0,0000	0,00
0,02	0,02	0	0,0000	0,00

Luego tenemos $n\sum_{i=1}^{10}\frac{(w_i-p_i)^2}{p_i}=50\cdot 0{,}0387=1{,}935$; $l=10$, $t=3$, $r=$ $=10-3=7$. De la tabla IV hallamos para $r=7$: si $\chi^2=1$, $P=0{,}9948$; si $\chi^2=2$, $P=0{,}9598$. Por consiguiente, para $\chi^2=1{,}935$ obtendremos un valor intermedio de P. Este valor se puede hallar aplicando el método de interpolación. Para $\chi^2=1$ y $\chi^2=2$ los valores de P se diferencian en $0{,}9948-0{,}9598=0{,}035$. Con el aumento de χ^2 la probabilidad P disminuye, por eso para $\chi^2=1{,}935$ tenemos

$$P=0{,}9598+0{,}065\cdot 0{,}035=0{,}9621,\ \text{o de otro modo } P=0{,}9948-0{,}935\cdot 0{,}035=0{,}9621.$$

La probabilidad obtenida es mayor que 0,1. De acuerdo con el criterio de Pearson esto es una razón para considerar que la ley normal reproduce bastante satisfactoriamente la distribución estadística dada.

De acuerdo con el criterio de Romanovski tenemos

$$\frac{|\chi^2-r|}{\sqrt{2r}}=\frac{|1{,}935-7|}{\sqrt{14}}=\frac{5{,}065}{3{,}742}\simeq 1{,}354<3.$$

Por lo tanto, la diveregencia entre la distribución estadística dada y la distribución teórica que la iguala se puede considerar casual.

907. Efectuar la igualación con ayuda de la ley normal de distribución de los datos de la tabla estadística:

I	]4, 1; 4, 2[	]4, 2; 4, 3[	]4, 3; 4, 4[	]4, 4; 4, 5[	]4, 5; 4, 6[	]4, 6; 4, 7[	]4, 7; 4, 8[	]4, 8; 4, 9[	]4, 9; 5[
n_x	1	2	3	4	5	8	8	9	10

I	]5, 0; 5, 1[	]5, 1; 5, 2[	]5, 2; 5, 3[	]5, 3; 5, 4[	]5, 4; 5, 5[	]5, 5; 5, 6[	]5, 6; 5, 7[	]5, 7; 5, 8[	]5, 8; 5, 9[
n_x	10	9	9	7	5	4	3	2	1

Comprobar la concordancia de las distribuciones estadística y teórica por los criterios de Pearson y Romanovski.

Resolución. Aquí $n=100$. En adelante supondremos que los valores de la variable aleatoria coinciden con los valores medios aritméticos de las fronteras de los intervalos:

X	4,15	4,25	4,35	4,45	4,55	4,65	4,75	4,85	4,95	5,05	5,15	5,25	5,35	5,45	5,55	5,65	5,75	5,85
W	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,08	0,08	0,09	0,1	0,1	0,09	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01

Como los valores de la variable aleatoria son próximos a 5, construimos la tabla

$X-5$	W	$(X-5)\,W$	$(X-5)^2\,W$
—0,85	0,01	—0,0085	0,0072
—0,75	0,02	—0,0150	0,0113
—0,65	0,03	—0,0195	0,0127
—0,55	0,04	—0,0220	0,0121
—0,45	0,05	—0,0225	0,0101
—0,35	0,08	—0,0280	0,0098
—0,25	0,08	—0,0200	0,0050
—0,15	0,09	—0,0135	0,0020
—0,05	0,1	—0,0500	0,0003
0,05	0,1	0,0500	0,0003
0,15	0,09	0,0135	0,0020
0,25	0,09	0,0225	0,0056
0,35	0,07	0,0245	0,0086
0,45	0,05	0,0225	0,0101
0,55	0,04	0,0220	0,0121
0,65	0,03	0,0195	0,0127
0,75	0,02	0,0150	0,0113
0,85	0,01	0,0085	0,0072
		—0,001	0,1404

Por consiguiente,

$$M(X-5) = -0{,}001; \quad M[(X-5)^2] = 0{,}1404; \quad M(X) = 5 + M(X-5) = 4{,}999;$$

$$D(X) = M[(X-5)^2] - [M(X-5)^2] = 0{,}1404; \quad \sigma(X) = \sqrt{0{,}1404} = 0{,}3747 \approx 0{,}375.$$

La densiadd de distribución de la variable aleatoria X se determina por la igualdad

$$f(x) = \frac{1}{0{,}375\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-5)^2/(2\cdot 0{,}375^2)}, \qquad (*)$$

o bien

$$f(x) = 2{,}67 \cdot z_u, \text{ donde } u = (x-5)/0{,}375 \approx 2{,}67\,(x-5).$$

Determinemos la probabilidad de que la variable aleatoria distribuida por la ley normal indicada tome los valores pertenecientes a los intervalos]4, 1; 4,2[,]4,2; 4,3[, . . .,]5,8; 5,9[y comprobemos la concordancia de las distribuciones estadística y teórica por los criterios de Pearson y Romanovski. Construimos las tablas:

X	U	z_u	$f(x)$	$hf(x)$	W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
4,15	—2,27	0,03	0,08	0,01	0,01	0,01	0,00	0,0000	0,000
4,25	—2,00	0,05	0,13	0,02	0,02	0,02	0,00	0,0000	0,000
4,35	—1,74	0,09	0,24	0,02	0,03	0,02	0,01	0,0001	0,005
4,45	—1,47	0,13	0,35	0,04	0,04	0,04	0,00	0,0000	0,000
4,55	—1,20	0,19	0,51	0,05	0,05	0,05	0,00	0,0000	0,000
4,65	—0,93	0,25	0,67	0,07	0,08	0,07	0,01	0,0001	0,001
4,75	—0,66	0,32	0,85	0,09	0,08	0,09	—0,01	0,0001	0,001
4,85	—0,40	0,37	0,99	0,10	0,09	0,10	—0,01	0,0001	0,001
4,95	—0,13	0,39	1,04	0,10	0,10	0,10	0,00	0,0000	0,000
5,05	0,13	0,39	1,04	0,10	0,10	0,10	0,00	0,0000	0,000
5,15	0,40	0,37	0,99	0,10	0,09	0,10	—0,01	0,0001	0,001
5,25	0,66	0,32	0,85	0,09	0,09	0,09	0,00	0,0000	0,000
5,35	0,93	0,25	0,67	0,07	0,07	0,07	0,00	0,0000	0,000
5,45	1,20	0,19	0,51	0,05	0,05	0,05	0,00	0,0000	0,000
5,55	1,47	0,13	0,35	0,04	0,04	0,04	0,00	0,0000	0,000
5,65	1,74	0,09	0,24	0,02	0,03	0,02	0,01	0,0001	0,005
5,75	2,00	0,05	0,13	0,02	0,02	0,02	0,00	0,0000	0,000
5,85	2,27	0,03	0,08	0,01	0,01	0,01	0,00	0,0000	0,000

Por consiguiente, $\chi^2 = 100 \cdot 0,014 = 1,4$, $l = 18$, $t = 3$, $r = 18-3 = 15$. De la tabla IV encontramos para $r = 15$; si $\chi^2 = 1$, $P = 1,000$, si $\chi^2 = 2$, $P = 1,000$. Por eso para $\chi^2 = 1,4$ la probabilidad buscada * $P = 1,000$. Ahora bien, de acuerdo con el criterio de Pearson la hipótesis acerca de que la distribución estadística sea una distribución normal con esperanza matemática igual a 5 y varianza igual a 0,14, es verosímil.

Utilizamos ahora el criterio de Romanovski:

$$\frac{|\chi^2-r|}{\sqrt{2r}}=\frac{|1,4-15|}{\sqrt{30}}=\frac{13,6}{5,477}\simeq 2,483<3.$$

Esto confirma una vez más que la distribución estadística dada concuerda con la normal que tiene la densidad definida por la igualdad (*).

908. Comprobar la hipótesis de que la distribución estadística examinada en el problema 903 concuerda con la distribución de Charlier.

Resolución. La tabla de cálculo tiene la forma

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,01	0,01	0	0,0000	0
0,05	0,04	0,01	0,0001	0,003
0,08	0,09	—0,01	0,0001	0,001
0,15	0,18	—0,03	0,0009	0,005
0,28	0,23	0,05	0,0025	0,011
0,21	0,20	0,01	0,0001	0,001
0,10	0,13	—0,03	0,0009	0,007
0,06	0,07	—0,01	0,0001	0,001
0,03	0,03	0,00	0,0000	0,000
0,03	0,02	0,01	0,0001	0,005
				0,034

*) Puesto que en la tabla los valores se dan con una precisión hasta 0,001, el valor buscado de P es un poco menor que la unidad.

Por consiguiente, $\chi^2 = 100 \cdot 0,034 = 3,4$; $l = 10$, $t = 5$, o sea, $r = 10 - 5 = 5$. De la tabla IV encontramos para $r = 5$: si $\chi^2 = 3$, $P = 0,7000$; si $\chi^2 = 4$, $P = 0,5494$. Por eso, para $\chi^2 = 3,4$ tenemos

$$P = 0,700 - 0,4 \cdot 0,1506 = 0,63976 > 0,1.$$

Utilizando el criterio de Romanovski, hallamos

$$\frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} = \frac{|3,4-5|}{\sqrt{10}} = \frac{1,6}{3,162} = 0,506 < 3.$$

Así, pues, según los criterios de Pearson y Romanovski la hipótesis acerca de que la distribución estadística examinada concuerda con la distribución de Charlier se puede considerar verosímil.

6. Criterio de aceptación de Kolmogórov. Supongamos que se da la distribución estadística

X	x_1	x_2	x_3	...	x_l
W_x	w_1	w_2	w_3	...	w_l

donde $x_1, x_2, \ldots, x_l$ son los valores medios de los intervalos respectivos de la variable aleatoria. En calidad de medida de divergencia entre las distribuciones teórica y estadística en el criterio de Kolmogórov se examina el máximo de valores del módulo de diferencia entre la función estadística de distribución $F^*(x)$ y la función teórica (integral) respectiva de distribución $F(x)$

Como es sabido, la función integral de distribución se define por las relaciones

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < x_1; \\ \sum_{j=1}^{k} p_j, & \text{si} \quad x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, l-1); \\ 1, & \text{si} \quad x \geqslant x_l, \end{cases}$$

donde $p_j = hf(x_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ y $f(x)$ es la densidad de distribución de la variable aleatoria X.

Primeramente se determina la magnitud

$$\lambda = D\sqrt{n}, \tag{1}$$

donde $D = \max |F^*(x) - F(x)|$ y n es el volumen de la muestra. Luego, de la igualdad

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2\lambda^2} \tag{2}$$

se determina la probabilidad de pue a cuenta de causas puramente aleatorias la divergencia máxima entre $F^*(x)$ y $F(x)$ resulte menor que la que se observa realmente.

Si la probabilidad $P(\lambda)$ es puqueña (menor que 0,05), la hipótesis debe rechazarse como inverosímil; si $P(\lambda)$ tiene valores comparativamente grandes, la hipótesis puede considerarse compatible con los datos experimentales.

Para hallar los valores de $P(\lambda)$ es cómodo valerse de la tabla (véase la tabla V, pág. 453).

909. Estimar el grado de concordancia de la distribución estadística examinada en el problema 899 con la de Poisson.

Resolución. Construimos la tabla

X	W	P	$F^*(x)$	$F(x)$	$F^*(x)-F(x)$
0	0,07	0,08	0,07	0,08	0,01
1	0,21	0,20	0,28	0,28	0
2	0,26	0,25	0,54	0,53	0,01
3	0,21	0,21	0,75	0,74	0,01
4	0,13	0,13	0,88	0,87	0,01
5	0,07	0,07	0,95	0,94	0,01
6	0,03	0,03	0,98	0,07	0,01
7	0,02	0,01	1	0,98	0,02

Es evidente que $D = \max|F^*(x) - F(x)| = 0{,}02$. Como $n = 100$, entonces, valiéndonos de la fórmula (1), hallamos $\lambda = 0{,}02\cdot\sqrt{100} = 0{,}2$. De la tabla V obtenemos $P(0{,}2) = 1{,}000$. Ahora bien, la distribución estadística examinada no contradice la teórica según la ley de Poisson.

910. Valiéndose del criterio de Kolmogórov, averiguar si concuerda o no con la distribución normal la estadística:

I	]0, 2[	]2, 4[	]4, 6[	]6, 8[	]8, 10[	]10, 12[	]12, 14[	]14, 16[	]16, 18[	]18, 20[
n_x	10	29	51	58	122	90	81	39	30	10

Resolución. Escribimos la distribución dada en la forma

X	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
W	0,02	0,06	0,10	0,12	0,20	0,18	0,16	0,08	0,06	0,02

Pasamos a una variable nueva T por la fórmula $X = 2T - 1$. Componemos la tabla de cálculo:

T	W	WT	WT^2
1	0,02	0,02	0,02
2	0,06	0,12	0,24
3	0,10	0,30	0,90
4	0,12	0,48	1,92
5	0,20	1,00	5,00
6	0,18	1,08	6,48
7	0,16	1,12	7,84
8	0,08	0,64	5,12
9	0,06	0,54	4,86
10	0,02	0,20	2,00
		5,50	34,38

Luego tenemos

$$M(T) = 5{,}50, \quad M(T^2) = 34{,}38, \quad D(T) = 34{,}38 - 30{,}25 = 4{,}13;$$

$$\sigma(T) = \sqrt{4{,}13} = 2{,}032;$$

$$M(X) = 2M(T) - 1 = 2\cdot 5{,}5 - 1 = 10; \quad \sigma(X) = 2\sigma(T) = 2\cdot 2{,}032 = 4{,}064.$$

Entonces la densidad de distribución se escribirá en la forma

$$f(x) = \frac{1}{4{,}064\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-10)^2/(2\cdot 4{,}064^2)} \qquad (*)$$

o bien $f(x) = 0{,}246\cdot z_u$, donde $u = (x - 10)/4{,}064$.
Componemos dos tablas:

X	U	z_u	$f(x)$	$hf(x)$
1	−2,214	0,035	0,009	0,02
3	−1,722	0,091	0,022	0,04
5	−1,230	0,187	0,046	0,09
7	−0,738	0,303	0,075	0,15
9	−0,246	0,387	0,095	0,19
11	0,246	0,387	0,095	0,19
13	0,738	0,303	0,075	0,15
15	1,230	0,187	0,046	0,09
17	1,722	0,091	0,022	0,04
19	2,214	0,035	0,009	0,02

X	W	$hf(x)$	$F^*(x)$	$F(x)$	$F^*(x) - F(x)$
1	0,02	0,02	0,02	0,02	0,00
3	0,06	0,04	0,08	0,06	0,02
5	0,10	0,09	0,18	0,15	0,03
7	0,12	0.15	0,30	0,30	0,00
9	0,20	0,19	0,50	0,49	0,01
11	0,18	0,19	0,68	0,68	0,00
13	0,16	0,15	0,84	0,83	0,01
15	0,08	0,09	0,92	0,92	0,00
17	0,06	0,04	0,98	0,96	0,02
19	0,02	0,02	1	0,98	0,02

De la seguna tabla se ve que casi todos los valores de las frecuencias relativas son próximos a los valores respectivos de las probabilidades halladas con ayuda de la densidad de distribución definida por la igualdad (*). De ello se deduce directamente que la distribución estadística dada es normal. No obstante, para resolver definitivamente la cuestión acerca de la concordancia de la distribución estadística con la normal aplicamos el criterio de Kolmogórov.

