Capítulo VIII. Elementos del cálculo operacional

§ 1. Determinación de transformadas de funciones

1. Definiciones principales. Sea que la función f (t) posee las siguientes propiedades:

1ª. $f(t) = 0$ para $t < 0$.

2ª. $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ para $t > 0$, donde $M > 0$ y s_0 son ciertas constantes reales.

3ª. En un segmento finito cualquiera $[a, b]$ del semieje positivo Ot la función $f(t)$ satisface las *condiciones de Dirichlet*, o sea: a) *está acotada*; b) *es continua, o bien tiene solamente un número finito de puntos de discontinuidad de primer género*; c) *tiene un número finito de extremos*.

En el cálculo operacional tales funciones se llaman *transformables por Laplace* u *originales*.

Sea $p = \alpha + \beta i$ un parámetro complejo, además, $\operatorname{Re} p = \alpha \geqslant s_1 > s_0$.

Para las condiciones enunciadas la integral $\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ converge y es la función de p:

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \bar{f}(p).$$

Esta integral ha recibido el nombre de *integral de Laplace* y la función del argumento complejo p, definida por la misma, se llama *transformación de Laplace* de la función $f(t)$ o *transformada de Laplace* $f(t)$ o bien simplemente transformada $f(t)$.

El hecho de que la función $\bar{f}(p)$ sea la transformada de la original $f(t)$ se designa por los símbolos siguientes:

$$\bar{f}(p) = L\{f(t)\}, \quad \text{o bien} \quad \bar{f}(p) \risingdotseq f(t).$$

Se conviene en que por valor de la función original $f(t)$ en todo su punto de discontinuidad de primer género t_0 se toma la semisuma de sus valores límites a la izquierda y la derecha de este punto:

$$f(t_0) = (1/2)\,[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$$

para $t_0 \neq 0$; y para $t_0 = 0$: $f(0) = f(+0)$.

Al observar esta condición, la correspondencia entre los originales y las transformadas posee las propiedades siguientes:

esta correspondencia es recíprocamente unívoca (o sea, a toda original le corresponde una única transformada y viceversa),

a toda combinación lineal de un conjunto finito de originales le corresponde, en calidad de transformada, la combinación lineal respectiva de las transformadas de los mismos.

De este modo, si $\bar{f}_k(p) \doteqdot f_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, entonces

$$\sum_{k=1}^{k=n} c_k \bar{f}_k(p) \doteqdot \sum_{k=1}^{k=n} c_k f_k(t).$$

2. Determinación de transformadas de funciones. En la tabla y en cada uno de los ejercicios citados a continuación se indica solamente el valor de $f(t)$ para $t > 0$ (siempre se considera que $f(t) = 0$ si $t < 0$).

Tabla de las transformadas de las funciones elementales principales

Nº	$f(t)$ para $t>0$	$\bar{f}(p)$	Nº	$f(t)$ para $t>0$	$\bar{f}(p)$
I	1	$\frac{1}{p}$	VI	$e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
II	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	VII	$e^{\alpha t}\cdot\operatorname{sen}\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
III	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	VIII	$\frac{t^n}{n!}\cdot e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
IV	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	IX	$t\cdot\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
V	$\operatorname{sen}\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	X	$t\cdot\operatorname{sen}\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

1036. Hallar la transformada de la función $f(t) = a^t$.

Resolución. Como $a = e^{\ln a}$, $f(t) = e^{t\cdot\ln a}$. Aplicando la fórmula III, obtenemos

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p-\ln a}.$$

1037. Hallar la transformada de la función $f(t) = \cos^3 t$.

Resolución. Utilizamos la fórmula de Euler $\cos t = (e^{ti} + e^{-ti})/2$. Entonces

$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{ti}+e^{-ti}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3ti}+3e^{ti}+3e^{-ti}+e^{-3ti}) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3ti}+e^{-3ti}}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{e^{ti}+e^{-ti}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t.$$

Aplicando la fórmula IV, obtenemos

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+9} + \frac{3}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}.$$

1038. Hallar la transformada de la función $f(t) = \operatorname{sh} bt$.

Resolución. Por definición de seno hiperbólico tenemos $f(t) = (1/2)\, e^{bt} - (1/2)\, e^{-bt}$. En consecuencia,

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2(p-b)} - \frac{1}{2(p+b)} = \frac{b}{p^2-b^2}.$$

1039. Hallar la transformada de la función $f(t) = \operatorname{sh} at \operatorname{sen} bt$.

Resolución. Puesto que $\operatorname{sh} at = (e^{at} - e^{-at})/2$, entonces

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{at} \operatorname{sen} bt - \frac{1}{2} e^{-at} \operatorname{sen} bt.$$

Usamos la fórmula VII:

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2} \frac{b}{(p-a)^2+b^2} - \frac{1}{2} \frac{b}{(p+a)^2+b^2} = \frac{2pab}{[(p-a)^2+b^2]\,[(p+a)^2+b^2]}.$$

1040. Hallar la transformada de la función $f(t) = t \operatorname{ch} bt$.

Resolución. Puesto que

$$f(t) = t \cdot \frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2} = \frac{1}{2} te^{bt} + \frac{1}{2} te^{-bt},$$

entonces, usando la fórmula VIII para $n = 1$, $\alpha = \pm b$, obtenemos

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2(p-b)^2} + \frac{1}{2(p+b)^2} = \frac{p^2+b^2}{(p^2-b^2)^2}.$$

Hallar las transformadas de las funciones:

1041. $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$. **1042.** $f(t) = e^t \cos^2 t$.
1043. $f(t) = \operatorname{ch} bt$. **1044.** $f(t) = \operatorname{sh} at \cos bt$.
1045. $f(t) = \operatorname{ch} at \operatorname{sen} bt$. **1046.** $f(t) = \operatorname{ch} at \cos bt$.
1047. $f(t) = t \operatorname{ch} bt$.

§ 2. Determinación de la función original a partir de transformada

Al determinar la función original a partir de la transformada se utilizan, en casos elementales, la tabla de las transformadas de las funciones elementales principales y los teoremas de descomposición (primero y segundo).

El *segundo teorema de descomposición* permite hallar la original para una transformada que sea una función racional fraccional de p, es decir, $\bar{f}(p) = u(p)/v(p)$, donde $u(p)$ y $v(p)$ son polinomios de p de grados m y n, respectivamente; además $m < n$.

Si la descomposición $v(p)$ en factores elementales tiene la forma $v(p) = (p-p_1)^{k_1}(p-p_2)^{k_2} \ldots (p-p_r)^{k_r}$ $(k_1+k_2+\ldots+k_r = n)$, entonces, como es sabido, la función $\bar{f}(p)$ puede ser descompuesta en suma de fracciones elementales de la forma $\frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}$, donde j toma todos los valores de 1 a r y s, todos los valores de 1 a k_j. De este modo,

$$\bar{f}(p) = \sum_{j=1}^{j=r} \sum_{s=1}^{s=k_j} \frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}. \tag{1}$$

Todos los coeficientes de esta descomposición se pueden determinar por la fórmula

$$A_{j,s}=\frac{1}{(s-1)!}\lim_{p\to p_j}\left\{\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}[(p-p_j)^{k_j}\cdot\bar{f}(p)]\right\}. \qquad (2)$$

En vez de esta fórmula, para determinar los coeficientes $A_{j,s}$ pueden ser utilizados los procedimientos elementales aplicables en el cálculo integral para integrar fracciones racionales.

En particular, es conveniente hacerlo en los casos en que todas las raíces del denominador $v(p)$ sean simples y conjugadas de par en par.

Si todas las raíces de $v(p)$ son simples, o sea, $v(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ldots$ $\ldots(p-p_n)$ $(p_j\neq p_k$ para $j\neq k)$, la descomposición se simplifica:

$$\bar{f}(p)=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{A_j}{p-p_j}, \quad \text{donde} \quad A_j=\frac{u(p_j)}{v'(p_j)}. \qquad (3)$$

Al determinar por uno u otro procedimiento de descomposición de $\bar{f}(p)$ en fracciones elementales, la función original $f(t)$ se encuentra con ayuda de las fórmulas siguientes:

a) en caso de raíces múltiples del denominador $v(p)$:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{j=r}\sum_{s=1}^{s=k_j}A_{j,s}\frac{t^{k_j-s}}{(k_j-s)!}\cdot e^{p_jt}; \qquad (4)$$

b) en caso de raíces simples del denominador $v(p)$:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{u(p_j)}{v'(p_j)}\cdot e^{p_jt}. \qquad (5)$$

Si la transformada de la función buscada puede ser desarrollada en serie de potencias, por potencias de $1/p$, o sea,

$$\bar{f}(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\ldots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots$$

(además, esta serie converge hacia $\bar{f}(p)$ para $|p|>R$, donde $R=\lim\limits_{n\to\infty}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|\neq\infty$, entonces la original $f(t)$ se determina por la fórmula

$$f(t)=a_0+a_1\cdot\frac{t}{1!}+a_2\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots+a_n\cdot\frac{t^n}{n!}+\ldots,$$

con ello esta serie converge para todos los valores de t (*primer teorema de descomposición*).

1048. Hallar la original de la función $\bar{f}(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$.

Resolución. Utilizamos los procedimentos elementales para descomponer esta fracción en suma de fracciones tales, cuyos originales se conocen:

$$\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{p-1+1}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{(p-1)^2+4}.$$

Pero, según las fórmulas VI y VII de la tabla tenemos

$$\frac{p-1}{(p-1)^2+4} \risingdotseq e^t \cdot \cos 2t; \qquad \frac{1}{(p-1)^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4} \risingdotseq \frac{1}{2}\,e^t\cdot \operatorname{sen} 2t.$$

Por eso

$$\frac{p}{(p-1)^2+4} \risingdotseq e^t\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right).$$

1049. Hallar la original de la función $\bar{f}(p)=\frac{1}{p^3-8}$.

Resolución. En este ejercicio también utilizamos los procedimientos elementales de descomposición, conocidos del cálculo integral. Descompongamos la fracción dada en fracciones elementales:

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}.$$

Para determinar los coeficientes tenemos la identidad

$$1 \equiv A\,(p^2+2p+4)+(Bp+C)\,(p-2).$$

Haciendo $p=2$, hallamos $1=12A$; $A=1/12$. Igualando a cero el coeficiente de p^2 y el término independiente a uno, obtenemos $A+B=0$, $4A-2C=1$ De aquí, $B=-A=-1/12$; $C=2A-1/2=-1/3$. Por consiguiente,

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+4}{p^2+2p+4}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{(p+1)+3}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

Así, pues,

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

De aquí, utilizando las fórmulas III, VI y VII de la tabla de transformadas, encontramos

$$f(t)=\frac{1}{12}\,e^{2t}-\frac{1}{12}\,e^{-t}\,(\cos t\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\operatorname{sen} t\sqrt{3}).$$

1050. Hallar la original de la función $\bar{f}(p)=\frac{p}{(p-1)^3\,(p+2)^2}$.

Resolución. La descomposición de $\bar{f}(p)$ en fracciones elementales tiene la forma

$$\bar{f}(p)=\frac{A_{1,\,1}}{(p-1)^3}+\frac{A_{1,\,2}}{(p-1)^2}+\frac{A_{1,\,3}}{p-1}+\frac{A_{2,\,1}}{(p+2)^2}+\frac{A_{2,\,2}}{p+2}.$$

Hallamos los coeficientes de esta descomposición, utilizando la fórmula (2):

$$A_{1,\,1}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to 1}\{(p-1)^3\cdot\bar{f}(p)\}=\lim_{p\to 1}\frac{p}{(p+2)^2}=\frac{1}{9};$$

$$A_{1,\,2}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\{(p-1)^3\cdot\bar{f}(p)\}=\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[\frac{p}{(p+2)^2}\right]=$$

$$=\lim_{p\to 1}\left[\frac{1}{(p+2)^2}-\frac{2p}{(p+2)^3}\right]=\frac{1}{27};$$

$$A_{1,3}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\{(p-1)^3\cdot\bar{f}(p)\}=\frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p}{(p+2)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\left[-\frac{4}{(p+2)^3}+\frac{6p}{(p+2)^3}\right]=-\frac{1}{27};$$

$$A_{2,1}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to -2}[(p+2)^2\cdot\bar{f}(p)]=\lim_{p\to -2}\frac{p}{(p-1)^3}=\frac{2}{27};$$

$$A_{2,2}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to -2}\frac{d}{dp}[(p+2)^2\cdot\bar{f}(p)]=\lim_{p\to -2}\frac{d}{dp}\left[\frac{p}{(p-1)^3}\right]=$$

$$=\lim_{p\to -2}\left[\frac{1}{(p-1)^3}-\frac{3p}{(p-1)^4}\right]=\frac{1}{27}.$$

De este modo,

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{27}\cdot\left\{\frac{3}{(p-1)^3}+\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{p-1}+\frac{2}{(p+2)^2}+\frac{1}{p+2}\right\}.$$

De aquí utilizando las fórmulas III y VIII, encontramos

$$f(t)=\frac{1}{27}\left(\frac{3}{2}t^2e^t+te^t-e^t+2te^{-2t}+e^{-2t}\right)=\frac{3t^2+2t-2}{54}\cdot e^t+\frac{2t+1}{27}\cdot e^{-2t}.$$

1051. Hallar la original de la función $\bar{f}(p)=\frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$.

Resolución. Puesto que en el caso dado todas las raíces del denominador son reales y simples, lo mejor es valerse de la fórmula (5). Tenemos

$$u(p)=p+1,\quad v(p)=p(p-1)(p-2)(p-3)=p^4-6p^3+11p^2-6p;$$
$$v'(p)=4p^3-18p^2+22p-6.$$

Encontramos las raíces de $v(p)$: $p_1=0$, $p_2=1$, $p_3=2$, $p_4=3$. Luego obtenemos

$$\frac{u(p_1)}{v(p_1)}=\frac{1}{-6}=-\frac{1}{6};\qquad \frac{u(p_2)}{v'(p_2)}=\frac{2}{2}=1;$$
$$\frac{u(p_3)}{v'(p_3)}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2};\qquad \frac{u(p_4)}{v'(p_4)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Ahora por la fórmula (5) encontramos

$$f(t)=-\frac{1}{6}+e^t-\frac{3}{2}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{3t}.$$

1052. Hallar la función original de $\bar{f}(p)=\frac{1}{p(1+p^4)}$, utilizando el primer teorema de descomposición.

Resolución. Tenemos

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{p(1+p^4)}=\frac{1}{p^5}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{p^4}}=\frac{1}{p^5}-\frac{1}{p^9}+\frac{1}{p^{13}}-\dots.$$

Esta serie converge para $|p| > 1$. De aquí, obtenemos

$$f(t)=\frac{t^4}{4!}-\frac{t^8}{8!}+\frac{t^{12}}{12!}-\frac{t^{16}}{16!}+\dots .$$

Hallar $f(t)$ si $\bar{f}(p)=\frac{1}{p(p^2+1)(p^2+4)}$.

Indicación: descomponer $\bar{f}(p)$ en fracciones elementales.

Hallar las funciones originales a partir de las transformadas dadas:

1054. $\bar{f}(p)=\frac{1}{(p-1)(p^2-4)}$.

1055. $\bar{f}(p)=\frac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$.

1056. $\bar{f}(p)=\frac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$.

1057. Con ayuda del primer teorema de descomposición hallar la original para la función $\bar{f}(p) = 1/(p^k + a^k)$, donde k es un número positivo entero.

§ 3. Convolución de funciones. Transformada de la derivada y de la integral de una función original

Se llama *convolución* de dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ a la función

$$F(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\,d\tau.$$

La integral que determina la convolución no cambia su valor si se permuten las funciones f_1 y f_2, por eso la convolución de dos funciones es simétrica con respecto a las funciones sometidas a la convolución.

La transformada de la convolución de dos originales es igual al producto de las transformadas de los mismos (teorema de convolución de los originales): si $\bar{f}_1(p) \risingdotseq f_1(t)$, $\bar{f}_2(p) \risingdotseq f_2(t)$, entonces

$$\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\,d\tau \risingdotseq \bar{f}_1(p)\cdot\bar{f}_2(p).$$

Sea que la original $f(t)$ es derivable n veces y sus derivadas hasta el n-ésimo orden son, a su vez, originales. Entonces es justo el *teorema de derivación* del original: si $\bar{f}(p) \risingdotseq f(t)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, luego

$$f^{(k)}(t) \risingdotseq p^k\cdot\bar{f}(p) - \{p^{k-1}\cdot f(0) + p^{k-2}\cdot f'(0) + \dots + f^{(k-1)}(0)\}.$$

En particular,

$$f'(t) \risingdotseq p\cdot\bar{f}(p) - f(0),\quad f''(t) \risingdotseq p^2\cdot\bar{f}(p) - p\cdot f(0) - f'(0),$$

etc.

Para todas las funciones originales es válido el *teorema de integración*: si $\bar{f}(p) \div f(t)$, entonces

$$\frac{\bar{f}(p)}{p} \div \int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

De aquí se ve que las transformadas de una derivada y de una integral se obtienen de la transformada de una función $f(t)$ con ayuda de la ejecución de operaciones algebraicas sobre $\bar{f}(p)$. Conviene también señalar (véase la tabla de transformadas) que las transformadas de una parte considerable de las funciones que se utilizan en la práctica ($e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$, $\operatorname{sen} \beta t$, etc.) son funciones algebraicas de p.

Esto ofrece la posibilidad de reducir muchas operaciones del análisis matemático (resolución de ecuaciones diferenciales e integrales, etc.) a la ejecución de las operaciones algebraicas sobre las transformadas de las funciones buscadas.

1058. Valiéndose del teorema de convolución, hallar la original de la función $\bar{f}(p) = \frac{p}{p^4-1}$.

Resolución. Escribimos $\bar{f}(p)$ en la forma $\frac{p}{p^2-1}\cdot\frac{1}{p^2+1}$. En virtud de que $\frac{p}{p^2-1} \div \operatorname{ch} t$, $\frac{1}{p^2+1} \div \operatorname{sen} t$, según el teorema de convolución tenemos

$$\frac{p}{p^4-1} \div \int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\operatorname{sen}\tau\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(t-\tau)\operatorname{sen}\tau + \operatorname{ch}(t-\tau)\cos\tau\right]\Big|_0^t = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t).$$

1059. Hallar la transformada de $y''(t) - y'(t) - y(t)$ si $y(0) = y'(0) = 0$ e $\bar{y}(p) \div y(t)$.

Resolución. Según el teorema de derivación del original tenemos:

$$y'(t) \div p\bar{y}(p) - y(0) = p\cdot\bar{y}(p),$$
$$y''(t) \div p^2\cdot\bar{y}(p) - p\cdot y(0) - y'(0) = p^2\cdot\bar{y}(p).$$

De aquí hallamos

$$y''(t) - y'(t) - y(t) \div (p^2 - p - 1)\cdot\bar{y}(p)$$

(a la suma de las funciones le corresponde, en calidad de transformada, la suma de sus transformadas).

1060. Hallar la transformada de $y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau$, si $y(0)=1$ e $\bar{y}(p) \div y(t)$.

Resolución. Según los teoremas de derivación e integración de la función original tenemos:

$$y'(t) \risingdotseq p \cdot \bar{y}(y) - y(0) = p \cdot y(p) - 1, \qquad \int_0^t y(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{\bar{y}(p)}{p}.$$

De aquí hallamos

$$y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau \risingdotseq p\bar{y}(p) - 1 + \bar{y}(p) + \frac{\bar{y}(p)}{p} = \frac{p^2+p+1}{p} \cdot \bar{y}(p) - 1.$$

1061. Hallar la convolución de las funciones t y $\cos t$ y la transformada de la misma.

1062. Valiéndose del teorema de convolución, hallar la función original para $\bar{f}(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

1063. Hallar la transformada de $F(t) = y(t) - 2y'(t)$ si $y(0) = 0$, $y(t) \risingdotseq \bar{y}(p)$.

1064. Hallar la transformada $F(t) = y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) - 2y(t)$, si $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y(t) \risingdotseq \bar{y}(p)$.

1065. Hallar la transformada de $F(t) = y'(t) - \int_0^t y(\tau)\,d\tau$ si $y(0) = 0$, $y(t) \risingdotseq \bar{y}(p)$.

§ 4. Aplicación del cálculo operacional a la resolución de algunas ecuaciones diferenciales e integrales

Si se da una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t)$$

cuyo segundo miembro $f(t)$ es la función original, entonces la solución de esta ecuación que satisface las condiciones iniciales arbitrarias de la forma $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$ (o sea, la solución de un problema arbitrario de Cauchy formulado para esta ecuación, con condiciones iniciales para $t = 0$) sirve también de original. Designando la transformada de esta solución por $\bar{y}(p)$, encontramos la transformada del primer miembro de la ecuación diferencial inicial e, igualándola a la transformada de la función $f(t)$, llegamos a la llamada *ecuación de transformación*, que siempre es una ecuación algebraica lineal con respecto a $\bar{y}(p)$. Una vez determinada $\bar{y}(p)$ a partir de esta ecuación, hallamos la función original $y(t)$.

El mismo método de paso a la ecuación de transformación permite encontrar fácilmente la solución de las ecuaciones integrales que tienen la forma

$$\int_0^t K(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = f(t); \qquad y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau$$

en las cuales las funciones $K(t)$ y $f(t)$ son originales, puesto que la integral que forma parte de estas ecuaciones es la convolución de las funciones $y(t)$ y $K(t)$.

Estas ecuaciones integrales son un caso particular de las *ecuaciones integrales de Volterra, de primer y segundo géneros*, cuya forma general se obtiene si la función $K(t-\tau)$ (llamada *núcleo* de una ecuación integral) se sustituye por cierta función de dos argumentos $K(t, \tau)$

1066. Resolver la ecuación diferencial $y'' - 2y' - 3y = e^{3t}$ si $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Resolución. Pasamos a las transformadas:

$$p^2\bar{y} - p \cdot y(0) - y'(0) - 2(p\bar{y} - y(0)) - 3\bar{y} = \frac{1}{p-3},$$

o bien

$$p^2 \cdot \bar{y} - 2p\bar{y} - 3\bar{y} = \frac{1}{p-3}; \quad \bar{y} = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Descomponemos esta fracción racional en fracciones elementales:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+1},$$

$$1 = A(p+1) + B(p-3)(p+1) + C(p-3)^2.$$

Haciendo $p = -1$, obtenemos $1 = 16C$, es decir, $C = 1/16$; para $p = 3$ tenemos $1 = 4A$, o sea, $A = 1/4$. Comparando los coeficientes de p^2, obtenemos $0 = B + C$, es decir, $B = -C = -1/16$. Por consiguiente,

$$\bar{y} = \frac{1}{4(p-3)^2} - \frac{1}{16(p-3)} + \frac{2}{16(p+1)},$$

de donde

$$y = \frac{1}{4} te^{3t} - \frac{1}{16} e^{3t} + \frac{1}{16} e^{-t}.$$

1067. Resolver la ecuación $y'' + y' - 2y = e^{-t}$ si $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Resolución. Pasamos a las transformadas:

$$[p^2\bar{y} - p \cdot y(0) - y'(0)] + [p \cdot \bar{y} - y(0)] - 2\bar{y} = \frac{1}{p+1}.$$

Después de transformaciones sencillas, obtenemos

$$\bar{y} = \frac{p+2}{(p+1)(p^2+p-2)} = \frac{1}{p^2-1}.$$

De aquí, $y = \operatorname{sh} t$.

1068. Resolver la ecuación integral $y = \int_0^t y\,dt + 1$.

Resolución. Construimos la ecuación de transformación:

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}}{p} + \frac{1}{p}, \quad \bar{y}(p-1) = 1, \quad \bar{y} = \frac{1}{p-1}.$$

Por consiguiente, $y = e^t$.

1069. Resolver la ecuación integral

$$\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{sen}\,(t-\tau)\,d\tau = 1-\cos t.$$

Resolución. El primer miembro de la ecuación es la convolución de las funciones $y(t)$ y $\mathrm{sen}\, t$. Pasando a las transformadas, obtenemos

$$\bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{(p^2+1)\cdot p}.$$

Por consiguiente, $\bar{y}(p)=\frac{1}{p}$ e $y(t)=1$.

1070. Resolver la ecuación integral

$$\int_0^t y(\tau)\,e^{t-\tau}\,d\tau = y(t)-e^t.$$

Resolución. El primer miembro de la ecuación es la convolución de las funciones $y(t)$ y e^t. Pasamos a las transformadas

$$\bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p-1}=\bar{y}(p)-\frac{1}{p-1},\qquad \bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p-1}-\bar{y}(p)=-\frac{1}{p-1}.$$

Por consiguiente, $\bar{y}(p)=\frac{1}{p-2}$, o sea, $y(t)=e^{2t}$.

1071. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=x+2y,$$

$$\frac{dy}{dt}=2x+y+1,$$

si $x(0)=0,\ y(0)=5$.

Resolución. Pasando a las transformadas, obtenemos

$$\begin{cases} p\cdot\bar{x}(p)=\bar{x}(p)+2\bar{y}(p), \\ p\cdot\bar{y}(p)-5=2\bar{x}(p)+\bar{y}(p)+\dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Despejando $\bar{x}$ e $\bar{y}$, nos queda,

$$\bar{x}(p)=\frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)},\qquad \bar{y}(p)=\frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}.$$

Para determinar x utilizamos el teorema de descomposición y la fórmula (5) del § 2:

$$u(p)=10p+2,\quad v(p)=p^3-2p^2-3p,\quad v'(p)=3p^2-4p-3,$$
$$p_1=0,\quad p_2=-1,\quad p_3=3;$$

$$\frac{u(p_1)}{v'(p_1)}=\frac{u(0)}{v'(0)}=-\frac{2}{3},\qquad \frac{u(p_2)}{v'(p_2)}=\frac{u(-1)}{v'(-1)}=-2,\qquad \frac{u(p_3)}{v'(p_3)}=\frac{u(3)}{v'(3)}=\frac{8}{3}.$$

De este modo, $x=-\frac{2}{3}-2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}$. Análogamente, hallamos $y=$
$=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}$.

Resolver las ecuaciones diferenciales:

1072. $y' - 2y = 0$; $y(0) = 1$.

1073. $y' + y = e^t$; $y(0) = 0$.

1074. $y'' - 9y = 0$; $y(0) = y'(0) = 0$.

1075. $y'' + y' - 2y = e^t$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

1076. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Resolver los sistemas de ecuaciones:

1077. $\frac{dx}{dt}=2y,\quad \frac{dy}{dt}=2x;\quad x(0)=2,\quad y(0)=2.$

1078. $\frac{dx}{dt}=3x+4y,\quad \frac{dy}{dt}=4x-3y;\quad x(0)=y(0)=1.$

Resolver las ecuaciones integrales:

1079. $\int\limits_0^t y(\tau)(t-\tau)^2\,d\tau=\frac{1}{3}t^3.$

1080. $\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau=1-\cos t.$

§ 5. Fórmula general de inversión

Supongamos que la función $f(t)$ posee las siguientes propiedades:

1ª. $f(t) = 0$ para $t < 0$.

2ª. $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ para $t < 0$, donde $M > 0$ y s_0 son ciertas constantes reales.

3ª. Sobre un segmento finito cualquiera $[a, b]$ $(0 < a < b)$ la función satisface las condiciones de Dirichlet.

Entonces la función $\bar{f}(p)$ definida por la igualdad $\bar{f}(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$ es analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p \geqslant s_1 > s_0$.

Con ello es justa la *fórmula de inversión* (*fórmula de Riemann—Mellin*)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega}e^{pt}\bar{f}(p)\,dp,\ \text{ o bien }\ f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}\bar{f}(p)\,dp$$

que expresa la función original $f(t)$ por medio de la transformada $\bar{f}(p)$, además σ es un número arbitrario que satisface la desigualdad $\delta > s_0$.

Si $|\bar{f}(p)| < CR^{-k}$, donde $p = Re^{i\theta}$, $-\pi \leqslant \theta < \pi$, $R > R_0$, R_0, C y $k > 0$ son constantes, entonces la integral $\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}\bar{f}(p)\,dp$ en la fórmula de integración puede ser sustituida por la integral $\int\limits_\gamma e^{pt}\bar{f}(p)\,dp$, donde γ es una circunferencia con centro en el origen de las coordenadas y que contiene en su interior todos los polos de la función $F(p) = e^{pt}\bar{f}(p)$. Por consiguiente,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt} \cdot \bar{f}(p)\, dp.$$

Aplicando el teorema principal sobre los residuos, obtenemos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i (r_1 + r_2 + \ldots + r_m),$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_m$ son los residuos de la función $F(p)$ con respecto a los polos. De suerte que $f(t) = \sum_{j=1}^{m} r_j$. Esta fórmula para la transformada racional fraccional en la notación detallada no es más que las fórmulas (4) y (5) del § 2.

1081. Hallar la función original a partir de la transformada $\bar{f}(p) = \frac{1}{(p-1)^3}$.

Resolución. Obtenemos el residuo de la función $F(p) = \frac{e^{pt}}{(p-1)^3}$:

$$: r = \frac{1}{2!} \lim_{p \to 1} \frac{d^2}{dp^2} [(p-1)^3 \cdot F(p)] = \frac{1}{2!} \lim_{p \to 1} \frac{d^2}{dp^2} (e^{pt}) = \frac{1}{2!} \lim_{p \to 1} t^2 e^{pt} = \frac{t^2}{2!} e^t.$$

Por consiguiente, $f(t) = \frac{t^2 e^t}{2!}$.

1082. Hallar la función original a partir de la transformada

$$\bar{f}(p) = \frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}.$$

Resolultón. Tenemos

$$F(p) = \frac{pe^{pt}}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)},$$

$$r_1 = \lim_{p \to -1} (p+1) \cdot F(p) = -\frac{1}{6} e^{-t}, \quad r_2 = \lim_{p \to -2} (p+2) \cdot F(p) = e^{-2t},$$

$$r_3 = \lim_{p \to -3} (p+3) \cdot F(p) = -\frac{3}{2} \cdot e^{-3t}, \quad r_4 = \lim_{p \to -4} (p+4) \cdot F(p) = \frac{2}{3} \cdot e^{-4t}.$$

Por consiguiente, $f(t) = -\frac{1}{6} e^{-t} + e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-3t} + \frac{2}{3} e^{-4t}$.

Hallar las funciones originales a partir de las transformadas dadas:

1083. $\bar{f}(p) = \frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$.

1084. $\bar{f}(p) = \frac{1}{p^4-6p^3+11p^2-6p}$.

1085. $\bar{f}(p) = \frac{1}{(p-1)^3(p^3+1)}$.

§ 6. Aplicación del cálculo operacional a la resolución de algunas ecuaciones de la física matemática

Examinemos las resoluciones de algunas ecuaciones de la física matemática: la de onda y la de conducción del calor. En este caso los métodos más eficaces son los del cálculo operacional basados en la idea de utilizar la transformación de Laplace. Nos limitamos al caso cuando la función buscada u depende de dos variables independientes x y t, donde x es la coordenada espacial y t el tiempo. La no estacionaridad del problema en examen consiste en que se busca una solución que depende esencialmente de las condiciones iniciales y por eso tiene lugar un régimen inestable (o transitorio) del proceso físico.

Supongamos que una ecuación diferencial en derivadas parciales tiene la forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial u}{\partial x}+Cu+A_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+B_1\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{1}$$

donde A, B, C, A_1, B_1 son las funciones continuas de x definidas en el intervalo $0\leqslant x\leqslant 1$ (se puede considerar que $A>0$).

Examinemos dos casos básicos: 1) $A_1<0$ lo que corresponde al tipo hiperbólico de la ecuación; 2) $A_1=0$, $B_1<0$ lo que corresponde al tipo parabólico de la misma. Para estas condiciones el problema no estacionario puede ser enunciado así: se exige hallar una solución $u(x, t)$ de la ecuación (1) para $0\leqslant x\leqslant 1$ y $t\geqslant 0$ tal, que satisfaga las condiciones iniciales $u(x, t)|_{t=0}=\varphi(x), \frac{du}{dt}|_{t=0}=\psi(x)$ (con ello la segunda condición se da en el caso en que $A_1<0$) y las condiciones de frontera $u(x, t)|_{x=0}=f(t)$, $\alpha\frac{du}{dx}|_{x=1}+\beta\frac{du}{dt}|_{x=1}=\gamma\, u(x, t)_{x=l}$, donde α, β, γ son constantes. Notemos que para $l\to\infty$ la segunda condición de frontera no es necesaria.

Se supone también que $u(x, t)$, $\frac{du}{\partial x}, \frac{d^2u}{dx^2}$, que son funciones de t, pueden servir de funciones originales y que las transformadas de la función buscada y sus derivadas tienen la forma

$$\bar{u}(x, p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}u(x, t)\,dt,\quad \int\limits_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial u}{\partial x}\,dt=$$

$$=\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty ue^{-pt}\,dt=\frac{d\bar{u}}{dx},\quad \int\limits_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dt=\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^\infty ue^{-pt}\,dt=\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}.$$

Aquí p se considera solamente como parámetro. De transformadas de $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ sirven

$$\frac{\partial u}{\partial t}\div p\bar{u}-u(x, 0),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\div p^2\bar{u}-pu(x, 0)-\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t},$$

o bien, teniendo en cuenta las condiciones iniciales,

$$\frac{\partial u}{\partial t}\div p\bar{u}-\varphi(x),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\div p^2\bar{u}-p\varphi(x)-\psi(x);$$

las condiciones de frontera son $\bar{u}|_{x=0}=\bar{f}(p)\left[\alpha\frac{d\bar{u}}{dx}+\beta(p\bar{u}-\varphi(x)\right]_{x=l}=$ $=\gamma\bar{u}|_{x=l}$.

De este modo, la solución de la ecuación (1) se reduce a la solución de la ecuación operatoria

$$A\,\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}+B\,\frac{d\bar{u}}{dx}+M\bar{u}+N=0, \tag{2}$$

donde $M = C - A_1p^2 + B_1p$, $N = -A_1p\varphi - A_1\psi - B_1\varphi$ (es el parámetro), es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Determinada la transformada de la función buscada $u\,(x, t)$, con ayuda de la tabla o la fórmula de inversión de Riemann—Mellin se puede encontrar la original.

1086. Los extremos de una cuerda $x = 0$ y $x = 1$ están sujetados rígidamente. La desviación inicial está definida por la igualdad $u\,(x, 0) = A$ sen $(\pi\, x/l)$, $0 \leqslant x \leqslant l$; la velocidad inicial es igual a cero. Hallar la desviación $u\,(x, t)$ si $t > 0$.

Resolución. La ecuación diferencial del problema tiene la forma $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0$. Las condiciones iniciales son $u\,(x,\ 0)=A\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}$, $\frac{\partial u\,(x,\ 0)}{\partial t}=0$; las condiciones de frontera son: $u\,(0,\ t)=u\,(l,\ t)=0$. Escribimos la ecuación operatoria respectiva

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\frac{p^2}{a^2}\cdot\bar{u}=-pA\cdot\frac{1}{a^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l};$$

condiciones de frontera: $\bar{u}\,|_{x=0}=\bar{u}\,|_{x=l}=0$.

La solución general de la ecuación homogénea tiene la forma

$$\bar{u}=C_1e^{(p/a)\,x}+C_2e^{-(p/a)x},$$

y la solución particular de la ecuación no homogénea la buscamos en la forma

$$\bar{v}=\widetilde{C}_1\cos\frac{\pi x}{l}+\widetilde{C}_2\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l},$$

o sea,

$$\begin{array}{c|l}
-\dfrac{p^2}{a^2} & \bar{v}=\widetilde{C}_1\cos\dfrac{\pi x}{l}+\widetilde{C}_2\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{l}\\
0 & \bar{v}'=-\widetilde{C}_1\cdot\dfrac{\pi}{l}\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{l}+\widetilde{C}_2\cdot\dfrac{\pi}{l}\cos\dfrac{\pi x}{l}\\
1 & \bar{v}''=-\widetilde{C}_1\cdot\dfrac{\pi^2}{l^2}\cos\dfrac{\pi x}{l}-\widetilde{C}_2\cdot\dfrac{\pi^2}{l^2}\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{l}\\
\hline
\end{array}$$

$$-\frac{pA}{a^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}=-\widetilde{C}_2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{l^2}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}-\widetilde{C}_1\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{l^2}\right)\cos\frac{\pi x}{l}.$$

De aquí, $\widetilde{C}_1=0$, $\widetilde{C}_2=\frac{pA}{p^2+\pi^2a^2/l^2}$. De este modo, la solución general de la ecuación operatoria es

$$\bar{u}\,(x,\ p)=C_1e^{(p/a)x}+C_2e^{-(p/a)x}+\frac{Ap}{p^2+a^2\pi^2/l^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera, obtenemos $\bar{u}(x, p) = \frac{Ap}{p^2+a^2\pi^2/l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$. De original para tal transformada sirve la función

$$u(x, t) = A \cos \frac{\pi a t}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}.$$

1087. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que satisface las condiciones iniciales y de frontera: $u(x, 0) = 0$; $u(0, t) = u_0$, $0 < x < \infty$, $t > 0$.

Resolución. Escribimos la ecuación operatoria

$$\frac{d^2\bar{u}(x, p)}{dx^2} - \frac{p}{a^2} \cdot \bar{u}(x, p) = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$\bar{u}(x, p) = C_1 e^{-x\sqrt{p}/a} + C_2 e^{x\sqrt{p}/a}.$$

Según los datos, las funciones $u(x, t)$ y $\bar{u}(x, p)$ para $x \to \infty$ son acotadas y por eso $C_2 = 0$.

Utilizando la condición de frontera $\bar{u}(x, p)|_{x=0} = u_0/p$, encontramos la constante arbitraria $C_1 = u_0/p$. Entonces $\bar{u} = (u_0/p)\, e^{-x\sqrt{p}/a}$. Valiéndonos de la relación $\frac{1}{p} \quad e^{-a\sqrt{p}} \doteq \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$, hallamos la función original para la transformada $\bar{u}(x, p)$.

La solución de la ecuación dada tiene la forma

$$u(x, t) = u_0 \cdot \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

donde, como es sabido,

$$\operatorname{Erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_t^{\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2}\, d\tau = 1 - \operatorname{erf} t.$$

Por consiguiente,

$$u(x, t) = u_0 \cdot \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{x/(2a\sqrt{t})} e^{\tau^2}\, d\tau\right).$$

1088. Hallar la solución de la ecuación de conducción del calor $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t}$, que satisface las condiciones iniciales y de contorno: $u(x, 0) = A \operatorname{sen}(n\pi x/1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Resolución. La ecuación operatoria correspondiente a la ecuación dada en derivadas parciales tiene la forma

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \alpha^2 p \cdot \bar{u} = -\alpha^2 A \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

y su solución general

$$\bar{u}(x, p) = C_1 e^{-\alpha\sqrt{p}x} + C_2 e^{\alpha\sqrt{p}x} + \frac{A}{p + (n^2\pi^2)/(\alpha^2 l^2)} \operatorname{sen} \frac{u\pi x}{l}.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera $\bar{u}\mid_{x=0}=\bar{u}\mid_{x=l}=0$, obtenemos $\bar{u}(x,\ p)=\frac{A}{p+(n^2\pi^2)/(\alpha^2 l^2)}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$.

La función original de esta solución es $u(x,\ t)=Ae^{-n^2\pi^2 t/(\alpha^2 l^2)}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$.

1089. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que satisface la condición inicial $u(x,\ 0)=0\ (x>0)$ y las condiciones de frontera $u(0,\ t)=0,\ u(h,\ t)=u_0$.

Resolución. Escribimos la ecuación operatoria

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\frac{p}{a}\cdot\bar{u}=0,$$

que se debe resolver para las condiciones: $\bar{u}(0,\ t)=0,\ \bar{u}(h,\ t)=u_0/p$. La solución general de la ecuación operatoria la escribimos en la forma

$$\bar{u}(x,\ p)=A\operatorname{ch}\sqrt{p/a}\,x+B\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,x. \qquad (*)$$

Utilizando las condiciones de frontera, encontramos las constantes A y B Tenemos

$$A=0,\quad \frac{u_0}{p}=B\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h,\quad \text{o}\quad \text{sea,}\quad B=\frac{u_0}{p\cdot\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h}.$$

Sustituyendo los valores de A y B en la igualdad $(*)$, obtenemos $u=\frac{u_0\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,x}{p\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h}$.

