# MATEMATICAS SUPERIORES

YA. S. BUGROV

Matemáticas superiores

Ecuaciones diferenciales

Integrales múltiples

Series

Funciones de variable compleja

Я. С. БУГРОВ, С. М. НИКОЛЬСКИЙ

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
# КРАТКИЕ ИНТЕГРАЛЫ
# РЯДЫ
# ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Ya. S. Bugrov
S. M. Nikolski

# Matemáticas superiores

## Ecuaciones diferenciales
## Integrales múltiples
## Series
## Funciones de variable compleja

Editorial Mir Moscú

Versión española por
el ingeniero A.I. Samojválov

Primera edición 1981
Primera reimpresión 1988

*На испанском языке*

Impreso en la URSS

ISBN 5-03-000878-0

# Indice


Prefacio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

Capítulo 1. Ecuaciones diferenciales ordinarias . . . 10

§ 1.1. Problema que conduce a una ecuación diferencial 10
§ 1.2. Conceptos generales . . . . . . . . . . . . 10
§ 1.3. Ecuaciones diferenciales elementales de primer orden . . . . . . . . . . . . . . . . 21
§ 1.4. Teorema de existencia de la solución de una ecuación diferencial de primer orden . . . . . . . 31
§ 1.5. Espacio métrico . . . . . . . . . . . . . 34
§ 1.6. Demostración del teorema de existencia de la solución de una ecuación diferencial de primer orden . . . . . . . . . . . . . . . . 40
§ 1.7. Método de Euler de resolución aproximada de la ecuación diferencial de primer orden . . . . . 43
§ 1.8. Ecuaciones no resueltas con respecto a la derivada . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
§ 1.9. Soluciones singulares . . . . . . . . . . . 48
§ 1.10. Envolvente de una familia de curvas . . . . 49
§ 1.11. Ecuación diferencial de segundo orden . . . . 51
§ 1.12. Sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden . . . . . . . . . . . . . . . 53
§ 1.13. Ecuación diferencial de $n$-ésimo orden . . . . 56
§ 1.14. Reducción del orden de una ecuación diferencial 59
§ 1.15. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
§ 1.16. Ecuaciones homogéneas lineales de $n$-ésimo orden con coeficientes constantes . . . . . . . . . 70
§ 1.17. Método de variación de las constantes . . . . 75
§ 1.18. Solución particular de una ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes . . . 77
§ 1.19. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Espacio de fases . . . . . . . . . . . . . . . . 84
§ 1.20. Sistema homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales . . . . . . . . . . . . . . . . . 87
§ 1.21. Solución general de un sistema homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes . . . . . . . . . . . . . . . . . 92
§ 1.22. Reducción de un sistema de ecuaciones a una sola ecuación . . . . . . . . . . . . . . 99

§ 1.23. Sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes . . . . . 102
§ 1.24. Integración de ecuaciones diferenciales mediante series de potencias . . . . . . . . . . . . 106
§ 1.25. Elementos de la teoría de la estabilidad . . . . 110
§ 1.26. Clasificación de los puntos de reposo . . . . . 117

Capítulo 2. Integrales múltiples . . . . . . . . . . 127

§ 2.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . 127
§ 2.2 Algunas nociones de la teoría de la medida de Jordan . . . . . . . . . . . . . . . . . 133
§ 2.3. Propiedades de las integrales múltiples. Teoremas de existencia . . . . . . . . . . . . . . . 139
§ 2.4. Integral como función del parámetro. Reducción de una integral múltiple a las reiteradas . . . . 143
§ 2.5. Demostración de la existencia de la integral de una función continua . . . . . . . . . . . . 153
§ 2.6. Cambio de variables. Caso elemental . . . . . 155
§ 2.7. Cambio de variables. Caso general . . . . . . 156
§ 2.8. Sistema polar de coordenadas en el plano . . . 160
§ 2.9. Sistema polar de coordenadas en el espacio . . . 162
§ 2.10. Coordenadas cilíndricas . . . . . . . . . . 165
§ 2.11. Area de una superficie . . . . . . . . . . . 166
§ 2.12. Coordenadas del centro de masas . . . . . . . 173
§ 2.13. Integrales impropias . . . . . . . . . . . . 177
§ 2.14. Integral impropia con particularidades a lo largo de la línea . . . . . . . . . . . . . . . . 182
§ 2.15. Integral impropia dependiente de un parámetro 183

Capítulo 3. Análisis vectorial . . . . . . . . . . . 192

§ 3.1. Curva orientada suave a trozos . . . . . . . . 192
§ 3.2. Integral curvilínea de primer género . . . . . . 194
§ 3.3. Integral del vector a lo largo de una curva . . . 196
§ 3.4. Campo de un potencial . . . . . . . . . . . 201
§ 3.5. Ecuación diferencial en diferenciales totales 209
§ 3.6. Orientación de una región plana . . . . . . . 212
§ 3.7. Fórmula de Green . . . . . . . . . . . . . 213
§ 3.8. Integral sobre una superficie de primer género 218
§ 3.9. Orientación de una superficie . . . . . . . . 220
§ 3.10. Sistema de coordenadas y orientación de una superficie . . . . . . . . . . . . . . . . 223
§ 3.11. Integral sobre una región plana orientada . . . 227
§ 3.12. Flujo de un vector a través de una superficie orientada . . . . . . . . . . 230
§ 3.13. Divergencia. Teorema de Gauss—Ostrogradski . 234
§ 3.14. Campo solenoidal . . . . . . . . . . . . . 241
§ 3.15. Fórmula de Stokes . . . . . . . . . . . . . 243

Capítulo 4. Series de Fourier. Integral de Fourier . . . 248

§ 4.1. Series trigonométricas . . . . . . . . . . . 248
§ 4.2. Convergencia de series trigonométricas . . . . 254
§ 4.3. Serie de Fourier . . . . . . . . . . . . . . 256
§ 4.4. Criterios de convergencia de las series de Fourier 259

| | | |
|---|---|---|
| § 4.5. | Propiedades ortogonales de las series trigonométricas | 263 |
| § 4.6. | Coeficientes de Fourier | 265 |
| § 4.7. | Estimación de los coeficientes de Fourier | 266 |
| § 4.8. | Espacio de las funciones con el producto escalar | 267 |
| § 4.9. | Sistema ortogonal de funciones | 270 |
| § 4.10. | Completitud de funciones trigonométricas | 274 |
| § 4.11. | Forma compleja de la serie de Fourier | 278 |
| § 4.12. | Concepto de integral de Fourier. Integral reiterada de Fourier | 280 |
| § 4.13. | Coseno y seno de transformaciones de Fourier | 287 |
| § 4.14. | Ejemplos | 289 |
| § 4.15. | Aproximación de una integral de Fourier | 292 |
| § 4.16. | Suma de Fejér | 293 |
| § 4.17. | Completitud de los sistemas de funciones en $C$ y $L_2'$ | 299 |
| § 4.18. | Nociones de la teoría de series múltiples de Fourier | 301 |

| | | |
|---|---|---|
| Capítulo 5. | Ecuaciones de la física matemática | 315 |
| § 5.1. | Temperatura de un cuerpo | 315 |
| § 5.2. | Problema de Dirichlet | 317 |
| § 5.3. | Problema de Dirichlet para un círculo | 318 |
| § 5.4. | Problema de Dirichlet para un semipano | 420 |
| § 5.5. | Ecuación de conducción del calor por una barra | 322 |
| § 5.6. | Conducción del calor para una barra infinita | 327 |
| § 5.7. | Vibraciones pequeñas de una cuerda | 329 |
| § 5.8. | Vibraciones de una cuerda infinita. Fórmula de d'Alembert | 333 |
| § 5.9. | Vibración de una membrana circular | 335 |
| § 5.10. | Problema general de Sturm—Liouville | 340 |
| § 5.11. | Integral de energía (de Dirichlet) | 343 |
| § 5.12. | Aplicación de las transformaciones de Fourier | 348 |
| § 5.12.1. | Ecuación de conducción del calor | 349 |
| § 5.12.2. | Ecuación de vibración de una cuerda infinita | 352 |

| | | |
|---|---|---|
| Capítulo 6. | Teoría de las funciones de una variable compleja | 354 |
| § 6.1. | Concepto de función de una variable compleja | 354 |
| § 6.2. | Derivada de la función de una variable compleja | 357 |
| § 6.3. | Condiciones d'Alembert—Euler (de Cauchy—Riemann) | 364 |
| § 6.4. | Funciones armónicas | 367 |
| § 6.5. | Función inversa | 370 |
| § 6.6. | Integración de funciones de una variable compleja | 376 |
| § 6.7. | Fórmula de Cauchy | 382 |
| § 6.8. | Integral del tipo de Cauchy | 385 |
| § 6.9. | Serie de potencias | 386 |
| § 6.10. | Serie de Laurent | 389 |
| § 6.11. | Clasificación de puntos singulares aislados. Residuos | 395 |
| § 6.12. | Clasificación de puntos singulares en el infinito | 400 |
| § 6.13. | Teorema de los residuos | 403 |
| § 6.14. | Cálculo de integrales con ayuda de los residuos | 405 |
| § 6.15. | Función lineal. Función lineal fraccional | 410 |

Capítulo 7. Cálculo operacional . . . . . . . . . . . 417

§ 7.1. Transformada de Laplace . . . . . . . . . . 417
§ 7.2. Transformada de funciones elementales y propiedades de las transformadas . . . . . . . . 419
§ 7.3. Aplicación del cálculo operacional . . . . . . 432
Indice alfabético de materias . . . . . . . . . . . . . 438

# Prefacio

Este y otros dos nuestros libros editados en español bajo el título «Matemáticas superiores» abarcan todo el programa del curso respectivo que se da en los centros de enseñanza superior para especialidades de ingeniería, a excepción de la «Teoría de las probabilidades» y la mayor parte de los «Métodos numéricos».

En cada capítulo se exponen primero los conceptos fundamentales concernientes a las cuestiones de que se trata, mientras que las demostraciones formales de los teoremas se dan al final del capítulo o del párrafo. Semejante estructura permite limitarse, en caso de necesidad, a leer sólo los apartados iniciales de los capítulos o párrafos.

En los capítulos «Ecuaciones de la física matemática» y «Series de Fourier» para deducir algunas fórmulas hemos partido únicamente de las consideraciones físicas.

Notemos, además, que los capítulos 6 y 7 dedicados a la teoría de las funciones de una variable compleja y el cálculo operacional pueden leerse también antes del capítulo «Series e integrales de Fourier» que no exige ningunas nociones de la teoría mencionada, salvo conocimientos elementales de los números complejos. En particular, en este capítulo mostramos, cómo pueden hallarse integrales concretos de Fourier sin recurrir al cálculo operacional.

A nuestros lectores que deseen estudiar las matemáticas de un modo más completo les recomendamos los libros siguientes:

V. A. Ilyin, E. G. Poznyak «Fundamentals of Mathematical Analysis» en dos tomos, Editorial Mir, 1981;

L. D. Kudriávtsev «Análisis matemático», Editorial Mir, 1984;

S. M. Nikolsky «A Course of Mathematical Analysis» en dos tomos, Editorial Mir, 1982.

*Los autores*

Capítulo 1

# Ecuaciones diferenciales ordinarias

## § 1.1. Problema que conduce a una ecuación diferencial

Supongamos que un cuerpo, que tiene la temperatura $\theta_0$ en el instante de tiempo $t = 0$, se halla colocado en un medio cuya temperatura es igual a $a$ ($\theta_0 > a$). Se necesita encontrar la ley según la cual varía la temperatura del cuerpo en dependencia del tiempo. La temperatura buscada es una función del tiempo y vamos a designarla por $\theta(t)$.

De la física es noto que la velocidad de enfriamiento del cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio ambiente. Teniendo en cuenta que la función $\theta(t)$ es decreciente, en virtud de la interpretación mecánica de la derivada obtenemos

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - a], \tag{1}$$

donde $k$ es el coeficiente de proporcionalidad.

La relación (1) es el modelo matemático del proceso físico dado. Se llama *ecuación diferencial*, porque, junto con la función desconocida $\theta(t)$, comprende también su derivada. La ecuación diferencial (1) puede describir asimismo otros procesos físicos. Por ejemplo, la desintegración radiactiva también se describe por la ecuación (1) para $a = 0$.

Es fácil adivinar la solución de la ecuación (1): $\theta(t) = Ce^{-kt} + a$, donde $C$ es una constante arbitraria. El valor de esta constante puede hallarse de la condición de que $\theta(0) = \theta_0$. Entonces resulta que $\theta_0 = C + a$.

Ahora bien, la solución buscada tiene la forma

$$\theta(t) = (\theta_0 - a)e^{-kt} + a.$$

## § 1.2. Conceptos generales

Al estudiar los fenómenos físicos no se logra, con frecuencia, hallar directamente la ley que vincula las variables independientes y la función buscada, pero se puede establecer el nexo entre esta función y sus derivadas que se expresa por una *ecuación diferencial*.

Si la función buscada depende de una sola variable, la ecuación diferencial se denomina *ordinaria*. Una ecuación diferencial ordinaria arbitraria de orden $n$ tiene la forma siguiente:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Aquí $F$ es la función dada (conocida) de $n + 2$ variables que suele satisfacer las condiciones de continuidad y derivabilidad de las cuales ahora no vamos a hablar e $y = y(x)$, o sea la función de $x$, es la solución de la ecuación diferencial, es la función que se requiere hallar.

Se llama *solución de una ecuación diferencial* de orden $n$ la función $y(x)$ que tiene en cierto intervalo $(a, b)$ las derivadas $y'(x)$, $y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ hasta el orden $n$, inclusivamente, y satisface esta ecuación. Esto quiere decir que se cumple la identidad respecto a $x$:

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b).$$

En términos generales, a cada solución le corresponde su propio intervalo. Desde luego, si la función $y(x)$, dada en el intervalo $(a, b)$, es la solución de la ecuación diferencial (1), esta función examinada en un intervalo $(c, d)$ que pertenezca a $(a, b)$ es asimismo la solución de la ecuación (1).

En los próximos párrafos examinaremos las ecuaciones diferenciales definidas por las funciones reales $F$ y buscaremos sus soluciones reales $y(x)$. Omitiremos el término «real» como algo que se entiende por sí mismo. Más adelante, cuando estudiemos las ecuaciones diferenciales lineales, necesitaremos también sus soluciones complejas. Sin embargo, de esto se tratará posteriormente.

Así, pues, vamos a llamar a las soluciones reales $y(x)$, $x \in (a, b)$ de una ecuación diferencial ordinaria simplemente *soluciones* de esta ecuación.

La solución de una ecuación diferencial ordinaria de $n$-ésimo orden es, como se ve de su definición, la función $y(x)$. Esta función es continua en cierto intervalo $(a, b)$ junto con sus derivadas hasta el orden $n - 1$ inclusivamente y tiene, además, en $(a, b)$ la derivada $y^{(n)}(x)$ de orden $n$. Vamos a suponer que esta última derivada es asimismo continua en $(a, b)$ sin mencionar esto cada vez especialmente.

Llamaremos *curva integral* de una ecuación diferencial ordinaria de $n$-ésimo orden al gráfico de esta ecuación (véase a continuación la observación del § 1.3).

Además, nos permitiremos denominar curva integral a la solución de una ecuación diferencial y solución a la curva integral.

Puesto que este capítulo está dedicado sólo a ecuaciones diferenciales ordinarias, no surgirá ninguna confusión si suprimimos alguna que otra vez la palabra «ordinaria».

Las ecuaciones

$$y''' + 2y' + y = \operatorname{sen} x, \quad (y'')^2 + 1 = 0,$$
$$y'' + (y')^2 = 0, \qquad y' + ky = \cos x$$

pueden servir de ejemplo de las ecuaciones diferenciales ordinarias. La primera de ellas es de tercer orden, la segunda y la tercera, de segundo orden y la cuarta, de primer orden.

A propósito, notemos que directamente se ve que la segunda ecuación carece por completo de soluciones reales.

Existe el término: *integrar una ecuación diferencial*. Esto quiere decir que es necesario hallar unas u otras soluciones de la ecuación diferencial dada. La obtención de la solución de una ecuación diferencial está siempre ligada a la necesidad de *integrar* las funciones que forman parte de esta ecuación.

Vamos a comenzar por el estudio de la ecuación diferencial de primer orden

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

Por regla general, supondremos que la función $F(x, y, z)$ se da sobre cierta región del espacio tridimensional $\Omega$ y es continua sobre $\Omega$ junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial z}$. En particular, $\Omega$ puede ser todo el espacio tridimensional de los puntos $(x, y, z)$.

Recordemos que llamamos *solución* o *solución particular* de la ecuación diferencial (2) a toda función real continuamente derivable $y = y(x)$, dada en cierto intervalo $(a, b)$, que satisface esta ecuación:

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b), \quad (x, y(x), y'(x)) \in \Omega.$$

Con ello cada solución tiene, por lo general, un intervalo donde ella se da.

Dos ecuaciones algebraicas

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

se llaman equivalentes sobre la región $\Omega$ de los puntos $(x, y, z)$ si del hecho de que el punto $(x, y, z) \in \Omega$ satisface una de estas ecuaciones se deduce que ella satisface también la otra.

Respectivamente, dos ecuaciones diferenciales

$$F_1(x, y, y') = 0, \quad F_2(x, y, y') = 0$$

se dicen *equivalentes* sobre la región $\Omega$ si son equivalentes sobre $\Omega$ las ecuaciones algebraicas (3).

Ahora bien, en este caso la solución $y(x)$, $x \in (a, b)$, $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega$, de una de las ecuaciones diferenciales es automáticamente la solución de la otra.

Además, las ecuaciones diferenciales equivalentes sobre la región $\Omega$ se consideran como una misma ecuación.

Al transformar una ecuación diferencial es necesario mirar que la nueva ecuación diferencial, obtenida después de la transformación, sea equivalente (¡sobre la región $\Omega$!) a la anterior. O bien, en todo caso, hay que ver cuáles de las soluciones pueden desaparecer o surgir después de la transformación.

Señalemos un problema, llamado *problema de Cauchy* [1]) para una ecuación diferencial de primer orden. Se enuncia así: es necesario hallar la solución $y = y(x)$ de la ecuación diferencial dada que satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0,$$

donde $(x_0, y_0)$ es el punto dado del plano $(x, y)$.

Desde luego, en cada caso dado el problema de Cauchy puede tener una solución o no tenerla.

Si el problema de Cauchy tiene una solución, es importante revelar si es ésta única o no. Ya ahora notemos un hecho importante que será demostrado en el § 1.6: para una ecuación diferencial de primer orden, en la forma resuelta respecto a $y'$,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad ((x, y) \in G)$$

el problema de Cauchy tiene una solución y además única para todo punto $(x_0, y_0)$ de la región $G$ del plano $(x, y)$ si la función $f(x, y)$, dada sobre esta región, es continua junto con su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Naturalmente, la unicidad de la solución del problema de Cauchy conviene entenderla en el sentido de que si $y(x)$ e $y_1(x)$ son sus soluciones que satisfacen la misma condición inicial ($y(x_0) = y_1(x_0) = y_0$) y se dan, respectivamente, en los intervalos $(a, b)$ y $(c, d)$, entonces $y(x) = y_1(x)$ en la intersección de estos intervalos.

EJEMPLO 1. La ecuación diferencial elemental de primer orden tiene la forma

$$y' = f(x) \quad (a < x < b), \tag{4}$$

donde $f(x)$ es la función continua en cierto intervalo $(a, b)$.

De la teoría de la integral indefinida se deduce que toda solución de esta ecuación diferencial puede ser escrita del modo siguiente:

$$y = \int f(x)\, dx + C,$$

donde en el segundo miembro como el primer sumando está la integral indefinida de $f(x)$, o sea, cierta función primitiva de $f(x)$ en $(a, b)$:

$$\psi(x) = \int f(x)\, dx$$

y como segundo sumando, la constante arbitraria $C$ $(-\infty < C < \infty)$.

[1]) A. L. Cauchy (1789—1857), célebre matemático francés.

De suerte, toda solución de la ecuación diferencial (4) está definida por la igualdad

$$y = \psi(x) + C \quad (a < x < b), \tag{5}$$

donde $\psi(x)$ es cierta primitiva de $f(x)$ en $(a, b)$ y $C$ es la constante arbitraria, o sea, el parámetro de la familia de soluciones.

A cada valor del parámetro $C$ le corresponde cierta solución (particular) de la ecuación diferencial (4) y con ello toda solución de esta ecuación puede ser obtenida como solución particular de la familia (5) para el valor respectivo de $C$.

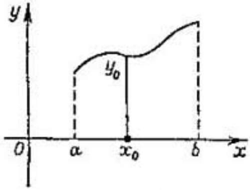

Fig. 1.

Si derivamos la igualdad (5) respecto a $x$, obtendremos la ecuación diferencial inicial (4). Merced a esta propiedad la igualdad (5) que contiene la constante arbitraria $C$ se llama integral general de la ecuación diferencial (4).

El problema de Cauchy para la ecuación diferencial (4) se resuelve, y además del modo único, a la condición inicial $y(x_0) = y_0$, donde $(x_0, y_0)$ es todo punto situado en la franja $\{a < x < b, -\infty < y < < \infty\}$ del plano $(x, y)$. Para resolverlo sustituimos el punto $(x_0, y_0)$ en la integral general (5) y hallamos la constante $C$:

$$y_0 = \psi(x_0) + C, \quad C = y_0 - \psi(x_0).$$

De aquí obtenemos

$$y - y_0 = \psi(x) - \psi(x_0).$$

Esta es precisamente la solución (curva integral) de nuestra ecuación diferencial (4), solución que pasa por el punto $(x_0, y_0)$ (fig. 1).

EJEMPLO 2. Examinemos la ecuación diferencial

$$y' = ky \quad (-\infty < x, \ y < \infty), \tag{6}$$

donde $k$ es la constante dada.

Es fácil comprobar que la función

$$y = Ce^{kx} = C \exp(kx) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{7}$$

para todo valor del parámetro $C$ es la solución de la ecuación diferencial (6). Ahora no vamos a explicar cómo se puede llegar lógicamente a esta familia de soluciones dependiente de la constante arbitraria $C$ (véase a continuación el § 1.3).

Derivemos la igualdad (7) respecto a $x$:

$$y' = Ck \exp(kx) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{8}$$

Ahora excluyamos el parámetro $C$ de ambas igualdades (7) y (8), o sea, hallemos $C$ de una de ellas y sustituyámosla en la otra. Volvemos a obtener, evidentemente, la ecuación diferencial inicial (6).

En virtud de esta propiedad la igualdad (7) se llama integral general de la ecuación diferencial (6).

Vamos a definir la integral general de una ecuación diferencial de primer orden.

Supongamos que se da la ecuación diferencial de primer orden

$$F(x,\ y,\ y') = 0, \tag{2}$$

donde la función $F(x,\ y,\ z)$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial z}$ son continuas sobre la región $\Omega$ de los puntos $(x,\ y,\ z)$ del espacio tridimensional.

Se denomina *integral general de la ecuación diferencial* (2) la igualdad

$$\Phi(x,\ y,\ C) = 0, \tag{9}$$

donde la función $\Phi(x,\ y,\ z)$ es continuamente derivable sobre cierta región de los puntos $(x,\ y,\ z)$ y posee la propiedad siguiente: si se deriva la igualdad (9) respecto a $x$, suponiendo formalmente que $y = y(x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0, \tag{10}$$

y se excluye $C$ de las ecuaciones (9) y (10), obtendremos una ecuación diferencial equivalente a la ecuación (2).

La ecuación (2) se llama, además, ecuación diferencial de una familia de funciones (9) dependientes del parámetro $C$.

EJEMPLO 3. Examinemos la familia de funciones

$$y = (x - C)^3 \quad (-\infty < x < \infty) \tag{11}$$

dependientes del parámetro arbitrario $C$.

Derivemos la ecuación (11) respecto a $x$:

$$y' = 3(x - C)^2 \quad (-\infty < x < \infty) \tag{12}$$

y elevemos al cubo la igualdad obtenida:

$$(y')^3 = 27(x - C)^6. \tag{13}$$

Es fácil ver que hemos obtenido una ecuación diferencial equivalente a la ecuación (12). Pero entonces de (11) y (13) se deduce la ecuación diferencial

$$y'^3 - 27y^2 = 0. \tag{14}$$

Es fácil comprobar que toda función (11) satisface esta ecuación. Además, este hecho ya se deduce de lo que la ecuación diferencial (14) es el resultado de exclusión del parámetro $C$ en las igualdades (11) y (13).

Hemos demostrado que la igualdad (11) que contiene el parámetro arbitrario $C$ es la integral general de la ecuación diferencial (14).

A continuación estudiaremos algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden e indicaremos los métodos de su resolución que conducen a las familias de soluciones dependientes de un solo parámetro $C$. Por lo común estas familias serán precisamente las integrales generales de las ecuaciones diferenciales respectivas.

Surge la pregunta: ¿contiene o no la integral general de la ecuación diferencial dada de primer orden todas las soluciones de esta ecuación para todos valores del parámetro $C$? Hablando en general, esto no es así. Sin embargo, esto tiene lugar a ciencia cierta si la integral general de una ecuación diferencial de primer orden puede escribirse en la forma resuelta respecto a $C$

$$\Psi(x, y) = C \tag{15}$$

y en este caso el primer miembro de la ecuación (15) es una función *derivable continuamente.* Es totalmente justo el teorema siguiente.

TEOREMA 1. *Supongamos que se da la ecuación diferencial*

$$F(x, y, y') = 0, \quad (x, y, y') \in \Omega, \tag{2'}$$

*donde la función* $F(x, y, z)$ *junto con sus derivadas parciales* $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ *es continua sobre la región* $\Omega$ *del espacio* $(x, y, z)$ *y supongamos que la igualdad* (15) *es su integral general, donde* $\Psi(x, y)$ *es una función continuamente derivable sobre cierta región del plano* $(x, y)$.

*Entonces, si*

$$y = y(x), \quad (x, y(x), y'(x)) \in \Omega,$$

*es la solución de la ecuación* (15), *solución continuamente derivable en un intervalo* $(a, b)$ *para cierto valor de* $C$, *entonces ella es, por obligación, la solución de la ecuación diferencial* (2′) *y, al contrario, toda solución de la ecuación diferencial* (2′) *satisface la ecuación* (15) *en el intervalo donde está dada para cierta constante* $C$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ es la solución continuamente derivable de la ecuación (15) para una constante $C_0$:

$$\Psi(x, y(x)) = C_0, \quad x \in (a, b).$$

Derivemos esta identidad respecto a $x$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y(x))\, y'(x) = 0, \quad x \in (a, b). \tag{16}$$

Esto muestra que la función $y(x)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y)+\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y)\, y'=0 \tag{17}$$

y, por consiguiente, también la solución de la ecuación diferencial (2') que es equivalente sobre la región $\Omega$ a la ecuación (17) (según la definición de la integral general).

Al contrario, supongamos que $y(x)$, $a<x<b$, es la solución de la ecuación diferencial (2') y, por consiguiente, también la solución de la ecuación (17), o sea, supongamos que se cumple la identidad (16) la cual se puede escribir así:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x, y(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b).$$

Integrándola entre los límites $x_0$ y $x$, donde $x_0$, $x \in (a, b)$, obtenemos

$$0 \equiv \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dx}\Psi(x, y(x))\, dx = \Psi(x, y(x)) - \Psi(x_0, y(x_0)) =$$

$$= \Psi(x, y(x)) - C_0 \quad (C_0 = \Psi(x_0, y(x_0))),$$

o sea, la función $y(x)$ satisface en el intervalo $(a, b)$ la ecuación $\Psi(x, y) = C_0$.

*Observación para el ejemplo* 2. La integral general de la ecuación diferencial

$$y' = ky \quad (-\infty < y < \infty) \tag{6'}$$

en la forma resuelta respecto a $C$ (véase (7)) tiene el aspecto

$$ye^{-kx} = C \quad (-\infty < x,\ y < \infty). \tag{18}$$

Como el primer miembro de esta ecuación tiene las derivadas parciales continuas sobre todo el plano $(x, y)$, entonces, sobre la base del teorema 1, la integral general (18) contiene para diversas constantes $C$ todas las soluciones de la ecuación diferencial (6').

Para resolver el problema de Cauchy en cuanto a la ecuación diferencial (6') cuando la condición inicial $y(x_0) = y_0$, sustituimos $(x_0, y_0)$ en (18) y hallamos $C = C_0$:

$$y_0 e^{-kx} = C_0.$$

La solución del problema de Cauchy tiene la forma

$$ye^{-kx} = y_0 e^{-kx_0}$$

o bien

$$y = y_0 e^{k(x-x_0)} \quad (-\infty < x < \infty).$$

*Observación para el ejemplo* 3. En este ejemplo la ecuación diferencial puede escribirse en la forma

$$F(x, y, y') = 0, \tag{19}$$

donde la función

$$F(x, y, y') = y'^3 - 27y^2$$

es continuamente derivable en todo el espacio $(x, y, z)$ el cual vamos a designar por $\Omega$.

Ya sabemos que la integral general de esta ecuación tiene la forma

$$y = (x - C)^3 \quad (-\infty < x < \infty). \tag{11}$$

Si la ecuación (11) se resuelve respecto a $C$, obtenemos

$$\Psi(x, y) = C, \quad \Psi(x, y) = x - y^{1/3}. \tag{11'}$$

La derivada parcial de la función $\Psi$ respecto a $y$ no existe sobre el eje $y = 0$, por eso la condición del teorema 1 no se cumple. Sin

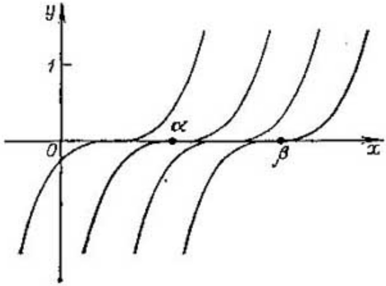


Fig. 2.

embargo, en este caso no se puede garantizar que toda solución de la ecuación diferencial (19) forme parte de su integral general para cierta $C$.

La fig. 2 muestra una familia de parábolas cúbicas (11) para diferentes valores de $C$. Cada una de estas parábolas es la curva integral de la ecuación diferencial (19). No obstante, existen, además, otras curvas integrales, por ejemplo, la curva representada en la fig. 2 con línea gruesa:

$$y(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^3, & x \leqslant \alpha, \\ 0, & \alpha < x < \beta, \\ (x-\beta)^3 & \beta \leqslant x. \end{cases}$$

Así pues, la ecuación diferencial (19) tiene la integral general (11) definida sobre todo el plano $(x, y)$, pero esta integral no contiene todas las soluciones de esta ecuación para diversos valores de $C$. Hay un conjunto infinito de soluciones correspondientes a los pares de números $(\alpha, \beta)$, donde $\alpha < \beta$, que no se obtienen de la familia (11) para cierto valor de $C$.

Sin embargo, si la ecuación diferencial (19) se examina para los valores positivos de $y$ $(y > 0)$, o sea, se supone que la función $F(x, y, z)$ se da en el semiespacio $y > 0$ que designemos por $\Omega_+$, entonces la integral general

$$\Psi(x, y) = x - y^{1/3} = C,$$
$$-\infty < C < \infty, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

se define por la función $\Psi(x, y)$ que es continuamente derivable en el semiespacio $\Omega_+$. Por eso en el caso dado es aplicable el teorema 1

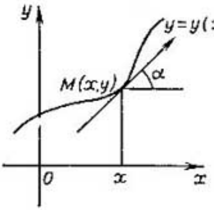


Fig. 3.

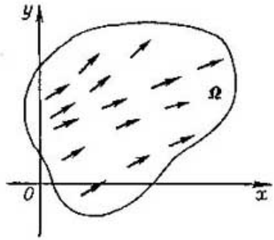


Fig. 4.

y la integral general contiene, para diferentes $C$, todas las soluciones de la ecuación diferencial que pertenecen al semiplano superior

$$\{-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty\}.$$

Semejante fenómeno tiene lugar asimismo para la región $\Omega_-$ de los puntos $(x, y, z)$, donde $y < 0$.