Como se ve de la segunda tabla, $D = \max |F^*(x) - F(x)| = 0{,}03$. Puesto que $n = 500$, tenemos $\lambda = 0{,}03 \cdot \sqrt{500} \simeq 0{,}67$. De la tabla V encontramos $P(0{,}65) = 0{,}7920$, $P(0{,}70) = 0{,}7112$. Como con el aumento de λ la probabilidad $P(\lambda)$ disminuye, $0{,}7112 < P(0{,}67) < 0{,}7920$.

Así, pues, se puede afirmar que la frontera superior del error absoluto de la igualdad aproximada $F^*(x) \simeq F(x)$ será no menor que 0,03 para cualquier valor de x.

Capítulo VI. Concepto de ecuaciones en derivadas parciales

§ 1. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

1. Ejemplos de ecuaciones diferenciales elementales en derivadas parciales. Examinemos varios ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales.

911. Hallar la función $z=z(x, y)$ que satisface la ecuación diferencial $\frac{\partial z}{\partial x}=1$.

Resolución. Integrando, obtenemos $z=x+\varphi(y)$, donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria. Esto es la solución general de la ecuacion diferencial dada.

912. Resolver la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$, donde $z=z(x, y)$.

Resolución. Integrando dos veces con respecto a y, obtenemos $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2+$ $+\varphi(x)$, $z=y^3+y\cdot\varphi(x)+\psi(x)$, donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones arbitrarias.

913. Resolver la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$.

Resolución. Integrando la ecuación con respecto a x, tenemos $\frac{\partial z}{\partial y}=f(y)$. Al integrar el resultado obtenido con respecto a y hallamos $z=\varphi(x)+\psi(y)$, donde $\psi(y)=\int f(y)dy$.

914. Hallar la solución general de la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1$.

915. Hallar la solución general de la ecuación $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}=0$.

2. Ecuaciones diferenciales de primer orden, lineales con respecto a las derivadas parciales. Examinemos la ecuación diferencial

$$X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}=Z, \tag{1}$$

donde X, Y y Z son las funciones de x, y, z.

Resolvemos previamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}.$$

Supongamos que la solución de este sistema se determina por las igualdades

$$\omega_1(x, y, z) = C_1, \quad \omega_2 = (x, y, z) = C_2.$$

Entonces, la integral general de la ecuación diferencial (1) tiene la forma

$$\Phi[\omega_1(x, y, z), \quad \omega_2(x, y, z)] = 0,$$

donde $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ es una función continuamente derivable.

916. Hallar la integral general de la ecuación $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$

Resolución. Examinemos el sistema de ecuaciones $\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial y}{y}=\frac{\partial z}{z}$. Resolviendo la ecuación $\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial y}{y}$, obtenemos $\frac{y}{x}=C_1$; la solución de la ecuación $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$ es $\frac{z}{x}=C_2$. Ahora se puede hallar la integral general de la ecuación dada:

$$\Phi(y/x, z/x) = 0, \text{ o bien } z/x = \psi(y/x),$$

o sea, $z = x\psi(y/x)$, donde ψ es una función arbitraria.

917. Hallar la integral general de la ecuación

$$(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Resolución. Escribimos el sistema de ecuaciones $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{0}$. Aprovechando la propiedad de las proporciones, representamos la ecuación $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}$ en la forma

$$\frac{dx+dy}{x^2+y^2+2xy}=\frac{dx-dy}{x^2+y^2-2xy}, \quad \text{o bien} \quad \frac{d(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{d(x-y)}{(x-y)^2}.$$

Integrando, obtenemos

$$-\frac{1}{x+y}=-\frac{1}{x-y}+C, \quad \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=C, \quad \frac{2y}{x^2-y^2}=C.$$

La última igualdad se puede escribir en la forma $\frac{y}{x^2-y^2}=C_1$.

La segunda ecuación del sistema $dz = 0$. De ello $z = C_2$.
La integral general tiene la forma

$$\Phi\left(\frac{y}{(x^2-y^2)}, \quad z\right)=0, \quad \text{o bien} \quad z=\psi\left(\frac{y}{x^2-y^2}\right).$$

918. Hallar una superficie que satisfaga la ecuación $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy$ y pase por la circunferencia $x^2+y^2=16$, $z=3$.

Resolución. Vamos a resolver el sistema de ecuaciones $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{xz}=$ $=-\frac{dz}{2xy}$. Quitando el denominador, tenemos

$$x\,dx=y\,dy, \quad 2x\,dx=-z\,dz.$$

Integrando ambas ecuaciones, obtenemos

$$x^2-y^2=C_1, \quad x^2+\frac{z^2}{2}=C_2.$$

La integral general de la ecuación dada tiene la forma

$$x^2+\frac{z^2}{2}=\psi(x^2-y^2). \qquad (*)$$

De la familia de superficies que se definen por esta ecuación es necesario destacar la que pasa por la circunferencia $x^2+y^2=16$, $z=3$. Para hallar la función ψ, en la igualdad $(*)$ hacemos $x^2=16-y^2$, $z=3$. Entonces obtenemos $16-y^2+9/2=\psi(16-2y^2)$. Sea que $16-2y^2=t$, de donde $y^2=8-t/2)$. Por consiguiente, $\psi(t)=(t+25)/2$, o sea, $\psi(x^2-y^2)=(x^2-y^2+25)/2$. Sustituyendo la expresión hallada en la relación $(*)$, nos queda

$$x^2+\frac{z^2}{2}=\frac{x^2-y^2+25}{2}, \quad \text{o bien} \quad x^2+y^2+z^2=25.$$

De suerte que la superficie buscada es una esfera.

919. Hallar la integral general de la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x}\operatorname{sen} x+\frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen} y=\operatorname{sen} z.$$

920. Hallar la integral general de la ecuación $yz\frac{\partial z}{\partial x}+$ $+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy$.

921. Hallar una superficie que satisfaga la ecuación $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+$ $+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=4$ y que pase por la parábola $y^2=z$, $x=0$.

§ 2. Tipos de ecuaciones de segundo grado en derivadas parciales. Reducción a la forma canónica

Examinemos la ecuación de segundo orden

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \qquad (1)$$

donde a, b, c son funciones de x e y.

Se dice que la ecuación indicada en el dominio D pertenece al *tipo hiperbólico* si en este dominio $b^2-ac>0$. Sin embargo, si $b^2-ac=0$, la ecuación pertenece al *tipo parabólico* y si $b^2-ac<0$, al *tipo elíptico*.

La ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

se llama *ecuación canónica de tipo hiperbólico*; la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

se llama *ecuación canónica de tipo parabólico*; la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

se llama *ecuación canónica de tipo elíptico*.

La ecuación diferencial

$$a\,(dy)^2-2b\,dx\,dy+c\,(dx^2)=0$$

se denomina *ecuación de características* de la ecuación (1).

Para una ecuación hiperbólica la ecuación de características tiene dos integrales: $\varphi(x,y)=C_1$, $\psi(x,y)=C_2$, o sea existen dos familias de características reales. Con ayuda de la sustitución de las variables $\xi=\varphi(x,\ y)$, $\eta=\psi(x,\ y)$ la ecuación diferencial (1) se reduce a la forma canónica.

Para una ecuación parabólica ambas familias de características coinciden, o sea la ecuación de características da solamente una integral $\varphi(x,\ y)=C$. En este caso es necesario efectuar la sustitución de las variables $\xi=\varphi(x,\ y)$, $\eta=\psi(x,\ y)$, donde $\psi(x,\ y)$ es una función cualquiera para la cual $\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\neq 0$. Una vez efectuada tal sustitución, la ecuación se reduce a la forma canónica.

Para una ecuación elíptica las integrales de la ecuación de características tienen la forma $\varphi(x,\ y)\pm i\psi(x,\ y)=C_{1,2}$, donde $\varphi(x,\ y)$ y $\psi(x,\ y)$ son funciones reales. Con ayuda de la sustitución $\xi=\varphi(x,\ y)$, $\eta=\psi(x,\ y)$ la ecuación (1) se reduce a la forma canónica.

922. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Resolución. Aquí, $a=x^2$, $b=0$, $c=-y^2$, $b^2-ac=x^2y^2>0$; por consiguiente, es una ecuación hiperbólica.

Escribimos la ecuación de características:

$$x^2\,(dy)^2-y^2\,(dx)^2=0,\quad \text{o bien}\quad (x\,dy+y\,dx)\,(x\,dy-y\,dx)=0.$$

Obtenemos dos ecuaciones diferenciales

$$x\,dy+y\,dx=0\quad \text{y}\quad x\,dy-y\,dx=0;$$

separando las variables e integrando, tenemos

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0,\quad \text{o sea,}\quad \ln y+\ln x=\ln C_1,$$

$$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{dx}=0,\quad \text{o sea,}\quad \ln y-\ln x=\ln C_2.$$

Después de la potenciación encontramos $xy=C_1$ e $y/x=C_2$, o sea, las ecuaciones de dos familias de características. Introducimos las nuevas variables $\xi = xy$, $\eta = y/x$. Expresamos las derivadas parciales con respecto a viejas variables por las derivadas parciales con respecto a las nuevas variables:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot y-\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot x+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot y\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2}\right)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)y-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cdot\frac{y}{x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{2y}{x^3}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot y-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^2}\right)y-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot y-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{y}{x^2}\right)\frac{y}{x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{2y}{x^3}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot y^2-$$

$$-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{y^2}{x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{y^2}{x^4}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=$$

$$=x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot x+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot x+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada, las expresiones halladas para las segundas derivadas, obtenemos

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot y^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{y^2}{x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{y^2}{x^4}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x^3}\right)-$$

$$-y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=0;$$

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot y^2+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{x}=0;\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{xy}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}-\frac{1}{2\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

o sea, la ecuación está reducida a la forma canónica.

923. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\operatorname{sen}^2 x-2y\operatorname{sen} x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Resolución. Aquí $a=\operatorname{sen}^2 x$, $b=-y\operatorname{sen} x$, $c=y^2$. Puesto que $b^2-ac=$ $=y^2\operatorname{sen}^2 x-y^2\operatorname{sen}^2 x=0$, la ecuación dada es parabólica.

La ecuación de características tiene la forma

$\operatorname{sen}^2 x\,(dy)^2+2y\operatorname{sen} x\,dx\,dy+y^2\,(dx)^2=0$, o sea, $(\operatorname{sen} x\,dy+y\,dx)^2=0$.

Separando en la ecuación $\operatorname{sen} x\,dy+y\,dx=0$ las variables e integrando, tenemos

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{\operatorname{sen} x}=0;\quad \ln y+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\ln C;\quad y\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=C$$

Efectuamos la sustitución de las variables: $\xi = y\cdot tg\frac{x}{2}$, $\eta = y$ (función arbitraria). Entonces obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\cdot \sec^2\frac{x}{2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cdot y\sec^2\frac{x}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot y^2\cdot\sec^4\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot y\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)y\cdot\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\sec\cdot\frac{x}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)y\cdot\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\sec^2\frac{x}{2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada las expresiones para las segundas derivadas, tenemos

$$\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot y^2\cdot\sec^4\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}^2 x+\frac{1}{2}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}^2 x-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)\cdot y^2\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen} x-\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen} x+$$

$$=y^2\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right)=0.$$

Fácilmente se puede mostrar que los términos que contienen $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}$ se eliminan mutuamente y la ecuación toma la forma

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}^2 x+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot y\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen} x=0,$$

o bien

$$y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\operatorname{sen} x.$$

Puesto que $\operatorname{sen} x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$ y $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\xi}{\eta}$, $\operatorname{sen} x=\frac{2\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}$. Finalmente obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

924. Reducir a la forma canónica la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Resolución. Aquí $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $b^2-ac=-1<0$, o sea, la ecuación es elíptica.

La ecuación de características tiene la forma

$$(dy)^2+2dx\,dy+2(dx)^2=0, \quad \text{o bien} \quad y'+2y'+2=0.$$

De aquí, $y'=-1\pm i$; obtenemos dos familias de características imaginarias: $y+x-ix=C_1$ e $y+x+ix=C_2$. Efectuando la sustitución de las variables $\xi=y+x$ y $\eta=x$, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Sustituyendo las expresiones halladas en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}=0, \text{ sea, } \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0.$$

Reducir a la forma canónica las ecuaciones:

925. $x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

926. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}+6\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

927. $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{x^2}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

§ 3. Ecuación de la oscilación de una cuerda

1. Resolución de la ecuación de la oscilación de una cuerda por el método de características (método de d'Alembert). Se llama cuerda a un hilo fino que puede encorvarse libremente. Sea que la *cuerda* está bajo una tensión inicial fuerte T_0. Si la cuerda se hace salir de la posición de equilibrio y se somete a la acción de una fuerza cualquiera, ella comienza a oscilar (vibrar) (fig. 55).

Nos limitaremos a examinar oscilaciones pequeñas, transversales y planas, de una cuerda, o sea, aquellas en que las desviaciones de los puntos de la cuerda con respecto a la posición de reposo sean pequeñas; en un instante cualquiera de tiempo todos los puntos de la cuerda están en un mismo plano y cada punto de la cuerda oscile permaneciendo en la misma perpendicular a la recta correspondiente al estado de reposo de la cuerda.

Tomando esta recta por el eje Ox, designamos con $u = u(x, t)$ la desviación de los puntos de la cuerda con respecto a la posición de equilibrio en un instante de tiempo t. Para cada valor fijo de t el gráfico de la función $u = u(x, t)$ sobre el plano xOu representa la forma de la cuerda en el instante de tiempo t.

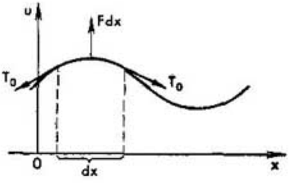

Fig. 55

La función $u = u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

donde $a^2 = T_0/\rho$, $f = F/\rho$; ρ es la masa de la unidad de longitud (densidad lineal de la cuerda), F es la fuerza que actúa sobre la cuerda de un modo perpendicular al eje de las abscisas, calculada para la unidad de longitud.

Si la fuerza externa falta, o sea, $f = 0$, entonces se obtiene la ecuación de oscilaciones (vibraciones) libres de una cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Para una determinación completa del movimiento de la cuerda es necesario prefijar en el instante inicial la forma y la velocidad de la cuerda, o sea, la posición de sus puntos y la velocidad de estos últimos en forma de las funciones de las abscisas x de los mismos. Sea $u \mid_{t=0} = \varphi(x)$, $\frac{du}{dt} \mid_{t=0} = \psi(x)$. Estas condiciones se llaman *condiciones iniciales* del problema.

Reduciendo la ecuación $\frac{d^2u}{dt^2} - a^2 \frac{d^2u}{dx^2} = 0$ a la forma canónica, obtenemos la ecuación $\frac{d^2u}{d\xi d\eta} = 0$, donde $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. La solución general de la última ecuación se escribirá así: $u = \theta_1(\mu) + \theta_2(\eta)$, donde $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, θ_1, θ_2 son funciones arbitrarias.