Según la fórmula de inversión de Riemann—Mellin nos queda:

$$u(x,\ t)=\frac{u_0}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,x}{\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h}\cdot\frac{dp}{p}. \qquad (**)$$

Para calcular la integral determinemos los residuos de la función subintegral. Igualando a cero el denominador y teniendo en cuenta que las raíces deseno hiperbólico son imaginarias puras e iguales a un número múltiplo de π. hallamos:

$$\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h=0,\quad \sqrt{p_k/a}\,h=ik\pi,\quad p_k=-k^2\pi^2a/h^2,\quad (k\in N).$$

Todos los k polos son simples, distintos de cero; por eso, aplicando el teorema de Cauchy de los residuos, obtenemos

$$u(x,\ t)=\sum_{(p_k)}\operatorname{res}F(p)\,e^{pt},\quad \text{donde}\quad F(p)=\frac{M(p)}{p\cdot N(p)}=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,x}{p\cdot\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h},$$

además, la potencia de $M(p)$ no supera la potencia de $N(p)$. Conviene señalar que esta fórmula será válida para un número infinito de puntos singulares aislados que sean franjas simples y tengan el único punto límite de condensación

$p = \infty$. Entonces

$$\frac{M(p)}{pN(p)} \doteq \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M(p_k)}{p_k \cdot N'(p_k)} e^{p_k t},$$

donde $\frac{M(0)}{N(0)} = \lim_{p \to 0} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{p/a}\, x}{\operatorname{sh} \sqrt{p/a}\, h} = \frac{x}{h}$ y $\frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} = \frac{2i \operatorname{sh}(ik\pi/h)}{k\pi \operatorname{ch}(ik\pi)}$.

Expresando las funciones hiperbólicas por medio de las circulaciones, obtenemos

$$\frac{2 \operatorname{sen}(k\pi x/h)}{\pi k \cos(k\pi)} = (-1)^k \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen}(k\pi x/\pi)}{k}.$$

Así, pues, la igualdad $(_{**})$ adopta la forma

$$u(x, t) = u_0 \left[\frac{x}{h} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-ak^2\pi^2 t/h^2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(k\pi x/h)}{k} \right].$$

1090. Hallar la solución de la ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \times \times \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, que satisface las condiciones iniciales $u(x, 0) = = A \cos \frac{n\pi x}{l}$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$ y las condiciones de frontera $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$.

1091. Hallar la solución de la ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \times \times \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, que satisface las condiciones iniciales $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = B \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$, $0 \leqslant x \leqslant l$ y las condiciones de frontera $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

1092. Hallar la solución de la ecuación de conducción del calor $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t}$, que satisface las condiciones $u(x, 0) = 0$, $x \geqslant 0$; $u(0, t) = A$, $\lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0$.

Capitulo IX. Métodos de cálculos

§ 1. Solución aproximada de ecuaciones

El problema de encontrar valores aproximados de raíces reales de una ecuación $f(x) = 0$ prevé la *separación* previa *de una raíz*, o sea, la determinación del intervalo en el cual no hay otras raíces de la ecuación dada. Supondremos que la función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es continua al igual que sus derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$, los valores $f(a)$ y $f(b)$ de la función tienen en los extremos del intervalo distintos signos, o sea, $f(a) \cdot f(b) < 0$ y ambas derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ conservan sus signos en todo el intervalo $[a, b]$.

Como de raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$ sirven las abscisas de intersección de la curva $y = f(x)$ con el eje Ox, la separación de una raíz se puede realizar gráficamente. En vez de la ecuación $y = f(x)$ se puede tomar la ecuación $y = kf(x)$, donde k es una magnitud constante distinta de cero, ya que las ecuaciones $f(x) = 0$ y $kf(x) = 0$ son equivalentes.

La constante k puede tomarse de modo que las ordenadas de los puntos del gráfico no sean excesivamente grandes o, por el contrario, de modo que el gráfico no esté demasiado próximo al eje Ox. A veces es útil escribir la ecuación $f(x) = 0$ en la forma de $\varphi(x) = \psi(x)$. De raíces reales de la ecuación inicial sirven las abscisas de los puntos de intersección de los gráficos de las funciones $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$.

1. Método de partes proporcionales (de las cuerdas). Sea que se requiere calcular la raíz real de la ecuación $f'(x) = 0$, aislada sobre un segmento $[a, b]$. Examinemos el gráfico de la función $y = f(x)$. Sea $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Unimos los puntos del gráfico $A\,[a; f(a)]$ y $B\,[b; f(b)]$ por medio de una cuerda. Tomemos por valor aproximado de la raíz buscada la abscisa x_1 del punto de intersección de la cuerda AB con el eje Ox. Este valor aproximado se halla por la fórmula

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)},$$

donde x_1 pertenece al intervalo $]a, b[$. Sea, por ejemplo, $f(x_1) < 0$, entonces por un intervalo nuevo (más estrecho) del aislamiento de la raíz se puede tomar $[x_1, b]$. Uniendo los puntos $A_1\,[x_1; f(x_1)]$ y $B\,[b; f(b)]$, obtenemos en el punto de intersección de la cuerda con el eje Ox la segunda aproximación x_2 que se calcula por la fórmula

$$x_2 = x_1 - \frac{(b-x_1)\,f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}$$

etc. La sucesión de los números $a, x_1, x_2, \ldots$ tiende a la raíz buscada de la ecuación $f(x) = 0$. El cálculo de valores aproximados de las raíces de la ecuación debe efectuarse hasta que dejen de variar aquellas cifras decimales que queremos conservar en la respuesta (o sea, hasta que se alcance el grado prefijado de precisión).

Si $\bar{x}$ es la raíz exacta de la ecuación $f(x) = 0$, aislada sobre el segmento $[a, b]$ y ξ es el valor aproximado de la raíz, determinado por el método de partes proporcionales, entonces la estimación del error de este valor aproximado es la siguiente:

$$|\bar{x}-\xi| < -\frac{f(a)\cdot f(b)}{2}\cdot \max_{[a,\,b]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|.$$

2. Método de las tangentes (método de Newton). Sea aislada una raíz real de la ecuación de $f(x) = 0$ sobre el segmento $[a, b]$. Supongamos que todas las limitaciones enunciadas anteriormente con respecto a $f(x)$ conservan también ahora su vigor. Tomamos sobre el segmento $[a, b]$ un número x_0 tal que $f(x_0)$ tenga el mismo signo que $f''(x_0)$, o sea $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$ (en particular por x_0 puede ser tomado uno de los extremos del segmento $[a, b]$ en el cual se cumpla esta condición). Trazamos en el punto $M_0\,[x_0;\, f(x_0)]$ la tangente a la curva $y = f(x)$. Tomamos por valor aproximado de la raíz la abscisa del punto de intersección de esta tangente con el eje Ox. Este valor aproximado de la raíz se halla por la fórmula

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Aplicando este procedimiento una vez más en el punto $M_1\,[x_1;\, f(x_1)]$, encontramos

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

etc. La sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots$, obtienida de este modo, tiene por límite la raíz buscada.

Para apreciar el error del valor aproximado de la raíz hallada por el método de Newton puede ser utilizada la desigualdad

$$|\bar{x}-\xi| < \frac{[f(\xi)]^2}{2}\cdot \max_{[a,\,b]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|.$$

3. Método combinado de las partes proporcionales y de las tangentes. Sea que se requiere hallar la raíz real de la ecuación $f(x) = 0$, aislada sobre el segmento $[a, b]$. Supongamos, que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distintos signos y cada una de las derivadas conserva un signo determinado sobre el segmento de aislamiento. Tomamos sobre el segmento $[a, b]$ un punto x_0 tal, que $f(x_0)$ y $f''(x_0)$ (para x perteneciente al intervalo de aislamiento) tengan iguales signos.

Valgámonos de las fórmulas de los métodos de las partes proporcionales y de las tangentes:

$$x_{11} = x_0\, \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}; \quad x_{12} = a - \frac{(b-a)\, f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Las magnitudes x_{11} y x_{12} pertenecen al intervalo de aislamiento, además, $f(x_{11})$ y $f(x_{12})$ tienen distintos signos.

Construimos un nuevo par de aproximaciones a la raíz:

$$x_{21} = x_{11} - \frac{f(x_{11})}{f'(x_{11})}; \quad x_{22} = x_{11} - \frac{(x_{12}-x_{11})\, f(x_{11})}{f(x_{12})-f(x_{11})}.$$

Los puntos x_{21} y x_{22} están situados sobre el eje numérico entre los puntos x_1 y x_{12}, con ello $f(x_{21})$ y $f(x_{22})$ tienen distintos signos.

Calculamos ahora los valores

$$x_{31} = x_{21} - \frac{f(x_{21})}{f'(x_{21})}; \quad x_{32} = x_{21} - \frac{(x_{22}-x_{21})\, f(x_{21})}{f(x_{22})-f(x_{21})},$$

etc.

Cada una de las sucesiones

$$x_{11},\ x_{21},\ x_{31},\ \ldots,\ x_{n1},\ \ldots;\ x_{12},\ x_{22},\ x_{32},\ \ldots,\ x_{n2},\ \ldots$$

tiende hacia la raíz buscada, además una de las sucesiones es monótona creciente y la otra, monótona decreciente. Sea, por ejemplo, $x_{n1} < \bar{x} < x_{n2}$, entonces $0 < \bar{x} - x_{n-1} < x_{n2} - x_{n1}$. Fijando de antemano un ε suficientemente pequeño, podemos, al aumentar n, alcanzar que se cumpla la desigualdad $x_{n2} - x_{n1} < \varepsilon$; por consiguiente, para este mismo valor de n se cumplirá la desigualdad $\bar{x} - x_{n1} < \varepsilon$. De este modo, x_{n1} es un valor aproximado de la raíz $\bar{x}$, calculado con un error que no supera ε.

Así, por ejemplo, para hallar un valor aproximado de $\bar{x}$ con precisión de hasta 0,001 hace falta determinar n de modo que los valores de x_{n1} y x_{n2} calculados con precisión de hasta 0,001, coincidan.

4. Método de iteraciones. Si la ecuación dada está reducida a la forma $x = \varphi(x)$, donde $|\varphi'(x)| \leqslant r < 1$ por doquier sobre un segmento $[a, b]$, en el cual la ecuación inicial tiene una sola raíz, entonces, partiendo de cierto valor inicial de x_0 perteneciente al segmento $[a, b]$ se puede construir la sucesión

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \ \ldots, \quad x_n = \varphi(x_{n-1}).$$

De límite de esta sucesión sirve la única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ sobre el segmento $[a, b]$. El error del valor aproximado x_n de la raíz $\bar{x}$, hallada por el método de iteraciones se estima por la desigualdad

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant \frac{r}{1-r}\,|x_n - x_{n-1}|.$$

Para encontrar un valor aproximado de la raíz con un error que no exceda de ε, es suficiente determinar n de modo que se cumpla la desigualdad

$$x_n - x_{n-1}| < \frac{r-1}{r}\,\varepsilon.$$

5. Método de pruebas. El intervalo de aislamiento de una raíz real siempre se puede disminuir dividiéndolo, por ejemplo, por la mitad y determinando dn este modo cuál es la parte del intervalo inicial en cuyas fronteras la función $f(x)$ cambia de signo. Luego el intervalo obtenido vuelve a dividirse en dos partes, etc. Tal proceso se realiza hasta que dejen de variar las cifras decimales que se conservan en la respuesta.

1093. Hallar con ayuda del método de las partes proporcionales la raíz positiva de la ecuación $x^4 - 2x - 4 = 0$ con precisión de hasta 0,01.

Resolución. La raíz positiva se encuentra en el intervalo $]1;\ 1{,}7[$, ya que $f(1) = -5 < 0$ y $f(1{,}7) = 0{,}952 > 0$.

Determinamos el primer valor aproximado de la raíz:

$$x_1 = 1 - \frac{(1{,}7-1)\cdot f(1)}{f(1{,}7) - f(1)} = 1{,}588.$$

Como $f(1{,}588) = -0{,}817 < 0$, entonces, volvemos a aplicar el método de las partes proporcionales al intervalo $]1{,}588;\ 1{,}7[$:

$$x_2 = 1{,}588 - \frac{(1{,}7-1{,}588)\cdot f(1{,}588)}{f(1{,}7) - f(1{,}588)} = 1{,}639; \qquad f(1.639) = -0{,}051 < 0.$$

Hallamos el tercer valor aproximado:

$$x_3 = 1{,}639 - \frac{(1{,}7-1{,}639)\cdot f(1{,}639)}{f(1{,}7)-f(1{,}639)} = 1{,}642; \quad f(1{,}642) = -0{,}016 < 0.$$

Determinamos el cuarto valor aproximado:

$$x_4 = 1\ 642 - \frac{(1{,}7-1{,}642)\cdot f(1{,}642)}{f(1{,}7)-f(1{,}642)} = 1{,}643; \quad f(1{,}643) = 0\ 004 > 0$$

Por consiguiente, con precisión hasta 0,01, la raíz buscada es igual a 1,64.

1094. Resolver el problema precedente por el método de tangentes

Resolución. Aquí $f(x) = x^4 - 2x - 4$, $f'(x) = 4x^3 - 2$, $f''(x) = 12x^2$. Puesto que $f(x)$ y $f''(x)$ para $x_0 = 1{,}7$ tienen el mismo signo, a saber $f(1{,}7) = 0{,}952 > 0$ y $f''(1{,}7) > 0$, utilicemos la fórmula $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$, donde $f'(1{,}7) = 4\cdot 1{,}7^3 - 2 = 17{,}652$. Entonces

$$x_1 = 1{,}7 - 0{,}952/17{,}652 = 1{,}646.$$

Volvemos a aplicar el procedimiento de tangentes. Tenemos $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$, donde $f(x_1) = f(1{,}646) = 0{,}048$, $f'(1{,}646) = 15{,}838$; de suerte que

$$x_2 = 1{,}646 - 0{,}048/15{,}838 = 1{,}643.$$

De un modo análogo hallamos $f(1{,}643) = 0{,}004$; $f'(1{,}643) = 15{,}740$, o sea,

$$x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 1{,}643 - 0{,}003/15{,}740 = 1{,}6427.$$

Por lo tanto, la raíz buscada, con precisión de hasta 0,01, es igual a 1,64.

1095. Valiéndose del método combinado de las partes proporcionales y de las tangentes, hallar el valor aproximado de la raíz de la ecuación $x^3 + x^2 - 11 = 0$, aislada en el intervalo]1, 2[, con precisión de hasta 0,001.

Resolución. Tenemos $f(x) = x^3 + x^2 - 11$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $f''(x) = 6x + 2$. En el intervalo indicado $f''(x) > 0$, por eso, aplicando el método de las tangentes, tomemos como primera aproximación $x_0 = 2$, ya que $f(2) = 1 > 0$;

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{16} = 1{,}9375 \approx 1{,}94;$$

$$x_{12} = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)} = 1 - \frac{(2-1)(-9)}{1-(-9)} = 1 + \frac{9}{10} = 1{,}9.$$

La raíz buscada pertenece al intervalo]1,9; 1,94[; tenemos $f(1{,}9) = -0{,}531$, $f(1{,}94) = 0{,}065$; $f'(1{,}94) = 15{,}172$;

$$x_{21} = 1{,}94 - \frac{0{,}065}{15{,}172} = 1{,}936; \quad x_{22} = 1{,}9 - \frac{0{,}04\cdot(-0{,}531)}{0{,}065+0{,}531} = 1{,}936.$$

Como los valores x_{21} y x_{22} calculados con precisión de hasta 0,001 han coincidido, entonces el valor aproximado de la raíz $\bar{x}$, determinado con precisión de hasta 0,001, es igual a 1,936.

1096. Valiéndose del método de iteraciones, hallar el valor aproximado de la raíz de la ecuación $2 \log x - x = 0$ con precisión de hasta 0,001.

Resolución. Determinamos el intervalo de aislamiento de la raíz real de la ecuación. Presentamos la ecuación dada en la forma $\log x = -x + 2$ y construimos los gráficos de las funciones $y = \log x$ e $y = -x + 2$. La abscisa del punto M en que se intersecan estos gráficos se encuentra en el intervalo $[1, 2]$, por eso como valor inicial de $\bar{x}$ se puede tomar $x_0 = 1$ (fig. 69). Escribimos la

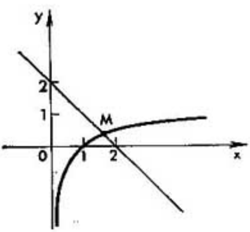

Fig. 69

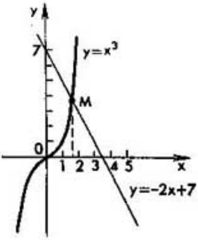

Fig. 70

ecuación inicial en la forma $x = 2 - \log x$. Aquí $\varphi(x) = 2 - \log x$, $\varphi'(x) = -(\log e)/x$, o sea, $|\varphi'(x)| < 1$ en el intervalo $[1, 2]$ y por eso el método de iteraciones es aplicable. Determinamos ahora el primer valor aproximado:

$$x_1 = 2 - \log x_0 = 2 - \log 1 = 2.$$

Hallamos la segunda aproximación y las sucesivas:

$$x_2 = 2 - \log x_1 = 2 - \log 2 = 2 - 0{,}3010 = 1{,}6990;$$
$$x_3 = 2 - \log 1{,}6990 = 2 - 0{,}2302 = 1{,}7698;$$
$$x_4 = 2 - \log 1{,}7698 = 2 - 0{,}2480 = 1{,}7520;$$
$$x_5 = 2 - \log 1{,}7520 = 2 - 0{,}2435 = 1{,}7565;$$
$$x_6 = 2 - \log 1{,}7565 = 2 - 0{,}2445 = 1{,}7555;$$
$$x_7 = 2 - \log 1{,}7555 = 2 - 0{,}2444 = 1{,}7556.$$

De este modo, raíz buscada es $x \cong 1{,}755$.

1097. Resolver con ayuda del método de pruebas la ecuación $x^3 + 2x - 7 = 0$ con precisión de hasta 0,01.

Resolución. El intervalo de aislamiento de la raíz real se puede determinar gráficamente, construyendo el gráfico de las funciones $y = x^3$ e $y = -2x + 7$ (fig. 70).

El único punto de intersección de los gráficos se encuentra en el intervalo $]1, 2[$. Por consiguiente, la raíz buscada está comprendida en este intervalo, o sea, se puede tomar $a = 1$, $b = 2$. Hallamos los valores de la función sobre los extremos del intervalo: $f(1) = -4 < 0$; $f(2) = 5 > 0$. Dividiendo el intervalo $]1, 2[$ por la mitad, obtenemos $c_1 = (a + b)/2 = (1 + 2)/2 = 1{,}5$ y calculamos $f(c_1) = f(1{,}5) = -0{,}625 < 0$. Por consiguiente, la raíz buscada está en el intervalo $]1{,}5; 2[$.

Tomemos $c_2 = 1{,}7$; $f(c_2) = f(1{,}7) = 1{,}313 > 0$. Vemos que la raíz buscada se halla en el intervalo $]1{,}5; 1{,}7[$. Tomemos ahora $c_3 = 1{,}6$; $f(c_3) = f(1{,}6) = 0{,}296 > 0$. Como resultado se logró achicar el intervalo de aislamiento y la raíz buscada se encuentra en el intervalo $]1{,}5; 1{,}6[$.

Continuando este proceso, tenemos

$c_4 = 1,55$; $f(c_4) = f(1,55) = -0,176 < 0$; intervalo de aislamiento $]1,55; 1,6[$;

$c_5 = 1,57$; $f(c_5) = f(1,57) = 0,010 > 0$; intervalo de aislamiento $]1,55; 1,57[$;

$c_6 = 1,56$; $f(c_6) = f(1,56) = -0,084 < 0$; intervalo de aislamiento $]1,56; 1,57[$;

$c_7 = 1,565$; $f(c_7) = f(1,565) = -0,037 < 0$; intervalo de aislamiento $]1,565; 1,57[$;

$c_8 = 1,568$; $f(c_8) = f(1,568) = -0,009 < 0$.

De este modo, hemos obtenido el intervalo $]1,568; 1,57[$. De aquí se ve que con precisión de hasta 0,01 la raíz buscada es $x = 1,57$.

1098. Determinar gráficamente los intervalos de aislamiento de las raíces reales de la ecuación $x^3 = 9x^2 + 18x - 1 = 0$.

1099. Determinar gráficamente los intervalos de aislamiento de las raíces reales de la ecuación $x^3 - 12x + 1 = 0$.

Valiéndose del método de las partes proporcionales y de las tangentes, resolver con precisión de hasta 0,01 las ecuaciones:

1100. $x^4 + 3x - 20 = 0$.

1101. $x^3 = 2x - 5 = 0$.

1102. $x^4 - 3x + 1 = 0$.

1103. $x^3 + 3x + 5 = 0$.

1104. $x^4 + 5x - 7 = 0$ (aplicar el método combinado de las partes proporcionales y de las tangentes).

Valiéndose del método de iteraciones, resolver con precisión de hasta 0,01 las ecuaciones:

1105. $x^3 - 12x - 5 = 0$.

1106. $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$.

Por medio del método de pruebas, dividiendo en partes el intervalo de aislamiento de la raíz, resolver con precisión de hasta 0,01 las ecuaciones:

1107. $x + e^x = 0$.

1108. $x^5 - x - 2 = 0$.

1109. Aplicando dos veces el método de las partes proporcionales, hallar el valor aproximado de la raíz real de la ecuación $x^3 - 10x + 5 = 0$, aislada en el intervalo $[0; 0,6]$. Calcular los valores aproximados de x_1 y x_2 con dos cifras decimales. Estimar el error del valor aproximado de x_2.

Resolución. Hallamos

$$f(x) = x^3 - 10x + 5, \quad f'(x) = 3x^2 - 10, \quad f''(x) = 6x;$$
$$f(0) = 5; \quad f(0,6) = 0,216 - 6 + 5 = -0,784;$$

$$x_1 = 0 - \frac{0,6\cdot 5}{-0,784-5} = \frac{3}{5,784} = 0,52; \quad f(0,52) = 0,141 - 5,2 + 5 = -0,059 < 0.$$

El nuevo intervalo de aislamiento es $]0; 0,52[$. Encontramos la segunda aproximación:

$$x_2 = 0 - \frac{0,52\cdot 5}{-0,059-5} = \frac{2,6}{5,059} = 0,51$$

Vamos a estimar el error de este valor aproximado, utilizando la fórmula

$$|\bar{x}-x_2|<-\frac{f(a)\,f(b)}{2}\cdot\max_{[a,\,b]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|,$$

Poniendo $a=0$, $b=0{,}52$, tenemos

$$|\bar{x}-x_2|<\frac{5\cdot 0{,}059}{2}\cdot\max_{[0;\ 0{,}52]}\left|\frac{6x}{(3x^2-10)^3}\right|.$$

En el intervalo indicado $\left|\frac{6x}{(3x^2-19)^3}\right|=\frac{6x}{(10-3x^2)^3}$. Esta función toma el valor máximo cuando $x=0{,}52$. Por consiguiente,

$$|\bar{x}-x_2|<0{,}01475\cdot\frac{3{,}12}{(10-0{,}8112)^3}.$$

Así, pues, obtenemos la estimación del valor aproximado de la raíz: $|\bar{x}-0{,}51|<0{,}0006$. De aquí resulta que en el valor aproximado de la raíz $x_2=0{,}51$ ambos decimales son justos.

1110. Aplicando dos veces el método de las tangentes, hallar el valor aproximado de la raíz real de la ecuación $x^4-8x+1=0$, aislada en el intervalo [1,6; 2]. Calcular los valores aproximados de x_1 y x_2 con dos cifras decimales. Estimar el error del valor aproximado de x_2.

Resolución. Hallamos $f(x)=x^4-8x+1$, $f'(x)=4x^3-8$, $f''(x)=12x^2$; $f(1{,}6)=-5{,}246$, $f(2)=1$; $f''(x)>0$, $f(2)=1>0$, por eso tomamos $x_0=2$. Utilizamos la fórmula

$$x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0),\ \text{o sea,}\ x_1=2-1/24=1{,}96.$$

Determinamos la segunda aproximación. Nos resulta $f(x_1)=1{,}96^4-8\cdot 1{,}96+1=0{,}09$, $f'(x_1)=4\cdot 1{,}96^3-8=22{,}12$; por lo tanto,

$$x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1),\ \text{o sea,}\ x_2=1{,}96-0{,}09/22{,}12=1{,}956\approx 1{,}96.$$

Determinemos el error del valor aproximado hallado de la raíz:

$$|\bar{x}-x_2|<\frac{[f(x_2)]^2}{2}\cdot\max_{[1,\,6;\ 2]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|.$$

En el intervalo]1,6; 2[tenemos

$$\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|=\left|\frac{12x^2}{(4x^3-8)^3}\right|=\frac{3x^2}{16\,(x^3-2)^3}.$$

Dentro del intervalo [1,6; 2] la función $\frac{x^2}{(x^3-2^3)}$ no tiene extremos. Ella alcanza su valor máximo cuando $x=1{,}6$:

$$|\bar{x}-1{,}96|<\frac{0{,}09^2}{2}\cdot\frac{3{,}16^2}{16\,(1{,}6^3-2)^3},$$

o sea, $|\bar{x}-1{,}96|<0{,}0002$; por consiguiente, en el valor aproximado de la raíz igual a 1,96 todas las cifras son correctas.

1111. Aplicando cinco veces el método de iteraciones, hallar la raíz aproximada de la ecuación $2x - \cos x = 0$, aislada en el intervalo $[0;\ 0{,}5]$, con precisión de hasta tres cifras significativas.

Resolución. Escribimos la ecuación dada en la forma $x = 0{,}5 \cos x$; por consiguiente, $\varphi(x) = 0{,}5\cos x$, $\varphi'(x) = -0{,}5 \operatorname{sen} x$. En el intervalo $[0;\ 0{,}5]$ tenemos $|\varphi'(x)| < 0{,}5 = r < 1$. Tomamos $x_0 = 0{,}5$, $x_1 = 0{,}5 \cos x_0$, $x_2 = 0{,}5 \cos x_1$, etc. Realizamos los cálculos:
$x_1 = 0{,}5 \cos 0{,}5 = 0{,}5 \cos 28°41' = 0{,}4386$; $x_2 = 0{,}5 \cos 0{,}4386 = 0{,}5 \cos 25°08' = 0{,}4527$; $x_3 = 0{,}5 \cos 0{,}4527 = 0{,}5 \cos 25°56' = 0{,}4496$; $x_4 = 0{,}5 \cos 25°46' = 0{,}4503$; $x_5 = 0{,}5 \cos 25°48' = 0{,}4502$.

Calculamos la estimación del error aplicando la fórmula

$$|\bar{x} - x_5| < \frac{1}{1-r}\,|x_5 - x_4|.$$

Tenemos
$|\bar{x} - 0{,}4502| < |0{,}4502 - 0{,}4503|$, o sea, $|\bar{x} - 0{,}4502| < 0{,}0001$, o bien $0{,}4501 < \bar{x} < 0{,}4503$.

Por lo tanto, con precisión de hasta tres cifras significativas, el valor aproximado de la raíz es igual a 0,450.

6. Generalización del método de Newton para la solución aproximada de ecuaciones.

a) Método de Chébishev. Supongamos que se exige hallar la raíz real de la ecuación $f(x) = 0$, aislada en el intervalo $]a,\ b[$. La función $f(x)$ se supone continua junto con las derivadas de n-ésimo orden inclusive, además, $f'(x) \neq 0$ en el intervalo $]a,\ b[$. Examinemos la curva $x = \xi + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots + A_n y^n$. Seleccionamos los parámetros $\xi, A_1, A_2, \ldots, A_n$, de modo que las curvas $y = f(x)$ y $x = \xi + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$ en el punto con abscisa x_0 del intervalo $]a,\ b[$ tengan una tangencia de n-ésimo orden. Recordemos (véase la parte I, cap. VII, § 4) que las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ en el punto con abscisa x_0 tienen *tangencia de n-ésimo orden* si
$f(x_0) = \varphi(x_0)$, $f'(x_0) = \varphi'(x_0)$, $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0)$.
El punto de tangencia de n-ésimo orden es geométricamente la posición límiter de $n+1$ puntos de intersección de las curvas $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$, al tender estos puntos de intersección hacia el punto con abscisa x_0. En el caso dado, la curva $y = \varphi(x)$ se define implícitamente por la ecuación $x = \xi + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$.

Seleccionando de tal modo los parámetros $\xi, A_1, A_2, \ldots, A_n$, por valor aproximado de la raíz buscada, se puede tomar la abscisa del punto de intersección de la curva $x = \xi + \sum_{k=1}^{n} A_k y^k$ con el eje Ox, o sea, el número ξ.

Si $n = 1$, entonces $\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (fórmula del método de Newton).

Si $n = 2$, entonces

$$\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{[f(x_0)]^2 \cdot f''(x_0)}{2!\,[f'(x_0)]^3}. \tag{1}$$

Si $n = 3$, entonces

$$\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{[f(x_0)]^2 \cdot f''(x_0)}{2!\,[f'(x_0)]^3} - \frac{[f(x_0)]^3}{3!}\,\frac{3[f''(x_0)]^2 - f'(x_0) \cdot f'''(x_0)}{[f'(x_0)]^5}. \tag{2}$$

Si $n=4$, entonces

$$\xi=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{[f(x_0)]^2\cdot f''(x_0)}{2![f'(x_0)]^3}-\frac{[f(x_0)]^3}{3!}\,\frac{3[f''(x_0)]^2-f'(x_0)\cdot f'''(x_0)}{[f'(x_0)]^5}-$$

$$-\frac{[f(x_0)]^4}{4!}\,\frac{[f'(x_0)]^2\cdot f^{\mathrm{IV}}(x_0)-10f'(x_0)\,f''(x_0)\,f'''(x_0)+15\,[f''(x_0)]^3}{[f'(x_0)]^7}. \qquad (3)$$

Demos *las estimaciones del error* de los valores de las raíces halladas por las fórmulas (1) y (2).

Para la fórmula (1) cuando $n=2$

$$|\bar{x}-\xi|<\frac{[f(x_0)]^3}{3!}\cdot\max_{[a,\,b]}\left|\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)\,f'''(x)}{[f'(x)]^5}\right|.$$

Para la fórmula (2) cuando $n=3$

$$|\bar{x}-\xi|<\frac{[f(x_0)]^4}{4!}\cdot\max_{[a,\,b]}\left|\frac{[f'(x)]^2\,f^{\mathrm{IV}}(x)-10f'(x)\,f''(x)\,f'''(x)+15\,[f''(x)]^3)}{[f'(x)]^7}\right|.$$

b) Para determinar la raíz real de la ecuación $f(x)=0$, aislada en el intervalo $]a,\,b[$, se examina la curva

$$y=\frac{x-\xi_n}{A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_{n-1}(x-x_0)^{n-1}} \qquad (3)$$

que tiene con la curva $y=f(x)$, en el punto con abscisa x_0 $(a<x_0<b)$, una tangencia de n-ésimo orden. Tomamos por valor aproximado de la raíz la abscisa del punto de intersección de esta curva con el eje Ox, o sea, ξ_n.

De la condición de la tangencia hallamos este valor aproximado:

$$\xi_n=x_0-b_0\cdot\frac{D_{n-1}}{D_n}, \qquad (4)$$

donde

$$D_n=\begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0\\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \ldots 0 & 0\\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \ldots 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \ldots b_1 & b_0\\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots b_2 & b_1 \end{vmatrix},$$

$$b_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\quad(k=1,\,2,\,\ldots,\,n),\quad b_0=f(x_0).$$

Si $n=1$, la ecuación (3) define la recta $y=\frac{1}{A_0}(x-\xi)$ y para el valor aproximado de la raíz se obtiene la fórmula de Newton.

De este modo, la **fórmula** (4) generaliza el método de Newton para la solución aproximada de ecuaciones.

Si $n=2$, entonces

$$\xi_2=x_0-\frac{b_0b_1}{b_1^2-b_0b_2}. \qquad (5)$$

Si $n=3$, entonces

$$\xi_3 = x_0 - \frac{(b_1^2 - b_0 b_2)\, b_0}{\begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

1112. Hallar el valor aproximado de $\sqrt{3}$ con precisión de hasta 0,0000001.

Resolución. Aplicamos a la ecuación $x^2 - 3 = 0$ la fórmula de Chébishev para $n = 4$. Tomamos $x_0 = 1{,}7$; entonces $f(x) = x^2 - 3$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $f'''(x) = 0$, $f^{IV}(x) = 0$, $f(1{,}7) = -0{,}11$, $f'(1{,}7) = 3{,}4$, $f''(1{,}7) = 2$, $f'''(1{,}7) = 0$, $f^{IV}(1{,}7) = 0$. Por consiguiente,

$$\xi = 1{,}7 + \frac{0{,}11}{3{,}4} - \frac{0{,}11^2 \cdot 2}{2!\, 3{,}4^3} + \frac{0{,}11^3}{3!} \cdot \frac{12}{3{,}4^5} - \frac{0{,}11^4}{4!} \cdot \frac{120}{3{,}4^7} =$$

$= 1{,}7 + 0{,}323529 - 0{,}0003078 + 0{,}0000058 - 0{,}0000001 = 1{,}7320508.$
Como $f(1{,}7320508) < 0$, pero $f(1{,}7320509) > 0$, en el valor aproximado de la raíz $\xi = 1{,}7320508$ todas las cifras son correctas.

1113. Hallar el valor aproximado de la raíz real de la ecuación $2x^3 + 2x - 7 = 0$ con precisión de hasta 0,000001.

Resolución. Tenemos $f(x) = 2x^3 + 2x - 7$, $f'(x) = 6x^2 + 2 > 0$; $f(x)$ es una función creciente; $f(1{,}3) = 4{,}394 + 2{,}6 - 7 = -0{,}006 < 0$, $f(1{,}4) = 5{,}488 + 2{,}8 - 7 = 1{,}288 > 0$. Por consiguiente, en el intervalo $]1{,}3;\ 1{,}4[$ se tiene la única raíz real de la ecuación dada.

Tomamos $x_0 = 1{,}3$. Utilizamos la fórmula de Chébishev para $n = 2$; encontramos $f(x) = 2x^3 + 2x - 7$, $f'(x) = 6x^2 + 2$, $f''(x) = 12x$; $f(1{,}3) = -0{,}006$, $f'(1{,}3) = 12{,}14$, $f''(1{,}3) = 15{,}6$; por consiguiente,

$$\xi = 1{,}3 + \frac{0{,}006}{12{,}14} - \frac{0{,}000036}{2} \cdot \frac{15{,}6}{1789{,}1883} = 1{,}3 + 0{,}0004942 - 0{,}0000002 = 1{,}300494;$$

$$f(1{,}300494) = 4{,}399009 + 2{,}600988 - 7 = -0{,}000003 < 0,$$
$$f(1{,}300495) = 4{,}399021 + 2{,}600990 - 7 = 0{,}000011 > 0.$$

Por lo tanto, todas las cifras del valor aproximado de la raíz $\xi = 1{,}300494$ son correctas.

1114. Valiéndose de la fórmula de Chébishev, hallar el valor aproximado de $\sqrt[3]{5}$ con precisión de hasta 0,00001. Poner $n = 3$.

1115. Tomando en la fórmula de Chébishev $n = 2$, calcular la raíz real de la ecuación $3x^5 + 6x - 16 = 0$ con precisión de hasta 0,00001.

1116. Hallar el valor aproximado de $\sqrt{2}$ con precisión de hasta, 0,00001.

Resolución. Pongamos $f(x) = x^2 - 2$. Aplicamos la fórmula (6) tomando $x_0 = 1{,}4$. Entonces $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $f'''(x) = 0$, $b_0 = f(1{,}4) = -0{,}04$, $b_1 = f'(1{,}4) = 2{,}8$, $b_2 = (1/2)\, f''(1{,}4) = (1/2) \cdot 2 = 1$,

$b_3 = f'''(1,4) = 0$. Por consiguiente,

$$\xi_3 = 1,4 + \frac{(7,84+0,04)\cdot 0,04}{\begin{vmatrix} 2,8 & -0,04 & 0 \\ 1 & 2,8 & -0,04 \\ 0 & 1 & 2,8 \end{vmatrix}} = 1,4 + \frac{7,88\cdot 0,04}{21,952+0,224} =$$

$$= 1,4 + \frac{0,3152}{22,176} = 1,4 + 0,01421 = 1,41421.$$

Todas las cifras decimales del valor aproximado de la raíz son correctas.

1117. Tomando $n = 2$, hallar el valor aproximado de la raíz positiva de la ecuación $x^3 + x^2 - 4 = 0$ con precisión de hasta 0,0001.

Resolución. Hacemos $x_0 = 1,3$. Tenemos: $f(x) = x^3 + x^2 - 4$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $f''(x) = 6x + 2$, $b_0 = f(1,3) = -0,113$, $b_1 = f'(1,3) = 7,67$, $b_2 = (1/2)\cdot f''(1,3) = (1/2)\cdot 9,8 = 4,9$. Entonces

$$\xi_2 = 1,3 + \frac{7,67\cdot 0,113}{7,67^2 + 0,113\cdot 4,9} = 1,3 + \frac{0,86671}{59,3826} = 1,3146.$$

Todas las cifras decimales son correctas.

1118. Tomando $n = 2$, hallar el valor aproximado de la raíz de la ecuación $x + \ln x = 3$ con precisión de hasta 0,001.

1119. Valiéndose de la fórmula (6), hallar el valor aproximado de $\sqrt[5]{5}$ con precisión de hasta 0,00001.

1120. Valiéndose de la fórmula (5) calcular la raíz negativa de la ecuación $5x^6 - 5x - 47,071 = 0$ con precisión de hasta 0,0001.

§ 2 Interpolación

1. Polinomio de interpolación de Langrange. Sea dada la tabla de valores

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Se requiere escribir un polinomio $y = f(x)$ de grado $m \leqslant n - 1$ que tome los valores dados y_i para los valores correspondientes de x_i, o sea, $y_i = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. En otras palabras, el gráfico de este polinomio debe pasar por n puntos $M_i(x_i; y_i)$.

Designemos por

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)$$

un polinomio auxiliar de grado n en el cual x_i son los valores del argumento dados en la tabla. Entonces tiene lugar la igualdad

$$f(x) = \frac{y_1\cdot\varphi(x)}{(x - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} +$$

$$+\frac{y_2\cdot\varphi(x)}{(x-x_2)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\,\ldots\,(x_2-x_n)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{y_n\cdot\varphi(x)}{(x-x_n)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\,\ldots\,(x_n-x_{n-1})},$$

o bien

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\cdot\varphi(x)}{\varphi'(x_k)(x-x_k)}.$$

Este precisamente es *el polinomio de interpolación de Lagrange.*

1121. Escribir el polinomio de Lagrange para la siguiente tabla de valores

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

Resolución. El polinomio auxiliar tiene la forma $\varphi(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Calculamos sucesivamente $\varphi'(x)$ para los valores dados de x:

$\varphi'(x)=(x-2)(x-3)(x-4)+(x-1)(x-3)(x-4)+$ $+(x-1)(x-2)(x-4)+(x-1)(x-2)(x-3)$; $\varphi'(1)=-6$, $\varphi'(2)=$ $=2$, $\varphi'(3)=-2$, $\varphi'(4)=6$.

Entonces

$$f(x)=\frac{2}{-6}(x-2)(x-3)(x-4)+\frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4)+$$
$$+\frac{4}{-2}(x-1)(x-2)(x-4)+\frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3)=x+1.$$

De este modo, en el caso dado el polinomio de interpolación es la función lineal $f(x)=x+1$.

1122. Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (2; 0), (4; 3), (6; 5), (8; 4), (10; 1).

Resolución. El polinomio auxiliar tiene la forma $\varphi(x)=(x-2)(x-4)\times$ $\times(x-6)(x-8)(x-10)$. Encontramos

$$\varphi'(x)=(x-4)(x-6)(x-8)(x-10)+(x-2)(x-6)(x-8)\times$$
$$\times(x-10)+(x-2)(x-4)(x-8)(x-10)+(x-2)(x-4)(x-6)\times$$
$$\times(x-10)+(x-2)(x-4)(x-6)(x-8);$$

$\varphi'(2)=384$, $\varphi'(4)=-96$, $\varphi'(6)=64$, $\varphi'(8)=-96$, $\varphi'(10)=384$.

Entonces

$$f(x)=\frac{0}{384}(x-4)(x-6)(x-8)(x-10)+\frac{3}{-96}(x-2)(x-6)\times$$
$$\times(x-8)(x-10)+\frac{8}{64}(x-2)(x-4)(x-8)(x-10)-$$

$$-\frac{6}{96}(x-2)(x-4)(x-6)(x-10)+\frac{0}{384}(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)=$$

$$=\frac{1}{32}(x^4-26x^3+220x^2-664x+640).$$

Por consiguiente, la buscada es la parábola de cuarto orden

$$y=\frac{1}{32}(x^4-26x^3+220x^2-664x+640).$$

1123. Se dan los puntos (0; 3), (2; 1), (3; 5), (4; 7). Escribir la ecuación del polinomio que toma los valores indicados para los valores dados del argumento.

1124. Escribir el polinomio que toma los valores dados en la tabla.

x	1	3	4	6
y	−7	5	8	14

1125. Escribir el polinomio cuyo gráfico pasa por los puntos (2; 3), (4; 7), (5; 9), (10; 19).

2. Fórmula de interpolación de Newton. Sean y_0, y_1, y_2, ... los valores de cierta función $y=f(x)$ que corresponden a valores equidistantes del argumento $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (o sea, $x_{k+1}-x_k=\Delta x_k=\text{const}$).