Señalemos que la ecuación diferencial en la forma resuelta respecto a la derivada

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{20}$$

establece una ligazón evidente entre las coordenadas del punto $M = (x, y)$ y la pendiente de la tangente $\frac{\partial y}{\partial x}$ a la curva integral en este punto (fig. 3):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Si la función $f(x, y)$ está definida sobre cierta región $\Omega$ del plano, a cada punto $M \in \Omega$ le corresponde cierta dirección cuya pendiente es igual a $f(x, y)$. Indicando esta dirección por el vector unitario que pasa por el punto $M$, obtenemos sobre la región $\Omega$ el *campo de direcciones* (fig. 4).

Las curvas integrales de la ecuación (20) son las curvas para las cuales las direcciones mencionadas son las direcciones de las tangentes. Resolver una ecuación diferencial significa hallar tales curvas que las direcciones de las tangentes a ellas en cada punto coincidan con la dirección del campo. Naturalmente, en el caso dado las curvas integrales pertenecen a la región $\Omega$.

EJEMPLO 4. $y' = y/x$.

El segundo miembro de esta ecuación está definido sobre el conjunto $\Omega$ de todos los puntos del plano $(x, y)$, a excepción de los pun-

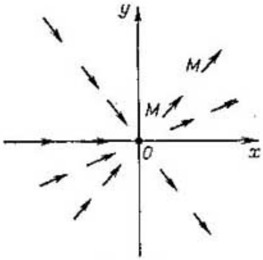


Fig. 5.

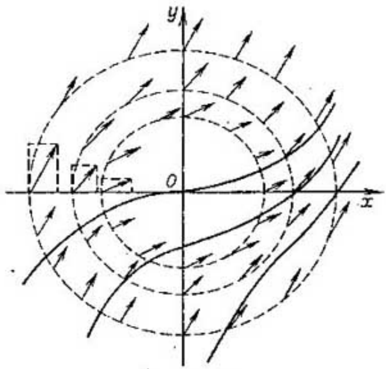


Fig. 6.

tos del eje $y$. Si los puntos $M = (x, y) \in \Omega$ están sobre la recta $y = kx$, entonces para ellos

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y) = f(x, kx) = \frac{kx}{x} = k \quad (x \neq 0),$$

o sea, el campo de direcciones tiene la forma representada en la fig. 5.

En este caso la dirección de la recta $y = kx$ coincide con la dirección del campo en cada punto de esta curva y, por consiguiente, los rayos sin el punto $(0, 0)$, que no son paralelos al eje $y$ y parten del punto nulo, son las curvas integrales.

Para construir el campo de direcciones es cómodo examinar los lugares geométricos de los puntos en los cuales las tangentes a las curvas integrales conservan una dirección constante. Tales lugares geométricos de los puntos se llaman *isoclinas*.

EJEMPLO 5. $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\sqrt{x^2 + y^2} = k$ es la ecuación de la isoclina correspondiente a determinado valor de $k$ $(y' = k)$, o sea, una circunferencia de radio $k$ (fig. 6).

Conociendo las isoclinas de una ecuación diferencial, es fácil dibujar un esbozo de las curvas integrales.

## § 1.3. Ecuaciones diferenciales elementales de primer orden

Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ unas funciones continuas sobre cierta región $\Omega$ del plano $(x, y)$.

La expresión

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \quad ((x, y) \in \Omega) \tag{1}$$

se llama *ecuación diferencial de primer orden*.

En realidad la expresión (1) reúne dos ecuaciones diferenciales de primer orden: respecto a la función $y(x)$ y respecto a la función $x(y)$.

En el primer caso por solución de la ecuación (1) se entiende la función $y = y(x)$ que está definida en cierto intervalo $(a, b)$ (dependiente de ella), tiene la derivada continua y satisface la ecuación (1):

$$M(x, y(x))\,dx + N(x, y(x))\,y'(x)\,dx = 0$$
$$(x \in (x, b), \quad (x, y(x)) \in \Omega).$$

Puesto que la diferencial $dx$ de la variable independiente $x$ no es igual a cero, en esta ecuación se puede simplificar por $dx$ y obtener un valor de $y(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial de primer orden escrita en su forma habitual:

$$M(x, y) + N(x, y)\,\frac{dy}{dx} = 0 \quad ((x, y) \in \Omega). \tag{2}$$

En lo que se refiere a las soluciones que tienen la forma $y = y(x)$ las ecuaciones diferenciales (1) y (2) son equivalentes.

Razonando análogamente, obtenemos que en cuanto a las soluciones que tienen la forma $x = x(y)$ la ecuación diferencial (1) es equivalente a la siguiente:

$$M(x, y)\,\frac{dx}{dy} + N(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \Omega). \tag{3}$$

Vamos a estudiar más detalladamente la ecuación diferencial (2) (respecto a $y$).

Supongamos que la función $N(x, y)$ es distinta de cero por doquier sobre $\Omega$ ($N(x, y) \neq 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$). Entonces ella, en virtud de su continuidad sobre el conjunto conexo $\Omega$, es positiva por doquier sobre $\Omega$ o bien negativa por doquier sobre $\Omega$. En este caso la ecuación (2) puede escribirse en la forma resuelta respecto a $\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2'}$$

o sea, las ecuaciones (2) y (2′) son equivalentes sobre $\Omega$. Sin embargo, si la función $N(x, y)$ es igual a cero en ciertos puntos de $\Omega$, entonces las ecuaciones (2) y (2′) no serán equivalentes más que en una parte $\omega$ de la región $\Omega$, allí donde la función $N(x, y)$ se distingue de cero.

Supongamos que en el punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ la función $N$ se anula ($N(x_0, y_0) = 0$). Si en este caso $M(x_0, y_0) \neq 0$, entonces, evidentemente, la ecuación (2) no tiene una solución que pase por este punto, ya que el segundo sumando del primer miembro de la ecuación (2) para $x = x_0$ e $y = y_0$ es igual a cero, mientras que el primer sumando, según la condición, no lo es.

Sin embargo, si a la vez con la igualdad $N(x_0, y_0) = 0$ se cumple también la igualdad $M(x_0, y_0) = 0$, entonces por el punto $(x_0, y_0)$ puede pasar la solución: una sola o varias o bien incluso un número infinito de soluciones. A continuación veremos esto de los ejemplos.

Una observación semejante se puede hacer también respecto a la ecuación diferencial (3). En estos razonamientos sólo es necesario cambiar de lugar $x$ e $y$, así como $M$ y $N$.

Examinemos además el caso cuando ambas funciones $M$ y $N$ se distinguen de cero por doquier sobre $\Omega$. En este caso el segundo miembro de la ecuación (2′) es también distinto de cero por doquier sobre $\Omega$ y tiene un mismo signo. Pero entonces la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial (2′) tiene la derivada $y'(x)$ del mismo signo. Esto muestra que la solución $y = y(x)$ es estrictamente monótona en el intervalo $(a, b)$ donde está dada. Pero entonces su función inversa es continuamente derivable $x = x(y)$ en cierto intervalo $(c, d)$. Con ello

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\frac{M}{N}} = -\frac{N}{M},$$

lo que muestra que la función inversa satisface la ecuación diferencial (3).

Pues, resulta que si ambas funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ se distinguen de cero en todos los puntos de $\Omega$, toda solución de la ecuación (1) en la forma $y = y(x)$ tiene la función inversa $x = x(y)$ que es asimismo la solución de esta ecuación, pero en la forma $x = x(y)$.

**1. Ecuaciones de variables separadas.** La ecuación (1) se llama ecuación diferencial de primer orden con *variables separadas* si

$$M(x, y) = \varphi(x), \quad x \in (a, b),$$
$$N(x, y) = \psi(y), \quad y \in (c, d).$$

Tiene la forma

$$\varphi(x)\, dx + \psi(y)\, dy = 0. \tag{4}$$

Abajo supondremos que $\varphi(x)$ y $\psi(y)$ son funciones continuas. Vamos a admitir que $y = y(x)$ es la solución de la ecuación diferencial (4) en el rectángulo

$$\Delta = \begin{Bmatrix} a < x < b \\ c < y < d \end{Bmatrix},$$

definido en cierto intervalo $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.

Entonces tiene lugar la identidad

$$\varphi(x)\, dx = -\psi[y(x)]\, dy(x), \quad x \in (\alpha, \beta),$$

de donde, integrando, obtenemos

$$\int \varphi(x)\, dx = -\int \psi[y(x)]\, dy(x) + C_1 = -\int \psi(y)\, dy + C.$$

Aquí las integrales $\int \varphi(x)\, dx$ y $\int \psi(y)\, dy$ son ciertas primitivas de $\varphi(x)$ y $\psi(y)$ escogidas por nosotros:

$$\int \varphi(x)\, dx = \Phi(x), \quad a < x < b,$$
$$\int \psi(x)\, dy = \Psi(y), \quad c < y < d,$$

en la segunda igualdad se ha efectuado la sustitución de la variable $y(x) = y$ en la integral indefinida (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 5.2); la constante $C$ depende de la solución $y(x)$.

Así, pues, toda solución $y(x)$ de nuestra ecuación diferencial en el rectángulo indicado satisface la ecuación

$$\int \varphi(x)\, dx + \int \psi(y)\, dy = C$$

para cierta constante $C$ o bien la ecuación

$$\Phi(x) + \Psi(y) = C. \tag{5}$$

El primer miembro de la igualdad (5) es la función $F(x, y)$, continuamente derivable sobre el rectángulo

$$\Delta = \{a < x < b, \ c < y < d\},$$

que tiene las propiedades

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\varphi(x), \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\psi(y).$$

Si derivamos formalmente (5) respecto a $x$, suponiendo que $y=y(x)$, obtenemos

$$\varphi(x)+\psi(y)\frac{dy}{dx}=0,$$

o sea, la ecuación diferencial inicial (4).

Ahora bien, la igualdad (5) es la integral general de la ecuación diferencial (4) para sus soluciones cuya forma es $y=y(x)$. Conforme al teorema 1 del § 1.2, en la ecuación (5) todas las soluciones $y=y(x)$, continuamente derivables en $(\alpha, \beta)$, son, para cualesquiera constantes $C$, las soluciones de la ecuación diferencial (4) que tienen la forma $y=y(x)$ y al revés. Además, la afirmación inversa la hemos demostrado directamente.

Si razonamos de manera análoga, cambiando de lugar el papel de $x$ e $y$, volveremos a obtener la igualdad (5); sin embargo, ahora será la integral general, que contiene todas las soluciones posibles de forma $x=x(y)$, $y\in(\gamma, \delta)\subset(c, d)$, de nuestra ecuación diferencial (4).

Así, pues, la igualdad (5) será la integral general de la ecuación diferencial (4) tanto para las soluciones de forma $y=y(x)$ como para las de forma $x=x(y)$.

EJEMPLO 1. $x^2\,dx=y\,dy$, $\Delta=\{a<x<b,\ c<y<d\}$.

$$\int x^2\,dx-\int y\,dy=C; \quad \frac{x^3}{3}-\frac{y^2}{2}=C,$$

o sea, la integral general.

EJEMPLO 2. $e^{x^2}\,dx=e^{y^2}\,dy$; $\int e^{x^2}\,dx-\int e^{y^2}\,dy=C.$

Estas integrales no pueden expresarse en funciones elementales. No obstante, consideramos resuelto este problema desde el punto de vista de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

**II. Ecuaciones con variables separables.** Si $M(x, y)=\varphi_1(x)\times\psi_1(y)$, $N(x, y)=\varphi_2(x)\psi_2(y)$, la ecuación (1) se llama ecuación con *variables separables*:

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)\,dx+\varphi_2(x)\psi_2(y)\,dy=0. \tag{6}$$

Para aquellas $(x, y)$ para las cuales $\varphi_2(x)\cdot\psi_1(y)\neq 0$ vamos a dividir por este producto el primero y segundo miembros de la ecuación (6). Entonces obtenemos una ecuación con variables separadas

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx+\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy=0.$$

La integral general de esta ecuación se encuentra al igual que en el caso I. Sin embargo, pueden existir, además, las soluciones que pasan por los puntos $(x_0, y_0)$ que satisfacen la ecuación $\varphi_2(x_0) \times \times \psi_1(y_0) = 0$.

**III. Ecuaciones homogéneas.** La función $M(x, y)$ se llama *homogénea de grado m* si para $x$, $y$ cualesquiera y $t > 0$ se cumple la igualdad

$$M(tx, ty) = t^m M(x, y).$$

Si las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado $m$, la ecuación diferencial

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{7}$$

se denomina *homogénea*.

Se puede transformarla del modo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{M\left(x, |x|\frac{y}{|x|}\right)}{N\left(x, |x|\frac{y}{|x|}\right)} =$$

$$= -\frac{|x|^m M\left(\pm 1, \pm\frac{y}{x}\right)}{|x|^m N\left(\pm 1, \pm\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

o sea,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{8}$$

donde $f$ es cierta función de una variable.

En vez de $y$ introduzcamos la nueva función $z$ (de la $x$) por medio de la sustitución

$$y = x \cdot z, \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z.$$

Entonces

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z)$$

o bien

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Por consiguiente,

$$\ln\left|\frac{x}{C}\right| = \int \frac{dz}{f(z) - z} \quad (C \neq 0)$$

o bien

$$x = C \exp\left(\int \frac{dz}{f(z) - z}\right),$$

donde $C \neq 0$ es una constante arbitraria.

Señalemos una ecuación más general que la (8):

$$\frac{dy}{dx} = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right). \tag{9}$$

Puede ser resuelta por la sustitución

$$y = x^{\alpha} z; \quad \frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} z + x^{\alpha} \frac{dz}{dx};$$

entonces

$$\alpha x^{\alpha-1} z + x^{\alpha} \frac{dz}{dx} = x^{\alpha-1} f(z), \quad x^{\alpha} \frac{dz}{dx} = x^{\alpha-1}[f(z) - \alpha z], \quad \frac{dz}{f(z) - \alpha z} =$$
$$= \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|\frac{x}{C}\right| = \int \frac{dz}{f(z) - \alpha z} \quad (C \neq 0), \quad x = C \exp \int \frac{dz}{f(z) - \alpha z}, \tag{10}$$

donde $C \neq 0$ es la constante arbitraria.

EJEMPLO 3. $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$.

La ecuación dada es homogénea, ya que las funciones

$$M(x, y) = x^2 + y^2, \quad N(x, y) = xy$$

son homogéneas de grado $m = 2$. Hagamos la sustitución $y = zx$, $dy = z\,dx + x\,dz$. Entonces la ecuación se escribirá así:

$$(x^2 + z^2x^2)\,dx + x^2z\,(z\,dx + x\,dz) = 0$$

o bien

$$(1 + 2z^2)\,dx + zx\,dz = 0.$$

Dividiendo las variables, obtenemos

$$\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{1 + 2z^2}, \quad \ln\left|\frac{x}{C}\right| = -\frac{1}{4}\ln(1 + 2z^2), \quad x = \frac{C}{\sqrt[4]{1 + 2z^2}}.$$

Puesto que en este caso $z = y/x$, entonces

$$x^4 = \frac{C^4x^2}{x^2 + 2y^2}, \quad 2y^2 + x^2 = \frac{C^4}{x^2}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{C^4}{2x^2} - \frac{x^2}{2}}.$$

EJEMPLO 4.

$$y' = Ax^{\nu} + By^{\nu},$$

$$y' = x^{\nu}\left[A + B\frac{y^{\nu}}{x^{\nu}}\right] = x^{\nu}\left[A + B\left(\frac{y}{x^{\nu/\nu}}\right)^{\nu}\right]. \tag{11}$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación (9) si

$$\gamma + 1 = \frac{\gamma}{\nu}. \tag{12}$$

La ecuación (11) para $\gamma = -2$ y $\nu = 2$ (la condición (12) está cumplida) tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = Ax^{-2} + By^2$$

y su solución se escribe por la fórmula (10), donde

$$f(z) = A + Bz^2, \quad \alpha = \gamma + 1 = -1.$$

La ecuación obtenida es un caso particular de la *ecuación de Riccati*

$$y' = By^2 + R(x)$$

que no se integra en cuadraturas sino en los casos excepcionales. Hemos demostrado que para $R(x) = Ax^{-2}$ la ecuación de Riccati se resuelve en cuadraturas. Notemos que para $R(x) = \text{const}$ la ecuación de Riccati es una ecuación con variables separables.

Si $R(x) = Ax^{\alpha}$ y $\alpha = \alpha_n = -\frac{4n}{2n-1}$ ($n$ es un número entero), entonces la sustitución

$$\frac{1}{\eta(\xi)} = x^2 y(x) + \frac{x}{B}, \quad \xi = x^{\alpha_n + 3} \quad (n \geqslant 1)$$

reduce la ecuación de Riccati a la forma

$$\eta' = -\frac{A}{\alpha_n + 3}\eta^2 - \frac{B}{\alpha_n + 3}\xi^{\alpha_{n-1}}.$$

Aplicando sucesivamente esta sustitución se puede reducir la ecuación inicial al caso $\alpha_0 = 0$ ($R(x) = \text{const}$).

No obstante, si $n \leqslant -1$, la sustitución

$$\frac{1}{y(x)} = \xi^2 \eta(\xi) + \frac{\alpha_n + 1}{A}\xi, \quad \xi = x^{-\alpha_n - 1},$$

reduce la ecuación a la forma

$$\eta' = \frac{A}{\alpha_n + 1}\eta^2 + \frac{B}{\alpha_n + 1}\xi^{\alpha_{n+1}}.$$

Usando esta sustitución un número necesario de veces, reduciremos la ecuación de Riccati al caso $\alpha_0 = 0$.

En todos los demás casos la ecuación de Riccati no se resuelve en cuadraturas.

EJEMPLO 5. $xy\;dy - (x^4 + y^2)\,dx = 0.$
Tenemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^2}{xy}=\frac{x^4\left(1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2\right)}{x^3\cdot\frac{y}{x^2}}=x\frac{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}{\frac{y}{x^2}}.$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación (9) cuando $\alpha = 2$, $f(z) = (1 + z^2)/z$.

**IV. Ecuación lineal.** La ecuación

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=f(x),\quad a<x<b, \tag{13}$$

donde $p(x)$, $f(x)$ son funciones continuas de $x$ en un intervalo $(a, b)$ se llama ecuación diferencial *lineal* de primer orden. La función incógnita $y(x)$ y su derivada entran en esta ecuación en primer grado linealmente.

Si $f(x) \equiv 0$, la ecuación

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=0 \tag{14}$$

se denomina *homogénea* lineal y, respectivamente, la ecuación (13) se denomina *no homogénea* lineal.

La ecuación homogénea lineal tiene la solución $y(x) \equiv 0$. Es una ecuación con variables separables:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)\,dx\quad(y\neq 0),\quad \ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\int p(x)\,dx\quad(C\neq 0),$$

$$y=C\exp\left(-\int p(x)\,dx\right). \tag{15}$$

Si en (15) permitimos que la constante $C$ tome el valor nulo, entonces la fórmula (15) dará también la solución $y(x) \equiv 0$.

La fórmula (15) muestra que el gráfico de solución de una ecuación homogénea lineal se encuentra por encima del eje $Ox$ si $C > 0$, o bien por debajo del eje $Ox$ si $C < 0$.

Hemos llegado a la fórmula (15) utilizando el siguiente esquema. Hemos supuesto que la función $y = y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial (14), solución distinta de cero en todos los puntos de $(a, b)$ y hemos llegado a la conclusión de que ella se define por la fórmula (15) para cierta $C$. Hay que tener en cuenta que la integral $\int p(x)\,dx$ designa cierta función primitiva de $p(x)$ en el intervalo $(a, b)$, por eso también la solución que se da por la fórmula (15) está definida en $(a, b)$. Es fácil comprobar que las funciones (15), para todo valor de $C$ incluso si $C = 0$, son soluciones de la ecuación diferencial (14).

Queda por aclarar la cuestión acerca de la existencia de soluciones de nuestra ecuación diferencial que corten el eje $x$. Para esto podemos hacer uso del teorema 1 del § 1.2. Despejando $C$ en la fórmula (15), obtenemos

$$C = y \exp \left( \int p(x)\,dx \right).$$

Es fácil comprobar que el segundo miembro de esta igualdad es la función de $(x, y)$ que tiene las derivadas parciales continuas sobre la franja $\{-\infty < y < \infty,\ a < x < b\}$; también es fácil comprobar el hecho de que si derivamos esta igualdad respecto a $x$, suponiendo que $y = y(x)$, obtenemos la ecuación diferencial (14). Entonces, con arreglo al teorema 1 del § 1.2, la fórmula (15) contiene todas las soluciones de la ecuación (14). Ahora bien, *la ecuación lineal* (14) *no tiene soluciones que corten el eje* $x$.

La ecuación (13) suele resolverse por el *método de Bernoulli* que consiste en lo siguiente. Busquemos la solución en la forma del producto de dos funciones

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Tenemos $y' = uv' + u'v$. Sustituyendo los valores de $y$ e $y'$ en (13), obtenemos $uv' + u'v + p(x)\,uv = f(x)$ o bien $u(v' + p(x)\,v) + u'v = f(x)$.

Escojamos una función $v$ de modo que $v' + p(x)\,v = 0$. Respecto a $v(x)$ tenemos la ecuación homogénea lineal, por lo tanto, según la fórmula (15) podemos escribir $v = \exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$. Para esta función $v$ obtenemos $u'v = f(x)$, de donde

$$du = \frac{f(x)}{v(x)} = dx,$$

$$u = \int \frac{f(x)}{v(x)}\,dx + C = \int f(x) \exp\left( \int p(x)\,dx \right) dx + C.$$

Por consiguiente, la solución general, o sea cualquiera, de la ecuación (13) se escribe en la forma

$$y = u \cdot v = C \exp\left( -\int p(x)\,dx \right) + \exp\left( -\int p\,dx \right) \int f(x) \exp\left( \int p\,dx \right) dx, \qquad (16)$$

donde $C$ es una constante arbitraria.

La fórmula (16) muestra que la solución general de una *ecuación no homogénea lineal es igual a la suma de la solución de la ecuación homogénea correspondiente y de la solución particular de la ecuación no homogénea* (que se obtiene de (16) cuando $C = 0$).

Recomendamos no aplicar formalmente la fórmula (16) y en cada ejemplo repetir todos los cálculos.

EJEMPLO 6. Resolver la ecuación $y' - y = \operatorname{sen} x$.

Aquí $p(x) = -1$, $f(x) = \operatorname{sen} x$. Pongamos $y = u \cdot v$,

$$y' = u'v + u \cdot v', \quad uv' + u'v - uv = \operatorname{sen} x,$$

$$u(v' - v) + u'v = \operatorname{sen} x, \quad v' - v = 0, \quad v = \exp \int dx = e^x,$$

$$u'e^x = \operatorname{sen} x, \quad u' = e^{-x} \operatorname{sen} x, \quad u = \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx + C;$$

$$y = e^x \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx + Ce^x.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$y = Ce^x - \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x).$$

*Observación.* La ecuación (13) se puede resolver asimismo por el *método de variación de una constante arbitraria.* Si $C$ es una constante, la fórmula (15) ofrece la solución de la ecuación homogénea. Supongamos que $C$ es la función de $x$ y escojámosla de modo que la expresión $y = C(x) \exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$ sea la solución de la ecuación (13). Es el mismo método de Bernoulli para $u = C(x)$, $v = \exp \times \times \left(-\int p(x)\,dx\right)$.

**Ecuación de Bernoulli**[1])

$$y' + p(x)\,y = y^{\alpha} f(x), \tag{17}$$

donde $\alpha$ es un número real cualquiera.

Si $\alpha$ es igual a cero o a la unidad, obtenemos una ecuación diferencial lineal. Si $\alpha \neq 0, 1$, la sustitución de $z = y^{1-\alpha}$ vuelve a conducirnos a una ecuación lineal respecto a la función $z(x)$.

La ecuación de Bernoulli se puede resolver directamente por el método de Bernoulli, suponiendo $y = u(x) \cdot v(x)$. Señalemos que cuando $\alpha > 0$ la función $y(x) \equiv 0$ es la solución de la ecuación de Bernoulli.

---

[1]) J. Bernoulli (1654—1705), célebre matemático suizo.

## § 1.4. Teorema de existencia de la solución de una ecuación diferencial de primer orden

La clase de ecuaciones diferenciales que podemos efectivamente resolver es muy estrecha. Por ejemplo, la solución de la ecuación diferencial que parece sencilla a primera vista

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

no puede ser reducida, como resulta, incluso a las cuadraturas (integrales). Por eso nos vemos obligados, las más de las veces, a resolver ecuaciones diferenciales de un modo aproximado.

Antes de aplicar un método aproximado cualquiera, es necesario saber si existe o no en realidad una solución de la ecuación diferencial. Muy importante también es saber de antemano si esta solución es la única o no.

A continuación formulamos las condiciones que garantizan la existencia y la unicidad de la solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{1}$$

para la condición inicial

$$y(x_0)=y_0. \tag{2}$$

Tiene lugar el teorema siguiente.

TEOREMA 1. *Supongamos que la función $f(x, y)$ es continua sobre el rectángulo*

$$D=\{x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\ \ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$$

*y tiene en éste una derivada acotada $\frac{\partial f}{\partial y}$ que satisface la desigualdad*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant N. \tag{3}$$

*Entonces sobre el segmento $\sigma=[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, donde*

$$\delta<\text{mín}\left\{a,\ \frac{1}{N},\ \frac{b}{M}\right\},\quad M=\max_{(x,\ y)\in D}|f(x,\ y)|, \tag{4}$$

*existe una solución, y sólo una, de la ecuación* (1) *que satisface la condición inicial* (2).

*En este caso se cumple la inecuación*

$$|y(x)-y_0|\leqslant b,\quad \forall\, x\in\sigma.$$

*La solución $y(x)$ es continuamente derivable sobre el segmento $\sigma$. Y si $f(x, y)$ tiene de hecho las derivadas parciales continuas de orden $p$ respecto a $x$ e $y$, entonces $y(x)$ tiene sobre el segmento $\sigma$ las derivadas continuas hasta el orden $p + 1$ inclusive.*

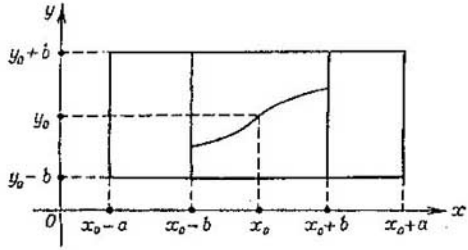


Fig. 7.

La fig. 7 dentro del plano $(x, y)$ muestra el rectángulo $D$ y el rectángulo que le pertenece

$$D_1 = \{x_0 - \delta < x \leqslant x_0 + \delta, \ \ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}.$$

El teorema afirma que si sobre el rectángulo $D$ la función $f(x, y)$ es continua y tiene una derivada parcial acotada $\frac{\partial f}{\partial y}$ que satisface la desigualdad (3), por este punto $(x_0, y_0)$ pasa una sola curva integral $y = y(x)$ determinada para todos los valores de $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Esta curva pertenece por completo al rectángulo $D_1$. El número $\delta$ satisface las relaciones (4).

Subrayemos que el teorema 1 garantiza la existencia del segmento determinado

$$\sigma = [x_0 - \delta, \ x_0 + \delta]$$

en el cual existe, a ciencia cierta, la solución

$$y = y(x)$$

de la ecuación (1), solución que pasa por el punto $(x_0, y_0)$.

Si necesitáramos hallar esta solución de un modo aproximado, entonces, al disponer de la información indicada, organizaríamos la obtención de la solución aproximada precisamente sobre este segmento $\sigma$, puesto que no se puede garantizar que la solución señalada quede determinada fuera de $\sigma$.

El teorema 1 será demostrado en el § 1.6 y ahora vamos a examinar un ejemplo.

EJEMPLO. La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 \tag{5}$$

es un caso particular de la ecuación diferencial (1).

Su segundo miembro no depende de $x$. En este caso la función $f(x, y)$ es igual a $-y^2$ cualesquiera que sea $x$.

Puesto que la función $-y^2$, para cualquier $y$, es continua junto con su derivada respecto a $y$, entonces la función $f(x, y)$ que se determina] por ella será continua junto con su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ sobre todo en el plano $(x, y)$. Por eso, sin resolver la ecuación (5), se puede concluir sobre la base del teorema de existencia que por todo punto $(x_0, y_0)$ pasa una curva integral, y sólo una, de la ecuación (5).

Sean $x_0 = 3$, $y_0 = 1$. Asignemos un rectángulo arbitrario

$$D = \{3 - a \leqslant x \leqslant 3 + a, \ \ 1 - b \leqslant y \leqslant 1 + b\} \ \ (0 < a, b)$$

Para este rectángulo

$$M = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)| = \max_{y \in [1-b, 1+b} |-y^2| = \max_{1-b \leqslant y \leqslant 1+b} y^2 = (1+b)^2;$$

$$N = \max_{(x, y) \in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_{1-b \leqslant y \leqslant 1+b} |-2y| = 2(1+b).$$

Por consiguiente,

$$\delta < \min\left\{a, \frac{1}{2(1+b)}, \ \frac{b}{(1+b)^2}\right\} < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

La ecuación (5) se resuelve fácilmente. Su integral general en el semiplano superior $(y > 0)$ y en el semiplano inferior $(y < 0)$ se define por la igualdad

$$y = \frac{1}{x - C}. \tag{7}$$

Existe una solución más: $y \equiv 0$, pero no nos interesará.

Entre las soluciones (7) escojamos la que pasa por el punto (3, 1). Evidentemente, ésta es la solución

$$y = \frac{1}{x-2}.$$

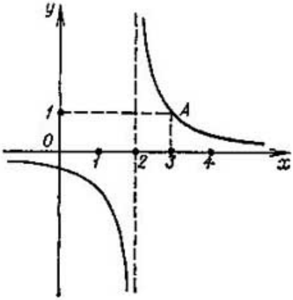

Fig. 8.

Su gráfico está representado en la fig. 8. Vemos que la curva integral de la ecuación (5) que pasa por el punto $A = (3, 1)$ tiende hacia el infinito cuando $x \to 2$.

El intervalo máximo, con el centro en el punto $x = 3$, en el cual está determinada nuestra curva integral es el intervalo $(2, 4)$. La relación (6) obtenida del teorema general de existencia ofrece un intervalo un poco menor.

El teorema de existencia de la solución de una ecuación diferencial será demostrado partiendo de las consideraciones generales que se refieren a la teoría de los espacios métricos. El párrafo siguiente será dedicado a esta teoría.

## § 1.5. Espacio métrico

Sea $M$ un conjunto de elementos $x, y, z, \ldots$ de una naturaleza arbitraria.

El conjunto $M$ se llama *espacio métrico* si a cada par de sus elementos le corresponde un número no negativo $\rho(x, y)$, que se denomina *distancia* entre los elementos $x$ e $y$, y que satisface las propiedades siguientes (*axiomas de la distancia*):

1) $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall\, x, y, z \in M$.

La axioma (3) suele llamarse *desigualdad triangular*. La función $\rho(x, y)$ de dos argumentos $x$, $y$ la llamaremos, además *métrica* del espacio $M$.

Es fácil ver que el espacio de $n$ dimensiones $R_n$ con la métrica

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, es un espacio métrico.

El conjunto $C[a, b]$ de todas las funciones continuas dadas en $[a, b]$ será un espacio métrico si la métrica se introduce por la fórmula

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)|. \tag{1}$$

Las axiomas de la distancia se comprueban fácilmente.

En adelante la expresión $\{x^n\}$ designará cierta sucesión de elementos $x^n \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ahora bien, $x^n$ denota el elemento que lleva el número de orden $n$ y no la potencia del elemento $x$.

El elemento $x^0 \in M$ es el límite $\{x^n\}$, si

$$\rho(x^n, x^0) \to 0, \quad n \to \infty.$$

En este caso la sucesión $\{x^n\}$ se llama *convergente*.

La sucesión $\{x^n\}$ se denomina *fundamental* si $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N$ tal que

$$\rho(x^m, x^n) < \varepsilon$$

cuando $m, n > N$.

Si la sucesión $\{x^n\}$ converge hacia $x^0 \in M$, entonces ella es fundamental. En efecto, del hecho de que $\{x^n\}$ converge hacia $x^0$ resulta que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N$ tal que $\rho(x^n, x^0) < \varepsilon$, $\forall n > N$. Por eso sobre la base de la desigualdad triangular

$$\rho(x^n, x^m) \leqslant \rho(x^n, x^0) + \rho(x^0, x^m) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

cuando $m, n > N$.