De este modo, la solución general de la ecuación de vibraciones libres tiene la forma

$$y = \Theta_1(x - at) + \Theta_2(x + at).$$

Escogiendo las funciones Θ_1 y Θ_2 de modo que la función $u = u(x, t)$ satisfaga las condiciones iniciales indicadas, llegamos a la solución de la ecuación diferencial inicial en la forma

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\, dz.$$

928. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{si} \quad u \Big|_{t=0} = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Resolución. Como $a=1$ y $\psi(x)=0$, $u=\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$, donde $\varphi\times\times(x)=x^2$. Así que

$$u=\frac{(x-t)^2+(x+t)^2}{2}, \quad \text{o sea } u=x^2+t^2.$$

929. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{si} \quad u\Big|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x.$$

Resolución. Aquí $a=2$, $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=x$. De donde

$$u=\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} z\,dz=\frac{1}{8}z^2\Big|_{x-2t}^{x+2t}=\frac{1}{8}[(x+2t)^2-(x-2t)], \text{ o sea, } n=xt.$$

930. Hallar la forma de la cuerda definida por la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

en el instante $t=\dfrac{\pi}{2a}$, si $u\Big|_{t=0}=\operatorname{sen} x$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=1$.

Resolución. Tenemos

$$u=\frac{\operatorname{sen}(x+at)+\operatorname{sen}(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x+at}^{x+at} dz,$$

o sea,

$$u=\operatorname{sen} x\cdot\cos at+\frac{1}{2a}\cdot z\Big|_{x-at}^{x+at}, \text{ o bien } u=\operatorname{sen} x\cdot\cos at+t.$$

Si $t=\pi/(2a)$, $u=\pi/(2a)$, o sea la cuerda es paralela al eje de las abscisas.

931. Hallar la solución de la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, si $u\Big|_{t=0}=x$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=-x$.

932. Hallar la solución de la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, si $u\Big|_{t=0}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x$.

933. Hallar la forma de la cuerda definida por la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en el instante $t=\pi$, si $u\Big|_{t=0}=\operatorname{sen} x$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x$.

Resolución de la ecuación de la cuerda por el metodo de Fourier. La solución de la ecuación diferencial

$\dfrac{d^2 u}{dt^2}=a^2\dfrac{d^2 u}{dx^2}$ que satisface las condiciones iniciales

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)$$

(se supone que $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ sobre el segmento [0, 1] son dos veces derivables continuamente, con ello $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ y $\psi(0) = \psi(l) = 0$) y las condiciones de frontera (de contorno)

$$u\,|_{x=0} = 0, \quad u\,|_{x=l} = 0,$$

puede ser representada como la suma de la serie infinita:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi at}{l}\Big) \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}, \tag{1}$$

donde

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x) \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Las condiciones de frontera indicadas se introducen al estudiar las vibraciones de la cuerda larga l sujetada en dos puntos: $x = 0$ y $x = l$.

934. La cuerda sujetada en los extremos $x = 0$, y $x = l$ tiene en el instante inicial la forma de la parábola $u = (4h/l^2) \times x(l - x)$. Determinar el desplazamiento de los puntos de la cuerda respecto al eje de abscisas si las valocidades iniciales faltan (fig. 56).

Resolución. Aquí $\varphi(x) = (4h/l^2)\cdot x(l - x)$, $\psi(x) = 0$. Hallamos los coeficientes de la serie que determina la solución de la ecuación de la cuerda oscilante:

$$a_k = \frac{2}{l}\cdot\int_0^l \varphi(x)\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{8h}{l^3}\cdot\int_0^l (lx - x^2)\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx; \qquad b_k = 0.$$

Para hallar los coeficientes a_k se integra dos veces por partes:

$$u_1 = lx - x^2,\ dv_1 = \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{1}\,dx,\ du_1 = (l - 2x)\,dx,\ v_1 = -\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l};$$

$$a_k = -\frac{8h}{l^3}(lx - x^2)\cdot\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{8h}{k\pi l^2}\cdot\int_0^l (l - 2x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

o sea,

$$a_k = \frac{8h}{k\pi l^2}\cdot\int_0^l (l - 2x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx;$$

$$u_2 = l - 2x, \quad dv_2 = \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad du_2 = -2\,dx, \quad v_2 = \frac{l}{k\pi}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l};$$

$$a_k = \frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l - 2x)\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{16h}{k^2\pi^2 l}\cdot\int_0^l \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx =$$

$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l = -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot[1 - (-1)^k].$$

Sustituyendo las expresiones para a_k y b_k en la igualdad (1), obtenemos

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot[1-(-1)^k]\cdot\cos\frac{k\pi at}{l}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}.$$

Pero si $k = 2n$, entonces $1-(-1)^k = 0$ y si $k = 2n+1$, entonces $1-(-1)^k = 2$; por eso finalmente tenemos

$$u(x, t)=\frac{32h}{\pi^3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\cdot\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

935. Se da una cuerda sujetada sobre los extremos $x = 0$ y $x = l$. Supongamos que en el instante inicial la cuerda tiene la forma de la

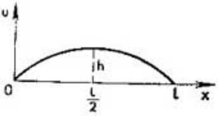

Fig. 56

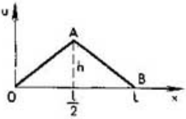

Fig. 57

quebrada OAB representada en la fig. 57. Hallar la forma de la cuerda para un instante de tiempo cualquiera t si faltan las velocidades iniciales.

Resolución. El coeficiente angular de la recta OA es igual a $h/(l/2)$, o sea, $2h/l$. Por consiguiente, la ecuación de esta recta es $u = (2h/l)x$. La recta AB trunca sobre los ejes de coordenadas los segmentos l y $2h$, por eso la ecuación de esta recta tiene la forma $x/l + u/(2h) = 1$, o bien $u = (2h/l)(l-x)$. Así pues

$$\varphi(x)=\begin{cases}(2h/l)\,x, & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant l/2\\ (2h/l)\,(l-x), & \text{si} \quad l/2\leqslant x\leqslant l.\end{cases} \qquad \psi(x)=0.$$

Encontramos

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{4h}{l^2}\cdot\int_0^{l/2} x\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx+$$

$$+\frac{4h}{l^2}\cdot\int_{l/2}^{l}(l-x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad b_k=0.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$a_k=-\frac{4h}{k\pi l}\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}+\frac{4h}{k\pi l}\cdot\int_0^{l/2}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx-$$

$$-\frac{4h}{k\pi l}(l-x)\cos\Big|_{l/2}^{l}-\frac{4h}{k\pi l}\cdot\int_{l/2}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx=$$

$$=-\frac{2h}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}+\frac{2h}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}=$$

$$=\frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}+\frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}=\frac{8h}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}.$$

Por consiguiente

$$u(x,\ t)=\frac{8h}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\cdot\cos\frac{k\pi at}{l}.$$

Escribimos algunos términos de la serie:

$$u(x,\ t)=\frac{8h}{\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi at}{l}-\frac{1}{3^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{l}\cdot\cos\frac{3\pi at}{l}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{l}\cdot\cos\frac{5\pi at}{l}-\frac{1}{7^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{7\pi x}{l}\cdot\cos\frac{7\pi at}{l}+\ldots\right).$$

936. Supongamos que las desviaciones iniciales de una cuerda sujetada en los puntos $x=0$ y $x=l$ son iguales a cero y la velocidad inicial se expresa por la fórmula

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\begin{cases} v_0\,(\text{const}), & \text{si}\quad |x-l/2|<h/2;\\ 0, & \text{si}\quad |x-l/2|>h/2.\end{cases}$$

Determinar la forma de la cuerda para un instante de tiempo cualquiera t.

Resolución. Aquí $\varphi(x)=0$ y $\psi(x)=v_0$ en el intervalo $](l-h)/2,\ (l+h)/2[$ y $\psi(x)=0$ fuera de este intervalo.
Por lo tanto, $a_k=0$;

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\cdot\int_{(l+h)/2}^{(l+h)/2}v_0\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx=-\frac{2v_0}{k\pi a}\cdot\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{(l-h)/2}^{(l+h)/2}=$$
$$=\frac{2v_0l}{k^2\pi^2a}\cdot\left[\cos\frac{k\pi(l-h)}{2l}-\cos\frac{k\pi(l+h)}{2l}\right]=\frac{4v_0l}{k^2\pi^2a}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi h}{2l}.$$

De donde

$$u(x,\ t)=\frac{4v_0l}{\pi^2a}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi h}{2l}\cdot\cos\frac{k\pi at}{l}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l},$$

o bien,

$$u(x,\ t)=\frac{4v_0l}{\pi^2a}\cdot\left(\operatorname{sen}\frac{\pi h}{2l}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi at}{l}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi h}{2l}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi at}{l}\times\right.$$
$$\left.\times\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi h}{2l}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi at}{l}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{l}-\ldots\right).$$

937. Una cuerda está sujetada en los extremos $x = 0$ y $x = 3$. En el instante inicial la cuerda tiene la forma de la quebrada OAB, donde O (0; 0), A (2; $-0,1$), B (3; 0) (fig. 58). Hallar la forma de la cuerda para un momento de tiempo cualquiera t si faltan las velocidades iniciales de los puntos de la cuerda.

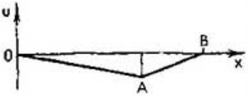

Fig. 58

938. Una cuerda sujetada en los extremos $x = 0$ y $x = 1$, en el instante inicial tiene la forma $u = h(x^4 - 2x^3 + x)$. Hallar la forma de la cuerda para un instante de tiempo cualquiera t si las velocidades iniciales faltan.

939. Una cuerda está sujetada en los puntos $x = 0$ y $x = l$. Las desviaciones iniciales de los puntos de la cuerda son iguales a cero y la velocidad inicial se expresa por la fórmula

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi(x - l/2)}{h}, & \text{si } \left|x - \dfrac{l}{2}\right| < \dfrac{h}{2}; \\ 0 & \text{si } \left|x - \dfrac{l}{2}\right| > \dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

Hallar la forma de la cuerda para un instante de timpo cualquiera t.

§ 4. Ecuación de conducción del calor

1. Ecuación de conducción del calor para un caso no estacionario. Designamos por $u = u(M, t)$ la temperatura en un punto M de un cuerpo homogéneo, limitado por una superficie S, en un instante t. Es sabido que la cantidad de calor dQ absorbida por el cuerpo en el transcurso del tiempo dt se expresa por la igualdad

$$dQ = k \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\, dS\, dt, \tag{1}$$

donde dS es el elemento de la superficie, k es el llamado coeficiente de conductibilidad térmica interna, $\frac{du}{dn}$ es la derivada de la función u según el sentido de la normal exterior a la superficie S. Como el calor fluye en la dirección de la disminución de la temperatura, entonces $dQ > 0$ si $\frac{du}{dn} > 0$ y $dQ < 0$ si $\frac{du}{dn} < 0$. De la igualdad (1) resulta que

$$Q = dt \cdot \iint\limits_S k \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\, dS.$$

Calculamos Q por otro procedimiento. Separemos el elemento dV del volumen V limitado por la superficie S. La cantidad de calor dQ obtenida por el elemento dV en el transcurso del tiempo dt es proporcional al aumento de la temperatura en este elmento a y la masa del mismo elemento, o sea,

$$dQ = \gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\, dt \cdot \rho\, dV, \tag{2}$$

donde ρ es la densidad de la substancia y γ, el coeficiente de proporcionalidad llamado capacidad calorífica de la substancia. De la igualdad (2) resulta que

$$Q = dt \cdot \iint\limits_V \int \gamma \cdot \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV.$$

Así, pues, tenemos

$$\iint\limits_V \int \frac{\partial u}{\partial t} dV = a^2 \cdot \iint\limits_S \frac{\partial u}{dn} dS,$$

donde $a^2 = \frac{k}{\rho\gamma}$. Teniendo en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial n} = |\text{grad } u|$ y $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$, transformamos la igualdad obtenida de un modo tal que presente el aspecto

$$\iint\limits_V \int \frac{\partial u}{\partial t} dV = a^2 \iint\limits_S \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) \right] dS.$$

Sustituyendo el segundo miembro de la igualdad con ayuda de la fórmula de Ostrogradski-Gauss, obtenemos

$$\iint\limits_V \int \frac{\partial u}{\partial t} dV = a^2 \iint\limits_V \int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dV.$$

De aquí, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

llamada *ecuación de conducción del calor para un caso no estacionario.*

Si el cuerpo es una varilla orientada por el eje Ox, entonces la ecuación de conducción del calor tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Examinemos el problema de Cauchy para los tres casos siguientes.

1. *Caso de una varilla ilimitada.* Se plantea el problema de hallar la solución $u(x, t)$ de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

que satisface la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, $-\infty < x < +\infty$. Aplicando el método de Fourier, obtenemos la solución de la ecuación en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot e^{-(\xi - x)^2/(4a^2 t)} d\xi.$$

2. *Caso de la varilla limitada por un lado.* La solución de la ecuación $\frac{du}{dt} = a^2 \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$, que satisface la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ y la condición de contorno $u(0, t) = \varphi(t)$, se expresa por la fórmula

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^{\infty} f(\xi) \cdot [e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)} - e^{-(\xi+x)^2/(4a^2t)}]\, d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^t \psi(\eta) \cdot e^{x^2/(4a^2(t-\eta))} (t-\eta)^{-3/2}\, d\eta.$$

3. *Caso de una varilla limitada por ambos extremos* $x = 0$ y $x = l$. Aquí el problema de Cauchy consiste en hallar la solución de la ecuación $\frac{du}{dt} = a^2 \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$ que satisface la condición inicial $u(x, t)\,|_{t=0} = f(x)$ y dos condiciones de contorno, por ejemplo, $u_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, o bien $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$.
En este caso la solución particular se busca en forma de la serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot e^{-(k\pi a/l)^2 \cdot t} \cdot \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l},$$

donde

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}\, dx$$

(para las condiciones de contorno $u\,|_{x=0} = u\,|_{x=l} = 0$) y en forma de serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot e^{-(k\pi a/l)^2 \cdot t} \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} + a_0,$$

donde

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x)\, dx$$

$\left(\text{para las condiciones de contoro } \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0\right)$.

940. Resolver la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ para la siguiente distribución inicial de la temperatura de la varilla:

$$u(x, t)\,|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} u_0, & \text{si} \quad x_1 < x < x_2; \\ 0, & \text{si} \quad x < x_1 \text{ o bien } x > x_2. \end{cases}$$

Resolución. La varilla es infinita, por eso la solución se escribirá en la forma de la integral de Poisson:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}\, d\xi.$$

Como $f(x)$ en el intervalo $]x_1, x_2[$ es igual a la temperatura constante u y fuera del intervalo la temperatura es igual a cero, la solución presentará el aspecto

$$u(x, t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{x_1}^{x_2} e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}\,d\xi.$$

El resultado obtenido se puede transformar en integral de probabilidades (véase la pág. 221).

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\mu^2}\,d\mu.$$

En efecto, haciendo $(x-\xi)/(2a\sqrt{t})=\mu$, $d\xi=-2a\sqrt{t}\cdot d\mu$, obtendremos

$$u(x, t)=-\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})}^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}\,d\mu=$$

$$=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}\,d\mu-\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}\,d\mu.$$

Por lo tanto, la solución se expresará por la fórmula

$$u(x, t)=\frac{u_0}{2}\cdot\left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

De gráfico de la función $\Phi(z)$ sirve la curva representada en la fig. 59.