Introduzcamos las designaciones:

$$y_1-y_0=\Delta y_0,\ y_2-y_1=\Delta y_1,\ \ldots,\ y_n-y_{n-1}=\Delta y_{n-1},\ \text{o sea,}$$

las diferencias de primer orden de la función dada.

$\Delta y_1-\Delta y_0=\Delta^2 y_0$, $\Delta y_2-\Delta y_1=\Delta^2 y_1$, ..., o sea, las diferencias de segundo orden;

$\Delta^n y_1-\Delta^n y_0=\Delta^{n+1} y_0$, $\Delta^n y_2-\Delta^n y_1=\Delta^{n+1} y_1$, ..., o sea, las diferencias de orden $(n+1)$.

Efectuando las sustituciones sucesivas, obtenemos

$$\Delta^2 y_0=y_2-2y_1+y_0,\quad \Delta^3 y_0=y_3-3y_2+3y_1-y_0,\ \ldots,$$

$$\Delta^n y_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot y_{n-k}.$$

Del modo semejante obtenemos:

$$y_1=y_0+\Delta y_0,\quad y_2=y_0+2\Delta y_0+\Delta^2 y_0,\quad y_3=y_0+3\Delta y_0+3\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0,\ \ldots,$$

$$y_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k y_0=(1+\Delta)^n\cdot y_0=y_0+n\Delta y_0+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+\Delta^n y_0. \qquad (1)$$

Escribimos la tabla de diferencias:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & y_0 & & & & \\
x_1 & y_1 & \Delta y_0 & & & \\
 & & & \Delta^2 y_0 & & \\
x_2 & y_2 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & \\
 & & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 \\
x_3 & y_3 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & \\
 & & & \Delta^2 y_2 & & \\
x_4 & y_4 & \Delta y_3 & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Si en la fórmula (1) se supone que n no es sólo un número entero y positivo sino que puede ser un número cualquiera ($n = t$), entonces obtenemos *la fórmula de interpolación de Newton*:

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \Delta^t y_0. \qquad (2)$$

Hemos obtenido tal función de t que para $t = 0$ se convierte en y_0, para $t = 1$ en y_1, para $t = 2$ en y_2, etc. Puesto que el valor sucesivo del argumento x para el paso h se determina por la fórmula $x_n = x_0 + nh$, luego $n = (x_n - x_0)/h$. Entonces, haciendo $x = x_0 + th$, o sea, $t = (x - x_0)/h$, reducimos la fórmula (1) al aspecto

$$y_n = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!h^2}\Delta^2 y_0 + \ldots \qquad (3)$$

1126. De la tabla hallar el valor de y para $x = 3{,}1$, valiéndose

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	13	21	31	43	57

de la fórmula de interpolación de Newton.

Resolución. Componemos la tabla de las diferencias

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	3	4		
2	7	6	2	
3	13	8	2	0
4	21	10	2	0
5	31	12	2	0
6	43	14	2	0
7	57			

Aquí $x_0 = 3$, $x = 3,1$, $h = 1$. Entonces $t = (x - x_0)/h = (3,1 - 3)/1 = 0,1$. Escribimos el polinomio de interpolación de Newton para este caso:

$$y = y_0 + t \cdot \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_0,$$

o bien,

$$y = 13 + 0,1 \cdot 8 + \frac{0,1(0,1-1)}{2} \cdot 2 = 13,71.$$

Por consiguiente, cuando $x = 3,1$ e $y = 13,71$, el polinomio de interpolación para esta tabla tiene la forma

$$y = 3 + (x-1) \cdot 4 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 2 = x^2 + x + 1.$$

1127. Se dan los logaritmos decimales de los números: $\log 2,0 = 0,30103$, $\log 2,1 = 0,32222$, $\log 2,2 = 0,34242$, $\log 2,3 = 0,36173$, $\log 2,4 = 0,38021$, $\log 2,5 = 0,39794$. Valiéndose de la fórmula de interpolación de Newton hallar $\log 2,03$.

Resolución. Componemos la tabla de las diferencias:

x	$\log x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
2,0	0,30103					
2,1	0,32222	2119				
2,2	0,34242	2020	−99			
2,3	0,36173	1931	−89	10		
2,4	0,38021	1848	−83	6	−4	6
2,5	0,39794	1773	−75	8	2	

Aquí $x_0 = 2,0$, $x = 2,03$, $h = 0,1$. Entonces $t = (x - x_0)/h = (2,03 - 2,0)/0,1 = 0,3$. De ello

$$y = y_0 + t \cdot \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 +$$

$$+ \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!} \Delta^5 y_0 =$$

$$= 0,30103 + 0,3 \cdot 0,01219 + \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,00099 +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,7 \cdot 0,00010 + \frac{1}{24} \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,7 \cdot 2,7 \cdot 0,00004 +$$

$$+ \frac{1}{120} \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,7 \cdot 2,7 \cdot 3,7 \cdot 0,00006 = 0,30750.$$

De este modo, $\log 2,03 = 0,30750$. La tabla de logaritmos con cinco decimales da el mismo resultado.

1128. Se dan los logaritmos con cinco decimales de los números de 4 a 10 cada dos unidades. Valiéndose de la fórmula de interpolación de Newton, calcular los logaritmos con cinco decimales de los números de 6,5 a 7,0, cada 0,1.

1129. Conociendo los cuadrados de los números 5, 6, 7, 8, hallar el cuadrado del número 6,25.

1130. Escribir el polinomio de interpolación de Newton para la función definida por la tabla

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

§ 3. Cálculo aproximado de integrales definidas

Si $f(x)$ es un función continua y derivable un número suficiente de veces sobre el segmento $[a, b]$ y $h = (b - a)/n$, $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, $y_k = f(x_k)$, entonces tienen lugar las fórmulas siguientes para el cálculo aproximado de las integrales definidas.

Fórmulas de los rectángulos

$$\int_a^b f(x)\,dx = h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + R_n \tag{1}$$

o bien

$$\int_a^b f(x)\,dx = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + R_n; \tag{2}$$

el error límite absoluto es

$$R_n \leqslant \frac{h}{2}(b-a)M_1, \text{ donde } M_1 = \max_{[a,\,b]} |f'(x)|. \tag{3}$$

Fórmula de los trapecios

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + R_n; \tag{4}$$

el error límite absoluto es

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a)M_2, \text{ donde } M_2 = \max_{[a,\,b]} |f''(x)| \tag{5}$$

(el valor exacto del error $\delta_1 = -(h^2/12)(b - a) f''(c)$, donde $a < c < b$);

Fórmula de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2k-2})] + R_n; \tag{6}$$

el error límite absoluto es

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)M_3, \quad \text{donde} \quad M_3 = \max_{[a,\,b]} |f^{\mathrm{IV}}(x)| \qquad (7)$$

(el valor exacto del error $\delta_s = -(h^4/180)(b-a) f^{\mathrm{IV}}(c)$, donde $a < c < b$).

Cuando la determinación de la cuarta derivada de la función subintegral es dificultosa, para estimar el error del cálculo de la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ por la fórmula de Simpson se puede emplear el procedimiento siguiente.

Haciendo $n = 4k$, se calcula el valor aproximado de la integral dada por la fórmula de Simpson para el paso $h = (b-a)/(4k)$; supongamos que el valor hallado de la integral es I_1; luego el paso h se dobla y el cálculo con ayuda de la fórmula de Simpson se efectúa para el paso $h_1 = (b-a)/(2k)$; supongamos que el valor hallado de la integral es I_2; el error del segundo cálculo es, aproximadamente, 16 veces mayor que el error del primero y ambos tienen el mismo signo. Por eso el error del primer cálculo [para el paso $h = (b-a)/(4k)$] se determina por la fórmula siguiente (que también tiene en cuenta el signo del error):

$$\delta_S \approx (I_1 - I_2)/15$$

(este procedimiento se puede llamar estimación del error de la fórmula de Simpson por el método de duplicación del paso de los cálculos).

1131. Por la fórmula de los rectángulos calcular $I = \int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx$, dividiendo el intervalo de integración en 10 partes. Estimar el error.

Resolución. Aquí $y = \sqrt{x}$; para $n = 10$ tenemos $h = (2-1)/10 = 0{,}1$. De puntos de división sirven $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 + h = 1{,}1$, $x_2 = 1{,}2, \ldots, x_9 = 1{,}9$. Determinamos los valores correspondientes de la función subintegral: $y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{1} = 1$, $y_1 = \sqrt{1{,}1} = 1{,}049$, $y_2 = 1{,}095$, $y_3 = 1{,}140$, $y_4 = 1{,}183$, $y_5 = 1{,}225$, $y_6 = 1{,}265$, $y_7 = 1{,}304$, $y_8 = 1{,}342$, $y_9 = 1{,}378$.

Utilizando la fórmula de los rectángulos, obtenemos

$$I = 0{,}1\,(1{,}000 + 1{,}049 + 1{,}095 + 1{,}140 + 1{,}183 + 1{,}225 + 1{,}265 + 1{,}304 + 1{,}342 + 1{,}378) = 0{,}1 \cdot 11{,}981 \approx 1{,}20.$$

Estimamos el error. En el caso dado $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ sobre el segmento $[1, 2]$ alcanza el valor máximo igual a 0,5 para $x = 1$. De este modo, $|f'(x)| \leqslant M_1 = 1/2$. De aquí, por la fórmula (3) encontramos

$$R_n \leqslant \frac{0{,}1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}025.$$

Por consiguiente, $I \approx 1{,}20 \pm 0{,}025$.

Para comparar, calculamos esta misma integral por la fórmula de Newton—Leibniz:

$$I = \int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx = \int\limits_1^2 x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \approx 1{,}219.$$

En efecto, el valor real de la integral está en el intervalo hallado.

1132. Calcular la misma integral por la fórmula de los trapecios, tomando $n = 10$; estimar el error.

Resolución. Para las mismas designaciones, utilizando la fórmula de los trapecios, obtenemos

$$I = 0{,}1 \cdot \left(\frac{1+1{,}414}{2} + 1{,}049 + 1{,}095 + 1{,}140 + 1{,}183 + \right.$$
$$\left. + 1{,}225 + 1{,}265 + 1{,}304 + 1{,}342 + 1{,}378 \right) = 1{,}218.$$

Luego, $f''(x) = -1/(4\sqrt{x^3})$; $|f''(x)| \leqslant 1/4$ sobre el segmento $[1, 2]$. De este modo, por la fórmula (5) hallamos

$$R_n \leqslant \frac{0{,}1}{12} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \approx 0{,}002.$$

De suerte que $I \approx 1{,}218 \pm 0{,}002$.

1133. Calcular aproximadamente por la fórmula de Simpson $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ con precisión de hasta 0,001.

Resolución. Ante todo, valiéndonos de la fórmula (7), determinemos qué paso h hace falta tomar para alcanzar la exactitud prefijada. Tenemos

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}; \quad f'(x) = x/\sqrt{1+x^2}; \quad f''(x) = 1/\sqrt{(1+x^2)^3};$$
$$f'''(x) = -3x/\sqrt{(1+x^2)^5}; \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = (12x^2-3)/\sqrt{(1+x^2)^7}.$$

El valor máximo $|f^{\mathrm{IV}}(x)|$ sobre el segmento $[0, 1]$ se alcanza en el punto $x = 0$; $|f^{\mathrm{IV}}(0)| = 3$. Así, pues,

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)|f^{\mathrm{IV}}(x)| = \frac{h^4}{180} \cdot 1 \cdot 3.$$

Como este error debe ser menos de 0,001, entonces $h^4/60 \leqslant 0{,}001$, o sea, $h^4 \leqslant 0{,}06$. Se puede tomar $h = 0{,}5$ (si $h = 0{,}5$, $h^4 = 0{,}0625$), o sea, un poco mayor que la magnitud requerida, pero esto no tendrá influencia sobre la exactitud de los cálculos, puesto que en la estimación ha sido utilizado el error límite absoluto, o sea, una magnitud notoriamente más grande que el error real. De suerte que para alcanzar la exactitud deseada basta dividir por la mitad el intervalo de integración.

Determinemos los valores de la función $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ para $x = 0$; 0,5 y 1: $f(0) = 1{,}0000$; $f(0{,}5) = 1{,}1180$; $f(1{,}0) = 1{,}4142$ (realizamos los cálculos con una cifra de reserva). Por eso

$$I \approx \frac{0{,}5}{3} \cdot [1{,}0000 + 4 \cdot 1{,}1180 + 1{,}4142] = 1{,}1477.$$

Por lo tanto, redondeando la última cifra decimal, encontramos $I \approx 1{,}148$

Para comparar, calculemos el valor exacto de esta integral por la fórmula de Newton—Leibniz:

$$I = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln (x + \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln (1+\sqrt{2})] \approx \frac{1}{2}(1{,}4142 + 0{,}8814) \approx 1{,}1478.$$

Así, pues, el valor de esta integral determinado por la fórmula de Simpson tiene incluso no tres sino cuatro cifras decimales exactas.

1134. Determinar por la fórmula de Simpson $I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$, tomando $n=8$. Efectuar los cálculos con seis cifras decimales. Estimar el error del resultado obtenido, valiéndose del procedimiento de duplicación del paso de cálculos; comparar el resultado con el valor real de la integral, tomando este último con una cifra (séptima) de reserva.

Resolución. Los valores de la función subintegral se han de determinar para los valores siguientes del argumento ($h_1 = 0,125$): $x_0 = 0$; $x_1 = 0,125$; . . .; $x_8 = 1,0$. Hallamos los valores correspondientes de $f(x) = 1/(1+x^2)$: $y_0 = 1,000000$; $y_1 = 0,984625$; $y_2 = 0,941176$; $y_3 = 0,876712$; $y_4 = 0,800000$; $y_5 = 0,719101$; $y_6 = 0,640000$; $y_7 = 0,566389$; $y_8 = 0,500000$. Substituimos estos datos en la fórmula de Simpson para $h_1 = 0,125$ y $h_2 = 0,25$:

$$I_1=\frac{h_1}{3}[y_0+y_8+4(y_1+y_3+y_5+y_7)+2(y_2+y_4+y_6)]=$$

$$=\frac{0,125}{3}\cdot[1,000000+0,500000+4(0,984615+0,876712+0,719101+$$

$$+0,566389)+2\cdot(0,941176+0,800000+0,640000)]=$$

$$=\frac{1}{24}\cdot 18,849548\approx 0,785398;$$

$$I_2=\frac{h_2}{3}[y_0+y_8+4(y_2+y_6)+2y_4]=$$

$$=\frac{0,25}{3}\cdot[1,000000+0,500000+4(0,941176+0,640000)+2\cdot 0,800000]=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 9,424704=0,785392.$$

De aquí

$$\delta_{I_1}\approx\frac{I_1-I_2}{15}=\frac{0,000006}{15}\approx 0,0000004.$$

De este modo, las seis cifras de I_1 deben ser exactas. El valor real de la integral es

$$I=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\approx 0,7853979, \ldots,$$

lo que confirma el resultado hallado.

1135. Valiéndose de la fórmula Simpson calcular $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$ con precisión de hasta 0,0001; tomar $n=10$.

1136. Calcular por la fórmula de Simpson $\int\limits_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$, tomando $n = 8$. Estimar el error por el método de duplicación del paso; comparar con el valor exacto de la integral. Realizar los cálculos con cinco cifras decimales.

1137. Calcular por la fórmula de los trapecios $I = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}5 \operatorname{sen}^2 x}\, dx$, tomando $n = 6$; estimar el error de antemano para determinar con qué número de cifras decimales (con una cifra de reserva) hace falta efectuar los cálculos.

1138. Calcular por la fórmula de los trapecios $\ln 2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ con precisión de hasta 0,01, tomando $n = 5$.

1139. Calcular por la fórmula de Simpson $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$ con precisión de hasta 0,01, tomando $n = 4$.

1140. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\, dx$ con precisión de hasta 0,01, tomando $n = 4$.

1141. Calcular por la fórmula de los trapecios $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\, x\, dx$ con precisión de hasta 0,01, tomando $n = 6$.

§ 4. Cálculo aproximado de integrales múltiples

1. Análogo de las fórmulas de los rectángulos. a) Examinemos la región cerrada D acotada por las líneas $x = a$, $x = b$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones continuas en el segmento $[a, b]$, además $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$*) (fig. 71). Dividimos la región D en n partes con las líneas

$$y = \varphi(x) + \frac{j}{n}[\psi(x) - \varphi(x)] \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Luego, dividimos el segmento $[a, b]$ en m partes iguales mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ y por estos puntos tracemos las rectas paralelas al eje Oy:

$$x = x_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Con dos familias de líneas (1) y (2) la región D se divide en mn cuadriláteros curvilíneos que tienen por vértices los puntos $P_{ij}(x_i; y_{ij})$, $P_{i+1,j}(x_{i+1}, y_{i+1,j})$, $P_{i,j+1}(x_i; y_{i,j+1})$, $P_{i+1,j+1}(x_{i+1}, y_{i+1,j+1})$; $i = 0, 1, 2, \ldots, m$; $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Para una i fijada ($0 \leqslant mi \leqslant$) la longitud del lado vertical del

*) Notemos que esta condición no limita la generalidad de los razonamientos.

cuadrilátero no depende de j y es igual a

$$|P_{ij}P_{i,\,j+1}|=\frac{\psi(x_i)-\varphi(x_i)}{n}; \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Designemos por $\Delta\omega_{ij}$ el área del cuadrilátero curvilíneo representado en la fig. 72. Este área se determina por la fórmula

$$\Delta\omega_{ij}=\frac{1}{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[\psi(x)-\varphi(x)]\,dx. \tag{3}$$

De la igualdad (3) resulta que el valor de $\Delta\omega_i$ no depende de j. Teniendo en cuenta esto, lo designamos con $\Delta\omega_{ij}=\Delta\omega_i$; $0\leqslant i\leqslant m-1,\ 0\leqslant j\leqslant n-1$.

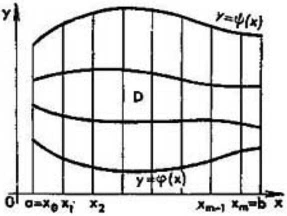

Fig. 71

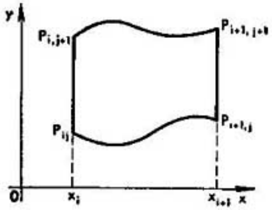

Fig. 72

Sustituimos la integral doble $\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$, donde la función $f(x,\ y)$ es continua en la región D, por la suma integral bidimensional, escogiendo en calidad de nudos los puntos P_{ij}:

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy\simeq\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{i=0}^{n-1}z_{ij}, \tag{4}$$

donde

$$z_{ij}=f(x_i,\ y_{ij}),\quad y_{ij}=\varphi(x_i)+\frac{j}{n}[\psi(x_i)-\varphi(x_i)]. \tag{5}$$

Seleccionando en calidad de nudos sucesivamente los puntos $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$, $P_{i+1,\,j+1}$, obtenemos, respectivamente, otras tres fórmulas para el cálculo aproximado de la integral doble:

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy\simeq\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=1}^{n-1}z_{i+1,\,j}; \tag{6}$$

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy\simeq\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{n-1}z_{i,\,j+1}; \tag{7}$$

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy\simeq\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{n-1}z_{i+1,\,j+1}. \tag{8}$$

Las fórmulas (4), (6), (7) y (8) son el análogo de las fórmulas de los rectángulos para el cálculo aproximado de la integral definida. Es evidente que estas fórmulas son tanto más exactas cuanto mayores son los números m y n, o sea, cuanto menor es la longitud de cada uno de los segmentos de partición.

b) En el caso particular, cuando la región D es un rectángulo definido por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, las áreas $\Delta\omega_1$ de las partes elementales son iguales entre sí y se determinan por la fórmula $\Delta\omega = (b-a)(d-c)/(mn)$. Las fórmulas (4), (6), (7) y (8) adoptan, respectivamente, las formas

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{ij}, \tag{9}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j}, \tag{10}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i,\,j+1}, \tag{11}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j+1}. \tag{12}$$

Las expresiones (9) — (12) se pueden llamar *fórmulas de los paralelepípedos*

c) Si la función $f(x, y)$ es monótona con respecto a cada una de las variables x e y, entonces para la integral doble es válida la estimación

$$\frac{(b-a)(d-c)}{mn}\mu \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \frac{(b-a)(d-c)}{mn} M, \tag{13}$$

donde M y μ son, respectivamente, la máxima y la mínima entre las sumas

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{ij}, \quad \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j}, \quad \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i,\,j+1}, \quad \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j+1}.$$

d) Sea que la función $f(x, y)$ y sus derivadas parciales $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ son continuas en la región D, del rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Entonces la estimación del error de las fórmulas aproximadas (9) — (12) se determina con ayuda de la desigualdad

$$|R| < \frac{(b-a)(d-c)}{2}\left[\frac{M_1(b-a)}{m} + \frac{M_2(d-c)}{n}\right], \tag{14}$$

donde

$$M_1 = \max_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} |f'_x(x, y)|, \quad M_2 = \max_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} |f'_y(x, y)|.$$

2. Análogo de la fórmula de las tangentes. a) Examinemos la integral doble $I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$. Sea la región D el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ en todos los puntos del cual se cumplen las condiciones

$$AC - B^2 > 0, \quad A < 0, \quad C < 0. \tag{15}$$

donde $A = f''_{x^2}$, $C = f''_{y^2}$, $B = f'_{xy}$. Estas condiciones aseguran la convexidad de la superficie $z = f(x, y)$ en todos los puntos de la región D (de un modo análogo las condiciones $AC - B^2 > 0$, $A > 0$, $C > 0$ aseguran la concavidad de esta superficie).

Entonces para el cálculo aproximado de la integral doble es justa la fórmula

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq (b-a)(d-c)\,f(\bar{x}, \bar{y}), \tag{16}$$

donde $\bar{x} = (a + b)/2$, $\bar{y} = (c + d)/2$.

b) Dividimos la región D mediante las rectas $x = x_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, m$ e $y = y_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$) en mn rectángulos iguales. Calculando la integral doble en cada rectángulo elemental con ayuda de la fórmula (16) y sumando los resultados obtenidos, llegamos a la fórmula siguiente para el cálculo aproximado de la integral doble

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j), \tag{17}$$

donde $\bar{x}_i = (x_{i+1} + x_i)/2$, $\bar{y}_j = (y_{j+1} + y_j)/2$.

La fórmula (17) determina el valor aproximado de la integral doble con exceso si se cumplen las condiciones (15). Notemos que la fórmula (17) se puede utilizar también en el caso en que la primera de las condiciones (15) no se cumpla. Sin embargo, en este caso no se puede señalar cómo se ha determinado el valor aproximado de la integral doble: con defecto o con exceso.

3. Análogo de la fórmula de los trapecios. a) Examinemos la integral doble $I = \iint_D f(x, y)\,dx, dy$ si la región D es un rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Entonces para el cálculo aproximado de la integral doble es justa la fórmula

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{4} (z_1 + z_2 + z_3 + z_4), \tag{18}$$

donde $z_1 = f(a, c)$, $z_2 = f(b, c)$, $z_3 = f(a, d)$, $z = f(b, d)$.

Esta fórmula da el valor aproximado de la integral doble con exceso si se cumple la condición (15).

La estimación del error de la fórmula (18) se determina por la desigualdad

$$(b-a)(d-c)\,f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) <$$
$$< \iint_D f(x, y)\,dx\,dy < (b-a)(d-c)\frac{f(a, c) + f(b, c) + f(a, d) + f(b, d)}{4}. \tag{19}$$

b) Dividimos la región D por las rectas paralelas a los ejes de coordenadas en mn rectángulos iguales. Calculando la integral doble en cada rectángulo elemental con ayuda de la fórmula (18) y sumando los resultados obtenidos, llegamos a la fórmula siguiente para el cálculo aproximado de la integral doble:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{4mn} (S_0 + 2S_1 + 4S_2), \tag{20}$$

donde $S_0 = z_{00} + z_{m0} + z_{0n} + z_{mn}$ es la suma de los valores de la función en los vértices del rectángulo; $S_1 = \sum_{i=1}^{m-1} (z_{i0} + z_{in}) + \sum_{j=1}^{n-1} (z_{0j} + z_{mj})$ es la suma de los valores de la función en los nudos que están sobre los lados del rectángulo, sin contar los vértices; $S_2 = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} z_{ij}$, es la suma de los valores de la función en los nudos que están dentro del rectángulo.

Si se observan las condiciones (15) por analogía con la desigualdad (19) obtenemos la estimación

$$\frac{(b-a)(d-c)}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) < \iint_D f(x, y)\,dx\,dy <$$
$$< \frac{(b-a)(d-c)}{4mn}(S_0+2S_1+4S_2), \qquad (21)$$

donde $\bar{x}_i = (x_{i+1}+x_i)/2$, $\bar{y}_j = (y_{j+1}+y_j)/2$.

Para apreciar el error de la igualdad aproximada (20) es también válida la desigualdad (14).

c) Si la región D está acotada por las líneas $x = a$, $x = b$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, entonces en calidad de valor aproximado de la integral doble $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ se puede considerar la media aritmética de los resultados de los cálculos aproximados de la integral doble, obtenidos por las fórmulas (4), (6), (7) y (8):

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{n-1}(z_{ij}+z_{i+1,\,j}+z_{i,\,j+1}+z_{i+1,\,j+1}), \qquad (22)$$

donde $\Delta\omega_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$) se calculen por la fórmula (3) y los valores z_{ij}, por las fórmulas (5). Las fórmulas (4), (6), (7), (8) y (22) es conveniente utilizarlas en los casos en que el cálculo exacto o aproximado de las áreas de $\Delta\omega_i$ no presenta dificultades especiales.

4. Análogo de las fórmulas de Simpson. a) Examinamos el caso de la región rectangular D definida por las desigualdades $-h \leqslant x \leqslant h$, $-l \leqslant y \leqslant l$. Seleccionamos los coeficientes del polinomio de tercer grado

$$P_3(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy +$$
$$+ a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00},$$

de modo que en cinco puntos (nudos) escogidos de un modo especial los valores de la función $f(x, y)$ y del polinomio $P_3(x, y)$ coincidan. Entonces

$$\int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} f(x, y)\,dx\,dy \simeq \int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} P_3(x, y)\,dx\,dy.$$

Teniendo en cuenta que $\int_{-a}^{a}\varphi(t)\,dt = 0$, si $\varphi(-t) = -\varphi(t)$ sobre $[-a, a]$, obtenemos la fórmula

$$\int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{4hl}{3}(a_{20}h^2 + a_{02}l^2 + 3a_{00}). \qquad (23)$$

Si los nudos se eligen del modo mostrado en las figs. 73 y 74, entonces la fórmula (23) se puede escribir, respectivamente, en la forma

$$\int_{-l}^{l}\int_{-h}^{h} f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \frac{hl}{3}\,[f(h,\ l)+f(-h,\ l)+f(h,\ -l)+ \\ +f(-h,\ -l)+8f(0,\ 0)], \tag{24}$$

o bien

$$\int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} f(x,y)\,dx\,dy \simeq \frac{2}{3}\,hl\,[f(h,0)+f(-h,0)+f(0,l)+f(0,-l)+2f(0,0)]. \tag{25}$$

Para el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ las fórmulas (24) y (25) tienen, respec-

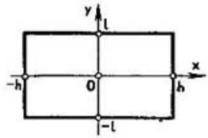

Fig. 73

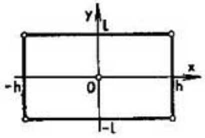

Fig. 74

tivamente, la forma

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{12}\Big[f(a,\ c)+ \\ +f(a,\ d)+f(b,\ c)+f(b,\ d)+8f\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{c+d}{2}\right)\Big], \tag{26}$$

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{6}\Big[f\left(a,\ \frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\ \frac{c+d}{2}\right)+ \\ +f\left(\frac{a+b}{2},\ c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},\ d\right)+2f\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{c+d}{2}\right)\Big]. \tag{27}$$

Las fórmulas (26) y (27) son tanto más exactas cuanto menores son las dimensiones del rectángulo; como se deduce de lo expuesto, ellas son exactas para los polinomios de tercer grado.

b) Dividiendo el rectángulo por las rectas paralelas a los ejes de las coordenadas en $4mn$ rectángulos iguales, aplicando a cada uno de estos rectangulos la fórmula (26) y sumando los resultados obtenidos, llegamos a la fórmula

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,\ y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{12mn}\,(S_0+2S_1+4S_2+8S_3), \tag{28}$$

donde

$$S_0=f(a, c)+f(a, d)+f(b, c)+f(b, d),$$

$$S_1=\sum_{i=1}^{m-1}[f(x_{2i}, c)+f(x_{2i}, d)]+\sum_{j=1}^{n-1}[f(a, y_{2j})+f(b, y_{2j})],$$

$$S_2=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}f(x_{2i}, y_{2j}),\quad S_3=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2},\ \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right).$$

Si en los razonamientos precedentes se utiliza la fórmula (27), entonces

$$\int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dx\,dy\simeq\frac{(b-a)(d-c)}{6mn}(S_1+S_2+4S_3), \tag{29}$$

donde

$$S_1=\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(a, \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right)+f\left(b, \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right)\right]+$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1}\left[f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2}, c\right)+f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2}, d\right)\right],$$

$$S_2=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2},\ \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right),$$

$$S_3=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2},\ y_{2j}\right)+f\left(x_{2i},\ \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right)\right].$$

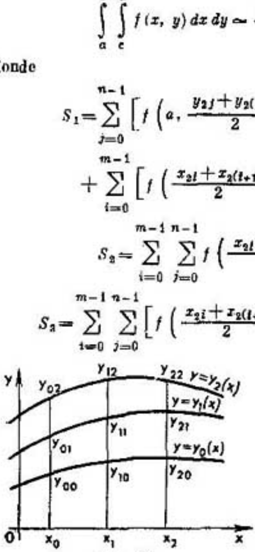

Fig. 75

Las fórmulas (25) — (28) dan un resultado exacto, si la función subintegral es un polinomio no mayor de tercer grado, de las variables x, y, o sea, $f(x, y)\equiv P_3(x, y)$.

c) Sea que la región D está definida por las desigualdades $x_0\leqslant x\leqslant x_2$, $y_0(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$. Con la recta $x_1=(x_0+x_2)/2$ y con la línea $y_1(x)=[y_0(x)+y_2(x)]/2$ dividimos la región D en cuatro partes (fig. 75). Designemos $y_j(x_i)=y_{ij}$. Como antes, $f(x_i, y_{ij})=z_{ij}$ $(i, j=0, 1, 2)$. Examinemos

$$I=\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_{x_0}^{x_2}dx\int_{y_0(x)}^{y_2(x)}f(x, y)\,dy.$$

Aplicando varias veces la pequeña fórmula de Simpson, obtenemos la igualdad aproximada siguiente:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy\simeq\frac{x_2-x_0}{36}[(y_{02}-y_{00})(z_{00}+4z_{01}+z_{02})+$$
$$+4(y_{12}-y_{10})(z_{10}+4z_{11}+z_{12})+(y_{22}-y_{20})(z_{20}+4z_{21}+z_{22})]. \tag{30}$$

Notemos que si $y_2(x) - y_0(x) = k = \text{const}$, entonces la fórmula (30) adopta la forma

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq$$

$$\simeq k \cdot \frac{x_2 - x_0}{36}[z_{00} + z_{02} + z_{20} + z_{22} + 4(z_{01} + z_{10} + z_{12} + z_{21}) + 16z_{11}]. \quad (31)$$

En particular, la fórmula (31) es válida si la región de integración D es un rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ con los lados paralelos a los ejes de coordenadas. En este caso

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{36}\Big\{f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) +$$

$$+ 4\Big[f\Big(a, \frac{c+d}{2}\Big) + f\Big(b, \frac{c+d}{2}\Big) + f\Big(\frac{a+b}{2}, c\Big) +$$

$$+ f\Big(\frac{a+b}{2}, d\Big)\Big] + 16f\Big(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\Big)\Big\}. \quad (32)$$

La fórmula (30) brinda un resultado exacto, si la función subintegral es un polinomio de tercer grado respecto a y para x fijada y el resultado del cálculo de

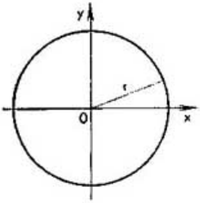

Fig. 76

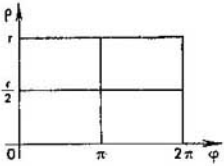

Fig. 77

la integral interior es un polinomio de x no mayor de tercer grado. La fórmula (32) es exacta si $f(x, y)$ es un polinomio de tercer grado respecto a x con y fijo (o respecto a y para x fijo).

d) Si la región de integración D es un círculo con centro en el origen de las coordenadas y radio r (fig. 76), entonces, para el cálculo aproximado de la integral doble es racional pasar a las coordenadas polares:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r f(\rho\cos\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

Dividimos el rectángulo en el plano $\varphi O\rho$ (fig. 77) mediante las rectas $\varphi = \pi$ y $\rho = r/2$ en cuatro partes congruentes. Calculando los valores de la función subintegral en los nudos y aplicando sucesivamente las fórmulas (24) y (25) obtenemos

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{S}{3}\Big[f(r, 0) + 2f\Big(-\frac{r}{2}, 0\Big)\Big], \quad (33)$$

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{S}{3}\Big[f\Big(\frac{r}{2}, 0\Big) + f(-r, 0) + f\Big(-\frac{r}{2}, 0\Big)\Big], \quad (34)$$

obtenemos, donde $S = \pi r^2$ es el área del círculo. Las fórmulas (33) y (34) son exactas cuando $F(\rho, \varphi)$ es un polinomio no mayor de tercer grado, con respecto a ρ y φ.

Utilizando la fórmula (32), obtenemos

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{S}{9}\left[f(r, 0) + 2f\left(\frac{r}{2}, 0\right) + 2f(-r, 0) + \right.$$

$$\left. + 4f\left(-\frac{r}{2}, 0\right)\right]. \tag{35}$$

Esta fórmula es exacta si la función $E(\rho, \varphi)$ es un polinomio no mayor de tercer grado, con respecto a ρ para φ fijo (o con respecto a φ para ρ fijo).

d) Si la región de integración está acotada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, entonces, valiéndose de la transformación de las coordenadas, con ayuda de las fórmulas $x = a\rho\cos\varphi$, $y = a\rho\operatorname{sen}\varphi$ la integral doble puede escribirse así:

$$I = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 ab\rho\cdot f(a\rho\cos\varphi,\ b\rho\operatorname{sen}\varphi)\,d\rho\,d\varphi.$$

Para tal región las fórmulas (24), (25) y (32) adoptan, respectivamente, el aspecto

$$I \approx \frac{S}{3}\left[f(a, 0) + 2f\left(-\frac{a}{2}, 0\right)\right], \tag{36}$$

$$I \approx \frac{S}{3}\left[f\left(\frac{a}{2}, 0\right) + f(-a, 0) + f\left(-\frac{a}{2}, 0\right)\right], \tag{37}$$

$$I \approx \frac{S}{3}\left[f(a, 0) + 2f\left(\frac{a}{2}, 0\right) + 2f(-a, 0) + 4f\left(-\frac{a}{2}, 0\right)\right], \tag{38}$$

donde $S = \pi ab$ es el área de la elipse.

1142. Calcular la integral doble $I = \iint_D (x + y)^2\,dx\,dy$ si la región D está acotada por las líneas $x = 1$, $x = 3$, $y = x^2$, $y = x + x^2$.

Resolución. Determinamos primeramente el valor exacto de la integral

$$I = \int_1^3 \int_{x^2}^{x+x^2} (x + y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_1^3 (x + y)^3 \Big|_{x^2}^{x+x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^3 [(2x + x^2)^3 - (x + x^2)^3]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^3 (7x^3 + 9x^4 + 3x^5)\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{7}{4}x^4 + \frac{9}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^6\right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{567}{4} + \frac{2187}{5} + \frac{729}{2} - \frac{7}{4} - \frac{9}{5} - \frac{1}{2}\right) = 313{,}2.$$

Hallamos los valores aproximados de la integral doble valiéndonos de las fórmulas (4), (6), (7), (8) y (22) y comparamos estos valores con los exactos.

Hacemos $m = 4$, $n = 4$. Calculamos los valores y_{ij} ($i = 0, 1, 2, 3$; $j = 0, 1, 2, 3$) utilizando la fórmula (5):

$$y_{ij} = x_i^2 + \frac{x_i}{4} j = x_i \left(x_i + \frac{1}{4} j \right).$$

Puesto que $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2{,}5$, $x_4 = 3$, entonces $y_{00} = 1$; $y_{01} = 1{,}25$; $y_{02} = 1{,}5$; $y_{03} = 1{,}75$; $y_{04} = 2$; $y_{10} = 2{,}25$; $y_{11} = 2{,}625$; $y_{12} = 3$; $y_{13} = 3{,}375$; $y_{14} = 3{,}75$; $y_{20} = 3{,}75$; $y_{21} = 4{,}5$; $y_{22} = 5$; $y_{23} = 5{,}5$; $y_{24} = 6$; $y_{30} = 6{,}25$; $y_{31} = 6{,}875$; $y_{32} = 7{,}5$; $y_{33} = 8{,}125$; $y_{34} = 8{,}75$; $y_{40} = 9$; $y_{41} = 9{,}75$; $y_{42} = 10{,}5$; $y_{43} = 11{,}125$; $y_{44} = 12$. De acuerdo con la fórmula (3) tenemos

$$\Delta\omega_i = \frac{1}{4} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x\,dx = \frac{1}{8} x^2 \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{8} (x_{i+1}^2 - x_i^2).$$

Para $i = 0, 1, 2, 3$ obtenemos $\Delta\omega_0 = 0{,}156$; $\Delta\omega_1 = 0{,}219$; $\Delta\omega_2 = 0{,}281$; $\Delta\omega_3 = 0{,}344$.

Luego, como

$$z_{ij} = (x_i + y_{ij})^2 \quad (i = 0, 1, 2, 3; \; j = 0, 1, 2, 3),$$

entonces $z_{00} = 4$; $z_{01} = 5{,}063$; $z_{02} = 6{,}25$; $z_{03} = 7{,}563$; $z_{04} = 9$; $z_{10} \simeq 14{,}063$; $z_{11} \simeq 17{,}016$; $z_{12} = 20{,}25$; $z_{13} \simeq 23{,}766$; $z_{14} \simeq 27{,}563$; $z_{20} = 36$; $z_{21} = 42{,}25$; $z_{22} = 49$; $z_{23} = 56{,}25$; $z_{24} = 64$; $z_{30} \simeq 76{,}563$; $z_{31} \simeq 87{,}891$; $z_{32} = 100$; $z_{33} = 112{,}891$; $z_{34} \simeq 126{,}563$; $z_{40} \simeq 144$; $z_{41} \simeq 162{,}563$; $z_{42} = 182{,}250$; $z_{43} = 199{,}516$ $z_{44} = 225$.

Utilizando ahora las fórmulas (4), (6), (7) y (8) encontramos, respectivamente,

$$\sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i \sum_{j=0}^{3} z_{ij} = \sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i (z_{i0} + z_{i1} + z_{i2} + z_{i3}) \simeq$$

$$\simeq 22{,}876 \cdot 0{,}156 + 75{,}095 \cdot 0{,}219 + 183{,}5 \cdot 0{,}281 + 377{,}345 \cdot 0{,}344 \simeq 201{,}386;$$

$$\sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i \sum_{j=0}^{3} z_{i+1,\,j} = \sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i (z_{i+1,\,0} + z_{i+1,\,1} + z_{i+1,\,2} + z_{i+1,\,3}) \simeq$$

$$\simeq 75{,}095 \cdot 0{,}156 + 183{,}5 \cdot 0{,}219 + 377{,}345 \cdot 0{,}281 + 688{,}329 \cdot 0{,}344 \simeq 394{,}721;$$

$$\sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i \sum_{j=0}^{3} z_{i,\,j+1} = \sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i (z_{i1} + z_{i2} + z_{i3} + z_{i4}) \simeq$$

$$\simeq 27{,}876 \cdot 0{,}156 + 88{,}595 \cdot 0{,}219 + 211{,}5 \cdot 0{,}281 + 427{,}345 \cdot 0{,}344 \simeq 230{,}190;$$

$$\sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i \sum_{j=0}^{3} z_{i+1,\,j+1} = \sum_{i=0}^{3} \Delta\omega_i (z_{i+1,\,1} + z_{i+1,\,2} + z_{i+1,\,3} + z_{i+1,\,4}) \simeq$$

$$\simeq 88{,}595 \cdot 0{,}156 + 211{,}5 \cdot 0{,}219 + 427{,}345 \cdot 0{,}281 + 769{,}329 \cdot 0{,}344 \simeq 444{,}873.$$

Los errores absoluto y relativo de los valores obtenidos son bastante grandes lo que se explica por la pequeñez de los números m y n.