La afirmación inversa no siempre es justa. Por ejemplo, si $M = (0, 1)$ es un intervalo $0 < x < 1$ y $\rho(x, y) = |x - y|$, entonces $\{1/n\}$ es una sucesión fundamental. No obstante, ella no converge hacia un elemento del espacio $M$ (converge hacia cero que no pertenece a $M$).

El espacio métrico $M$ se llama *completo* si en éste toda sucesión fundamental converge hacia un elemento de este mismo espacio.

Sabemos que el espacio unidimensional $R_1$ (de los números) es completo (¡criterio de Cauchy!). Se puede demostrar que también el espacio $R_n$ es completo cuando $\forall n \geqslant 1$.

TEOREMA 1. *El espacio $C[a, b]$ es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que los elementos de este espacio $\{f_n(t)\}$ forman una sucesión fundamental en el significado de la métrica (1): para todo $\varepsilon > 0\ \exists N$ tal que

$$\rho(f_n, f_m) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \tag{2}$$

cuando $m, n > N$.

De (2) se deduce que para un número fijo $t \in [a, b]$

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad (n, m > N). \tag{3}$$

Esto último significa que la sucesión numérica $\{f_n(t)\}$ es fundamental, por eso, sobre la base del criterio de Cauchy, converge hacia cierto número real que designamos por $f(t)$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t), \quad \forall t \in [a, b]. \tag{4}$$

Pasando al límite en la desigualdad (3) cuando $m \to \infty$, obtenemos

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon, \quad n > N, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{5}$$

De aquí

$$\sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon, \quad n > N. \tag{6}$$

Esto muestra que la sucesión $\{f_n(t)\}$ converge *uniformemente* hacia $f(t)$ en $[a, b]$ y puesto que las funciones $f_n(t)$ son continuas en $[a, b]$, la función límite $f(t)$ también es continua en $[a, b]$ [1], o sea, $f(t) \in C[a, b]$. El teorema queda demostrado.

[1] Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 9.8, teorema 2.

*Observación.* Ahora en la desigualdad (6) se puede sustituir el símbolo sup por máx.

Supongamos que en el espacio métrico completo $M$ se da un operador que aplica $M$ en sí

$$z = Fx \quad (x \in M, \ z \in M).$$

Llamaremos *contractivo* al operador $F$ si

$$\rho\ (Fx,\ Fy) \leqslant \alpha\rho\ (x,\ y),\ \forall x,\ y \in M,\quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

donde el número $x \in M$ se denomina *punto fijo* del operador $F$, si $Fx = x$.

Llamaremos al operador $F$ *continuo* en el punto $x^0$, si

$$\lim_{x^n \to x^0} Fx^n = Fx^0$$

$$(\text{o sea, } \rho\ (Fx^n,\ Fx^0) \to 0,\ n \to \infty,\ \forall\, x^n \to x^0).$$

Es fácil ver que un operador contractivo es siempre continuo en cualquier punto $x^0 \in M$

$$\rho\ (Fx^n,\ Fx^0) \leqslant \alpha\rho\ (x^n,\ x^0) \to 0,\quad n \to \infty.$$

TEOREMA 2. *Si un operador contractivo $F$ aplica en sí un espacio métrico completo $M$, entonces existe un único punto fijo de este operador.*

Este teorema se denomina *principio de aplicaciones contraídas.*

DEMONTRACIÓN. Demostremos que no pueden existir dos puntos fijos. Sean $x^1$, $x^2$ puntos fijos: $Fx^1 = x^1$, $Fx^2 = x^2$. Entonces

$$\rho\ (x^1,\ x^2) = \rho\ (Fx^1,\ Fx^2) \leqslant \alpha\rho\ (x^1,\ x^2)\quad (\alpha < 1). \tag{7}$$

Si suponemos que $\rho\ (x^1,\ x^2) > 0$, entonces de (7) obtenemos $\alpha \geqslant 1$ lo cual no puede ser. Por lo tanto, $\rho\ (x^1,\ x^2) = 0$ y $x^1 = x^2$.

Pasamos a la demostración de la existencia de un punto fijo.

Sea $x^0$ un punto cualquiera del espacio $M$. Escribamos la sucesión de los elementos:

$$x^0,\ x^1 = Fx^0,\ \ x^2 = Fx^1,\ \ldots,\ x^n = Fx^{n-1},\ \ldots$$

Esta sucesión la llamaremos *iterativa*, engendrada por el operador $F$. Mostremos que es fundamental. Tenemos

$$\rho\ (x^n,\ x^{n-1}) = \rho\ (Fx^{n-1},\ Fx^{n-2}) \leqslant \alpha\rho\ (x^{n-1},\ x^{n-2}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^2\rho\ (x^{n-2},\ x^{n-3}) \leqslant\ \ldots \leqslant \alpha^{n-1}\rho\ (x^1,\ x^0),\ \ (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{8}$$

Luego, sobre la base de la desigualdad triangular y (8), obtenemos $(n > m)$

$$\rho\ (x^n,\ x^m) \leqslant \rho\ (x^n,\ x^{n-1}) + \rho\ (x^{n-1},\ x^{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + \rho\ (x^{m+1},\ x^m) \leqslant [\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha^m]\ \rho\ (x^1,\ x^0).$$

Puesto que por la condición $0 \leqslant \alpha < 1$, entonces

$$\rho(x^n, x^m) \leqslant [\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots] \rho(x^1, x^0) = \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \rho(x^1, x^0) \to 0$$

cuando $m \to \infty$, ya que $\rho(x^1, x^0)$ es un número finito.

Así, pues, la sucesión $\{x^n\}$ es fundamental y puesto que el espacio $M$ es completo, ella converge hacia cierto elemento $\bar{x}$ de este espacio

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \bar{x} \in M.$$

Vamos a demostrar que $\bar{x}$ es un punto fijo:

$$\rho(F\bar{x}, \bar{x}) \leqslant \rho(F\bar{x}, x^n) + \rho(x^n, \bar{x}) = \rho(F\bar{x}, Fx^{n-1}) +$$

$$+ \rho(x^n, \bar{x}) \leqslant \alpha\rho(\bar{x}, x^{n-1}) + \rho(x^n, \bar{x}) < \varepsilon$$

cuando $n > N = N(\varepsilon)$.

Ahora bien, $\rho(\bar{x}, F\bar{x}) = 0$ y según el primer axioma de la distancia sacamos la conclusión de que $F\bar{x} = \bar{x}$, o sea, $\bar{x}$ es un punto fijo El teorema queda demostrado.

*Observación.* Utilizando el hecho de que $\bar{x}$ es un punto fijo, obtenemos

$$\rho(\bar{x}, x^n) = \rho(F\bar{x}, Fx^{n-1}) \leqslant \alpha\rho(\bar{x}, x^{n-1}) =$$

$$= \alpha\rho(F\bar{x}, Fx^{n-2}) \leqslant \alpha^2\rho(\bar{x}, x^{n-2}) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n\rho(\bar{x}, x^0). \quad (9)$$

Luego

$$\rho(x^n, \bar{x}) \leqslant \rho(x^n, x^{n+1}) + \rho(x^{n+1}, \bar{x}) \leqslant \alpha\rho(x^{n-1}, x^n) + \alpha\rho(x^n, \bar{x}),$$

de donde

$$\rho(x^n, \bar{x}) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x^{n-1}, x^n) \quad (0 \leqslant \alpha < 1) \quad (10)$$

Las fórmulas (9) y (10) muestran que $x^n$ es un valor aproximado del punto fijo con un error que no excede de $\alpha^n\rho(\bar{x}, x^0)$ y $\frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x^{n-1}, x^n)$.

Prestemos atención a la fórmula (10) que ofrece la estimación de la distancia entre $x^n$ y $\bar{x}$ por medio de la distancia entre dos puntos vecinos $x^n$ y $x^{n-1}$. Tomando $x^n$ como valor aproximado de $\bar{x}$, garantizamos que el error de la aproximación es menor que el segundo miembro (10).

EJEMPLO. Supongamos que la función $f(x)$ tiene la raíz (cero) en un segmento $[a, b]$. Vamos a admitir que $f$ tiene las derivadas de los órdenes primero y segundo y $f'(x) \neq 0$ en $[a, b]$, o sea, $f(x)$ es monótona en este segmento. Esto quiere decir que en $[a, b]$ hay una raíz de la función $f$.

Compongamos la función auxiliar

$$F(x) = x + k(x) \cdot f(x),$$

donde $k(x)$ es cierta función continuamente derivable, no igual a cero. Claro está que el punto fijo $\overline{x}$ de la función $F$ es el cero de $f$ y al revés.

Por eso, si la función $F$ aplica $[a, b]$ en $[a, b]$ y es contractiva sobre $[a, b]$, la sucesión iterativa $x_n = F(x_{n-1})$ converge hacia el punto fijo $F$ (o sea, hacia la raíz $f$) y $x_n$ se puede tomar como valor aproximado de la raíz. Para diferentes $k(x)$ tenemos diferentes métodos aproximados de cálculo de la raíz de la función $f(x)$.

Examinemos una función concreta $f(x) = x^3 + x - 1$ y nos propongamos a calcular aproximadamente la raíz de esta función con una exactitud hasta 0,01. Tenemos $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Por consiguiente, en el segmento $[0, 1]$ hay una sola raíz de $f(x)$. Pongamos $k(x) = -1/f'(x) < 0$. Entonces

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{2x^3+1}{3x^2+1}$$

Aclaremos si es contractiva o no esta función. Por el teorema de Lagrange obtenemos

$$\rho(F(x), F(y)) = |F(x) - F(y)| = |F'(\xi)| \cdot |x - y| \leqslant \leqslant \alpha\rho(x, y),$$

donde

$$\alpha = \max_x |F'(x)| = \max_x \left| \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right| = \max_x \left| \frac{(x^3+x-1)\, 6x}{(3x^2+1)^2} \right|$$

Para el segmento $[1/2, 3/4] \subset [0, 1]$

$$\alpha = \max_{1/2 \leqslant x \leqslant 3/4} |F'(x)| = F'(1/2) = \frac{18}{49} < 1$$

y los valores de la función $F$ no salen fuera de los límites $[1/2, 3/4]$:

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{2x^3+1}{3x^2+1} \leqslant \frac{3}{4}, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right].$$

Así, pues, en $[1/2, 3/4]$ la función $F(x)$ es contractiva. Sea $x_0 = 11/16 \in [1/2, 3/4]$, entonces $x_1 = F(x_0) = 3379/4952$ y

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) = \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_1 - x_0| \leqslant \frac{18}{31} \left| \frac{3379}{4952} - \frac{11}{16} \right| = \frac{18 \cdot 51}{31 \cdot 2 \cdot 4952} < \frac{1}{300} < 0{,}01.$$

Basándose en (10), se puede tomar $x_1$ como valor aproximado de la raíz de la función $f(x)$ con una exactitud hasta 0,01 (en realidad, con una exactitud hasta 0,003).

*Observación.* El método aproximado de calcular la raíz de la función $f(x)$ ($x_n \approx \overline{x}$) para $k(x) = -1/f'(x)$ lleva el nombre de *método de Newton* o *método de tangentes*. Los elementos de la sucesión

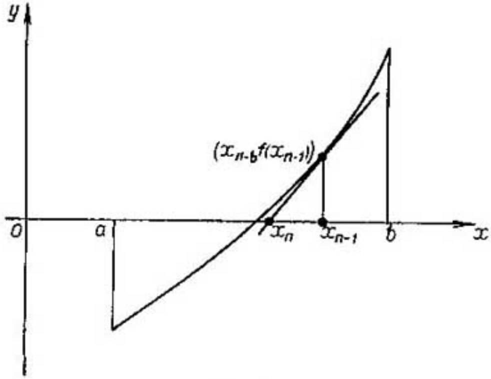


Fig. 9.

iterativa $\{x_n\}$ se pueden obtener a partir de consideraciones geométricas.

Si $x_{n-1} \in [a, b]$ ya se ha determinado, para obtener $x_n$ en el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ del gráfico de la función $f$ trazamos la tangente. Tomemos el punto de intersección de esta tangente con el eje $x$ por $x_n$ (fig. 9). La ecuación de la tangente tiene la forma

$$Y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

Poniendo en esta igualdad $Y = 0$, encontramos la solución $x = x_n$, donde

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ahora bien, los números $x_n$ son los elementos de la sucesión iterativa para la función $F(x) = x - (f(x)/f'(x))$.

PROBLEMA 1. La función $F(x) = x^2$ aplica $R_1$ en sí y tiene dos puntos fijos $x = 0$ y $x = 1$. ¿Por qué?

PROBLEMA 2. El operador de aplicación especular del plano $x_1Ox_2$ respecto al eje $Ox_1$ tiene la forma $Fx = (x_1, -x_2)$, $x = (x_1, x_2)$. ¿Qué puntos del plano son fijos para este operador?

## § 1.6. Demostración del teorema de existencia de la solución de una ecuación diferencial de primer orden

Supongamos que se da la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y), \tag{1}$$

donde la función $f(x,\ y)$ es continua sobre el rectángulo

$$D=\{x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\ \ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$$

y tiene una derivada parcial acotada $\frac{\partial f}{\partial y}$ que satisfaga la desigualdad $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant N$.

Es preciso demostrar que en el segmento $\sigma=[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ existe una solución, y sólo una, $y=y(x)$ de la ecuación diferencial (1) que satisface la condición inicial

$$y(x_0)=y_0, \tag{2}$$

donde

$$\delta<\text{mín}\left\{a,\ \frac{1}{N},\ \frac{b}{M}\right\},\qquad M=\max_{(x,\ y)\in D}|f(x,\ y)| \tag{3}$$

Con ello $y(x)$ es continuamente derivable sobre $\sigma$. La ecuación diferencial (1) con la condición (2) es equivalente a la ecuación integral siguiente:

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\ y(t))\,dt. \tag{4}$$

En efecto, supongamos que la función continua $y(x)$ es la solución de (4), entonces, derivando la identidad (4), obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y(x))\text{ y, evidentemente, }y(x_0)=y_0.$$

Ahora bien, la función $y(x)$ satisface la ecuación (1) con la condición (2).

Inversamente, supongamos que $y(x)$ es la solución de (1):

$$\frac{dy(t)}{dt}=f(t,\ y(t)),\quad x_0\leqslant t\leqslant x;\quad y(x_0)=y_0.$$

Entonces, integrando esta identidad entre los límites $x_0$ y $x$, obtenemos

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy(t)}{dt}\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\,dt$$

o bien

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\,dt,$$

o sea, $y(x)$ es la solución de la ecuación (4).

A continuación investigaremos la ecuación (4).

Designemos por $\mathfrak{M}$ un conjunto de funciones continuas $y = y(x)$ que se dan en el segmento $\sigma = [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ y satisfacen en éste la desigualdad $|y(x) - y_0| \leqslant b$.

Introduzcamos en $\mathfrak{M}$ la distancia

$$\rho(y,\ z) = \max_{x \in \sigma} |y(x) - z(x)|,\ y,\ z \in \mathfrak{M}$$

Así, pues, $\mathfrak{M}$ es un espacio métrico. Es un espacio completo. Efectivamente, si la sucesión de funciones $y_n \in \mathfrak{M}$ satisface, en el significado de la métrica introducida, la condición de Cauchy (o sea, una sucesión fundamental), entonces, como sabemos, esta sucesión converge uniformemente sobre un segmento $\sigma$ hacia cierta función $y = y(x)$ que es continua en este segmento (véase el § 1.5).

Para las funciones $y_n = y_n(x)$ se cumple la inecuación

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant b,\ x \in \sigma \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

la cual, después del paso al límite para $n \to \infty$, se conserva:

$$|y(x) - y_0| \leqslant b.$$

Pero entonces $y = y(x) \in \mathfrak{M}$ muestra que $\mathfrak{M}$ es un espacio completo.

La igualdad

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))\,dt, \quad y(x_0) = y_0, \tag{5}$$

hace corresponder a cada función $y = y(x) \in \mathfrak{M}$ cierta función $z = z(x) \in \mathfrak{M}$. En efecto, si $y \in \mathfrak{M}$, entonces $y = y(t)$ es una función continua cuyo gráfico pertenece al rectángulo

$$D_1 = \{x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta,\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\};$$

por eso, en virtud de la continuidad de $f(x, y)$ en el rectángulo $D_1$ el segundo miembro de la igualdad (5) es una función continua de $x$, o sea, $z = z(x)$ es una función continua en $\sigma$. Luego

$$|z(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt \right| \leqslant M\,|x - x_0| \leqslant M\delta < M \cdot \frac{b}{M} = b$$

lo que muestra que $z \in \mathfrak{M}$.

Así, pues, podemos suponer que la igualdad (5) define el operador

$$z = Fy, \ y \in \mathfrak{M}, \ z \in \mathfrak{M}$$

que aplica el espacio completo $\mathfrak{M}$ en el espacio completo $\mathfrak{M}$. Este operador es contractivo, porque si

$$z_1 = Fy_1, \ \ z_2 = Fy_2, \ y_1, \ y_2\,\mathfrak{M},$$

entonces

$$|z_1(x) - z_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))]\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} [y_1(t) - y_2(t)]\, f'_y(t, \lambda(t))\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} \rho(y_1, y_2)\, N\, dt \right| \leqslant \rho(y_1, y_2)\,\delta N = \alpha\rho(y_1, y_2), \quad (6)$$

donde el número $\alpha = \delta N$ satisface la desigualdad $0 \leqslant \alpha < 1$, porque según la condición $\delta < 1/N$. De (6) resulta que

$$\rho(z_1, z_2) = \max_{x \in \sigma} |z_1(x) - z_2(x)| \leqslant \alpha\rho(y_1, y_2).$$

Pero entonces, como sabemos, en $\mathfrak{M}$ (véase el § 1.5) existe la única función (punto fijo) $y = y(x) \in \mathfrak{M}$ para la cual

$$y = Fy$$

o, con otras palabras, la cual satisface la ecuación (4) y, por lo tanto, la ecuación (1) y la condición (2).

Aplicando el método de iteraciones, se puede obtener una solución aproximada de la ecuación (1):

$$y_n(x) = Fy_{n-1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt$$
$$(n = 1, 2, \ldots), \quad (7)$$

donde $y_0(x) \equiv y_0 \in \mathfrak{M}$.

A base de la fórmula (10) del § 1.5, la estimación de la aproximación tiene la forma

$$|y(x)-y_n(x)| \leqslant \frac{N\delta}{1-N\delta} \max_{x \in \sigma} |y_n(x)-y_{n-1}(x)|.$$

Existen también otros métodos aproximados de resolución del problema de Cauchy.

Muy sencillo es el método de Euler (véase el § 1.7).

Queda todavía por demostrar que si $f(x, y)$ tiene derivadas continuas respecto a $x$ e $y$ hasta el $p$-ésimo orden sobre el rectángulo $D$, entonces la solución indicada $y(x)$ de la ecuación (1) tiene derivadas continuas respecto a $x$ hasta el orden $(p+1)$ sobre el segmento $\sigma$.

En efecto, tiene lugar la identidad

$$y'(x)=f(x, y(x)), \quad x \in \sigma. \tag{8}$$

Puesto que la función $y(x)$ satisface la ecuación diferencial (1), ésta tiene en todos los puntos del segmento $\sigma$ una derivada respecto a $x$ y por eso es continua. Luego, según la condición $f(x, y)$ es continua respecto a $x$ e $y$ sobre el rectángulo $D$, por eso el segundo miembro de (8) es continuo respecto a $x$ en $\sigma$. Por lo tanto, $y'(x)$ es también continua en $\sigma$.

Si $p \geqslant 1$, el segundo miembro de (8) tiene la derivada continua respecto a la variable $x$ y el primer miembro de la identidad tiene, por consiguiente, la derivada continua respecto a $x$. Así, pues, la función $y(x)$ tiene la derivada continua de segundo miembro. De la identidad (8) hallamos

$$y''(x)=f'_x(x, y(x))+f'_y(x, y(x))\, y'(x). \tag{9}$$

Aplicando a la identidad (9) los razonamientos análogos a los anteriores, encontramos que para $p \geqslant 2$ la función $y(x)$ tiene la derivada continua de tercer orden en el segmento $\sigma$, etc.

## § 1.7. Método de Euler de resolución aproximada de la ecuación diferencial de primer orden

Supongamos que se da la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y). \tag{1}$$

Admitamos que la función $f(x, y)$ en el entorno del punto $(x_0, y_0)$ satisface las condiciones del teorema de existencia. Según este teorema existen un segmento $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ y una sola solución $y=y(x)$, definida en este segmento, de la ecuación (1), solución que satisface la condición $y(x_0)=y_0$.

Para el número $\delta$ el teorema ofrece una estimación por arriba

$$\delta < (a, 1/N, b/M).$$

El método de Euler [1]) permite expresar de un modo aproximado la función indicada, teóricamente con una precisión cualquiera asignada de antemano.

Supongamos que se necesita calcular aproximadamente $y(d)$, donde para precisar $x_0 < d < x_0 + \delta$. Dividamos $[x_0, d]$ en $n$ partes iguales por los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n = d$. Llamaremos *paso de cálculo* a la longitud del segmento $[x_i, x_{i+1}]$, $h = x_{i+1} - x_i$. Designemos por $y_i$ los valores aproximados de la solución en los puntos $x_i$.

En $[x_0, x_1]$ en vez de la ecuación (1) examina emos la ecuación con la condición inicial (problema de Cauchy)

$$Y'_n(x) = f(x_0, y_0) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1), \quad Y_n(x_0) = y_0.$$

La solución de esta ecuación tiene la forma

$$Y_n(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Tomemos precisamente esta función (lineal) por solución aproximada de la ecuación (1) en el segmento $[x_0, x_1]$. Desde el punto de vista geométrico esto quiere decir que hemos sustituido la curva integral buscada por el segmento de la tangente a la curva integral en el punto $(x_0, y_0)$.

De la fórmula (2) obtenemos

$$y_1 = Y_n(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Luego razonamos por inducción. Si los valores aproximados de la solución $y_1, y_2, \ldots, y_k$ se conocen, entonces en $[x_k, x_{k+1}]$ en vez de la ecuación (1) examinamos la ecuación

$$Y'_n(x) = f(x_k, y_k) \quad (x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}), \quad Y_n(x_k) = y_k.$$

La solución de esta ecuación

$$Y_n(x) = y_k + f(x_k, y_k)(x - x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{3}$$

la tomamos por solución aproximada de la ecuación (1) en $[x_k, x_{k+1}]$.

Poniendo en (3) $x = x_{k+1}$, obtenemos

$$y_{k+1} = Y_n(x_{k+1}) = y_k + hf(x_k, y_k)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Son precisamente las fórmulas (4) que determinan el método de Euler.

---

[1]) L. Euler (1707—1783), gran matemático, miembro de la Academia de Ciencias de Rusia, de origen suizo.

La función $Y_n(x)$ que se define en $[x_0, d]$ con ayuda de las igualdades (3) se llama *«quebrada de Euler»* (fig. 10). Se puede demostrar que en las condiciones del teorema de existencia la sucesión de las

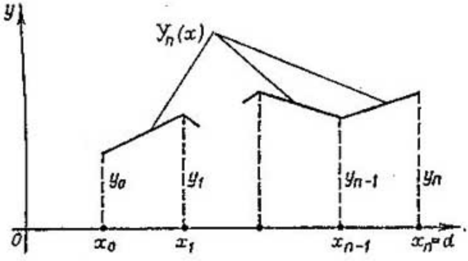


Fig. 10.

quebradas de Euler $\{Y_n(x)\}$ converge uniformemente en $[x_0, d]$ hacia la solución verdadera del problema cuando $n \to \infty$.

## § 1.8. Ecuaciones no resueltas con respecto a la derivada

Para resolver la ecuación diferencial

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

se puede intentar primeramente resolverla respecto a $y'$. Si esto se logra, obtenemos una o muchas ecuaciones diferenciales que tienen la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Toda solución de cada una de las ecuaciones (2) será la solución de la ecuación (1). Sin embargo, conviene procurar aclarar si abarcan ellas o no todas las soluciones de (1).

Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$(y')^2 - (2x + y)\, y' + 2xy = 0, \tag{3}$$

por medio de transformaciones idénticas de su primer miembro reduzcámosla a la forma

$$(y' - 2x)(y' - y) = 0. \tag{3'}$$

Examinemos dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y' = 2x, \quad y' = y.$$

Sus integrales generales tienen, respectivamente, la forma

$$y = x^2 + C_1, \quad y = C_2 e^x, \tag{4}$$

donde $C_1$ y $C_2$ son las constantes arbitrarias. Para los valores particulares de $C_1$ y $C_2$ las funciones (4) son las soluciones particulares de la ecuación (3).

Pero de las soluciones particulares indicadas de las dos últimas ecuaciones se pueden construir también otras soluciones particulares de la ecuación (3). Por ejemplo, la función

$$y = \begin{cases} x^2+1, & x \leqslant 1, \\ 2e^{x-1}, & x > 1, \end{cases}$$

es una solución de la ecuación (3). Esta curva integral está compuesta de dos curvas integrales que pertenecen a familias diferentes de (4) (fig. 11).

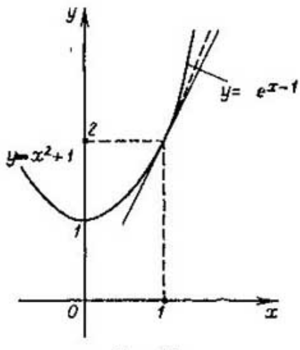

Fig. 11.

A continuación se examinan dos tipos particulares de la ecuación diferencial (1) para los cuales se puede indicar otros caminos de resolución.

1°. El primer miembro de la ecuación (1) no contiene $x$ ni $y$:

$$F(y') = 0. \tag{5}$$

Vamos a admitir que la función $F$ es continua y tiene un número finito de ceros.

Supongamos que $y = y(x)$ es la solución de la ecuación, solución cuya derivada es continua. Entonces $y'(x)$ es igual a una de las raíces de la ecuación (5), que designaremos por $k$. Así, pues, $y' = k$, de donde $y = kx + C$, donde $C$ es la constante y

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0. \tag{6}$$

Y al contrario, del hecho de que para la función $y(x)$ continuamente derivable, cuando hay cierta constante $C$, se cumple la igualdad (5), resulta que

$$\frac{y-C}{x} = k, \quad \forall x \neq 0,$$

donde $k$ es cierta raíz de la función $F$. Pero entonces $y = kx + C$, $\forall x$, $y' = k$ y $F(y') = 0$.

Hemos demostrado que una *solución general (cualquiera) de la ecuación diferencial* (5) *se define por la igualdad* (6), *donde $C$ es la constante arbitraria.*

2°. El primer miembro de la ecuación (1) no contiene $x$:

$$F(y, y') = 0. \tag{7}$$

Si la ecuación (7) se puede resolver respecto a $y'$, entonces $y' = \varphi(y)$ es la ecuación con variables separables que sabemos resolver.

Supongamos que la ecuación (7) no se puede o es difícil resolver respecto a $y'$, pero se puede resolver fácilmente respecto a $y$: $y = \varphi(y')$.

Introduzcamos en la investigación el parámetro $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, entonces

$$y = \varphi(p), \quad dy = \varphi'(p)\,dp, \quad dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(p)\,dp}{p},$$

de donde

$$x = \int \frac{\varphi'(p)\,dp}{p} + C,$$

o bien

$$x = \psi(p) + C.$$

Ahora, eliminando del sistema

$$x = \psi(p) + C, \quad y = \varphi(p) \tag{8}$$

el parámetro $p$, obtenemos precisamente la integral general $\Phi(x, y, C) = 0$ de la ecuación diferencial (7).

El sistema (8) se puede considerar asimismo como representación paramétrica de la solución de la ecuación (7). El parámetro $p$ puede introducirse también de un modo arbitrario, $y' = \omega(p)$, pero de una manera tal que la ecuación (7) se resuelva más sencillamente respecto a $y$, $y = \varphi(p)$ y se encuentre más sencillamente la integral respectiva para la determinación de la función

$$x = \int \frac{\varphi'(p)\,dp}{\omega(p)} + C.$$

EJEMPLO. Resolver la ecuación $x\sqrt{1 + y'^2} = 2y'$.

Si se introduce el parámetro $p = y'$, se obtienen integrales bastante complejas. Aquí es mejor poner $y' = \operatorname{tg} p$ $(-\pi/2 < p < \pi/2)$. Entonces

$$x = \frac{2 \operatorname{tg} p}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 p}} = 2 \operatorname{sen} p, \quad dx = 2 \cos p\,dp.$$

$$dy = \operatorname{tg} p\,dx = 2 \operatorname{sen} p\,dp, \qquad y = -2 \cos p + C.$$

Del sistema

$$x = 2 \operatorname{sen} p, \quad y = -2 \cos p + C$$

obtenemos

$$x^2 + (y - C)^2 = 4, \tag{4}$$

o sea, una solución cualquiera de nuestra ecuación diferencial es la solución de la ecuación (4) para cierta constante $C$. Es una familia de circunferencias de radio 2 que tienen por centro los puntos $(0, C)$ (fig. 12). Se puede demostrar que la igualdad (4) es la integral general para las soluciones cuyas formas son $y(x)$ y $x(y)$.

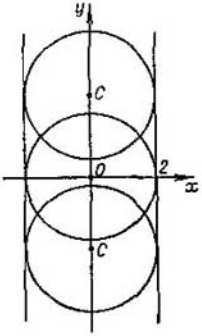

Fig. 12.

En el caso dado se puede asimismo introducir el parámetro por la fórmula $y' = \operatorname{sh} p$.

*Observación.* De un modo análogo se examina la ecuación diferencial que tiene la forma $F(x, y') = 0$.

## § 1.9. Soluciones singulares

Supongamos que se da la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

Si en el entorno del punto $(x_0, y_0)$ del plano $xOy$ se cumplen las condiciones del teorema de existencia y de unicidad, entonces por este punto pasa una y sólo una curva integral.

Si las condiciones del teorema de existencia no se observan, entonces pueden haber diferentes casos. Por el punto $(x_0, y_0)$ puede pasar una o varias curvas integrales o un conjunto infinito de éstas, o bien no hay una curva integral que pase por este punto $(x_0, y_0)$. Es interesante el caso cuando la ecuación diferencial (1) tiene una solución singular.

La solución de una ecuación diferencial de primer orden se llama *singular* si la curva integral respectiva posee la propiedad de que por cualquier punto suyo pasa, además de ella, otra curva integral de la ecuación dada, siendo la última curva tangente a la primera.

Frecuentemente nos vemos obligados a examinar las ecuaciones diferenciales de la forma (1), donde la función $f(x, y)$ es continua sobre cierta región $\Omega$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ es finita y continua no en todos los puntos de $\Omega$. Existen sobre la región $\Omega$ asimismo tales puntos donde $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$. En general, en cada tal punto se infringen las condiciones de existencia y de unicidad de la solución de la ecuación diferencial (1) y si tales puntos forman líneas suaves, estas últimas pueden representar soluciones singulares de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 1. Examinemos la ecuación elemental de Bernoulli $y' = y^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $y \geqslant 0$. Aquí $f(x, y) = y^{\alpha}$ es la función continua sobre el semiplano superior. La función $\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha y^{\alpha-1}$ para $0 < \alpha < 1$ no está acotada en el entorno de $y = 0$. La función $y = 0$ es la solución de la ecuación. Para la condición inicial $y(x_0) = 0$ existe una solución más

$$y = [(x - x_0)(1 - \alpha)]^{1/(1-\alpha)}$$

que satisface esta ecuación y pasa por el punto $(x_0, 0)$. La tangente a esta curva en el punto $(x_0, 0)$ es, evidentemente, el eje $x$ $(y \equiv 0)$. Por eso $y \equiv 0$ es la solución singular.

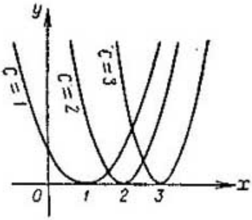


Fig. 13.

EJEMPLO 2. $y' = y^{\alpha} + 1$, $y \geqslant 0$. Aquí $\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha y^{\alpha-1}$ y cuando $0 < \alpha < 1$ esta función no está acotada en el entorno de $y = 0$. No obstante, $y \equiv 0$ no es la solución de la ecuación. La solución de la ecuación, por ejemplo para $\alpha = 1/2$, se define implícitamente por la igualdad $x + C = 2(\sqrt{y} - \ln(\sqrt{y} + 1))$ $(y \geqslant 0)$, o sea, por todo punto $(x_0, 0)$ pasa una sola curva integral $x - x_0 = 2(\sqrt{y} - \ln(\sqrt{y} + 1))$.