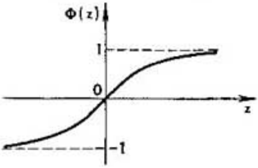

Fig. 59

941. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface la condición inicial $u|_{t=0}=f(x)=u_0$ y la condición de contorno $u|_{t=0}=0$.

Resolución. Aquí tenemos la ecuación diferencial de conducción del calor para una varilla semiinfinita. La solución que satisface las condiciones indicadas tiene la forma

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int_0^\infty u_0\cdot[e^{-(\xi-x)^2/(4t)}-e^{-(\xi+x)^2/(4t)}]\,d\xi,$$

o bien

$$u(x,\ t)=\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int\limits_0^{\infty}[e^{-(\xi-x)^2/(4t)}-e^{-(\xi+x)^2/(4t)}]\,d\xi.$$

Tomando $(x-\xi)/(2\sqrt{t})=\mu$, $d\xi=-2\sqrt{t}\,d\mu$, transformamos la primera integral utilizando la integral de probabilidades, o sea,

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty}e^{-(\xi-x)^2/(4t)}\,d\xi=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})}e^{-\mu^2}\,d\mu=\frac{u^2}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

Haciendo $(x+\xi)/(2\sqrt{t})=\mu$, $d\xi=2\sqrt{t}\,d\mu$, obtendremos

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int\limits_0^{\infty}e^{-(x+\xi)^2/(4t)}\,d\xi=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{x/(2\sqrt{t})}^{+\infty}e^{-\mu^2}\,d\mu=\frac{u_0}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

De este modo, la solución presentará el aspecto

$$u(x,\ t)=u_0\cdot\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

942. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<l)$, $t>0$, que satisface las condiciones iniciales:

$$u\,|_{t=0}=f(x)=\begin{cases} x, & \text{si}\quad 0<x\leqslant l/2;\\ l-x, & \text{si}\quad l/2\leqslant x<l\end{cases}$$

y las condiciones de contorno: $u\,|_{x=0}=u\,|_{x=l}\equiv 0$.

Resolución. La solución del problema de Cauchy, que satisfase las condiciones de contorno indicadas, vamos a buscarla en la forma

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k e^{-(k\pi/l)^2\cdot t}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l},$$

donde

$$b_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l}f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l/2}x\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx+\frac{2}{l}\int\limits_{l/2}^{l}(l-x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Integramos por partes, suponiendo $u=x$, $dv=\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\,dx$, $du=dx$ y $v=$ $=-\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}$; obtenemos

$$b_k=\frac{2}{l}\left(-\frac{lx}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{l^2}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\right)\Big|_0^{l/2}+$$

$$+\frac{2}{l}\left(-\frac{l^2}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{lx}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}-\frac{l^2}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\right)\Big|_{l/2}^{l}=$$

$$=\frac{4l}{k^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}.$$

Por consiguiente, la solución buscada tiene la forma

$$u=(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}\cdot e^{-k^2\pi^2t/l^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l},$$

o bien

$$u(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2t/l^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

943. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisface las condiciones iniciales

$$u(x,t)\,|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}1-x/l, & \text{si}\quad 0\leqslant x\leqslant l;\\ 1+x/l, & \text{si}\quad -l\leqslant x\leqslant 0;\\ 0, & \text{si}\quad x\geqslant l\ \text{y}\ x\leqslant -l.\end{cases}$$

Indicación. La solución se expresará por la fórmula

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-l}^{0}\left(1+\frac{\xi}{l}\right)e^{-(x-\xi)^2/(4t)}\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{0}^{l}\left(1-\frac{\xi}{l}\right)e^{-(x-\xi)^2/(4t)}\,d\xi.$$

Efectuando la sustitución $x-\xi/2\sqrt{t})=\mu$, simplificar la respuesta.

944. Hallar la solución de la ecuación de conducción del calor si el extremo izquierdo $x=0$ de una varilla semiinfinita está termoaislado y la distribución inicial de la temperatura es

$$u\,|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}0, & \text{si}\quad x<0;\\ u_0, & \text{si}\quad 0<x<l;\\ 0, & \text{si}\quad l<x.\end{cases}$$

945. Se da una varilla homogénea fina de l de largo que está aislada del espacio exterior y tiene la temperatura inicial $f(x)=$ $=cx(l-x)/l^2$. Los extremos de la varilla se mantienen a la temperatura igual a cero. Determinar la temperatura de la varilla en el instante de tiempo $t>0$.

Indicación: la ley de distribución de la temperatura de la varilla se describe por la ecuación $\frac{du}{dt}=a^2\cdot\frac{d^2u}{dx^2}$, la condición inicial $u\,|_{t=0}=f(x)=\frac{cx(l-x)}{l^2}$ y las condiciones de contorno $u\,|_{x=0}=u\,|_{x=l}=0$.

2. Ecuación de conducción del calor para un caso estacionario. La ecuación de conducción del calor para un caso estacionario se convierte en ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

puesto que $\frac{du}{dt} = 0$. La ecuación de Laplace se puede escribir en la forma $\Delta u = 0$. Aquí u es función solamente del punto y no depende del tiempo.

Para los problemas que se refieren a figuras planas la ecuación de Laplace se escribe en la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

La ecuación de Laplace tiene la misma forma también para el espacio si u no depende de la coordenada z, o sea, u (M) conserva un valor constante al desplazarse el punto M por una recta paralela al eje Oz. Efectuando la sustitución $x = r\cos\Theta$, $y = r\operatorname{sen}\Theta$, la ecuación (2) se puede transformar de modo que se exprese en coordenadas polares:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\Theta+\frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\Theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\Theta+2\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y}\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\Theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \Theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\operatorname{sen}\Theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\Theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\operatorname{sen}^2\Theta-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}r^2\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos^2\Theta-\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\Theta-\frac{\partial u}{\partial y}r\operatorname{sen}\Theta.$$

De aquí,

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2}=r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

o bien

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2}=0.$$

Con la ecuación de Laplace está vinculado el concepto de función armónica. La función se llama *armónica* en el dominio D si en este dominio ella es continua junto con sus derivadas hasta el segundo orden, inclusive, y satisface la ecuación de Laplace. Así, para la ecuación (1) la función $u = 1/r$, donde $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, es armónica en un dominio cualquiera excluyendo el punto M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Para un dominio plano cualquiera de tal función sirve $u = \ln(1/r)$ (o bien $u = \ln r$), o sea, esta función satisface la ecuación (2).

El problema consistente en determinar una función u que sea armónico en un dominio D y continua en D, incluyendo también la superficie S que limita este dominio, y que también satisfaga la condición de contorno u sobre $S = f(M)$, donde $f(M) = f(x, y, z)$, es una función definida continua sobre S, ha recibido el nombre de *problema de Dirichlet*.

946. Hallar la distribución estacionaria de la temperatura en una varilla fina que tiene la superficie lateral termoaislada, si sobre los extremos de la varilla $u\mid_{x=0} = u_0$, $u\mid_{x=l} = u_l$.

Resolución. El problema de Dirichlet para un caso unidimensional reside en determinar de la ecuación de Laplace $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ una función u que satisfaga las condiciones de contorno $u|_{x=0} = u_0$, $u|_{x=l} = u_l$. La solución general de la ecuación indicada es $u = Ax + B$ y, teniendo en cuenta las condiciones de contorno, obtenemos

$$u = \frac{u_l - u_0}{l} x + u_0,$$

o sea, la distribución estacionaria de la temperatura en una varilla fina que tiene la superficie lateral termoaislada es lineal.

947. Hallar la distribución estacionaria del calor en un espacio comprendido entre dos cilindros con el eje común Oz a condición de que sobre las superficies de los cilindros se mantenga una temperatura constante.

Indicación: pasar a las coordenadas cilíndricas considerando que u no depende de Θ y z.

§ 5. Problema de Dirichlet para el círculo

Supongamos que se da un círculo de radio R que tiene por centro el polo O del sistema polar de coordenadas. Vamos a buscar una función $u(r, \Theta)$ que sea armónica en el círculo y satisfaga sobre su circunferencia la condición $u|_{r=R} = f(\Theta)$, donde $f(\Theta)$ es una función dada continua sobre la circunferencia. La función buscada debe satisfacer en el círculo la ecuación de Laplace

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} = 0. \tag{1}$$

Para la resolución de este problema nos limitamos a aplicar el método de Fourier. Supongamos que la solución particular se busca en la forma

$$u = Q(r) \cdot T(\Theta).$$

Entonces obtendremos

$$r^2 \cdot Q''(r) \cdot T(\Theta) + r \cdot Q'(r) \cdot T(\Theta) + Q(r) \cdot T''(\Theta) = 0.$$

Dividimos las variables:

$$\frac{T''(\Theta)}{T(\Theta)} = -\frac{r^2 \cdot Q''(r) + r \cdot Q'(r)}{Q(r)}.$$

Igualando cada miembro de la igualdad obtenida a una constante $-k^2$, obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$T'(\Theta) + k^2 \cdot T(\Theta) = 0, \quad r^2 \cdot Q''(r) + r \cdot Q'(r) - k^2 \cdot Q(r) = 0.$$

De ello, para $k = 0$ obtendremos

$$T(\Theta) = A + B\Theta, \tag{2}$$

$$Q(r) = C + D \ln r. \tag{3}$$

Pero, si $k > 0$, entonces

$$T(\Theta) = A \cos k\Theta = B \operatorname{sen} k\Theta, \tag{4}$$

y la solución de la segunda ecuación la buscaremos en la forma $Q(r) = r^m$ lo que da $r^2 m(m-1) r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2 r^m = 0$, o bien $r^m (m^2 - k^2) = 0$, o sea, $m = \pm k$.

Por consiguiente,

$$Q(r) = Cr^k + Dr^{-k}. \tag{5}$$

Notemos que $u(r, \theta)$, en tanto función de θ, es una función periódica con período 2π, ya que para una función unívoca las magnitudes $u(r, \theta)$ y $u(r, \theta + 2\pi)$ coinciden. Por eso de la igualdad (1) resulta que $B = 0$ y en la igualdad (4) k puede tomar uno de los valores $1, 2, 3, \ldots$ ($k > 0$). Luego, en las igualdades (3) y (5) debe ser $D = 0$, ya que en caso contrario la función tendría una discontinuidad en el punto $r = 0$ y no sería armónica en el círculo. De suerte que hemos obtenido un conjunto innumerable de soluciones parciales de la ecuación (1) que son continuas en el círculo y que pueden ser escritas (cambiando en cierto grado las designaciones) en la forma

$u_0(r, \theta) = A_0/2$; $\quad u_n(r, \theta) = (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta) r^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

Escribimos ahora la función

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta) r^n$$

la cual, debido a la linealidad y homogeneidad de la ecuación de Lampace también sirve de solución de ella. Queda por determinar las magnitudes A_0, A_n, B_n, de modo que esta función satisfaga la condición $u|_{r=R} = f(\theta)$, o sea,

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta) R^n.$$

Aquí tenemos el desarrollo de la función $f(\Theta)$ en serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$. En virtud de las fórmulas conocidas encontramos

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, d\tau, \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n\tau\, d\tau,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \operatorname{sen} n\tau\, d\tau.$$

De este modo,

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cdot \cos n(\tau - \Theta) \right] dt.$$

Simplificamos el resultado obtenido. Haciendo $r/R = \rho$, $\tau - \Theta = t$, representamos la expresión puesta entre corchetes en la forma

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos nt = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt - \frac{1}{2}.$$

Examinamos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\rho e^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt + i \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \operatorname{sen} nt.$$

Esta serie converge para $\rho < 1$ y su suma es igual a

$$\frac{1}{1 - \rho e^{it}} = \frac{1}{1 - \rho \cos t - i\rho \operatorname{sen} t} = \frac{1 - \rho \cos t + i\rho \operatorname{sen} t}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2}.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt - \frac{1}{2} = \frac{1-\rho\cos t}{1-2\rho\cos t+\rho^2} - \frac{1}{2} = \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)},$$

o bien, retornando a designaciones anteriores, nos queda

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\tau-\Theta)+r^2}\,d\tau.$$

Hemos obtenido la solución del problema de Dirichlet para el círculo. La integral que está en el segundo miembro se llama integral de Poisson.

948. Hallar la distribución estacionaria de la temperatura sobre una placa homogénea redonda fina, de radio R, cuya mitad superior se mantiene a la temperatura de 1° y la inferior, a la de 0°.

Resolución. Si $-\pi < \tau < 0$, entonces $f(\tau) = 0$ y si $0 < \tau < \pi$, $f(\tau) = 1$. La distribución de la temperatura se expresa por la integral

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\tau-\Theta)+r^2}\,d\tau.$$

Supongamos que el punto $(r; \Theta)$ está en el semicírculo superior, o sea, $0 < \Theta < \pi$; entonces $\tau - \Theta$ varía de $-\Theta$ a $\pi - \Theta$ y este intervalo, de longitud π, no contiene los puntos $\pm\pi$. Por eso efectuemos la sustitución $\operatorname{tg}\frac{\tau-\Theta}{2} = t$, de donde $\cos(\tau-\Theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $d\tau = \frac{2dt}{1+t^2}$. Entonces obtenemos

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\operatorname{tg}(\Theta/2)}^{\operatorname{ctg}(\Theta/2)} \frac{R^2-r^2}{(R-r)^2+(R+r)^2\cdot t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\cdot t\right)\Bigg|_{-\operatorname{tg}(\Theta/2)}^{\operatorname{ctg}(\Theta/2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\frac{R+r}{R-r}\left(\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)}{1-\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2} = -\frac{1}{\pi}\cdot\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\operatorname{sen}\Theta},$$

o bien,

$$\operatorname{tg}(u\pi) = -\frac{R^2-r^2}{2Rr\operatorname{sen}\Theta}.$$

Como el segundo miembro es negativo, esto quiere decir que para $0 < \Theta < \pi$ u satisface las desigualdades $1/2 < u < 1$. Para este caso obtenemos la solución

$$\operatorname{tg}(\pi - u\pi) = \frac{R^2-r^2}{2Rr\operatorname{sen}\Theta}, \text{ o bien } u = 1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\operatorname{sen}\Theta} \quad (0 < \Theta < \pi).$$

Pero, si el punto se halla en el semicírculo inferior, o sea, $\pi < \Theta < 2\pi$, entonces el intervalo $]-\Theta, \pi-\Theta[$ de variación de $\tau - \Theta$ contiene el punto $-\pi$, pero no contiene el 0 y podemos efectuar la sustitución $\operatorname{ctg} \frac{\tau-\Theta}{2} = t$, de donde $\cos(\tau-\Theta)=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $d\tau = -\frac{2dt}{1+t^2}$. Entonces para estos valores de Θ tenemos

$$u(r, \Theta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{ctg}(\Theta/2)}^{\operatorname{tg}(\Theta/2)} \frac{R^2-r^2}{(R+r)^2+(R-r^2)\,t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} \frac{R-r}{R+r} \cdot \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right)\right].$$

Realizando transformaciones análogas, encontramos

$$u = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2-r^2}{2Rr \operatorname{sen}\Theta} \quad (\pi < \Theta < 2\pi).$$

Puesto que ahora el segundo miembro es positivo ($\operatorname{sen}\Theta < 0$), entonces $0 < u < 1/2$.

949. Hallar la solución de Laplace para la parte interior del anillo $1 \leqslant r \leqslant 2$ de modo que satisfaga las condiciones de contorno $u\mid_{r=1} = 0$, $u\mid_{r=2} = y$.