Aplicando la fórmula aproximada (22), obtenemos

$$I \simeq \frac{201{,}386 + 230{,}190 + 394{,}721 + 444{,}873}{4} = \frac{1271{,}17}{4} \simeq 317{,}793.$$

Entonces el error relativo

$$\delta = \frac{317,793 - 313,2}{313,2} \cdot 100\% \approx 1,3\%.$$

1143. Utilizando la desigualdad (21), estimar la integral doble $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, si la región D es el rectángulo acotado por las rectas $x = 0$, $x = 4$, $y = 1$, $y = 5$.

Resolución. Aquí $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = 2y$, $f''_{x^2}(x, y) = 2$, $f''_{y^2}(x, y) = 2$, $f''_{xy}(x, y) = 0$, por eso las condiciones $AC - B^2 > 0$, $A > 0$, $C > 0$ se cumplen. Hacemos $m = 4$, $n = 4$. Los valores de x e y correspondientes a los puntos de partición son los siguientes: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$; $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, $y_4 = 5$. Puesto que $z_{ij} = x_i^2 + y_j^2$, entonces $z_{00} = 1$, $z_{01} = 4$, $z_{02} = 0$, $z_{03} = 16$, $z_{04} = 25$, $z_{10} = 2$, $z_{11} = 5$, $z_{12} = 10$, $z_{13} = 17$, $z_{14} = 26$, $z_{20} = 5$, $z_{21} = 8$, $z_{22} = 13$, $z_{23} = 20$, $z_{24} = 29$, $z_{30} = 10$, $z_{31} = 13$, $z_{32} = 18$, $z_{33} = 25$, $z_{34} = 34$, $z_{40} = 17$, $z_{41} = 20$, $z_{42} = 25$, $z_{43} = 32$, $z_{44} = 41$. De acuerdo con la fórmula (20) tenemos

$$I \simeq \frac{1}{4}(S_0 + 2S_1 + 4S_2),$$

donde

$S_0 = 1 + 25 + 17 + 41 = 84$, $S_1 = 2 + 5 + 10 + 20 + 25 + 32 + 34 + 29 + 26 + 4 + 9 + 16 = 212$, $S_2 = 5 + 10 + 17 + 8 + 13 + 20 + 13 + 18 + 25 = 129$.

Por consiguiente,

$$I \simeq \frac{1}{4}(84 + 2 \cdot 212 + 4 \cdot 129) = \frac{1}{4} \cdot 1024 = 256.$$

Para el cálculo aproximado de la integral doble con ayuda de la fórmula (17) determinamos primeramente $\bar{x}_i = (x_{i+1} + x_i)/2$, $\bar{y}_j = (y_{j+1} + y_j)/2$ ($i = 0, 1, 2, 3$; $j = 0, 1, 2, 3$); tenemos $\bar{x}_0 = 0,5$; $\bar{x}_1 = 1,5$; $\bar{x}_2 = 2,5$; $\bar{x}_3 = 3,5$; $\bar{y}_0 = 1,5$; $\bar{y}_1 = 2,5$; $\bar{y}_2 = 3,5$; $\bar{y}_3 = 4,5$. Designamos $\bar{z}_{ij} = \bar{x}_i^2 + \bar{y}_j^2$ y calculamos

$$\begin{aligned}
\bar{z}_{00} &= 0,5^2 + 1,5^2 = 2,5; & \bar{z}_{10} &= 1,5^2 + 1,5^2 = 4,5;\\
\bar{z}_{01} &= 0,5^2 + 2,5^2 = 6,5; & \bar{z}_{11} &= 1,5^2 + 2,5^2 = 8,5;\\
\bar{z}_{02} &= 0,5^2 + 3,5^2 = 12,5; & \bar{z}_{12} &= 1,5^2 + 3,5^2 = 14,5;\\
\bar{z}_{03} &= 0,5^2 + 4,5^2 = 20,5; & \bar{z}_{13} &= 1,5^2 + 4,5^2 = 22,5;\\
\bar{z}_{20} &= 2,5^2 + 1,5^2 = 8,5; & \bar{z}_{30} &= 3,5^2 + 1,5^2 = 14,5;\\
\bar{z}_{21} &= 2,5^2 + 2,5^2 = 12,5; & \bar{z}_{31} &= 3,5^2 + 2,5^2 = 18,5;\\
\bar{z}_{22} &= 2,5^2 + 3,5^2 = 18,5; & \bar{z}_{32} &= 3,5^2 + 3,5^2 = 24,5;\\
\bar{z}_{23} &= 2,5^2 + 4,5^2 = 26,5; & \bar{z}_{33} &= 3,5^2 + 4,5^2 = 32,5.
\end{aligned}$$

Entonces

$$I \simeq \frac{4 \cdot 4}{4 \cdot 4}(2,5 + 6,5 + 12,5 + 20,5 + 4,5 + 8,5 + 14,5 + 22,5 +$$

$8{,}5+12{,}5+18{,}5+26{,}5+14{,}5+18{,}5+24{,}5+32{,}5)=248$.
De suerte que $248<I<256$.
Hallemos el valor exacto de la integral:

$$I=\int_0^4\int_1^5 (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^4\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_1^5 dx=$$

$$=\int_0^4\left(5x^2+\frac{125}{3}-x^2-\frac{1}{3}\right)dx=\left[\frac{4}{3}x^3+\frac{124}{3}x\right]_0^4=250\frac{2}{3}\simeq 250{,}667.$$

De este modo, las fórmulas aproximadas (20) y (17) dan, respectivamente, los errores relativos:

$$\delta_1=\frac{256-250{,}667}{250{,}667}\cdot 100\%\simeq 2{,}1\%;\quad \delta_2=\frac{250{,}667-248}{250{,}667}\cdot 100\%\simeq 1{,}1\%.$$

1144. Utilizando la fórmula (32), calcular la integral doble $I=\iint\limits_D (x^2+2y)\,dx\,dy$ si la región D es el rectángulo $0\leqslant x\leqslant 4$, $0\leqslant y\leqslant 6$.

Resolución. Determinamos el valor exacto de la integral:

$$I=\int_0^4 dx\int_0^6 (x^2+2y)\,dy=\int_0^4 [x^2y+y^2]_0^6\,dx=\int_0^4 (6x^2+36)\,dx=$$

$$=[2x^3+36x]_0^4=272.$$

Aquí $a=0$, $b=4$, $c=0$, $d=6$; $f(x,y)=x^2+2y$; $f(a,c)=0$; $f(a,d)=12$; $f(b,c)=16$; $f(b,d)=28$; $f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)=6$; $f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)=22$; $f\left(\frac{a+b}{2},c\right)=$ $=4$; $f\left(\frac{a+b}{2},d\right)=16$; $f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)=10$. Aplicando la fórmula (32), encontramos

$$I=\int_0^4\int_0^6 (x^2+2y)\,dx\,dy=\frac{4\cdot 6}{36}[0+12+16+28+4(6+22+4+16)+16\cdot 10]=$$

$$=\frac{2}{3}(56+4\cdot 48+160)=272.$$

Hemos obtenido el resultado exacto, ya que la función subintegral $f(x,y)=$ $=x^2+2y$ es un polinomio de x e y, de grado inferior al tercero.

1145. Calcular la integral doble $I=\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)^{3/2}dx\,dy$ si la región D está definida por las desigualdades $-3\leqslant x\leqslant 3$, $-2\leqslant y\leqslant 2$.

Resolución. Pasamos a las coordenadas polares, haciendo $x=3\rho\cos\varphi$, $y=2\rho\operatorname{sen}\varphi$. Entonces $x^2/9+y^2/4=\rho^2$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$. Utilizando la fórmula (38), hallamos el valor aproximado de la integral:

$$I \approx \frac{2}{3}\pi\left(1+2\cdot\frac{1}{8}+2+4\cdot\frac{1}{8}\right)=\frac{2}{3}\pi\left(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=2{,}5\pi.$$

El valor exacto de la integral es

$$I=6\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \rho^4\,d\rho\,d\varphi=\frac{6}{5}\int\limits_0^{2\pi}\rho^5\Big|_0^1 d\varphi=\frac{6}{5}\varphi\Big|_0^{2\pi}=2{,}4\pi.$$

El error relativo es

$$\delta=(2{,}5\pi-2{,}4\pi)/2{,}4\pi\cdot 100\% \approx 4{,}2\%.$$

1146. Hallar el valor aproximado de la integral doble $I=\iint\limits_D\left(\frac{x}{2}+y\right)dx\,dy$ por la fórmula (30), si la región D está acotada por las curvas $x=2$, $x=4$, $y=x^2/2$ e $y=2x$.

Resolución. Determinamos el valor exacto de la integral:

$$I=\int\limits_2^4 dx\int\limits_{x^2/2}^{2x}\left(\frac{x}{2}+y\right)dy=\int\limits_2^4\left[\frac{x}{2}y+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2/2}^{2x}dx=$$

$$=\int\limits_2^4\left(x^2+2x^2-\frac{x^3}{4}-\frac{x^4}{8}\right)dx=\left[x^3-\frac{x^4}{16}-\frac{x^5}{40}\right]_2^4=$$

$$=64-16-25{,}6-8+1+0{,}8=16{,}2.$$

Aquí

$$x_0=2,\quad x_2=4,\quad x_1=(x_0+x_2)/2=3,\quad y_0=x^2/2,\quad y_2=2x,$$
$$y_1=(y_0+y_2)/2=x^2/4+x;$$
$$y_{ij}=y_j(x_i);\quad y_{00}=y_0(x_0)=2,\quad y_{01}=y_1(x_0)=3,\quad y_{02}=y_2(x_0)=4,$$
$$y_{10}=y_0(x_1)=4{,}5,\quad y_{11}=y_1(x_1)=5{,}25,\quad y_{12}=y_2(x_1)=6,$$
$$y_{20}=y_0(x_2)=8,\quad y_{21}=y_1(x_2)=8;\quad y_{22}=y_2(x_2)=8.$$
$$z_{ij}=f(x_i,\,y_{ij})=x_i/2+y_{ij}\ (i,\,j=0,\,1,\,2);$$
$$z_{00}=3,\ z_{01}=4,\ z_{02}=5,\ z_{10}=6,\ z_{11}=6{,}75,\ z_{12}=7{,}5,$$
$$z_{20}=10,\ z_{21}=10,\ z_{22}=10.$$

Por la fórmula (30) obtenemos

$$I=\int\limits_2^4\int\limits_{x^2/2}^{2x}\left(\frac{x}{2}+y\right)dx\,dy=\frac{4-2}{36}\,[(4-2)(3+4\cdot4+5)+$$

$$+4(6-4{,}5)(6+4\cdot6{,}75+7{,}5)+(8-8)(10+4\cdot10+10)]=16\,\frac{1}{6}=16{,}167.$$

1147. Utilizando las fórmulas (26) y (32), hallar los valores aproximados de la integral doble $I=\iint\limits_D (xy+3\sqrt{y})\,dx\,dy$ si la región D es el rectángulo $0\leqslant x\leqslant 2$, $1\leqslant y\leqslant 9$.

§ 5. Aplicación del método de Montecarlo para calcular integrales definidas y múltiples

1. Cálculo de integrales definidas por el método de Montecarlo. a) Se requiere calcular la integrla $\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt$. Supongamos que t es una variable aleatoria uniformemente distribuida, $p(t)$ es la densidad de distribución de probabilidades de esta variable aleatoria:

$$p(t)=\begin{cases} 0, & \text{si}\ \ t<0;\\ 1, & \text{si}\ \ 0\leqslant t\leqslant 1;\\ 0, & \text{si}\ \ t>1.\end{cases}$$

Entonces la esperanza matemática de la función aleatoria $\varphi(t)$ se determina por la igualdad

$$M[\varphi(t)]=\int\limits_0^1 \varphi(t)\,p(t)\,dt.$$

Teniendo en cuenta los valores de $p(t)$, obtenemos

$$M[\varphi(t)]=\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt. \tag{1}$$

Hallemos el valor aproximado de la esperanza matemática. Supongamos que como resultado de N pruebas se obtienen N valores de la variable aleatoria: $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Estos valores se pueden tomar de la tabla de números aleatorios (véase la tabla VI en la pág. 453). Entonces el valor aproximado $M[\varphi(t)]$ se determina, según el teorema de Chébishev, por la igualdad

$$M[\varphi(t)]\simeq\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(t_i). \tag{2}$$

De las igualdades (1) y (2) resulta que

$$\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt\simeq\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(t_i). \tag{3}$$

b) Examinemos ahora el caso general: supongamos que se exige calcular $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Pasamos a la nueva variable t con ayuda de la igualdad $x=a+$

$+ (b-a)\,t$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 \varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

donde $\varphi(t) = f[a + (b-a)\,t]$. Utilizando la fórmula (3) para el cálculo aproximado de la integral en el segundo miembro de la igualdad (4), obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\varphi(t_i), \quad \text{o bien} \quad \int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \tag{5}$$

donde $x_i = a + (b-a)\,t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

La tabla para calcular la integral definida por la fórmula (5) tiene la forma

i	t_i	$x_i = a + (b-a)\,t_i$	$f(x_i)$
1	t_1	x_1	$f(x_1)$
2	t_2	x_2	$f(x_2)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N	t_N	x_N	$f(x_N)$
			$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$

El método expuesto del cálculo aproximado de las integrales definidas con ayuda de la fórmula (5) es uno de los casos particulares del método de pruebas estadísticas (método de Montecarlo).

b) Mostremos otro procedimiento para calcular las integrales definidas, basado en la utilización del método de Montecarlo. De la interpretación geométrica de la integral definida resulta que la integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$ expresa el área del trapecio curvilíneo acotado por las líneas $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, si la función $f(x)$ es continua y no negativa sobre el segmento $[a, b]$. Examinamos el rectángulo limitado por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = M$, donde $M \geqslant \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ (fig. 78). Si la función $f(x)$ satisface la desigualdad $f(x) \geqslant 0$ no en todos los puntos del segmento $[a, b]$, utilizaremos la identidad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [f(x) + h]\,dx - h\,(b-a),$$

donde el número $h > 0$ ha sido escogido de modo que $f(x) + h \geqslant 0$ para $x \in [a, b]$.

El método dado, al igual que el precedente, se basa en la utilización de la tabla de números aleatorios pertenecientes al intervalo $[0, 1]$. Por eso es necesario pasar de las variables x, y a las variables ξ, η, de modo que la región D_1 se transforme en cierta región D que esté dentro del cuadrado unidad $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ (fig. 79). Para esto hacemos $x = a + (b - a)\,\xi$, $y = M\eta$.

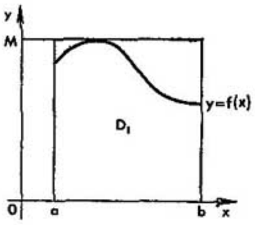

Fig. 78

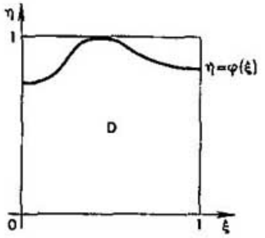

Fig. 79

Entonces $dx = (b - a)\,d\xi$ y al variar x dentro de los límites de a a b la variable ξ toma los valores de 0 a 1. La integral definida dada se transforma, obteniéndose la forma

$$I = (b-a)\cdot M \int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

donde

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{M} f\,[a + (b-a)\,\xi]. \tag{7}$$

De la igualdad (7) se desprende que $f(x) = M\varphi(\xi)$. Examinemos el conjunto de los puntos aleatorios $(\xi_1;\ \eta_1)$ $(\xi_2;\ \eta_2)$, ..., $(\xi_N;\ \eta_N)$ distribuidos uniformemente sobre el cuadrado unidad. Supongamos que en la región D se tienen n puntos. Como los puntos aleatorios están distribuidos uniformemente, entonces

$$\frac{n}{N} \xrightarrow{\text{en probabilidad}} \frac{\int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi}{1},$$

donde el número 1 expresa el área del cuadrado unidad. Entonces

$$\int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi \approx \frac{n}{N}. \tag{8}$$

De las igualdades (6) y (8) se puede concluir que

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{(b-a)\cdot n\cdot M}{N}. \tag{9}$$

Esto es precisamente la fórmula del cálculo aproximado de la integral definida valiéndose del método de Montecarlo.

La igualdad aproximada (9) se puede escribir así:

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{M(b-a)} \simeq \frac{n}{N}, \tag{10}$$

de donde se deduce que la relación entre el área del trapecio curvilíneo D_1 y el área del rectángulo (véase la fig. 78) es aproximadamente igual a la relación del número de puntos aleatorios que hay dentro del trapecio curvilíneo, con respecto a los que hay dentro del rectángulo.

La table para calcular la integral definida por la fórmula (9) tiene la forma

i	ξ_i	η_i	$x_i = a + (a - b)\,\xi_i$	$y_i = M\eta_i$	$Y_i = f(x_i)$
1	ξ_1	η_1	x_1	y_1	$f(x_1)$
2	ξ_2	η_2	x_2	y_2	$f(x_2)$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
N	ξ_N	η_N	x_N	y_N	$f(x_N)$

Entre los valores de y_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ hay que escoger aquellos que cumplan la desigualdad $y_i < Y_i$. El número de estos valores es igual a n.

2. Cálculo de las integrales múltiples por el método de Montecarlo. a) Se requiere calcular $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, donde la región D se define por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$. Supongamos que las funciones

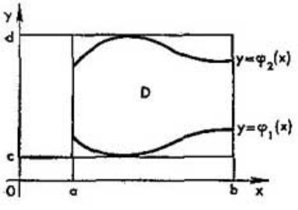

Fig. 80

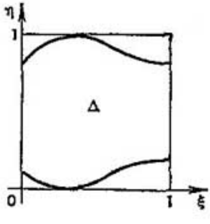

Fig. 81

continuas $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ satisfacen las desigualdades $\varphi_1(x) \geqslant c$, $\varphi_2(x) \leqslant d$ (fig. 80).

Sustituimos las variables aplicando las fórmulas $x = a + (b - a)\,\xi$, $y = c + (d - c)\,\eta$. Efectuada tal transformación, la región D pasa a la región Δ contenida en el cuadrado unidad $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ (fig. 81). Sea n el número de puntos aleatorios $(\xi_i;\ \eta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ que se encuentran en la región Δ y N, el número de puntos aleatorios situados dentro del cuadrado unidad. Es evidente que en la región D habrán n puntos $(x_i;\ y_i)$, donde $x_i = a + (b - a)\,\xi_i$, $y_i = c + (d - c)\,\eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. De acuerdo con el teorema del valor medio tenemos

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq f(\bar{x}, \bar{y})\cdot S, \tag{11}$$

donde $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ y S es el área de la región D. Tomamos como valor aproximado de $f(\bar{x}, \bar{y})$ la media aritmética de los valores de la función $f(x, y)$ en n puntos aleatorios que se encuentran en la región D:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \simeq \frac{1}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i). \tag{12}$$

Teniendo en cuenta las igualdades (11) y (12), obtenemos

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{S}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i). \tag{13}$$

Es cómodo emplear la fórmula (13) si el área S se determina con facilidad.
Por analogía con la fórmula (10) se puede escribir

$$\frac{S}{(d-c)(b-a)} \simeq \frac{n}{N},$$

donde S es el área de la región D. Entonces

$$S \simeq \frac{n(b-a)(d-c)}{N}. \tag{14}$$

De las igualdades (13) y (14) obtenemos la fórmula para el cálculo aproximado de la integral doble:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \simeq \frac{(b-a)(d-c)}{N}\cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i). \tag{15}$$

Para calcular las integrales dobles con ayuda de la fórmula aproximada (15) es cómodo utilizar la tabla de cálculo:

i	ξ_i	η_i	$x_i = a + (b-a)\xi_i$	$y_i = c + (d-c)\eta_i$	$y_i = \varphi_1(x_i)$	$\bar{y}_i = \varphi_2(x_i)$	$f(x_i, y_i)$
1	ξ_1	η_1	x_1	y_1	$\varphi_1(x_1)$	$\varphi_2(x_1)$	$f(x_1, y_1)$
2	ξ_2	η_2	x_2	y_2	$\varphi_1(x_2)$	$\varphi_2(x_2)$	$f(x_2, y_2)$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
N	ξ_N	η_N	x_N	y_N	$\varphi_1(x_N)$	$\varphi_2(x_N)$	$f(x_N, y_N)$

Entre los valores y_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ hace falta escoger tales para los cuales se cumpla la condición $\underline{y}_i \leqslant y_i \leqslant \bar{y}_i$. Su número es igual a n.

b) Generalizamos la fórmula (9) para el caso de la integral doble $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$, si la región D está definida por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$,

$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$. Designamos por M un número tal, que $M \geqslant \max\limits_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d}} f(x, y)$. La integral doble $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ expresa, como es sabido, el volumen de un cuerpo cilíndrico V definido por las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, $0 \leqslant z \leqslant f(x, y)$. Este cuerpo cilíndrico está situando dentro del paralelepípedo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, $0 \leqslant z \leqslant M$.

Pasamos a las nuevas variables ξ, η, ζ, aplicando las fórmulas $x = a + (b - a)\,\xi$, $y = c + (d - c)\,\eta$, $z = M\zeta$. Entonces la región V se transforma en una región Ω, definida por las desigualdades

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \frac{\varphi_1(x) - c}{d - c} \leqslant \eta \leqslant \frac{\varphi_2(x) - c}{d - c}, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1.$$

La región Ω se halla dentro del cubo unidad acotado por los planos $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\eta = 1$, $\zeta = 0$, $\zeta = 1$. De suerte que

$$I = (b - a)(d - c) \cdot M \iint\limits_\Delta \varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

donde $\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{M} f[a + (b - a)\,\xi,\ c + (d - c)\,\eta]$ y Δ es la región obtenida de la D, después de la sustitución de las variables.

Examinemos el conjunto de puntos aleatorios $(\xi_1;\ \eta_1;\ \zeta_1)$, $(\xi_2;\ \eta_2;\ \zeta_2)$, ..., $(\xi_N;\ \eta_N;\ \zeta_N)$ ditribuidos uniformemente dentro del cubo unidad. El número de estos puntos que se encuentran en la región Δ lo designamos por n. Como los puntos aleatorios están distribuidos uniformemente, entonces $\frac{n}{N}$ en probilidad $\iint\limits_\Delta \varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$, o bien $\iint\limits_\Delta \varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \simeq \frac{n}{N}$.

La tabla de cálculo, al utilizar la fórmula (16), tiene el aspecto

i	ξ_i	η_i	ζ_i	$x_i = a + (b-a)\xi_i$	$y_i = c + (d-c)\eta_i$	$z_i = M\zeta_i$	$\underline{y}_i = \varphi_1(x_i)$	$\bar{y}_i = \varphi_2(x_i)$	$Z_i = f(x_i, y_i)$
1	ξ_1	η_1	ζ_1	x_1	y_1	z_1	$\varphi_1(x_1)$	$\varphi_2(x_1)$	$f(x_1, y_1)$
2	ξ_2	η_2	ζ_2	x_2	y_2	z_2	$\varphi_1(x_2)$	$\varphi_2(x_2)$	$f(x_2, y_2)$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
N	ξ_N	η_N	ζ_N	x_N	y_N	z_N	$\varphi_1(x_N)$	$\varphi_2(x_N)$	$f(x_N, y_N)$

Retornando a las variables x e y, obtenemos la fórmula aproximada para calcular las integrales dobles utilizando el método de Montecarlo:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \backsim \frac{(b - a)(d - c) \cdot n \cdot M}{A}. \tag{16}$$

El número n se determina del modo siguiente: entre los valores de y_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) hay que tomar aquellos para los cuales es válida la desigualdad

$$\underline{y}_i < y_i < \bar{y}_i. \tag{17}$$

Conforme a estos valores de y_i, entre los valores de z_i hace falta elegir aquellos que cumplen la condición

$$z_i < Z_i. \tag{18}$$

Notemos que no es conveniente determinar todos los valores de $Z_i = f(x_i, y_i)$, sino que sólo los correspondientes a aquellos valores de y_i para los cuales se cumple la condición (17).

c) Una fórmula análoga a las relaciones (9) y (15) tiene lugar también para integrales de multiplicidad k:

$$\iint_V \dots \int f(x_1, x_2, \dots x_k)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_k \approx \frac{n \cdot M}{N} \cdot \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i), \qquad (19)$$

donde la región V pertenece a un paralelepípedo k-dimensional, en el cual las coordenadas de los puntos satisfacen k desigualdades $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ y la función $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ es continua en la región V y satisface la condición $0 \leqslant f(x_1, x_2, \dots, x_k) \leqslant M$.

La deducción de las fórmulas (9), (15) y (19) está basada en la utilización del concepto de convergencia en probabilidad. Por eso la razón n/N es tanto más estable cuanto mayor es N. Esto significa que para todo número $\varepsilon > 0$ tanto pequeño como se quiera, la probabilidad de la desigualdad $|I - \widetilde{I}| < \varepsilon$, donde I es el valor exacto de la integral e $\widetilde{I}$ es su valor aproximado, obtenido con ayuda del método de Montecarlo, crece con el incremento de N. No obstante, puede suceder que también con N muy grandes resulte que $|I - \widetilde{I}| > \varepsilon$. En la práctica la última circunstancia se encuentra raramente.

En lo que se refiere al método de Montecarlo, los ejemplos citados tienen un caracter ilustrativo, persiguiendo el fin de dar a conocer a los estudiantes la esencia del procedimiento.

En virtud de las observaciones hechas, para el cálculo aproximado de las integrales con ayuda del método de Montecarlo es necesario utilizar una calculadora electrónica, habiendo preparado previamente el programa respectivo del método.

1148. Con ayuda de la fórmula (3) hallar el valor aproximado de la integral $I = \int_0^1 (1 - t^2)\, dt$, tomando de la tabla de números aleatorios en la pág. 453, 30 valores seguidos y limitándose a tres cifras decimales.

Resolución. La tabla de cálculo tiene la forma

i	t_i	t_i^2	i	t_i	t_i^2	i	t_i	t_i^2
1	0,857	0,734	11	0,609	0,371	21	0,070	0,005
2	0,457	0,209	12	0,179	0,032	22	0,692	0,478
3	0,499	0,249	13	0,974	0,949	23	0,696	0,484
4	0,762	0,581	14	0,011	0,0001	24	0,203	0,041
5	0,431	0,186	15	0,098	0,010	25	0,350	0,122
6	0,698	0,487	16	0,805	0,648	26	0,900	0,810
7	0,038	0,001	17	0,516	0,266	27	0,451	0,203
8	0,558	0,311	18	0,296	0,088	28	0,318	0,101
9	0,653	0,426	19	0,149	0,022	29	0,798	0,637
10	0,573	0,328	20	0,815	0,664	30	0,111	0,012

De este modo,

$$\sum_{i=1}^{30} (1-t_i^2)=30-\sum_{i=1}^{30} t_i^2=30-9{,}455=20{,}545,$$

de donde, por la fórmula (3) obtenemos

$$\int_0^1 (1-t^2)\,dt=\frac{1}{30}\cdot 20{,}545\approx 0{,}685.$$

El valor exacto de la integral es

$$I=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\approx 0{,}667.$$

De suerte que el error absoluto vale $|\,0{,}667-0{,}685\,| = 0{,}018$ y el error relativo $\delta = (0{,}018/0{,}667)\cdot 100\% \simeq 2{,}7\%$.

1149. Calcular la integral definida $I=\int_2^3 (x^2+x^3)\,dx$, haciéndose uso de la fórmula aproximada (5).

Resolución. Tomamos de la tabla de números aleatorios 20 valorés a partir del tercero. La tabla de cálculo tiene la forma

i	t_i	$x_i=2+t_i$	x_i^2	x_i^3	$f(x_i)=x_i^2+x_i^2$
1	0,499	2,499	6,245	15,606	21,851
2	0,762	2,762	7,629	21,070	28,699
3	0,431	2,431	5,910	14,367	20,277
4	0,698	2,698	7,279	19,639	26,918
5	0,038	2,038	4,153	8,464	12,617
6	0,558	2,558	6,543	16,738	23,281
7	0,653	2,653	7,038	18,672	25,710
8	0,573	2,573	6,620	17,034	23,654
9	0,609	2,609	6,807	17,759	24,566
10	0,179	2,179	4,748	10,346	15,094
11	0,974	2,974	8,645	26,305	35,150
12	0,011	2,011	4,044	8,133	12,177
13	0,098	2,098	4,402	9,235	13,637
14	0,805	2,805	7,868	22,07	29,938
15	0,516	2,516	6,330	15,926	22,256
16	0,296	2,296	5,276	12,104	17,380
17	0,149	2,149	4,618	9,924	14,542
18	0,815	2,815	7,924	22,307	30,231
19	0,070	2,070	4,285	8,870	13,155
20	0,692	2,692	7,247	19,508	26,755

Utilizando la fórmula (5) para $a=2$, $b=3$, $N=20$, $\sum_{i=1}^{20} f(x_i)=437{,}888$ encontramos

$$I\simeq 437{,}888/20=21{,}894.$$

El valor exacto de la integral es

$$I=\int_2^3 (x^2+x^3)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3=22\frac{7}{12}\approx 22{,}583.$$

El error relativo resulta

$$\delta = (22{,}583 - 21{,}894)/22{,}583\cdot 100\% \simeq 3{,}1\%.$$

1150. Calcular la integral definida $I=\int_2^3 (x^2+x^3)\,dx$, utilizando la igualdad aproximada (9).

Resolución. Aquí $a=2$, $b=3$, $\max\limits_{2\leqslant x\leqslant 3}(x^2+x^3)=36$. Hacemos $x=2+\xi$, $y=36\eta$. Tomamos de la tabla de números aleatorios 40 valores ($N=20$). La tabla de cálculo tiene la forma

i	ξ_i	η_i	$x_i=2+\xi_i$	$y_i=36\eta_i$	x_i^2	x_i^3	$Y_i=x_i^2+x_i^3$
1	0,857	0,457	2,857	16,452	8,162	23,319	31,481
2	0,499	0,762	2,499	27,432	6,245	15,606	21,851
3	0,431	0,698	2,431	25,128	5,910	14,367	20,277
4	0,038	0,558	2,038	20,088	4,153	8,464	12,617
5	0,653	0,573	2,653	20,628	7,038	18,672	25,710
6	0,609	0,179	2,609	6,444	6,807	17,759	24,566
7	0,974	0,011	2,974	0,396	8,845	26,305	35,150
8	0,098	0,805	2,098	28,980	4,402	9,235	13,637
9	0,516	0,296	2,516	10,656	6,330	15,926	22,256
10	0,149	0,815	2,149	29,340	4,618	9,924	14,542
11	0,070	0,692	2,070	24,912	4,285	8,870	13,155
12	0,696	0,203	2,696	7,308	7,268	15,595	26,863
13	0,350	0,900	2,350	32,400	5,523	12,979	18,502
14	0,451	0,318	2,451	11,448	6,007	14,723	20,730
15	0,798	0,111	2,798	3,996	7,829	21,906	29,735
16	0,933	0,199	2,933	7,164	8,602	25,230	33,832
17	0,183	0,421	2,183	15,156	4,765	10,402	15,167
18	0,338	0,104	2,338	3,744	5,466	12,780	18,246
19	0,190	0,150	2,190	5,400	4,796	10,503	15,299
20	0,449	0,320	2,449	11,520	5,998	14,689	20,687

Como se ve de la tabla $n=13$. Por consiguiente, por la fórmula (9) encontramos

$$I\simeq (36\cdot 13)/20=23{,}4;\qquad \delta=(23{,}4-22{,}583)/22{,}583\cdot 100\%\simeq 3{,}6\%.$$

1151. Aplicando la fórmula (15), hallar el valor aproximado de la integral doble $I=\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, si la región D se define por las desigualdades $0\leqslant x\leqslant 1$, $x/2\leqslant y\leqslant x$ (fig. 82).

Resolución. Aquí $a=0$, $b=1$. Puesto que la región D está situada en el cuadrado unidad, no se necesita pasar a nuevas variables. Tomamos de la tabla de números aleatorios 20 valores seguidos. La tabla de cálculo tiene la forma

i	x_i	y_i	$\underline{y}_i = x_i/2$	$\bar{y}_i = x_i$	$2y_i$	$f(x_i, y_i) = x_i + 2y_i$
1	0,857	0,457	0,428	0,857	0,914	1,771
2	0,499	0,762	0,249	0,499		
3	0,431	0,698	0,215	0,431		
4	0,038	0,558	0,019	0,038		
5	0,653	0,573	0,326	0,653	1,146	1,799
6	0,609	0,179	0,304	0,609		
7	0,974	0,011	0,487	0,974		
8	0,098	0,805	0,049	0,098		
9	0,516	0,296	0,258	0,516	0,592	1,108
10	0,149	0,815	0,074	0,149		

Por la fórmula (15) para $N = 10$ y $n = 3$ obtenemos

$$I \simeq (1{,}771 + 1{,}799 + 1{,}108)/10 = 4{,}578/10 \simeq 0{,}458.$$

Determinamos el valor exacto de la integral:

$$I = \iint_D (x + 2y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{x/2}^{x} (x + 2y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 (x + 2y)^2 \Big|_{x/2}^{x} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (9x^2 - 4x^2)\, dx = \frac{5}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{5}{12} \simeq 0{,}417.$$

Entonces $\delta = (0{,}458 - 0{,}417)/0{,}417 \cdot 100\% \simeq 9{,}82\%$.

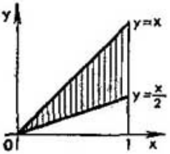

Fig. 82

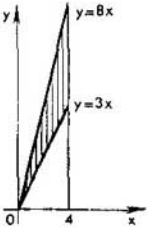

Fig. 83

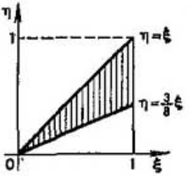

Fig. 84

Aquí, al igual que en otros problemas, el número $n = 3$ es insuficiente para que puedan manifestarse, en medida debida, regularidades estadísticas. Sin embargo, para una orientación aproximada se ha obtenido el resultado satisfactorio.

1152. Calcular, haciendo uso de la fórmula (16), la integral doble $\iint_D \sqrt{x + y}\, dx\, dy$, donde la región D está acotada por las líneas $x = 0$, $x = 4$, $y = 3x$, $y = 8x$ (fig. 83).

Resolución. Escribiendo la integral doble dada en forma de la reiterada, tenemos $I = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x}^{8x} \sqrt{x+y}\, dy$. Aquí $a = 0$, $b = 4$, $\varphi_1(x) = 3x$, $\varphi_2(x) = 8x$; luego, $\varphi_1(x) \geqslant 0$, $\varphi_2(x) \leqslant 32$, por eso $c = 0$, $d = 32$. Como $\max\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant 32}} \sqrt{x+y} = 6$, efectuemos la sustitución de las variables con ayuda de las fórmulas $x = 4\xi$, $y = 32\eta$, $z = 6\xi$. Las rectas $y = 3x$ e $y = 8x$ se transforman en las rectas $\eta = (3/8)\,\xi$, $\eta = \xi$, respectivamente (fig. 84). Tomemos de la tabla de números aleatorios 60 valores ($N = 20$). La tabla de cálculo tiene la forma

i	ξ_i	η_i	ζ_i	$x_i = 4\xi_i$	$y_i = 32\eta_i$	$z_i = 6\zeta_i$	$y_i = 3x_i$	$\bar{y}_i = 8x_i$	$x_i + y_i$	$z_i = \sqrt{x_i + y_i}$
1	0,857	0,457	0,499	3,428	14,624	2,994	10,284	27,424	18,052	4,249
2	0,762	0,431	0,698	3,048	13,792	4,188	9,144	24,384	16,840	4,104
3	0,038	0,558	0,653	0,152	17,856		0,456	1,216		
4	0,573	0,609	0,179	2,292	19,488		6,876	18,336		
5	0,974	0,011	0,098	3,896	0,352		11,688	31,168		
6	0,805	0,516	0,296	3,220	16,512	1,776	9,660	25,760	19,732	4,441
7	0,149	0,815	0,070	0,596	26,080		1,788	4,768		
8	0,692	0,696	0,203	2,768	22,272		8,304	22,144		
9	0,350	0,900	0,451	1,400	28,800		4,200	11,200		
10	0,318	0,798	0,111	1,272	25,536		3,816	10,176		
11	0,933	0,199	0,183	3,732	6,368		11,196	26,976		
12	0,421	0,338	0,104	1,684	10,816	0,624	5,052	13,472	12,500	3,536
13	0,190	0,150	0,449	0,760	4,800	2,694	2,280	6,080	5,560	2,358
14	0,320	0,165	0,617	1,280	5,280	3,702	3,840	10,240	6,650	2,561
15	0,369	0,069	0,248	1,476	2,208		4,428	11,808		
16	0,960	0,652	0,367	3,840	20,864	2,202	11,520	30,720	24,704	4,970
17	0,168	0,261	0,189	0,672	8,352		2,016	5,376		
18	0,703	0,142	0,486	2,812	4,544		8,436	22,496		
19	0,233	0,424	0,291	0,932	13,568		2,796	7,456		
20	0,473	0,645	0,514	1,892	20,640		5,676	15,136		

Como se deduce de la tabla de cálculo, $n = 4$. De este modo, por la fórmula (16) determinamos

$$I \approx \frac{(4-0)\,(32-0)\cdot 6\cdot 4}{20} = 153,6.$$

El valor exacto de la integral es

$$I = \frac{2}{3} \int\limits_0^4 (x+y)^{3/2} \Big|_{3x}^{8x} dx = \frac{76}{15}\, x^{5/2} \Big|_0^4 = 162\,\frac{2}{15} \approx 162,1.$$

y el error relativo es

$$\delta = (162,1 - 153,6)/162,1 \cdot 100\% \simeq 5,2\%.$$

1153. La integral doble $I = \iint\limits_D \sqrt{x+y+1}\; dx\, dy$, donde D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 4$, $1 \leqslant y \leqslant 7$, calcularla por tres procedimientos: 1) por la fórmula (20) § 4; 2) por la fórmula (28) § 4; 3) por la fórmula (16), tomando de la tabla de números aleatorios 60 valores. En cada caso estimar el error relativo.

1154. La integral doble $I = \iint\limits_D \frac{\cos y}{x}\, dx\, dy$, donde la región D se define mediante las desigualdades $0{,}2 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x$, calcularla por dos procedimientos: 1) por la fórmula (30) § 4; 2) por la fórmula (16), tomando de la tabla de números aleatorios 90 valores. Estimar el error relativo.

1155. Hallar el valor aproximado de la integral triple $I = \iiint\limits_D (x+y+2z)\, dx\, dy\, dz$, haciendo uso de la fórmula (19) para $k = 3$, si la región D se define por las desigualdades $1 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant x$, $x+y \leqslant z \leqslant x \leqslant +2y$.

Resolución. La fórmula (19) para la integral triple tiene la forma

$$I \approx \frac{(b-a)(d-c)(h-g)\cdot M\cdot n}{N}.$$

Aquí $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 3$, $g = 1$, $h = 9$, $M = \max\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 3\\ 0\leqslant y\leqslant 3\\ 1\leqslant z\leqslant 9}} (x+y+2z) = 24$. Realizamos la sustitución de las variables con ayuda de las fórmulas $x = 1, +2\xi$, $y = 3\eta$, $z = 1+8\zeta$, $u = 24\sigma$. Tomamos de la tabla de números aleatorios 80 valores ($N = 20$).