EJEMPLO 3. Las funciones $y = C(x - C)^2$, para cualquier valor de $C$ (fig. 13), son las soluciones de la ecuación $F(x, y, y') \equiv 4xyy' - y'^3 - 8y^2 = 0$. La función $y \equiv 0$ es la solución singular de la ecuación dada.

## § 1.10. Envolvente de una familia de curvas

Supongamos que está dada una familia de curvas suaves $\Gamma_{\alpha}$ definidas por la ecuación

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0, \tag{1}$$

donde la constante arbitraria $\alpha$ es el parámetro y la función $\Phi(x, y, \alpha)$ es continuamente derivable sobre cierta región de puntos $(x, y, \alpha)$.

La curva $E$ se llama *envolvente* de la familia de curvas (1) si es tangente a cada una de las curvas $\Gamma_{\alpha}$ de la familia y, además, toda consta de estos puntos de tangencia.

Más exactamente, se denomina *envolvente* $E$ de la familia de curvas $\Gamma_{\alpha}$ dependientes del parámetro $\alpha$, donde $a < \alpha < b$, la curva suave

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\alpha), \\ y &= y(\alpha) \end{aligned}\right\} \quad a < \alpha < b \tag{2}$$

que es tangente, para un valor cualquiera del parámetro $\alpha$, a la curva respectiva $\Gamma_{\alpha}$.

Llamaremos curvas *envueltas* a las curvas $\Gamma_\alpha$ (fig. 14).

Hallemos la ecuación de la envolvente. Prefijemos el valor $\alpha$. Le corresponde sobre $\Gamma_\alpha$ el punto $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$ que pertenece simultáneamente a $\Gamma_\alpha$ y $E$ y en el cual $E$ y $\Gamma_\alpha$ tienen una tangente común.

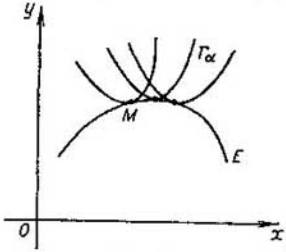


Fig. 14.

Es evidente que tiene lugar la identidad

$$\Phi(x(\alpha),\ y(\alpha),\ \alpha) \equiv 0, \quad a < \alpha < b.$$

Derivémosla respecto a $\alpha$:

$$\Phi'_x x'(\alpha) + \Phi'_y y'(\alpha) + \Phi'_\alpha \equiv 0,$$
$$a < \alpha < b.$$

El vector $(x'(\alpha),\ y'(\alpha))$ está orientado por la tangente a $E$ que coincide con la tangente a $\Gamma_\alpha$ en el punto $(x(\alpha),\ y(\alpha))$. Pero entonces (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 8.16)

$$\Phi'_x x'(\alpha) + \Phi'_y y'(\alpha) = 0.$$

Por consiguiente,

$$\Phi'_\alpha(x(\alpha),\ y(\alpha),\ \alpha) = 0,$$

o sea,

$$\Phi'_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = 0 \tag{3}$$

en el punto $(x,\ y)$ de tangencia de $E$ con $\Gamma_\alpha$. Para este punto se cumple asimismo la igualdad

$$\Phi(x,\ y,\ \alpha) = 0 \tag{4}$$

Ahora bien, la ecuación de la envolvente de la familia (1) se define por dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x,\ y,\ \alpha) &= 0, \\ \frac{\partial\Phi(x,\ y,\ \alpha)}{\partial\alpha} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Las igualdades (5) ofrecen la condición necesaria de existencia de la envolvente, o sea, si la familia (1) tiene la envolvente, su ecuación se da por el sistema (5).

Sin embargo, si componemos el sistema (5) y lo resolvemos, la solución del sistema ofrece la envolvente de la familia (1) de un modo no obligatorio.

Supongamos ahora que se da la ecuación diferencial $F(x,\ y,\ y') = 0$ y $\Phi(x,\ y,\ C) = 0$ es su integral general.

Si la familia de curvas integrales $\Phi(x,\ y,\ C) = 0$ tiene una *envolvente*, entonces, claro está, que es también la curva integral y, por consiguiente, la *solución singular*.

Si $C$ se excluye formalmente del sistema

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x,\ y,\ C) &= 0, \\ \frac{\partial\Phi(x,\ y,\ C)}{\partial C} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

entonces en algunos casos obtenemos la solución singular.

Si la integral general de la ecuación diferencial tiene la forma

$$\Psi(x, y) = C,$$

donde $\Psi(x, y)$ es la función continuamente derivable, entonces la familia que se define por ella (o sea, la familia de todas las soluciones de la ecuación diferencial) sobre la región respectiva no tiene una envolvente (véase el teorema 1, § 1.2).

Si la función $\Psi(x, y)$ no es continuamente derivable en ciertos puntos $(x, y)$, el conjunto de estos puntos puede determinar la envolvente de la familia.

EJEMPLO 1. $y' = y^{2/3}$.

Esta es la ecuación de Bernoulli. Dividiendo las variables, obtenemos $y^{-2/3}\,dy = dx$ $(y \neq 0)$, $3y^{1/3} = x - C$, $27y = (x - C)^3$, $\Phi(x, y, C) = 27y - (x - C)^3 = 0$, o sea, la integral general, donde la función $\Phi(x, y, C)$ es continuamente derivable.

Planteemos el sistema (6):

$$\left.\begin{aligned} 27y - (x - C)^3 = 0, \\ 3(x - C)^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Al eliminar $C$, obtenemos $y = 0$. Comprobando, nos convencemos de que $y = 0$ es la solución de la ecuación inicial. Es la solución singular (véase el ejemplo 1, § 1.9 y la observación para el ejemplo 3, § 1.2) y la envolvente de la familia de curvas $27y - (x - C)^3 = 0$.

Si se examina la integral general en la forma resuelta respecto a $C$: $C = x - 3y^{1/3}$, la función $\Psi(x, y) = x - 3y^{1/3}$ no es continuamente derivable en los puntos $y = 0$ los cuales, como nos hemos cerciorado anteriormente, son la envolvente de la familia de parábolas cúbicas.

## § 1.11. Ecuación diferencial de segundo orden

La ecuación

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

se llama *ecuación diferencial de segundo orden*.

Se supone que $F(u, v, w, g)$ es la función continuamente derivable dada de los puntos $(u, v, w, g)$ de cierta región $\Omega$ del espacio cuadridimensional.

Toda función $y = y(x)$ que tenga en cierto intervalo la derivada continua de segundo orden y satisfaga la ecuación (1) se denomina *solución* de esta ecuación o *curva integral* de la misma.

En general, cada una de las soluciones $y = y(x)$ está definida en cierto intervalo propio $a < x < b$. Desde luego, para todo valor de $x$ de este intervalo el punto

$$(x, y(x), y'(x), y''(x)) \in \Omega.$$

Frecuentemente se imponen condiciones adicionales sobre la solución que se busca. Representan un interés especial las condiciones que garantizan la solución única de la ecuación. Por regla general, estas condiciones tienen la forma

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0 \tag{2}$$

y se llaman *condiciones iniciales*. El problema de encontrar una solución de la ecuación (1) que satisfaga las condiciones iniciales (2) se denomina *problema de Cauchy*. Desde el punto de vista geométrico las condiciones (2) significan que de la familia de curvas integrales que pasan por el punto $(x_0, y_0)$ separamos una determinada curva integral que tenga la pendiente dada ($\operatorname{tg} \alpha = y'(x_0) = y'_0$, fig. 15).

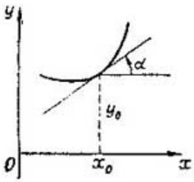


Fig. 15.

En la ecuación (1) pueden no entrar explícitamente todas las variables $x, y, y''$, mas $y''$ sí debe entrar, de lo contrario no será una ecuación diferencial de segundo orden.

EJEMPLOS. $x^2 + y' + y'' = 0$, $y'y'' + 1 = 0$.

Resolvamos la ecuación (1) respecto a $y''$. Supongamos que esto sea posible. De la teoría de las funciones implícitas es sabido que si la función $F(u, v, w, g)$ es igual a cero en cierto punto $(u_0, v_0, w_0, g_0)$, tiene derivadas parciales continuas en el entorno de este punto y la derivada parcial en el mismo $\frac{\partial F}{\partial g} \neq 0$, entonces la ecuación $F(u, v, w, g) = 0$ tendrá, en cierto entorno del punto indicado, una solución $g = f(u, v, w)$ que será única.

Entonces la ecuación (1) adquirirá la forma

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{3}$$

donde la función $f(u, v, w)$ está dada sobre cierta región $\omega$ del espacio tridimensional de los puntos $(u, v, w)$, es continua sobre esta región y tiene las derivadas parciales continuas. La función $f$ puede asimismo no depender explícitamente de algunas de las variables $x, y, y'$. Por ejemplo, esto tiene lugar para las ecuaciones $y'' = \varphi(x)$, $y'' = y' + y$, $y'' = y$, $y'' = y'$.

Supongamos que cierta curva integral $y = y(x)$ pasa por el punto $(x_0, y_0)$ y tiene en este punto la pendiente de la tangente igual al número dado $y'_0$ (o sea, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$).

De este modo se determina unívocamente la segunda derivada de $y(x)$ en el punto $x_0$ la cual es igual a

$$y''_0 = f(x_0, y_0, y'_0) \quad (y''_0 = y''(x_0)).$$

No obstante, surge la pregunta: si asignamos $x = x_0$ y los números arbitrarios $y_0, y'_0$, entonces ¿existe o no, de hecho, la curva integral $y = y(x)$ de la ecuación (3) para la cual $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$ y cuán grande es el número de estas curvas integrales? El teorema que sigue a continuación muestra que si la función $f$ es lo suficientemente suave en el entorno del punto $(x_0, y_0, y_0')$, tal curva integral existe y es única.

TEOREMA. *Supongamos que el segundo miembro de la ecuación* (3), *considerado como función de tres variables* $(x, y, y')$ *dada sobre la región tridimensional* $\omega$, *es continuo y tiene sobre esta región las derivadas parciales continuas* $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$.

*Entonces, cualquiera que sea el punto* $(x_0, y_0, y_0') \in \omega$, *existen el intervalo* $(a, b)$ *y la función dos veces continuamente derivable* $y = y(x)$, *determinada sobre éste, la cual satisface la ecuación diferencial* (3).

*La función que posee las propiedades indicadas es única.*

Se dice que la función $y(x)$ es la *solución* (*curva integral*) de la ecuación diferencial (3), solución que satisface las *condiciones iniciales* (2). O bien se dice también que esta función resuelve el problema de Cauchy para las condiciones iniciales indicadas.

Es cómodo escribir cada una de estas soluciones en la forma

$$y(x) = y(x, y_0, y_0'),$$

donde $y_0$, $y_0'$ son los parámetros de la solución. Estos parámetros son independientes: pueden tomarse tales como se quiera, con la única condición de que el punto $(x, y_0, y_0') \in \omega$.

Si se fija $x_0$, entonces a cada sistema de números $C_1 = y_0$, $C_2 = y_0'$, $(x_0, C_1, C_2) \in \omega$, le corresponderá la solución de la ecuación diferencial (3) que pueda escribirse (para $x_0$ fijo) en la forma

$$y = y(x, C_1, C_2),$$

donde $C_1$, $C_2$, o sea las constantes arbitrarias, son sus parámetros.

EJEMPLO. Hallar la curva integral de la ecuación $y'' + y = 0$ que pasa por el punto (0, 1) y tiene en este punto la pendiente de la tangente $y'(0) = 0$.

Es fácil comprobar que la función $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$ es la solución de la ecuación dada para unas constantes $C_1$ y $C_2$ cualesquiera. Luego, $y(0) = C_1$, $y'(0) = C_2$. Para que se cumplan las condiciones iniciales es necesario poner $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Por lo tanto, la curva integral buscada tiene la forma: $y = \cos x$.

## § 1.12. Sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

Introduzcamos en la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \tag{1}$$

junto con su solución $y = y(x)$, $x \in (a, b)$, la función $z = z(x)$, poniendo $y' = z$. Entonces esta ecuación será equivalente al siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= f(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

respecto a dos funciones incógnitas $y$ y $z$.

En efecto, supongamos que $y(x)$, $x \in (a, b)$ es la solución de la ecuación diferencial (1). Esta solución tiene la segunda derivada continua en $(a, b)$. Entonces $z(x) = y'(x)$ tiene la primera derivada continua en $(a, b)$.

Ahora bien, las funciones $y(x)$ y $z(x)$ tienen una derivada continua y satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales (2).

Y al revés, si las funciones $y(x)$, $z(x)$, $x \in (a, b)$ tienen las derivadas continuas en $(a, b)$ y satisfacen el sistema (2), entonces de la primera ecuación del sistema (2) se deduce que $y(x)$ tiene la segunda derivada continua en $(a, b)$ y, sustituyendo $z$ de la primera ecuación en la segunda, obtenemos que $y(x)$ es la solución de la ecuación diferencial (1).

El sistema (2) es un caso particular del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= \psi(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

respecto a las funciones incógnitas $y$ y $z$.

Este último es, evidentemente, un caso particular del sistema

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, y', z') &= 0, \\ \Phi(x, y, z, y', z') &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

donde supondremos que las funciones $F$ y $\Phi$ sean continuas y tengan las derivadas parciales continuas respecto a $y$, $y'$, $z$, $z'$ en cierta región de los puntos $x$, $y$, $z$, $y'$, $z'$.

El par de funciones $y(x)$, $z(x)$ se llama *solución del sistema de ecuaciones diferenciales* (4) si estas funciones están definidas en cierto intervalo $(a, b)$, dependiente de estas funciones, tienen derivadas parciales y satisfacen en $(a, b)$ el sistema (4).

Si resolvemos las ecuaciones (4) respecto a $y'$ y $z'$, obtendremos un sistema que tenga la forma (3) (desde luego, suponemos que la solución del sistema (4) respecto a $y'$ y $z'$ es posible lo cual, como es sabido, está vinculado generalmente con el hecho de que el jacobiano $\frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')}$ no sea igual a cero).

Las ecuaciones (3) (ó (4)) forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden respecto a dos funciones incógnitas $y$ y $z$.

El sistema (3), resuelto respecto a $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, se llama *normal*.

Para el sistema normal (3) es válido el siguiente teorema de existencia.

TEOREMA 1. *Supongamos que las funciones* $\varphi(x, y, z)$ y $\psi(x, y, z)$ *son continuas y tienen unas derivadas parciales continuas respecto a* $y$ *y* $z$ *sobre la región* $\omega$ *de los puntos* $(x, y, z)$ *y supongamos que se da un punto arbitrario* $(x_0, y_0, z_0) \in \omega$.

*Entonces existen un intervalo* $(a, b)$ *y unas funciones continuamente derivables* $y = y(x)$, $z = z(x)$, *definidas sobre éste, que satisfacen el sistema* (3) *y las condiciones iniciales*

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \tag{5}$$

*Las funciones indicadas* $y = y(x)$, $z = z(x)$ *son únicas.*

*En este caso, si las funciones* $\varphi$ *y* $\psi$ *tienen derivadas parciales continuas de orden* $p$, *entonces las soluciones* $y(x)$ *y* $z(x)$ *son continuamente derivables* $p + 1$ *veces en el intervalo indicado* $(a, b)$.

Anteriormente hemos mostrado que la solución de la ecuación (1) de segundo orden respecto a una función puede ser reducida a la solución de dos ecuaciones de primer orden respecto a dos funciones incógnitas (el sistema (2)).

El sistema general de ecuaciones diferenciales de primer orden que tiene la forma (3) se reduce asimismo a la solución de una ecuación diferencial de segundo orden. En efecto, sustituyendo en el sistema (3) en vez de $y$ y $z$ cierta solución $y = y(x)$, $z = z(x)$ del mismo y derivando la primera ecuación respecto a $x$ obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\psi \equiv \Phi(x, y, z). \tag{6}$$

Junto con (6) examinaremos la primera ecuación (3)

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, z) \tag{7}$$

en la cual se han sustituido $y = y(x)$ y $z = z(x)$.

Hallemos $z$ de (7) ($z = \chi(x, y, y')$) y sustituyámosla en (6), obteniendo de esta manera la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi(x, y, \chi(x, y, y')) \equiv \Lambda(x, y, y') \tag{8}$$

respecto a la función examinada $y = y(x)$.

Hemos obtenido que si $y(x)$ y $z(x)$ son las soluciones del sistema (3), entonces $y(x)$ es la solución de la ecuación de segundo orden.

Desde luego, para poder realizar estos cálculos se han necesitado nuevas propiedades de las funciones $\varphi$ y $\psi$: la derivabilidad continua de $\varphi$ respecto a $x$, $y$, $z$ y la posibilidad de resolver la primera ecuación (3) respecto a $z$.

## § 1.13. Ecuación diferencial de $n$-ésimo orden

La ecuación

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

se llama *ecuación diferencial de n-ésimo orden.*

Aquí $F(u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$ es una función, continua junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial v_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial v_n}$ sobre cierta región $\Omega$ de los puntos $(u, v_0, v_1, \ldots, v_n)$ del espacio de $(n+2)$ dimensiones.

Resolviendo la ecuación (1) respecto a $y^{(n)}$, obtenemos

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Es válido el teorema siguiente.

TEOREMA 1 (DE EXISTENCIA). *Supongamos que el segundo miembro $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ de la ecuación (2), examinado como función de $n+1$ variables, es continuo y tiene en cierto entorno $\Omega$ del punto $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ las derivadas parciales continuas $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$.*

*Entonces existen un intervalo $(a, b)$ y una función $y = y(x)$ n veces continuamente derivable, definida en éste, que satisface la ecuación (2) y las condiciones iniciales*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{3}$$

*La función $y = y(x)$ que posee las propiedades indicadas es la única.*

*Ahora bien, $y(x)$ es la solución de la ecuación (2), solución que satisface las condiciones iniciales (3).*

Si se fija $x_0$, entonces a cada sistema de números

$$C_1 = y_0, \ C_2 = y_0', \ \ldots, \ C_n = y_0^{(n-1)}$$

que poseen la propiedad

$$(x_0, C_1, \ldots, C_n) \in \Omega$$

le corresponderá la solución de nuestra ecuación diferencial la cual (¡para $x_0$ fijo!) se puede escribir en la forma

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n). \tag{4}$$

Como resultado obtenemos una familia de soluciones de nuestra ecuación diferencial que dependen de $n$ parámetros $C_1, \ldots, C_n$. A cada sistema determinado $(C_1, \ldots, C_n)$ de parámetros $((x_0, C_1, \ldots, C_n) \in \Omega)$ le corresponde su propia solución de la ecuación diferencial (con su propio intervalo de definición).

En la ecuación (2) se puede introducir nuevas funciones

$$y_1(x) = y, \quad y_2(x) = y', \ldots, y_n(x) = y^{(n-1)}.$$

En cualquier caso todas ellas tienen la primera derivada continua. Entonces la ecuación (2) resulta equivalente al siguiente sistema de $n$ ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ &\frac{dy_2}{dx} = y_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ &\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

El sistema (5) es un caso particular del sistema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_n}{dx} = \varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &((x, y_1, \ldots, y_n) \in \Omega) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

de $n$ ecuaciones diferenciales de primer orden respecto a $n$ funciones incógnitas $y_1, \ldots, y_n$.

Este es un *sistema normal* (*resuelto respecto a las derivadas* $\frac{dy_j}{dx}$ $(j = 1, \ldots, n)$). Es un caso particular del sistema

$$F_j(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Es válido el teorema.

TEOREMA 2 (DE EXISTENCIA). *Supongamos que las funciones* $\varphi_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *son continuas, tienen las derivadas parciales continuas de primer orden respecto a todas las variables, comenzando con la segunda, en cierta región* $\Omega$ *de los puntos* $(x, y_1, \ldots, y_n)$ *y supongamos también que está dado un punto determinado* $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ *de esta región.*

*Entonces existen un intervalo* $(a, b)$ *y las funciones derivables continuamente* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, *definidas en éste, que satisfacen el sistema* (6) *y las condiciones iniciales*

$$y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{8}$$

*Si las funciones* $\varphi_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ *sobre la región* $\Omega$ *son* $p$ *veces continuamente derivables, entonces respectivamente las soluciones del sistema* $y_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *poseen las mejores propiedades: tienen la derivada continua de orden* $p + 1$.

Si se fija $x_0$, a cada sistema de números

$$C_1 = y_{10}, \ldots, C_n = y_{n0} \quad (x_0, C_1, \ldots, C_n) \in \Omega$$

le corresponde la solución del sistema (6) la cual puede escribirse (¡para $x_0$ fijo!) en la forma

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{9}$$

donde $C_1, \ldots, C_n$, o sea las constantes arbitrarias, son los parámetros.

Anteriormente hemos señalado que la solución de la ecuación de $n$-ésimo orden se puede reducir a la solución de un sistema de $n$ ecuaciones diferenciales de primer orden con $n$ incógnitas. Es justa asimismo la afirmación inversa: la *solución del sistema* (6), *para determinadas condiciones, puede ser reducida a la solución de cierta ecuación diferencial de n-ésimo orden con una función incógnita.*

La demostración de esta afirmación inversa representa el desarrollo de la afirmación respectiva en el caso de $n = 2$ (véase el § 1.12).

EJEMPLO. Reducir el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2 - 2y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_1 + y_3 \end{aligned}$$

a una ecuación diferencial de tercer orden.

Reduciremos nuestro sistema a la ecuación diferencial respecto a la función $y_1(t)$. Derivando la primera ecuación del sistema, teniendo en cuenta las otras dos, tenemos

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} + \frac{dy_3}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + y_1 + y_2 - y_3.$$

Derivando una vez más, se obtiene

$$\frac{d^3y_1}{dt^3} = \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_3}{dt} = \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{dy_1}{dt} - y_1 + y_2 - 3y_3. \tag{10}$$

A base del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=y_1+y_2+y_3,\\ \frac{d^2y_1}{dt^2}&=\frac{dy_1}{dt}+y_1+y_2-y_3\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

expresamos $y_2$ e $y_3$ mediante $y_1$ e $y_1'$, $y_1''$:

$$\left.\begin{aligned}y_2&=\frac{1}{2}(y_1''-2y_1),\\ y_3&=\frac{1}{2}(-y_1''+2y_1').\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Sustituyendo estos valores de $y_2$ e $y_3$ en (10), se obtiene la ecuación buscada de tercer orden respecto a la función $y_1(t)$:

$$y_1''' - 3y_1'' + 2y_1' + 2y_1 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, encontramos la función $y_1$, luego con ayuda de las fórmulas (12) hallamos las funciones $y_2$ e $y_3$.

## § 1.14. Reducción del orden de una ecuación diferencial

En muchos casos se logra reducir la ecuación diferencial de $n$-ésimo orden

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

a una ecuación diferencial de orden más bajo introduciendo una nueva función incógnita. Examinemos algunos tipos de ecuaciones que permiten reducir el orden.

I. Supongamos que el primer miembro de la ecuación (1) no contiene explícitamente la función buscada $y$, o sea, la ecuación tiene la forma

$$F(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2}$$

Introduzcamos la nueva función $z(x) = y'(x)$, entonces $z' = y''$, . . ., $z^{(n-1)} = y^{(n)}$ y la ecuación (2) se escribirá de la siguiente manera:

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0, \tag{3}$$

o sea, respecto a la función $z(x)$ ésta representa una ecuación del orden $(n-1)$.

Conviene sustituir una solución cualquiera $z(x)$, $a < x < b$, de esta ecuación en la ecuación diferencial $y' = z(x)$ y resolver esta última respecto a $y$:

$$y = \int z(x)\,dx + C.$$

Ha aparecido una constante arbitraria. Con frecuencia algunas soluciones de la ecuación diferencial (3), pero no obligatoriamente todas, forman la familia de funciones

$$z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1}), \quad a < x < b,$$

que dependen de $n-1$ parámetros $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Le corresponde la familia de soluciones $y$ de la ecuación diferencial (2)

$$y = \int \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})\,dx + C_n$$

que dependen de $n$ parámetros $C_1, \ldots, C_n$ $(C_n = C)$.

EJEMPLO 1. $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$.

Aquí la función $y(x)$ no entra explícitamente en la ecuación. Poniendo $z = y'$, encontramos $z' = y''$ y nuestra ecuación toma la forma $z' = \sqrt{1 + z^2}$. Separando las variables, tenemos

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx, \quad x + C_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right),$$

o sea,

$$z + \sqrt{1+z^2} = e^{x+C_1}, \quad 1 + z^2 = e^{2(x+C_1)} - 2ze^{x+C_1} + z^2,$$

$$z = \frac{1}{2}\left(e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}\right) = \operatorname{sh}(x + C_1).$$

Pero $z = y'$, de donde $dy = \operatorname{sh}(x + C_1)\,dx$, $y = \operatorname{ch}(x + C_1) + C_2$.

II. Supongamos que el primer miembro de la ecuación (1) no contiene explícitamente la variable independiente $x$:

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{4}$$

En esta ecuación consideremos $y$ como variable independiente e $y'$, como función buscada. Designemos $y' = z(y)$. Entonces

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz'_y)}{dx} = \frac{d(z\cdot z'_y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z\left(z'^2_y + z\cdot z''_y\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = \omega\left(z, z'_y, \ldots, z^{(n-1)}_y\right).$$

Sustituyendo estos valores en (4), obtenemos la ecuación diferencial de orden $(n-1)$ respecto a $z$. Supongamos que $z = z(y)$, $\alpha < y < \beta$, es la solución de esta ecuación diferencial, solución que se distingue de cero en $(\alpha, \beta)$. Puesto que $z(y) = \frac{dy}{dx}$, entonces

$$dx = \frac{dy}{z(y)}, \quad x = \int \frac{dy}{z(y)} + C, \quad \alpha < y < \beta.$$

Hemos obtenido la solución $y(x)$ de la ecuación inicial (4) en la forma implícita. Además, esta solución depende de la constante arbitraria $C$.

Sin embargo, con frecuencia las funciones $z = z(y)$ se obtienen en forma de familias de funciones

$$z = z(y, C_1, \ldots, C_{n-1}), \quad \alpha < y < \beta,$$

que dependen de $n-1$ parámetros $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Las soluciones $y(x)$ que les corresponden forman, a su vez, la familia

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n)$$

de funciones que dependen de $n$ parámetros $C_1, \ldots, C_n$ $(C_n = C)$.

EJEMPLO 2. $y'^2 + 2yy'' = 0$.

Aquí $x$ no está presente explícitamente, por eso ponemos $y'_x = z(y)$, $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = z \cdot z'_y$. Sustituyendo estos valores en la ecuación, tenemos $z^2 + 2yzz'_y = 0$ o bien $z(z + 2yz'_y) = 0$. De aquí $z = 0$ y $z + 2yz'_y = 0$.

Si $z = 0$, entonces $\frac{dy}{dx} = 0$, $y = \text{const.}$

Si $z + 2yz'_y = 0$, entonces, dividiendo las variables, obtenemos

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y}, \quad \ln\left|\frac{z}{C_1}\right| = \ln\frac{1}{\sqrt{y}}, \quad z = \frac{C_1}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}, \quad \sqrt{y}\,dy = C_1\,dx, \quad \frac{2}{3}y^{3/2} = C_1x + C_2.$$

III. El primer miembro de la ecuación (1) es una función homogénea de grado $m$ respecto a las variables $y, y', \ldots, y^{(n)}$, o sea,

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \quad (t > 0).$$

Para reducir el orden, introducimos una nueva función $z(x)$ con ayuda de la fórmula

$$y' = y \cdot z \quad (y \neq 0).$$

Entonces

$$y'' = (yz)' = y'z + y \cdot z' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z'),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = y\omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)}).$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1), obtenemos

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), \ldots, y\omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0$$

o en virtud de la homogeneidad de la función

$$y^m F(x, 1, z, z^2 + z', \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Puesto que $y \neq 0$, obtenemos la ecuación diferencial de orden $(n - 1)$

$$F(x, 1, z, \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Supongamos que $z = z(x)$ es la solución de esta ecuación. Como $z(x) = y'/y$, entonces

$$\frac{dy}{y} = z(x)\,dx, \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = \int z(x)\,dx,$$

$$y = C \exp\left(\int z(x)\,dz\right),$$

donde $C$ es la constante arbitraria. Y si resulta que

$$z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1}),$$

entonces

$$y = C_n \exp\left(\int \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})\,dx\right),$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 3. Vamos a resolver con ayuda de este método la ecuación del ejemplo precedente.

La función $F(x, y, y', y'') = y'^2 + 2yy''$ es homogénea de segundo grado respecto a $y, y', y''$. La función $y(x) \equiv 0$ es la solución de la ecuación. Supongamos que $y \neq 0$. Poniendo $y' = z \cdot y$, tenemos $y'' = y(z' + z^2)$. Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos

$$(yz)^2 + 2y^2(z' + z^2) = 0 \quad (y \neq 0).$$

De aquí $3z^2 + 2z' = 0$. La función $z \equiv 0$ es la solución de la ecuación dada (entonces $y' = 0$, $y = C$ es la solución de la ecuación inicial). Sea $z \neq 0$, entonces

$$-\frac{2dz}{3z^2} = dx, \quad \frac{2}{3} z^{-1} = x + C_1, \quad z = \frac{2}{3}(x + C_1)^{-1};$$

$$\frac{dy}{y} = z\,dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{dx}{x + C_1},$$

$$\ln\left|\frac{y}{C_2}\right| = \frac{2}{3} \ln|x + C_1|, \quad y = C_2(x + C_1)^{2/3}$$

es la solución general. Señalemos que la solución $y \equiv 0$ se obtiene de la general para $C_2 = 0$.

## § 1.15. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Se llama *ecuación diferencial lineal* de *n-ésimo orden* la ecuación que tiene la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = f(x), \quad (1)$$
$$a < x < b,$$

donde $f(x)$, $p_0(x)$, . . ., $p_{n-1}(x)$ son las funciones dadas que son continuas en el intervalo $(a, b)$. Designemos el primer miembro de la ecuación (1) por $L_n[y] \equiv L[y]$. Este se llama *operador diferencial lineal de n-ésimo orden.*

El operador $L(y)$ posee las propiedades siguientes:

1) $L[C_y] = CL[y]$, o sea, la homogeneidad del operador;

2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$, o sea, la aditividad del operador.

Señalemos que el operador homogéneo y aditivo se denomina *lineal.*

Sobre la base de estas propiedades obtenemos fácilmente que

$$L\left[\sum_{k=1}^{m} C_k y_k\right] = \sum_{k=1}^{m} C_k L[y_k], \quad (2)$$

donde $C_k$ son las constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1. Sea $L[y] = y'' + y$.

Es fácil ver que $L[\text{sen } x] = -\text{sen } x + \text{sen } x = 0$, $L[x^2] = 2 + x^2$.

La ecuación (1) se puede escribir en la forma

$$L[y] \equiv L_n[y] = f(x), \quad a < x < b. \quad (1')$$

Si $f(x) \equiv 0$, la ecuación

$$L_n[y] = 0, \quad a < x < b, \quad (3)$$

se llama *ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden.* Teniendo esto en cuenta, la ecuación (1) se denomina *no homogénea.*

Consideramos que las funciones $f(x)$, $p_0(x)$, . . ., $p_{n-1}(x)$ son continuas en el intervalo $(a, b)$. Se puede demostrar que para tales funciones la *ecuación diferencial* (1) *tiene la única solución, definida en el mismo* (!) *intervalo* $(a, b)$, *que satisfaga las condiciones iniciales*

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

*Además, si las funciones* $p_j(x)$ *y* $f(x)$ *tienen en* $(a, b)$ *unas derivadas continuas de orden* $q$, *entonces la solución indicada* $y(x)$ *tiene en* $(a, b)$ *unas derivadas continuas hasta el orden* $n + q$, *inclusivamente.*

TEOREMA 1. *Si $y_1, \ldots, y_m$ son las soluciones de la ecuación homogénea* (3), *su combinación lineal* $\sum_{k=1}^{m} C_k y_k$ *asimismo es la solución de la ecuación* (3).

Esto se deriva de la ecuación (2).

Introduzcamos el concepto de dependencia lineal de las funciones por analogía con el concepto respectivo para un sistema de vectores.