Indicación. Introducir las coordenadas polares.

Capítulo VII. Elementos de la teoría de las funciones de variable compleja

§ 1. Funciones de variable compleja

Supongamos que una variable compleja $z = x + yi$ toma todos los valores posibles de cierto conjunto Z. Si a cada valor de z del conjunto Z se la puede poner en correspondencia uno o varios valores de otra variable compleja $w = u + vi$, entonces la variable compleja w se llama *función* de z en la región Z y se escribe $w = f(z)$.

La función $w = f(z)$ se llama *uniforme* (unívoca) si a cada valor de z del conjunto Z se le puede poner en correspondencia un solo valor de w. Pero si existen valores de z a cada uno de los cuales se le pueden poner en correspondencia varios valores de w, entonces la función $w = f(z)$ se denomina *multiforme*.

Si $w = u + vi$ es función de $z = x + yi$, entonces cada una de las variables u y v es función de x e y, o sea, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Al contrario, si $w = u(x, y) + v(x, y)i$, donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones reales de x e y, entonces w se puede considerar como función de la variable compleja $z = x + yi$. En efecto, cada número complejo $z = x + yi$ tiene en correspondencia cierto par de números reales $(x; y)$ y a este par de números le corresponde uno o varios valores de w.

Se dice que la función uniforme $w = f(z)$ para $z \to c$ tiene un *límite* determinado C (c y C son números complejos) si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal, que de la desigualdad $|z - c| < \delta$ resulte la desigualdad $|f(z) - C| < \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim\limits_{z \to c} f(z) = C$.

La función $w = f(z)$ se llama *continua en el punto* z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. La función que es continua en cada punto de cierta región D se denomina *continua* en esta región.

Examinemos una región D limitada por una línea cerrada no nodal Γ. Esta región se dice *simplemente conexa* (fig. 60).

Si una región D está limitada por dos líneas cerradas, disjuntas y no nodales, Γ_1 y Γ_2, ella se dice *doblemente conexa* (fig. 61).

Sea Γ_1 la línea exterior y Γ_2 la línea interior. La región es doblemente conexa también en el caso en que la línea Γ_2 degenere en punto o en arco de una línea continua. Análogamente, pueden ser definidas regiones triplemente conexas y cuádruplemente conexas, etc. En la fig. 62 se muestra una región cuádruplemente conexa.

Las funciones de variable compleja e^z, sen z, cos z, sh z, ch z se definen como sumas de las siguientes series que convergen en todo el plano de la variable compleja:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots;$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots;$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots;$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots.$$

Para las funciones de variable compleja es válida *la fórmula de Euler*:

$$e^{zi} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

De esta fórmula resulta que

$$\operatorname{sh} zi = i \operatorname{sen} z, \quad \operatorname{ch} zi = \cos z.$$

Las fórmulas que se conocen de las matemáticas elementales

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \quad e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 - z_2},$$

$$\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \pm \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$$

son justas también para los valores complejos de los argumentos z_1 y z_2.

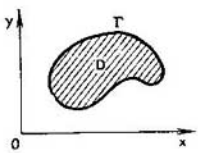

Fig. 60

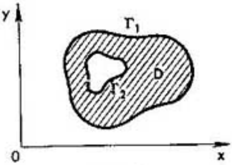

Fig. 61

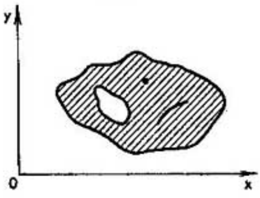

Fig. 62

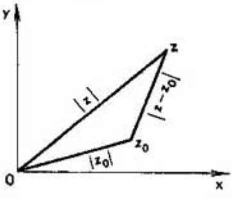

Fig. 63

Las funciones $z^{1/n}$ $(n \in N)$, $\ln z$, $\arcsen z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$ se definen como inversas con respecto a las funciones correspondientes z^n, e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$,

$\operatorname{tg} z = \operatorname{sen} z/\cos z$. Con ello las funciones $z^{1/n}$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{arcsen} z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$ son multiformes.

Se puede mostrar que

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} \rho + (\varphi + 2k\pi)\, i \quad (k \in Z),$$

donde $\rho = |z|$ y $\varphi = \arg z$.

950. Se da la función $w = z^2 + z$. Hallar los valores de la función si: 1) $z = 1 + i$; 2) $z = 2 - i$; 3) $z = i$; 4) $z = -1$.

Resolución. Tenemos
1) $w = (1 + i)^2 + 1 + i = 1 + 2i - 1 + 1 + i = 1 + 3i$;
2) $w = (2 - i)^2 + 2 - i = 4 - 4i - 1 + 2 - i = 5\ (1 - i)$;
3) $w = i^2 + i = -1 + i$;
4) $w = 1 - 1 = 0$.

951. Se da la función $f(z) = x^2 + y^2 i$, donde $z = x + yi$. Hallar: 1) $f(1 + 2i)$; 2) $f(2-3i)$; 3) $f(0)$; 4) $f(-i)$.

Resolución. Tenemos
1) $x = 1,\ y = 2,\ f(1 + 2i) = 1 + 4i$;
2) $x = 2,\ y = -3,\ f(2 - 3i) = 4 + 9i$;
3) $x = 0,\ y = 0,\ f(0) = 0 + 0 \cdot i = 0$;
4) $x = 0,\ y = -1,\ f(-i) = i$.

952. Mostrar que la función $w = |z|$ es continua para un valor cualquiera de z.

Resolución. Como la diferencia de dos lados de un triángulo no es mayor que el tercer lado, entonces

$$||z| - |z_0|| \leqslant |z - z_0|$$

(fig. 63). Sea $0 < \delta < \varepsilon$. Entonces, de la desigualdad $|z - z_0| < \delta$ resulta la desigualdad $||z| - |z_0|| < \varepsilon$, o sea, $\lim\limits_{z \to z_0} |z| = |z_0|$. De este modo, $|z|$ es una función continua.

953. Mostrar que $w = z^2$ es continua para un valor cualquiera de z.

Resolución. Tenemos $z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0)$. Si $z \to z_0$, entonces existe un número positivo M tal, que se cumplan las desigualdades $|z| < M$, $|z_0| < M$. Pero

$$|z^2 - z_0^2| = |z - z_0| \cdot |z + z_0| < |z - z_0| \cdot (|z| + |z_0|) < \\ < 2M\, |z - z_0|.$$

Tomamos $\delta < \varepsilon/(2M)$. De la desigualdad $|z - z_0| < \delta$ se deduce que

$$|z^2 - z_0^2| < 2M\delta < 2M \cdot \varepsilon/(2M), \text{ o sea, } |z^2 - z_0^2| < \varepsilon.$$

De suerte que $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$, o sea, $w = z^2$ es una función continua

954. Hallar $\ln(\sqrt{3} + i)$.

Resolución. Tenemos $z = \sqrt{3} + i$, $\rho = |z| = 2$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, o sea, $\ln(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + (\pi/6 + 2k\pi)\, i$, $k \in Z$.

955. Calcular $\cos (i/2)$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Puesto que

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots,$$

hallamos

$$\cos \frac{i}{2} = 1 + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{4!2^4} + \frac{1}{6!2^6} + \ldots = 1{,}1276.$$

956. Se da la función $w = e^z$. Hallar su valor: 1) para $z = \pi i/2$; 2) para $z = \pi(1 - i)$; 3) para $z = 1 + (\pi/2 + 2\pi k)i$, donde $k \in \mathbf{Z}$.

957. Se da la función $f(z) = 1/(x - yi)$, donde $z = x + yi$. Hallar $f(1 + i)$, $f(i)$, $f(3 - 2i)$.

958. Mostrar que $\omega = 2z^3$ se una función continua.

959. Hallar $\ln (1 - i)$.

960. Mostrar la validez de la igualdad $\operatorname{sen} i \cdot \operatorname{ch} 1 = i \cos i \cdot \operatorname{sh} 1$.

961. Resolver la ecuación $\cos z = 2$.

962. Hallar $\operatorname{arcsen} i$.

963. Determinar $\operatorname{sen} i$, caculando la parte real y la parte imaginaria con precisión de hasta 0,0001.

964. ¿A qué es igual $\operatorname{sen} (\pi/6 + i)$? Calcular la parte real y la parte imaginaria con precisión de hasta 0,001.

965. Se da la función $f(z) = e^{e^z}$. Hallar sus valores en los puntos: 1) $z = i$; 2) $z = 1 + \pi i/2$.

§ 2. Derivada de una función de variable compleja

Se llama *derivada* de una función uniforme de variable compleja $w = f(z)$ al límite de la relación $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ si Δz, de cualquier modo, tiende a cero.

De este modo,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

La función que tiene una derivada para tal valor de z se llama *derivable* (o *monógena*) para este valor de z. Si la función $w = f(z)$ es uniforme y tiene una derivada finita en cada punto de la región D, entonces esta función se denomina *analítica* en la región D.

Si la función $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en el punto $z = x + yi$, entonces en este punto existen las derivadas parciales $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}$, además, estas derivadas están vinculadas por las condiciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

llamadas *condiciones de Cauchy—Riemann*.

Las condiciones de Cauchy—Riemann son condiciones *necesarias* de derivabilidad de la función $w = f(z)$ en el punto $z = x + yi$.

Inversamente, si las derivadas parciales $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}$ son continuas en el punto $z = x + yi$ y las condiciones de Cauchy—Riemann $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$ se cumplen, entonces la función $w = f(z)$ es derivable en el punto $z = x + yi$.

La derivada de la función $f(z)$ se expresa por las derivadas parciales de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ con ayuda de las fórmulas

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Las derivadas de las funciones elementales z^n, e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$, $\ln z$, $\operatorname{arcsen} z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, se determinan por las mismas fórmulas que para el argumento real:

$$(z^n)' = n \cdot z^{n-1} \qquad (\operatorname{arcsen} z)' = 1/\sqrt{1-z^2},$$
$$(e^z)' = e^z, \qquad (\arccos z)' = -1/\sqrt{1-z^2},$$
$$(\cos z)' = -\operatorname{sen} z, \qquad (\operatorname{arctg} z)' = 1/(1+z^2),$$
$$(\operatorname{sen} z') = \cos z \qquad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z,$$
$$(\ln z)/ = 1/z, \qquad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

966. ¿Es derivable la función $f(z) = y + xi$?

Resolución. Encontramos

$$u = y, \quad v = x, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Una de las condiciones de Cauchy—Riemann no se cumple. Por lo tanto, la función dada no es derivable.

967. ¿Es derivable la función $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$?

Resolución. Tenemos

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Las condiciones de Cauchy—Riemann se cumplen. Por consiguiente, la función es derivable. Puesto que $f'(z) = \frac{du}{dx} + i \cdot \frac{dy}{dx}$, entonces

$$f'(z) = 2x + 2yi = 2(x + yi) = 2z.$$

La derivada $f'(z)$ puede ser determinada también de este otro modo:

$$f(z) = (x + yi)^2 = z^2, \quad f'(z) = 2z.$$

968. ¿Es derivable la función $f(z) = e^x \cos y + i \cdot e^x \operatorname{sen} y$?

Resolución. Hallamos

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \operatorname{sen} y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Las condiciones de Cauchy—Riemann se cumplen. Luego tenemos

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\operatorname{sen} y=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)=$$

$$e^x\cdot e^{yi}=e^{x+yi}=e^z,$$

o, de otro modo,

$$f(z)=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)=e^xe^{yi}=e^{x+yi}=e^z,\quad f'(z)=e^z.$$

969. Se da la parte real $u(x, y)=x^2-y^2-x$ de la función derivable $f(z)$, donde $z=x+yi$. Hallar la función $f(z)$.

Resolución. Encontramos $\frac{du}{dx}=2x-1$. Como $\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}$ (en virtud de una de las condiciones de Cauchy—Riemann), entonces $\frac{dv}{dy}=2x-1$. Integrando, hallamos

$$v(x, y)=2xy-y+\varphi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función arbitraria.

Utilizamos otra condición de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Puesto que $\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x)$, entonces $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y-\varphi'(x)$.

Pero de los datos del problema hallamos que $\frac{du}{dy}=-2y$. Por consiguiente,

$$-2y-\varphi'(x)=-2y,\quad \varphi'(x)=0,\quad \varphi(x)=C,$$

de donde

$$f(z)=x^2-y^2-x+i(2xy-y+C)=x^2-y^2+2xyi-(x+yi)+Ci,$$

o bien

$$f(z)=(x+yi)^2-(x+yi)+Ci,\ \text{o sea},\ f(z)=z^2-z+C_1.$$

970. Se da la parte imaginaria $v(x, y)=x+y$ de la función derivable $f(z)$. Hallar esta función.

Resolución. Tenemos $\frac{\partial v}{\partial y}=1$; por consiguiente, $\frac{\partial u}{\partial x}=1$ (de acuerdo con la condición de Cauchy-Riemann). Por eso

$$u=x+\varphi(y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y),\quad \frac{\partial v}{\partial x}=1.$$

Pero $\frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx}$. Por lo tanto, $\varphi'(y)=-1$. Integrando, encontramos que $\varphi(y)=-y+C$. De aquí $u=x-y+C$. Así, pues,

$$f(z)=x-y+C+i(x+y)=(1+i)(x+yi)+C,\ \text{o sea},\ f(z)=$$

$$=(1+i)z+C.$$

971. ¿Es derivable la función $f(z)=(x^2+y^2)-2xyi$?

972. Mostrar que la función $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$ es derivable y encontrar su derivada.

973. ¿Es derivable la función $f(z)=\operatorname{sen} x \operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y$? Si lo es, hallar su derivada.

974. Determinar las funciones reales $\varphi(y)$ y $\psi(x)$ de modo que la función $f(z) = \varphi(y) + i\psi(x)$ sea derivable.

975. ¿Para que valor de λ la función $f(z) = y + \lambda xi$ es derivable?

976. ¿Para qué valor de a la función $f(z) = a\bar{z}$ (donde $z = x - yi$) es derivable?

977. Se da la parte real $u = 2^x \cos(y \ln 2)$ de la función derivable $f(z)$. Hallar esta función.

978. Se da la parte imaginaria $v = \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$ de la función derivable $f(z)$. Hallar esta función.

§ 3. Concepto de aplicación conforme

Supongamos que se da la función $w = f(z)$, analítica en la región D. Fijamos cierto valor de $z = x + yi$. A este valor de z la corresponde un valor determinado de $w = u + vi$. De suerte que a cada punto $(x; y)$ sobre el plano xOy le corresponde un punto determinado (u, v) sobre el plano uOv.

Si el punto (x, y) sobre el plano xOy describe cierta línea Γ situada en la región D, entonces el punto $(u; v)$ sobre el plano uOv describirá la línea Γ'. A la

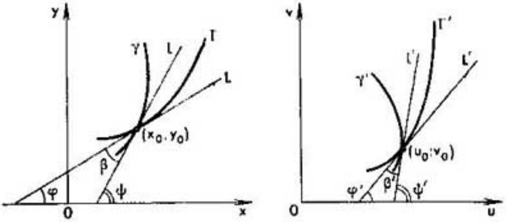

Fig. 64

línea Γ' la llamamos *aplicación* de la línea Γ sobre el plano uOv, por medio de la función analítica $w = f(z)$.