Primeramente hallamos los valores de y_i ($1 \leqslant i \leqslant 20$) para los cuales se cumple la condición $\underline{y}_i \leqslant y_i \leqslant \bar{y}_i$; el número de tales valores es igual a 11. Luego, entre 11 valores respectivos de z_i encontramos tales para los cuales $\underline{z}_i \leqslant z_i \leqslant \bar{z}_i$; estos valores son tres. Finalmente, entre tres valores correspondientes de u_i buscamos aquellos que satisfagan la desigualdad $u_i < U_i$; el número de tales valores es $n = 1$. De este modo,

$$I \simeq (48\cdot 24)/20 = 1152/20 = 57{,}6.$$

Determinemos el valor exacto de la integral:

$$I = \int_1^3 dx \int_0^x dy \int_{x+y}^{x+2y} (x+y+2z)\, dz = \frac{1}{4}\int_0^3 dx \int_0^x (x+y+2z)^2 \Big|_{x+y}^{x+2y} dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 dx \int_0^x [(3x+5y)^2 - (3x+3y)^2]\, dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 \left[\frac{1}{15}(3x+5y)^3 - \frac{1}{9}(3x+3y)^3\right]_0^x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 \left[\frac{(8x)^3}{15} - \frac{(6x)^3}{9} - \frac{(3x)^3}{15} + \frac{(3x)^3}{9}\right] dx =$$

i	ξ_i	η_i	ζ_i	σ_i	x_i	y_i	z_i	u_i	$\underline{y}_i = 0$	$\bar{y}_i = x_i$	$_1\bar{z}_i = x_i + y_i$	$_1z_i = x_i + 2y_i$	$2z_i$	$U_i = x_i + y_i + 2z_i$
1	0,165	0,617	0,369	0,069	1,330	1,851	3,952	1,656	0	1,330				
2	0,248	0,960	0,652	0,367	1,496	2,880	6,216	8,08	0	1,496				
3	0,168	0,261	0,189	0,703	1,336	0,783	2,512	16,872	0	1,336	2,119	2,902	5,024	7,143
4	0,142	0,486	0,233	0,424	1,284	1,458	2,864	10,176	0	1,284				
5	0,291	0,473	0,645	0,514	1,582	1,419	6,160	12,336	0	1,582	3,001	4,420		
6	0,819	0,064	0,870	0,256	2,638	0,192	7,960	6,144	0	2,638	2,830	3,022		
7	0,347	0,151	0,912	0,191	1,694	0,453	8,296	4,584	0	1,694	2,147	2,600		
8	0,259	0,096	0,019	0,854	1,518	0,288	1,152	20,496	0	1,518	1,806	2,094	2,304	4,110
9	0,193	0,732	0,253	0,352	1,386	2,196	3,024	8,448	0	1,386				
10	0,729	0,102	0,222	0,088	2,458	0,306	2,776	2,112	0	2,458	2,764	3,070	5,552	8,316
11	0,205	0,562	0,851	0,647	1,410	1,686	7,808	15,528	0	1,410				
12	0,568	0,020	0,051	0,649	2,136	0,060	1,408	15,576	0	2,136	2,196	2,256		
13	0,179	0,896	0,453	0,546	1,358	2,688	4,624	13,104	0	1,358				
14	0,919	0,691	0,155	0,181	2,838	2,073	2,240	4,344	0	2,838	4,911	6,984		
15	0,273	0,876	0,690	0,494	1,546	2,628	6,520	11,856	0	1,546				
16	0,339	0,910	0,789	0,908	1,678	2,730	7,312	21,792	0	1,678				
17	0,263	0,131	0,389	0,438	1,526	0,393	4,112	10,512	0	1,526	1,919	2,312		
18	0,161	0,485	0,535	0,090	1,322	1,455	5,280	2,160	0	1,322				
19	0,142	0,321	0,969	0,091	1,284	0,963	8,752	2,184	0	1,284	2,247	3,210		
20	0,463	0,251	0,596	0,784	1,926	0,753	5,768	18,816	0	1,926	2,679	3,432		

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{485}{15} - \frac{189}{9}\right) \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^3 = 56\,\frac{2}{3} \approx 56{,}667;$$

$$\delta = (57{,}6 - 56{,}667)/56{,}667 \cdot 100\% \approx 1{,}6\%.$$

La tabla de cálculo tiene la forma:

1. Método de Euler. La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ define sobre el plano el así llamado *campo de direcciones*, o sea, en cada punto del plano en que existe la función $f(x, y)$ determina la dirección de la curva integral de la ecuación que pasa por este punto. Supongamos que se exige resolver el problema de Cauchy, o sea, hallar la solución de la ecuación $y' = f(x, y)$ que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Dividimos el segmento $[x_0, X]$ en n partes iguales y hacemos $(X - x_0)/n = h$ (h es el paso de variación del argumento). Supongamos que dentro del intervalo elemental de x_0 a $x_0 + h$, la función y' conserva el valor constante de $f(x_0, y_0)$. Entonces, $y_1 - y_0 \approx h \cdot f(x_0, y_0)$, donde y_1 es el valor de la función buscada, correspondiente al valor de $x_1 = x_0 + h$. De aquí obtenemos $y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$. Repitiendo esta operación, hallamos los valores sucesivos de la función:

$y_2 \approx y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$, $y_3 \approx y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$, ..., $y_{k+1} \approx y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$. De este modo, se puede trazar aproximadamente la curva integral en la forma de una quebrada con vértices $M_k(x_k; y_k)$, donde $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$, $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$. Este método se llama *método de quebradas de Euler* o simplemente *método de Euler*.

1156. Utilizando el método de Euler, hallar los valores de la función y, definida por la ecuación diferencial $y' = \frac{y-x}{y+x}$, para la condición inicial $y(0) = 1$; el paso es $h = 0{,}1$. Determinar sólo los primeros cuatro valores de y.

Resolución. Hallamos los valores sucesivos del argumento: $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$. Calculamos los valores correspondientes de la función buscada:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot (1 - 0)/(1 + 0) = 1{,}1;$$
$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot (1{,}1 - 0{,}1)/(1{,}1 + 0{,}1) = 1{,}183;$$
$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1{,}183 + 0{,}1 \cdot (1{,}183 - 0{,}2)/(1{,}183 + 0{,}2) = 1{,}254;$$
$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1{,}254 + 0{,}1 \cdot (1{,}254 - 0{,}3)/(1{,}254 + 0{,}3) = 1{,}315.$$

Así, pues, obtenemos la tabla:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,18	1,25	1,31

1157. Hallar, con ayuda del método de Euler, cuatro valores de la función y definida por la ecuación $y' = x + y$, para la condición inicial $y(0) = 1$, tomando $h = 0{,}1$.

Resolución. Los valores del argumento son $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$. Determinamos los valores correspondientes de y:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot (0 + 1) = 1{,}1;$$
$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot (0{,}1 + 1{,}1) = 1{,}22;$$
$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1{,}22 + 0{,}1 \cdot (0{,}2 + 1{,}22) = 1{,}36;$$
$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1{,}36 + 0{,}1 \cdot (0{,}3 + 1{,}36) = 1{,}52.$$

Obtenemos la tabla:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52

1158. Hallar, por el método de Euler, tres valores de la función y, definida por la ecuación $y' = 1 + x + y^2$, para la condición inicial $y(0) = 1$, haciendo $h = 0{,}1$.

1159. Hallar, con ayuda del método de Euler, cuatro valores de la función y, definida por la ecuación $y' = x^2 + y^3$ para la condición inicial $y(0) = 0$, tomando $h = 0{,}1$.

1160. Hallar por método de Euler, la solución numérica de la ecuación $y' = y^2 + \frac{y}{x}$ para la condición inicial $y(2) = 4$, haciendo $h = 0{,}1$ (cuatro valores).

1161. Hallar, con ayuda del método de Euler, la solución numérica de la ecuación $y = \frac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}$ sobre el segmento $[0, 1]$, para la condición inicial $y(0) = 1$, adoptando $h = 0{,}2$.

1162. Hallar por el método de Euler la solución numérica del sistema de ecuaciones $\frac{dx}{dt} = \frac{y-x}{t}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{x+y}{t}$, para las condiciones iniciales $x(1) = 1$, $y(1) = 1$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, haciendo $h = 0{,}2$.

2. Método de Runge-Kutta. Sea que la función y está definida por la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ para la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Efectuando la integración numérica de tal ecuación por *el método de Runge-Kutta* se determinan cuatro números:

$$k_1 = h\cdot f(x, y), \quad k_2 = h\cdot f\left(x + \frac{h}{2},\ y + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = h\cdot f\left(x + \frac{h}{2},\ y + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = h\cdot f(x+h,\ y+k_3).$$

Si se hace $y(x+h) = y(x) + \Delta y$, se puede demostrar que $\Delta y \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$. El esquema de cálculos tiene la forma

x	y	$k_j = h\cdot f(x, y)$	Adición
x_0	y_0	k_1	$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_1$	k_2	
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_2$	k_3	
$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	k_4	
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + k$		

1163. Componer la tabla de valores de la función y, definida por la ecuación $y' = y - \frac{2x}{y}$, para la condición inicial $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$; el paso es $h = 0{,}2$ (la solución exacta es $y = \sqrt{2x+1}$).

Resolución. Hallamos los números:

$$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0,2 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1}\right) = 0{,}2;$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2},\ y + \frac{k_1}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0,1;\ 1{,}1) =$$

$$= 0{,}2 \cdot \left(1{,}1 - \frac{0{,}2}{1{,}1}\right) = 0{,}1836;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2},\ y + \frac{k_2}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0;\ 1;\ 1{,}0918) = 0{,}1817;$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h,\ y + k_3) = 0{,}2 \cdot f(0{,}2;\ 1{,}1817) = 0{,}1686.$$

De aquí,

$$\Delta y = \frac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3672 + 0{,}3634 + 0{,}1686) = 0{,}1832.$$

De suerte que $y_1 = 1 + 0{,}1832 = 1{,}1832$ para $x = 0{,}2$. De un modo análogo determinamos y_2, etc. El proceso de cálculo se efectúa por el esquema siguiente:

i	x	y	$f(x, y)$	$k_i = h \cdot f(x, y)$	Δy
1	0	1	1	0,2	
2	0,1	1,1	0,0918	0,1838	0,1832
3	0,1	1,0918	0,0908	0,1817	
4	0,2	1,1817	0,0843	0,1686	
1	0,2	1,1832	0,8451	0,1690	
2	0,3	1,2677	0,7944	0,1589	1,1584
3	0,3	1,2626	0,7874	0,1575	
4	0,4	1,3407	0,7440	0,1488	
1	0,4	1,3416	0,7453	0,1491	
2					
3					
4					
1					

Notemos que las cinco cifras de los números $y_1 = 1{,}1832$ e $y_2 = 1{,}3416$ coinciden con la solución exacta $y = \sqrt{2x+1}$.

1164. Valiéndose del método de Runge-Kutta, integrar la ecuación $x^2y' - xy = 1$ para la condición inicial $y(1) = 0$ en el intervalo $[1, 2]$; el paso es $h = 0,2$ [la solución exacta es $y = (x^2 - 1)/(2x)$].

Resolución. Aquí $f(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$. Hallamos los números:

$$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0,2 \cdot \left(\frac{0}{1} + \frac{1}{1^2}\right) = 0,2;$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{1}\right) = 0,2 \cdot \left(\frac{0,1}{1,1} + \frac{1}{1,1^2}\right) = 0,18;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) = 0,2 \cdot \left(\frac{0,09}{1,1} + \frac{1}{1,1^2}\right) = 0,18;$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3) = 0,2 \cdot \left(\frac{0,18}{1,2} + \frac{1}{1,2^2}\right) = 0,17.$$

Por consiguiente,

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0,18, \text{ o sea,}$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0,18 = 0,18.$$

Del modo análogo encontramos

$$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0,2\left(\frac{0,18}{1,2} + \frac{1}{1,2^2}\right) = 0,17;$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) = 0,2\left(\frac{0,26}{1,3} + \frac{1}{1,3^2}\right) = 0,15;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) = 0,2\left(\frac{0,25}{1,3} + \frac{1}{1,3^2}\right) = 0,15,$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3) = 0,2\left(\frac{0,33}{1,4} + \frac{1}{1,4^2}\right) = 0,14.$$

Por lo tanto,

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0,15, \text{ o sea, } y_2 = y_1 + \Delta y_1 =$$

$$= 0,18 + 0,15 = 0,33, \text{ etc.}$$

1165. Haciendo uso del método de Runge-Kutta, integrar la ecuación $4y' = y^2 + 4x^2$, $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ con el paso $h = 0,1$. Realizar los cálculos con tres cifras exactas.

1166. Utilizando el método de Runge-Kutta, integrar la ecuación $y' = x/y + 0,5y$, $y(0) = 1$, en el intervalo $[0, 1]$ con el paso $h = 0,1$. Realizar los cálculos con tres cifras exactas.

3. Método de Adams. Supongamos que se exige integrar la ecuación $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Uno de los métodos de diferencias para la solución aproximada de este problema es *el de Adams*. Prefijando cierto paso de variación del argumento h, se determinan por un procedimiento cualquiera, partiendo de los datos iniciales $y(x_0) = y_0$, los tres valores siguientes de la función buscada $y(x)$:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h), \quad y_2 = y(x_0 + 2h), \quad y_3 = y(x_0 + 3h)$$

(estos tres valores pueden obtenerse valiéndose de un método cualquiera que asegure la exactitud deseada: con ayuda del desarrollo de la solución en serie de potencias, por el método de Runge-Kutta, etc., pero no por el método de Euler, debido a su exactitud insuficiente). Con ayuda de los números x_0, x_1, x_2, x_3 e y_0, y_1, y_2, y_3, se determinan las magnitudes

$$q_0 = h \cdot y_0' = h \cdot f(x_0, y_0),\ q_1 = h \cdot f(x_1, y_1),$$
$$q_2 = h \cdot f(x_2, y_2),\ q_3 = h \cdot f(x_3, y_3).$$

Luego se hace la tabla de diferencias finitas de las magnitudes y y q:

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0		q_0			
		Δy_0		$\Delta^2 q_0$		
x_1	y_1		q_1		$\Delta^2 q_0$	
		Δy_1		Δq_1		$\Delta^3 q_0$
x_2	y_2		q_2		$\Delta^2 q_1$	
		Δy_2		Δq_2		
x_3	y_3		q_3			
...	...	...	...	...	...	...

Conociendo los números en la fila inferior oblicua, con ayuda de la fórmula de Adams se determina

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2} \Delta q_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 q_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 q_0$$

y luego se halla también la magnitud $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Conociendo ahora y_4, se calcula $q_4 = h \cdot f(x_4, y_4)$, después de lo cual se puede escribir la fila oblicua siguiente:

$$\Delta q_3 = q_4 - q_3,\ \Delta^2 q_2 = \Delta q_3 - \Delta q_2,\ \Delta^3 q_1 = \Delta^2 q_2 - \Delta^2 q_1.$$

La nueva fila oblicua permite calcular, con ayuda de la fórmula de Adams, el valor

$$\Delta y_4 = q_4 + \frac{1}{2} \Delta q_3 + \frac{5}{12} \Delta^2 q_2 + \frac{3}{8} \Delta^3 q_1$$

y, por consiguiente, $y_5 = y_4 + \Delta y_4$, etc.

1167. Aplicando el método de Adams, hallar el valor de y (0,4) con precisión de hasta 0,01, para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = -1$.

Resolución. Determinamos los primeros cuatro términos del desarrollo de la solución de la ecuación dada en serie de Taylor en el entorno del punto $x = 0$:

$$y(x) = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{1}{2}y''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)\cdot x^3 + \ldots .$$

Según los datos, $y(0) = -1$; los valores de $y'(0)$, $y''(0)$ e $y'''(0)$ los encontramos derivando sucesivamente la ecuación dada:

$$y' = x^2 + y^2;\quad y'(0) = 0^2 + (-1)^2 = 1,$$
$$y'' = 2x + 2yy';\quad y''(0) = 0 + 2\cdot(-1)\cdot 1 = -2,$$
$$y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'';\quad y'''(0) = 2 + 2\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)(-2) = 8.$$

De este modo,

$$y(x) \approx -1 + x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots .$$

Calculamos $y(x)$ en los puntos $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$, con una cifra decimal de reserva (tercera): $y_1 = -0{,}909$; $y_2 = -0{,}829$, $y_3 = -0{,}754$. Componemos la tabla

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
0	-1		0,1			
0,1		0,091		$-0{,}017$		
	$-0{,}909$		0,083		0,006	
0,2		0,080		$-0{,}011$		$-0{,}002$
	$-0{,}829$		0,072		0,004	
0,3		0,075		$-0{,}007$		
	$-0{,}754$		0,065			
0,4						

Entonces,

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^2 q_0 =$$
$$= 0{,}065 + \frac{1}{2}(-0{,}007) + \frac{5}{12}\cdot 0{,}004 + \frac{3}{8}\cdot(-0{,}002) = 0{,}062.$$

Por consiguiente, $y_4 = y_3 + \Delta y_3 \approx -0{,}754 + 0{,}062 \approx -0{,}692 \approx -0{,}69$.

1168. Haciendo uso del método de Adams, hallar el valor de y (0,5), para la ecuación diferencial $y' = x + y$, $y(0) = 1$; paso $h = 0{,}1$. Realizar los cálculos con precisión de hasta 0,001, dejar en el resultado dos cifras decimales.

1169. Empleando el método de Adams, hallar el valor de y (0,4) para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$; el paso $h = 0{,}1$. Realizar los cálculos con el mismo número de cifras que en el ejercicio precedente.

§ 7. Método de Picard de aproximaciones sucesivas

Uno de los métodos analíticos de resolución aproximada de ecuaciones diferenciales es *el de Picard, de aproximaciones sucesivas*. Aplicado a la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

con la condición inicial $y(x_0) = y_0$, este método consiste en construir la solución buscada $y = y(x)$ para $x \geqslant x_0$ (o para $x \leqslant x_0$). Integrando ambos miembros de la ecuación (1) dentro de los límites de x_0 a x, obtenemos

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt,$$

o bien,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt. \tag{2}$$

Se supone que en cierto entorno del punto $(x_0;\ y_0)$ la ecuación (1) satisface las condiciones del teorema de existencia y de unicidad (teoremas de Cauchy), o sea, $f(x, y)$ es una función continua de sus argumentos y $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < K$.

Para determinar las aproximaciones sucesivas, sustituimos en la igualdad (2) la función incógnita y por el valor dado y_0; obtenemos la primera aproximación

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt.$$

Luego, sustituyendo en vez de la función incógnita y la función hallada y_1 en la igualdad (2), obtenemos la segunda aproximación

$$y_2 = y_2 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\, dt.$$

Todas las aproximaciones ulteriores se construyen por la fórmula

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

De este modo,

$$y(x) \approx y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt.$$

Se puede demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$.

El error se aprecia por la desigualdad

$$|\, y(x) - y_n(x)\, | \leqslant \frac{M\,(Kc)^n}{K \cdot n!},$$

donde $|f(x, y)| \leqslant M$, $|x-x_0| < a \leqslant \infty$, $|y-y_0| < b \leqslant \infty$, $c = \min(a, b/M)$.

Las aproximaciones de Picard dan una sucesión de las funciones inferiores, o sea,

$$y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < y(x)$$

si $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ y $f(x, y_0) > 0$; y si $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ y $f(x, y_0) < 0$, ellas dan una sucesión de las funciones superiores, o sea,

$$y_0 > y_1 > y_2 > \ldots > y_n > y(x).$$

De este modo, cuando $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ las aproximaciones de Picard, forman *una sucesión unilateral de aproximaciones*, y cuando $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$, *una sucesión bilateral.*

1170. Hallar la solución aproximada de la ecuación $y' = x + y^2$ que satisface la condición inicial $y(0) = 1$.

Resolución. En calidad de aproximación inicial tomamos $y_0 = y(0) = 1$. Entonces la primera aproximación

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t+1)\,dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

Análogamente, obtenemos la segunda aproximación

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left[t + \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2\right)^2\right] dt =$$

$$= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{20}x^5,$$

. . . .

1171. ¿Con ayuda de qué sucesión de aproximaciones de Picard se expresa la solución de la ecuación $y' = x + y$, que satisface la condición inicial $y(0) = 0$ para $x \geqslant 0$?

Resolución. En calidad de aproximación inicial tomamos $y_0 = y(0) = 0$. Entonces:

$$y_1 = y_0 + \int_0^x (t + y_0)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2,$$

$$y_2 = \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}t^2\right) dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

$$y_3 = \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) dt = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!},$$

. . . .

$$y_n(x) = \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\right) dt =$$

$$= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Aquí, $f(x, y_0) = x + y_0 \geqslant 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 > 0$. Por consiguiente, las aproximaciones de Picard forman una sucesión de las funciones inferiores.

En este caso la expresión analítica real de $y(x)$ tiene la forma

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) - (x+1),$$

o bien

$$y(x) = e^x - x - 1.$$

1172. Hallar tres soluciones aproximadas sucesivas de la ecuación $y' = x^2 + y^2$ que satisfagan la condición inicial $y(0) = 0$, tomando en calidad de aproximación inicial $y = 0$.

1173. Hallar la solución aproximada de la ecuación $y' + y \cdot \operatorname{ch} x = 0$ que satisfaga la condición inicial $y(0) = 1$.

1174. Hallar la solución aproximada y determinar el carácter de las aproximaciones de Picard de la ecuación $y' = x - y$; la condición inicial es $y(0) = 1$, $x \geqslant 0$.

1175. Hallar la solución aproximada y determinar el carácter de las aproximaciones de Picard de la ecuación $y' = y \cdot \cos x$; la condición inicial es $y(0) = 1$; $-2 < x < 2$.

1176. Hallar la solución aproximada de la ecuación $y' = 2xy \cos(x^2)$, que satisface la condición inicial $y(0) = 1$, $0 < x < 1$, $0 < y < 2$. Determinar el carácter de las aproximaciones de Picard.

§ 8. Procedimientos elementales de elaboración de los datos experimentales

1. Procedimiento gráfico. Supongamos que los datos de una prueba están representados en una tabla. Por los puntos determinados por esta tabla o por los que están próximos a ellos, trazamos un gráfico y por el aspecto del mismo seleccionamos el de la fórmula empírica. El caso más simple se considera aquel, para el cual los datos de la prueba llevan a los puntos que se sitúan, aproximadamente, sobre la recta $y = a_0 + a_1 x$ o sobre las rectas cuyas ecuaciones $S = At^{\alpha}$ y $S = Ae^{\alpha t}$ se transforman por la sustitución de las variables, obteniéndose la función lineal. Resolviendo este problema por el procedimiento gráfico, marcamos los puntos sobre el cuadriculado (con escala uniforme o logarítmica) y trazamos la recta aproximadamente por estos puntos de modo que ésta se sitúe lo más cerca posible a cada uno de los puntos marcados y luego tomamos dos puntos arbitrarios sobre esta recta (distantes lo más lejos posible uno del otro) y sustituimos sus coordenadas en la relación $y = a_0 + a_1 x$. De dos ecuaciones obtenidas de este modo hallamos a_0 y a_1.

1177. La distribución estacionaria de la temperatura en una varilla fina termoaislada se describe por la función lineal $u = a_0 + a_1 x$. Determinar las constantes a_0 y a_1 si se da la tabla de temperaturas medidas en los puntos correspondientes de la varilla:

x	0	2	6	8	10	14	16	20
u	32	29,2	23,3	29,9	17,2	11,3	7,8	2

Resolución. Construyendo los puntos correspondientes a la tabla dada, vemos que la recta pasa por los puntos (0; 32) y (20; 2). Sustituyendo sus coordenadas en la ecuación $u = a_0 + a_1x$, tenemos

$$\begin{cases} a_0+0\cdot a_1=32, \\ a_0+20a_1=2; \end{cases} \quad a_0=32, \quad a_1=-1,5.$$

De aquí, obtenemos la relación buscada $u = 32 - 1,5x$.

Hasta qué punto responde esta fórmula a los datos de tabla, se puede juzgar por la magnitud de la suma de desviaciones δ y la suma de los cuadrados de desviaciones δ^2 de los valores de la función determinados por la fórmula en comparación con los valores de tabla. En el ejemplo dado $\delta = -1,5x + 32 - u$. Por consiguiente,

$\delta_1 = -1,5\cdot 0 + 32 - 32 = 0;$ $\quad\delta_2 = -1,5\cdot 2 + 32 - 29,2 = -0,2;$

$\delta_3 = -1,5\cdot 6 + 32 - 23,3 = -0,3;$ $\quad\delta_4 = -1,5\cdot 8 + 32 - 19,9 = 0,1;$

$\delta_5 = -1,5\cdot 10 + 32 - 17,2 = -0,2;$ $\quad\delta_6 = 1,5\cdot 14 + 32 - 11,3 = -0,3;$

$\delta_7 = -1,5\cdot 16 + 32 - 7,8 = 0,2;$ $\quad\delta_8 = -1,5\cdot 20 + 32 - 2 = 0;$

$$\sum_{i=1}^{8} \delta_i = -0,7; \quad \sum_{i=1}^{8} \delta_i^2 = 0,31.$$

1178. Los datos de tabla responden a la fórmula $S = At^{\alpha}$. Hallar

t	1	2	3	4	5	6	7
S	2,31	2,58	2,77	2,93	3,06	3,16	3,26

los valores de A y α.

Resolución. Determinando por logaritmos la igualdad $S = At^{\alpha}$, obtenemos $\log S = \log A + \alpha\cdot\log t$; haciendo $\log S = y$, $\log t = x$, $\log A = a_0$, $\alpha = a_1$, tenemos $y = a_0 + a_1x$. De gráfico de la ecuación lineal obtenida sirve una recta, los parámetros de su ecuación los hallamos tomando dos puntos sobre esta recta, por ejemplo ($\log 1$; $\log 2,31$) y ($\log 7$; $\log 3,26$). Sustituyendo las coordenadas de estos puntos en la ecuación $y = \log A + \alpha x$, obtenemos

$$\begin{cases} \log 2,31=\log A+\alpha\cdot\log 1 \\ \log 3,26=\log A+\alpha\cdot\log 7, \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} \log A=0,364, \\ \log A+0,845\alpha=0,513. \end{cases}$$

De aquí, $\log A = 0,364$, $A = 2,312$; $\alpha = 0,149/0,845 = 0,176$, por consiguiente, $S = 2,312t^{0,176}$.

1179. Los datos de tabla responden a la fórmula $y = a_0 + a_1x$. Hallar a_0 y a_1.

x	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
y	76,30	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10

1180. Los datos de tabla responden a la fórmula $S = Ae^{\alpha t}$. Hallar A y α.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
S	15,3	20,5	27,4	36,6	49,1	65,6	87,8	117,6

2. Procedimiento de medias. *El procedimiento de medias* se basa en la admisión de que de línea más conveniente sirve aquella, para la cual la suma algebraica de las desviaciones es igual a cero. Para encontrar por este procedimiento las constantes desconocidas en la fórmula empírica, primeramente sustituimos en esta fórmula todos los pares de los valores observados o medidos de x e y y obtenemos tantas desviaciones cuantos pares de valores $(x; y)$ se tienen en la tabla (las desviaciones son las distancias verticales desde los puntos dados al gráfico de la función). Luego distribuimos estas desviaciones por grupos, formando tantos grupos como parámetros desconocidos de la fórmula empírica es necesario determinar. Por último, igualando a cero la suma de desviaciones en cada grupo, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales con respecto a los parámetros.

1181. Hallar por procedimiento de medias la fórmulas $S = At^{\alpha}$ correspondiente a la tabla

t	273	283	288	293	313	333	353	373
S	29,4	33,3	35,2	37,2	45,8	55,2	65,6	77,3

Resolución. Aquí las desviaciones tienen la forma $\delta = At^{\alpha} - S$. Sustituyendo los valores de t y S tomados de la tabla igualando a cero las desviaciones, obtenemos el sistema de ecuaciones respecto a los parámetros A y α cuya solución es dificultosa. Sin perder mucho en la exactitud se puede igualar a cero la suma de desviaciones del logaritmo de S, o sea, $\delta' = \log A + \alpha \log t - \log S$.

Entonces las desviaciones se expresan por las fórmulas:

$$\delta_1' = \log A + 2{,}4362\alpha - 1{,}4683, \quad \delta_5' = \log A + 2{,}4955\alpha - 1{,}6609,$$
$$\delta_2' = \log A + 2{,}4518\alpha - 1{,}5224, \quad \delta_6' = \log A + 2{,}5224\alpha - 1{,}7419,$$
$$\delta_3' = \log A + 2{,}4594\alpha - 1{,}5465, \quad \delta_7' = \log A + 2{,}5478\alpha - 1{,}8169,$$
$$\delta_4' = \log A + 2{,}4669\alpha - 1{,}5705, \quad \delta_8' = \log A + 2{,}5717\alpha - 1{,}8882.$$

Igualando a cero las desviaciones en estos dos grupos, obtenemos el sistema de ecuaciones para determinar los parámetros A y α:

$$\begin{cases} 4\log A + 9{,}8143\alpha = 6{,}1077, \\ 4\log A + 10{,}1374\alpha = 7{,}1079. \end{cases}$$

La solución de este sistema es $\alpha = 3{,}096$, $\log A = \bar{7}{,}9345$; de aquí, $A = 8{,}5\cdot 10^{-7}$. Por lo tanto, $S = 8{,}6\cdot 10^{-7}\, t^{3{,}096}$.

1182. Se da la tabla. Hallar los parámetros a_0, a_1, a_2, de la fórmula $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, correspondiente a esta tabla.

x	87,5	84,0	77,8	63,7	46,7	36,9
y	292	283	270	235	197	181

1183. Se da la tabla que responde a la fórmula $S = At^{\alpha}$. Hallar A y α.

t	53,92	26,36	14,00	6,99	4,28	2,75	1,85
S	6,86	14,70	28,83	60,40	101,9	163,3	250,3

3. Selección de los parámetros por el procedimiento de cuadrados mínimos. 1). En la práctica se necesita con frecuencia resolver un problema así. Sean conocidos para dos variables x e y, relacionadas funcionalmente, n pares de valores correspondientes $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $\ldots$, $(x_n; y_n)$. Se exige en la fórmula dada de antemano $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ determinar m parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m < n)$ de modo que en esta fórmula «se coloquen» del modo mejor n pares conocidos de valores de x e y.

Se considera (partiendo de los principios de la teoría de las probabilidades) que los mejores son aquellos valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ que minimizan la suma

$$\sum_{k=1}^{k=n} [f(x_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) - y_k]^2,$$

(o sea, la suma de los cuadrados de desviaciones de los valores de y calculados por la fórmula, con respecto a los valores dados); por eso, este procedimiento ha recibido el nombre de *método de los cuadrados mínimos*.

Esta condición determina un sistema de m ecuaciones, que permiten calcular $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\sum_{k=1}^{k=n} [f(x_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) - y_k] \frac{\partial f(x_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}{\partial \alpha_j} = 0 \qquad (1)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

En la práctica la fórmula dada $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ se necesita a veces transformarla (en perjuicio de la rigurosidad de la solución obtenida) ne un modo tal que el sistema (1) se resuelva más sencillamente (véase a continuación la selección de los parámetros en las fórmulas $y = Ae^{cx}$ e $y = Ax^q$).

Casos particulares. a) $y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ ($m + 1$ parámetros $a_0, a_1, \ldots, a_m$; $n > m + 1$).

El sistema (1) adopta la forma siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^m + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m-1} + \ldots + n\cdot a_m = \sum\limits_{k=1}^{k=n} y_k, \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m+1} + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^m + \ldots + a_m\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k y_k, \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m+2} + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{m+1} + \ldots + a_m\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^2 y_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{2m} + a_1\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^{2m-1} + \ldots + a_m\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^m = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^m y_k. \end{array}\right. \tag{2}$$

Este sistema de $m + 1$ ecuaciones con $m + 1$ incógnitas tiene siempre solución única, ya que su determinante es distinto de cero.

Para determinar los coeficientes del sistema (2) es cómodo construir una tabla auxiliar de la siguiente forma

h	x_k	x_k^2	x_k^3	$\ldots$	x_k^{2m}	y_k	$x_k y_k$	$x_k^2 y_k$	$\ldots$	$x_k^m y_k$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	$\ldots$	x_1^{2m}	y_1	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$	$\ldots$	$x_1^m y_1$
2	x_2	x_2^2	x_2^3	$\ldots$	x_2^{2m}	y_2	$x_2 y_2$	$x_2^2 y_2$	$\ldots$	$x_2^m y_2$
.	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
.	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
n	x_n	x_n^2	x_n^3	$\ldots$	x_n^{2m}	y_n	$x_n y_n$	$x_n^2 y_n$	$\ldots$	$x_n^m y_n$
$\sum$										

En la última fila se escriben las sumas de los elementos de cada columna que son precisamente los coeficientes del sistema (2). El sistema (2) se resuelve generalmente por el método de Gauss.

b) $y = Ae^{cx}$.

Para simplificar el sistema (1) esta fórmula que relaciona x e y, se determina previamente por logaritmos y se reemplaza por la fórmula

$$\log y = \log A + c\cdot\log e\cdot x.$$

En este caso el sistema (1) adquiere la forma siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} c\cdot\log e\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k + n\cdot\log A = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log y_k, \\ c\cdot\log e\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k^2 + \log A\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k\cdot\log y_k. \end{array}\right. \tag{3}$$

La tabla auxiliar tiene la forma

h	x_h	x_h^2	$\log y_h$	$x_h \cdot \log y_h$
1	x_1	x_1^2	$\log y_1$	$x_1 \cdot \log y_1$
2	x_2	x_2^2	$\log y_2$	$x_2 \cdot \log y_2$
...	...	...	...	...
n	x_n	x_n^2	$\log y_n$	$x_n \cdot \log y_n$
$\sum$				

Del sistema (3) se determinan c y $\log A$.

c) $y = Ax^q$.

A esta fórmula también se le aplican previamente logaritmos, y se reemplaza por la siguiente

$$\log y = \log A + q \cdot \log x.$$

Ahora el sistema (1) adquiere la forma

$$\begin{cases} q \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log x_k + n \cdot \log A = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log y_k, \\ q \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log^2 x_k + \log A \cdot \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log x_k = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \log x_k \cdot \log y_k. \end{cases} \tag{4}$$

En correspondencia, se cambia también la tabla auxiliar.

2) Frecuentemente se necesita sustituir del modo mejor cierta función dada $y = f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ por el polinomio de m-ésimo grado: $y \approx a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$. En este caso la aplicación del método de los cuadrados mínimos lleva a la determinación de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$, a partir de la condición del mínimo de la integral

$$\int\limits_a^b [\varphi(x) - f(x)]^2\, dx = \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)]^2\, dx.$$

Las condiciones necesarias del mínimo de esta integral llevan a un sistema de $m+1$ ecuaciones con $m+1$ incógnitas $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, a partir del cual se determinan todos estos coeficientes:

$$\begin{cases} \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)] \cdot x^m\, dx = 0, \\ \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)] \cdot y^{m-1}\, dx = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m - f(x)] \cdot dx = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1184. Por el método de los cuadrados mínimos, escoger para los valores dados de x e y la función cuadrática $\varphi(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$:

x	7	8	9	10	11	12	13
y	7,4	8,4	9,1	9,4	9,5	9,5	9,4

Resolución. Componemos la tabla

k	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	y_k	x_ky_k	$x_k^2y_k$
1	7	49	343	2 401	7,4	51,8	362,6
2	8	64	512	4 196	8,4	67,2	537,6
3	9	81	729	6 561	9,1	81,9	737,1
4	10	100	1000	10 000	9,4	94,0	940,0
5	11	121	1331	14 641	9,5	104,5	1149,5
6	12	144	1727	20 736	9,5	114,0	1368,0
7	13	169	2197	28 561	9,4	122,2	1588,6
$\sum$	70	728	7840	87 096	62,7	635,6	6683,4

De aquí, tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 728a_0 + 70a_1 + 7a_2 = 62{,}7, \\ 7840a_0 + 728a_1 + 70a_2 = 635{,}6, \\ 87\,096a_0 + 7840a_1 + 728a_2 = 6683{,}4. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $a_0 = -0{,}04$, $a_1 = 1{,}10$, $a_2 = 2{,}12$. Ahora bien, la función cuadrática buscada tiene la forma $\varphi(x) = -0{,}04x^2 + 1{,}10x + 2{,}12$.

1185. Por el método de los cuadrados mínimos, escoger la función potencial $S = At^q$ por los datos de la tabla siguientes

t	1	2	3	4	5
S	7,1	27,8	62,1	110	161

Resolución. Componemos la tabla

k	$x_k = \log t_k$	x_k^2	$y_k = \log S_k$	$x_k y_k$
1	0,0000	0,0000	0,8513	0,0000
2	0,3010	0,0906	1,4440	0,4346
3	0,4771	0,2276	1,7931	0,8555
4	0,6021	0,3625	2,0414	0,2291
5	0,6990	0,4886	2,2068	1,5425
$\sum$	2,0792	1,1693	8,3366	4,0637

De este modo, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2{,}0792q + 5\log A = 8{,}3366, \\ 1{,}1693q + 2{,}0792\log A = 4{,}0637. \end{cases}$$

De aquí, $q = 1{,}958$, $\log A = 0{,}8532$, o sea, $A = 7{,}132$. Por lo tanto, la función potencial buscada tiene la forma $S = 7{,}132t^{1{,}958}$.

1186. Por el método de los cuadrados mínimos, escoger la función potencial $S = Ae^{ct}$ por los datos de la tabla siguiente:

t	0	2	4	6	8	10	12
S	1280	635	324	162	76	43	19

Resolución. Componemos la tabla

k	t	t^2	$y = \log S$	ty
1	0	0	3,1072	0,0000
2	2	4	2,8028	5,6056
3	4	16	2,5105	10,0420
4	6	36	2,2095	13,2570
5	8	64	1,8808	15,0464
6	10	100	1,6335	16,3350
7	12	144	1,2787	15,3444
$\sum$	42	364	15,4230	75,6304

Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 42c\cdot\log e + 7\log A = 15{,}4230 \\ 364c\cdot\log e + 42\log A = 75{,}6304, \end{cases}$$

o sea, $c \cdot \log e = -0{,}1509$, $\log A = 3{,}1087$. Por consiguiente, $A = 1284$ y $c = -0{,}347$. De este modo, la forma potencial buscada tiene la forma $S = 1284e^{-0{,}347t}$.

En los problemas siguientes, valiéndose del método de los cuadrados mínimos, escoger las funciones de la forma dada por los datos de tabla citados.

1187. Hallar la función lineal:

1)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

2)

x	1	4	9	16	25
y	0,1	3	8,1	14,9	23,9

3)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y	3,02	2,81	2,57	2,39	2,18	1,99	1,81	1,85

1188. Hallar la función cuadrática:

1)

x	7	8	9	10	11	12	13
y	3,1	4,9	5,3	5,8	6,1	6,4	5,9

2)

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

3)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−0,71	−0,01	0,51	0,82	0,88	0,81	0,49

1189. Hallar la función potencial $S = At^q$:

t	1	2	3	4	5
S	7,1	15,2	48,1	96,3	150,1

1190. Hallar la función exponencial $S = Ae^{ct}$:

1)

t	2,2	2,7	3,5	4,1
S	67	60	53	50

2)

t	1	3	5	7	9	11
S	0,75	1,81	5,34	10,86	24,52	59,00

1191. Hallar la mejor aproximación de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x/2)$ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$ con un polinomio de tercer grado.

Resolución. Para determinar los coeficientes de la función $\varphi(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ escribimos el sistema de ecuaciones de la forma (5):

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right) x^3\,dx = 0, \\ \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right) x^2\,dx = 0, \\ \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right) x\,dx = 0, \\ \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right) dx = 0. \end{cases}$$

Integrando, obtenemos

$$\begin{cases} \frac{1}{7}a_0 + \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{5}a_2 + \frac{1}{4}a_3 = \frac{12}{\pi^2} - \frac{96}{\pi^4}, \\ \frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{3}a_3 = \frac{8}{\pi^2} - \frac{16}{\pi^3}, \\ \frac{1}{5}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_3 = \frac{4}{\pi^2}, \\ \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + a_3 = \frac{2}{\pi}. \end{cases}$$

Resolviendo el último sistema, hallamos $a_0 = -0{,}40$, $a_1 = -0{,}24$, $a_2 = 1{,}64$, $a_3 = -0{,}05$.
Por consiguiente,

$$\varphi(x) = -0{,}4x^3 - 0{,}24x^2 + 1{,}64x - 0{,}05.$$

Comprobación: si $x = 1/3$, entonces $f(1/3) = 0{,}50$, $\varphi(1/3) = 0{,}51$.

1192. Hallar la mejor aproximación de la función $f(x) = \ln(4 + x)$, con un polinomio de tercer grado, si $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1193. Hallar la mejor aproximación de la función $f(x) = 1/(1 + x)$, con un polinomio de tercer grado, si $0 < x < 1$.

Capítulo X.

Fundamentos del cálculo de variaciones

§ 1. Introducción

1. Concepto de funcional. Unos de conceptos fundamentales del análisis matemático es el de función. En el caso elemental la noción de dependencia funcional puede ser expresada así. Sea C un conjunto cualquiera de números reales. Si a cada número x del conjunto C le corresponde cierto número y, entonces se dice que sobre el conjunto C está definida la función $y = f(x)$. El conjunto C se llama campo de definición de la función f.

Sin embargo, en muchos casos el concepto de función no es suficiente. Así, por ejemplo, la intensidad del campo electromagnético en un lugar dado, originada por el paso de una corriente en el conductor, depende de la forma de la curva a lo largo de la cual está situado este último. El concepto de funcional es generalización directa y natural del de función y lo contiene como caso particular.

Sea C un conjunto de objetos cualesquiera. Éstos pueden ser números, puntos del espacio, líneas, funciones, superficies, etc. Si a cada elemento x de C le corresponde cierto número real y, entonces se dice que sobre el conjunto C está definida la funcional $y = I(x)$. Si el conjunto C es un conjunto de números x, entonces la funcional $y = I(c)$ no es más que la función de un argumento. Cuando C es el conjunto de un par de números (x_1, x_2), la funcional será la función $y = I(x_1, x_2)$ de dos argumentos, etc. En el cálculo de variaciones se examinan funcionales cuyo campo de definición C son conjuntos de funciones $y(x)$.

1194. Resolver $I[y(x)] = \int\limits_0^1 [y(x)]^2\,dx.$

Resolución. Si en vez de $y(x)$ se sustituyen diferentes funciones concretas, por ejemplo, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^x$, $y_3(x) = \sqrt{1+x^2}$, entonces obtenemos, respectivamente: $I(y_1) = \frac{1}{3}$, $I(y_2) = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$, $I(y_3) = \frac{4}{3}$.