Las funciones $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ se llaman *dependientes linealmente* en $(a, b)$ si una de ellas es la combinación lineal de otras $\forall x \in (a, b)$. En otras palabras, las funciones $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ se denominan linealmente dependientes en $(a, b)$ si existen los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de los cuales al menos uno no es igual a cero, tales que

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) \equiv 0, \quad a < x < b. \tag{4}$$

Si la identidad (4) no se cumple sino en el caso cuando todos los $\alpha_i = 0$, las funciones $y_1, \ldots, y_m$ se llaman *linealmente independientes* en $(a, b)$.

El sistema de $n$ ecuaciones linealmente independientes, en el intervalo $(a, b)$

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

de la ecuación diferencial homogénea de $n$-ésimo orden (3) con los coeficientes $p_j(x)$ continuos en $(a, b)$ se denomina *sistema fundamental de soluciones* de esta ecuación.

Para resolver la ecuación diferencial homogénea lineal de $n$-ésimo orden (3) con los coeficientes continuos $p_j(x)$ es necesario hallar su sistema fundamental de soluciones.

Conforme al teorema 1 una *combinación lineal arbitraria de las soluciones $y_j(x)$, o sea, la suma*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x), \tag{5}$$

*donde $C_k$ son números arbitrarios, es a su vez la solución de la ecuación* (3) *en* $(a, b)$. Sin embargo, resulta justa también la afirmación inversa, o sea, toda solución de la ecuación diferencial (3) en el intervalo $(a, b)$ representa cierta combinación lineal de sus soluciones particulares indicados $y_j(x)$, independientes entre sí, (véase a continuación el teorema 4) que forman el sistema fundamental de soluciones.

Ahora bien, la *solución general de la ecuación diferencial homogénea* (3) *tiene la forma de* (5), *donde $C_k$ son las constantes arbitrarias e $y_k(x)$ son las soluciones particulares* (3) *que forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.*

Notemos que la solución general de la ecuación no homogénea (1) es la suma de una de sus soluciones particulares $y_0(x)$ y de la solución general de la ecuación homogénea

$$y(x)=y_0(x)+\sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x). \tag{6}$$

En efecto,

$$L_n[y]=L_n[y_0]+\sum_{j=1}^{n} C_j L[y_j]=f(x)+0=f(x).$$

Por otro lado, si $y$ es una solución arbitraria de la ecuación (1), entonces

$$L_n[y-y_0]=L_n[y]-L_n[y_0]=f(x)-f(x)=0$$

y, por consiguiente, $y-y_0$ es la solución de la ecuación homogénea; pero entonces existen tales números $C_j$ para los cuales

$$y(x)-y_0(x)=\sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x),$$

o sea, para estos números se cumple la igualdad (6).

TEOREMA 2. *Si las funciones $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ son linealmente dependientes en $(a, b)$ y tienen las derivadas hasta el orden $(m-1)$, entonces el determinante*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_m(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_m'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \ldots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}=0 \quad (\forall x\in(a, b)). \tag{7}$$

El determinante (7) se llama *determinante de Wronski* [1] o *wronskiano* y se designa por el símbolo $W(x)\equiv W[y_1, \ldots, y_m]$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que las funciones $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ son linealmente dependientes en $(a, b)$, existen tales números $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, no todos iguales a cero, para los cuales se cumple la identidad (4) en $(a, b)$. Derivándola $m-1$ veces, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y_1(x)+\ldots+\alpha_m y_m(x)\equiv 0, \\ &\alpha_1 y_1'(x)+\ldots+\alpha_m y_m'(x)\equiv 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1 y_1^{(m-1)}(x)+\ldots+\alpha_m y_m^{(m-1)}(x)\equiv 0. \end{aligned}$$

[1] J. Wronski-Hoene (1778—1853), matemático polaco.

Este sistema homogéneo tiene según la condición una solución no trivial $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (o sea, al menos un $\alpha_i \neq 0$) cuando $\forall\, x \in (a, b)$. Esto último es posible cuando el determinante del sistema, que es el determinante de Wronski $W(x)$, es idénticamente igual a cero. El teorema queda demostrado.

*Observación* 1. Del teorema 2 se deduce que si $W(x) \neq 0$ al menos en un solo punto de $(a, b)$, las funciones $y_1, \ldots, y_m$ son linealmente independientes en $(a, b)$.

EJEMPLO 2. Las funciones $1, x, \ldots, x^{m-1}$ son linealmente independientes en cualquier intervalo $(a, b)$, ya que

$$W[1, x, \ldots, x^{m-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{m-1} \\ 0 & 1! & 2x & \ldots & (m-1)\,x^{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)! \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1!\, 2! \ldots (m-1)! \neq 0.$$

EJEMPLO 3. Las funciones $e^{k_1x}, \ldots, e^{k_mx}$ son linealmente independientes en un intervalo cualquiera $(a, b)$, si $k_1, \ldots, k_m$ son números diferentes.

En efecto

$$W[e^{k_1x}, \ldots, e^{k_mx}] = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & \ldots & e^{k_mx} \\ k_1e^{k_1x} & \ldots & k_me^{k_mx} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1^{m-1}e^{k_1x} & \ldots & k_m^{m-1}e^{k_mx} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+\ldots+k_m)x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & \ldots & k_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1^{m-1} & \ldots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

puesto que el último determinante es el determinante de Vandermonde [1]) el cual para diferentes $k_1, \ldots, k_m$ no es igual a cero.

EJEMPLO 4. Las funciones $e^{kx}, xe^{kx}, \ldots, x^{m-1}e^{kx}$ son linealmente independientes en un intervalo $(a, b)$ cualquiera.

Como $e^{kx} \neq 0$ y

$$\alpha_1e^{kx} + \alpha_2xe^{kx} + \ldots + \alpha_mx^{m-1}e^{kx} = e^{kx}[\alpha_1 + \alpha_2x + \ldots + \alpha_mx^{m-1}],$$

la independencia lineal de las funciones indicadas se deduce del segundo ejemplo.

TEOREMA 3. *Para que las soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ de la ecuación diferencial homogénea lineal $L_n[y] = 0$ con los coeficientes continuos*

---

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 2.

*sean linealmente independientes en un intervalo $(a, b)$, es necesario y suficiente que $W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$ para todos los valores de $x \in (a, b)$.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Si $W(x) \neq 0$ en $(a, b)$, entonces las funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ son linealmente independientes sin importar el hecho de que sean o no las soluciones de la ecuación $L_n[y] = 0$ (véase la observación 1).

2) Supongamos que $y_1, \ldots, y_n$ son las funciones linealmente independientes en $(a, b)$ y son las soluciones de la ecuación $L_n[y] = 0$.

Vamos a demostrar que $W(x) \neq 0$ en todos los puntos de $(a, b)$. Admitamos lo contrario, es decir, admitamos que existe el punto $x = x_0 \in [a, b]$ en el cual $W(x_0) = 0$. Escojamos los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, simultáneamente desiguales a cero, de modo que sean las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Esto se puede hacer, ya que el determinante del sistema (8) es $W(x_0) = 0$. Entonces, en virtud del teorema 1, la función $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$ será la solución de la ecuación $L_n[y] = 0$ con condiciones iniciales nulas

$$y(x_0) = 0, \ y'(x_0) = 0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \ \text{(según (8))}.$$

Sin embargo, las mismas condiciones las satisface también la solución trivial $y \equiv 0$. En virtud del teorema de existencia y de unicidad, la solución que satisfaga estas $n$ condiciones iniciales puede ser una sola y, por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) \equiv 0$ en $(a, b)$, o sea, las funciones $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes en $(a, b)$ lo que no hemos supuesto. El teorema queda demostrado.

Si $p_i(x)$ son las funciones discontinuas en el intervalo donde buscamos la solución, entonces la ecuación $L_n[y] = 0$ puede tener no una sola solución que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ y entonces es posible que $W(x) \equiv 0$ en $(a, b)$.

EJEMPLO 5. Es fácil comprobar que las funciones

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^\alpha, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leqslant 1, \\ (x-1)^\alpha, & 1 < x < 2 \end{cases} \quad (\alpha > 2)$$

son linealmente independientes en (0, 2) y para ellas $W(x) \equiv 0$ en (0, 2).

Esto está ligado al hecho de que la función $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es la solución general de la ecuación

$$y'' - \frac{\alpha(\alpha-1)}{(x-1)^2}\, y = 0,$$

donde $p_0(x) = -\frac{\alpha(\alpha-1)}{(x-1)^2}$ es discontinua en el punto $x = 1$. Para esta ecuación el teorema de existencia y de unicidad no tiene lugar (en el entorno del punto $x = 1$). No solamente la función $y \equiv 0$ sino también la función $y_1(x)$ es la solución de la ecuación diferencial, tal que satisface las condiciones iniciales $y = 0$ e $y' = 0$ cuando $x = 1$.

TEOREMA 4 (ESTRUCTURA DE LA SOLUCIÓN GENERAL). *Si $y_1, \ldots, y_n$ son las soluciones linealmente independientes en el intervalo $(a, b)$, de la ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden $L_n[y] = 0$ con los coeficientes continuos $p_i(x)$, $a < x < b$, entonces la función*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x), \quad a < x < b, \tag{9}$$

*donde $C_k$ son las constantes arbitrarias, es la solución general de la ecuación $L_n[y] = 0$, o sea, la suma* (9), *cualesquiera que sean $C_k$, es la solución de esta ecuación y, viceversa, toda solución de esta ecuación se puede representar en forma de la suma* (9) *para los valores correspondientes de $C_k$.*

DEMOSTRACION. Ya sabemos que la suma (9), cualesquiera que sean $C_k$, es la solución de la ecuación $L_n[y] = 0$. Supongamos lo inverso que $z = z(x)$ es una solución arbitraria de esta ecuación. Pongamos

$$z(x_0) = z_0, \quad z'(x_0) = z'_0, \ \ldots, \ z^{(n-1)}(x_0) = z_0^{(n-1)}. \tag{10}$$

Para los números obtenidos $z_0, z'_0, \ldots, z_0^{(n-1)}$ planteemos un sistema lineal de ecuaciones respecto a los números incógnitos $C_k$:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x_0) &= z_0, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)}(x_0) &= z_0^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

El determinante del sistema (11) $W(x_0)$ no es igual a cero, ya que las funciones $y_1, \ldots, y_n$ son las soluciones linealmente independientes, en $(a, b)$, de la ecuación $L_n[y] = 0$. Por eso existe un único sistema de números $C_1^0, \ldots, C_n^0$ que satisfacen las ecuaciones (11).

Sustituyéndolos en (9), obtenemos la solución de nuestra ecuación en la forma

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k^0 y_k(x),$$

solución que satisface las mismas condiciones iniciales (10) las cuales satisface $z(x)$. Pero entonces, sobre la base del teorema de existencia y de unicidad tiene lugar la igualdad $z(x) = y(x)$, $x \in (a, b)$. El teorema queda demostrado.

Ahora bien, para encontrar la solución general de la ecuación homogénea $L_n[y] = 0$, es suficiente hallar cualesquiera $n$ soluciones linealmente independientes de esta ecuación y entonces la solución general será su combinación lineal (9). Recordemos que hemos convenido en llamar a todo conjunto de $n$ soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación $L_n[y] = 0$ *sistema fundamental de soluciones* de esta ecuación.

Surge la pregunta: ¿Existe o no en todos los casos un sistema fundamental de soluciones para la ecuación diferencial homogénea dada (3) con coeficientes continuos? Mostremos que existe en todos los casos.

Demos $n$ vectores

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= (1, 0, \ldots, 0), \\ a^{(2)} &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(n)} &= (0, 0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

A cada uno de estos vectores le haremos corresponder la solución $y_k(x)$ de la ecuación (3). Supongamos que precisamente $y_k(x)$ es la solución que satisface las condiciones iniciales

$$y_k(x_0) = 0,\ y_k'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_k^{(k-2)}(x_0) = 0,$$
$$y_k^{(k-1)}(x_0) = 1,\ y_k^{(k)}(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_k^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

El determinante de Wronski $W(x)$ para este sistema de soluciones cuando $x = x_0$ $(a \leqslant x_0 \leqslant b)$ es, evidentemente, el determinante de la matriz compuesta de los vectores $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$. Es igual a 1:

$$W(x_0) = 1 \neq 0.$$

Pero entonces el sistema de soluciones $y_1, \ldots, y_n$ es linealmente independiente, porque para un sistema dependiente el determinante de Wronski sería idénticamente igual a cero.

## § 1.16. Ecuaciones homogéneas lineales de $n$-ésimo orden con coeficientes constantes

La ecuación

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = 0, \qquad (1)$$
$$-\infty < x < \infty,$$

donde $p_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) son los números constantes se llama *ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes.*

Para resolver la ecuación (1) es necesario hallar cualquier sistema fundamental suyo de soluciones, o sea, hallar cualesquiera $n$ soluciones particulares suyas $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ que forman un sistema linealmente independiente sobre todo el eje y entonces (véase § 1.15) la solución general de la ecuación (1) tendrá el aspecto

$$y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son los números constantes arbitrarios.

Busquemos las soluciones particulares de la ecuación (1) en la forma $y = e^{kx}$, donde $k$ es un número constante. Entonces

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx},\ \ldots,\ y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Sustituyendo estos valores de las derivadas en (1), obtenemos

$$L_n[e^{kx}] = e^{kx}[k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1 k + p_0] = 0.$$

Como $e^{kx} \neq 0$, entonces

$$R_n(k) \equiv k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1 k + p_0 = 0. \qquad (2)$$

Ahora bien, si $k$ es la raíz de la ecuación algebraica (2), la función $y = e^{kx}$ es la solución de la ecuación (1) y al revés. La ecuación (2) se dice *característica* para la ecuación (1). Esta puede obtenerse de (1) si las derivadas $y^{(j)}$ se sustituyen, respectivamente, por los números $k^j$ ($j = 0, 1, \ldots, n$). Y viceversa, por la ecuación (2) es fácil reconstruir la ecuación (1). Como es sabido, la ecuación (2) tiene $n$ raíces, tomando en cuenta la multiplic dad.

1°. Supongamos que las raíces de la ecuación (2) $k_1, \ldots, k_n$ son diferentes. Entonces $n$ funciones

$$e^{k_1 x},\ e^{k_2 x},\ \ldots,\ e^{k_n x} \qquad (3)$$

son las soluciones de la ecuación (1) y, además, son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ (véase el ejemplo 3, § 1.15), o sea, forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1).

Por eso en este caso (véase § 1.15, teorema 4) la solución general de la ecuación (1) se escribirá en la forma

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n} C_j e^{k_j x}, \tag{4}$$

donde $C_j$ son las constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1. A la ecuación $y'' - 5y' + 6y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^2 - 5k + 6 = 0$ con las raíces reales simples $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. La solución general es $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

EJEMPLO 2. A la ecuación $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$ o bien $(k - 2)(k^2 - 1) = 0$. Las raíces son simples: $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$. A éstas les corresponde la solución general de la ecuación $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + C_3e^{-x}$.

Si los números $p_i$ son reales y una raíz cualquiera $k_j$ es compleja ($k_j = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$), entonces entre las demás raíces debe existir una raíz conjugada ($k_s = \alpha - i\beta$, $s \neq j$). Puesto que las funciones complejas $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $e^{(\alpha-i\beta)x}$ son las soluciones de la ecuación (1), entonces (véase el teorema 1, § 1.15) la función

$$\frac{1}{2}\left[e^{(\alpha+i\beta)x}+e^{(\alpha-i\beta)x}\right]=e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{5}$$

al igual que la función

$$\frac{1}{2i}\left[e^{(\alpha+i\beta)x}-e^{(\alpha-i\beta)x}\right]=e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \tag{6}$$

es, a su vez, la solución de la ecuación (1). Aquí hemos utilizado las fórmulas de Euler $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$.

Las soluciones (5) y (6) son funciones reales y en esto consiste su ventaja ante las funciones $\exp(k_jx)$ y $\exp(k_sx)$; ésta es la razón por la que ellas sustituyen frecuentemente en el sistema (3) estas últimas funciones.

Se puede demostrar que el sistema modificado (3) es linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 3. A la ecuación $y'' + y = 0$ le corresponden la ecuación característica $k^2 + 1 = 0$ y las raíces complejas $k_1 = i$, $k_2 = -i$ conjugadas entre si. En forma exponencia la solución tiene la forma

$$y=C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}.$$

Utilizando las fórmulas de Euler, la solución general se puede escribir:

$$y = C_1(\cos x + i \operatorname{sen} x) + C_2(\cos x - i \operatorname{sen} x) =$$
$$= (C_1 + C_2)\cos x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen} x = A\cos x + B\operatorname{sen} x.$$

Aquí $A$ y $B$ son las constantes arbitrarias, porque las ecuaciones $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$ pueden ser resueltas respecto a $C_1$ y $C_2$ para $A$ y $B$ cualesquiera.

EJEMPLO 4. A la ecuación $y'' + y' + y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^2 + k + 1 = 0$ con las raíces

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La solución general de la ecuación se escribirá así

$$y = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

2°. Si $k_1$ es la raíz del orden de multiplicidad $m$, entonces en el sistema (3) aparecen $m$ funciones iguales

$$e^{k_1x},\ e^{k_2x},\ \ldots,\ e^{k_mx} \quad (k_1 = k_2 = \ldots = k_m) \tag{7}$$

y el sistema (3) deja de ser linealmente independiente. En este caso (cuando $k_1$ es una raíz múltiple) resulta (véase a continuación el lema 1) que las funciones

$$e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{k_1x} \tag{8}$$

también son las soluciones de la ecuación (1) que forman un sistema linealmente independiente en cualquier intervalo $(a, b)$ (véase a continuación el lema 1). Por regla general, ellas sustituyen las funciones (7) en el sistema (3).

Si tal sustitución se lleva a cabo para todas las raíces múltiples, el nuevo sistema obtenido será, como puede demostrarse, linealmente independiente.

EJEMPLO 5. A la ecuación $y'' - 2y' + y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^2 - 2k + 1 = 0$ que tiene una raíz de segundo orden de multiplicidad $k = 1$. Por eso la solución general de esta ecuación se escribe en la forma $y = C_1e^x + C_2xe^x$.

EJEMPLO 6. A la ecuación $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0$ o bien $(k + 1)^3 = 0$, de donde $k = -1$ es la raíz de tercer orden de multiplicidad y, por consiguiente, la solución general tiene la forma $y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2)$.

Para $p_i$ reales, si $k_1 = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de orden de multiplicidad $m$, entonces $\bar{k}_1 = \alpha - i\beta$ es asimismo la raíz de orden de multiplicidad $m$ a la cual le corresponden las soluciones

$$e^{\bar{k}_1x},\ xe^{\bar{k}_1x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\bar{k}_1x} \tag{8'}$$

que surgen en la serie (3). Escribamos más detalladamente las soluciones (8) y (8')

$$e^{(\alpha+i\beta)x},\ xe^{(\alpha+i\beta)x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{(\alpha+i\beta)x},$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x},\ xe^{(\alpha-i\beta)x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Sumándolas, respectivamente, y dividiéndolas entre 2 o bien restándolas y dividiéndolas entre $2i$, obtenemos dos sistemas de soluciones reales de la ecuación (1)

$$\left.\begin{array}{l} e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \end{array}\right\} \tag{9}$$

las cuales sustituyen las funciones complejas (8) y (8') en la serie (3).

Queda por observar que se puede demostrar que si semejante sustitución se efectúa para todas las raíces múltiples de la ecuación característica, entonces las funciones del nuevo sistema forman un sistema linealmente independiente de soluciones de la ecuación (1) en cualquier intervalo $(a, b)$.

EJEMPLO 7. A la ecuación diferencial $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ le corresponde la ecuación característica $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ o bien $(k^2 + 1)^2 = 0$, de donde $k_1 = i$ y $k_2 = -i$ son las raíces de segundo orden de multiplicidad. Por eso la solución general de la ecuación diferencial tiene la forma

$$y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \operatorname{sen} x + C_4 x \operatorname{sen} x.$$

LEMA 1. *Si $k_1$ es la raíz de la ecuación característica $R_n(k) = 0$ de orden de multiplicidad $m$, las funciones*

$$e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{k_1x}$$

*son las soluciones de la ecuación diferencial* (1) *linealmente independientes en cualquier intervalo* $(a, b)$.

DEMOSTRACIÓN. La independencia lineal de las funciones indicadas queda establecida en el ejemplo 4 del § 1.15.

Puesto que $k_1$ es la raíz de orden de multiplicidad $m$ del polinomio $R_n(k)$, entonces $R_n(k) = (k - k_1)^m \varphi(k)$, donde $\varphi(k)$ es un polinomio tal que $\varphi(k_1) \neq 0$. De aquí

$$R_n(k_1) = 0,\quad R_n'(k_1) = 0,\ \ldots,\ R_n^{(m-1)}(k_1) = 0. \tag{10}$$

Tenemos

$$L_n[x^j e^{kx}] = L_n\left[\frac{\partial^j}{\partial k^j} e^{kx}\right] = \frac{\partial^j}{\partial k^j} L_n[e^{kx}] =$$
$$= \frac{\partial^j}{\partial k^j}\{e^{kx}R_n(k)\} = \sum_{s=0}^{j} C_s \frac{\partial^{j-s}e^{kx}}{\partial k^{j-s}} \cdot \frac{d^s R_n(k)}{dk^s},$$

donde $C_s$ son ciertos números constantes. De aquí, si $j \leqslant m - 1$ y $k = k_1$, en virtud de (10), obtenemos

$$L_n[x^j e^{k_1 x}] = 0$$

y el lema queda demostrado.

*Observación* 1. De lo expuesto anteriormente se deduce que si $k_j$ es la raíz de una ecuación característica cuyo orden de multiplicidad es $l_j$ ($j = 1, \ldots, m$; $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$), entonces el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1) consta de las funciones

$$e^{k_j x}, \; xe^{k_j x}, \; \ldots, \; x^{l_j - 1} e^{k_j x} \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Si cierta raíz $k_j$ es compleja $k_j = \alpha_j + i\beta_j$ ($\beta_j \neq 0$), entonces a ésta, junto con la raíz $\bar{k}_j$ le corresponde el grupo de funciones reales

$$e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \; \ldots, \; x^{l_j - 1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x,$$
$$e^{\alpha_j x} \operatorname{sen} \beta_j x, \; \ldots, \; x^{l_j - 1} e^{\alpha_j x} \operatorname{sen} \beta_j x.$$

EJEMPLO 8. La ecuación con coeficientes variables cuya forma es

$$x^n y^{(n)} + p_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_1 x y' + p_0 y = 0,$$

donde $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ son los números constantes, se llama *ecuación de Euler*.

Sustituyendo $x = e^t$ esta ecuación se reduce a la de coeficientes constantes. En efecto, tenemos

$$y(x) = y(e^t) = v(t),$$

de donde

$$y'(x) = v'(t) \cdot \frac{dt}{dx} = v'(t) \cdot e^{-t}, \quad xy'(x) = v'(t);$$

$$y''(x) = v''(t)\, e^{-2t} - v'(t)\, e^{-2t}; \quad x^2 y''(x) = v''(t) - v'(t); \; \ldots$$

Sustituyendo estos valores, obtenemos una ecuación con coeficientes constantes respecto a la función $v(t)$. Las soluciones particulares de esta ecuación, como hemos mostrado anteriormente, son las funciones cuya forma es $e^{kt} = x^k$ o bien $t^j e^{kt} = x^k \ln^j x$, donde $k$ es la raíz (simple o múltiple) de la ecuación característica respectiva. Ahora bien, las soluciones particulares de la ecuación de Euler se pueden hallar directamente en la forma $x^k$, $x^k \ln^j x$.

EJEMPLO 9. Resolvamos la ecuación concreta de Euler $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$. Busquemos las soluciones particulares en la forma $y = x^k$, entonces

$$y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)\, x^{k-2}.$$

Sustituyendo estos valores de las derivadas, obtenemos

$$x^2k(k-1)x^{k-2}+3kx\cdot x^{k-1}+x^k=x^k[k(k-1)+3k+1]=0.$$

De aquí, si $x\neq 0$, entonces $k(k-1)+3k+1=0$. La última ecuación tiene la raíz $k=-1$ de segundo orden de multiplicidad. Por lo tanto, $y=1/x$ es una solución de la ecuación de Euler. La otra solución es $y=(\ln x)/x$ de lo cual podemos convencernos directamente. Puesto que $1/x$ y $(\ln x)/x$ son linealmente independientes (su determinante de Wronski es igual a $1/x^3\neq 0$),

$$y=\frac{C_1}{x}+C_2\frac{\ln x}{x}$$

es la solución general de la ecuación dada de Euler.

## § 1.17. Método de variación de las constantes

Examinemos la ecuación lineal no homogénea de $n$-ésimo orden

$$L_n[y]=y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+p_0y=f(x), \tag{1}$$

donde los coeficientes $p_i=p_i(x)$ y el segundo miembro $f(x)$ está representado por las funciones continuas dadas en un intervalo $(a, b)$.

Admitamos que conocemos el sistema fundamental de soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente

$$L_n[y]=0. \tag{2}$$

Como hemos mostrado en el § 1.15 (fórmula (6)), la solución general de la ecuación (1) es igual a la suma de la solución general de la ecuación (2) y de una solución cualquiera de a ecuación (1).

La solución de la ecuación no homogénea (1) puede obtenerse por el *método de variación de las constantes* si se conoce la solución general de la ecuación homogénea (2). Aclaremos este método citando como ejemplo una ecuación de tercer orden.

Supongamos dada la ecuación lineal de tercer orden

$$y'''+p_2y''+p_1y'+p_0y=f(x). \tag{3}$$

Supongamos, además, que la solución general de la ecuación homogénea correspondiente es

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x), \tag{4}$$

donde $y_1$, $y_2$, $y_3$ son las soluciones linealmente independientes de la ecuación (2), $(L[y_i]=0,\ i=1, 2, 3)$.

Busquemos la solución de la ecuación no homogénea (3) en forma de la suma de (4), donde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ son ciertas funciones continuamente derivables que deben ser halladas. Impongamos sobre las funciones buscadas $C_i(x)$ dos condiciones

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3} C_i'(x)\,y_i(x)=0,\\ &\sum_{i=1}^{3} C_i'(x)\,y_i'(x)=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Entonces

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{i=1}^{3} C_i y_i' + \sum_{i=1}^{3} C_i' y_i = \sum_{i=1}^{3} C_i y_i',\\ y'' &= \sum_{i=1}^{3} C_i y_i'' + \sum_{i=1}^{3} C_i' y_i' = \sum_{i=1}^{3} C_i y_i'',\\ y''' &= \sum_{i=1}^{3} C_i y_i''' + \sum_{i=1}^{3} C_i' y_i''. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas y la misma función $y$ en (3), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{3} C_i y_i''' + \sum_{i=1}^{3} C_i' y_i'' + p_2 \sum_{i=1}^{3} C_i y_i'' + p_1 \sum_{i=1}^{3} C_i y_i' + p_0 \sum_{i=1}^{3} C_i y_i = f(x),$$

o bien,

$$C_1(y_1''' + p_2 y_1'' + p_1 y_1' + p_0 y_1) + C_2(y_2''' + p_2 y_2'' + p_1 y_2' + p_0 y_2) +$$

$$+ C_3(y_3''' + p_2 y_3'' + p_1 y_3' + p_0 y_3) + \sum_{i=1}^{3} C_i' y_i'' = f(x).$$

Pero las expresiones entre paréntesis en el primer miembro de esta igualdad son iguales a cero, por eso

$$\sum_{i=1}^{3} C_i' y_i'' = f(x). \tag{6}$$

Hemos obtenido la ecuación (6) y dos ecuaciones (5) con los coeficientes $y_i$, $y_i'$, $y_i''$ y con el segundo miembro $f(x)$ los cuales son continuos en el intervalo $(a, b)$. Estas tres ecuaciones forman un sistema algebraico lineal respecto a las incógnitas $C_1'$, $C_2'$, $C_3'$ con un determinante no igual a cero, por cuanto es el determinante de Wronski para el sistema fundamental de soluciones $y_1$, $y_2$, $y_3$. Por eso el sistema dado tiene una sola solución

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

donde $\varphi_i$ son las funciones continuas en $(a, b)$, de donde

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx. \tag{7}$$

En este caso las funciones $C_i(x)$ tienen en $(a, b)$ una derivada continua. Por consiguiente, la solución particular de la ecuación no homogénea (1) tiene la forma

$$y(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x) + C_3(x)\,y_3(x),$$

donde las funciones $C_i(x)$ se definen por las igualdades (7).

EJEMPLO. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$, $R_2(k) = k^2 - 3k + 2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ son las raíces de la ecuación característica; la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Hallemos la solución particular de la ecuación no homogénea por el método de variación de las constantes $C_1$ y $C_2$. Planteemos el sistema (5) y (6):

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)\,e^{2x} = 0, \\ C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)2\cdot e^{2x} = e^{3x} \end{array}\right\} W[y_1y_2] = e^{3x} \neq 0.$$

Resolviendo el sistema, tenemos $C_1'(x) = -e^{2x}$, $C_2'(x) = e^x$, de donde $C_1(x) = -e^{2x}/2$, $C_2(x) = e^x$ y la solución particular

$$\bar{y} = -\frac{1}{2}\,e^{2x}\cdot e^x + e^xe^{2x} = \frac{1}{2}\,e^{3x}.$$

Ahora bien, la solución general de la ecuación inicial tiene la forma

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{3x}.$$

## § 1.18. Solución particular de una ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes

Examinemos la ecuación no homogénea de $n$-ésimo orden con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0y = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

donde el segundo miembro tiene la forma especial $f(x) = e^{k_0x}$ o una forma más general $f(x) = x^{l-1}e^{k_0x}$, o bien $x^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, o bien $x^{l-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ $(l = 1, 2, \ldots)$.

Nos interesarán los procedimientos de obtención de la solución particular de la ecuación (1). Esto tiene importancia, porque para obtener la solución general de la ecuación (1) es necesario hallar cualquier solución particular suya y agregarle la solución general de la ecuación homogénea correspondiente. Ya sabemos encontrar la solución general (véase el § 1.15).

Examinemos primeramente el caso más simple $f(x) = ae^{k_0x}$. El polinomio característico de la ecuación (1) tiene la forma

$$R_n(k) = k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_0.$$

Si $k_0$ no es la raíz de la ecuación característica

$$R_n(k) = 0, \tag{2}$$

entonces la solución particular de la ecuación

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0y = ae^{k_0x} \tag{3}$$

se puede hallar en forma de la función

$$y = Ae^{k_0x}, \tag{4}$$

donde $A$ es la constante. Sustituyendo esta función en la ecuación (3), obtenemos $AR_n(k_0)e^{k_0x} = ae^{k_0x}$, de donde, después de efectuar la simplificación eliminando el factor $e^{k_0x}$ (¡no igual a cero!), obtenemos $AR_n(k_0) = a$ o bien

$$A = a/R_n(k_0) \tag{5}$$

y el número $A$ queda hallado.

EJEMPLO 1. A la ecuación

$$y'' + y = e^x \tag{6}$$

le corresponde la ecuación característica

$$R_2(k) = k^2 + 1 = 0.$$

El número $k_0 = 1$ no es la raíz de la ecuación característica $(R_2(k_0) = R_2(1) = 2 \neq 0)$, por eso la solución particular (6) se puede buscar en forma de $y = Ae^x$. Con arreglo a (5) $A = (R_2(1))^{-1} = 1/2$. La solución general de la ecuación (6) tiene la forma

$$y = \frac{1}{2}e^x + C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x,$$

donde $C_1$, $C_2$ son las constantes arbitrarias.

Si $k_0$ es la raíz de la ecuación característica (2), entonces, evidentemente, la ecuación (3) no tiene la solución de forma (4). En este caso nos ayudará el lema siguiente.

LEMA 1. *Si $k_0$ es una raíz real o compleja de orden de multiplicidad $m$ de la ecuación característica* (2), *entonces la solución particular de la ecuación diferencial* (3) *se puede hallar en la forma*

$$y = Ax^m e^{k_0 x},$$

*donde $A$ es cierta constante.*

Citemos primero un ejemplo.