Tomamos sobre la línea Γ el punto $z_0 = x_0 + y_0 i$. A este punto le corresponde el punto $w_0 = u_0 + v_0 i$ sobre la línea Γ'. Trazamos la tangente L a la línea Γ en el punto (x_0, y_0) y la tangente L' a la línea Γ' en el punto $(u_0; v_0)$. Sea α el ángulo en que hace falta girar la recta L para que su dirección coincida con la de la recta L' (el ángulo comprendido entre la dirección inicial y la aplicada). En la teoría de las funciones analíticas se demuestra que $\alpha = \arg f'(z_0)$ si $f'(z_0) \neq 0$.

Examinemos otra línea γ que también pasa por el punto $(x_0; y_0)$ y su aplicación, o sea, la línea γ' que pasa por el punto $(u_0; v_0)$. Sea l la tangente a γ en el punto (x_0, y_0) y l' la tangente a γ' en el punto $(u_0; v_0)$.

Para que la dirección de la recta l coincida con la de la l', también en este caso hace falta girar la recta l en un ángulo α, ya que el ángulo de rotación es igual a $f'(z_0)$ [el valor de la derivada no depende de la selección de una curva que pase por el punto $(x_0; y_0)$; fig. 64].

Si φ y ψ son los ángulos que forman las tangentes L y l con el eje Ox, y φ' y ψ' los ángulos que forman las tangentes L' y l' con el eje Ou, entonces $\varphi' - \varphi = \alpha$, $\psi' - \psi = \alpha$ y $\varphi' - \varphi = \psi' - \psi$. Por consiguiente, $\psi - \varphi = \psi' - \varphi'$. Pero $\psi - \varphi$ es el ángulo comprendido entre las tangentes L y l y $\psi' - \varphi'$ es el ángulo comprendido entre las tangentes L' y l'. De este modo, dos líneas arbitrarias que se intersecan en el punto (x_0, y_0) se aplican formando dos líneas respectivas que se cortan en el punto $(u_0; v_0)$ de modo que el ángulo β comprendido entre las tangentes a las líneas dadas y a las aplicadas sea el mismo.

Se demuestra fácilmente que el módulo de la derivada en el punto $(x_0; y_0)$, o sea $|f'(z_0)|$ expresa el límite de la relación de las distancias comprendidas entre los puntos aplicados $w_0 + \Delta w_0$ y w_0 y los puntos iniciales $z_0 + \Delta z_0$ y z_0 (fig. 65).

Examinando otra curva y su aplicación, llegamos a la conclusión de que $|f'(z_0)|$ expresa el límite de relación de las distancias comprendidas entre los puntos aplicados $w_0 + \Delta' w_0$ y w_0 y los puntos iniciales $z_0 + \Delta' z_0$ y z_0.

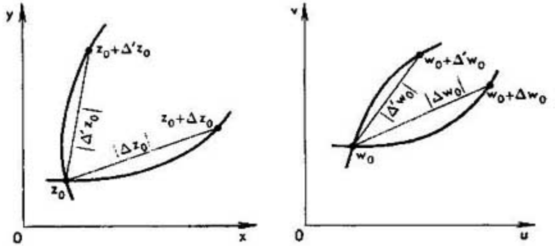

Fig. 65

Así que $|f'(z_0)|$ es la magnitud de distorsión de la escala en el punto z_0 al efectuar la aplicación con ayuda de la función $w = f(z)$.

Por lo tanto, si un triángulo infinitamente pequeño en el plano xOy se aplica con ayuda de la función $w = f(z)$ sobre el plano uOv, se obtiene un triángulo curvilíneo infinitamente pequeño que es semejante al inicial debido a la igualdad de los ángulos correspondientes y la proporcionalidad de los lados homólogos (en el límite).

La aplicación con ayuda de la función analítica $w = f(z)$ se llama *aplicación conforme*.

979. Con ayuda de la función $w = 1/z$ aplicar sobre el plano uov los puntos: 1) (1; 1); 2) (0; —2); 3) (2; 0).

Resolución. 1) Al punto (1; 1) le corresponde el valor de $z = 1 + i$; por consiguiente,

$$w = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Sobre el plano uOv obtendremos el punto $(1/2; -1/2)$;

2) $z = -2i$, $w = 1/(-2i) = (1/2)i$; obtendremos el punto $(0; 1/2)$;

3) $z = 2$, $w = 1/2$; obtendremos el punto $(1/2; 0)$.

980. Con ayuda de la función $w = z^3$ aplicar sobre el plano uOv la línea $y = x$.

Resolución. Tenemos

$w = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)$.

De este modo,

$$u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3.$$

De las ecuaciones obtenidas y de la ecuación $y = x$ se eliminan x e y:

$$u = -2x^3, \quad v = 2x^3, \quad \text{o sea,} \quad v = -u.$$

Por lo tanto, de aplicación de la bisectriz de los ángulos de las coordenadas I y III del sistema xOy sirve la bisectriz de los ángulos de las coordenadas II y IV del sistema uOv.

981. Sea $w = z^2$ y que z describe el cuadrado que es definido por las desigualdades $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. ¿Qué región describe w?

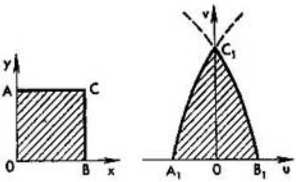

Fig. 66

Resolución. Tenemos

$= (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$

$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$

Hallamos las aplicaciones de los vértices (fig. 66). Si $x = 0$, $y = 0$, entonces $u = 0$, $v = 0$; si $x = 0$, $y = 1$, entonces $u = -1$, $v = 0$; si $x = 1$, $y = 0$, entonces $u = 1$, $v = 0$; si $x = 1$, $y = 1$, entonces $u = 0$, $v = 2$.

Hallamos las aplicaciones de los lados del cuadrado.

OB: $y = 0$, $u = x^2$, $v = 0$, o sea, $v = 0$, $u \geqslant 0$, es el segmento OB_1 del eje de abscisas Ou.

OA: $x = 0$, $u = -y^2$, $v = 0$, o sea, $v = 0$, $u \leqslant 0$, es el segmento OA_1 del eje de abscisas Ou.

AC: $y = 1$, $u = x^2 - 1$, $v = 2x$; eliminando x, obtenemos $u = v^2/4 - 1$, o sea, el arco de la parábola que une los puntos A_1 $(-1; 0)$ y C_1 $(0; 2)$.

BC: $x = 1$, $u = 1 - y^2$, $v = 2y$; eliminado y, obtenemos $u = 1 - v^2/4$, o sea, el arco de la parábola que une los puntos B_1 $(1; 0)$ y C_1 $(0; 2)$.

Así, pues, de aplicación del cuadrado sirve el triángulo curvilíneo limitado por las líneas $v = 0$, $u = v^2/4 - 1$, $u = 1 - v^2/4$ y situado en el semiplano superior.

982. Con ayuda de la función $w = 2z + 1$ hallar la aplicación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ sobre el plano uOv.

Resolución. Tenemos

$$w = 2\,(x = yi) = 1 = (2x + 1) + 2yi,$$

de donde $u = 2x + 1$, $v = 2y$. De estas dos igualdades hallamos $x = (u - 1)/2$ e $y = v/2$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la circunferencia, obtendremos

$$(u - 1)^2 + v^2 = 4.$$

De suerte que la aplicación buscada es una circunferencia con radio igual a 2 y centro en el punto O $(1; 0)$.

983. Con yuda de la función $w = z^2$ aplicar sobre el plano uOv las rectas $x = 2$ e $y = 1$.

984. Con ayuda de la función $w = -z^2$ aplicar sobre el plano uOv la recta $x + y = 1$.

985. Con ayuda de la función $w = iz + 1$ hallar las aplicaciones de los ejes de las coordenadas sobre el plano uOv.

986. Explicar el sentido de la aplicación sobre el plano uOv por medio de la función $w = e^{\varphi i}z$, donde φ es constante.

987. Se da la parábola $y = x^2$. Aplicar esta parábola sobre el plano uOv por medio de la función $w = z^2$.

988. Mostrar que el ángulo formado entre las rectas $y = 1$ e $y = x - 1$ no varía después de la aplicación $w = (1 + i)z + (1 - i)$.

§ 4. Integral de derivable compleja

Como es sabido, la curva Γ se llama *suave* si tiene una tangente de variación continua.

Una curva se denomina *suave a trozos* si está compuesta por un número finito de arcos suaves.

Se da la función de variable compleja $w = f(z)$ que es continua en cierta región D. Sea Γ una curva suave arbitraria ubicada en la región D. Examinemos un arco de una curva que tenga por origen el punto z_0 y por extremo el punto z. Dividimos este arco en n partes con los puntos arbitrarios $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = z$ situados sucesivamente sobre la línea Γ.

Escribimos la suma

$$S_n = f(z_0)\,\Delta z_0 + f(z_1)\,\Delta z_1 + \ldots + f(z_{n-1})\,\Delta z_{n-1},$$

donde $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Sea λ la mayor entre las magnitudes $|\Delta z_k|$. Si $\lambda \to 0$, entonces $n \to \infty$ y la suma S_n tiende a cierto límite. Este límite ha recibido el nombre de *integral* de la función $f(z)$ sobre el arco de la curva Γ, comprendido entre los puntos z_0 y z, o sea,

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \lim_{\lambda\to 0}\,[f(z_0)\,\Delta z_0 + f(z_1)\,\Delta z_1 + \ldots + f(z_{n-1})\,\Delta z_{n-1}].$$

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces la integral $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz$ se reduce a dos integrales curvilíneas de las funciones reales con ayuda de la fórmula

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int_\Gamma v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy.$$

Sea Γ una línea suave a trozos constituida por las partes suaves $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$; entonces la integral sobre esta línea se puede determinar valiéndose de la igualdad

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\Gamma_m} f(z)\,dz.$$

Si $f(z)$ es una función analítica en una región D simplemente conexa, el valor de la integral $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ tomada a lo largo de una línea arbitraria Γ suave a trozos, perteneciente a la región D, no depende de la línea Γ y se determina solamente por las posiciones de los puntos inicial y final de esta línea.

Para toda función analítica $f(z)$ en cierta región D simplemente conexa la integral $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ tomada sobre cualquier contorno cerrado γ, suave a trozos, que esté en la región D es igual a cero (Teorema de Cauchy).

Examinemos la expresión $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt$. Aquí por camino de integración se toma una línea arbitraria Γ, suave a trozos, que está en la región D y une los puntos z_0 y z. Se supone que la función $f(t)$ es analítica en la región D. Se puede mostrar fácilmente que $F'(z)=f(z)$. La función $F(z)$, cuya derivada es igual a $f(z)$, se llama función *primitiva* con respecto a la función $f(z)$. Si es conocida una de las funciones primitivas $F(z)$, entonces todas otras funciones primitivas se contienen en la expresión $F(z)+C$, donde C es una constante arbitraria. Esta expresión $F(z)+C$ se denomina *integral indefinida* de la función $f(z)$. Al igual que para las funciones reales, aquí se cumple la igualdad

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt=\Phi(z)-\Phi(z_0)$$

(fórmula de Newton—Leibniz), donde $\Phi(z)$ es una función primitiva cualquiera con respecto a $f(z)$.

Cara hallar una función primitiva con respecto a una función analítica $f(z)$ se aplican las fórmulas ordinarias de integración.

Examinemos $n+1$ líneas cerradas suaves a trozos $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, tales que cada una de las líneas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ esté fuera de las demás y todas ellas se encuentren dentro de γ_0. El conjunto de puntos que estén simultáneamente dentro de γ_0 y fuera de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ es una región D de conexión múltiple $(n+1)$.

Sea $f(z)$ una función analítica en la región D (incluyendo los valores sobre los contornos $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$). En este caso se cumple la igualdad

$$\int\limits_{\gamma_0} f(z)\,dz=\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz+\ldots+\int\limits_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

989. Calcular la integral a $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$, donde $f(z)=(y+1)-xi$, AB es el segmento de la recta que une los puntos $z_A=1$ y $z_B=-i$

Resolución. Tenemos $u=y+1$, $v=-x$. De aquí,

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz=\int\limits_{AB}(y+1)\,dx+x\,dy-i\int\limits_{AB}x\,dx-(y+1)\,dy=$$

$$=(y+1)\cdot x\Big|_{x=1,\,y=0}^{x=0,\,y=-1}-i\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^0+i\cdot\frac{(y+1)^2}{2}\Big|_0^{-1}=$$

$$=-1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i=- \;.$$

Se puede proceder también de otro modo. Es fácil ver que $f(z) = 1 - iz$ y que

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{1}^{-i} (1-iz)\,dz = \frac{(1-iz)^2}{-2i}\Big|_{1}^{-i} = \frac{(1+i^2)^2}{-2i} + $$
$$+ \frac{(1-i)^2}{2i} = \frac{1-2i+i^2}{2i} = -1.$$

989a. Hallar el ángulo de rotación y la razón de aplicación en el punto $z = -2i$ para la aplicación $W = \frac{(z+i)^2}{z-i}$.

Resolución. Como el ángulo de rotación y la razón de aplicación se encuentran por la derivada en el punto dada, derivamos la función dada.

$$W' = \frac{2(z+i)(z-i)-(z+i)^2}{(z-i)^2} = \frac{4+(z-i)^2}{(z-i)^2}.$$

En el punto $z_0 = -2i$: $\alpha = \arg\left[\frac{4+(z-i)^2}{(z-i)^2}\right] = \arg\left(\frac{5}{9}\right) = 0.$

$$K = \left|\frac{4+(z-i)^2}{(z-i)^2}\right| = \frac{5}{9} < \text{(contracción)}.$$

990. Calcular la integral $\int_{AB} f(z)\,dz$, donde $f(z) = x^2 + y^2 i$, AB es el segmento de la recta que une los puntos $A\ (1+i)$ y $B\ (2+3i)$.

Resolución. Tenemos $u = x^2$, $v = y^2$; de suerte que

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{AB} x^2\,dx - y^2\,dy + i\int_{AB} y^2\,dx + x^2\,dy.$$

Puesto que la expresión $x^2\,dx - y^2\,dy$ es la diferencial total, la primera entre las integrales en el segundo miembro de la igualdad se calcula como la integral definida

$$\int_{AB} x^2\,dx - y^2\,dy = \int_{1}^{2} x^2\,dx - \int_{1}^{3} y^2\,dy = \frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_{1}^{3} =$$
$$= \frac{7}{3} - \frac{26}{3} = -\frac{19}{3}.$$

Para calcular la segunda integral escribimos la ecuación de la recta AB:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-1}{2-1}, \quad \text{o sea,} \quad y = 2x-1.$$

De donde $dy = 2\,dx$, y

$$\int_{AB} y^2\,dx + x^2\,dy = \int_{1}^{2} [(2x-1)^2 + 2x^2]\,dx = \int_{1}^{2} (6x^2-4x+1)\,dx =$$
$$= (2x^3-2x^2+x)\,|_1^2 = 10-1 = 9.$$

Por consiguiente, $\int_{AB} f(z)\,dz = -\frac{19}{3} + 9i.$

990a. ¿En qué puntos del plano el ángulo de rotación de la aplicación $W = \frac{1+iz}{1-iz}$ es igual a cero? ¿En qué puntos el coeficiente de estiramiento es igual a 1?