El cálculo de variaciones tiene por objeto determinar los valores máximos y mínimos de las funcionales definidas sobre conjuntos de líneas o superficies. Con ellos, al igual que en el ejemplo citado anteriormente, las funcionales se dan por medio de ciertas integrales definidas.

Las funciones pertenecientes al campo de definición C de la funcional dada I, las llamaremos funciones de comparación o funciones admisibles.

2. Clases de las funciones y entornos. En adelante se utilizarán las siguientes clases de funciones, dadas sobre cierto segmento $[x_0, x_1]$:

1) $C[x_0, x_1]$, la clase de funciones continuas;

2) $C^{(1)}[x_0, x_1]$, la clase de las funciones suaves (es decir, las que tienen ontinuas las primeras derivadas);

3) $C^{(m)}[x_0, x_1]$, la clase de las funciones que tienen continuas m-ésimas derivadas.

Para las funciones que forman parte de las clases recién citadas se introduce el concepto de distancia. A saber, si $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ son funciones pertenecientes a la clase $C[x_0, x_1]$, entonces se llama distancia entre ellas al número $\rho_0 = \rho_0(y_1, y_2) = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y_1(x) - y_2(x)|$ (distancia de orden nulo). Si $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ pertenecen a la clase $C^{(1)}[x_0, x_1]$, entre ellas se puede introducir la distancia del modo siguiente: $\rho_1 = \rho_1(y_1, y_2) = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y_1(x) - y_2(x)| + \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y_1'(x) - y_2'(x)|$ (distancia de primer orden). De un modo análogo entre las funciones que forman parte de la clase $C^{(m)}[x_0, x_1]$ se puede introducir la distancia de m-ésimo orden.

1195. Hallar la distancia de orden nulo entre las funciones $y = x^2$ e $y = x$ sobre el segmento $[0, 1]$.

Resolución. $\rho_0 = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |x^2 - x|$. Sobre los extremos del segmento $[0, 1]$ la función $y = x^2 - x$ toma los valores iguales a cero. Investiguémosla para determinar los extremos sobre el intervalo $]0, 1[$. Tenemos: $y' = 2x - 1 = 0$ cuando $x = \frac{1}{2}$. Con ello $y''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$. De suerte que en el punto $x = \frac{1}{2}$ la función analizada tiene un mínimo, igual a $-\frac{1}{4}$. Por eso $|x^2 - x|$ toma en el punto $x = \frac{1}{2}$ el valor máximo sobre el segmento $[0, 1]$, igual a $\frac{1}{4}$ y $\rho_0 = \frac{1}{4}$.

Sea el número $\varepsilon > 0$. Se llama entorno ε de orden nulo de la función $\bar{y}(x)$ de la clase $C[x_0, x_1]$, al conjunto de todas las funciones $y(x)$ de esta clase, tales que $\rho_0(y, \bar{y}) < \varepsilon$. Gráficamente esto quiere decir que las curvas $y = y(x)$ e $y = \bar{y}(x)$ dadas en el segmento $[x_0, x_1]$ son próximas por sus ordenadas.

Se denomina entorno ε de primer orden de la función $\bar{y}(x)$ de la clase $C^{(1)}[x_0, x_1]$ al conjunto de todas las funciones $y(x)$ de esta clase, tales que $\rho_1(y, \bar{y}) < \varepsilon$. Gráficamente esto significa que las curvas $y = y(x)$ e $y = \bar{y}(x)$ sobre el segmento $[x_0, x_1]$ son próximas tanto por las ordenadas como por el coeficiente angular de las tangentes de los puntos con abscisas iguales. Análogamente, se puede introducir el entorno ε de m-ésimo orden de la función $\bar{y}(x)$ perteneciente a la clase $C^{(m)}[x_0, x_1]$.

1196. Aclarar en qué entornos de la función dada $y(x) \equiv 0$ sobre el segmento $[0, 2\pi]$ van a parar las funciones que forman parte de la sucesión $y_n(x) = \frac{\cos nx}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Resolución. Puesto que

$$|y_n(x) - y(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

las funciones $y_n(x)$ pertenecen a un entorno ε cualquiera de orden nulo de la función $\bar{y}(x) \equiv 0$, siempre que n sea suficientemente grande. Para el entorno ε de primer orden, esto ya no es justo, como lo muestran las igualdades

$$|y_n'(x) - \bar{y}'(x)| = \left|-\frac{n}{n+1} \operatorname{sen} nx\right| = \frac{n}{n+1}, \quad \text{si } x = \frac{\pi}{2n},$$

$$\text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

En tales casos se dice que entre la función $\bar{y}(x)$ y la sucesión $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene lugar un orden nulo de proximidad.

3. Extremos de las funcionales. Sea C una clase de funciones de comparación de la funcional I.

Se dice que la funcional I tiene en esta clase el mínimo (máximo) absoluto concedido por la función $\bar{y}(x)$ de la clase C, si para toda función $y(x)$ de esta clase tiene lugar la desigualdad

$$I[y(x)] \geqslant I[\bar{y}(x)] \qquad (I[y(x)] \leqslant I[\bar{y}(x)]). \tag{1}$$

Se dice que la funcional I tiene en la clase C el mínimo (máximo) relativo concedido por la función $\bar{y}(x)$ de la clase C, si existe un entorno ε de la función $\bar{y}(x)$ que para toda función $y(x)$ de la clase C de este entorno ε se cumpla la desigualdad (1).

El mínimo (máximo) relativo se llama fuerte, si la desigualdad(1) se cumple para todas las funciones de comparación $y(x)$ pertenecientes a cierto entorno ε de orden nulo de la función $\bar{y}(x)$. El mínimo (máximo) relativo se denomina débil, si la desigualdad (1) se cumple para todas las funciones de comparación $y(x)$ situadas en entorno ε de primer orden de la función $\bar{y}(x)$.

De este modo, todo extremo absoluto será un extremo relativo fuerte y débil. Todo extremo relativo fuerte es al mismo tiempo un extremo débil. Sin embargo, hablando en general, un extremo relativo débil no es fuerte.

4. Concepto de variación de una funcional. Haciendo uso de la funcional $I_1[y(x)] = \int_0^1 y^2\,dx$ en calidad de ejemplo, examinemos como cambia su valor cuando se efectúa una pequeña variación de la función $y(x)$, de la cual esta funcional depende. Supongamos que en el segundo miembro ha sido sustituida primeramente cierta función $y(x)$ y luego se introduce una función nueva $y(x) + \delta y(x)$, donde $\delta y(x)$, llamada variación de $y(x)$, es una función arbitraria que toma valores pequeños. Por ejemplo, primeramente podría ser $y = x^2$ y luego $y = x^2 + \alpha \cdot x(1 - x)$ donde la constante α es pequeña. Entonces cambiará también el valor de la función y llegará a ser igual a

$$\int_0^1 (y + \delta y)^2\,dx = \int_0^1 y^2\,dx + 2\int_0^1 y \cdot \delta y\,dx + \int_0^1 (y)^2\,dx.$$

De este modo, en el ejemplo examinado el incremento de la funcional será $\Delta I_1 = 2\int_0^1 y \cdot \delta y\,dx + \int_0^1 (\delta y)^2\,dx$. Si se fija la función $y(x)$ y se cambia su variación δy, entonces vemos que el primer término del segundo miembro es lineal con respecto a δy y el segundo es cuadrático. El primer término en el incremento de la funcional se llama variación de la funcional y se designa por δI_1, o sea, $\delta I_1 = 2\int_0^1 y \cdot \delta y\,dx$. Así, pues, con una precisión de hasta los términos de orden superior de pequeñez $\Delta I_1 \approx \delta I_1$.

Examinemos ahora el caso de una funcional general que tiene la forma

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx,$$

donde F es cierta función conocida de tres variables. Si en vez de $y(x)$ en la integral se sustituye la función $y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$, donde $\eta(x)$ es cierta función fija de la clase $C^{(1)}[x_0, x_1]$ tal que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, entonces obtenemos la función del parámetro α:

$$I(\alpha) = \int_{x_0}^{x} F[x, y(x) + \alpha\cdot\eta(x), y'(x) + \alpha\cdot\eta'(x)]\, dx.$$

Escribimos su desarrollo formal en serie de Maclaurin:

$$I(\alpha) = I(0) + \frac{\alpha}{1!}\cdot y'(0) + \frac{\alpha^2}{2!}\cdot I'(0) + \dots\ .$$

Las expresiones $\alpha\cdot I'(0)$ y $\alpha^2\cdot\frac{I''(0)}{2}$ aquí obtenidas se llaman primera y segunda variación de la funcional I, y se designan por los símbolos δI y $\delta^2 I$. Para la funcional examinada en el ejemplo citado anteriormente obtenemos $\delta I =$

$$= \alpha\cdot I_1'(0) = 2\int_0^1 y(x)\times\alpha\cdot\eta(x)\, dx.$$

Esta magnitud coincide con la citada arriba, cuando la variación de la función $y(x)$ es igual $\delta y = \alpha\cdot\eta(x)$.

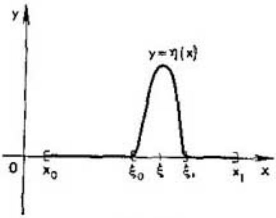

Fig. 85

5. Lemas principales. Lema I (de Lagrange). Si $f(x)$ es una función continua sobre el segmento $[x_0, x_1]$ y si $\int_0^{x_1} f(x)\times\eta(x)\, dx = 0$ para una función $\eta(x)$ cualquiera que sea derivable continuamente m veces e igual a cero sobre los extremos del segmento $[x_0, x_1]$ junto con todas sus derivadas de k-ésimo orden ($k \leqslant m$), luego $f(x) \equiv 0$.

Demonstración. Admitamos lo contrario. Entonces en cierto punto interior ξ del segmento $[x_0, x_1]$ $f(\xi) \neq 0$. Supongamos que para la definibilidad $f(\xi) > 0$. En virtud de la continuidad $f(x)$, se puede señalar tal subsegmento $[\xi_0, \xi_1] \subset [x_0, x_1]$ en el cual $f(x) > 0$. Definimos ahora $\eta(x)$ así (fig. 85):

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 \text{ fuera del segmento } [\xi_0, \xi_1], \\ [(\xi_1 - x)(x - \xi_0)]^{m+1} \text{ para } \xi_0 \leqslant x \leqslant \xi_1. \end{cases}$$

No es difícil comprobar que la función $\eta(x)$ es m veces continuamente derivable sobre el segmento $[x_0, x_1]$ y, junto con todas sus derivadas de hasta el m-ésimo orden, inclusive, se anula sobre los extremos del segmento $[x_0, x_1]$. Por eso

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\eta(x)\, dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} f(x)\,[(\xi_1 - x)(x - \xi_0)]^{m+1}\, dx > 0.$$

La contradicción obtenida demuestra el lema.

Generalización del lema I. Es evidente que el lema I se extiende también sobre las integrales que tienen la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} [\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \eta_3 f_3]\, dx,$$ donde f_1, f_2, f_3, son funciones

continuas en el intervalo $[x_0, x_1]$, η_1, η_2, η_3, son funciones que satisfacen las mismas condiciones que $\eta(x)$. Para que esta integral sea igual a cero para todas las funciones posibles η_1, η_2, η_3 que satisfacen las condiciones indicadas, es necesario que las funciones f_1, f_2, f_3, sean idénticamente iguales a cero.

Lema 2 (de Ostrogradski). Si $f(x, y)$ es una función continua en la región D, y si $\iint_D f(x, y)\,\eta(x, y)\,dx\,dy = 0$ para toda función $\eta(x, y)$, continua junto con sus derivadas parciales de primer orden en la región D e igual a cero sobre el contorno Γ, que acota la región D, entonces $f(x, y) \equiv 0$.

Demostración. Procediendo del modo análogo a la demostración del primer lema, pongamos que en cierto punto (ξ, ζ) dentro de la región D, la función $f(x, y) > 0$. Entonces ella será positiva en cierto círculo ubicado dentro de la región D con centro en (ξ, ζ) y radio $\rho > 0$. Definimos la función $\eta(x, y)$ del modo siguiente:

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ para } (x-\xi)^2+(y-\zeta)^2 > \rho^2, \\ [(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2-\rho^2]^2, \text{ para } (x-\xi)^2+(y-\zeta^2) \leqslant \rho^2. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\eta(x, y)$ satisface las condiciones del lema y la integral se reduce a la de una función positiva continua sobre el contorno mencionado, lo que contradice la condición del lema.

§ 2. Condición necesaria del extremo de una funcional

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

1. Ecuación de Euler. Examinemos una funcional $I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$, donde F es la función dada de tres variables, junto con las derivadas parciales respecto a todas las variables de segundo orden, inclusive, para todos los puntos pertenecientes a cierta región plana D que tienen por coordenadas x, y, y para todos los valores finitos de y'. El conjunto C de las funciones de comparación lo definamos así: cada función $y(x)$ pertenece a la clase $C^{(1)}[x_0, x_1]$ con ello la curva $y = y(x)$ está por completo en la región D e $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, donde y_0 e y_1, son ciertos números constantes.

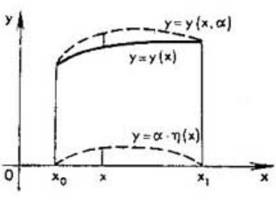

Fig. 86

Investiguemos el extremo de la funcional dada. Para esto tomemos una función $\eta(x)$ cualquiera que satisfaga las condiciones del lema de Lagrange. Formemos la función $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$, donde α es un parámetro numérico pequeño (fig. 86). Esta función satisface las mismas condiciones de frontera que $y(x)$.

Sustituyéndola en la funcional, obtenemos la función de α:

$$I(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x) + \alpha \cdot \eta(x), y'(x) + \alpha \cdot \eta'(x)]\,dx.$$

Cualquiera $\varepsilon > 0$ que sea dada la función $y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$ está en el entorno ε (hasta el de primer orden) de la línea $y(x)$, para todos los valores del parámetro α suficientemente próximos a cero. Por consiguiente, si $y(x)$ da el extremo a la funcional I, entonces la función $I(\alpha)$ debe tener extremo cuando $\alpha = 0$ y por eso su derivada debe anularse cuando $\alpha = 0$. Derivando bajo el signo integral, obtenemos:

$$I'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)]\,dx.$$

Efectuemos la integración por partes en el segundo sumando. Haciedo $u = F_{y'}$ y $dv = \eta'(x)\,dx$, obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)\,dx = F_{y'} \cdot \eta(x)\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \cdot \frac{d}{dx}(F_{y'})\,dx.$$

Aquí el término extraintegral es igual a cero, ya que según los datos $\eta(x)$ se anula en los extremos del intervalo $[x_0, x_1]$. Por consiguiente,

$$I'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\left[F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'})\right]dx = 0.$$

Aplicando el lema de Lagrange, podemos afirmar que la curva $y(x)$ que da el extremo a la integral debe satisfacer la ecuación diferencial

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0,$$

o bien en la anotación desarrollada:

$$y'' \cdot F_{y'y'} + y' \cdot F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0.$$

Esta ecuación fue obtenida por *L.* Euler y suele llamarse ecuación de Euler. Es una ecuación diferencial de segundo orden con respecto a la función desconocida $y(x)$. La solución general de esta ecuación contiene dos constantes arbitrarias C_1 y C_2 que deben determinarse de las condiciones de frontera: $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. Las curvas integrales de la ecuación de Euler se denominan extremales. Para que una extremal pase por dos puntos: $M(x_0, y_0)$ y $N(x_1, y_1)$ debemos escoger las constantes C_1 y C_2 de modo que $\varphi(x_0, C_1, C_2) = y_0$ y $\varphi(x_1, C_1, C_2) = y_1$, donde $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ es la solución general de la ecuación de Euler.

2. Casos particulares de integrabilidad de la ecuación de Euler. Caso 1. La función F no depende de y', o sea, $F = F(x, y)$. Entonces en la ecuación de Euler los términos que contienen las derivadas parciales respecto a y' son iguales a cero y ella toma la forma $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Esta ecuación no es diferencial con respecto a la función desconocida $y(x)$. Define una o varias funciones que, hablando en general, no satisfacen las condiciones de frontera $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. Por lo tanto, en el caso general la solución del problema de variaciones en examen no existe. Sólo en casos especiales habrá una curva $y = y(x)$ que pase por los puntos $M(x_0, y_0)$ y $N(x_1, y_1)$ y sea la solución de la ecuación funcional $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

1197. Resolver $I[y(x)] = \int_0^1 (x \operatorname{sen} y + \cos y)\,dx, \quad y(0) = 0,$
$y(1) = \frac{\pi}{4}.$

Resolución. Aquí $F = x \operatorname{sen} y + \cos y$; la ecuación de Euler tiene la forma: $\frac{\partial F}{\partial y} = x \cos y - \operatorname{sen} y = 0, \Rightarrow y = \operatorname{arctg} x$. Esta ecuación satisface las condiciones de frontera.

1198. Resolver $I[y(x)] = \int_1^e (xe^y - ye^x)\,dx, \quad y(1) = 1, \quad y(e) = 1.$

Resolución. $F = xe^y - ye^x$; la ecuación de Euler será: $\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y - e^x$, $\Rightarrow y = x - \ln x$. La solución obtenida no satisface las condiciones de frontera.

Caso 2. F depende linealmente de y', o sea, $F = P(x, y) + y' \cdot Q(x, y)$. La ecuación de Euler tiene la forma:

$$y' \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - y' \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

La ecuación obtenida no es diferencial con respecto a la función incógnita $y(x)$ y, hablando en general, no tiene soluciones que satisfagan las condiciones de frontera dadas. Sin embargo, si respecto a ambas variables x e y $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, entonces la expresión $P\,dx + Q\,dy$ es la diferencial total y por eso la integral curvilínea

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (P + y' \cdot Q)\,dx = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P\,dx + Q\,dy$$

no depende del camino de integración. Por consiguiente, el valor de la funcional I es constante sobre todas las curvas admisibles y el problema de variaciones pierde el sentido.

1199. Resolver $I[y(x)] = \int_\alpha^\beta [(xy' + 1)e^y + x^2 - y^2y']\,dx, \; y(\alpha) = a,$ $y(\beta) = b$.

Resolución. Aquí F depende linealmente de y':

$$F = (xy' + 1)e^y + x^2 - y^2y' = (xe^y - y^2)y' + (x^2 + e^y), \text{ o sea,}$$

$$P(x, y) = x^2 + e^y, \quad Q(x, y) = xe^y - y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La expresión $(x^2 + e^y)\,dx + (xe\ \ - y^2)\,dy$ es la diferencial total y, por consiguiente, la integral no depende de la ruta de integración:

$$I[y(x)] = \int_{(\alpha, a)}^{(\beta, b)} (x^2 + e^y)\,dx + (xe^y - y^2)\,dy = \int_{(\alpha, a)}^{(\beta, b)} d\left(xe^y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}x^3\right) =$$

$$= \left(xe^y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{(\alpha, a)}^{(\beta, b)} = \beta e^b - \alpha e^a + \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} + \frac{a^3 - b^3}{3}.$$

El valor de la funcional I es constante para todas las curvas $y(x)$ que pasan por los puntos (α, a) y (β, b) y el problema de variaciones no tiene sentido.

Caso 3. F depende solamente de y', o sea, $F = F(y')$. En este caso la ecuación de Euler tiene la forma $y'' \cdot F_{y'y'} = 0$. En particular, se obtiene la ecuación $y'' = 0$. Su solución general es $y = C_1x + C_2$. Aquí de extremales sirven las líneas rectas.

1200. Resolver $I[y(x)]=\int\limits_0 (y'^2+y'+1)\,dx$. $M(0,\ 1)$, $N(1,\ 2)$.

Resolución. Aquí $F=y'^2+y'+1$, $F_{y'}=2y'+1$, $F_y=0$, $F_{y'y'}=2$. La ecuación de Euler tiene la forma: $2y''=0$, $\Rightarrow y=C_1x+C_2$. Determinemos C_1 y C_2 a partir de la condición de paso de la extremal por los puntos M y N: $C_2=1$, $C_1+C_2=2$; $\Rightarrow C_1=1$, $C_2=1$. Ahora bien, de extremal sirve la recta $y=x+1$.

Caso 4. F depende solamente de x e y', o sea, $F=F(x,\ y')$. Puesto que en este caso $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, la ecuación de Euler será $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$ y su primera integral se halla inmediatamente: $\frac{\partial F(x,\ y')}{\partial y'}=C_1$. Despejando y' en esta ecuación e integrando, encontramos la solución general de la ecuación de Euler.

1201. Resolver $I[y(x)]=\int\limits_1^e (xy'^2-2y')\,dx$, $y(1)=1$, $y(e)=2$.

Resolución. $F=xy'^2-2y'$; $\frac{\partial F}{\partial y'}=2xy'-2=C_1$, $y'=\frac{C_1+2}{2x}$, $y=$
$=\frac{1}{2}(C_1+2)\ln x+C_2$.

Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos $1=C_2$, $2=\frac{1}{2}C_1+C_2+1$. De aquí, $C_1=0$, $C_2=1$. De extremal sirve la línea $y=\ln x+1$.

Caso 5. F depende solamente de y e y', o sea, $F=F(y,\ y')$. En este caso la ecuación de Euler será: $y''\cdot F_{y'y'}+y'\cdot F_{yy'}-F_y=0$.

Se halla fácilmente su primera integral. En efecto, examinemos la igualdad

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=y'\cdot F_y+y''\cdot F_{y'}-y''\cdot F_{y'}-y'^2\cdot F_{yy'}-y'\cdot y''\cdot F_{y'y'}=$$
$$=-y'(y''\cdot F_{y'y'}+y'\cdot F_{yy'}-F_y).$$

Si la función de y satisface la ecuación de Euler, entonces el segundo miembro se anula y $F-y'\cdot\frac{\partial F}{dy'}=C_1$ nos da la primera integral de la ecuación de Euler.

1202. (Problema sobre el área mínima de una superficie de revolución). Entre todas las curvas planas suaves que unen los puntos $A(x_0,\ y_0)$ y $B(x_1,\ y_1)$ hallar aquélla que girando alrededor del eje Ox forma la superficie de área mínima.

Resolución. El área de la superficie de revolución se expresa por la integral $S=2\pi\int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Aquí $F=y\sqrt{1+y'^2}$ y por eso la ecuación de Euler tiene la primera integral $y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$, o bien $y=C_1\cdot\sqrt{1+y'^2}$. Tomando $y'=\operatorname{sh} t$, se encuentra $y=C_1\operatorname{ch} t$. De aquí, $dx=\frac{dy}{y'}=\frac{C_1\cdot\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} t}\,dt=C_1\,dt$, $x=C_1t+C_2$. Por consiguiente, la curva buscada es la catenaria $y=C_1\cdot\operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$.

El problema tiene solución, siempre que las constantes arbitrarias se determinen del sistema de ecuaciones $\operatorname{ch}\frac{x_0-C_2}{C_1}=\frac{y_0}{C_1}$, $\operatorname{ch}\frac{x_1-C_2}{C_2}=\frac{y_1}{C_1}$.

1203. (Problema sobre la braquistocrona). Entre las líneas que unen dos puntos dados A y B hallar aquélla, moviéndose por la cual un cuerpo material libremente lanzado recorrerá el camino AB en el menor tiempo.

Resolución. Trazamos por los puntos A $(x_0, 0)$ y B (x_1, y_1) el plano vertical (fig. 87). Puesto que el punto pesado se mueve sin velocidad inicial, entonces

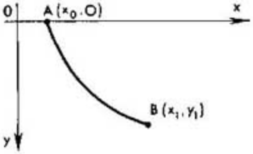

Fig. 87

basándonos en la ley de conservación de la energía, obtenemos

$$\frac{mv^2}{2}=mgy, \qquad y(x_0)=0,$$

donde m es la masa del punto, v es la velocidad y g es la aceleración de la gravedad. De aquí, $v=\sqrt{2gy}$. Por otra parte, $v=\frac{dS}{dt}=\sqrt{1+y'^2}\cdot\frac{dx}{dt}$. Entonces $dt=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gu}}\,dx$. Por lo tanto,

$$T(y)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx.$$

Para el caso dado la ecuación de Euler tiene la primera integral

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-y'\cdot\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C_1, \quad \text{o bien} \quad y=\frac{1}{C_1^2(1+y'^2)}.$$

Suponiendo $y'=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, tenemos $y=\frac{1}{2C_1^2}(1-\cos t)$. Pos consiguiente,

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot C_1^2}\,dt, \quad \text{o bien} \quad dx=\frac{1}{2C_1^2}(1-\cos t)\,dt,$$

$$x=\frac{1}{2C_1^2}(t-\operatorname{sen}t)+C_2.$$

De suerte que hemos obtenido las ecuaciones paramétricas de la cicloide

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2C_1^2}(t-\operatorname{sen} t)+C_2, \\ y=\dfrac{1}{2C_1^2}(1-\cos t). \end{cases}$$

Las constantes arbitrarias C_1 y C_2 se determinan de la condición de paso de la curva por los puntos A y B.

Caso 6. La función F depende solamente de y, o sea $F = F(y)$. En este caso la ecuación de Euler tiene la forma:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

1204. Resolver $I[y(x)]=\int\limits_0^1 (2e^y-y^2)\,dx,\ y(0)=1,\ y(1)=e.$

Resolución. $F = 2e^y - y^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2e^y - 2y$, $\Rightarrow y - e^y$. La última ecuación no tiene hasta las soluciones numéricas. En efecto, si $y < 0$, entonces $e^y > 0$; si $y > 0$, utilizamos el desarrollo $e^y = 1 + y + \dfrac{y^2}{2!} + \dots$ Por eso no hay extremales.

Caso 7. $F = p(x)\,y'^2 + q(x)\,y^2 + 2f(x)\cdot y$. La ecuación de Euler para este caso será $\dfrac{d}{dx}(py') - qy - f = 0$. De este modo, hemos determinado que la función $y(x)$ que da el máximo a la integral $I[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} [p(x)\,y'^2 + q(x)\,y^2 + 2f(x)\,y]\,dx$ debe satisfacer necesariamente la llamada ecuación diferencial conjugada de segundo orden $\dfrac{d}{dx}(Py') - qy - f = 0$. La solución general de esta ecuación contiene dos constantes arbitrarias. Por lo tanto, por dos puntos dados (x_0, y_0) y (x_1, y_1) se puede, hablando en general, trazar una curva que satisfaga la ecuación.

1205. Resolver $I[y(x)]=\int\limits_0^{\ln 2} (y'^2+2y^2+2y)\,e^{-x}\,dx,\ y(0)=y(\ln 2)=0.$

Resolución. Aquí $F = (y'^2 + 2y^2 + 2y)\,e^{-x}$. La ecuación de Euler será $\dfrac{d}{dx}(e^{-x}y') - 2e^{-x}y - e^{-x} = 0$. $y'' - y' - 2y = 1$, $\Rightarrow y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \dfrac{1}{2}$.

Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos $C_1+C_2=\dfrac{1}{2}$, $4C_1+\dfrac{1}{2}C_2=\dfrac{1}{2}$, $\Rightarrow C_1=\dfrac{1}{14}$, $C_2=\dfrac{3}{7}$.

Por consiguiente, $y=\dfrac{1}{14}e^{2x}+\dfrac{3}{7}e^{-x}-\dfrac{1}{2}$.

Resolver

1206. $I[y(x)]=\int\limits_0^1 (y\operatorname{sh} x-y^2\operatorname{ch} x)\,dx,\ y_0=0,\ y_1=1.$

1207. $I[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} e^y (1 + xy')\, dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$

1208. $I[y(x)] = \int\limits_0^1 y'^2\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

1209. $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (xy' - y'^2)\, dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{1}{4}.$

1210. $I[y(x)] = \int\limits_{-1}^{2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\, dx, \quad y(-1) = 1, \quad y(2) = 4.$

1211. $I[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 + 1)\, dx, \quad y(x_0) = y(x_1) = 0.$

1212. $I[y(x)] = \int\limits_0^{3\pi/2} (y^2 - 2y'^2)\, e^{-x}\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = e^{3\pi/4}.$

§ 3. Funcionales dependientes de las derivadas de orden superior

Examinemos ahora el caso cuando la integral contiene derivadas de la función buscada que son de orden superior al primero:

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx.$$

Al igual que anteriormente, construimos una curva próxima a la $y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$ efectuamos la sustitución en la integral y la derivación respecto a α y hacemos $\alpha = 0$. Obtenemos:

$$I'(0) = \int\limits_{x_0}^{x_1} [F_y \eta(x) + F_{y'} \eta'(x) + \ldots + F_{y^{(n)}} \eta^{(n)}(x)]\, dx.$$

Transformamos todos los sumandos del segundo miembro, salvo el primero, integrando por partes varias veces:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} F_{y^{(k)}}\, \eta^{(k)}(x)\, dx = \Big[F_{y^{(k)}} \eta^{(k-1)}(x) - \frac{d}{dx} F_{y^{(k)}} \eta^{(k-2)}(x) +$$

$$+ \ldots - (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} F_{y^{(k)}} \eta(x) \Big]_{x_0}^{x_1} +$$

$$+ (-1)^k \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}} \eta(x)\, dx.$$

Convengamos en que $\eta(x)$ y sus derivadas hasta el orden $n-1$ se anulan en los extremos, debido a lo cual desaparecen los términos extraintegrales. Igualando a cero $I'(0)$, obtenemos una condición que, en virtud del lema principal, nos lleva a la ecuación de Euler—Poisson:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0.$$

Esta es una ecuación diferencial de orden $2n$. Su solución general contiene $2n$ constantes arbitrarias y debemos tener todavía $2n$ condiciones de frontera que expresen la definición de los valores de la función y de sus derivadas hasta el orden $n-1$ en los extremos del intervalo. Precisamente, de estas condiciones de frontera se deduce que las magnitudes análogas para $\eta(x)$ deben anularse.

1213. Entre todas las funciones de la clase $C^{(2)}$ que satisfacen las condiciones de frontera: $y(0) = y(\pi) = 0$, $y'(0) = y'(\pi) = 1$ hallar aquélla que puede conceder el extremo a la funcional

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi} (16y^2 - y''^2 + x^2)\, dx.$$

Resolución. La ecuación de Euler—Poisson tiene la forma: $32y + (-1)^2 \times \times \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') = 0$, o bien $y^{(IV)} - 16y = 0$. La solución general será: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x$. Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = \frac{1}{2}$. Por consiguiente, $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$.

Hallar las extremales de las funcionales

1214. $I = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} y''^2\, dx$, $y(x_0) = y(x_1) = 0$, $y'(x) = y'(x_1) = 0$.

1215. $I = \int_0^1 (y''^2 + 2y'^2 + y^2)\, dx$, $y(0) = y(1) = 0$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = -\operatorname{sh} 1$.

§ 4. Funcionales dependientes de dos funciones de una variable independiente

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\, dx.$$

En este problema es necesario hallar las curvas $y = y(x)$, $z = z(x)$, que satisfagan las condiciones: $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ y $z(x_0) = z_0$, $z(x_1) = z_1$, que otorgan un valor mínimo a la integral I.

Procedemos igual que en el problema principal elemental. Por curvas próximas tomemos $y(x) + \alpha \cdot \eta_1(x)$ y $z(x) + \alpha \cdot \eta_2(x)$, donde $\eta_1(x)$ y $\eta_2(x)$

son funciones arbitrarias de la clase $C^{(1)}$, que se anulan sobre los extremos del segmento $[x_0, x_1]$.

Escribimos la variación de la funcional: $\delta I = \alpha \cdot I'(0)$. Obtenemos

$$\delta I = \alpha \cdot \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \eta_1(x) \left[F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) \right] + \eta_2(x) \left[F_z - \frac{d}{dx}(F_{z'}) \right] \right\} dx.$$

Puesto que $\delta I = 0$ para todas $\eta_1(x)$ y $\eta_2(x)$, entonces, tomando primeramente $\eta_2(x) = 0$ y $\eta_1(x)$ arbitraria, nos convencemos, al utilizar el primer lema, de que el factor de $\eta_1(x)$ es igual a cero; tomando, al contrario, $\eta_1(x) = 0$ y $\eta_2(x)$ arbitraria verificamos que el factor de $\eta_2(x)$ es igual a cero. De este modo, sobre el segmento $[x_0, x_1]$ deben cumplirse las condiciones:

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = F_z - \frac{d}{dx}(F_{z'}) = 0.$$

Este sistema de ecuaciones con respecto a las funciones buscadas $y(x)$ y $z(x)$ desempeña en este problema el mismo papel que la ecuación de Euler para una función incógnita $y(x)$.

1216. Hallar las extremales de la funcional $I = \int_0^{\pi} (y'^2 - 2y^2 + 2yz - z'^2)\, dx$ si $y(0) = z(0) = 0$, $y(\pi) = z(\pi) = 1$.

Resolución. Aquí el sistema de ecuaciones diferenciales para la funcional dada tiene la forma: $y'' + 2y - z = 0$, $z'' + y = 0$.

Eliminando z, obtenemos la ecuación $y^{(IV)} + 2y'' + y = 0$ cuya solución general será $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x(C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x)$. En virtud de las condiciones de frontera $C_1 = 0$, $C_3 = -\frac{1}{\pi} \Rightarrow y = C_2 \operatorname{sen} x + C_4 x \operatorname{sen} x - \frac{x}{\pi} \cos x$. Para z obtenemos $z = C_2 \operatorname{sen} x + C_4 (2 \cos x + x \operatorname{sen} x) + \frac{1}{\pi} (2 \operatorname{sen} x - x \cos x)$. Hallamos las constantes C_2 y C_4 a partir de las condiciones de frontera para z: $C_4 = 0$, C_2 es arbitraria. Entonces,

$$z = C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{\pi} (2 \operatorname{sen} x - x \cos x).$$

La familia de las extremales tiene la forma:

$$y = C_2 \operatorname{sen} x - \frac{x}{\pi} \cos x,$$

$$z = C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{\pi} (2 \operatorname{sen} x - x \cos x).$$

1217. Hallar las extremales de las funcionales

$I = \int_{1/2}^{1} (y'^2 - 2xyz')\, dx$, $y(1/2) = 2$, $z(1/2) = 15$, $y(1) = z(1) = 1$.

1218. $I=\int_1^2 (z'^2-xy'z)\,dx,\ y(1)=z(1)=1,$
$y(2)=-\frac{1}{6},\ z(2)=1/2.$

§ 5. Funcionales dependientes de las funciones de dos variables independientes

$$I=\iint_D F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Designemos $\frac{\partial z}{\partial x}=p, \frac{\partial z}{\partial y}=q$. Sea $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ una función de sus cinco argumentos, continua junto con sus derivadas hasta el segundo orden, inclusive, en cierto campo especial R de valores de las variables x, y, z y para todas las p y q finitas. Sea Γ una curva espacial cerrada cuya proyección sobre el plano xOy es un contorno cerrado simple C, que acota la región D. La ecuación de la superficie S que está situada en el campo R y pasa por la curva Γ la tomamos en la forma $z=f(x,\ y)$, donde la función $f(x,\ y)$, continua junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, se llamará admisible.

La integral doble $I=\iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy$ tiene un valor finito determinado para cada superficie S admisible. Se plantea el problema de determinar una superficie $z=f(x,\ y)$ para la cual la integral tenga el valor mínimo en comparación con las integrales tomadas sobre las superficies admisibles próximas $z=f(x,\ y)+\alpha\cdot\eta(x,\ y)$, donde $\eta(x,\ y)$ es una función arbitraria, continua en la región D junto con sus derivadas $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ y que se anula sobre el contorno C. Entonces la función $I(\alpha)=\iint_D F\Big((x,\ y,\ f(x,\ y)+\alpha\cdot\eta(x,\ y),$ $\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}+\alpha\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big)\,dx\,dy$ debe alcanzar el mínimo cuando $\alpha=0$. En tal caso la primera variación $\delta I=\alpha\cdot I'(0)$ debe ser igual a cero. Derivando $I(\alpha)$ bajo el signo integral y poniendo allí $\alpha=0$, encontramos

$$\delta I=\alpha\cdot\left[\frac{dI}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}=\alpha\cdot\iint_D\left[\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\eta(x,\ y)+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]dx\,dy.$$

Transformamos los últimos dos sumandos por la fórmula de Green

$$\left(\iint_D\left(\frac{Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_C P\,dx+Q\,dy\right):$$

$$\iint_D\left(\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\cdot\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\cdot\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]dx\,dy-$$

$$-\iint_D \eta\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]dx\,dy=$$

$$=\int_C\left(\eta\cdot\frac{\partial F}{\partial p}\,dy-\eta\cdot\frac{\partial F}{\partial q}\,dx\right)-$$

$$-\iint_D \eta\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]dx\,dy.$$

La integral de contorno obtenida es igual a cero, puesto que según la condición $\eta(x, y)$, sobre el contorno C se anula, y por eso, sustituyendo en la expresión para δI los dos últimos términos por su expresión nueva, encontramos

$$\delta I=\alpha\cdot\iint_D \eta(x, y)\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]dx\,dy.$$

Con ello $\delta I = C$ para toda $\eta(x, y)$ que sea continua junto con sus derivadas parciales en la región D e igual a cero en el contorno C, para la expresión $\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)$, han sido observadas todas las condiciones del segundo lema.

Por consiguiente, $\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dF}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)=0$ (ecuación de Euler—Ostrogradski). Los razonamientos precedentes son también válidos por completo para la integral triple, adicionándose sólo en la ecuación un término más.

1219. (Problema de Plateau). Hallar la superficie con el área mínima, que pasa por una curva Γ dada en el espacio.

Resolución. El problema se reduce a la determinación del mínimo de la integral $\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$. Aquí $F=\sqrt{1+p^2+q^2}$.

Para este caso la ecuación de Euler—Ostrogradski adopta la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0.$$

Desarrollando esta expresión, hallamos

$$r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqS=0, \quad \text{donde} \quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad S=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

$$t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Hemos obtenido una ecuación en derivadas parciales que define las superficies mínimas. Esta ecuación muestra una propiedad geométrica de estas superficies, según la cual la suma de los radios principales de curvatura en cada punto de la superficie es igual a cero. Esta suma vale

$$R_1+R_2=\frac{(1+q)\,r+(1+p^2)\,t-2pqS}{it-S^2}\cdot\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

En efecto, si la función f satisface la ecuación hallada anteriormente para las superficies mínimas, entonces $R_1+R_2=0$.

1220. Escribir la ecuación de Euler-Ostrogradski para la funcional $I=\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$

1221. Escribir la ecuación de Euler-Ostrogradski para la funcional $I=\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2z\varphi(x,\ y)\right]dx\,dy.$

§ 6. Forma paramétrica

Al determinar el extremo de una funcional la exigencia consistente en que la curva buscada tenga la ecuación explícita $y=y(x)$ puede reducir considerablemente el problema. En una serie de casos es conveniente examinar en calidad de curvas admisibles las definidas en forma paramétrica: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. En este caso la funcional anteriormente examinada $I=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx$, adopta la forma $I=\int\limits_{t_0}^{t_1} F\left(x,\ y,\ \frac{\dot y}{\dot x}\right)\dot x\,dt$, donde $\dot x$ e $\dot y$ son derivadas con respecto a t; t_0 y t_1 son los valores del parámetro que corresponden a los extremos de las curvas. Notemos que la función subintegral no contiene la variable independiente t y es una función homogénea de primera medición de $\dot x$ y $\dot y$.

En general, examinemos cierta integral

$$I=\int\limits_{t_0}^{t_1} F(x,\ y,\ \dot x,\ \dot y)\,dt \tag{1}$$

en la cual la función subintegral no contiene la variable independiente t y es una función homogénea de primera medición de $\dot x$ e $\dot y$, o sea,

$$F(x,\ y,\ k\cdot\dot x,\ k\cdot\dot y)=k\cdot F(x,\ y,\ \dot x,\ \dot y). \tag{2}$$

Mostremos que la integral (1) no cambiará su forma al efectuar una sustitución cualquiera del parámetro t. Introducimos en lugar de t un otro parámetro τ, haciendo $\tau=\tau(t)$, además, consideramos $\tau'(t)>0$, de modo que al crecer t se incrementa también τ. Puesto que $y'_t=y'_\tau\cdot\tau'_t$, $x'_t=x'_\tau\cdot\tau'_t$, $dt=t'_\tau=d\tau\ \frac{d\tau}{\tau'}$, entonces, transformando la integral (1) de modo que se introduzca la variable τ, obtenemos:

$$I=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} F(x,\ y,\ \tau'_t\cdot x'_\tau,\ \tau'_t\cdot y'_\tau)\,\frac{d\tau}{\tau'_t}.$$

Usando la fórmula (2), tenemos

$$I=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} F(x,\ y,\ x'_\tau,\ y'_\tau)\,d\tau.$$

Con la representación paramétrica, la distancia entre las curvas se determina independientemente de la selección del parámetro t. En efecto, la curva l_1 se encuentra en el entorno ε de orden nulo de la curva l_2, si entre l_1 y l_2 se puede establecer una correspondencia biunívoca y recíprocamente continua tal, que la distancia entre los puntos correspondientes no exceda de ε. De un modo análogo puede ser determinada la proximidad ε de primer orden.