EJEMPLO 2.

$$y'' - 2y' + y = e^x. \tag{7}$$

La ecuación característica es $k^2 - 2k + 1 = 0$, o bien $(k - 1)^2 = 0$. El número $k_0 = 1$ es su raíz de orden de multiplicidad 2. Por eso, de acuerdo con el lema 1, es necesario hallar la solución en la forma

$$y = Ax^2e^x.$$

Tenemos

$$y' = A \cdot 2xe^x + Ax^2e^x,$$
$$y'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x.$$

Sustituyendo en (7), obtenemos

$$2Ae^x = e^x.$$

Por lo tanto, $A = 1/2$ y la solución general es

$$y = \frac{1}{2} x^2e^x + (C_1 + C_2x) e^x.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. Apliquemos a ambos miembros de la ecuación diferencial (3) la operación (el operador)

$$\frac{d}{dx} - k_0 \left( \left( \frac{d}{dx} - k_0 \right) u = \frac{du}{dx} - k_0u \right).$$

De aquí en el segundo miembro tendremos

$$\left( \frac{d}{dx} - k_0 \right) ae^{k_0x} = \frac{d}{dx} (ae^{k_0x}) - k_0ae^{k_0x} = 0.$$

Por eso

$$\left( \frac{d}{dx} - k_0 \right) L_n [y] = 0. \tag{8}$$

Hemos obtenido la ecuación diferencial de orden $(n + 1)$ con coeficientes constantes. Su ecuación característica tiene la forma

$$(k - k_0) R_n (k) = 0. \tag{9}$$

La ecuación $R_n (k) = 0$ y la ecuación (9) tienen las mismas raíces pero la raíz $k_0$ de la ecuación (9) es de orden de multiplicidad $m + 1$

(es decir, mayor en una unidad). Escribiremos la solución general de la ecuación homogénea

$$L_n[y] = 0 \tag{10}$$

así:

$$v = (C_1 + C_2x + \ldots + C_mx^{m-1})\, e^{k_0x} + \sum_{j=m+1}^{n} C_jy_j(x),$$

donde $y_{m+1}, \ldots, y_n$ son las soluciones correspondientes a las raíces de la ecuación característica que no son iguales a $k_0$, si tales raíces existen. La solución general de la ecuación (8) se puede escribir en la forma

$$z = Ax^m e^{k_0x} + v.$$

Toda solución $y$ de la ecuación (3) es la solución de la ecuación (8) y por eso

$$y = Ax^m e^{k_0x} + v \tag{11}$$

para cierto conjunto de constantes

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n,\ A. \tag{12}$$

Hemos demostrado que si $y$ es la solución de la ecuación (3) $L_n[y] = ae^{k_0x}$, se puede escoger las constantes (12) de modo que $y = Ax^m e^{k_0x} + v$. Para las constantes indicadas (12) tendremos

$$L_n[Ax^me^{k_0x}] = L_n[y - v] = L_n[y] - L_n[v] = ae^{k_0x} - 0 = ae^{k_0x}.$$

De este modo hemos demostrado que existe un número $A$ tal para el cual la función

$$y = Ax^me^{k_0x}$$

es la solución de la ecuación diferencial no homogénea (3). El lema queda demostrado.

Examinemos ahora dos ecuaciones diferenciales

$$y_1^{(n)} + p_{n-1}y_1^{(n-1)} + \ldots + p_0y_1 = ax^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{13}$$

$$y_2^{(n)} + p_{n-1}y_2^{(n-1)} + \ldots + p_0y_2 = ax^{l-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \tag{14}$$

donde $\alpha$, $\beta$, $p_j$ son números reales y $l$, un número natural. Multiplicando la segunda de ellas por $i$ y sumándola con la primera, obtenemos la ecuación

$$z^{(n)} + p_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + p_0z = ax^{l-1}e^{k_0x},$$
$$z = y_1 + iy_2,\quad k_0 = \alpha + i\beta. \tag{15}$$

En vez de dos ecuaciones (13) y (14) con las funciones incógnitas $y_1(x)$, $y_2(x)$ hemos obtenido una sola ecuación (15) con la función compleja incógnita $z(x) = y_1(x) + iy_2(x)$. Si la solución $z = y_1 + iy_2$ de la ecuación (15) está hallada, entonces su parte real $y_1$ será la solución de la ecuación (13) y su parte imaginaria $y_2$, la solución de la ecuación (14).

La ecuación (15) ya ha sido investigada para $l = 1$.

EJEMPLO 3. Se da la ecuación

$$y'' + y = \operatorname{sen} x. \tag{16}$$

Junto con ésta examinemos la ecuación

$$y'' + y = \cos x. \tag{17}$$

Tenemos

$$y_1'' + y_1 = \cos x, \quad y_2'' + y_2 = \operatorname{sen} x.$$

Multiplicando la segunda ecuación por $i$ y sumándola con la primera, obtenemos

$$z'' + z = e^{ix}, \quad z = y_1 + iy_2. \tag{18}$$

El número $k_0 = i$ es la raíz de orden de multiplicidad 1 de la ecuación característica, por eso la solución particular debe hallarse en la forma $z = Axe^{ix}$. Tenemos

$$z' = Ae^{ix} + Aixe^{ix}, \quad z'' = 2Aie^{ix} - Axe^{ix}.$$

Sustituyendo $z$, $z'$ y $z''$ en la ecuación (18), obtenemos

$$2Aie^{ix} = e^{ix}, \quad A = 1/(2i) = -i/2.$$

La solución particular de la ecuación (18) tiene la forma

$$z = -\frac{ix}{2}e^{ix} = -\frac{ix}{2}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = \frac{x}{2}\operatorname{sen} x - i\frac{x}{2}\cos x.$$

Su parte imaginaria

$$y = -\frac{x}{2}\cos x$$

es la solución particular de la ecuación dada (16), mientras que su parte real es la solución particular de la ecuación (17).

El caso $l > 1$ (para la ecuación (15)) se prevé en el lema siguiente.

LEMA 2. *La solución particular* (15) *se puede hallar entre las funciones que tienen la forma*

$$C_m x^m + \ldots + C_{m+l-1}x^{m+l-1})\, e^{k_0 x}, \tag{19}$$

*donde $m$ es el orden de multiplicidad de la raíz $k_0$ de la ecuación característica $R_n(k) = 0$ y $C_m, C_{m+1}, \ldots, C_{m+l-1}$ son las constantes.*

Si $k_0$ no es la raíz de la ecuación $R_n(k) = 0$, entonces, a pesar de esto, se puede formalmente considerar que $k_0$ es la raíz de orden de multiplicidad 0. En este caso es necesario en la fórmula (19) suponer $m = 0$ y buscar la solución particular en la forma

$$(C_0 + C_1 x + \ldots + C_{l-1} x^{l-1}) e^{k_0 x}.$$

La demostración se efectúa de un modo análogo a la del lema 1.

La solución general de la ecuación homogénea $L_n[z] = 0$ se escribe así:

$$v = (C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-1} x^{m-1}) e^{k_0 x} + \sum_{j=m+1}^{n} C_j z_j(x), \qquad (20)$$

donde $z_{m+1}, \ldots, z_n$ son las soluciones que corresponden a las raíces, no iguales a $k_0$, si tales existen.

Sometamos la ecuación (15) a la operación $\left(\frac{d}{dx} - k_0\right)^l$. Ya que

$$\left(\frac{d}{dx} - k_0\right)(ax^{l-1} e^{k_0 x}) = \frac{d}{dx}(ax^{l-1} e^{k_0 x}) - k_0 a x^{l-1} e^{k_0 x} = a(l-1) x^{l-2} e^{k_0 x},$$

entonces

$$\left(\frac{d}{dx} - k_0\right)^l (ax^{l-1} e^{k_0 x}) = \left(\frac{d}{dx} - k_0\right)(a(l-1)!\, e^{k_0 x}) = 0.$$

Por eso obtenemos la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes

$$\left(\frac{d}{dx} - k_0\right)^l L_n[z] = 0. \qquad (21)$$

La ecuación característica de ésta tiene las mismas raíces que la ecuación $R_n(k) = 0$, pero el orden de multiplicidad de $k_0$ es mayor en el número $l$. Por eso la solución general de la ecuación (21) se puede escribir en la forma

$$z = (C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m+l-1} x^{m+l-1}) e^{k_0 x} + \sum_{k=m+1}^{n} C_k z_k =$$
$$= v + (C_m x^m + \ldots + C_{m+l-1} x^{m+l-1}) e^{k_0 x}. \qquad (22)$$

Toda solución $z$ de la ecuación (15) es la solución de la ecuación (21) y por eso puede ser escrita en la forma (22). Pero entonces

$$L_n[(C_m x^m + \ldots + C_{m+l-1} x^{m+l-1}) e^{k_0 x}] =$$
$$= L_n[z - v] = L_n[z] - L_n[v] = ax^{l-1} e^{k_0 x}$$

lo que muestra que la función (19), al estar elegidas convenientemente las constantes $C_m, \ldots, C_{m+l-1}$, es la solución particular de la ecuación (15).

EJEMPLO 4. $y'' - y = xe^x$ $(k_0 = 1,\ l = 2)$.

La ecuación característica $k^2 - 1 = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = \pm 1$. El número $k_0 = 1$ es la raíz de una ecuación característica cuyo orden de multiplicidad vale 1. Por eso, conforme al lema 2, la solución particular se busca en la forma

$$y = (Ax + Bx^2)\, e^x.$$

Tenemos

$$y' = [A + (A + 2B)\, x + Bx^2]\, e^x,$$
$$y'' = [2\,(A + B) + (A + 4B)\, x + Bx^2]\, e^x.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos

$$e^x\,(2A + 2B + 4Bx) = xe^x,$$

de donde

$$2A + 2B = 0, \quad 4B = 1,$$

o sea,

$$A = -1/4, \quad B = 1/4.$$

Por lo tanto, la solución particular de nuestra ecuación será

$$y = (-x + x^2)\, e^x/4$$

y la solución general será

$$y = \left(-\frac{x}{4} + \frac{x^2}{4}\right) e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

*Observación*. Si la función $y_i$ es la solución de la ecuación

$$L_n\,[y] = f_i\,(x) \quad (i = 1, \ldots, q),$$

entonces la función $y = \sum\limits_{i=1}^{q} y_i$ es la solución de la ecuación

$$L_n\,[y] = L_n\,[\sum_{i=1}^{q} y_i] = \sum_{i=1}^{q} L_n\,[y_i] = \sum_{i=1}^{q} f_i\,(x).$$

De aquí y de lo dicho anteriormente queda claro que la forma de la solución particular de la ecuación no homogénea $L_n\,[y] = f\,(x)$ cuyo segundo miembro tiene el aspecto

$$f\,(x) = P_{m-1}\,(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + Q_{m-1}\,(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

donde $P_{m-1}\,(x)$, $Q_{m-1}\,(x)$ son ciertos polinomios algebraicos de un grado no superior a $(m - 1)$, coincide con la forma del segundo miembro si $\alpha \pm i\beta$ no son las raíces de la ecuación característica $R_n\,(k) = 0$.

Si los números $\alpha \pm i\beta$ son las raíces de la ecuación característica con orden de multiplicidad $l$, entonces la solución particular hay que buscarla asimismo en la forma del segundo miembro, pero los grados de los polinomios algebraicos se deben elevar en $l$ unidades.

Notemos que si en el segundo miembro está presente, por ejemplo, el sumando $Q_{m-1}(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x$, entonces es necesario buscar la solución particular en forma de dos sumandos

$$R_1(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + R_2(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

donde $R_1(x)$ y $R_2(x)$ son los polinomios de grados respectivos.

EJEMPLO 5. Escribir la forma de la solución particular de la ecuación

$$y'' + y = x \operatorname{sen} x.$$

La ecuación característica $k^2 + 1 = 0$ tiene las raíces $\pm i$. Al segundo miembro $x \operatorname{sen} x$ le corresponde el número $k_0 = \alpha \pm i\beta = 0 \pm i1 = \pm i$. Estos números son las raíces de orden de multiplicidad 1 de la ecuación característica, por eso la solución particular se debe buscar en la forma

$$y(x) = (Ax + Bx^2) \operatorname{sen} x + (Cx + Dx^2) \cos x.$$

EJEMPLO 6. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = x^2 e^x$; la ecuación característica $k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1 = (k-1)^4 = 0$. Al segundo miembro $x^2 e^4$ le corresponde el número $\alpha = 1$ el cual es la raíz de cuarto orden de multiplicidad de la ecuación característica. Por lo tanto, la ecuación particular debe buscarse en la forma

$$y(x) = (Ax^4 + Bx^5 + Cx^6)\, e^x.$$

## § 1.19. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Espacio de fases

Al estudiar la ley de movimiento de un punto material de masa $m$ es cómodo hacerse uso de la forma vectorial de notación de las ecuaciones. Supongamos, pues, que $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ es la ley de movimiento de un punto material en el espacio $R^3$, donde $t$ es el tiempo. Esto significa que en el instante de tiempo $t$ el punto tiene el radio vector $\boldsymbol{r}(t)$, o lo que es lo mismo, las coordenadas $\{x(t), y(t), z(t)\}$.

Si un punto de masa $m$ se mueve bajo la acción de una fuerza dada (vector) $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}})$, entonces, según la ley de Newton y la interpretación mecánica de la segunda derivada, la función $\boldsymbol{r}(t)$ debe satisfacer la ecuación de movimiento

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}). \tag{1}$$

La ecuación vectorial (1) es equivalente al sistema de tres ecuaciones escalares

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}),\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}),\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}),\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

donde $X$, $Y$, $Z$ son las proyecciones del vector $F$ sobre los ejes de coordenadas $x$, $y$, $z$.

Si suponemos incógnitas no solamente las coordenadas del punto $x$, $y$, $z$ sino también las proyecciones de la velocidad

$$\frac{dr}{dt} = \{\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\},$$

obtenemos el sistema de seis ecuaciones de primer orden

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= u, \quad m\frac{du}{dt} = X(t,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w),\\ \dot{y} &= v, \quad m\frac{dv}{dt} = Y(t,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w),\\ \dot{z} &= w, \quad m\frac{dw}{dt} = Z(t,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w).\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

La ecuación vectorial (1) se puede escribir también en forma del sistema de dos ecuaciones vectoriales, si la velocidad $V = \frac{dr}{dt}$ se considera como función vectorial incógnita:

$$\frac{dr}{dt} = V, \quad m\frac{dV}{dt} = F(t,\ r,\ V), \qquad (1')$$

donde $V$ es el vector con las proyecciones $u$, $v$, $w$.

Si se introduce para el examen el vector

$$R(t) = \{x(t),\ y(t),\ z(t),\ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)\},$$

entonces la ecuación (1) o el sistema (3) son equivalentes a una sola ecuación vectorial de primer orden

$$\frac{dR}{dt} = \Phi(t,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w) \qquad (4)$$

en el espacio sexadimensional, con la particularidad de que el vector

$$\Phi = \left\{u,\ v,\ w,\ \frac{1}{m}X,\ \frac{1}{m}Y,\ \frac{1}{m}Z\right\}.$$

El espacio sexadimensional de los puntos

$$(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) \equiv (r_x,\ r_y,\ r_z,\ V_x,\ V_y,\ V_z)$$

en la física se llama espacio *de fases* y la curva $\boldsymbol{R}\ (t)$ que es la solución de (4) en el espacio sexadimensional se denomina *trayectoria de fases.*

El espacio de fases es el espacio de los estados de movimiento de un punto por una curva.

Las primeras tres coordenadas $\boldsymbol{R}\ (t)$ caracterizan la posición del punto en el espacio tridimensional $(\boldsymbol{r}\ (t))$ y las otras tres coordenadas $\boldsymbol{R}\ (t)$, su velocidad $\dot{\boldsymbol{r}}\ (t)$.

La terminología citada ofrece la así llamada *interpretación cinemática del sistema de ecuaciones.*

El sistema (3) ó, lo que es lo mismo, el sistema (4) se denomina sistema *dinámico.*

Para separar una trayectoria es necesario asignar las condiciones iniciales: $\boldsymbol{R}\ (t_0) = \boldsymbol{R}_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0)$ o sea, la posición inicial del punto y su velocidad inicial. Con otras palabras, la curva integral $\boldsymbol{R}\ (t)$ debe pasar por el punto $\boldsymbol{R}_0$ del espacio sexadimensional.

Ahora bien, los problemas físicos nos conducen a la necesidad de examinar los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Examinemos un sistema arbitrario de ecuaciones diferenciales de primer orden que tienen la forma

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k\,(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \quad (k = 1,\ \ldots,\ n), \tag{5}$$

donde $y_k\ (t)$ son las funciones buscadas y $f_k\ (t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$ son las funciones conocidas dadas sobre cierto conjunto de puntos $(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$ del espacio de $(n + 1)$ dimensiones.

Nos interesarán las soluciones $y_1\ (t),\ \ldots,\ y_n\ (t)$ del sistema (5) que satisfacen las condiciones iniciales

$$y_1\ (t_0) = y_{10},\ \ldots,\ y_n\ (t_0) = y_{n0}, \tag{6}$$

donde $(y_{10},\ \ldots,\ y_{n0})$ es el punto dado del espacio de $n$ dimensiones.

El sistema (5) (¡resuelto respecto a las derivadas de las funciones buscadas!) se llama *normal* (véanse los §§ 1.12, 1.13).

Si las funciones $f_k$ no dependen explícitamente de la variable independiente $t$, el sistema (5) se denomina *sistema normal autónomo*

$$\dot{y}_k = f_k\ (y_1,\ \ldots,\ y_n) \quad (k = 1,\ \ldots,\ n). \tag{7}$$

Si se introducen los vectores en el espacio de $n$ dimensiones

$$\boldsymbol{y} = \{y_1\ (t),\ \ldots,\ y_n\ (t)\},\quad \boldsymbol{y}_0 = \{y_{10},\ \ldots,\ y_{n0}\},$$
$$\boldsymbol{F}\ (t,\ \boldsymbol{y}) = \{f_1\ (t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\ \ldots,\ f_n\ (t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)\},$$

el sistema (5) puede escribirse en la forma

$$\dot{y} = F(t, y) \tag{5'}$$

y las condiciones iniciales (6), en la forma

$$y(t_0) = y_0. \tag{6'}$$

El sistema autónomo se puede escribir así:

$$\dot{y} = F(y), \quad F = \{f_1(y), \ldots, f_n(y)\}. \tag{7'}$$

El sistema autónomo puede ser interpretado del modo siguiente. De cada punto $(y_1, \ldots, y_n)$ de cierto conjunto del espacio de $n$ dimensiones sale el vector

$$F(y) = \{f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_n)\},$$

lo que define sobre el conjunto indicado el *campo de vectores*.

La solución $y(t)$ describe una trayectoria determinada de movimiento del punto en el espacio de $n$ dimensiones, además, el vector de velocidad $\dot{y}(t)$, en el instante en que el punto pasa por $(y_1, \ldots, y_n)$, coincide con el vector $F(y)$.

El espacio de $n$ dimensiones de los puntos $(y_1, \ldots, y_n)$ en el cual se interpretan las soluciones del sistema autónomo (7') en forma de trayectorias se llama *espacio de fases del sistema.*

Las trayectorias $y(t)$ se denominan *trayectorias de fases* y los vectores $F(y)$, *velocidades de fases.*

La cuestión acerca de la existencia de la solución de un sistema normal ha sido examinada en el § 1.12.

## § 1.20. Sistema homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales

El sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}(t)\,y_1 + \ldots + a_{1n}(t)\,y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}(t)\,y_1 + \ldots + a_{nn}(t)\,y_n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donde los coeficientes $a_{kl}(t)$ son las funciones (o números constantes) dadas, continuas en un intervalo $(a, b)$, se llama *sistema homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden.*

Para abreviar la notación de los sistemas es cómodo usar designaciones vectoriales-matriciales. Introduzcamos la matriz de los coeficientes del sistema (1)

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(t) \ldots a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

y escribamos el sistema buscado de funciones en forma de la matriz columna

$$y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \cdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}=\text{colon}\,[y_1, \ldots, y_n].$$

Vamos a familiarizarnos con ciertos conceptos generales que se refieren a las matrices. Supongamos por ahora que $A(t)$ es una función arbitraria.

Si las funciones $a_{kl}(t)$ son continuamente derivables, se puede introducir el concepto de *derivada de una matriz*, a saber: es una matriz compuesta por los elementos derivados de la matriz inicial. Así, pues,

$$A'(t)=\frac{dA(t)}{dt}=\dot{A}(t)=\begin{pmatrix} \dot{a}_{11}(t) \ldots \dot{a}_{1n}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{a}_{n1}(t) \ldots \dot{a}_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar las propiedades siguientes:

1) Si $C$ es una matriz constante, entonces $\frac{dC}{dt}=O$, donde $O$ es una matriz nula, todos sus elementos son nulos.

2) Si las matrices $A(t)$ y $B(t)$ son de una misma dimensión, entonces

$$\frac{d}{dt}[A(t)+B(t)]=\dot{A}(t)+\dot{B}(t).$$

3) Si para las matrices $A(t)$ y $B(t)$ se puede cumplir la multiplicación, entonces

$$\frac{d}{dt}[A(t)B(t)]=\dot{A}(t)B(t)=A(t)\dot{B}(t).$$

4) Supongamos que $A^{-1}(t)$ es la matriz inversa de $A(t)$, es decir,

$$A^{-1}(t)A(t)=A(t)A^{-1}(t)=E,$$

donde $E$ es la matriz unidad. Derivando esta igualdad, obtenemos

$$\dot{A}(t)A^{-1}(t)+A(t)\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=O,$$

$$A(t)\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=-\dot{A}(t)A^{-1}(t),$$

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)\dot{A}(t)A^{-1}(t).$$

De un modo análogo se puede introducir el concepto de *integral de una matriz*, a saber: es una matriz cuyos elementos son las integrales de los elementos de la matriz inicial:

$$\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau=\left(\int_{t_0}^{t} a_{kl}(\tau)\,d\tau\right), \quad t_0,\ t\in[a,\ b].$$

El concepto dado posee unas propiedades semejantes a las habituales de las integrales de las funciones. Notemos solamente una propiedad, o sea, el análogo de la fórmula de Newton — Leibniz [1]).
Si $F(t)=\Phi'(t)$, entonces

$$\int_{t_0}^{t} F(\tau)\,d\tau=\Phi(t)-\Phi(t_0).$$

Conforme a la regla de multiplicación de las matrices el sistema (1) se puede escribir así:

$$\frac{dy}{dt}=A(t)\,y. \tag{1'}$$

Recordemos que por igualdad de matrices se entiende la igualdad de sus elementos correspondientes.

Señalemos sus propiedades evidentes.

Si las funciones vectoriales $y$ y $z$ satisfacen el sistema (1'), o sea,

$$\frac{dy}{dt}=A(t)\,y, \quad \frac{dz}{dt}=A(t)\,z,$$

su suma también satisface el sistema (1'):

$$\frac{d(y+z)}{dt}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=A(t)\,y+A(t)\,z=A(t)(y+z). \tag{2}$$

Además, si $c$ es un número, la función vectorial $cy$ satisface el sistema (1'):

$$\frac{d(cy)}{dt}=c\,\frac{dy}{dt}=cA(t)\,y=A(t)(cy). \tag{3}$$

[1]) I. Newton (1642—1727), gran físico, mecánico, astrónomo y matemático inglés. G. W. Leibniz (1646—1716), gran matemático y filósofo alemán.

Por inducción, de estas propiedades se deduce que si

$$y^1(t) = \text{colon}\,[y_{11}(t), \ldots, y_{n1}(t)], \ldots, y^n(t) = \\ = \text{colon}\,[y_{1n}(t), \ldots, y_{nn}(t)] \qquad (4)$$

son las soluciones del sistema (1′) y $C_1, \ldots, C_n$ son los números arbitrarios, entonces

$$y(t) = C_1 y^1(t) + \ldots + C_n y^n(t) \qquad (5)$$

es la solución de (1′).

Es importante notar que *si el sistema* (4) *de soluciones es linealmente independiente, la fórmula* (5) *expresa la solución general del sistema* (1′); *con otras palabras, la fórmula* (5) *para diferentes constantes* $C_1, \ldots, C_n$ *contiene todas las soluciones posibles del sistema* (1′).

Esta afirmación se puede demostrar al igual que en el caso de una ecuación lineal de $n$-ésimo orden.

El sistema (4) de funciones vectoriales se llama *linealmente independiente en un intervalo* $(a, b)$ *si de la igualdad*

$$C_1 y^1(t) + \ldots + C_n y^n(t) \equiv o \quad (a < t < b) \qquad (6)$$

se desprende que $C_1 = \ldots = C_n = 0$.

Puesto que la ecuación vectorial (6) es equivalente a $n$ igualdades escalares

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_{11}(t) + \ldots + C_n y_{1n}(t) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 y_{n1}(t) + \ldots + C_n y_{nn}(t) = 0, \end{array}\right\} \qquad (6')$$

del hecho de que el determinante

$$W(t) = |\, y_{hi}(t)\, | \qquad (7)$$

no es igual a cero al menos para un solo valor de $t$, ya viene, evidentemente, la independencia lineal del sistema (4) de las funciones vectoriales.

El determinante $W(t)$ se llama *determinante de Wronski del sistema* (4) *de funciones vectoriales.*

Si el sistema de vectores (4) es linealmente independiente en un intervalo $(a, b)$ y estos vectores son las soluciones del sistema (1′) con coeficientes continuos, se puede demostrar que $W(t) \neq 0$ para todos los valores de $t \in (a, b)$.

Ahora bien, la *condición* $W(t) \neq 0$ *para todos los valores de* $t \in \in (a, b)$ *es la condición necesaria y suficiente de la independencia lineal, en* $(a, b)$, *de las soluciones* (4) *del sistema* (1) *con coeficientes continuos.*

Por lo tanto, para obtener la *solución general del sistema homogéneo* (1) *es necesario hallar* $n$ *soluciones linealmente independientes* (4) *del sistema* (1). *La suma* (5), *donde* $C_1, \ldots, C_n$ *son las constantes arbitrarias, es la solución general del sistema* (1).

Notemos que las soluciones $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ del sistema (1) existen en el mismo intervalo $(a, b)$, donde están definidos y son continuos los coeficientes $a_{kl}(t)$ del sistema (1).

El sistema de $n$ soluciones del sistema (1) linealmente independientes en $(a, b)$ suele llamarse *sistema fundamental de soluciones* del sistema (1).

Este sistema puede caracterizarse por la matriz cuadrada

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \ldots & y_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

que se denomina *matriz fundamental del sistema* (1).

Ahora bien, en una matriz fundamental las soluciones (4) se sitúan por las columnas. Tengamos presente que en la notación $y_{jk}(t)$ el primer índice $j$ designa el número de orden de la coordenada y el segundo índice $k$, el número de orden de la solución.

Mostremos que la matriz fundamental $Y(t)$ satisface la ecuación matricial

$$\dot{Y}(t) = A(t)\, Y(t). \tag{8}$$

Como las funciones $y_{sk}(t)$ satisfacen la $j$-ésima ecuación del sistema (1), entonces

$$\frac{dy_{jk}(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)\, y_{sk}(t).$$

Por consiguiente, según la regla de multiplicación de las matrices (en el caso dado de matrices cuadradas), tenemos

$$\dot{Y}(t) = \left(\frac{dy_{jk}(t)}{dt}\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)\, y_{sk}(t)\right) = A(t)\, Y(t)$$

que es lo que era necesario demostrar.

Inversamente, si la matriz $Y(t) = (y_{jk}(t))$ satisface la ecuación matricial (8), sus columnas

$$y^k(t) = \text{colon}\,[y_{1k}(t), \ldots, y_{nk}(t)] \quad (k = 1, \ldots, n)$$

son las soluciones del sistema homogéneo lineal (1).

Si en este caso

$$|Y(t)| = W(t) \neq 0,$$

la matriz $Y(t)$ es fundamental.

En efecto,

$$y^k(t) = Y(t)\, e_k,$$

donde $e_k =$ colon $[0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$. Multiplicando el segundo miembro de la ecuación (8) por $e_k$, obtenemos

$$\frac{dY(t)}{dt} e_k = \frac{d}{dt}[Y(t) e_k] = A(t)[Y(t) e_k],$$

o sea,

$$\frac{d}{dt} y^k(t) = A(t) y^k(t) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Si $Y(t)$ es la matriz fundamental del sistema (1), entonces la solución general (5) del sistema (1) puede escribirse abreviadamente en la forma

$$y(t) = Y(t) C, \tag{9}$$

donde $C =$ colon $[C_1, \ldots, C_n]$ es la matriz columna constante con elementos arbitrarios.

Poniendo en la identidad (9) $t = t_0$, tendremos

$$y(t_0) = Y(t_0) C.$$

De aquí

$$C = Y^{-1}(t_0) y(t_0).$$

Por lo tanto,

$$y(t) = Y(t) Y^{-1}(t_0) y(t_0).$$

La matriz

$$Y(t) Y^{-1}(t_0) = K(t, t_0)$$

lleva el nombre de *matriz de Cauchy*.

Con ayuda de esta matriz la solución del sistema (1) se puede escribir así:

$$y(t) = K(t, t_0) y(t_0). \tag{10}$$

En particular, si la matriz fundamental $Y(t)$ está normalizada para $t = t_0$, o sea, $Y(t_0) = Y^{-1}(t_0) = E$, donde $E$ es la matriz unidad, la fórmula (10) toma el aspecto

$$y(t) = Y(t) y(t_0). \tag{11}$$

## § 1.21. Solución general de un sistema homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

Busquemos la solución de un sistema homogéneo lineal con coeficientes constantes $a_{kl}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\} -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

o bien

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{1'}$$

donde $A = \| a_{kl} \|$ es la matriz numérica dada, en la forma siguiente:

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \ \ldots, \ y_n = \alpha_n e^{\lambda t} \tag{2}$$

o bien

$$y = \{\alpha_1 e^{\lambda t}, \ \ldots, \ \alpha_n e^{\lambda t}\}. \tag{2'}$$

Los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda$ se someten a la definición.
Desde luego, los números

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \ \ldots, \ \alpha_n = 0$$

ofrecen la solución trivial del sistema (1):

$$y_1(t) \equiv 0, \ \ldots, \ y_n(t) \equiv 0.$$

Sin embargo, nos interesan *soluciones no triviales* que correspondan a los vectores no iguales a cero.

$$\alpha = (\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n).$$

Tenemos

$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i \lambda e^{\lambda t} \quad (i = 1, \ \ldots, n).$$

Al sustituir las funciones $y_i(t)$ y sus derivadas en (1), simplificando en $e^{\lambda t}$ ($e^{\lambda t} \neq 0$) y trasladando los términos en un miembro obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_2 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

o bien en la forma matricial

$$(A - \lambda E)\,\boldsymbol{\alpha} = O, \tag{3'}$$

o bien

$$A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n)$ y

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz unidad.

Para que el sistema (3) tenga una solución no trivial es necesario y suficiente que su determinante sea igual a cero:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

La ecuación (5) se llama *ecuación característica* del sistema (1). Es de la ecuación (5) de donde encontramos aquellos valores $\lambda$ para los cuales el sistema (4) tiene soluciones no triviales $\alpha$.

El primer miembro de (5) es un polinomio de grado $n$ respecto a la variable $\lambda$. Si se toma en consideración la multiplicidad, este polinomio tiene $n$ raíces:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n. \tag{6}$$

Si todas las $n$ raíces son distintas, entonces, sustituyendo cada una de ellas $\lambda_j$ en el sistema (4) y resolviendo éste, obtenemos cierto vector no trivial que satisface el sistema dado

$$\alpha^{(j)} = (\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)}). \tag{7}$$

Este vector se determina de una manera multiforme, con una exactitud hasta el factor escalar.

De (4) se ve que $\lambda_j$ son los valores propios de la matriz (transformación lineal) $A$ y los vectores $\alpha^{(j)}$, los vectores propios de $A$.

Los vectores $\alpha^{(j)}$ $(j = 1, \dots, n)$ son linealmente independientes, si todos sus valores propios son diferentes. Esto se puede demostrar por inducción.

Demostremos que cualesquiera $k$ vectores de este sistema son linealmente independientes entre sí.

Para $k = 1$ esto es evidente, porque cada uno de los vectores $\alpha^{(j)}$ no es trivial. Supongamos que nuestra afirmación es justa para $k - 1$ vectores. Vamos a demostrarla para $k$ vectores.