Resolución. El enunciado del problema supone, ante todo, la determinación de tales puntos, en los cuales la aplicación dada es conforme, ya que sólo en estas condiciones se puede hablar del ángulo de rotación y del coeficiente de estiramiento. Hallamos

$$W' = \frac{i(1-iz)+i(1+iz)}{(1-iz)^2} = \frac{2i}{(1-iz)^2} = -\frac{2i}{(z+i)^2}.$$

Puesto que $W'(z) \neq 0$ para ningún valor de z, entonces la aplicación dada es conforme en todo el plano con el punto sacado $z = -i$. El ángulo de rotación α de esta aplicación en el punto z será

$$\alpha = \arg W'(z) = \arg\left[-\frac{2i}{(z+i)^2}\right] = \arg\frac{-4x(y+1)-2i\,[x^2-(y+2)^2]}{[x^2+(y+1)^2]^2}.$$

El número $W'(z)$ será real si $\operatorname{Im} W'(z) = 0$ y positivo si, además, $\operatorname{Re} W'(z) > 0$, o sea,

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Im} W'(z) = x^2-(y+1)^2 = 0\\ \operatorname{Re} W'(z) = -4x(y+1) > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(y+1)^2 = x^2\\ x(y+1) < 0\end{array}\right. \Leftrightarrow y = -x-1 \ (x \neq 0).$$

De suerte que el ángulo de rotación de la aplicación dada es igual a cero en los puntos de la recta $y = -x-1$ (con el punto sacado $z = -i$). El coeficiente de estiramiento en el punto z es igual a $k = W'(z)$; según el enunciado del problema este coeficiente debe igualarse a la unidad y, por consiguiente,

$$|W'(z)| = \left|\frac{-2i}{(z+i)^2}\right| = 1 \Leftrightarrow |(z+i)^2| = 2 \Leftrightarrow |z+i| = \sqrt{2},$$

es decir, la ecuación de la circunferencia en la forma compleja con centro en el punto $z = -i$ y radio $\sqrt{2}$.

991. Calcular la integral $\int\limits_{i}^{1+i} z\,dz$.

Resolución. La función subintegral es analítica. Utilizando la fórmula de Newton—Leibniz, obtenemos

$$\int\limits_{i}^{1+i} z\,dz = \frac{z^2}{2}\Big|_{i}^{1+i} = \frac{1}{2}\,[(1+i)^2-i^2] = \frac{1}{2}(1+2i-1+1) = \frac{1}{2}+i.$$

992. Calcular $\int\limits_{\gamma} \bar{z}\,dz$, donde γ es un contorno cerrado, $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$.

Resolución. Puesto que $\bar{z} = x - yi$, $dz = dx + i\,dy$, entonces

$$\int\limits_{\gamma} \bar{z}\,dz = \int\limits_{\gamma} x\,dx + y\,dy + i\int\limits_{\gamma} x\,dy - y\,dx.$$

La primera integral del segundo miembro es igual a cero como integral de la diferencial total sobre un contorno cerrado.

Al calcular la segunda integral hay que tener en cuenta que $dx = -\operatorname{sen} t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$. De aquí, $x\, dy - y\, dx = \cos^2 t\, dt + \operatorname{sen}^2 t\, dt = dt$; finalmente, obtenemos

$$\int_{\gamma} \bar{z}\, dz = i \int_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

993. Calcular $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-4}$, donde γ es una elipse, $x = 3\cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$.

Resolución. La función subintegral es analítica en la región limitada por esta elipse, por eso $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-4} = 0$.

994. Calcular $\int_{\gamma} \frac{dt}{z-(1+i)}$, donde γ es la circunferencia $|z - (i+1)| = 1$.

Resolución. La ecuación de la circunferencia se puede escribir en la forma $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, o bien $x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, o bien

$$z = 1 + i + e^{it}.$$

En la región limitada por la circunferencia γ la función subintegral no es analítica, ya que en el punto $z = 1 + i$ que sirve de centro de esta circunferencia la función se convierte en infinito.

Puesto que $dz = i \cdot e^{it}\, dt$, entonces

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-(1+i)} = \int_{0}^{2\pi} \frac{ie^{it}\, dt}{e^{it}} = i \int_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

995. Calcular $\int_{\gamma} \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}\, dz$, donde γ es la circunferencia $|z| = 2$.

Resolución. La función subintegral tiene discontinuidades sólo en los puntos $z = 1$ y $z = i$. La función $f(z)$ es analítica en la región triplemente conexa que no es más que un círculo con circunferencia de frontera γ, del cual están recortados dos círculos $|z-1| < r$, $|z-i| < r$, donde $r > 0$ es una magnitud suficientemente pequeña (fig. 67). Por consiguiente,

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz,$$

donde γ_1 es la circunferencia $|z-1| = r$, γ_2 es la circunferencia $|z-i| = r$.

Puesto que

$$f(z) = \frac{z-1+z-i}{(z-1)(z-i)} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z-1},$$

entonces,

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-i} + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-i} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1}.$$

Los sumandos primero y cuarto en el segundo miembro son iguales a cero, ya que las funciones subintegrales son analíticas en las regiones correspondientes.
Por consiguiente,

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-i}.$$

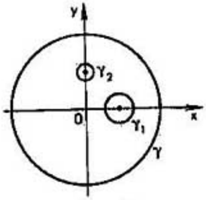

Fig. 67

La circunferencia γ_1 tiene la ecuación $z = 1 + re^{i\varphi}$, y la γ_2, la ecuación $z = i + re^{i\varphi}$. Por lo tanto,

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{0}^{2\pi i} \frac{ire^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi}} + \int_{0}^{2\pi i} \frac{ire^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi}} = 4\pi i.$$

996. Calcular la integral $\int_{\Gamma} f(z)\,dz$ si $f(z) = y + xi$; Γ es la quebrada OAB con los vértices en los puntos $z_0 = 0$, $z_A = i$, $z_B = 1 + i$.

Hallar el ángulo de rotación y la razón de aplicación en el punto z_0 para la aplicación $W = f(z)$

996a. $W = z^3$, $z_0 = 1 - i$.

996b. $W = \frac{1}{z}$, $z_0 = 2i$.

996c. $W = u + iv$, donde $u = e^y \cos x$, $v = -e^y \operatorname{sen} x$, $z_0 = i$.

997. Calcular la integral $\int_{AB} z^2\,dz$ si AB es el segmento de la recta que una los puntos $z_A = 1$, $z_B = i$.

Hallar los puntos del plano en los cuales el coeficiente de estiramiento de las aplicaciones siguientes sea igual a 1.

997a. $W = z^2$.

997b. $W = z^2 - 2z$.

Hallar puntos del plano en los cuales el ángulo de rotación de las siguientes aplicaciones sea igual a cero

997c. $W = z^3$.

997d. $W = iz^2$.

998. Calcular la integral $\int_{\gamma} z^{10}\,dz$, donde γ es la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

999. Calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$, donde γ es la circunferencia $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$.

1000. Calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, donde γ es la circunferencia $z = e^{ti}$.

1001. Calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{(a+b)z - az_1 - az_2}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz$, donde γ es el círculo $|z| \leqslant R$ y z_1 y z_2 son puntos interiores de este círculo, además, $z_1 \neq z_2$.

§ 5. Series de Taylor y de Laurent

Supongamos que se da una función $f(z)$, analítica en cierto entorno del punto a. Examinemos la serie

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3+\ldots .$$

Esta serie se llama *serie de Taylor* de la función $f(z)$ y dentro de su círculo de convergencia expresa la función $f(z)$, o sea, dentro del círculo de convergencia se cumple la igualdad

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots .$$

Si $a=0$, la última igualdad se escribe en la forma

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\frac{f'''(0)}{3!}z^3+\ldots .$$

En este caso se dice que la función $f(z)$ está desarrollada en *serie de Maclaurin*.

Examinemos ahora dos series:

$$\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-3}}{(z-a)^3}+\ldots \tag{1}$$

$$A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+A_3(z-a)^3+\ldots . \tag{2}$$

La región de convergencia de la primera serie (si esta región existe) se define por la desigualdad $|z-a|>r$. Si existe la región de convergencia de la segunda serie, ella se define por la desigualdad $|z-a|<R$. Entonces, a condición de que $r<R$, para la serie

$$+\ldots\frac{A_{-3}}{(z-a)^3}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-1}}{z-a}+$$
$$+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+$$
$$+A_3(z-a)^3+\ldots,$$

obtenida por la adición de las series (1) y (2), sirve de región de convergencia el anillo $r<|z-a|<R$ limitado por las circunferencias con centro en a y de radios r y R (fig. 68).

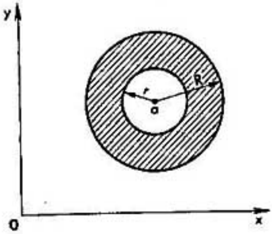

Fig. 68

Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica en el anillo $r<|z-a|<R$. Esta función en el anillo indicado puede representarse en la forma de la suma de la serie

$$f(z)=\ldots+\frac{A_{-3}}{(z-a)^3}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-1}}{z-a}+$$
$$+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+A_3(z-a)^3+\ldots .$$

La serie en el segundo miembro se llama *serie de Laurent* de la función $f(z)$. Los coeficientes de esta serie se pueden calcular por la fórmula

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad (n\in \boldsymbol{Z}).$$

La serie (1) se denomina *parte principal* de la serie de Laurent y la serie (2), *parte regular* de la serie de Laurent.

Si la serie de Laurent contiene la parte principal, entonces a se llama *punto singular aislado*. En el caso en que la parte principal de la serie de Laurent contenga un número finito de términos, o sea, presente la forma

$$\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{A_{-n}}{(z-a)^n} \quad (A_{-n}\neq 0),$$

el punto singular aislado a se denomina *polo de n-ésimo orden* de la función $f(z)$. En este caso el coeficiente A_{-1} ha recibido el nombre de *residuo* de la función $f(z)$, con respecto al polo a.

El punto singular $z=a$ se llama punto singular aislado de carácter unívoco, si alrededor de éste se puede circunscribir un círculo de radio suficientemente pequeño, o sea, tal que, una vez alejado su centro $z=a$, se obtenga una región doblemente conexa en la cual la función es analítica. Un punto singular aislado de caracter unívoco se denomina

a) *evitable*, si no existe la parte principal del desarrollo en serie de Laurent. Por ejemplo, para la función $f(z)=\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ el punto $z=0$ es un punto singular evitable, ya que

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots;$$

b) *polo*, si la parte principal contiene un número finito de términos. Por ejemplo, para la función $f(z)=\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$ el punto $z=0$ sirve de polo de primer orden, puesto que

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\ldots;$$

c) *singular esencial*, si la parte principal contiene un número infinito de términos. Por ejemplo, la función $f(z)=e^{1/z}$ en el punto $z=0$ tiene un punto singular esencial, ya que

$$f(z)=e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots$$

Entre el cero y el polo de la función existe la vinculación siguiente. Si $z=a$ es un cero de multiplicidad k de la función $f(z)$, entonces $z=a$ es polo del mismo orden de la función $1/f(z)$; inversamente, si $z=b$ es polo de orden k de la función $f(z)$, entonces $z=b$ es un cero de misma multiplicidad de la función $1/f(z)$.

Conviene señalar que si $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z)=c\neq 0$, entonces $z=a$ es polo de k-ésimo orden de la función $f(z)$.

1002. Desarrollar en serie de Taylor por potencias del binomio $z-i$ la función $f(z)=z^5$.

Resolución. Encontramos las derivadas de la función $f(z)=z^5$:

$$f'(z)=5z^4,\quad f''(z)=20z^3,\quad f'''(z)=60z^2,$$

$$f^{IV}(z)=120z,\quad f^{V}(z)=120,\quad f^{VI}(z)=f^{VII}(z)=\ldots=0.$$

Determinamos los valores de las derivadas en el punto $a = i$:

$$f(i) = i, \quad f'(i) = 5, \quad f''(i) = -20i, \quad f'''(i) = -60,$$
$$f^{IV}(i) = 120i, \quad f^{V}(i) = 120.$$

Por lo tanto,

$$f(z) = i + 5(z - i) - 10i(z - i)^2 - 10(z - i)^3 + 5i(z - i)^4 + (z - i)^5.$$

La serie de Taylor de la función $f(z) = z^5$ es un polinomio de quinto grado.

1003. Desarrollar en serie de Taylor por potencias del binomio $z - (1 - \pi i/2)$ la función $f(z) = \operatorname{ch}(1 - z)$.

Resolución. Hallamos

$$\begin{aligned}
f(z) &= \operatorname{ch}(1-z), & f(a) &= \operatorname{ch}(\pi i/2) = \cos(\pi/4) = 0,\\
f'(z) &= -\operatorname{sh}(1-z), & f'(a) &= -\operatorname{sh}(\pi i/2) = -i \operatorname{sen}(\pi/2) = -i,\\
f''(z) &= \operatorname{ch}(1-z), & f''(a) &= 0,\\
f'''(z) &= -\operatorname{sh}(1-z), & f'''(a) &= -i.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$f(z) = -i\left[\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right)+\frac{1}{3!}\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right)^3+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5!}\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right)^5+\ldots\right].$$

1004. Investigar la convergencia de la serie

$$\ldots + \frac{1}{2^3(z-1)^3} + \frac{1}{2^2(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)} +$$
$$+ 1 + \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} + \frac{(z-1)^3}{5^3} + \ldots$$

Resolución. Examinemos dos series

$$\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2^2(z-1)^2} + \frac{1}{2^3(z-1)^3} + \ldots, \tag{a}$$

$$1 + \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} + \frac{(z-1)^3}{5^3} + \ldots. \tag{b}$$

Si en la serie (a) se hace $z - 1 = 1/z'$, entonces se obtiene la serie de potencias

$$\frac{z'}{2} + \frac{z'^2}{2^2} + \frac{z'^3}{2^3} + \ldots. \tag{c}$$

El radio de convergencia de la última serie se determina por el criterio de D'Alembert

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2^{n-1}}{1/2^n} = 2.$$

Por lo tanto, la serie de potencias (b) converge si $|z'| < 2$. Por consiguiente, la serie (a) converge si $|1/(z - 1)| < 2$. De aquí obtenemos $|z - 1| > 1/2$. Esto quiere decir que la serie (a) converge fuera del círculo de radio $r = 1/2$

con centro en el punto $z = 1$. Determinemos el radio de convergencia de la serie (b):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/5^{n-1}}{1/5^n} = 5.$$

De este modo, la región de convergencia de la serie (b) se define por la desigualdad $|z-1| < 5$.

De lo dicho concluimos que el anillo $1/2 < |z-1| < 5$ es la región de convergencia de la serie dada.

La resolución de este problema se puede simplificar. Las series (a) y (b) son progresiones geométricas con denominadores $\frac{1}{2(z-1)}$ y $\frac{z-1}{5}$, respectivamente. Ellas convergen si $\left|\frac{1}{2(z-1)}\right| < 1$ y $\left|\frac{z-1}{5}\right| < 1$. Por lo tanto, $|z-1| > 1/2$ y $|z-1| < 5$. De suerte que la región de convergencia es el anillo definido por la desigualdad doble $1/2 < |z-1| < 5$.