Pasando a la deducción de la condición necesaria del extremo, supongamos que cierta curva l definida por las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$ da el extremo a la integral I. Tomemos una curva, próxima a l, definida por las ecuaciones $x = x(t) + \alpha_1 \cdot \eta_1(t)$, $y = y(t) + \alpha_2 \cdot \eta_2(t)$, además, consideramos correspondientes los puntos que se obtienen para el mismo valor del parámetro t. Sustituyendo las ecuaciones de la curva próxima en la integral (1) e igualando a cero las derivadas respecto a α_1 y α_2 cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, obtenemos, al igual que antes, que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ deben satisfacer, cualquiera que sea la selección del parámetro t, el sistema de dos ecuaciones de Euler:

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 \quad \text{y} \quad F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0. \tag{3}$$

Estas ecuaciones no contienen en forma explícita el mismo parámetro. Además, una de las funciones, $x(t)$ o $y(t)$ puede considerarse arbitraria. En efecto, sustituyendo el parámetro, obtenemos las ecuaciones de la curva l: $x = x[t(\tau)]$, $y = y[t(\tau)]$. En virtud de la arbitrariedad de la selección de la función $t(\tau)$ podemos considerar a una de las funciones $x[t(\tau)]$ o $y[t(\tau)]$ función arbitraria de τ. Debido a esta circunstancia tenemos derecho esperar que las dos ecuaciones de (3) se reducen a una. Demostremos esto.

Se sabe que si la función $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ es homogénea en cuanto a las variables $\dot{x}$ e $\dot{y}$, entonces para ella tiene lugar la identidad

$$F = \dot{x} F_{\dot{x}} + \dot{y} F_{\dot{y}}.$$

Derivando ambos miembros de esta identidad por turno, con respecto a las variables x, y, $\dot{x}$ e $\dot{y}$, obtenemos

$$\begin{aligned} F_x &= \dot{x} F_{x\dot{x}} + \dot{y} F_{x\dot{y}}; \quad & F_y &= \dot{x} F_{y\dot{x}} + \dot{y} F_{y\dot{y}}; \\ 0 &= \dot{x} F_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y} F_{\dot{x}\dot{y}} \quad & 0 &= \dot{x} F_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y} F_{\dot{y}\dot{y}}. \end{aligned} \tag{4}$$

De las dos últimas igualdades hallamos

$$\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}} = \frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2} = F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \tag{5}$$

donde por F_1 se designa la magnitud total de tres relaciones escritas. Retornando a las ecuaciones (3) y escribiendo en ellas las derivadas con respecto a t, obtenemos:

$$F_x - \dot{x} F_{x\dot{x}} - \dot{y} F_{y\dot{x}} - \ddot{x} F_{\dot{x}\dot{x}} - \ddot{y} F_{\dot{x}\dot{y}} = 0,$$

$$F_y - \dot{x} F_{x\dot{y}} - \dot{y} F_{y\dot{y}} - \ddot{x} F_{\dot{x}\dot{y}} - \ddot{y} F_{\dot{y}\dot{y}} = 0.$$

Sustituyendo en estas ecuaciones $F_{\dot{x}\dot{x}}$, $F_{\dot{x}\dot{y}}$ y $F_{\dot{y}\dot{y}}$ con ayuda de la fórmula (5) y F_x, F_y según las fórmulas (4), las reducimos a la forma siguiente:

$$\dot{y}T=0, \qquad \dot{x}T=0.$$

Aquí $T=F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y})(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})+F_{x\dot{y}}-F_{y\dot{x}}$.

Consideramos que $\dot{x}$ e $\dot{y}$ no se anulan simultáneamente, de modo que las dos últimas ecuaciones efectivamente se reducen a una:

$$T=F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y})(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})+F_{x\dot{y}}-F_{y\dot{x}}=0. \tag{6}$$

Recordando la expresión para el radio de curvatura de una curva plana, escribimos finalmente la ecuación (6) en la forma:

$$\frac{1}{R}=\frac{F_{x\dot{y}}-F_{y\dot{x}}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}F_1}. \tag{7}$$

1222. Hallar las extremales de la funcional

$$I=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+a^2(x\dot{y}-\dot{x}y)\right]dt \text{ (a es cierto número positivo).}$$

Resolución. Aquí $F=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+a^2(x\dot{y}-\dot{x}y)$ es función homogénea positiva de primer grado con respecto a $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Tenemos

$$F_{x\dot{y}}=a^2, \quad F_{\dot{x}y}=-a^2, \quad F_1=\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2}=\frac{1}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Por eso la ecuación (7) toma la forma $\frac{1}{R}=2a^2$. De este modo, las extremales son curvas con un radio constante de curvatura igual a $R=\frac{1}{2a^2}$, o sea, son arcos de las circunferencias de radio $\frac{1}{2a^2}$. En particular, son circunferencias completas si $x(t_0)=x(t_1)$ e $y(t_0)=y(t_1)$. Para hallar las ecuaciones de estas circunferencias es necesario formular ciertas condiciones de frontera para las curvas admisibles.

§ 7. Concepto de condiciones suficientes del extremo de una funcional

Hasta ahora, al examinar el problema sobre el valor extremal de la funcional $I=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')\,dx$, nos hemos limitado a hallar solamente las condiciones necesarias del extremo. Hemos determinado que las condiciones necesarias tienen la forma: $\delta I=0$. Sin embargo, no hemos planteado la cuestión acerca de si concedan en realidad o no las extremales a la funcional I un máximo o un mínimo, o sea, no hemos estudiado las condiciones suficientes del extremo. Se ha mostrado que sobre la familia de las curvas admisibles $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$ la funcional I se transforma en una función ordinaria del parámetro α y, por consiguiente, la condición $I'(\alpha)|_{\alpha=0} = 0$ es necesaria para que la funcional I alcance el extremo sobre la función $y(x)$. Por analogía con la función ordinaria se puede suponer que la función $y(x)$ concederá un mínimo a la funcional I, si se cumple la desigualdad $I''(\alpha)_{\alpha=0} > 0$ (en otras palabras, $\delta^2 I > 0$) y un máximo si se cumple la condición $I''(\alpha)|_{\alpha=0} < 0$ (o sea, $\delta^2 I < 0$).

Supongamos, pues, que la curva $y(x)$ es extremal de la funcional I. Puesto que

$$I'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x,\ y+\alpha\cdot\eta,\ y'-\alpha\cdot\eta')\,\eta - F_{y'}(x,\ y+\alpha\cdot\eta,\ y'\alpha\eta')\,\eta']\,dx,$$

entonces

$$I''(\alpha)|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} [F_{yy}\cdot\eta^2(x) + 2F_{yy'}\cdot\eta(x)\cdot\eta'(x) + F_{y'y'}\cdot\eta'^2(x)]\,dx.$$

Designemos para abreviar $F_{yy'} = P$, $F_{yy'} = Q$, $F_{y'y'} = R$. Entonces la condición supuesta del mínimo de la funcional se expresará por la desigualdad

$$\int_{x_0}^{x_1} [P\eta^2(x) + 2Q\eta(x)\,\eta'(x) + R\eta'^2(x)]\,dx > 0.$$

Adicionamos al primer miembro de esta desigualdad la integral auxiliar

$$\int_{0}^{x_1} [\eta^2(x)\,\omega'(x) + 2\eta(x)\,\eta'(x)\,\omega(x)]\,dx,$$

donde $\omega(x)$ es la función arbitraria de la clase $C^{\omega}[x_0, x_1]$. El valor de esta integral auxiliar es igual a cero, ya que

$$\int_{x_0}^{x_1} [\eta^2\omega' + 2\eta\eta']\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}(\eta^2\omega) \text{ y } \eta(x_0) = (x_1) = 0.$$

Entonces obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_1} [(P+\omega')\,\eta^2 + 2(Q+\omega)\,\eta\eta' + R\eta'^2]\,dx > 0.$$

Escogemos la función $\omega(x)$, de modo que $(Q+\omega)^2 = (P+\omega')R$, o sea, resolvemos con respecto a $\omega(x)$ la ecuación de Riccati. Entonces nos queda:

$$\int_{x_0}^{x_1} R\left[\eta' + \frac{Q+\omega}{R}\,\eta\right]^2 dx > 0$$

La última desigualdad se cumplirá si $R > 0$, o sea, $F_{y'y'} > 0$. La condición $F_{y'y'} > 0$ se llama condición reforzada de Legendre. Para el máximo la condición de Legendre tiene la forma: $F_{y'y'} < 0$.

En los manuales de cálculo variacional se muestra que la condición de Legendre $F_{y'y'} > 0$, en conjunto con algunas otras condiciones, asegura un mínimo débil a la integral I.

Respuestas

Capítulo I

6. $(e-1)(e^{\pi}-1)$. **7.** 5 **8.** 244/21. **10.** $\pi a^2/2$. **11.** $112\frac{8}{105}$.

12. $5(2\ln 2-1)/8$. **13.** $(\pi+1-2\sqrt{2})/4$. **14.** $-432/169$. **15.** 1. **16.** 26.

17. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{0}^{8} dy + \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y)\,dx$.

18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x, y)\,dx$. **19.** $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy$. **20.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{1} f(x, y)\,dx$.

21. $\int\limits_{0}^{1/2} dy \int\limits_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$.

22. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi-\operatorname{arcsen} y} f(x, y)\,dx$.

26. $2\pi^5$. **27.** $0{,}5\pi \ln 2$. **28.** $3\pi a^4/2$. **29.** 3π. **30.** $14\pi a^3/3$. **31.** 1/2. **32.** $0{,}5 \ln 3$. **37.** 1/6 unidades cuadradas. **38.** 64/3 unidades cuadradas **39.** $2\pi - 16/3$ unidades cuadradas. **40.** 5 unidades cuadradas. **41.** 125/18 unidades cuadradas. **42.** 1/2 unidades cuadradas. **43.** 27/2 unidades cuadradas. **44.** 4/3 unidades cuadradas **45.** $8 - \pi$ unidades cuadradas. **46.** 5π unidades cuadradas. **47.** $2\pi - 8/3$ unidades cuadradas. **51.** $8\pi - 32\sqrt{2/3}$ unidades cúbicas. **52.** 17/5 unidades cúbicas. **53.** $\pi/4$ unidades cúbicas. **54.** 88/105 unidades cúbicas. **55.** 40/3 unidades cúbicas. **56.** 32/9 unidades cúbicas. **57.** 90 unidades cúbicas. **58.** 12 unidades cúbicas. **59.** 79/60 unidades cúbicas. **60.** 4 unidades cúbicas. **61.** $a^2b/3$.**66.** $\pi(5\sqrt{5}-1)/24$ unidades cuadradas.

67. $16\pi/3$ unidades cuadradas. **68.** $2\pi\sqrt{2}$ unidades cuadradas. **69.** $5/6 + (\sqrt{2}/4)\cdot\ln(3+2\sqrt{2})$ unidades cuadradas. **70.** π unidades cuadradas.

71. 32 unidades cuadradas. **72.** $40\sqrt{2/3}$ unidades cuadradas. **77.** C (45/28; 279/70). **78.** $\bar{x} = (5/6)\, a$, $\bar{y} = 0$. **79.** $\bar{x} = (3/5)\, a$, $\bar{y} = (3/8)\, a$. **80.** $\bar{x} = \bar{y} = 128a/(105\pi)$. **81.** $\bar{x} = \bar{y} = 9/20$. **82.** $\bar{x} = (6/5)\, p$, $\bar{y} = 0$. **83.** $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 4/3$). **84.** 2,4. **85.** 8/3. **86.** 4096/105. **87.** $\pi ab^3/4$. **88.** $(2/3)\, a^4k$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. **89.** $2\pi r^2\delta$. **90.** $ab^3/12$. **95.** $abc\,(a^2 + b^2 + c^2)/3$. **96.** 1/48. **97.** 1/364. **98.** $ab^2\,(10b - 3a)/12$. **99.** $3\pi/2$.

100. $(1/5)\,\pi a^5\,(18\sqrt{3} - 97/6)$. **101.** $16\,\pi/3$. **102.** $4\pi r^3/3$. **103.** $8\pi\,(2\sqrt{2} - 1)/9$. **106.** $\pi/6$ unidades cúbicas. **107.** $8\,(3\pi - 4)/9$ unidades cúbicas. **108.** $3a^4/2$. **109.** $\bar{x} = \bar{y} = 2/5$, $\bar{z} = 7/30$. **110.** $\bar{x} = \bar{y} = 3$, $\bar{z} = 45/32$. **111.** (6/5; 12/5; 8/5). **112.** $2a^5/3$. **120.** $(\pi/2)\ln(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})$. **121.** $(\pi/2)\ln(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})$. **122.** $\pi/2\, \ln(1+\lambda)$. **123.** $\pi\alpha$. **124.** $\ln(\beta/\alpha)$. **125.** $(\pi/2)\ln(1+\lambda)$. **126.** $\ln(\lambda+1)/(\mu+1)$. **127.** $\sqrt{\pi}\,(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$. **128.** $\pi(\sqrt{1-\lambda^2} - 1)$. **137.** 1,1645. **138.** −4,5781. **139.** 2,4240. **140.** $15\sqrt{\pi/8}$. **141.** 0,1225. **142.** 0,8934 **143.** ∞. **144.** $-2\pi\sqrt{3/7}$. **145.** $\pi\sqrt{3/5}$. **146.** $-4\pi\sqrt{2}$. **147.** $4\pi\sqrt{2/5}$. **154.** 1/24. **155.** $3\pi/16$. **156.** 8/105. **157.** $9\pi/4096$.

158. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\right)}$. **159.** $\dfrac{\pi\,(2n-1)!!}{2\,(2n+2)!!}\, a^{2n+2}$

160. $\dfrac{5}{256}\,\pi$. **161.** $\dfrac{\pi}{b\,\mathrm{sen}\,(a\pi/b)}$. **162.** $\pi/\mathrm{sen}\, a\pi$. **163.** $2\pi/\sqrt{3}$.

164. $5\pi/32$. **165.** π. **166.** 1/364. **167.** $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\cdot\Gamma(m)}{k\cdot\Gamma\left(\frac{n}{k}+m\right)}$ **168.** $\pi/\sqrt{2}$.

169. $\dfrac{\pi}{n\,\mathrm{sen}\,(\pi/n)}$. **170.** $\pi/2\,(2\sqrt{2})$. **171.** $\pi/(2\,\mathrm{sen}\, n\pi)$

172. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\;\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$.

Capítulo II

177. 67/6. **178.** 136/3. **170.** 2152/45. **180.** 4. **181.** 12. **182.** 17,5. **183.** π. **184.** 6/35. **185.** 2. **186.** $\bar{x} = (3\ln 2 - 1)/3$, $\bar{y} = (16\ln 2 + 15)/24$. **187.** $\bar{x} = 2/5$, $\bar{y} = -1{,}5$, $\bar{z} = 1/2$.

188. $2a^2$. **189.** $(\sqrt{a^2+b^2}/ab)\,\mathrm{arctg}\,(2\pi b/a)$.

190. $\sqrt{2}\,[\pi\sqrt{1+4\pi^2} + 0{,}5\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})]$. **191.** 1/6.

195. $U = e^{x+y} + \mathrm{sen}\,(x-y) + 2y + C$. **196.** $U = x - e^{x-y} + \mathrm{sen}\, x + \mathrm{sen}\, y + C$. **197.** $U = (1/3)\,x^3 - x^2y^2 + 3x + (1/3)\,y^3 + 3y + C$. **198.** $U = x^2 + y^2 - (3/2)\,x^2y^2 + 2xy + C$. **199.** $U = \mathrm{ch}\, x + x\,\mathrm{ch}\, y + y + C$.

200. $U = x\,\mathrm{arcsen}\, x - y\,\mathrm{arcsen}\, y + \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} - (1/2)\,x^2\ln y + C$. **201.** π^2 (en todos los casos). **202.** 0 (en ambos casos) **205.** $\displaystyle\iint_D \frac{2y\,(x-1)}{x^2+y^2}\times$

$\times\, dx\, dy$. **206.** 8. **209.** 1/3 unidades cuadradas. **210.** πab. **211.** 45/2 unidades cuadradas. **212.** 25/6 unidades cuadradas. **213.** $6\pi r^2$ **217.** $\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=$ $=(307-15\sqrt{5})/310$. **218.** $4\pi\,(1+6\sqrt{3})/15$. **219.** $(125\sqrt{5}-1)/420$.
228. 1/2. **229.** 1. **231.** 0. **232.** $12\pi a^5/5$. **233.** 0. **234.** $4\pi abc$. **235.** $6\pi a^2h$. **236.** $\pi R^2h\,(3R^2+2h^2)/10$. **237.** $3u$. **238.** $x+y+z$. **239.** πR^2h. **240.** 2π. **241.** πab. **242.** $-[(y-z)\,\mathbf{i}+(z-x)\,\mathbf{j}+(x-y)\,\mathbf{k}]$. **243.** $2\,(\mathbf{j}-\mathbf{k})$.

Capítulo III

271. $\frac{1}{11}+\frac{2}{102}+\frac{3}{1003}+\frac{4}{10004}+\ldots$ **272.** $\frac{1}{11}+\frac{1}{1111}+\frac{1}{111111}+$ $+\frac{1}{11111111}+\ldots$ **273.** $\frac{10^n}{2n+5}$. **274.** $\frac{2n-1}{2n}$. **275.** $\frac{2^n}{n!}$.
276. $\frac{(-1)^n}{2n+1}$. **277.** 1. **278.** 1. **279.** 1/12. **280.** m. **283.** Diverge. **284.** Converge.
285. Converge. **286.** Diverge. **287.** Converge. **288.** Diverge. **289.** Converge.
290. Diverge. **291.** Converge. **292.** Diverge. **293.** Diverge. **294.** Diverge.
295. Converge condicionalmente. **296.** Converge absolutamente. **297.** Diverge.
298. Converge condicionalmente. **299.** Converge absolutamente. **300.** Diverge.
301. Diverge (comparar con la serie del problema precedente). **302.** Converge.
303. Diverge. **304.** Converge. **305.** Converge. **306.** Diverge. **307.** Converge.
308. Converge absolutamente; **309.** Diverge. **310.** Converge absolutamente.
311. Diverge. **312.** Converge absolutamente. **313.** Converge condicionalmente.
314. $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\ldots$.**351.** $1-\frac{1}{1!}+\frac{4^2}{2!}=\frac{4^3}{3!}+\ldots$ **323.** En los puntos $x=1$ y $x=2$ diverge, en el punto $x=3$ converge. **324.** En el punto $x=1$ diverge, en el punto $x=2$ converge. **325.** $0<x<+\infty$. **326.** $1<x<$ $<+\infty$. **327.** $-\infty<x<+\infty$. **331.** Converge uniformemente. **332.** Sí. **333.** Sí. **334.** No, la serie diverge para todo valor de x. **346.** $-\infty<x<+\infty$. **347.** $3\leqslant$ $\leqslant x<5$. **348.** $1<x<3$. **349.** La serie converge sólo en el punto $x=0$. **350.** La serie converge cualquiera que sea el valor de x. **351.** $-1<x<1$. **352.** $-2\leqslant x<2$. **353.** $-3<x<3$. **354.** $-1<x<3$. **355.** $-1\leqslant x\leqslant 1$. **356.** $a/(a-x)^2$. **357.** $a\ln a/(a-x)-x$. **358.** $2a/(a-x)^3$. **359.** $-2x/(1+x^2)^2$
365. $1+x\ln 3+\frac{x^2\ln^2 3}{2!}+\frac{x^2\ln^3 3}{3!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty)$. **366.** $1-$ $-\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{3!}-\frac{8x^3}{3!}+\ \ldots\ (-\infty<x<+\infty)$. **367.** $1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4+$ $-\frac{2^6}{6!}x^6+\ldots(-\infty<x<+\infty)$. **368.** $\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6+\frac{2^7}{8!}x^8+\ldots$ $\ldots(-\infty<x<+\infty)$. **369.** $\ln a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\ldots(-a<x\leqslant$ $\leqslant a)$. **370.** $\sqrt{a}\left[1+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{(2a)^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot x^3}{(2a)^3\cdot 3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^4}{(2a)^4\cdot 4!}+\ldots\right](-a<x\leqslant$ $\leqslant a)$. **370a.** $f(x,\,y)=12+15\,(x-2)+6\,(x-2)^2+3\,(x-2)\,(y-1)-$ $-6\,(y-1)^2+(x-2)^3-2\,(y-1)^3$. **370b.** $f(x,\,y)=-4+13\,(x-1)+$ $+5\,(y+1)+11\,(x-1)^2+2\,(x-1)\,(y+1)-(y+1)^2+4\,(x-1)^3$.
370c. $f(x,\,y)=4+8\,(x-1)-15\,(y+1)+5\,(x-1)^2+9\,(y+1)^2$.
370d. $f(x,\,y)=-1+(x+1)+(y-1)-(x+1)\,(y-1)-(y-1)^2+$

$+ (x+1)(y-1)^2 + (y-1)^3 + 0(\rho^3)$, $\rho = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$.
370e. $f(x, y) = 1 + (x-1) - y - (x-1)\,y + \frac{1}{2}\,y^2 + 0(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. **370f.** $f(x, y) = -1 + (x+1) + y^2 - (x+1)\,y^2 + 0(\rho^3)$, $\rho = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$. **371.** $1 + \frac{2}{2!}\cdot x^4 + \frac{2^3}{4!}\cdot x^8 + \frac{2^5}{6!}\cdot x^{12} + \frac{2^7}{8!} \times x^{16} + \dots$ $(x < |\infty|)$. **384.** 2,71828. **385.** 0,60653. **386.** 0,1564. **387.** 1,0453. **388.** 1,0196. **389.** 5,196 **390.** −0,0202. **391.** 0,0953. **392.** 1,0986. **393.** 2,3026. **394.** 0,4636. **395.** 3,142. **400.** 1/3. **401.** 1. **402.** 0,1996. **403.** 0,102. **412.** 2, −2, $2\sqrt{2}$, $-\pi/4$. **413.** $z = 13\,(\cos 157°23' + i\,\text{sen}\,157°23')$. **414.** i. **415.** 1. **416.** $2\cos 10°\,(\cos 10° + i\,\text{sen}\,10°)$. **417.** $-46 + 9i$. **418.** $(249/1025) - (68/1025)\,i$. **419.** $(5/169) + (12/169)\,i$. **420.** $5{,}831\cos(-30°58') + i\,\text{sen}\,(-30°58')$. **421.** $\sqrt{2}\,(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°)$. **422.** $(\sqrt{2}/2) + (\sqrt{2}/2)\,i$. **423.** $\cos(-150°) + i\,\text{sen}\,(-150°) = -(\sqrt{3}/2) - (1/2)\,i$. **424.** $\cos 22°30' + i\,\text{sen}\,22°30' = 0{,}9239 + 0{,}3827i$; $\cos 112°30' + i\,\text{sen}\,112°30' = -0{,}3827 + 0{,}9239i$; $\cos 202°30' + i\,\text{sen}\,202°30' = -0{,}9239 - 0{,}3827i$; $\cos 292°30' + i\,\text{sen}\,292°30' = 0{,}3827 - 0{,}9239i$. **425.** $w_0 = 2\,(\cos 15° + i\,\text{sen}\,15°) = 1{,}9318 + 0{,}5176i$; $w_1 = 2\,(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $w_2 = 2\,(\cos 255° + i\,\text{sen}\,255°) = -0{,}5176 - 1{,}9318i$ **426.** $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\,\text{sen}^2\varphi + \text{sen}^4\varphi$, $\text{sen}\,4\varphi = 4\cos^3\varphi\,\text{sen}\,\varphi - 4\cos\varphi \times \text{sen}^3\varphi$. **428.** La circunferencia de radio R con centro en el punto $z = c$. **429.** 1) El conjunto de puntos del círculo limitado por la circunferencia $|z - c| = R$; 2) el conjunto de puntos del plano, que se sitúan fuera de la circunferencia $|z - c| = R$. **430.** 1) El conjunto de puntos del semiplano situado a la derecha del eje imaginario; 2) el conjunto de puntos del semiplano situado debajo del eje real. **436.** $S = 1/4 - i$. **437.** Converge. **438.** Diverge. **440.** La serie converge sobre todo el plano. **441.** La serie converge sólo en el punto $z = 1 + i$. **446.** $2e^{\pi i/6}$. **447.** $e^{-\pi i/2}$. **448.** −1. **450.** $(3/4)\,\text{sen}\,x - (1/4)\,\text{sen}\,3x$. **451.** $i^i = e^{-\pi/2 + 2k\pi}$ $(k \in Z)$. **456.** $f(x) = -2\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\text{sen}\,mx}{m}$. **457.** $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}$. **458.** $f(x) = \frac{2}{\pi}\,\text{sh}\,\pi\left[\frac{1}{2} + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2+1} \times (\cos mx - m\,\text{sen}\,mx)\right]$ **459.** $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{12}{m^3} - \frac{2\pi^2}{m}\right)\text{sen}\,mx$.

460. 1) $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\,x}{(2m+1)^2}$; 2) $f(x) = 2\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,2mx}{m}$. **461.** $f(x) = \frac{4h}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\text{sen}\,(2m+1)\,x}{2m+1}$. **462.** $f(x) = \frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) + \left(\frac{\text{sen}\,x}{1} - \frac{\text{sen}\,2x}{2} + \frac{\text{sen}\,3x}{3} - \dots\right)$. **463.** $f(x) = 2\pi \times \left(\frac{\text{sen}\,x}{1} - \frac{\text{sen}\,2x}{2} + \frac{\text{sen}\,3x}{3} - \dots\right) - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\text{sen}\,x}{1^3} + \frac{\text{sen}\,3x}{3^3} + \frac{\text{sen}\,5x}{5^3} + \dots\right)$.

464. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\operatorname{sen} mx}{m}$. 465. $-\frac{4}{\pi}\times$ $\times\left[\frac{\operatorname{sen} x}{2^2-1}+\frac{3\operatorname{sen} 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\operatorname{sen} 5x}{2^2-5^2}+\dots\right]$. 466. $\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\operatorname{sen} m\pi x}{m}$.

467. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}$. 471. $F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{4}{1-4z^2}\cos\pi z$.

472. $F(z)=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{ze-\operatorname{sen} z-z\cos z}{e(1+z^2)}$. 473. $f_c(z)=\frac{\operatorname{sen} z-\operatorname{sen}(z/2)}{z}\times$ $\times\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $f_s(z)=\frac{\cos(z/2)-\cos z}{z}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Capítulo IV

481. $y=\arccos e^{Cx}$. 482. $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$. 483. $(1+e^x)^3\operatorname{tg} y=8$. 484. $2\ln|\operatorname{sen} y|=e^{(x-1)^2}-1$. 485. $y^3/3+\pi/4=\operatorname{arctg} e^x$. 486. $\ln|\operatorname{tg} y|=4(1-\cos x)$. 487. $2^x-2^y=3/32$. 488. $y=e^{\pm 1/(2\sqrt[4]{x+1})}$. 489. $2(x-2)=\ln^2 y$. 490. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$. 491. $(1-\sqrt{1-x^2})(1-\sqrt{1-y^2})=Cxy$. 492. $2\operatorname{sen} x+\ln|\operatorname{tg}(y/2)|=C$. 493. $x^2+y\operatorname{sen} y+\cos y=C$. 494. $y=\ln\operatorname{tg}(e^x+\pi/4-1)$. 495. $y=\ln\operatorname{tg}(\operatorname{ch} x+C)$. 496. $y=a\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x/a)+C)$; la respuesta se puede escribir también en la forma $y\sqrt{a^2-x^2}-x\sqrt{a^2-y^2}=C_1$. 497. $x+y+2\ln x-\ln y=2$. 498. $3\operatorname{arctg} x^2+2\operatorname{arctg} y^2=\pi/2$. 499. $x+y-2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\ln|\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}-1)|=C$. 500. $\sqrt{2}\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y-\cos y=0$. 501. $\operatorname{tg}(y/2)=C[\operatorname{tg}(y/2)+1][1-\operatorname{tg}(x/2)]$. 502. $(3/2)\ln(y^2+4)+\operatorname{arctg}(y/2)=\sqrt{x^2+4x+13}-\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+13})+C$. 503. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=1$. 504. $y=\operatorname{arctg} C(1-e^x)^3$. 505. $y=C/x$. 506. $A_t=A_0e^{-kt}$. 507. 1) $\approx 56{,}6$ g. 2) $\approx 7{,}84$ h. 508. $\approx 18{,}4$ min. 509. $t=2\pi\operatorname{tg}^2\alpha(H^{5/2}-h^{5/2})/(5\sigma\omega\sqrt{2g})$; $T=2\pi\operatorname{tg}^2\alpha H^{5/2}/(5\sigma\omega\sqrt{2g})\approx 844$ s $\approx 14{,}1$ min. 510. $\approx 4{,}6$ min. 516. $Cx=e^{\cos(y/x)}$. 517. $y^2=Cxe^{-y/x}$. 518. $\ln x=(y/x)[\ln(y/x)-1]+C$. 519. $y^2=4x^2\ln Cx$. 520. $y=x\operatorname{arcsen} x$. 521. $1+\operatorname{sen}(y/x)=Cx\cos(y/x)$. 522. $\operatorname{arctg}(0{,}5y/x)-2\ln|x|=\pi/4$. 523. $y^2=x^2\ln Cx^2$. 524. $\operatorname{arctg}(y/x)=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. 525. $y=-x\ln|1-\ln x|$. 526. $(y/x)\cdot\operatorname{arctg}(y/x)=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. 527. $x^5+10x^3y^2+5xy^4=1$. 528. $16xy=(y+4x-Cx^2)^2$. 529. $\ln|y|-\cos(3x/y)=C$. 530. $y=\pm x\sqrt{C^2x^2-1}$. 531. $y-1=C(x-1)$. 534. $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0$. 535. $x^2+xy-y^2-x+3y=C$. 536. $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$. 537. $x^2-y^2+2xy-4x+8y-6=0$. 541. $(1/2)x^2+x\operatorname{sen} y-\cos y=C$. 542. $xy+e^x\operatorname{sen} y=C$. 543. $(1/2)x^2y+x\operatorname{sen} y=C$. 544. $(1/3)x^3+xy^2+xy+e^y=1$. 545. $ye^{x^2}+x\ln y=1$. 546. $(1+x)\operatorname{sen} y+(1-y)\operatorname{sen} x=C$. 547. $x^3\ln y+2y(x+1)=C$. 548. $x^3+3y+3x\operatorname{sen} y=C$. 549. $ye^x+(1/2)y^2=C$. 550. $x^2+y^2+2e^x\operatorname{sen} y=C$. 551. $x\ln y+y^3\cos 5x=e^3$.

552. $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + x^2 y + y \operatorname{arctg} y - (1/2) \ln (1+y^2) + y = C$. 553. $x^3 y - \cos x - \operatorname{sen} y = C$. 554. $e^{x+y} + x^3 + y^4 = 1$. 555. $x \operatorname{tg} y + y \operatorname{ctg} x = C$. 556. $\operatorname{arctg} (x/y) - xy + e^y = C$. 557. $y = Cx - \ln x - 1$; $\mu = 1/x^2$. 558. $y = x (C - \operatorname{sen} x)$; $\mu = 1/x^2$. 550. $x = y (C + y)$; $\mu = 1/y^2$. 560. $xy - \sqrt{1-y^2} = C$; $\mu = 1/\sqrt{1-y^2}$. 569. $y = x (\operatorname{sen} x + C)$. 570. $y = e^{-x^2} (x^2/2) + C)$. 571. $\cos x (x + C)/(1 + \operatorname{sen} x)$. 572. $y = a (x-1)/x^n$. 573. $y = \operatorname{arctg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} x}$. 574. $y = e^{-\operatorname{arcsen} x} + \operatorname{arcsen} x - 1$. 575. $y = \operatorname{tg} (x/2) [(1/2) x + (1/4) \operatorname{sen} 2x + C]$. 576. $y = (1/2) x^2 \ln x$. 577. $y = -\cos x$. 578. $x = Cy + y^2$. 579. $y = \cos 3x [1 - (2/3) \cos 3x]$. 580. $x = Cy^2 - 1/y$. 581. $x = Cy^2 + y^4/2$. 582. $y^{-1/3} = Cx^{2/3} - (3/7) x^3$. 583. $y = (x-1)/(C-x)$. 584. $y^{-1/2} - \operatorname{tg} x = (\ln \cos x + C)/x$. 585. $y^{-4} = x^3 (e^x + C)$. 586. $y = e^{-x} [(1/2) e^x + 1]^2$. 587. $y = \sec x/(x^3 + 1)$. 588. $x = 1/[y (y + C)]$. 589. $y = \sec^2 x/(\operatorname{tg} x - x + C)$. 590. $x^2 + y^2 = e^{-y}$. 594. $x = p \operatorname{sen} p$, $y = (p^2 - 1) \operatorname{sen} p + p \cos p + C$. 595. $x = e^p + C$, $y = e^p (p-1)$, o bien $y = (x - C) [\ln (x - C) - 1]$. 596. $x = 2 (\ln p - p)$, $y = 2p - p^2 + C$. 597. $x = \ln [(\sqrt{1+p^2} - 1)/p] + p/\sqrt{1+p^2} + C$, $y = p/\sqrt{1+p^2}$. 598. $x = 2p + 3p^2$, $y = 2p^3 + p^2 + C$. 599. $x = p (1 + e^p)$, $y = 0{,}5p^2 + (p^2 - p + 1) e^p + C$. 600. $x = e^{2p} (2p^2 - 2p + 1)$, $y = e^{2p} (2p^3 - 3p^2 + 3p - 1{,}5) + C$. 601. $x = 0{,}5 \ln^2 p + \ln p + C$, $y = p \ln p$. 604. La solución general es $y = Cx + \sqrt{b^2 + a^2C^2}$; La solución singular, $\begin{cases} x = -a^2p/\sqrt{b^2+a^2p^2}, \\ y = b^2/\sqrt{b^2+a^2p^2}, \end{cases}$ o bien $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 605. La solución general es $y = Cx - 1/C$; la solución singular, $\begin{cases} x = -1/p^2, \\ y = -2/p, \end{cases}$ o bien $y^2 = -4x$. 606. La solución general es $y = Cx + C (1 - C)$; la solución singular, $\begin{cases} x = 2p - 1 \\ y = p^2, \end{cases}$ o bien $y = \frac{1}{4} (x+1)^2$. 607. La solución general es $y = Cx + C^2 + 1$; la solución singular, $\begin{cases} x = -2p, \\ y = 1 - p^2, \end{cases}$ o bien $y = 1 - \frac{x^2}{4}$. 608. La solución general es $\begin{cases} x = C (p + 1), \\ y = Cp^2/2, \end{cases}$ o bien $y = \frac{(x-C)^2}{2C}$; las soluciones singulares son $y = 0$, $y = -2x$. 610. $y = (1/48) x^4 + (1/8) x^2 + (1/32) \cos 2x$. 611. $y = x \cos x - 3 \operatorname{sen} x + x^2 + 2x$. 612. $y = \ln \operatorname{sen} x + C_1x^2 + C_2x + C_3$. 613. $y = (1/3) \operatorname{sen}^2 x + C_1x + C_2$. 614. $y = -(x + 3) e^{-x} + (3/2) x^2 + 3$. 617. $y = (3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8)/24$. 618. $y = (\operatorname{arcsen} x)^2 + C_1 \operatorname{sarcsen} x + C_2$. 619. $y = \pm 4 [(C_1x + a^2)^{5/2} + C_2x + C_3]/(15C_1^2)$. 620. $y = (1 + C_1^{-2}) \times \ln (1 + C_1x) - C_1^{-1}x + C_2$. 621. $y = (x^3 - 3x^2 + 6x + 4)/6$. 624. $0{,}5 \times \ln (2y + 3) = C_1x + C_2$. 625. $y = e^{2x}$. 626. $\pm (x + C_2) = a \ln [(y + C_1 + \sqrt{(y + C_1)^2 - a^2})/a]$, o bien $y + C_1 = \pm a \operatorname{ch} (x + C_2)/a$. 627. $\ln y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. 628. $y = e^{(x+C_2)/(x+C_1)}$. 629. $\ln [C_1 (y + 1) - 1] = C_1 (x + C_2)$. 630. $x = \sqrt{y} - 0{,}5C_1 \ln (2\sqrt{y} + C_1) + C_2$. 633. $y = C_2e^{C_1x}$. 634. $y\sqrt{y^2 + C_1^2} + C_1^2 \ln (y + \sqrt{y^2 + C_1^2}) = \pm (-y^2 + 2C_1^2x + 3C_2)$. 635. $y = C_2x + C_3 \pm 4 (C_1x + a^2)^{5/2}/(15C_1^2)$. 636. $y = -\ln |1 - x|$. 636a. $y' = \pm$