Admitamos lo contrario. Por ejemplo, sean los primeros $k$ vectores de nuestro sistema linealmente dependientes. Entonces

$$\sum_{j=1}^{k} C_j\alpha^{(j)} = o, \tag{8}$$

donde al menos uno de los coeficientes $C_j$ es distinto de cero. Para precisar consideremos $C_1 \neq 0$. Apliquemos la transformación lineal, engendrada por la matriz $A$, a ambos miembros de (8):

$$A\left(\sum_{j=1}^{k} C_j\alpha^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{k} C_j\lambda_j\alpha^{(j)} = o. \tag{9}$$

Multiplicando (8) por $\lambda_k$ y restándolo de (9), obtenemos

$$C_1(\lambda_1-\lambda_k)\alpha^{(1)}+C_2(\lambda_2-\lambda_k)\alpha^{(2)}+\dots$$
$$\dots+C_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\alpha^{(k-1)}=o,$$

donde $\lambda_i-\lambda_k\neq 0$ para todos los $i\neq k$.

Así, pues, $C_1(\lambda_1-\lambda_k)\neq 0$ y hemos obtenido que los vectores $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k-1)}$ son linealmente dependientes lo que contradice la suposición.

Así, pues, los vectores propios $\alpha^{(j)}$ $(j=1, \dots, n)$ que responden a diferentes números propios $\lambda_j$ son linealmente independientes y el determinante compuesto por las coordenadas de estos vectores no es igual a cero:

$$|\alpha_k^{(j)}|\neq 0\ ^{1)}.$$

*Observación* 1. Puesto que en el espacio de $n$ dimensiones no pueden haber más de $n$ vectores linealmente independientes, entonces a cada valor propio de $\lambda_j$ (¡si todos ellos son diferentes!) le corresponde un solo vector propio con una exactitud hasta el factor constante.

Como resultado obtenemos $n$ funciones vectoriales, o sea, soluciones del sistema (1)

$$\left.\begin{array}{l} y^1(t)=\{\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \dots, \alpha_n^{(1)}e^{\lambda_1 t}\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^n(t)=\{\alpha_1^{(n)}e^{\lambda_n t}, \alpha_2^{(n)}e^{\lambda_n t}, \dots, \alpha_n^{(n)}e^{\lambda_n t}\}. \end{array}\right\} \qquad (10)$$
$$(-\infty<t<\infty)$$

La función vectorial (10) forma un sistema linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$, ya que su determinante de Wronski

$$W(t)=\exp(\lambda_1 t+\dots+\lambda_n t)\cdot|\alpha_k^{(j)}|\neq 0.$$

Por eso la solución general del sistema (1) tiene la forma

$$y=\sum_{j=1}^{n} C_j y^j(t), \qquad (11)$$

donde $C_j$ son constantes arbitrarias. En la forma desarrollada la solución general puede escribirse así:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t)=\sum_{j=1}^{n} C_j\alpha_1^{(j)}\exp(\lambda_j t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(t)=\sum_{j=1}^{n} C_j\alpha_n^{(j)}\exp(\lambda_j t). \end{array}\right\} \qquad (11')$$

---

1) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 14, teorema 1.

*Observación* 2. En la práctica, en vez de encontrar los vectores $\alpha^{(j)} = (\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)})$ de los sistemas lineales (4), buscan la solución general del sistema (1) en la forma

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_1^{(j)} \exp(\lambda_j t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_n^{(j)} \exp(\lambda_j t), \end{array}\right\}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son las raíces de la ecuación característica (¡diferentes!) y $a_k^{(j)}$, los números que es necesario encontrar. De la teoría expuesta resulta que tales números existen.

Para hallar los números $a_k^{(j)}$ sustituimos las funciones $y_j(t)$ en el sistema (1) y comparamos los coeficientes de iguales $\exp(\lambda_j t)$. En este caso los números $a_k^{(j)}$ se obtienen no de un modo unívoco, ellos dependen de $n$ constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1. Resolver el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y,$$

$$\frac{dy}{dt} = y + 2x.$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda - 1)^2 - 4 = 0,$$

tiene las raíces $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Partiendo de la estructura de la solución general, buscaremos la solución en la forma

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y(t) = a_1 e^{3t} + a_2 e^{-t}$$

(o sea, omitiremos el proceso de obtención de los números $\alpha_k^{(j)}$).

Expresemos los coeficientes $a_1$, $a_2$ por $C_1$, $C_2$. Sustituyendo las funciones $x(t)$ e $y(t)$ en una de las ecuaciones del sistema, obtenemos

$$3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + 2a_1 e^{3t} + 2a_2 e^{-t},$$

de donde $2C_1 - 2a_1 = 0$, $-2C_2 - 2a_2 = 0$, o sea,

$$a_1 = C_1, \quad a_2 = -C_2.$$

Ahora bien, la solución general tiene la forma

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t},$$

$$y(t) = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}.$$

Supongamos ahora que la ecuación característica (5) del sistema (1) tiene la raíz $\lambda_1$ de orden de multiplicidad $r$. Reduzcamos el sistema (1) a una sola ecuación de $n$-ésimo orden respecto a la función $y_1(t)$. Esta ecuación y el sistema (1) tienen una misma ecuación característica (la demostración se da a continuación). Pero entonces, como sabemos, a la raíz $\lambda_1$ de orden de multiplicidad $r$ le corresponde la solución de la ecuación de $n$-ésimo orden que tiene la forma

$$y_1(t) = (b_0 + b_1 t + \ldots + b_{r-1} t^{r-1}) e^{\lambda_1 t},$$

donde $b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}$ son las constantes arbitrarias. Ahora bien,

$$y_1(t) = P_{r-1,1}(t) e^{\lambda_1 t},$$

donde $P_{r-1,1}(t)$ es el polinomio de grado $r - 1$.

Razonando de un modo análogo, podemos expresar también otras funciones $y_j(t)$ en la forma

$$y_j(t) = P_{r-1,j}(t) e^{\lambda_1 t} \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

donde $P_{r-1,j}(t)$ son los polinomios de grado $r - 1$.

Cada una de las funciones $y_j(t)$ satisface su propia ecuación diferencial de $n$-ésimo orden, cualesquiera que sean los coeficientes del polinomio $P_{r-1,j}(t)$.

No nos queda más que escoger entre los polinomios $P_{r-1,1}, \ldots, P_{r-1,n}$ tales cuyas funciones correspondientes $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ satisfagan conjuntamente el sistema (1). Para esto es necesario sustituir $y_j$ en el sistema (1), simplificarlo en $e^{\lambda_1 t}$ y comparar los coeficientes de iguales potencias de $t$. Los coeficientes buscados dependerán de $r$ constantes arbitrarias. A veces se puede recomendar que el polinomio $P_{r-1,1}(t)$ se tome arbitrario y entonces los coeficientes de los demás polinomios $P_{r-1,j}(t)$ $(j = 2, \ldots, n)$ quedarán determinados unívocamente por los coeficientes $P_{r-1,1}$.

Sin embargo, es posible que por este camino lleguemos a una contradicción que nos muestre que de hecho en el caso dado ciertos coeficientes del polinomio $P_{r-1,1}$ son iguales a cero y no se puede considerarlos como arbitrarios.

Razonamos de un modo análogo también respecto a otras raíces múltiples de la ecuación característica si ésta tiene tales. Las soluciones correspondientes a las raíces simples se buscan en la forma (8), como hemos explicado anteriormente.

Para obtener la resolución general del sistema (1) es necesario tomar la suma de las soluciones (funciones vectoriales) indicadas.

En casos elementales se puede buscar la solución directamente en forma de la suma de soluciones semejantes. Será mejor aclarar esto citando ejemplos.

EJEMPLO 2. Resolver el sistema

$$\frac{dy_1}{dt}=y_1-y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt}=y_1+3y_2.$$

La ecuación característica $\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$ o bien $\lambda^2-4\lambda+$ $+4=0$ tiene una raíz múltiple $\lambda_1=2$.

La ecuación diferencial que corresponde a nuestro sistema para la función $y_1$ tiene la forma $\ddot{y}_1-4\dot{y}_1+4y_1=0$. Ella tiene la misma ecuación característica.

La solución del sistema se debe buscar en la forma

$$y_1(t)=(C_1+C_2t)\,e^{2t},\quad y_2(t)=(a_1+a_2t)\,e^{2t}.$$

Sustituyendo estas funciones en el sistema, obtenemos

$$C_2+2C_1+2C_2t=C_1+C_2t-a_1-a_2t$$
$$a_2+2a_1+2a_2t=C_1+C_2t+3\,(a_1+a_2t).$$

Igualando los coeficientes de iguales potencias de $t$ (en la primera igualdad), obtenemos $a_1=-C_1-C_2$, $a_2=-C_2$. La segunda igualdad ofrece las mismas soluciones. De suerte, la solución general del sistema tiene la forma

$$y_1(t)=(C_1+C_2t)\,e^{2t},\quad y_2(t)=-(C_1+C_2+C_2t)\,e^{2t}.$$

EJEMPLO 3. Resolver el sistema

$$\dot{y}_1=2y_1+y_2+y_3,$$
$$\dot{y}_2=y_1+2y_2+y_3,$$
$$\dot{y}_3=y_1+y_2+2y_3.$$

La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

o bien

$$(1-\lambda)^2(\lambda-4)=0.$$

Ahora bien, $\lambda_1=1$ es la raíz de segundo orden de multiplicidad y $\lambda_3=4$ es la raíz simple de la ecuación característica. El sistema (3) para $\lambda_1=1$ tiene la forma

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0,$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0.$$

Por eso $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ deben ser tales que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, o sea, tenemos dos variables libres, digamos $\alpha_2$ y $\alpha_3$.

Por eso, por ejemplo, $\alpha^{(1)} = (-1, 1, 0)$, $\alpha^{(2)} = (-1, 0, 1)$ son los vectores propios linealmente independientes de la matriz $A$ de nuestro sistema (la matriz $A$ es simétrica). Para $\lambda_3 = 4$ encontramos $\alpha^{(3)} = (1, 1, 1)$. Por eso

$$y^1 = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^2 = \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad y^3 = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

son las soluciones linealmente independientes e

$$y = C_1 y^1 + C_2 y^2 + C_3 y^3$$

es la solución general de nuestro sistema.

En la forma desarrollada la solución general puede escribirse así:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -(C_1 + C_2)\, e^t + C_3 e^{4t}, \\ y_2(t) &= C_1 e^t + C_3 e^{4t}, \\ y_3(t) &= C_2 e^t + C_3 e^{4t}. \end{aligned}$$

*Observación 3*. Si la matriz $A$ es *simétrica* ($a_{kl} = a_{lk}$), entonces el operador lineal correspondiente de $A$ será *autoconjugado* y, como sabemos, en este caso, cualesquiera que sean las raíces que la ecuación (5) tuviera (incluyendo también las múltiples), existe un sistema de $n$ vectores propios $\alpha$ linealmente independientes y, por consiguiente, para el sistema (1) con la matriz simétrica $A$ se puede escribir la solución general, conociendo los vectores $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ [1]).

## § 1.22. Reducción de un sistema de ecuaciones a una sola ecuación

LEMA 1. *Sea dado un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes* $a_{kl}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n - f_1(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n - f_n(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

*donde* $f_j(t)$ *son las funciones dadas en* $(a, b)$ *que tienen un número necesario de derivadas.*

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», §§ 15, 22, 25.

*Si las funciones $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ satisfacen este sistema, entonces la función $y_j(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial de n-ésimo orden*

$$D\left(\frac{d}{dt}\right) y_j(t) = \Phi_j(t), \quad (j = 1, \ldots, n),$$

*donde*

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{2}$$

*es el polinomio característico del sistema* (1) *y las funciones $\Phi_j(t)$ se definen por $a_{kl}$ y $f_s$ $(s = 1, \ldots, n)$* (véase a continuación (4)).

DEMOSTRACIÓN. Escribamos el sistema (1) en la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \left(a_{11}-\frac{d}{dt}\right) y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = f_1(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + \left(a_{nn}-\frac{d}{dt}\right) y_n = f_n(t). \end{array}\right\} \tag{1'}$$

Designemos el elemento del determinante (2) situado en la $k$-ésima fila y la $l$-ésima columna por $b_{kl}(\lambda)$ y el complemento algebraico correspondiente, por $M_{kl}(\lambda)$ (por ejemplo, $b_{11}(\lambda) = a_{11} - \lambda$, $b_{12}(\lambda) = a_{12}$). Si en estas expresiones sustituimos $\lambda$ por $\frac{d}{dt}$, obtenemos los operadores diferenciales $b_{kl}\left(\frac{d}{dt}\right)$, $M_{kl}\left(\frac{d}{dt}\right)$. Se les puede aplicar los razonamientos semejantes a los aplicados para deducir el teorema de Kronecker [1]).

Tenemos

$$\sum_{s=1}^{n} b_{si}(\lambda) M_{sj}(\lambda) = \delta_{ij} \cdot D(\lambda) \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

(o sea, la suma de los productos de los elementos de cualquier columna del determinante $D(\lambda)$ por los adjuntos de esta misma columna (de otra columna) es igual al determinante $D(\lambda)$ (es igual a cero)). Por eso

$$\sum_{s=1}^{n} b_{si}\left(\frac{d}{dt}\right) M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) = \delta_{ij} \cdot D\left(\frac{d}{dt}\right). \tag{3}$$

Apliquemos ahora a la primera ecuación (1') (más exactamente a sus miembros primero y segundo) el operador $M_{1j}\left(\frac{d}{dt}\right)$, (o sea,

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 4.

realicemos una serie de derivaciones, multiplicaciones por un número y adiciones); apliquemos a la segunda ecuación el operador $M_{2j}\left(\frac{d}{dt}\right)$, etc. y sumémoslas. Entonces, sobre la base de (3), obtenemos

$$\sum_{s=1}^{n} M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) b_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) y_j = D\left(\frac{d}{dt}\right) y_j = \sum_{s=1}^{n} M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) f_s(t),$$

o sea,

$$D\left(\frac{d}{dt}\right) y_j = \Phi_j(t) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

donde

$$\Phi_j(t) = \sum_{s=1}^{n} M_{sj}\left(\frac{d}{dt}\right) f_s(t). \tag{4}$$

*Observación 1.* Si todas las $f_s(t) \equiv 0$ $(s = 1, \ldots, n)$, entonces $\Phi_j(t) \equiv 0$ y la ecuación diferencial será la misma para todas las funciones $y_j(t)$:

$$D\left(\frac{d}{dt}\right) y_j = 0.$$

EJEMPLO 1. Reducir a una sola ecuación el sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 &= \quad\;\; y_2. \end{aligned}$$

Escribamos este sistema en la forma

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{d}{dt}\right) y_1 + y_2 &= 0, \\ 0 + \left(1 - \frac{d}{dt}\right) y_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aquí $b_{11} = 1 - \frac{d}{dt}$, $b_{12} = 1$, $b_{21} = 0$, $b_{22} = 1 - \frac{d}{dt}$; $M_{11} = 1 - \frac{d}{dt}$, $M_{12} = 0$, $M_{21} = -1$, $M_{22} = 1 - \frac{d}{dt}$. Aplicando a la primera ecuación (5) el operador $M_{11}$ y a la segunda, el operador $M_{21}$ y sumándolos, obtenemos

$$\left(1 - \frac{d}{dt}\right)^2 y_1 + \left(1 - \frac{d}{dt}\right) y_2 - \left(1 - \frac{d}{dt}\right) y_2 = 0,$$

o sea,

$$\left(1 - \frac{d}{dt}\right)^2 y_1 = 0, \quad \ddot{y}_1 - 2\dot{y}_1 + y_1 = 0.$$

De un modo completamente análogo, aplicando a la primera ecuación (5) el operador $M_{12} = 0$ y a la segunda, el operador $M_{22} = 1 - \frac{d}{dt}$ y sumándolos, obtenemos

$$\left(1 - \frac{d}{dt}\right)^2 y_2 = 0.$$

Podemos obtener también esta ecuación diferencial con ayuda del otro método. Por ejemplo, derivando la segunda ecuación, tenemos

$$\ddot{y}_2 = \dot{y}_2.$$

Sustrayendo de esta ecuación la segunda ecuación del sistema, obtenemos

$$\ddot{y}_2 - 2\dot{y}_2 + y_2 = 0.$$

## § 1.23. Sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

El sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

o bien

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \tag{1'}$$

donde $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ es la función vectorial dada, continua en $(a, b)$, $a_{kl}$ son los números constantes dados y $A = \| a_{kl} \|$, se llama *sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes.*

*La solución general del sistema* (1) *es igual a la suma*

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k y^k(t) + y^0(t) \tag{2}$$

*de una solución particular cualquiera de este $y^0(t)$ y de la solución general $\sum_{k=1}^{n} C_k y^k(t)$ del sistema homogéneo correspondiente*

$$L[y] \equiv \frac{dy}{dt} - Ay = o. \tag{3}$$

En efecto, la suma (2) para cualesquiera constantes $C_k$ es, evidentemente, la solución del sistema (1):

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} C_k y^k + y^0\right] = L[y^0] = f.$$

Por otro lado, si $y$ es la solución del sistema (1), entonces

$$L[y - y^0] = L[y] - L[y^0] = f - f = o,$$

pero en este caso para ciertas constantes $C_k$

$$y - y^0 = \sum_{k=1}^{n} C_k y^k.$$

Si se conoce la solución general del sistema homogéneo (3), la solución particular del sistema no homogéneo (1) se puede encontrar por el método de *variación de las constantes arbitrarias* (*método de Lagrange* [1])).

Supongamos que

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k y^k(t)$$

es la solución general del sistema (3), o sea, $y^k(t)$ son las soluciones particulares linealmente independientes (3):

$$L[y^k] = o \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Consideremos $C_k = C_k(t)$ como funciones de $t$ y escojámoslas de modo que la función

$$U(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, y^k(t) \tag{4}$$

sea la solución particular del sistema homogéneo (1). Derivando tenemos

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left[C_k(t)\frac{dy^k}{dt} + C_k'(t)\, y^k(t)\right].$$

Sustituyendo los valores de $U$ y de $\frac{dU}{dt}$ en (1'), obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \left[C_k(t)\frac{dy^k}{dt} + C_k'(t)\, y^k(t)\right] - \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, Ay^k = f(t),$$

[1]) L. Lagrange (1736—1813), ilustre físico y matemático francés.

o bien

$$\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, L[y^k] + \sum_{k=1}^{n} C'_k(t)\, y^k(t) = f(t).$$

Como $L[y^k] = o$, para definir $C'_k(t)$ obtenemos el sistema

$$\sum_{k=1}^{n} C'_k(t)\, y^k(t) = f(t) \tag{5}$$

con las funciones vectoriales $f(t)$ y $y^k(t)$ continuas en $(a, b)$.

El sistema (5) es lineal respecto a $C'_k(t)$ con el determinante igual al de Wronski del sistema de los vectores $y^1, \ldots, y^n$. Puesto que este determinante no es igual a cero, el sistema (5) tiene una sola solución: $C'_k(t) = \varphi_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Las funciones $\varphi_k(t)$ son continuas, porque son continuas las funciones vectoriales $f(t)$ e $y^k(t)$.

Integrando, encontramos

$$C_k(t) = \int \varphi_k(t)\, dt \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Sustituyendo estos valores en (4), obtenemos la solución particular del sistema (1).

EJEMPLO 1. Resolver el sistema

$$\dot{y}_1 = y_1 + 2y_2 + e^t,$$
$$\dot{y}_2 = 2y_1 + y_2.$$

Es fácil comprobar que

$$y_1 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \quad y_2 = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t}$$

es la solución general del sistema homogéneo. Hallemos la solución particular del sistema no homogéneo con ayuda del método de Lagrange. Supongamos que $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$ son las funciones de $t$. Entonces

$$\dot{y}_1 = 3C_1(t)\, e^{3t} - C_2(t)\, e^{-t} + C'_1(t)\, e^{3t} + C'_2(t)\, e^{-t},$$
$$\dot{y}_2 = 3C_1(t)\, e^{3t} + C_2(t)\, e^{-t} + C'_1(t)\, e^{3t} - C'_2(t)\, e^{-t}.$$

Sustituyendo estos valores de las derivadas y las propias funciones en nuestro sistema, obtenemos

$$C'_1(t)\, e^{3t} + C'_2(t)\, e^{-t} = e^t,$$
$$C'_1(t)\, e^{3t} - C'_2(t)\, e^{-t} = 0.$$

El determinante del sistema dado es el de Wronski

$$W=\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2e^{2t} \neq 0.$$

Por eso el sistema es soluble:

$$C_1'(t)=\frac{1}{2}e^{-2t},\quad C_2'(t)=\frac{1}{2}e^{2t}.$$

Integrando, obtenemos

$$C_1(t)=-\frac{1}{4}e^{-2t},\quad C_2(t)=\frac{1}{4}e^{2t}.$$

Ahora bien, la solución particular tiene la forma

$$y_1(t)=0,\quad y_2(t)=-\frac{1}{2}e^{t}.$$

La solución general se puede escribir en la forma

$$y_1(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-t},\quad y_2(t)=C_1e^{3t}-C_2e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}.$$

En la forma vectorial (matricial) esto se escribe así:

$$y=C_1\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix}.$$

A continuación, en ejemplos, mostraremos como se puede hallar la solución particular del sistema (1) cuando $f_i(t) = b_i \exp(\lambda_i t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, donde $b_i$, $\lambda_i$ son los números constantes dados.

La solución particular de un sistema no homogéneo lineal de ecuaciones con coeficientes constantes en el caso en que los segundos miembros $f_i(t)$ tienen la forma especial ($\exp(kt)$ o $t^m \exp(kt)$) puede encontrarse por analogía con la solución de una ecuación diferencial no homogénea.

EJEMPLO 2. Resolver el sistema

$$\frac{dx}{dt}=x+2y+e^{t},$$

$$\frac{dy}{dt}=2x+y+e^{3t}.$$

Resolvemos primeramente el sistema homogéneo. La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

tiene las raíces $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo se escribirá en la forma

$$x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}, \quad y = C_1e^{3t} - C_2e^{-t}.$$

A los términos independientes del sistema $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{3t}$ les corresponden los números 1 y 3. El número 1 no es la raíz de la ecuación característica, mientras que 3 es su raíz de segundo orden de multiplicidad. Por analogía, al igual que para una sola ecuación, ponemos

$$\bar{x} = b_1e^t + (b_2 + b_3t)\, e^{3t},$$
$$\bar{y} = a_1e^t + (a_2 + a_3t)\, e^{3t}.$$

Sustituyendo estas funciones en nuestro sistema, encontramos

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = 0, \quad b_3 = 1/2;$$
$$a_1 = -1/2, \quad a_2 = 1/4, \quad a_3 = 1/2.$$

La solución general del sistema no homogéneo se escribirá así:

$$x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} + \frac{t}{2}\, e^{3t},$$
$$y = C_1e^{3t} - C_2e^{-t} - \frac{1}{2}\, e^t + \left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right) e^{3t}.$$

## § 1.24. Integración de ecuaciones diferenciales mediante series de potencias

En este párrafo se examinan dos ejemplos de resolución de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden mediante series de potencias. Ciertos polinomios son sus coeficientes.

El segundo ejemplo está dedicado a la ecuación de Bessel que es importante en las matemáticas y sus aplicaciones. Las soluciones de la ecuación de Bessel que forman su sistema fundamental de funciones no son funciones elementales. Sin embargo, como veremos, ellas se desarrollan en series de potencias cuyos coeficientes se calculan con bastante sencillez.

EJEMPLO 1. $y'' - xy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

En el caso dado $p_0(x) = -x$, o sea, es el polinomio de primer grado respecto a $x$. Busquemos la solución en la forma de la serie

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k. \tag{1}$$

En virtud de la condición inicial $y(0) = 0$, obtenemos $a_0 = 0$. De la condición $y'(0) = 1$, tenemos $a_1 = 1$. Derivando formalmente la serie dada dos veces término a término y sustituyéndola en la ecuación, obtenemos

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, a_k x^{k-2} = x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{2}$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales de $x$ en los miembros primero y segundo de (2), obtenemos:

$$a_2 = 0,\ 3\cdot 2a_3 = a_0,\ \text{de donde } a_3 = \frac{a_0}{2\cdot 3} = 0;$$

$$4\cdot 3a_4 = a_1,\ \text{de donde } a_4 = \frac{a_1}{3\cdot 4};$$

$$5\cdot 4a_5 = a_2,\ \text{de donde } a_5 = 0;$$

$$6\cdot 5a_6 = a_3,\ \text{de donde } a_6 = \frac{a_3}{5\cdot 6} = 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$n(n-1)\, a_n = a_{n-3},\ \text{de donde } a_n = \frac{a_{n-3}}{n(n-1)};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Puesto que tenemos $a_0 = a_2 = 0$, todos los coeficientes

$$a_{3k} = 0,\quad a_{3k+2} = 0.$$

Luego

$$a_{3k+1} = \frac{a_{3(k-1)+1}}{(3k+1)\,3k} = \dots = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7 \dots 3k\,(3k+1)}$$
$$(k = 1,\ 2,\ \dots).$$

Así, pues,

$$y(x) = x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots + \frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7 \dots 3k\,(3k+1)} + \dots. \tag{3}$$

Según el principio de D'Alembert el radio de convergencia de esta serie es igual a la infinidad. Por consiguiente, todas nuestras operaciones han sido válidas y la suma de la serie para todos los valores de $x$ es la solución de la ecuación.

EJEMPLO 2. *Ecuación de Bessel*[1]):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0. \tag{4}$$

Se reducen a esta ecuación muchos problemas de la física matemática.

[1]) F. W. Bessel (1784—1846), astrónomo alemán.

Busquemos la solución particular de (4) en la forma de una serie de potencias generalizada

$$y = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{5}$$

Derivando (5) dos veces término a término y sustituyendo en (4), obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\rho)^2 x^{k+\rho} + (x^2 - \nu^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho} [(k+\rho)^2 + x^2 - \nu^2] = 0.$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales de $x$, obtenemos

$$\left.\begin{array}{l|ll} x^{\rho} & a_0 (\rho^2 - \nu^2) & = 0, \\ x^{\rho+1} & a_1 [(\rho+1)^2 - \nu^2] & = 0, \\ x^{\rho+2} & a_2 [(\rho+2)^2 - \nu^2] + a_0 & = 0, \\ x^{\rho+3} & a_3 [(\rho+3)^2 - \nu^2] + a_1 & = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x^{\rho+p} & a_p [(\rho+p)^2 - \nu^2] + a_{p-2} & = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right\} \tag{6}$$

Supongamos que el coeficiente $a_0$ de potencia inferior de $x$ es distinto de cero, entonces la primera ecuación en (6) ofrece el aspecto

$$\rho = \pm\nu.$$

Sea por ahora $\rho = \nu \geqslant 0$. Entonces de la segunda ecuación de (6) obtenemos $a_1 [(\nu+1)^2 - \nu^2] = 0$, o sea, $a_1 = 0$ y, por consiguiente todos los coeficientes provistos de números de orden impares asimismo son iguales a cero ($a_{2p+1} = 0$). Luego

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = -\dfrac{a_0}{(\nu+2)^2 - \nu^2} = -\dfrac{a_0}{2^2 (\nu+1)}, \\ a_4 = -\dfrac{2_2}{(\nu+4)^2 - \nu^2} = \dfrac{a_0}{2^4 (\nu+1)(\nu+2)\, 1\cdot 2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2p} = \dfrac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p! \, (\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+p)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{7}$$

Cuando $\rho = -\nu$ ($\nu$ es un número no entero) del mismo modo obtenemos

$$a_{2p+1} = 0, \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p! \, (-\nu+1)(-\nu+2)\ldots(-\nu+p)}.$$

Ahora bien, para $\rho = \nu$ la solución de la ecuación (4) se escribirá así:

$$y = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+\nu}}{2^{2p} p! (\nu+1) \ldots (\nu+p)}. \tag{8}$$

Introduzcamos para el examen la función

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx, \quad (p > 0),$$

que se llama *función gamma de Euler.* Es fácil comprobar que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ y que para los números enteros $p > 0$, $\Gamma(p+1) = p!$

Para los números negativos $p$, $\Gamma(p)$ se determina de otro modo; no obstante, la propiedad $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ se conserva.

Si se escoge un número constante arbitrario $a_0 = 1/(2^\nu \Gamma(\nu + 1))$, la (8) se escribe

$$J_\nu(x) = y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (x/2)^{2p+\nu}}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+\nu+1)} \tag{9}$$

Cuando $\rho = -\nu$, escogiendo $a_0 = 1/(2^{-\nu}\Gamma(-\nu + 1))$, de un modo análogo obtenemos

$$J_{-\nu}(x) = y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (x/2)^{2p-\nu}}{\Gamma(p+1)\Gamma(p-\nu+1)}. \tag{10}$$

Las funciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ se llaman *funciones de Bessel de primer género de orden* $\nu$ *y* $-\nu$, respectivamente.

La serie (9) converge para todos los valores de $x$, mientras que la serie (10) $\forall\, x \neq 0$ y ambas permiten la derivación doble término a término. Por consiguiente, $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son las soluciones de la ecuación de Bessel (4).

Si $\nu$ no es un número entero, entonces las funciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes, ya que sus series comienzan con diferentes potencias de $x$ y la combinación lineal

$$\alpha_1 J_\nu(x) + \alpha_2 J_{-\nu}(x) \equiv 0$$

solamente cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Por eso en este caso la solución general (4) tiene la forma

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Si $\nu = n$ es un número entero, se puede mostrar que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

o sea, estas funciones resultan linealmente dependientes ($\Gamma(p)$ para números enteros negativos $p$ y $p = 0$ se convierte en infinito). Por eso por segunda solución linealmente independiente debe tomarse cualquier otra función. Generalmente se toma la función de Bessel de segundo género $Y_n(x)$. Esta función es cierta combinación de las funciones $J_m(x)$ y $J_{-m}(x)$:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}$$

($\nu$ es un número no entero y tiende hacia $n$).

*Observación 1.* Ahora bien, la solución general de la ecuación (4) para $\nu = n$ natural tiene la forma

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x),$$

donde $C_1$, $C_2$ son las constantes arbitrarias. Notemos que la función $Y_n(x)$ no está acotada en el entorno $x = 0$. Por ejemplo,

$$\pi Y_0(x) = 2J_0(x)\left[\ln \frac{x}{2} + C\right] - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m},$$

donde $C$ es la constante de Euler ($C \approx 0{,}577$).

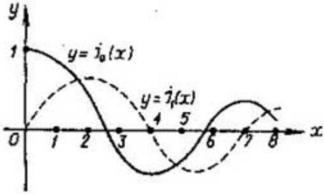


Fig. 16.

Por eso toda solución de la ecuación (4) acotada en el entorno de $x = 0$, tiene la forma $y = C_1 J_n(x)$, o sea, para ella $C_2 = 0$.

Los gráficos de las funciones de Bessel $J_0(x)$ (par) y $J_1(x)$ (impar) se muestran en la fig. 16.

## § 1.25. Elementos de la teoría de la estabilidad

En muchos casos es importante conocer *no sólo una solución concreta* del problema que responde a las condiciones iniciales dadas sino el carácter del comportamiento de la solución al variar las condiciones iniciales y al variar el argumento. Son las cuestiones de las cuales se ocupa la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Una de las partes principales de esta última es la *teoría de la estabilidad de una solución* o bien la teoría de la estabilidad de un movimiento.

Supongamos que cierto fenómeno se describe por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dt}=f_i(t,\ y_1,\ \ldots,y_n)\quad (i=1,\ \ldots,n)\tag{1}$$

con las condiciones iniciales

$$y_i(t_0)=y_{i0}\quad (i=1,\ \ldots,\ n).\tag{2}$$

Las condiciones (2) son por regla general el resultado de una medición y, por lo tanto, han sido obtenidos con cierta precisión.

Si variaciones tan pequeñas como quiera de las condiciones iniciales son capaces de cambiar fuertemente una solución, entonces la solución del sistema (1) definida por los *inexactos* datos iniciales, escogidos por nosotros, no tiene ninguna importancia e incluso de un modo aproximado no puede describir el fenómeno.

Por eso es importante conocer las condiciones para las cuales una variación pequeña de las condiciones (2) provoca una variación pequeña de la solución del sistema (1).

Si $t$ varía en un intervalo finito bastante pequeño $|t_0-t|\leqslant T$, la respuesta a esta pregunta se puede encontrar sobre la base del teorema de existencia y de unicidad.

TEOREMA 1 (SOBRE LA DEPENDENCIA CONTINUA DE LA SOLUCION DE LAS CONDICIONES INICIALES). *Si el segundo miembro de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dt}=f(t,\ y)\tag{3}$$

*es continuo también respecto a la variable $y$ tiene la derivada parcial acotada ($|f'_y|\leqslant N$) en un rectángulo $D=\{t_0-a\leqslant t\leqslant t_0+a,\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$, entonces la solución de la ecuación (3) $y(t)=y(t,\ t_0,\ y_0)$, que satisface la condición inicial $y(t_0)=y_0$, depende continuamente de los datos iniciales. Más exactamente, para todo valor de $\varepsilon>0$ existe tal número $\delta>0$ que si $|y_0-\bar{y}_0|<\delta$, entonces*

$$|y(t,\ t_0,\ y_0)-y(t,\ t_0,\ \bar{y}_0)|<\varepsilon$$

*cuando*

$$|t_0-t|<T,\ T<T_0,\ T_0=\min\left\{a,\ \frac{1}{N},\ \frac{b}{M}\right\},$$

$$M=\max_{(t,\ y)\in D}|f(t,\ y)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Al demostrar el teorema de existencia (§ 1.6) hemos obtenido que

$$y(t)=y(t,\ t_0,\ y_0)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(t,\ y(t))\,dt,$$

$$\bar{y}(t)=y(t,\ t_0,\ \bar{y}_0)=\bar{y}_0+\int_{t_0}^{t} f(t,\ \bar{y}(t))\,dt.$$

De aquí, aplicando el teorema de Lagrange (explicaciones siguen a continuación), obtenemos

$$|y(t)-\bar{y}(t)|\leqslant|y_0-\bar{y}_0|+\int_{t_0}^{t}|f(t,\ y(t))-f(t,\ \bar{y}(t))|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant|y_0-\bar{y}_0|+N|t-t_0|\max_t|y(t)-\bar{y}(t)|\leqslant$$
$$\leqslant|y_0-\bar{y}_0|+NT\max_t|y(t)-\bar{y}(t)|.$$

Como $TN<1$, entonces

$$(1-TN)\ |y(t)-\bar{y}(t)|\leqslant|y_0-\bar{y}_0|,$$

o bien

$$|y(t)-\bar{y}(t)|\leqslant|y_0-\bar{y}_0|/(1-TN).$$

Si ahora tomamos

$$|y_0-\bar{y}_0|<\delta,\quad \text{donde}\quad \delta=\varepsilon(1-TN),$$

entonces

$$|y(t)-\bar{y}(t)|<\varepsilon.$$

Hagamos algunas explicaciones. Tiene lugar la inecuación

$$|y(t,\ t_0,\ y_0)-y_0|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t} f(t,\ y(t))\,dt\right|\leqslant|t-t_0|M\leqslant TM,$$

donde $TM\leqslant T_0M<b$ o bien $b-TM=\delta_0>0$ que muestra que la curva integral $y(t,\ t_0,\ y_0)$ para $|t-t_0|<T$ pertenece a un rectángulo que se halla estrictamente dentro del rectángulo $D$. De aquí se ve que la curva

$$y(t,\ t_0,\ \bar{y}_0),\quad |t-t_0|<T$$

tampoco sale fuera de los límites del rectángulo $D$ si sólo

$$|\bar{y}_0-y_0|<\delta_0.$$

Esto muestra que el teorema de Lagrange más arriba ha sido aplicado en un modo argumentado, en todo caso cuando $\delta < \delta_0$, puesto que según la condición la función $f(t, y)$ tiene la derivada continua $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $D$.

Semejante teorema es válido también para el sistema (1).

Si se cumplen todas las condiciones del teorema, se dice que el *problema ha sido planteado correctamente*.

Hemos estudiado la estabilidad de una solución en un segmento bastante pequeño de valores de $t$.

Sin embargo, si el argumento $t \in [t_0, \infty)$ puede tomar valores cualesquiera, entonces es la teoría de la estabilidad que examina si la solución depende o no de los datos iniciales.

DEFINICIÓN. Supongamos que $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ es la solución del sistema (1). La solución $\varphi(t)$ del sistema (1) se llama

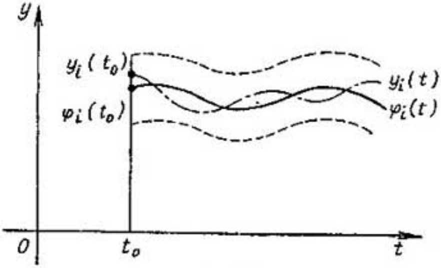


Fig. 17.

*estable según Liapunov* [1]) si para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para una solución cualquiera $y(t) = \{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ del mismo sistema, cuyas condiciones iniciales satisfacen las inecuaciones

$$| y_i(t_0) - \varphi_i(t_0) | < \delta \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

sean válidas las inecuaciones

$$| y_i(t) - \varphi_i(t) | < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \forall t \in [t_0, \infty). \tag{5}$$

Ahora bien, la solución $\varphi(t)$ es estable según Liapunov si las soluciones próximas a ella en cuanto a las condiciones iniciales permanecen próximas también para todos los valores de $t \geqslant t_0$ (fig. 17).

Si la solución $\varphi(t)$ es estable según Liapunov y, además,

$$\lim_{t \to \infty} | y_i(t) - \varphi_i(t) | = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

ella se llama *estable asintóticamente*.

Notemos que de (6) no se deriva la estabilidad según Liapunov.

[1]) A. M. Liapunov (1857—1918), ilustre matemático y mecánico ruso.

EJEMPLO 1. $\frac{dy}{dx} = -y$, $y(x_0) = y_0$.

La solución general de esta ecuación $y = C \exp(-x)$. La solución que satisface la condición inicial tiene la forma

$$y = y_0 \exp(x_0 - x).$$

Si ahora imponemos otra condición inicial $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$, la solución será

$$\bar{y} = \bar{y}_0 \exp(x_0 - x).$$

De aquí

$$|y - \bar{y}| = |y_0 - \bar{y}_0| \exp(x_0 - x) \leqslant |y_0 - \bar{y}_0|$$

para todos los valores de $x \geqslant x_0$. Por eso si $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta = \varepsilon$, entonces $|y - \bar{y}| \leqslant \varepsilon$, o sea, la solución $y = y_0 \exp(x_0 - x)$ es estable según Liapunov cuando $x \geqslant x_0$. Esta solución es también estable asintóticamente, ya que

$$\lim_{x \to +\infty} |y - \bar{y}| = \lim_{x \to +\infty} |y_0 - \bar{y}_0| \exp(x_0 - x) = 0.$$

EJEMPLO 2. Análogamente, para la ecuación $y' = y$ se puede mostrar que

$$|y - \bar{y}| = |y_0 - \bar{y}_0| \exp(x - x_0)$$

para $x \geqslant x_0$ si $x_0$ tiene un valor cualquiera.

Es evidente que, cualquiera que sea el valor de $x_0$ cuando $x \geqslant x_0$, la solución $y$ es inestable, ya que el factor $\exp(x - x_0) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$.

La investigación de la estabilidad según Liapunov de la solución arbitraria $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ del sistema (1) se puede reducir a la investigación de la estabilidad de la solución trivial (idénticamente igual a cero) de otro sistema cualquiera. Para eso es necesario pasar a las nuevas funciones incógnitas

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

De aquí

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} + \frac{d\varphi_i}{dt}.$$

Por eso el sistema (1) pasa al sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i[t, x_1 + \varphi_1(t), \ldots, x_n + \varphi_n(t)] -$$
$$- f_i[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)] \; (i = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

El sistema (8) tiene la solución trivial

$$x_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

De lo dicho se deriva el teorema siguiente.

TEOREMA 2. *La solución* $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ *del sistema* (1) *es estable según Liapunov (es estable asintóticamente) si y sólo si es estable según Liapunov (es estable asintóticamente) la solución trivial (punto de reposo) del sistema* (8).

Esta solución posee la propiedad consistente en que el punto $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ en realidad permanece inmóvil al variar $t$, es decir, queda en el lugar. En este caso la misma solución (9) y el punto $(0, \ldots, 0)$ se llaman *posición de equilibrio del sistema* (1) o bien *punto de reposo*.

Las condiciones de estabilidad, en cuanto al punto de reposo $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, se pueden enunciar así: el punto de reposo $x_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ del sistema (8) es estable según Liapunov si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tal que de la inecuación

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

resulta

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n), \ \forall\, t \geqslant t_0,$$

o sea, una trayectoria, cuyo punto inicial se encuentra en cierto $\delta$-entorno del origen de coordenadas, para $t \geqslant t_0$ no sale fuera de los límites de un $\varepsilon$-entorno arbitrario del origen de coordenadas. Aquí hablamos de entornos rectangulares, pero se puede pasar a los esféricos lo cual es cómodo sobre todo para la forma vectorial de notación de la solución $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$:

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow x(t)\| < \varepsilon, \ \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

*Observación 1.* La solución particular arbitraria $y_0(t)$ del sistema no homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t) \tag{10}$$

(véase § 1.23, (1')) es estable según Liapunov (es estable asintóticamente) si y sólo si es estable según Liapunov (estable asintóticamente) el punto de reposo del sistema homogéneo correspondiente (véase el teorema 2)

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{11}$$

En efecto, el sistema (10) es un caso particular del sistema (1) y el sistema (11) es un caso particular del sistema (8). Aquí los términos independientes han desaparecido, ya que la función $f(t)$ depende solamente de $t$ y no depende de las funciones buscadas.

TEOREMA 3 (DE LIAPUNOV). *Supongamos que se da el sistema*

$$\frac{dy_i}{dt}=f_i(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\quad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

*que tiene la solución trivial* $y_i(t)\equiv 0$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$.

*Admitamos que existe la función derivable* $v(y_1,\ \ldots,\ y_n)$ *que satisface las condiciones:*

1) $v(y_1,\ \ldots,\ y_n)\geqslant 0$ *y* $v=0$ *sólo cuando* $y_1=\ldots=y_n=0$, *o sea, la función* $v$ *tiene el mínimo riguroso en el origen de coordenadas.*

2) *La derivada total de la función* $v$ *a lo largo de la trayectoria de fases (o sea, a lo largo de la solución* $y_i(t)$ *del sistema* (1))

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_i}f_i(t,\ y_1,\ \ldots,y_n)\leqslant 0\ \ para\ \ t\geqslant t_0.$$

*Entonces el punto de reposo* $y_i\equiv 0$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ *es estable según Liapunov.*

*Si se exige adicionalmente que fuera de un entorno tan pequeño como e quiera del origen de coordenadas* $(y_1^2+\ldots+y_n^2\geqslant\delta)$

$$\frac{dv}{dt}\leqslant-\beta<0,\quad (t\geqslant t_0),$$

*donde* $\beta$ *es una magnitud constante, entonces el punto de reposo* $y_i(t)\equiv 0$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ *es asintóticamente estable.*

*La función* $v$ *se llama función de Liapunov.*

EJEMPLO 1.

$$\frac{dy_1}{dt}=-y_1^3-y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt}=y_1-y_2^3.$$

Es fácil ver que el punto de reposo $y_1=y_2\equiv 0$ es la solución del sistema dado. Aclaremos si es estable o no este punto.

Examinemos la función $v(y_1,\ y_2)=y_1^2+y_2^2$. Ella satisface todas las condiciones del teorema:

1) $v(y_1,\ y_2)\geqslant 0$ y $v=0$ sólo cuando $y_1=y_2=0$

2) A lo largo de la trayectoria de fases

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt}=2y_1(-y_1^3-y_2)+2y_2(y_1-y_2^3)=$$
$$=-2(y_1^4+y_2^4)\leqslant 0.$$

Además, fuera del entorno del origen de coordenadas $(y_1^2+y_2^2\geqslant\geqslant\delta>0)$

$$\frac{dv}{dt}\leqslant-\beta<0$$

(donde $\beta$ es el mínimo de la función $2(y_1^4 + y_2^4)$ fuera del círculo $y_1^2 + y_2^2 = \delta$).

Por lo tanto, la solución $y_1 = y_2 \equiv 0$ es asintóticamente estable.

*Observación 2.* Se recomienda buscar la función de Liapunov en la forma cuadrática de los argumentos $y_1, \ldots, y_n$, o sea,

$$v = \sum_{i,j} a_{ij} y_i y_j.$$

La primera exigencia trata de que $v$ debe ser una forma cuadrática definida positiva. La manera de escoger los coeficientes $a_{ij}$ para que la forma $v$ sea definida positiva, se señala en el teorema de Sylvester [1])

$$\left( a_{11} > 0 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \right).$$

## § 1.26. Clasificación de los puntos de reposo

La investigación de la estabilidad del sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

se puede realizar sobre la base del teorema de Liapunov. Sin embargo, el sistema (1) puede ser investigado en cuanto a su estabilidad también directamente, ya que podemos resolverlo.

Supongamos que el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Es fácil ver que $y(t) = x(t) \equiv 0$ es ra solución del sistema (1) con las condiciones iniciales nulas.

Para hallar la solución general debemos encontrar las raíces de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \Delta = 0, \tag{3}$$

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 22. J. J. Sylvester (1814—1897), matemático inglés.

De la condición $\Delta \neq 0$ resulta que $\lambda = 0$ no es una raíz de la ecuación característica (3).

1. Supongamos que las raíces de la ecuación característica $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son reales y diferentes. Luego, supongamos que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ son los vectores propios de la matriz $A$ que responden a las raíces $\lambda_1$ y $\lambda_2$, respectivamente, o sea,

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda_1)\alpha_1+a_{12}\alpha_2=0,\\ a_{22}\alpha_1+(a_{22}-\lambda_1)\alpha_2=0,\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda_2)\beta_1+a_{12}\beta_2=0,\\ a_{21}\beta_1+(a_{22}-\lambda_2)\beta_2=0.\end{array}\right\} \tag{4}$$

Entonces, como sabemos, la solución general del sistema (1) tiene la forma

$$\left.\begin{array}{l}x=C_1\alpha_1e^{\lambda_1 t}+C_2\beta_1e^{\lambda_2 t},\\ y=C_1\alpha_2e^{\lambda_1 t}+C_2\beta_2e^{\lambda_2 t},\end{array}\right\} \tag{5}$$

donde $C_1$ y $C_2$ son las constantes arbitrarias.

Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, entonces de (5) se ve que el punto de reposo $x = y \equiv 0$ es asintóticamente estable.

En efecto, consideremos, por ejemplo, que $t_0 = 0$, entonces la solución (5) que pasa por el punto $(x_0, y_0)$ en el instante de tiempo $t_0$ se determina por las constantes $C_1$ y $C_2$ que se hallan a partir de las ecuaciones

$$x_0 = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1,$$
$$y_0 = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2,$$

donde $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Pero entonces

$$C_1 = Ax_0 + By_0, \quad C_2 = Dx_0 + Ey_0,$$

donde $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ son ciertas constantes. Por consiguiente,

$$|x(t)| \leqslant |Ax_0 + By_0|\,|\alpha_1| + |Dx_0 + Ey_0|\,|\beta_1|,$$
$$|y(t)| \leqslant |Ax_0 + By_0|\cdot|\alpha_2| + |Dx_0 + Ey_0|\cdot|\beta_2|,$$

porque $|e^{\lambda_1 t}| \leqslant 1$, $|e^{\lambda_2 t}| \leqslant 1$ cuando $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$.

De aquí resulta que para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que tan pronto como $|x_0|$, $|y_0| < \delta$, se cumplen las inecuaciones

$$|x(t)|, \ |y(t)| < \varepsilon, \quad (t > 0),$$

o sea, el punto (0, 0) es estable según Liapunov. Además, en virtud de que

$$\exp(\lambda_i t) \to 0, \quad (t \to +\infty),$$

de (5) se deduce, evidentemente, que el punto (0, 0) es asintóticamente estable.

Si eliminamos el argumento $t$ del sistema (5), la función obtenida $y = \varphi(x)$ ofrece la trayectoria de movimiento en el sistema $xOy$.

El punto material que se encuentra en el instante inicial de tiempo $t = t_0$ en el $\delta$-entorno del origen de coordenadas pasa, cuando $t$ llega a ser suficientemente grande, al punto que se halla en el $\varepsilon$-entorno del origen de coordenadas y, cuando $t \to +\infty$, tiende hacia el origen de coordenadas.

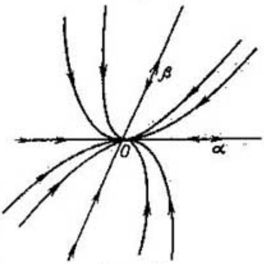

Fig. 18.

Tal punto de reposo se llama *nudo estable* (fig. 18).

En la fig. 18 se muestra la situación de las trayectorias correspondientes al caso dado. Las flechas señalan el sentido de movimiento del punto por la trayectoria cuando $t \to +\infty$. Todas las trayectorias, a excepción de una, en el punto (0, 0) tienen una tangente común. Si suponemos que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, la pendiente de la tangente es igual a $\alpha_2/\alpha_1$.

En efecto, de (5) tenemos ($C_1 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}(C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}) + a_{22}(C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t})}{a_{11}(C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}) + a_{12}(C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t})} =$$

$$= \frac{a_{21}(C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) + a_{22}(C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t})}{a_{11}(C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) + a_{12}(C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t})} \to$$

$$\xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{a_{21}C_1\alpha_1 + a_{22}C_1\alpha_2}{a_{11}C_1\alpha_1 + a_{12}C_1\alpha_2} = \frac{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2}{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2} = \frac{\lambda_1\alpha_2}{\lambda_1\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

si $\alpha_1 \neq 0$, ya que en virtud de (4)

$$a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = \lambda_1\alpha_2, \quad a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1.$$

Si $\alpha_1 = 0$, entonces, razonando del mismo modo, obtenemos

$$\frac{dx}{dy} \to \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0 \; (\lambda_1 \neq 0\,!).$$

Si $C_1 = 0$, de (5) obtenemos la trayectoria

$$y = \frac{\beta_2}{\beta_1} x.$$

La tangente a esta trayectoria (recta) tiene la pendiente $\beta_2/\beta_1$.

Ahora bien, la tangente a las trayectorias en las cuales $C_1 \neq 0$, es paralela al vector propio $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ que responde al número propio $\lambda_1$ mínimo por su valor absoluto (cuando $\alpha_1 = 0$ este vector está orientado por el eje $y$).

Además, hay una trayectoria (para $C_1 = 0$), a saber, la recta $y = \frac{\beta_2}{\beta_1} x$ la cual es paralela al segundo vector propio $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ que responde al número propio $\lambda_2$ máximo por su módulo).

Si ahora $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, entonces de (5) se desprende que el punto de reposo $x = y \equiv 0$ es inestable, ya que $\exp(\lambda_i t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. Tal punto de reposo se llama *nudo inestable*.

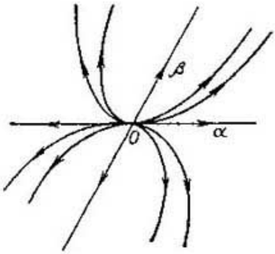


Fig. 19.

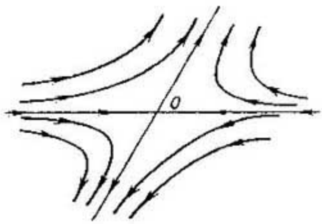


Fig. 20.

El caso dado se obtiene del precedente sustituyendo $t$ por $(-t)$. Por eso las trayectorias tendrán el aspecto anterior, pero el movimiento del punto por la trayectoria ocurrirá en el sentido contrario (fig. 19).

Por último, si el número $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$ (o bien, al revés, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$), el punto de reposo es asimismo inestable, ya que $\exp(\lambda_2 t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. Los puntos que se encuentran en el $\delta$-entorno del origen de coordenadas por la trayectoria

$$x = C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}, \quad y = C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}$$

se van al infinito. Notemos que en el caso dado hay una trayectoria por la cual el movimiento del punto se realiza en el sentido del origen de coordenadas cuando $t \to +\infty$:

$$x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Es la recta $\alpha_1 y - \alpha_2 x = 0$.

El punto de reposo de este tipo se llama *ensilladura* (fig. 20).

2. Supongamos que las raíces $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son complejas (¡$a_{kl}$ son reales!)

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = p - iq \quad (q \neq 0).$$

La solución general del sistema (1) se puede escribir en la forma de (5), donde los vectores $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}$ ya tienen las coordenadas complejas.

Las partes real e imaginaria de esta solución también son la solución del sistema. Por eso la solución general del sistema (1) se puede escribir en forma de la combinación lineal de estas soluciones:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \operatorname{sen} qt), \\ y &= e^{pt}(a \cos qt + b \operatorname{sen} qt), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

donde $C_1$ y $C_2$ son las constantes arbitrarias y $a$, $b$ son ciertas combinaciones lineales de estas constantes.

$$(a = kC_1 + lC_2,\quad b = mC_1 + nC_2).$$

Vamos a ilustrar este hecho citando un ejemplo concreto.

EJEMPLO 1. Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o bien } \lambda^2 + 1 = 0$$

tiene las raíces $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Las coordenadas de los vectores $\alpha$ y $\beta$ se obtienen de las igualdades

$$(1 - i)\,\alpha_1 - \alpha_2 = 0,\quad (1 + i)\,\beta_1 - \beta_2 = 0,$$

o sea, se puede poner $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1 - i$; $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1 + i$. Entonces

$$x = \alpha_1 e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t,\ y = \alpha_2 e^{it} = (1 - i)(\cos t + i \operatorname{sen} t) = \\ = (\cos t + \operatorname{sen} t) + i(\operatorname{sen} t - \cos t)$$

es la solución del sistema.

Las partes real e imaginaria de esta solución son asimismo las soluciones del sistema, además, son soluciones linealmente independientes. Por eso su combinación lineal ofrece la solución general de nuestro sistema:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t,\quad y = C_1(\cos t + \operatorname{sen} t) + \\ + C_2(\operatorname{sen} t - \cos t) = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\operatorname{sen} t.$$

Ahora bien, en el caso dado

$$a = C_1 - C_2,\quad b = C_1 + C_2.$$

Cuando $p = 0$, las trayectorias de (6) para diferentes $C_1$, $C_2$, en virtud de la periodicidad de los factores entre paréntesis, son curvas cerradas, o sea, elipses que tienen por centro el punto (0; 0) (fig. 21).

Este punto se llama *centro*. Cuando $p = 0$, falta la estabilidad asintótica, o sea, el punto $(x(t), y(t))$ se mueve por una de las elipses de la familia indicada, recorriéndola un número infinito de veces. Evidentemente, este punto no tiende hacia ningún límite cuando $t \to +\infty$. Por otro lado, cuando $p = 0$, el punto de reposo $(0, 0)$ es estable según Liapunov. Vamos a comprobar esta afirmación citando el ejemplo anteriormente examinado. Hallemos la solución del sistema examinado en el ejemplo 1 la cual pasa en el instante de tiempo $t_0 = 0$ por el punto $x_0$, $y_0$. Es evidente que

$$x_0 = C_1, \quad y_0 = C_1 - C_2,$$

por consiguiente,

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = x_0 - y_0$$

y la solución tiene la forma

$$x(t) = x_0 \cos t + (x_0 - y_0) \operatorname{sen} t,$$
$$y(t) = y_0 \cos t + (2x_0 - y_0) \operatorname{sen} t.$$

Luego tenemos

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + |x_0| + |y_0| = 2|x_0| + |y_0|,$$
$$|y(t)| \leqslant |y_0| + 2|x_0| + |y_0| = 2|x_0| + 2|y_0|.$$

Asignemos $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \varepsilon/4$. Entonces, evidentemente, si $|x_0|$, $|y_0| < \delta$, para todos los valores de $t$

$$|x(t)| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

$$|y(t)| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Hemos demostrado la estabilidad del punto de reposo según Liapunov.

De (6) se desprende que para $p < 0$ el punto $(x, y)$, cuando $t \to +\infty$, tiende hacia el punto nulo $x = 0, y = 0$ llamado *foco estable*. La presencia del factor $\exp(pt) \to 0$ $(t \to +\infty)$ transforma las curvas cerradas en espirales que se aproximan asintóticamente, cuando $t \to +\infty$, al origen de coordenadas (fig. 22).

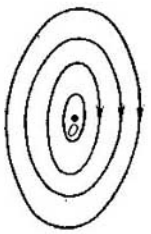


Fig. 21.

Los puntos que se encuentran para $t = t_0$ en un $\delta$-entorno arbitrario del origen de coordenadas van a parar en el $\varepsilon$-entorno dado del punto $(0, 0)$, cuando $t$ es suficientemente grande.

Las trayectorias que tienden hacia el foco poseen la propiedad consistente en que las tangentes a las mismas cuando $t \to +\infty$ no tienden a ningún límite. En esto el foco se distingue del nudo.

En el caso de que $p < 0$, el punto $x = y = 0$ es asintóticamente estable.

Si la parte real $p$ de las raíces $\lambda_1$ y $\lambda_2$ es positiva, este caso pasa al precedente cuando $t$ es sustituido por $(-t)$. Por consiguiente, las trayectorias conservan la forma representada en la fig. 22, con la

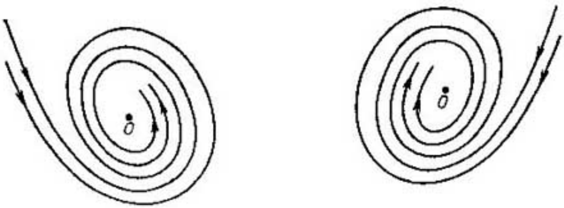


Fig. 22.

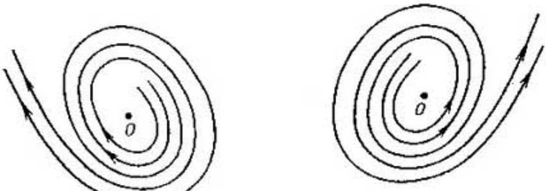


Fig. 23.

particularidad de que el movimiento del punto se realizará en el sentido contrario. Ya que $\exp(pt) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$, entonces los puntos que en el instante de tiempo inicial se encontraban en el entorno del origen de coordenadas, luego tienden al infinito. Tal punto de reposo lleva el nombre de *foco inestable* (fig. 23).

3. Supongamos que las raíces $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son iguales entre sí ($\lambda_1 = \lambda_2$, ¡$a_{kl}$ es real!). Entonces ellas son reales y la solución general del sistema (1) adquiere el aspecto

$$\left.\begin{aligned} x &= (A + Bt)\, e^{\lambda_1 t}, \\ y &= (C + Dt)\, e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

donde $A$, $B$, $C$, y $D$ son las constantes relacionadas entre sí por dos ecuaciones lineales que se pueden obtener si las funciones $x$ e $y$ se sustituyen en el sistema y éste se simplifica eliminando el factor $\exp(\lambda_1 t)$.

Si $\lambda_1 < 0$, entonces $\exp(\lambda_1 t) \to 0$, $t \exp(\lambda_1 t) \to 0$ para $t \to +\infty$ y, por consiguiente, el punto de reposo $x = 0$, $y = 0$ es asintóticamente estable. Se llama *nudo estable* (al igual que en el subpárr. 1).

Si $\lambda_1 > 0$, el punto $x = 0$, $y = 0$ es inestable y se llama *nudo inestable*.

*Observación 1.* Si $\Delta = 0$, la ecuación característica (3) tiene la raíz $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = a_{11} + a_{22}$.

Sea $\lambda_2 \neq 0$. Entonces la solución general del sistema (1) se escribirá así:

$$x = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t},$$

donde $C_1$ y $C_2$ son las constantes arbitrarias y $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0$, $-a_{22}\beta_1 + a_{12}\beta_2 = 0$.

Eliminando el parámetro $t$, obtenemos una familia de rectas paralelas

$$y - C_1\alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1}(x - C_1\alpha_1).$$

Si $\lambda_2 < 0$, entonces, cuando $t \to +\infty$, en cada trayectoria (en uno de los rayos paralelos) los puntos se aproximan al punto de reposo que se halla sobre esta trayectoria $x = C_1\alpha_1$, $y = C_1\alpha_2 \left(y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x\right)$ (fig. 24).

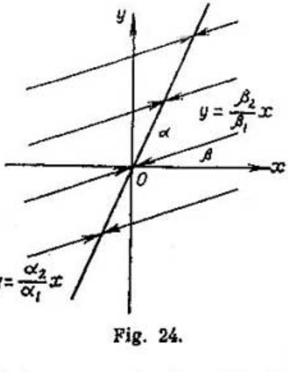


Fig. 24.

El punto (0, 0), al igual que todo punto de la recta $y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x$, para $\lambda_2 < 0$ es estable según Liapunov, pero no es asintóticamente estable.

Si $\lambda_2 > 0$, el punto de reposo es inestable.

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ se puede haber dos casos:

a) La solución general del sistema (1) tiene la forma $x = C_1$, $y = C_2$. En este caso el punto de reposo $x = y = 0$ es estable según Liapunov, mas no es asintóticamente estable. Notemos que la situación dada tiene lugar cuando la matriz $A$ es nula $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0$. En el caso dado todos los puntos del plano $(x, y)$ son los puntos de reposo estables según Liapunov.

b) La solución general del sistema (1) tiene la forma

$$x = C_1 + C_2 t, \quad y = a + bt.$$

El punto de reposo $x = y \equiv 0$ es inestable.

En este caso $a_{22} = -a_{11}$, $a_{12} \cdot a_{21} \leqslant 0$.

EJEMPLO 2. Aclarar el carácter del punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -x + ay,$$
$$\dot{y} = -2y.$$

Planteemos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & a \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sus raíces son: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Por lo tanto, el punto de reposo $x = y \equiv 0$ es un nudo estable.

EJEMPLO 3. ¿Qué tipo del punto de reposo tiene el sistema

$$\dot{x} = x - y,$$
$$\dot{y} = 2x + 3y?$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tiene las raíces complejas $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$. La parte real de estas raíces conjugadas es positiva, por eso el punto de reposo $x = y \equiv 0$ es un foco inestable.

*Observación* 2. Si la matriz $A$ es simétrica, entonces, como sabemos, la ecuación característica tiene solamente raíces reales [1]). Además, sabemos que

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

Puesto que una matriz simétrica engendra la forma cuadrática del tipo elíptico, hiperbólico y parabólico, en este caso llamaremos al sistema de ecuaciones diferenciales (1)

$$\textit{elíptico}, \text{ si } a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 > 0,$$
$$\textit{hiperbólico}, \text{ si } a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 < 0,$$
$$\textit{parabólico}, \text{ si } a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

De lo expuesto queda claro que si el sistema (1) es elíptico, el punto de reposo será un nudo estable si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Esto es posible cuando $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$.

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 24.

Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, el punto de reposo será un nudo inestable ($a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$).

Notemos que en el caso elíptico los números $a_{11}$ y $a_{22}$ son de un mismo signo.

Si el sistema (1) es hiperbólico ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$), el punto de reposo es siempre inestable (ensilladura).

Si el sistema (1) es parabólico, el punto de reposo es estable cuando $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} \leqslant 0$ e inestable cuando $\lambda_2 = a_{11} + a_{22} > 0$.

EJEMPLO 4. Investigar el carácter del punto de reposo de los sistemas:

$$\text{a) } \dot{x} = -3x + 2y, \quad \text{b) } \dot{x} = x + 2y, \quad \text{c) } \dot{x} = x + \sqrt{3}y,$$
$$\dot{y} = 2x - 5y; \qquad \dot{y} = 2x + 3y; \qquad \dot{y} = \sqrt{3}x + 3y.$$

En todos estos ejemplos la matriz $A$ es simétrica.

El sistema a) es elíptico, porque $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 11 > 0$. Puesto que $a_{11} = -3 < 0$, $a_{22} = -5 < 0$, el punto de reposo es un nudo estable.

El sistema b) es hiperbólico, ya que $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -1 < 0$. El punto de reposo es una ensilladura.

El sistema c) es parabólico, porque $a_{11}a_{22} - a_{12} = 0$. Ya que $a_{11} + a_{22} = 4 > 0$, el punto de reposo es inestable.

*Observación 3*. Se puede demostrar (al igual que lo hemos hecho para $n = 2$) que el punto de reposo es a ciencia cierta estable según Liapunov (es estable asintóticamente) en caso de un sistema homogéneo lineal de $n \geqslant 1$ ecuaciones de coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dt} = Ay,$$

si todas las raíces de la ecuación característica del sistema tienen las partes reales negativas.