1005. Investigar la convergencia de la serie

$$\ldots + \frac{(3+4i)^3}{z^3} + \frac{(3+4i)^2}{z^2} + \frac{3+4i}{z} + 1 + \frac{z}{i} + \frac{z^2}{i^2} + \frac{z^3}{i^3} + \ldots$$

Resolución. Examinemos dos series

$$\frac{3+4i}{z} + \frac{(3+4i)^2}{z^2} + \frac{(3+4i)^3}{z^3} + \ldots; \qquad \text{(a)}$$

$$1 + \frac{z}{i} + \frac{z^2}{i^2} + \frac{z^3}{i^3} + \ldots . \qquad \text{(b)}$$

Las series (a) y (b) son progresiones geométricas que tienen por denominadores $(3+4i)/z$ y z/i. Ellas convergen si $|(3+4i)/z| < 1$ y $|z|/i < 1$. Puesto que $|3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$, $|i| = 1$, entonces $5/|z| < 1$ y $|z| < 1$, o bien $|z| > 5$ y $|z| < 1$. Pero estas desigualdades son incompatibles, por consiguiente, la serie dada no converge en ningún punto del plano.

1006. Desarrollar en serie de Laurent por potencias de z la función $f(z) = 1/(2z-5)$ en el entorno del punto $z = 0$.

Resolución. Representemos la función dada en la forma

$$f(z) = \frac{-1/5}{1-2z/5}.$$

En el entorno del punto $z = 0$ se cumple la desigualdad $|2z/5| < 1$, por eso la fracción $\frac{-1/5}{1-2z/5}$ se puede considerar como la suma de una progresión geométrica infinita decreciente cuyo primer término es $a - 1/5$ y su denominador $q = 2z/5$. De aquí obtenemos

$$f(z) = -\frac{1}{5}\,\frac{2z}{5^2}\,\frac{2^2z^2}{5^3} - \frac{2^3z^3}{5^4} - \ldots, \text{ o bien } f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}z^{n-1}}{5^n}.$$

Este desarrollo contiene solamente la parte regular. De la desigualdad $|2z/5| < 1$ resulta que el círculo $|z| < 5/2$ es la región de convergencia de la serie.

1007. Desarrollar en serie de Laurent por potencias de z la función $f(z) = 1/(2z-5)$ en el entorno del punto $z = \infty$.

Resolución. Tenemos

$$f(z)=\frac{1}{2z-5}=\frac{1/(2z)}{1-5/(2z)}.$$

En el entorno del punto $z=\infty$ se cumple la desigualdad $|5/2z)|<1$, por eso $f(z)$ se puede representar en forma de la suma de una progresión geométrica infinita decreciente con primer término $a=1/(2z)$ y denominador $q=5/(2z)$. Por consiguiente,

$$f(z)=\frac{1}{2z}+\frac{5}{2^2z^2}+\frac{5^2}{2^3z^3}+\frac{5^3}{2^4z^4}+\ldots,\quad \text{o bien } f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{2^nz^n}.$$

En el desarrollo falta la parte regular. La serie converge en la región $|z|>5/2$ (fuera del círculo).

1008. Desarrollar en serie de Laurent por potencias de z la función $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ en el anillo $1<|z|<3$.

Resolución. Desarrollamos la función dada en fracciones elementales:

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-3},\quad \text{o bien } 1=A(z-3)+B(z-1).$$

Haciendo $z=1$, obtenemos $1=-2A$, o sea $A=-1/2$; tomando $z=3$, tenemos $1=2B$, o sea, $B=1/2$. De este modo,

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-3}.$$

Teniendo en cuenta que $1<|z|<3$, podemos escribir

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1/z}{1-1/z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1/3}{1-z/3}.$$

En consecuencia,

$$f(z)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^n}\right).$$

1009. Desarrollar en serie de Laurent la función $f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}$ por potencias de $z-2$.

Resolución. Pongamos $z-2=z'$. Entonces

$$f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}=\frac{(z'+2)^4}{z'^2}=\frac{z'^4+8z'^3+24z'^2+32z'+16}{z'^2}=$$
$$\frac{16}{z'^2}+\frac{32}{z'}+24+8z'+z'^2,$$

o sea,

$$f(z)=\frac{16}{(z-2)^2}+\frac{32}{z-2}+24+8(z-2)+(z-2)^2.$$

Aquí la parte principal contiene dos términos y la regular, tres.

Puesto que el desarrollo contiene un número finito de términos, él es válido para un punto cualquiera del plano, excepto para $z = 2$. Este punto es el polo de segundo orden de la función $f(z)$. De residuo de esta función respecto al polo $z = 2$ sirve el coefficiente de $(z-2)^{-1}$, o sea, 32.

1010. Investigar la convergencia de la serie

$$\ldots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \ldots .$$

1011. Investigar la convergencia de la serie

$$\ldots + \frac{4}{z^4} + \frac{3}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + 2z + (2z)^2 + (2z)^3 + \ldots .$$

1012. Desarrollar en serie de Laurent por potencias de z la función $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$ en el entorno de los puntos: 1) $z = 0$; 2) $z = \infty$.

1013. Desarrollar en serie de Laurent la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} z - z}{z^5}, & \text{si} \quad z \neq 0; \\ \infty, & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

1014. Hallar los polos de la función $f(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$.

1015. Desarrollar en serie de Taylor por potencias de $z-1$ la función $f(z) = 1/z$. Hallar la región de convergencia de la serie.

1016. Desarrollar en serie de Maclaurin la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos z}{z^2}, & \text{zi} \quad z \neq 0; \\ 1/2, & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

1017. Desarrollar en serie de Laurent la función $f(z) = 2^z + 2^{1/z} - 2$ definida en todo el plano, salvo en el punto $z = 0$.

§ 6. Cálculo de residuos de funciones. Aplicación de los residuos para el cálculo de integrales

Sea a el polo de n-ésimo orden de la función $f(z)$. El residuo de la función $f(z)$ respecto a su polo de n-ésimo orden se calcula por la fórmula

$$\operatorname*{res}_{a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}[(z-a)^n \cdot f(z)]}{dz^{n-1}}$$

(res significa «residuo»).

Si a es el polo de primer orden de la función $f(z)$, entonces

$$\operatorname*{res}_{a} (fz) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Supongamos que las funciones $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ son regulares en el entorno del punto $z = a$, $\varphi(a) \neq 0$ y $\psi(z)$ en el punto $z = a$ se tiene un cero de primer orden. Entonces al calcular el residuo de la función $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$ en el polo simple $z = a$ es cómodo utilizar la fórmula

$$\operatorname*{res}_{a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Sea $f(z)$ una función analítica en la región D, salvo el número final de polos $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Designamos por γ un contorno cerrado arbitrario, suave a trozos, que contenga dentro de sí los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ y esté por completo en la región D. En este caso $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ es igual a *la suma de los residuos de la función* $f(z)$ *con respecto a los polos* $a_1, a_2, \ldots, a_k$, *multiplicada por* $2\pi i$, o sea

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_j} f(z)$$

(teorema principal de los residuos).

Examinemos un caso particular. Sea $f(z)$ una función analítica en la región D, el punto a pertenece a la región D, pero $f(a) \neq 0$. En este caso la función $F(z) = \frac{f(z)}{z-a}$ tiene en la región D un polo a de primer orden. Determinamos el residuo de la función $F(z)$ con respecto al polo a:

$$\operatorname*{res}_{a} F(z) = \lim_{z\to a} (z-a)\cdot F(z) = \lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

De aquí, aplicando el teorema principal de los residuos, obtenemos

$$\int\limits_{\gamma} F(z)\,dz = 2\pi i f(a),$$

o bien

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a).$$

Hemos obtenido una fórmula muy importante en la teoría de las funciones de variable compleja: *fórmula de Cauchy*.

Sin embargo, es necesario señalar que la deducción de la fórmula de Cauchy debe preceder a la demostración del teorema principal de los residuos. Aquí nos hemos aprovechado de la ocasión para dar a conocer al lector esta fórmula importante.

Sea $f(z)$ una función analítica en el semiplano superior, incluyendo el eje real, salvo el número finito de polos a_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) situados por encima del eje real. Además, se supone que el producto $z^2 f(z)$ para $|z| \to +\infty$ tiene límite finito. En este caso para calcular la integral definida $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, de la función de variable real, se utiliza la fórmula

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\,(r_1 + r_2 + \ldots + r_m),$$

donde r_k ($k = 1, 2, \ldots$, el residuo m) es de la función $f(z)$ con respecto al polo a_k.

1018. Hallar los residuos de la función $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}$.

Resolución. De polos de la función sirven los puntos $z=1$ y $z=3$

$$\operatorname*{res}_{1} f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\lim_{z\to 1}\frac{z}{z-3}=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{3} f(z)=\lim_{z\to 3}(z-3)\cdot\frac{z}{(z-1)(z-3)}=\lim_{z\to 3}\frac{z}{z-1}=\frac{1}{2}.$$

1019. Hallar los residuos de la función $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$.

Resolución. Tenemos

$$f(z)=\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}.$$

De polos de la función sirven los puntos $2i$ y $-2i$:

$$\operatorname*{res}_{2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\cdot\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{z+2i}=\frac{4}{4i}=-\frac{i}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{-2i} f(z)=\lim_{z\to -2i}(z+2i)\cdot\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}=\lim_{z\to -2i}\frac{1}{z-2i}-=\frac{4}{4i}=\frac{i}{4}.$$

1020. Hallar los residuos de la función $f(z)=\frac{1}{z^2-2z+5}$.

Resolución. De polos de la función sirven las raíces del denominador: $z=$ $=1\pm 2i$. Por consiguiente,

$$f(z)=\frac{1}{(z-1-2i)(z-1+2i)}.$$

Hallamos

$$\operatorname*{res}_{1+2i} f(z)=\lim_{z\to 1+2i}\frac{z-1-2i}{(z-1-2i)(z-1+2i)}=\lim_{z\to 1+2i}\frac{1}{z-1+2i}=-\frac{i}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{1-2i} f(z)=\lim_{z\to 1-2i}\frac{z-1+2i}{(z-1-2i)(z-1+2i)}=\lim_{z\to 1-2i}\frac{1}{z-1-2i}=\frac{i}{4}.$$

1021. Hallar el residuo de la función $f(z)=\frac{z^2}{(z-2)^3}$.

Resolución. Puesto que $z=2$ es un polo de tercer orden, entonces

$$\operatorname*{res}_{2} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2\left[\frac{z^2}{(z-2)^3}\cdot(z-2)^3\right]}{dz^2}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2(z^2)}{dz^2}=\frac{1}{2!}\cdot 2=1.$$

1022. Hallar el residuo de la función $f(z)=\frac{1}{1-\cos z}$ con respecto al polo $z=0$.

Resolución. El punto $z=0$ es polo de segundo orden. En efecto,

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\operatorname{sen} z}=2$$

es una magnitud finita. Entonces

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{1-\cos z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{2z(1-\cos z) - z^2 \operatorname{sen} z}{(1-\cos z)^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2z\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \ldots\right) - z^2\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots\right)}{\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \ldots\right)^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{z^5}{12}}{\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \ldots\right)^2} = 0.$$

1023. Hallar $\int\limits_{\gamma} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\,dz$, donde γ es un contorno cerrado dentro del cual están los polos $z=1$, $z=2$, $z=3$.

Resolución. Determinemos los residuos de la función subintegral:

$$\operatorname*{res}_{1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z+1}{(z-2)(z-3)} = 1, \quad \operatorname*{res}_{2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{z+1}{(z-1)(z-3)} = -3$$

$$\operatorname*{res}_{3} f(z) = \lim_{z\to 3} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)} = 2.$$

Por consiguiente,

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\,dz = 2\pi i\,(1-3+2) = 0.$$

1024. Hallar $\int\limits_{\gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}\,dz$, donde γ es la circunferencia $|z| = 3$.

Resolución. Tenemos $f(z) = \frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2)}$. Los polos i, $-i$, 2, están dentro del contorno cerrado γ. De aquí,

$$\operatorname*{res}_{i} f(z) = \lim_{z\to i} (z-i)\,f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z^2}{(z+i)(z-2)} = \frac{1}{2i(2-i)},$$

$$\operatorname*{res}_{-i} f(z) = \lim_{z\to -i} (z+i)\cdot f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{z^2}{(z-i)(z-2)} = -\frac{1}{2i(2+i)},$$

$$\operatorname*{res}_{2} f(z) = \lim_{z\to 2} (z-2)\cdot f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{z^2}{z^2+1} = \frac{4}{5};$$

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}\,dz = 2\pi i\left[\frac{1}{2i(2-i)} - \frac{1}{2i(2+i)} + \frac{4}{5}\right] =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2-i} - \frac{1}{2+i} + \frac{8}{5}i\right) = \pi\left(\frac{2}{5}i + \frac{8}{5}i\right) = 2\pi i.$$

1025. Hallar la integral definida $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Resolución. La función $\frac{1}{(z^2+4)^2}$ es analítica en el semiplano superior, excepto en el polo $2i$. Además,

$$\lim_{|z|\to+\infty} z^2 f(z) = \lim_{|z|\to+\infty} \frac{z^2}{(z^2+4)^2} = 0,$$

o sea, es una magnitud finita.

Determinamos el residuo de la función $f(z) = 1/(z^2+4)^2$, con respecto al polo de segundo orden $2i$:

$$\operatorname*{res}_{2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}\right] = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+2i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{2}{(z+2i)^3} = \frac{2}{64i} = -\frac{1}{32}i.$$

Por consiguiente,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 2\pi i\left(-\frac{1}{32}i\right) = \frac{\pi}{16}.$$

1026. Hallar $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$, si γ es una circunferencia: 1) $z=1$; 2) $|z|=3)$; 3) $|z|=5$.

Resolución. Determinemos los residuos de la función subintegral con respecto a los polos $z=0$, $z=-2$, $z=-4$:

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \lim_{z\to 0} z\cdot f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z+2)(z+4)} = \frac{1}{8},$$

$$\operatorname*{res}_{-2} f(z) = \lim_{z\to -2} (z+2)\cdot f(z) = \lim_{z\to -2} \frac{1}{z(z+4)} = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{-4} f(z) = \lim_{z\to -4} (z+4)\cdot f(z) = \lim_{z\to -4} \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{8}.$$

1) Dentro del contorno γ de la circunferencia $|z|=1$ se halla solamente el polo $z=0$; entonces

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}.$$

2) Dentro del contorno γ de la circunferencia $|z|=3$ están los polos $z=0$ y $z=-2$; entonces

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{4}.$$

3) Dentro del contorno γ de la circunferencia $|z| = 5$ se encuentran los polos $z = 0$, $z = -2$, $z = -4$; entonces

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 0.$$

1027. Hallar el residuo de la función $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$.

1028. Hallar los residuos de la función $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1}$.

1029. Hallar el residuo de la función $f(z) = 1/\operatorname{sen} z$ con respecto al polo $z = \pi$.

1030. Hallar el residuo de la función $f(z) = (z+1)/z^2$.

1031. Hallar la integral $\int_{\gamma} \frac{z^2}{z-a}\,dz$, γ es la circunferencia $|z| = R > |a|$.

1032. Hallar la integral $\int_{\gamma} \frac{z}{(z-a)(z-b)}\,dz$, γ es la circunferencia $|z| = R$, $R > |a|$, $R\,|b|$, $a \neq b$.

1033. Hallar la integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-2z+2}$, γ es la circunferencia dentro de la cual se contienen los polos del denominador.

1034. Hallar la integral $\int_{\gamma} \frac{z}{(z-i)(z-3)}\,dz$, γ es la circunferencia $|z| = 2$.

1035. Calcular la integral definida $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.