$\pm\sqrt{\dfrac{k(y^2-1)}{2y}}$. 637. $y = -a \ln \cos (x/a)$. 638. $y = 1 + \ln \sec x$. 639. $s = \dfrac{m^2 g}{k^2}(e^{-kt/m} - 1) + \dfrac{mgt}{k}$. 642. $y = C_2 + (C_1 - C_2 x) \operatorname{ctg} x$. 643. $y = (1/2)\, x \ln^2 x + C_1 x \ln x + C_2 x$. 644. $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \operatorname{sen}^2 x$. 647. Sí. 648. Sí. 649. No. 650. Sí. 651. Sí. 652. No. 660. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. 661. $y = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x$. 662. $y = C_1 + C_2 e^{x}$. 663. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x}$. 664. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x} + C_4 x e^{x}$. 665. $y = (C_1 e^{xa\sqrt{2}/2} + C_2 e^{-xa\sqrt{2}/2}) \cos (xa\sqrt{2}/2) + (C_3 e^{xa\sqrt{2}/2} + C_4 e^{-xa\sqrt{2}/2}) \times \operatorname{sen} (xa\sqrt{2}/2)$. 666. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x$. 667. $y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$. 668. $y = xe^{5x}$. 669. $y = -(1/3)\, e^{x} \cos 3x$. 670. $y = 2 \operatorname{sen} (x/3)$. 671. $y = (5 - 2e^{-3x})/3$. 672. $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} 3x$. 673. $y = \operatorname{sen} x + (1/\sqrt{3}) \cos x$. 674. $x = C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t$, o bien $x = A \operatorname{sen} (\varphi_0 + \beta t)$, $\beta = \sqrt{a/m}$. 684. $y = (e^{5x} + 22e^{3x} + e^{x})/8$. 685. $y = 0{,}5x\,(x+2)\, e^{4x}$. 686. $y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x) + (14 \cos x + 5 \operatorname{sen} x)/102$. 687. $y = -(11/8) \cos x + 4 \operatorname{sen} x - (1/8) \cos 3x$. 688. $y = C_1 e^{1x} + C_2 e^{2x} + (24x^2 + 52x + 41)/64$. 689. $y = 4e^{x/2} - x - 4$. 690. $y = (1/8) \operatorname{sen} 2x - (1/4)(x \cos 2x - 1)$. 691. $y = C_1 + C_2 e^{4x} - (1/6) \cdot (2 \operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x)$. 692. $y = (1/16)(4x - \pi) \operatorname{sen} 2x$. 693. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-6x} + (1/144) \times (1 - 12x)\, e^{-2x}$. 694. $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} + x\,(ae^{\alpha x} - be^{\beta x})/(\alpha - \beta)$. 695. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - (1/2)\, x - (1/10)\, x \cos 2x + (2/25) \operatorname{sen} 2x$. 696. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} - (x^3/3 + x^2 + 2x)\, e^{4x}$. 697. $y = x \operatorname{ch} x$. 698. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + (1/4)\, x \operatorname{sh} 2x$. 699. $y = e^{x \cos \varphi}[C_1 \cos (x \operatorname{sen} \varphi) + C_2 \operatorname{sen} (x \operatorname{sen} \varphi) + C_2 \operatorname{sen} (x + \operatorname{sen} \varphi)] + \cos x$. 700. $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) - 0{,}5xe^{x} \times \cos x$. 701. $y = (1/8) \cos x - (1/8) \cos 3x - (1/6) \times \operatorname{sen} 3x + (\pi/12) \times \operatorname{sen} 3x$. 701a. $y = e^{2x}(5 \cos 2x - \operatorname{sen} 2x + 6 \operatorname{sen} x - 5 \cos x)$. 704. $m\ddot{x} + ax = A \operatorname{sen} \omega t$, $x = C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t + [A/(a - m\omega^2)] \operatorname{sen} \omega t$, si $\omega \neq \beta = \sqrt{a/m}$, $yx = C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t - [At/(2\beta m)] \cdot \cos \beta t$, si $\omega = \beta = \sqrt{a/m}$. 705. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - (1/\sqrt{2}) \cos x \ln |\cos x + \sqrt{\cos^2 x - 1/2}| + (1/\sqrt{2}) \times \operatorname{sen} x \operatorname{arc sen} (\sqrt{2} \operatorname{sen} x)$. 706. $y = C_2 e^{-3x} + (1/2)\, e^{-2x} \ln (1 + e^{2x}) - e^{-2x} + e^{-3x} \operatorname{arctg} e^{x}$. 707. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + (1/4) \operatorname{sen} 2x \ln \operatorname{tg} 2x$. 708. $y = C_1 \cos (x/2) + C_2 \operatorname{sen} (x/2) + 2x \operatorname{sen} (x/2) + 4 \cos (x/2) \times \ln \cos (x/2)$. 709. $t = (3/\sqrt{g}) \ln (17 + 12\sqrt{2})$ s. 713. $y = x\,(C_1 \cos \ln x + C_2 \operatorname{sen} \ln x)$. 714. $y = C_1 x + C_2 x^3 + (1/9) \times (9 \ln^2 x + 24 \ln x + 26)$. 715. $y = C_1 \cos \ln x + C_2 \operatorname{sen} \ln x - (1/3) \operatorname{sen} (2 \ln x)$. 716. $y = (\ln^2 x + 2 \ln x + 2)/(2x)$. 717. $y = (1/2)\, x^3 - (1/\ln 2)\, x^2 \ln x$. 719. $y = C_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2 \cdot 4} - \dfrac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots\right) = C_0 e^{-x^2/2}$ (la solución existe sobre todo el eje numérico). 720. $y = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2x)^n}{4 \cdot n!} = \dfrac{1}{4} e^{-2x} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{x}{2}$ (la solución existe sobre todo el eje numérico). 721. $y = C_0 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} + C_1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$ (la solución existe sobre todo el eje numérico). **722.** $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \ldots 2n}$ (la solución existe sobre todo el eje numérico) **723.** $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \ldots 4n(4n+1)}$ (la solución existe sobre todo el eje numérico. **726.** $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \frac{17x^3}{3!} + \ldots$. **727.** $y = \frac{x^2}{2!} + \frac{12x^5}{5!} + \ldots$. **728.** $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} + \ldots$. **729.** $y = 4\left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + 2(x-1) = 4e^{-x} + (2x-1)$. **730.** $y = 1 + x + \frac{3x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{34x^4}{4!} + \ldots$. **731.** $y = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{24}x^5 - \ldots$ (las derivadas sucesivas para $x=0$ están ligadas por la relación recurrente $y_0^{(n+2)} = -y_0^{(n)} + 2ny_0^{(n-1)}$. **734.** $J_1(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \ldots\right)$. **735.** $y = \frac{2}{3\sqrt{x}}\left[C_1 x^{3/2}\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 5} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} - \ldots\right) + C_2 x^{-3/2}\left(1 + \frac{x^2}{2 \cdot 1} - \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 1} + \ldots\right)\right]$. **736.** $y = C_1\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{2}{3} - k + 1\right)} + C_2\left(\frac{x}{2}\right)^{-2/3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{2}{3} + k + 1\right)}$. **740.** $x = 2e^{3t} - e^t$, $y = 2e^{3t} + e^t$. **741.** $x = C_1 + C_2e^{7t} - (3/49)\,t\,(7t+2)$, $y = -(2/3)\,C_1 + (1/2)\,C_2e^{7t} + (1/49)(14t^2 - 3t - 1)$. **742.** $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + (1/8)\,e^{3t}$, $y = -C_1e^t + C_2e^{-t} + (5/8)\,e^{3t}$. **743.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sh} x$, $z = C_1 \operatorname{sen} x - C_2 \cos x + \operatorname{sh} x$. **744.** $x = (1/4)\,(3e^t + 5e^{-t}) + (1/2)\,te^t - 1$, $y = (5/4)(e^t - e^{-t}) + (1/2)\,te^t - t$. **745.** $x = (1/3)\,t + 2$, $y = (2/3)\,t + 4$. **746.** $x = (C_1 + C_2t)\,e^t + (1/2)\cos t$, $y = [C_2(1-t) - C_1]\,e^t - 2\cos t - (1/2)\operatorname{sen} t$. **747.** $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$, $y = 3C_1e^{2t} - C_2e^{-2t}$. **748.** $x = t/3 + C_2/t^3$, $y = C_1e^t - t/3 - 2C_2/t^3$. **749.** $x = -[(1 + C_1)\,t + C_2]^{-1}$, $y = -C_1[(1 + C_1)\,t + C_2]^{-1}$. **750.** $x = C_1e^{-6t} + e^{2t} - (3/7)\,e^t$, $y = C_2e^{-t} - (4/5)\,C_1e^{-6t} + (9/14)\,e^t$. **751.** $x = e^{tm\sqrt{2}/2} \times [C_1 \cos(tm\sqrt{2}/2) + C_2 \operatorname{sen}(tm\sqrt{2}/2)] + e^{-tm\sqrt{2}/2} \times [C_3 \cos(tm\sqrt{2}/2) + C_4 \operatorname{sen}(tm\sqrt{2}/2)]$, $y = e^{tm\sqrt{2}/2} \times [C_1 \operatorname{sen}(tm\sqrt{2}/2) - C_2 \cos(tm\sqrt{2}/2)] + e^{-tm\sqrt{2}/2} \times [C_4 \cos(tm\sqrt{2}/2) - C_3 \operatorname{sen}(tm\sqrt{2}/2)$. **752.** $x^2 = C_1^2(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2)$, $y^2 = C_2^2(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2)$, $z^2 = C_3^2(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2)$. **758.** $x_1 = C_1e^{\alpha t} + C_2e^{-\alpha t}$, $x_2 = C_2e^{-\alpha t} - C_1e^{\alpha t}$. **759.** $x_1 = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}$, $x_2 = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$. **760.** $x_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}$, $x_2 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - C_3e^{-2t}$, $x_3 = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$. **761.** $x_1 = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $x_2 = C_1e^t - 3C_3e^{-t}$, $x_3 = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$. **762.** $x_1 = e^{12t}(C_1 \cos 5t + C_2 \operatorname{sen} 5t)$, $x_2 = e^{12t}(-C_1 \operatorname{sen} 5t + C_2 \cos 5t)$. **763.** $x_1 = 2C_1 \cos t +$

$+ 2C_3$ sen t, $x_2 = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)$ sen t. **764.** $x_1 = 2C_1e^{-t} + 2(4C_3 + C_2)\cos t - 2(4C_2 - C_3)$ sen t, $x_2 = -2C_1e^{-t} + 3(5C_2 + 3C_3) \times \cos t + 3(5C_3 - 3C_2)$ sen t, $x_3 = C_1e^{-t} + (7C_2 + 11C_3)\cos t + (7C_3 - 11C_2)$ sen t. **765.** $x = e^{at}(C_1t + C_2)$, $y = e^{at}(C_1t + C_2 - C_1)$. **766.** $x = -2e^t(C_1$ sen $2t - C_2\cos 2t)$, $y = e^t(C_1\cos 2t + C_2$ sen $2t)$. **767.** $x = e^t(C_1t + C_2)$, $y = e^t(C_1 - 2C_2 - 2C_1t)$.

Capítulo V

773. $P(A) = 0$ (el evento es imposible). **774.** 1/4. **775.** 1) 1; 2) 1/5; 3) 3/5. **776.** 499/1998. **777.** 1/406. **786.** 1) $a/(a+b+c)$; 2) $b/(a+b+c)$; 3) $c/(a+b+c)$; 4) $(a+b)/(a+b+c)$; 5) $(a+c/(a+b+c)$; 6) $(b+c)/(a+b+c)$. **787.** $bd(a+b)^{-1}(c+d)^{-1}$. **788.** $p_1 + p_2 - 2p_1p_2$. **789.** $1 - 3\alpha$. **790.** 1/3. **791.** $\approx 0{,}88$. **792.** 1) 22/145; 2) 51/145; 3) 72/145. **793.** 0,7. **794.** 0,375. **799.** 7/64. **800.** 21/32. **801.** 4/9. **802.** 27/128. **806.** 15. **808.** No, el problema siempre tiene solución, ya que $(m_0 + q)/p - (m_0 - p)/p = (p+q)/p = 1/p > 1$. **809.** El primer obrero, 114 artículos; el segundo, 112. **810.** 60. **815.** 1/3.

822

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

823

x_i	3	4	5	6	7
p_i	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

. **824.** 1) $a = 1/\pi$; 2) $P(a/2 < X < a) = 1/3$. **825.** $P(\pi < X < \infty) = 1/4$.

826. $a = 5$; $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 0{,}5(1 - \cos x), & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 1, & \text{si } x > \pi. \end{cases}$

827. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ 5/6, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

830

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078

$M(X) = 3{,}00$; $D(X) = 1{,}20$.

831. $\lambda = 1/4$; $M(X) = 16/15$; $\sigma_x = \sqrt{44/225} = 0{,}44$. **834.** $\overline{M} = 20$. **835.** $a = 0{,}75$; $\overline{M} = \mu = 3$. **838.** $P(3 < x < 5) = (5 - 3)\cdot(1/6) = 1/3$. **839.** 2/5. **842.** 0,000055. **843.** $M(X = m/n) = p$. $D(X) = pq/n$. **849e.** $M[X] = 0{,}4$. $D[X] = 0{,}16$, $\sigma[X] = 0{,}4$. **849f.** $P(0{,}15 < X < 0{,}6) = 0{,}3349$. **849g.** $M[X] = 4$. **849h.** $P(0{,}3 < T < \infty) = e^{-5\cdot 0{,}3} - e^{-1{,}5} = 0{,}2231$. **849i.** $F(24) = 0{,}3812$ es la probabilidad de que el elemento falle. $F(24) = 0{,}6188$ es la probabilidad de que el elemento no falle. **849j.** $R(1000) = e^{-0{,}002\cdot 1000} = e^2 = 0{,}1358$. **852.** 4,4%; el resultado obtenido no depende del valor numérico de m. **853.** 0,34; 0,14; 0,02; **854a.** 0,424. **854b.** 0,8185. **854c.** 0,9876. **854d.** $\delta = 0{,}49$ N. **854e.** 0,7328. **854i.** 0,018. **854j.** 0,091.

854k. 0,156.. **857.** $\alpha_1 = 4$; $\alpha_2 = 20$; $\alpha_3 = 116{,}8$; $\alpha_4 = 752$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 4$; $\mu_3 = 4{,}8$; $\alpha_4 = 35{,}2$; $S_k = 0{,}6$; $E_x = -0{,}8$. **858.** $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 7/6$; $\alpha_3 = 3/2$; $\alpha_4 = 31/15$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1/6$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 1/15$; $S_k = 0$; $E_x = -0{,}6$. **859.** $\lambda = 1/2$; $E_x = 3$.

864. $P\left(\left|\frac{m}{10\,000} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geqslant \frac{31}{36}$.

865. $P\left(\left|\frac{m}{50} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{5} \geqslant \frac{7}{8}\right.$. **866.** 3/4. **869.** 0,954. **870.** 61.

878. 1) $\lambda = 1/20$; 2) $m_x = 22$, $m_y = 41$; 3) $\sigma_x^2 = 56$, $\sigma_y^2 = 259$; 4) $r_{xy} = 0{,}56$. **879.** 1) $a = 24$; 2) $m_x = m_y = 2/5$; 3) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1/25$; 4) $r_{xy} = -2/3$. **880.** 1) $a = \sqrt[4]{2/\pi}$; 2) $m_x = m_y = 0$; 3) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1/(3\sqrt{2\pi})$; 4) $r_{xy} = 0$. **883.** $r_{xy} = 0{,}664$; $\overline{y}_x = 3{,}64x - 0{,}15$; $\overline{x}_y = 0{,}12y + 1{,}24$. **884.** $r_{xy} = 0{,}321$; $\overline{y}_x = 1{,}21x - 2{,}45$; $\overline{x}_y = 0{,}085y + 10{,}58$. **891.** $\overline{x} = 10{,}005$; $D(X) = 0{,}010475$; $\sigma(X) = 0{,}1023$. **892.** $\overline{y} = 10{,}64$; $D(Y) = 34{,}97$. **896.** $\alpha_1 = 6{,}32$; $\alpha_2 = 44{,}64$; $\alpha_3 = 340{,}16$; $\alpha_4 = 2743{,}68$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 4{,}6976$; $\mu_3 = -1{,}3425$; $\mu_4 = 56{,}422$; $S_k(X) = -0{,}132$; $E(X) = -0{,}442$.

898. $M(X) = 4{,}13$; $D(X) = 9{,}07$; $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1{,}09; \\ 0{,}096, & \text{si } -1{,}09 \leqslant x \leqslant 9{,}35; \\ 0, & \text{si } x > 9{,}35. \end{cases}$

900. $M(x) = 5{,}06$; $D(X) = 5{,}01$. **902.** $M(X) = 8{,}02$. $D(X) = 8{,}23$. $\sigma(X) \approx 2{,}87$, $f(x) = 1/(2{,}87\sqrt{2\pi})\, e^{-(x-8{,}02)^2/(2\cdot 2{,}87^2)}$.

Capítulo VI

914. $z = xy + \varphi(x) + \psi(y)$. **915.** $z = x\varphi_1(y) + \varphi_2(y) + y\varphi_3(x) + \varphi_4(x)$. **919.** $\operatorname{tg}(z/2) = \operatorname{tg}(x/2)\cdot\psi\left(\frac{\operatorname{tg}(y/2)}{\operatorname{tg}(x/2)}\right)$. **920.** $z^2 = x^2 + \psi(y^2 - x^2)$. **921.** Paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$. **925.** $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0$, $\xi = y/x$, $\eta = y$. **926.** $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial z}{\partial\xi} = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = 3x + y$. **927.** $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\xi} + \frac{1}{\eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\eta}\right) = 0$, $\xi = y^2$, $\eta = x^2$. **931.** $u = x(1 - t)$. **932.** $u = (\cos x \operatorname{sen} at)/a$. **933.** $u = -\operatorname{sen} x$. **937.** $u(x, t) = -(0{,}9/\pi^2)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)\operatorname{sen}(2\pi k/3)\operatorname{sen}(k\pi x/3)\cdot\cos(k\pi at/3)$. **938.** $u = (96h/\pi^5)\times\sum_{k=0}^{\infty} 1/[(2k+1)^5]\cos(2k+1)\pi at\cdot\operatorname{sen}(2k+1)\pi x$. **939.** $u(x, t) = \frac{4hl^2}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\times\frac{1}{k^2}\frac{\operatorname{sen}(\pi k/2)\cos(k\pi h/1)}{l^2 - k^2h^2}\operatorname{sen}(k\pi x/l)\operatorname{sen}(k\pi at/l)$. **943.** $u(x, t) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{x}{l}\right)\Phi\left(\frac{x+l}{2\sqrt{t}}\right) - 2\cdot\frac{x}{l}\cdot\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{t}}\right)\right] + \frac{1}{l}\times\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,[e^{-(x+l)^2/(4t)} - 2e^{-x^2/(4t)} + e^{-(x-l)^2/(4t)}]$. **944.** $u(x, t) = \frac{u_0}{2}\cdot\left[\Phi\times\right.$

$\times \left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\Big]$. **945.** $u(x, \ t) = \frac{8c}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \times$ $\times e^{-(2n+1)^2\pi^2 a^2 t/l^2} \cdot \mathrm{sen}\, \frac{(2n+1)\pi x}{l}$. **947.** $u = u_a + (u_b - u_a) \cdot [\ln(r/a) : \ln(b/a)]$. **949.** $u(r, \ \Theta) = (8/3)\,\mathrm{sh}\,(\ln r) \cdot \mathrm{sen}\, \Theta$.

Capítulo VII

956. 1) $w = i$; 2) $w = -e^{\pi}$; 3) $w = ei$. **957.** $(1+i)/2$; i; $(3-2i)/13$. **959.** $(1/2)\ln 2 + (2k\pi - \pi/4)\, i$, $k \in Z$. **961.** $z = \pm i \ln (2 + \sqrt{3})$. **962.** $i \ln (1 \pm \sqrt{2})$. **963.** 1,1752i. **964.** 0,772 + 1,018i. **965.** 1) $e^{\cos 1}$ [cos $\times$ $\times$ (sen 1) + i sen (sen 1)]; 2) $\cos e + i \,\mathrm{sen}\, e$. **971.** No. **972.** $f'(z) = 3z^2$. **973.** $f'(z) = \cos z$. **974.** $\varphi(y) = ay + C_1$, $\psi(x) = -ax + C_2$, $f(z) = Az + C$, $A = -ai$, $C = C_1 + C_2$. **975.** $\lambda = -1$, $f(z) = -iz$. **976.** $a = 0$. **77.** $f(z) = 2^z + C$. **978.** $f(z) = -\cos z + C$. **983.** $u = 4 - v^2/16$, $u = v^2/4 - 1$. **984.** $v = (u^2 - 1)/2$. **985.** $u = 1$, $v = 0$. **986.** $u = x \cos\varphi - y\,\mathrm{sen}\,\varphi$; $v = x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y \cos\varphi$, o sea, la transformación de las coordenadas al girar los ejes. **987.** $u = (v/2)^{2/3} - (v/2)^{4/3}$. **996.** $1 + i$. **996a.** $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $k = 6$. **996b.** $\alpha = 0$, $k = \frac{1}{4}$. **996c.** $\alpha = 0$, $k = l$. **997.** $-(1+i)/3$. **997a.** $|z| = \frac{1}{2}$. **997b.** $|z - 1| = \frac{1}{2}$. **997c.** Re $z = 0$. **997d.** arg $z = -\frac{\pi}{2}$. **998.** 0. **999.** 0. **1000.** $2\pi i$. **1001.** $2\pi i\,(a+b)$. **1010.** La región de convergencia es $1 < |z| < 2$. **1011.** La serie diverge en todos los puntos del plano. **1012.** 1) $f(z) = -z^2 - z^3 - z^4 - \ldots$; 2) $f(z) = z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots$. **1013.** $\frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!} + \frac{z^2}{7!} + \frac{z^4}{9!} + \ldots$. **1014.** ± 1 son polos de primer orden; $\pm i$ son polos de segundo orden. **1015.** $f(z) = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \ldots$; la región de convergencia es $|z-1| < 1$. **1016.** $f(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \ldots$; la serie converge en todo el plano. **1017.** $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!}(z^n + z^{-n})$. **1027.** $2i$. **1028.** 1; -1. **1029.** -1. **1030.** 1. **1031.** $2\pi a^2$. **1032.** $2\pi i$. **1033.** 0. **1034.** $2\pi/(3-i)$. **1035.** $3\pi/8$.

Capítulo VIII.

1041. $\bar{f}(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}$. **1042.** $\bar{f}(p) = \frac{p(p^2+2p+3)}{(p-1)(p^2-2p+p)}$. **1043.** $\bar{f}(p) = \frac{p}{p^2 - b^2}$. **1044.** $\bar{f}(p) = \frac{a(p^2-a^2-b^2)}{p[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}$. **1045.** $\bar{f}(p) = \frac{b(p^2+a^2-b^2)}{[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}$. **1046.** $\bar{f}(p) = \frac{p(p^2-a^2+b^2)}{[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}$.

1047. $\bar{f}(p)=\frac{2pb}{(p^2-b^2)^2}$. **1053.** $f(t)=1/4-(1/3)\cos t+(1/12)\cos 2t$. **1054.** $f(t)=-(1/3)e^t+(1/4)e^{2t}+(1/12)e^{-2t}$. **1055.** $f(t)=1-2e^t+e^{3t}$, **1056.** $f(t)=1/4-(1/3)\operatorname{ch} t+(1/12)\operatorname{ch} 2t$. **1057.** $f(t)=\frac{t^k}{k!}-\frac{a^k\cdot t^{2k}}{(2k)!}+\frac{a^{2k}\cdot t^{3k}}{(3k)!}-\ldots$.

1061. $1-\cos t\leftarrow\frac{1}{p^2}\cdot\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)}$. **1062.** $f(t)=\int\limits_0^t\cos(t-\tau)\cos\tau\,d\tau=\frac{1}{2}(\operatorname{sen} t+t\cos t)$. **1063.** $(1-2p)\cdot\bar{y}(p)$. **1064.** $(p^3-p^2+2p-2)\cdot\bar{y}(p)-p-1$. **1065.** $\frac{\bar{y}\,p()}{p}\cdot(p^2-1)$.

1072. $y=e^{2t}$. **1073.** $y=\operatorname{sh} t$. **1074.** $y=0$. **1075.** $y=(1/3)te^t-(7/9)e^t-(2/9)e^{-2t}$. **1076.** $y=-(5/2)e^t+4e^{2t}-(3/2)e^{3t}$. **1077.** $x=(5/2)e^{2t}-(1/2)e^{-2t}$, $y=(5/2)e^{2t}-(1/2)e^{-2t}$. **1078.** $x=(6/5)e^{5t}-(1/5)e^{-5t}$, $y=(3/5)e^{5t}+(2/5)e^{-5t}$. **1079.** $y(t)=1$. **1080.** $y(t)=t$. **1083.** $2e^t-4t-3$ **1084.** $-1/6+(1/2)e^t-(1/2)e^{2t}+(1/6)e^{3t}$. **1085.** $(1/8)(2t^2+6t+3)e^t-(1/24)e^{-t}+(2/3)\operatorname{sen}(t\sqrt{3}/2+\pi/6)$. **1090.** $u(x,t)=A\cos(n\pi at/l)\times\cos(n\pi x/l)$. **1091.** $u(x,t)=B\operatorname{sen}(n\pi at/l)\operatorname{sen}(n\pi x/l)$. **1092.** $u(x,t)=A\operatorname{Erf}(\alpha x/(2\sqrt{t}))$.

Capítulo IX

1098.]0, 1[,]2, 3[,]6, 7[. **1099.**]−4, −3[,]0, 1[,]3, 4[. **1100.** 1,94. **1101.** 2,09. **1102.** 0,33; 1,30. **1103.** −1,15. **1104.** 1,11. **1105.** 0,42. **1106.** 3,62 **1107.** −0,56. **1108.** 1,27. **1114.** $\xi=1{,}70997$. **1115.** $\xi=1{,}23429$. **1118.** 2,214. **1119.** 1,37973. **1120.** −1,4142. **1123.** $y=-(2x^3-15x^2+25x-9)/3$. **1124.** $y=0{,}2(x^3-13x^2+69x-92)$. **1125.** $y=2x-1$.

1128

x	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
$\lg x$	0,8129	0,8195	0,8261	0,8325	0,8388	0,8451

129. 39,0625. **1130.** $f(x)=x^3+x^2+x+1$. **1135.** 0,5000. **1136.** 1,169121; $\delta_S=-0{,}000004$; el valor exacto de la integral es $4(\sqrt{2}-1)-2\ln[(2\sqrt{2}+1)/3]\approx1{,}16912\ldots$. **1137.** $|\delta_T|\leqslant(h^2/12)\cdot(b-a)\cdot M_1\approx0{,}07$ (M_1 es el valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo de integración. Por eso es necesario efectuar el cálculo con tres cifras decimales (para obtener dos cifras decimales exactas) : $I\approx1{,}35$. **1138.** 0,69. **1139.** 0,24. **1140.** 0,75. **1141.** 0,67. **1147.** 183; 552. **1153.** El valor exacto de $I=62{,}572$; 1) $I=62{,}673$; $\delta=0{,}12\%$; 2) $I=62{,}730$; $\delta=0{,}03\%$; 3) $I=66{,}509$; $\delta=5{,}99\%$. **1154.** El valor exacto de $J=0{,}747$; 1) $I=0{,}746$; $\delta=0{,}13\%$; 2) $I=0{,}800$, $\delta=7{,}1\%$. **1158.**

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,2	1,45	1,78

1159.

y	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0	0,001	0,005	0,014

1160.

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4
y	4	5,8	9,44	18,78	54,86

1161.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
y	1	1,1	1,18	1,24	1,27	1,27	1,24

.

1162.

t	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
x	1	1	1,07	1,17	1,30	1.45
y	1	1,4	1,8	2,21	2,63	3.06

. **1165.**

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	−1	−0.975	−0.949	−0.921	−0.888	−0.842	−0.802	−0,744	−0,675	−0.593	−0.495

.

1166.

x	0	0,1	0,2	0,3	0.4	0,5	0,6	0.7	0,8	0,9	1,0
y	1	1,05	1,12	1,20	1,29	1,39	1,50	1,62	1,75	1,89	2,03

1168. 1,78. **1169.** 0,02. **1172.** $y_1=(1/3)\,x^3$, $y_2=(1/3)\,x^3+(1/63)\,x^7$, $y_3=$ $=(1/3)\,x^3+(1/63)\,x^7+(2/2079)\,x^{11}+(1/59535)\,x^{15}$. **1173.** $y=e^{-\operatorname{sh} x}$. **1174.** $y_n=$ $=1-x+2\left[\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n!}\right]+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,(n=3, 4, 5, \ldots)$; sucesión bilateral. **1175.** $y_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\operatorname{sen}^m x}{m!}$; la solución auténtica es $y(x)=e^{\operatorname{sen} x}$; sucesión de las funciones inferiores. **1176.** $y_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\operatorname{sen}^m(x^2)}{m!}$; la solución auténtica es $y(x)=e^{\operatorname{sen}(x^2)}$; sucesión de las funciones inferiores.
1179. $y=0,279x+71,14$.
1180. $S=11,58e^{0,2898t}$. **1182.** $y=111,7+1,663x+0,00437x^2$. **1183.** $S=$ $=33,02t^{1,065}$. **1187.** 1) $y=3,023x-1,08$; 2) $y=0,992x-0,909$; 3) $y=$ $=-1,802x+2,958$. **1188.** 1) $y=-0,145x^2+3,324x-12,794$; 2) $y=$ $=1,009x^2-4,043y+5,045$; 3) $y=-0,102x^2+0,200x+0,806$. **1189.** $S=$ $=5,7t^{1,97}$. **1190.** 1) $S=92e^{-0,15t}$; 2) $S=0,49e^{0,44t}$. **1192.** $\varphi(x)=0,2723x^2+$ $+0,5003x+1,3424$. **1193.** $\varphi(x)=0,670x^3-0,728x^2-0,350x+0,943$.

Capítulo X

1206. No tiene solución. **1207.** $I=x_1e^{y_1}-x_0e^{y_0}$. La integral no depende del camino de integración. **1208.** $y=x$. **1209.** $y=\frac{1}{4}x^2-x+1$. **1210.** $y=$ $=\sqrt{8+6x-x^2}$. **1211.** $y=0$. **1212.** $y=\sqrt{2}\,e^{x/2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$. **1214.** $y(x)\equiv 0$. **1215.** $y=(1-x)\operatorname{sh} x$. **1217.** $y=\frac{1}{x}$, $z=\frac{2}{x^3}-1$. **1218.** $y=\frac{4}{3x^3}-\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{x}$. **1220.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **1221.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi(x, y)$.

Suplemento

Tabla 1

Valores de la función gamma $\Gamma(p)$ (si $1 \leqslant p \leqslant 2$)

p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$
1,00	1,0000	1,25	0,9054	1,50	0,8862	1,75	0,9191
1,01	0,9943	1,26	9044	1,51	8866	1,76	9214
1,02	9888	1,27	9025	1,52	8870	1,77	9238
1,03	9835	1,28	9007	1,53	8876	1,78	9262
1,04	9784	1,29	8990	1,54	8882	1,79	9288
1,05	9735	1,30	8975	1,55	8889	1,80	9314
1,06	9687	1,31	8960	1,56	8896	1,81	9341
1,07	9642	1,32	8946	1,57	8905	1,82	9368
1,08	9597	1,33	8934	1,58	8914	1,83	9397
1,09	9555	1,34	8922	1,59	8924	1,84	9426
1,10	9514	1,35	8912	1,60	8935	1,85	9456
1,11	9474	1,36	8902	1,61	8947	1,86	9487
1,12	9436	1,37	8893	1,62	8959	1,87	9518
1,13	9399	1,38	8885	1,63	8972	1,88	9551
1,14	9364	1,39	8879	1,64	8986	1,89	9584
1,15	9330	1,40	8873	1,65	9001	1,90	9618
1,16	9298	1,41	8868	1,66	9017	1,91	9652
1,17	9267	1,42	8864	1,67	9033	1,92	9688
1,18	9237	1,43	8860	1,68	9050	1,93	9724
1,19	9209	1,44	8858	1,69	9068	1,94	9761
1,20	9182	1,45	8857	1,70	9086	1,95	9799
1,21	9156	1,46	8856	1,71	9106	1,96	9837
1,22	9131	1,47	8856	1,72	9126	1,97	9877
1,23	9108	1,48	8857	1,73	9147	1,98	9917
1,24	9085	1,49	8859	1,74	9168	1,99	9958
						2,00	1,0000

Valores de las funciones

$$\Phi(x)=erf\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \ \ \text{y}\ \ \overline{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$$

x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$
0,00	0,0000	0,0000	0,60	0,6039	0,2257	1,20	0,9103	0,3849	1,80	0,9891	0,4641
02	0226	0080	62	6194	2324	22	9155	3888	82	9899	4656
04	0451	0160	64	6346	2389	24	9205	3925	84	9907	4671
06	0676	0239	66	6494	2454	26	9252	3962	86	9915	4686
08	0901	0319	68	6638	2517	28	9297	3997	88	9922	4699
0,10	1125	0398	0,70	6778	2580	1,30	9340	4032	1,90	9928	4713
12	1348	0478	72	6914	2642	32	9381	4066	92	9934	4726
14	1569	0557	74	7047	2703	34	9419	4099	94	9939	4738
16	1790	0636	76	7175	2764	36	9456	4131	96	9944	4750
18	2009	0714	78	7300	2823	38	9490	4162	98	9949	4761
0,20	2227	0793	0,80	7421	2881	1,40	9523	4192	2,00	9953	4772
22	2443	0871	82	7538	2939	42	9554	4222	05	9963	4798
24	2657	0948	84	7651	2995	44	9583	4251	10	9970	4821
26	2869	1026	86	7761	3051	46	9610	4279	15	9976	4842
28	3079	1103	88	7867	3106	48	9636	4306	20	9981	4860
0,30	3286	1179	0,90	7969	3159	1,50	9661	4332	2,25	9985	4877
32	3491	1255	92	8068	3212	52	9684	4357	30	9988	4892
34	3694	1331	94	8163	3264	54	9706	4382	35	9991	4906
36	3893	1406	96	8254	3315	56	9726	4406	40	9993	4918
38	4090	1480	98	8342	3365	58	9745	4429	45	9995	4928
0,40	4284	1554	1,00	8427	3413	1,60	9763	4452	2,50	9996	4938
42	4475	1628	02	8508	3461	63	9780	4474	60	9998	4953
44	4662	1700	04	8586	3508	64	9796	4495	70	9999	4965
46	4847	1772	06	8661	3554	66	9811	4515	80	9999	4974
48	5027	1844	08	8733	3599	68	9825	4535	2,90	0,9999	4981
0,50	5205	1915	1,10	8802	3643	1,70	9838	4554	3,00	1,0000	4986
52	5379	1985	12	8868	3686	72	9850	4573	20	1,0000	4993
54	5549	2054	14	8931	3729	74	9861	4591	40	1,0000	4996
56	5716	2123	16	8991	3770	76	9872	4608	60	1,0000	4998
0,58	0,5879	0,2190	1,18	0,9048	0,3810	1,78	0,9882	0,4625	3,80	1,0000	0,4999

Valores de la función $z_u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0395	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

Tabla IV

Valores de las probabilidades para el criterio χ^2

χ^2 \ r	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0.9982
2	1574	3679	5724	7358	8491	9197	9598	9810
3	0833	2231	3916	5578	7000	8088	8850	9344
4	0455	1353	2615	4060	5494	6767	7798	8571
5	0254	0821	1718	2873	4159	5438	6600	7576
6	0143	0498	1116	1991	3062	4232	5398	6472
7	0081	0302	0719	1359	2206	3208	4289	5366
8	0047	0183	0460	0916	1562	2381	3326	4335
9	0027	0111	0293	0611	1091	1736	2527	3423
10	0016	0067	0186	0404	0752	1247	1886	2650
11	0009	0041	0117	0266	0514	0884	1386	2017
12	0005	0025	0074	0174	0348	0620	1006	1512
13	0003	0015	0046	0113	0234	0430	0721	1119
14	0002	0009	0029	0073	0156	0296	0512	0818
15	0001	0006	0018	0047	0104	0203	0360	0591
16	0001	0003	0011	0030	0068	0138	0251	0424
17	0000	0002	0007	0019	0045	0093	0174	0301
18		0001	0004	0012	0029	0062	0120	0212
19		0001	0003	0008	0019	0042	0082	0149
20		0000	0002	0005	0013	0028	0056	0103
21			0001	0003	0008	0018	0038	0071
22			0002	0002	0005	0012	0025	0049
23			0000	0001	0003	0008	0017	0034
24				0001	0002	0005	0011	0023
25				0001	0001	0003	0008	0016
26				0000	0001	0002	0005	0010
27					0001	0001	0003	0007
28					0000	0001	0002	0005
29						0001	0001	0003
30						0000	0001	0002

χ^2 \ r	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,9994	0,9998	0,9899	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	9915	9963	9985	9994	9998	9999	1,0000	1,0000
3	9643	9814	9907	9955	9979	9991	0,9896	0,9998
4	9114	9473	9699	9834	9912	9955	9977	9989
5	8343	8912	9312	9580	9752	9858	9921	9958
6	7399	8153	8734	9161	9462	9665	9797	9881
7	6371	7254	7991	8576	9022	9347	9576	9733
8	5341	6288	7133	7851	8436	8893	9238	9489
9	4373	5321	6219	7029	7729	8311	8775	9134
10	3505	4405	5304	6160	6939	7622	8197	8666
11	2757	3575	4433	5289	6108	6860	7526	8095
12	2133	2851	3626	4457	5276	6063	6790	7440
13	1626	2237	2933	3690	4478	5265	6023	6728
14	1223	1730	2330	3007	3738	4497	5255	5987
15	0909	1321	1825	2414	3074	3782	4514	5246
16	0669	0996	1411	1912	2491	3134	3821	4530
17	0487	0744	1079	1496	1993	2562	3189	3856
18	0352	0550	0816	1157	1575	2068	2627	3239
19	0252	0403	0611	0885	1231	1649	2137	2687
20	0179	0293	0453	0671	0952	1301	1719	2202
21	0126	0211	0334	0504	0729	1016	1368	1785
22	0089	0151	0244	0375	0554	0786	1078	1432
23	0062	0107	0177	0277	0417	0603	0841	1137
24	0043	0076	0127	0203	0311	0458	0651	0895
25	0030	0053	0091	0148	0231	0346	0499	0698
26	0020	0037	0065	0107	0170	0259	0380	0540
27	0014	0026	0046	0077	0124	0193	0287	0415
28	0010	0018	0032	0055	0090	0142	0216	0316
29	0006	0012	0023	0039	0065	0104	0161	0239
30	0004	0009	0016	0028	0047	0076	0119	0180

Tabla V

Valores de la función $P(\lambda) = 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2\lambda^2}$

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0,00	1,0000	0,45	0,9874	0,90	0,3927	1,70	0,0062
0,05	1,0000	0,50	9639	0,95	3275	1,80	0032
0,10	1,0000	0,55	9228	1,00	2700	1,90	0015
0,15	1,0000	0,60	8643	1,10	1777	2,00	0007
0,20	1,0000	0,65	7920	1,20	1122	2,10	0003
0,25	1,0000	0,70	7112	1,30	0681	2,20	0001
0,30	1,0000	0,75	6272	1,40	0397	2,30	0,0001
0,35	0,9997	0,80	5441	1,50	0222	2,40	0,0000
0,40	0,9972	0,85	4653	1,60	0,20	2,50	0,0000

Tabla VI

Valores de los números aleatorios

8574	9005	1894	3523	3393	5407	9659	5868
4575	4518	7032	7293	9108	0469	7435	2574
4999	3186	1426	1027	7891	7805	8928	6291
7627	7982	4865	2229	9085	7294	7239	7866
4315	1114	2339	0882	2638	5480	6189	3150
6987	9333	4247	2059	1313	1017	9391	7082
0387	1998	2910	5626	3897	0858	0575	4977
5581	1837	4731	8516	4380	8396	2414	0248
6531	4216	6454	6476	1618	7813	4959	0228
5735	3384	5146	5685	4858	2712	7675	7509
6092	1047	8196	0206	5354	7141	7078	0361
1791	1900	0649	0517	0905	2418	2220	9142
9746	1508	8704	6493	1420	5230	7110	1995
0118	4493	2560	1798	3218	3517	9851	3834
0986	3203	3476	8965	9697	0319	6272	5697
8057	1656	1515	4534	0912	7526	0460	9908
5161	6171	9125	5460	4636	5172	9737	3621
2961	3698	1913	9197	2515	2023	3619	7302
1494	0692	2594	6917	5964	3632	0602	6722
8153	2484	0961	1558	7848	0761	3853	8582
0703	9602	0190	1810	5192	7016	8483	7998
6928	6521	8548	2737	8438	8805	6029	9199
6961	3678	1935	8762	8166	2064	8760	6554
2030	1683	7322	6906	6158	4213	2720	0777
3503	2614	2532	4940	6061	0806	1913	3769

Valores de la función e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0.00	1.0000	0.50	0.6065	1.00	0.3679	50	2231
01	9900	0.51	0.6005	1.01	0.3642	1.51	0.2209
02	9802	52	5945	02	3606	52	2187
03	9704	53	5886	03	3570	53	2165
04	9608	54	5827	04	3534	54	2144
05	9512	55	5769	05	3499	55	2123
06	9418	56	5712	06	3465	56	2101
07	9324	57	5655	07	3430	57	2080
08	9231	58	5599	08	3396	58	2060
09	9139	59	5543	09	3362	59	2039
0.10	0.9048	0.60	0.5486	1.10	0.3329	1.60	2019
11	8958	61	5433	11	3296	61	1999
12	8860	62	5379	12	3263	62	1979
13	8781	63	5326	13	3230	63	1959
14	8694	64	5273	14	3198	64	1940
15	8607	65	5221	15	3166	65	1921
16	8521	66	5166	16	3135	66	1901
17	8437	67	5117	17	3104	67	1882
18	8353	68	5066	18	3073	68	1864
19	8270	69	5016	19	3042	69	1845
0.20	8187	0.70	0.4966	1.20	0.3012	1.70	1827
21	8106	71	4916	21	2982	71	1809
22	8025	72	4868	22	2952	72	1791
23	7945	73	4819	23	2923	73	1773
24	7866	74	4771	24	2894	74	1755
25	7781	75	4724	25	2865	75	1738
0.26	0.7711	0.76	0.4677	1.26	0.2836	1.76	0.1720
27	7634	77	4630	27	2808	77	1703
28	7558	78	4584	28	2780	78	1686
29	7483	79	4538	29	2753	79	1670
0.30	0.7408	0.80	0.4493	1.30	0.2725	1.80	0.1653
31	7334	81	4449	31	2692	81	1637
32	7261	82	4404	32	2671	82	1620
33	7189	83	4361	33	2645	83	1604
34	7118	84	4317	34	2618	84	1588
35	7047	85	4274	35	2592	85	1572
36	6977	86	4232	36	2567	86	1557
37	6907	87	4189	37	2541	87	1541
38	6839	88	4148	38	2516	88	1526
39	6777	89	4107	39	2491	89	1511
0.40	0.6703	0.90	0.4066	1.40	0.2466	1.90	1496
41	6636	91	4025	41	2441	91	1481
42	6571	92	3985	42	2417	92	1466
43	6505	93	3946	43	2393	93	1451
44	6440	94	3906	44	2369	94	1437
45	6376	95	3867	45	2346	95	1423
46	6313	96	3829	46	2322	96	1409
47	6250	97	3791	47	2289	97	1395
48	6188	98	3753	48	2276	98	1381
49	6126	99	3716	49	2254	99	1367

X	e^{-x}	X	e^{-x}	X	e^{-x}	X	e^{-x}
2.00	0.1353	10	0166	20	0020	20	00027
2.10	0.1225	20	0150	30	0018	30	00025
20	1108	30	0136	40	0017	40	00022
30	1003	40	0123	50	0015	50	00020
40	0907	50	0111	60	0014	60	00018
50	0821	4.60	0.0101	70	0012	70	00017
60	0743	70	0091	80	0011	80	00015
70	0672	80	0082	90	0010	90	00014
80	0608	90	0074	7.00	0.0009	9.00	0.00012
90	0550	5.00	0.0067	7.10	0.0008	10	00011
3.00	0.0498	10	0061	20	0007	20	00010
10	0450	20	0055	30	00067	30	00009
20	0408	30	0050	40	00061	40	00008
30	0369	40	0045	50	00053	50	00007
40	0334	50	0041	60	00050	9.60	0.00007
50	0302	60	0037	70	00045	70	00006
60	0273	70	0033	80	00041	80	00005
70	0247	80	0030	90	00037	90	00005
80	0224	90	0027	8.00	0.00033	10.00	0.00004
90	0202	6.00	0.0025	10	00030		
4.00	0.0183	10	0022				

A NUESTROS LECTORES: