

## Capítulo 2

### Integrales múltiples

#### § 2.1. Introducción

Supongamos que en el espacio tridimensional en el cual está definido el sistema rectangular de coordenadas  $(x, y, z)$  se da la superficie continua

$$z = f(Q) = f(x, y) \quad (Q = (x, y) \in \Omega),$$

donde  $\Omega$  es un conjunto acotado (bidimensional) para el cual es posible definir el concepto de su área (medida bidimensional, véase a continuación el § 2.2). Como  $\Omega$  podemos tomar un círculo, un rectángulo, una elipse, etc. Supongamos que la función  $f(x, y)$  es positiva y planteemos el problema siguiente: es necesario determinar el volumen de un cuerpo acotado superiormente por nuestra superficie, inferiormente por el plano  $z = 0$ , y a la izquierda y a la derecha por una superficie cilíndrica que pasa por la frontera y del conjunto plano  $\Omega$  y cuya generatriz es paralela al eje  $z$ .

Es natural que el volumen buscado se determina del modo siguiente. Dividamos  $\Omega$  en un número finito de partes

$$\Omega_1, \dots, \Omega_N, \quad (1)$$

que no se recubren entre sí a no ser por sus fronteras. Sin embargo, estas partes deben ser tales que se puedan determinar sus áreas (medidas bidimensionales) que designemos por  $m\Omega_1, \dots, m\Omega_N$ , respectivamente.

Introduzcamos el concepto de *diámetro* del conjunto  $A$ : es la superior exacta  $d(A) = \sup_{P', P'' \in A} |P' - P''|$ .

Escojamos en cada parte  $\Omega_j$  un punto arbitrario  $Q_j = (\xi_j, \eta_j)$   $j = 1, \dots, N$ ) y compongamos la suma

$$V_N = \sum_{j=1}^N f(Q_j) m\Omega_j \quad (2)$$

que es natural considerar como expresión aproximada del volumen buscado  $V$ . Conviene suponer que la aproximación  $V \approx V_N$  será tanto más exacta cuanto menores sean los diámetros  $d(\Omega_j)$  de las partes  $\Omega_j$ . Por eso es natural determinar el *volumen* de nuestro cuerpo como el límite de la suma (2)

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(Q_j) m\Omega_j \quad (3)$$

cuando el diámetro máximo de los conjuntos parciales de partición (1) tiende hacia cero, si, desde luego, este límite existe y es igual a un

mismo número, cualquiera que sea el método de partición sucesiva de  $\Omega$ .

Es posible abstraerse del problema de determinación del volumen del cuerpo y considerar la expresión (3) como cierta operación que se realiza sobre la función  $f$  definida sobre  $\Omega$ . Esta operación se llama *operación de integración doble, según Riemann*<sup>1)</sup>, de la función  $f$  sobre el conjunto  $\Omega$  y sus resultados, *integral doble definida (de Riemann) de  $f$  sobre  $\Omega$*  la cual se designa así:

$$V = \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(Q_j) m\Omega_j = \\ = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f(Q) dQ = \int_{\Omega} f d\Omega.$$

Supongamos ahora que en un espacio tridimensional donde está definido el sistema rectangular de coordenadas  $(x, y, z)$  se da un cuerpo  $\Omega$  (conjunto) con una masa no uniformemente distribuida en éste siendo la densidad de distribución  $\mu(x, y, z) = \mu(Q)$  ( $Q = (x, y, z) \in \Omega$ ). Es necesario determinar la masa total del cuerpo  $\Omega$ . Para resolver este problema es natural dividir  $\Omega$  en partes  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  cuyos volúmenes (medidas tridimensionales) (partiendo de la hipótesis de que existen) sean  $m\Omega_1, \dots, m\Omega_N$ , escoger arbitrariamente en cada parte un punto  $(Q_j = (x_j, y_j, z_j) \in \Omega_j)$  y considerar que la masa buscada es igual a

$$M = \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mu(Q_j) m\Omega_j. \quad (4)$$

Al igual que antes, la expresión (4) se puede considerar como una operación determinada sobre la función  $\mu$  asignada ahora en el conjunto tridimensional  $\Omega$ . Esta vez la operación se llama *operación de integración triple (según Riemann)* y su resultado, *integral triple definida (de Riemann)* la cual se designa así:

$$M = \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mu(Q_j) m\Omega_j = \iiint_{\Omega} \mu(Q) dQ = \\ = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

De un modo análogo se define el concepto de *integral de Riemann múltiple de  $n$* .

<sup>1)</sup> B. Riemann (1826—1866), gran matemático alemán.

Veremos que una parte de la teoría de integración múltiple que contiene los teoremas de existencia y los de propiedades aditivas de una integral puede ser expuesta de un modo absolutamente análogo tanto en el caso unidimensional como en el  $n$ -dimensional. No obstante en la teoría de integrales múltiples surgen dificultades que no existían cuando exponíamos la teoría de integrales simples.

El hecho consiste en que hemos definido la integral simple de Riemann para un conjunto muy simple, o sea, para el segmento  $[a, b]$  que volvía a partirse en otros segmentos. No surgían ningunas dificultades para determinar la longitud (*medida unidimensional*) de los segmentos. Sin embargo, en el caso de las integrales dobles y, en general, en el caso de las integrales múltiples de  $n$ , la región de integración  $\Omega$  ha de dividirse en partes con fronteras curvilíneas y entonces surge la cuestión acerca de la definición general del concepto de área o, en general, de medida de  $n$  dimensiones de estas partes.

En el caso bidimensional tenemos que vernos con regiones acotadas que poseen una *frontera suave* (fig. 25) o bien una *frontera*

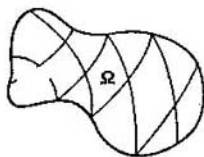


Fig. 25.

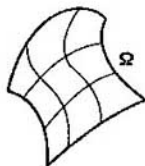


Fig. 26.

*suave a trozos* (fig. 26), o sea, que se compone de un número finito de trozos (líneas) suaves.

A su vez, tenemos que dividir estas regiones en partes que poseen una *frontera suave a trozos*.

A cada una de las regiones  $\omega$  y a algunos otros conjuntos puede hacerseles corresponder un número positivo  $m\omega$  llamado *área* o *medida bidimensional de Jordan*<sup>1)</sup> (la definición general de la medida bidimensional de Jordan se da en el § 2.2).

Con ello se cumplen las propiedades siguientes:

- 1) Si  $\Delta$  es un triángulo con la base  $a$  y la altura  $b$ , entonces  $m\Delta = |\Delta| = ab$ .
- 2) Si  $\omega_1 \subset \omega_2$  y  $\omega_1, \omega_2$  tienen las medidas  $m\omega_1, m\omega_2$ , entonces  $m\omega_1 \leq m\omega_2$ .

<sup>1)</sup> C. Jordan (1838—1922), matemático francés.

3) Si la región  $\omega$  está cortada con ayuda de una curva suave a trozos en dos partes  $\omega_1$  y  $\omega_2$  ( $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ), entonces

$$m\omega = m\omega_1 + m\omega_2.$$

Existen conjuntos de medida bidimensional cero tales como el punto, segmento, curva suave o suave a trozos.

En el caso tridimensional nos interesarán las regiones que tienen en calidad de frontera de ésta superficies suaves a trozos. En cuanto a tales regiones diremos que ellas tienen una frontera suave a trozos. La esfera, elipsoide y cubo pueden servir de ejemplos de tales regiones.

Una superficie se llama *suave* si en todo punto suyo se puede trazar a ella un plano tangente que varía continuamente junto con este punto. Una superficie se llama *suave a trozos* si puede ser cortada en un número finito de trozos suaves. En las líneas de corte los planos tangentes pueden no existir.

Para las regiones acotadas tridimensionales  $\omega$  con fronteras suaves a trozos puede ser determinado su volumen (medida tridimensional), o sea, el número positivo  $m\omega$  que satisface las propiedades siguientes:

1) Si  $\Delta$  es un paralelepípedo rectangular con aristas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , entonces  $m\Delta = |\Delta| = abc$ .

2) Si  $\omega_1 \subset \omega_2$  y  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  tienen las medidas  $m\omega_1$ ,  $m\omega_2$ , entonces  $m\omega_1 \leq m\omega_2$ .

3) Si la región  $\omega$  está cortada por una superficie suave a trozos en partes  $\omega_1$  y  $\omega_2$  ( $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ), entonces  $m\omega = m\omega_1 + m\omega_2$ .

Existen conjuntos de medida tridimensional cero. Tales conjuntos son el punto, segmento, rectángulo (plano), superficie suave o suave a trozos.

Por analogía, se pueden examinar las regiones  $n$ -dimensionales  $\omega$  ( $\omega \subset R_n$ ) con fronteras suaves a trozos y para ellas definir la medida de  $n$  dimensiones, o sea,  $m\omega > 0$ , que posee propiedades semejantes a 1), 2), 3).

El rectángulo  $\Delta$  en  $R_n$  se define como el conjunto de puntos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades

$$a_j \leq x_j \leq b_j \quad (j = 1, \dots, n; a_j < b_j).$$

La medida ( $n$ -dimensional) de  $\Delta$  se define como el producto:

$$m\Delta = |\Delta| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

La superficie suave  $S \subset R_n$  se define como el conjunto de puntos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  que satisfacen la ecuación

$$x_j = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

$$(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \bar{G},$$

donde  $j$  puede tener uno de los valores  $j = 1, 2, \dots, n$ . Con ello  $f$  es una función continuamente derivable en la clausura de cierta región acotada  $(n-1)$ -dimensional  $g$  de puntos  $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ .

Por definición, la superficie suave a trozos en  $R_n$  se compone de un número finito de trozos suaves (superficies) que no se intersecan a no ser en sus bordes.

Vamos a repetir la definición de una integral múltiple sin recurrir a los problemas del contenido geométrico o físico.

Supongamos que en el espacio  $R_n$  de  $n$  dimensiones se da una región acotada  $\Omega$  con una frontera suave a trozos  $\Gamma$  ( $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ ) y sobre  $\Omega$  (o  $\bar{\Omega}$ ) se da la función

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Cortemos  $\bar{\Omega}$  en partes  $\Omega_j$  que no se intersequen, a no ser por sus bordes, que consideraremos como suaves a trozos. Para abreviar, diremos que hemos realizado la partición  $\rho$  del conjunto  $\Omega$ .

Escojamos en cada parte  $\Omega_j$  un punto arbitrario  $\xi^j = (\xi_1^j, \dots, \xi_n^j)$  ( $\xi^j \in \Omega_j$ ) y hagamos la suma

$$S_\rho(f) = \sum_{j=1}^N f(\xi^j) m\Omega_j,$$

a la cual llamaremos *suma integral de Riemann* de la función  $f$  correspondiente a la partición  $\rho$ .

El límite de la suma

$$\begin{aligned} \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} S_\rho(f) &= \lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(\xi^j) m\Omega_j = \\ &= \int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (5) \end{aligned}$$

cuando el diámetro máximo de los conjuntos parciales  $\Omega_j$  tiende a cero se llama *integral múltiple de la función  $f$  sobre  $\Omega$*  (o según  $\Omega$ ).

Cabe señalar que el límite (5) se llama integral múltiple de la función  $f$  si no depende de la elección de los puntos  $\xi^j$  en  $\Omega_j$  ni de los métodos de partición  $\rho$  de la región  $\Omega$ .

Hagamos algunas observaciones.

*Observación 1.* No tiene importancia el hecho de que calculemos el límite (5) para la región  $\Omega$  o para su clausura  $\bar{\Omega}$ . Esto se debe a que  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ , donde  $\Gamma$  es la frontera de  $\Omega$  supuesta suave a trozos. Hay que decir que una frontera suave a trozos tiene la medida  $n$ -dimensional cero ( $m\Gamma = 0$ , véase a continuación el § 2.2).

*Observación 2.* Si el límite (5), o sea, la integral múltiple  $\int f d\Omega$

existe, la función  $f(x)$  está limitada sobre  $\bar{\Omega}$  ( $|f(x)| \leq M$ ). Esto se demuestra al igual que en el caso de una integral definida unidimensional.

*Observación 3.* Si  $\max d(\Omega_j) \rightarrow 0$ , la suma de las medidas de las partes  $\Omega_j$  que se adhieren directamente a la frontera suave a trozos  $\Gamma$  tiende asimismo a cero

$$\sum'' m\Omega_j \rightarrow 0.$$

Aquí el trazo doble de  $\sum$  significa que la suma concierne a las partes  $\Omega_j$  que se adhieren a  $\Gamma$ .

Por ejemplo, si la región  $\Omega$  es cortada en partes por una cuadrícula, como lo muestra la fig. 27, entonces la partición respectiva se puede escribir en la forma

$$\Omega = \sum' \Omega_j + \sum'' \Omega_j,$$

donde la suma  $\sum'$  concierne a los cuadrados completos (que han entrado en  $\Omega$ ) y la suma  $\sum''$  concierne a los cuadrados incompletos.

Es importante que la medida de la segunda suma tienda a cero al tender indefinidamente a cero el diámetro de la diagonal de la cuadrícula:

$$\sum'' m\Omega_j \xrightarrow{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} 0.$$

*Observación 4.* De las observaciones precedentes se deduce que

$$\left| \sum'' f(\xi^j) m\Omega_j \right| \leq \sum'' M \cdot m\Omega_j = M \sum'' m\Omega_j \xrightarrow{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} 0.$$

Esto muestra que la integral (5) se puede definir al igual que el límite de la suma

$$\lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum'' f(\xi^j) m\Omega_j = \int_{\Omega} f(x) dx$$

que concierne sólo a las partes  $\Omega_j$  de partición que no se adhieren a  $\Gamma$ . Formalmente no vamos a argumentar las observaciones 1, 2, 3 y 4. Además, éstas se deducen fácilmente del § 2.2 que sigue a continuación.

## § 2.2. Algunas nociones de la teoría de la medida de Jordan

Limitémonos a examinar conjuntos bidimensionales. Asignemos en un plano el sistema rectangular de coordenadas  $(x, y)$ .

Asignemos un número natural  $N$  y dos sistemas de rectas

$$\begin{aligned} x &= kh \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y &= lh \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad h = 2^{-N} \end{aligned}$$

que definen en el plano una cuadrícula cuyos cuadrados tienen el lado  $h$ . Llamaremos a tal cuadrícula  $h$ -cuadrícula (fig. 28). Claro está que al pasar de  $N$

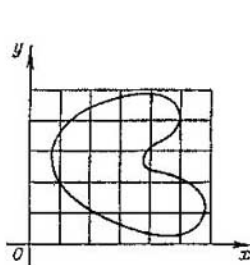


Fig. 27.

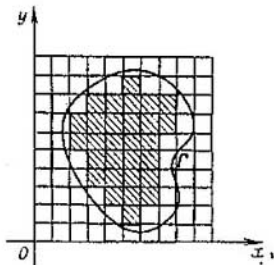


Fig. 28.

a  $N + 1$  cada cuadrado de la  $h$ -cuadrícula ( $h = 2^{-N}$ ) se corta en cuatro cuadraditos iguales. Estos últimos forman ya  $h = 2^{-N-1}$  — cuadrícula.

Asignemos en el plano un conjunto acotado arbitrario  $\Omega$  y para el número dado  $N$  introduzcamos dos conjuntos:  $\underline{\Omega}_N$  y  $\overline{\Omega}_N$ . El primero de ellos  $\underline{\Omega}_N$  es la suma (en la teoría de los conjuntos) de los cuadraditos de la  $h$ -cuadrícula ( $h = 2^{-N}$ ) cada uno de los cuales pertenece por completo a  $\Omega$  (en la fig. 28 es la parte rayada). Llamaremos a  $\underline{\Omega}_N$  figura interior del conjunto  $\Omega$  (definida por la  $h$ -cuadrícula dada). Puede ocurrir que  $\underline{\Omega}_N$  sea un conjunto vacío, o sea, no haya ningún cuadradito que pertenezca por completo a  $\Omega$ . Esto tiene lugar, por ejemplo, si  $\Omega$  es un conjunto compuesto de un número finito de puntos o bien si esto es el trozo de una curva suave.

Llamaremos al segundo conjunto  $\overline{\Omega}_N$  figura exterior del conjunto  $\Omega$  (definida por la  $h$ -cuadrícula dada). Es la suma de los cuadraditos de la  $h$ -cuadrícula cada uno de los cuales contiene al menos un solo punto de  $\Omega$ .

Es evidente que

$$\underline{\Omega}_N \subset \Omega \subset \overline{\Omega}_N$$

y las áreas de las figuras  $\underline{\Omega}_N$  y  $\overline{\Omega}_N$ , las cuales vamos a designar por  $|\underline{\Omega}_N|$  y  $|\overline{\Omega}_N|$ , satisfacen la desigualdad

$$|\underline{\Omega}_N| \leq |\overline{\Omega}_N| \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Si  $\underline{\Omega}_N$  es un conjunto vacío, se supone que  $|\underline{\Omega}_N| = 0$ .  
No es difícil ver que

$$\underline{\Omega}_1 \subset \underline{\Omega}_2 \subset \underline{\Omega}_3 \subset \dots \subset \Omega \subset \dots \subset \bar{\Omega}_3 \subset \bar{\Omega}_2 \subset \bar{\Omega}_1,$$

de donde

$$|\underline{\Omega}_1| \leq |\underline{\Omega}_2| \leq |\underline{\Omega}_3| \leq \dots \leq |\bar{\Omega}_3| \leq |\bar{\Omega}_2| \leq |\bar{\Omega}_1|.$$

Ahora bien,

$$|\underline{\Omega}_N| \leq |\bar{\Omega}_M|,$$

cualesquiera que sean los números naturales  $N$  y  $M$ .

Si se fija  $M$ , los números  $|\underline{\Omega}_N|$ , al crecer  $N$  indefinidamente, no decrecen manteniéndose no mayores que el número  $|\bar{\Omega}_M|$ . Esto muestra que existe el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N| \leq |\bar{\Omega}_M|.$$

Se llama *medida interior del conjunto*  $\Omega$  y se designa así:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N| = m_i \Omega.$$

Es un número completamente determinado que no depende de  $N$ . Hemos obtenido la desigualdad

$$m_i \Omega \leq |\bar{\Omega}_M| \quad (M = 1, 2, \dots),$$

donde los números  $|\bar{\Omega}_M|$  no crecen monótonamente al crecer indefinidamente  $M$ . Pero entonces existe el límite

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |\bar{\Omega}_M| \geq m_e \Omega$$

que se llama *medida exterior de Jordan* del conjunto  $\Omega$  y se designa por  $m_e \Omega$ .

Así, pues, un conjunto acotado arbitrario  $\Omega$  del plano tiene las medidas interior y exterior  $m_i \Omega$  y  $m_e \Omega$ . Son números no negativos que satisfacen la desigualdad  $m_i \leq m_e \Omega$ .

Si de hecho tiene lugar la igualdad, entonces el conjunto  $\Omega$  se llama *medido según Jordan en el sentido bidimensional* y el número

$$m \Omega = m_i \Omega = m_e \Omega$$

se denomina *medida bidimensional  $\Omega$  según Jordan*.

Llamaremos a la medida de Jordan también simplemente *medida* <sup>1)</sup>.

Así, pues, el conjunto  $\Omega$  es medible (según Jordan) si para él

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N| = \lim_{N \rightarrow \infty} |\bar{\Omega}_N|. \quad (1)$$

Designemos por  $\Gamma$  la frontera del conjunto  $\Omega$  ( $\Gamma = \partial \Omega$ ). Para obtener el conjunto de cuadraditos de la cuadrícula que cubren  $\Gamma$ , o bien, para obtener la figura que cubre  $\Gamma$  (véase la fig. 28) es necesario restar, en el sentido de la teoría de los conjuntos, de la figura  $\bar{\Omega}_N$  la figura  $\underline{\Omega}_N$  y cerrar el conjunto obtenido

$$\bar{\Gamma}_N = \overline{\bar{\Omega}_N \setminus \underline{\Omega}_N}.$$

<sup>1)</sup> En las matemáticas modernas tiene gran importancia también otra medida, llamada medida de Lebesgue. H. Lebesgue (1875—1941), matemático francés.



Es evidente que el área (medida bidimensional)  $\bar{\Gamma}_N$  es igual a

$$|\bar{\Gamma}_N| = |\bar{\Omega}_N| - |\underline{\Omega}_N|.$$

De (1) se deduce:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\bar{\Gamma}_N| = \lim_{N \rightarrow \infty} |\bar{\Omega}_N| - \lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N| = 0. \quad (2)$$

Viceversa, de la igualdad

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\bar{\Gamma}_N| = 0, \quad (3)$$

teniendo en cuenta que existen los límites  $\lim_{N \rightarrow \infty} |\bar{\Omega}_N|$  y  $\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N|$ , se deduce la igualdad (1), o sea, que es medible  $\Omega$ .

Notemos que el límite (3) es la medida exterior de  $\Gamma$ , o sea

$$m_e \Gamma = 0.$$

Pero  $0 \leq m_i \Gamma \leq m_e \Gamma$ , por eso

$$m_i \Gamma = m_e \Gamma = 0.$$

Hemos demostrado una afirmación importante: para que el conjunto  $\Omega$  de un plano sea medible según Jordan, es necesario y suficiente que la medida de su frontera sea igual a cero ( $m\Gamma = 0$ ).

A continuación mostraremos que una curva suave a trozos tiene la medida bidimensional cero. Pero entonces la región  $\Omega$  que tiene la frontera suave a trozos es medible según Jordan, en el sentido bidimensional.

Examinemos los ejemplos.

**EJEMPLO 1.** El conjunto  $\Omega$  compuesto por un solo punto tiene la medida bidimensional cero ( $m\Omega = 0$ ). El punto puede pertenecer, como máximo, a cuatro cuadraditos de la  $h$ -cuadrícula, su área total tiende a cero cuando  $N \rightarrow \infty$  y, por consiguiente,  $m_e \Omega = 0$ , pero  $0 \leq m_i \Omega \leq m_e \Omega$ , por eso  $m_i \Omega = m_e \Omega = m\Omega = 0$ .

**EJEMPLO 2.** La curva continua  $\Gamma$  (fig. 29)  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) tiene la medida bidimensional cero ( $m\Gamma = 0$ ).

En efecto, debido a la continuidad uniforme de  $f$  en  $[a, b]$  para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x^*) - f(x^*)| < \varepsilon$  para todos  $x^*, x^* \in [a, b]$  que satisfagan la desigualdad  $|x^* - x^*| < \delta$ . El número hallado  $\delta > 0$  se puede disminuir como queramos. Supondremos que  $\delta < \varepsilon$ . Asignemos una  $h$ -cuadrícula con

$$h = 2 \cdot N < \delta$$

y examinemos una columna cualquiera compuesta de los cuadrados de la cuadrícula que contienen los puntos de  $\Gamma$ . La altura de la columna no supera  $\varepsilon + 2h$  (en la fig. 29 para  $\varepsilon = 2h$  la columna escogida comprende cuatro cuadraditos de la  $h$ -cuadrícula que contienen los puntos de  $\Gamma$  y  $\varepsilon + 2h = 4h$ ) y el área no supera  $(\varepsilon + 2h)h$ . El área total de las columnas que cubren  $\Gamma$  no sobrepasa

$$(\varepsilon + 2h)h \cdot \frac{K}{h} = (\varepsilon + 2h)K \leq 3\varepsilon K,$$

donde  $K$  es la longitud del segmento con los extremos de números enteros que contiene el segmento  $[a, b]$ .

Esto muestra que el área total  $|\bar{\Gamma}_N|$  de los cuadraditos que cubren la curva  $\Gamma$ , al ser  $N$  suficientemente grande, puede ser menguada hasta un valor menor que un número positivo tan pequeño como se quiera, asignado de antemano; por

lo tanto, la medida exterior de  $\Gamma$ , y tanto más la interior, es igual a cero. Pero entonces

$$m\Gamma = 0.$$

Puesto que la suma de un número finito de conjunto con la medida cero tiene, evidentemente, la medida cero, entonces del ejemplo 1 se deduce que la medida bidimensional de un conjunto compuesto por un número finito de puntos es igual a cero.

Del ejemplo 2 se deduce que la curva suave

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (4)$$

tiene la medida bidimensional cero (fig. 30).

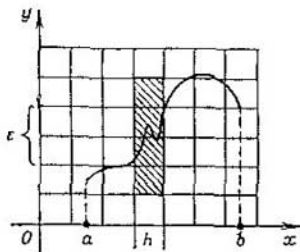


Fig. 29.

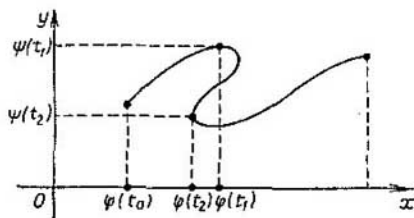


Fig. 30.

El hecho consiste en que si  $\Gamma$  es una curva suave, el segmento  $[a, b]$  se puede partir en un número finito de segmentos por los puntos

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

de modo que en cada segmento parcial  $[t_j, t_{j+1}]$  una de las dos ecuaciones (4) se pueda resolver respecto a  $t$  y sustituir en la segunda. Como resultado obtenemos que el trozo respectivo  $\Gamma_j$  de la curva  $\Gamma$  se describe bien por la ecuación que tiene la forma

$$y = f(x), \quad x \in [c, d],$$

bien por la ecuación que tiene la forma

$$x = g(y), \quad y \in [p, q],$$

donde las funciones  $f$  y  $g$  son continuas sobre los segmentos respectivos. Pero entonces, como sabemos del ejemplo 2,

$$m\Gamma_j = 0 \quad (j = 1, \dots, r).$$

Por eso, puesto que  $\Gamma$  es la suma de un número finito de los trozos  $\Gamma_j$ ,

$$\Gamma = \sum_{j=1}^r \Gamma_j$$

cada uno de los cuales tiene la medida cero, entonces  $m\Gamma = 0$ .

Notemos que si dos conjuntos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son medibles, son medibles también su suma  $\Omega_1 + \Omega_2$ , su diferencia  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$  y su intersección  $\Omega_1 \Omega_2 = \Omega_1 \cap \Omega_2$ .

En efecto, designemos por  $\Gamma(E)$  la frontera del conjunto  $E$ . La fig. 31 muestra dos conjuntos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Es evidente que

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\Omega_1 + \Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2), \\ \Gamma(\Omega_1 \setminus \Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2), \\ \Gamma(\Omega_1 \Omega_2) &\subset \Gamma(\Omega_1) + \Gamma(\Omega_2). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son medibles, entonces  $m\Gamma(\Omega_1) = 0$ ,  $m\Gamma(\Omega_2) = 0$ , pero entonces las medidas de los primeros miembros de (5) también son iguales a cero lo que demuestra que los conjuntos  $\Omega_1 + \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \Omega_2$  son medibles.

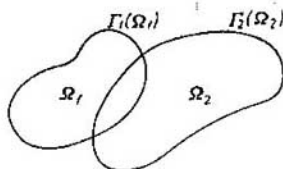


Fig. 31.

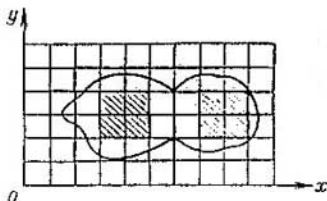


Fig. 32.

Aquí hemos hecho uso de una propiedad evidente de la medida. Si el conjunto  $\omega$  tiene la medida cero, cualquier conjunto suyo también tiene la medida cero.

Por último, si  $\Omega^1$  y  $\Omega^2$  son conjuntos medibles que no se intersecan, a no ser que en sus fronteras, entonces

$$m(\Omega^1 + \Omega^2) = m\Omega^1 + m\Omega^2. \quad (6)$$

En efecto, es evidente (fig. 32) que

$$\underline{\Omega}_N^1 + \underline{\Omega}_N^2 \subset (\Omega^1 + \Omega^2)_N \subset \overline{\Omega}_N^1 + \overline{\Omega}_N^2$$

y como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N^1| = \lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Omega}_N^1| = m\Omega^1,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N^2| = \lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Omega}_N^2| = m\Omega^2$$

entonces, evidentemente,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (|\underline{\Omega}_N^1 + \underline{\Omega}_N^2|) = \lim_{N \rightarrow \infty} (|\overline{\Omega}_N^1 + \overline{\Omega}_N^2|) = m\Omega^1 + m\Omega^2$$

lo que demuestra (6).

Notemos que si la región  $\Omega$  es medible, su medida de Jordan es igual a la medida de su clausura:

$$m\Omega = m\overline{\Omega}.$$

En efecto,  $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ , donde  $\Gamma$  es la frontera de  $\Omega$  y  $m\overline{\Omega} = m\Omega + m\Gamma$ , donde  $m\Gamma = 0$ .

EJEMPLO 3. El conjunto  $\omega$  compuesto de todos los números racionales del segmento  $[0, 1]$  no es medible según Jordan:  $m_1\omega = 0$ ,  $m_2\omega = 1$ .

En el caso tridimensional la teoría de la medida de Jordan es análoga. Ahora se introducen el sistema rectangular de coordenadas  $(x, y, z)$  y tres familias de planos paralelos

$$x = kh \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$y = lh \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$z = mh \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

que dividen el espacio en cubos de arista  $h = 2^{-N}$  ( $N = 1, 2, \dots$ ). Como antes, llamamos a tal partición  $h$ -cuadrícula (tridimensional).

Sea  $\Omega$  un conjunto acotado de puntos que pertenecen al espacio. Designemos por  $\underline{\Omega}_N$  la *figura interior del conjunto*  $\Omega$ , o sea, el conjunto de cubos de la cuadrícula que pertenecen por completo a  $\Omega$  y por  $\overline{\Omega}_N$ , la *figura exterior del conjunto*  $\Omega$  o sea, el conjunto de cubos de la cuadrícula cada uno de los cuales contiene al menos un solo punto de  $\Omega$ .

Volvemos a concluir que

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots \subset \Omega, \\ \overline{\Omega}_1 &\supset \overline{\Omega}_2 \supset \overline{\Omega}_3 \supset \dots \supset \Omega, \end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned} |\Omega_1| &\leq |\Omega_2| \leq |\Omega_3| \leq \dots, \\ |\overline{\Omega}_1| &\geq |\overline{\Omega}_2| \geq |\overline{\Omega}_3| \geq \dots \end{aligned}$$

y

$$|\underline{\Omega}_N| \leq |\Omega_M|,$$

cualesquiera que sean los números naturales  $N$  y  $M$ . De aquí se deduce la existencia de los límites

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Omega}_N|.$$

En esta desigualdad el primer límite se denomina *medida interior* (tridimensional) de  $\Omega$ :

$$m_i \Omega = \lim_{N \rightarrow \infty} |\underline{\Omega}_N|$$

y el segundo, *medida exterior* de  $\Omega$ :

$$m_e \Omega = \lim_{N \rightarrow \infty} |\overline{\Omega}_N|.$$

Ahora bien,

$$m_i \Omega \leq m_e \Omega.$$

Si

$$m_i \Omega = m_e \Omega = m \Omega,$$

el conjunto  $\Omega$  se llama *medible en el sentido tridimensional según Jordan* y el número  $m \Omega$  se llama *medida tridimensional* de éste.

Por medio de los razonamientos semejantes a los que han sido efectuados respecto a las igualdades (1), (2) y (3) se demuestra que el conjunto es medible en el sentido tridimensional si y sólo si su frontera tiene la medida tridimensional cero.

No vamos a enunciar las propiedades ulteriores de los conjuntos medibles en el sentido tridimensional. Son análogas a las propiedades indicadas de los conjuntos medibles en el sentido bidimensional.

Nos detenemos sólo para explicar el hecho de que una superficie suave a trozos tiene la medida tridimensional cero. Tal superficie comprende un número finito de trozos  $S$  que no se intersecan a no ser en sus bordes y cada uno de los cuales, al realizar nueva designación respectiva de las coordenadas se define por la ecuación

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{g}),$$

donde  $\bar{g}$  es la clausura de cierta región limitada en el plano  $(x, y)$ . Asignemos  $\varepsilon > 0$  y escojamos  $\delta > 0$  de modo que

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

para todos los puntos  $(x', y'), (x'', y'') \in \bar{g}$  que se encuentran uno del otro a la distancia

$$|(x', y') - (x'', y'')| < \delta.$$

Ponemos  $\delta < \varepsilon$  y tomamos la  $h$ -cuadrícula con  $h = 2^{-N} < \delta$ . Examinamos una columna cualquiera compuesta de cubos de la cuadrícula que contienen los puntos  $S$ . La altura de esta columna no supera  $\varepsilon + 2h$  y su volumen no supera  $(\varepsilon + 2h)h^3$ . El volumen total de todas las columnas que cubren  $S$  no sobrepasa

$$(\varepsilon + 2h)h^3 \cdot \frac{K}{h^2} = (\varepsilon + 2h)K < 3\varepsilon K. \quad (7)$$

Aquí  $K$  es el área del cuadrado  $\Delta$ , cuyos vértices tienen coordenadas de números enteros, el cual cubre el conjunto  $\bar{g}$ . Puesto que los vértices de  $\Delta$  poseen las coordenadas de números enteros, ellos se encuentran sobre los planos de la cuadrícula que se examina. El segundo miembro de (7) puede tomarse tan pequeño como se quiera lo que demuestra que la medida tridimensional  $mS = 0$ .

Por analogía, se puede introducir el concepto de medida de  $n$  dimensiones para los conjuntos del espacio  $R_n$  y mostrar que una superficie suave en  $R_n$  tiene la medida  $n$ -dimensional cero.

### § 2.3. Propiedades de las integrales múltiples. Teoremas de existencia

Más adelante  $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$  serán las regiones con una frontera suave a trozos (aunque se pueden considerar conjuntos arbitrarios medibles según Jordan).

Es válida la igualdad

$$\int_{\Omega} dx = \int_{\Omega} 1 \cdot dx = m\Omega. \quad (1)$$

Esta igualdad es evidente. Para calcular la integral (1) es necesario cortar por medio de las superficies suaves a trozos la región  $\Omega$  en partes

$$\Omega = \sum_{h=1}^N \Omega_h$$

que no se intersequen, a no ser en sus fronteras (fig. 33), y tener en cuenta que

$$\sum_{h=1}^N 1 \cdot m\Omega_h = \sum_{h=1}^N m\Omega_h = m\Omega.$$

Pero entonces

$$\lim_{\max d(\Omega_h) \rightarrow 0} \sum_{h=1}^N m\Omega_h = m\Omega.$$

Con ayuda de la fórmula (1) en el caso bidimensional se calcula el área de  $\Omega$  y en el caso tridimensional, el volumen de  $\Omega$ . En el

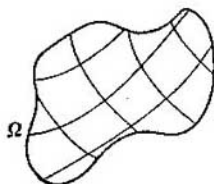


Fig. 33.

caso  $n$ -dimensional la fórmula (1) ofrece la medida  $n$ -dimensional de  $\Omega$ .

En adelante veremos que el cálculo de la integral (1) y de una integral más general  $\int_{\Omega} f dx$  puede ser reducido al cálculo sucesivo de ciertas integrales unidimensionales (véase el § 2.4).

A continuación suponemos que para las funciones  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  y  $|f(x)|$ , de las cuales se tratará, las integrales en cuestión existen. No vamos a mencionar especialmente esta circunstancia.

Es válida la igualdad

$$\int_{\Omega} [Af(x) + B\varphi(x)] dx = A \int_{\Omega} f(x) dx + B \int_{\Omega} \varphi(x) dx, \quad (2)$$

donde  $A$  y  $B$  son las constantes.

Si la región  $\Omega$  con una frontera suave a trozos está cortada en partes medibles  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  ( $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_2$ ), entonces

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\Omega_1} f dx + \int_{\Omega_2} f dx. \quad (3)$$

Si

$$f(x) \leq \varphi(x) \quad (x \in \Omega), \quad (4)$$

entonces

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} \varphi(x) dx. \quad (5)$$

Pero entonces, teniendo en cuenta que

$$- |f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

obtenemos, en virtud de (2) (cuando  $A = -1$ ,  $B = 0$ ), que

$$-\int_{\Omega} |f(x)| dx \leq \int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} |f(x)| dx,$$

o sea,

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| dx. \quad (6)$$

En particular, de (6) se deduce que si

$$|f(x)| \leq M \quad (x \in \Omega), \quad (7)$$

donde  $M$  es la constante, entonces

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} M dx = M \int_{\Omega} dx = M \cdot m\Omega. \quad (8)$$

Es válido el teorema de existencia (véase la demostración en el § 2.5).

**TEOREMA 1.** *Si la función  $f(x)$  es continua en la clausura  $\bar{\Omega}$  de una región acotada  $\Omega$  con una frontera suave a trozos, entonces ella es integrable sobre  $\Omega$ , al igual que sobre  $\bar{\Omega}$ , y*

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\bar{\Omega}} f(x) dx. \quad (9)$$

Notemos que

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} f dx = \int_{\Omega} f dx + 0 = \int_{\Omega} f dx,$$

donde  $\Gamma$  es la frontera de  $\Omega$ . Según la condición  $\Gamma$  es una frontera suave a trozos. Su medida ( $n$ -dimensional) es igual a cero ( $m\Gamma = 0$ ), por lo tanto,

$$\int_{\Gamma} f dx = 0.$$

Enunciemos un teorema de existencia más general.

**TEOREMA 2.** Si la función  $f(x)$  está acotada y es continua en todas las partes de la clausura  $\bar{\Omega}$  de una región acotada  $\Omega$  con una frontera suave a trozos, a excepción de algunos puntos y curvas suaves en un número finito donde ella puede tener discontinuidades, entonces  $f$  es integrable sobre  $\Omega$ , al igual que sobre  $\bar{\Omega}$ , y se cumple la igualdad (9).

Formulemos otro teorema más.

**TEOREMA 3 (DEL VALOR MEDIO).** Sea  $f(x)$  una función continua en la clausura  $\bar{\Omega}$  de la región  $\Omega$  y supongamos conexa<sup>1)</sup> esta clausura. Entonces existe un punto  $x^0$  tal ( $x^0 \in \bar{\Omega}$ ) que se cumple la igualdad

$$\int_{\Omega} f(x) dx = f(x^0) m\Omega. \quad (10)$$

**DEMOSTRACIÓN.** Según la condición dada la función  $f$  es continua sobre el conjunto acotado cerrado  $\bar{\Omega}$ , por eso sobre  $\bar{\Omega}$  existen los puntos  $x^1$  y  $x^2$  ( $x^1, x^2 \in \bar{\Omega}$ ) en los cuales  $f$  alcanza, respectivamente, su mínimo y su máximo sobre  $\bar{\Omega}$ :

$$f(x^1) \leq f(x) \leq f(x^2), \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Integrando estas desigualdades respecto a  $\Omega$ , obtenemos

$$\int_{\Omega} f(x^1) dx \leq \int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} f(x^2) dx$$

o bien

$$f(x^1) m\Omega \leq \int_{\Omega} f(x) dx \leq f(x^2) m\Omega. \quad (11)$$

De las desigualdades (11) resulta que el número

$$C = \frac{1}{m\Omega} \int_{\Omega} f dx \quad (m\Omega \neq 0)$$

se halla entre el valor mínimo de la función  $f(x^1)$  y el valor máximo de  $f(x^2)$ . En virtud de la conexión de  $\bar{\Omega}$  existe la curva continua, perteneciente a  $\bar{\Omega}$ ,

$$r(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

que une los puntos  $x^1$  y  $x^2$ , o sea, tal que

$$r(t_1) = x^1, \quad r(t_2) = x^2.$$

La función

$$F(t) \equiv f[r(t)] = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

<sup>1)</sup> El conjunto  $E$  se llama *conexo* si se puede unir dos de sus puntos con una curva continua perteneciente a  $E$ .



es continua sobre el segmento  $[t_1, t_2]$  (como superposición de las funciones continuas) y toma en sus extremos los valores

$$F(t_1) = f(x^1), \quad F(t_2) = f(x^2).$$

Pero entonces según el teorema del valor intermedio para la función  $F(t)$  de una variable existe tal  $t_0 \in [t_1, t_2]$  que en el punto  $x^0 = r(t_0)$  tiene lugar la igualdad

$$F(t_0) = f[r(t_0)] = f(x^0) = C$$

y hemos demostrado (10).

*Observación.* El número  $f(x^0)$  que figura en (10) se llama *valor medio* de la función continua  $f$  sobre la región  $\Omega$ .

### § 2.4. Integral como función del parámetro. Reducción de una integral múltiple a las reiteradas

Examinemos la integral

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad (1)$$

donde la función  $f(x, y)$  está dada sobre el rectángulo

$$\Delta = [a, b] \times [c, d], \quad (2)$$

o sea, sobre el conjunto de puntos  $(x, y)$ , donde

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \quad (a < b, \quad c < d).$$

Aquí la integración se realiza respecto a la variable  $y$ . Pero la función subintegral depende tanto de  $y$  como de  $x$ , por eso la integral (1) es la función de  $(F(x))$ .

Se dice que la integral (1) es la *función del parámetro  $x$* .

**TEOREMA 1.** Si la función  $f(x, y)$  es continua sobre un rectángulo  $\Delta$ , entonces la función  $F(x)$  es continua sobre el segmento  $[a, b]$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Tenemos

$$F(x+h) - F(x) = \int_c^d [f(x+h, y) - f(x, y)] dy \quad (x, x+h \in [a, b]).$$

Puesto que la función  $f$  es continua sobre el conjunto acotado cerrado  $\Delta$ , entonces ella es uniformemente continua sobre  $\Delta$ . Por consiguiente, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x+h, y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

para todos  $(x, y), (x+h, y) \in \Delta$ , sólo  $|h| < \delta$ . Pero entonces

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c} dy = \frac{\varepsilon}{d-c} \cdot (d-c) = \varepsilon$$

y el teorema queda demostrado.

**TEOREMA 2.** *Para las condiciones del teorema 1 existe la integral reiterada*

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (3)$$

En efecto, la función  $F(x)$ , continua sobre el segmento  $[a, b]$ , es integrable sobre éste.

**TEOREMA 3.** *Para las condiciones del teorema 1 son válidas las igualdades*

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (4)$$

El primer término de la cadena (4) es una integral múltiple de la función continua sobre el conjunto cerrado  $\Delta$  provisto de una frontera suave a trozos. Este término existe (véase a continuación el § 2.5). Las integrales reiteradas, que no son más que los términos segundo y tercero de la cadena de igualdades (4), asimismo existen según el teorema 2.

El teorema dado afirma la igualdad de estas tres integrales. De este modo el cálculo de la integral múltiple se reduce al cálculo de las integrales unidimensionales respecto a cada variable  $x$  e  $y$  por separado.

**DEMOSTRACION.** Dividamos los lados de  $\Delta$  en  $N$  partes iguales:

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_N = d \end{aligned}$$

y por los puntos de división tracemos unas rectas paralelas al eje  $y$  y al eje  $x$ , respectivamente. De este modo  $\Delta$  se partirá en rectángulos iguales  $\Delta_{kl}$ :

$$\Delta = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta_{kl},$$

$$\Delta_{kl} = \{x_k \leq x \leq x_{k+1}, y_l \leq y \leq y_{l+1}\}$$

y

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \int_c^d f(x, y) dy = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \sum_{l=0}^{N-1} \int_{y_l}^{y_{l+1}} f(x, y) dy = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \int_{y_l}^{y_{l+1}} f(x, y) dy = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{y_l}^{y_{l+1}} f(\xi_k, y) dy \Delta x_k = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k \Delta y_l \\ &\quad (x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}, y_l \leq \eta_l \leq y_{l+1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Primero hemos aplicado el teorema del valor medio a la integral  $\int_{x_k}^{x_{k+1}}$  respecto a  $x$  de la función  $\int_{y_l}^{y_{l+1}} f(x, y) dy$  y luego hemos aplicado el mismo teorema a la integral  $\int_{y_l}^{y_{l+1}} f(\xi_k, y) dy$ .

Así hemos demostrado que la integral reiterada del primer miembro de (5) se puede considerar como la suma integral de la integral múltiple  $\iint_{\Delta} f dx dy$ , suma correspondiente a la partición de  $\Delta$

en partes  $\Delta_{kl}$  en ciertos puntos  $(\xi_k, \eta_l) \in \Delta_{kl}$ .

Pasemos ahora al límite en la igualdad (5) cuando  $N \rightarrow \infty$ . En este caso el primer miembro de (5) es un número determinado (no dependiente de  $N$ ) y el segundo tiende, para  $N \rightarrow \infty$ , hacia una integral múltiple de  $f$  respecto a  $\Delta$  (si la integral múltiple existe, toda suma integral tiende hacia ella). Por eso

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_{\Delta} f dx dy$$

y queda demostrada la primera igualdad (4). La igualdad de la segunda integral reiterada con la integral múltiple se demuestra de un modo análogo.

Examinemos en el plano  $(x, y)$  la región  $\Omega$  acotada por las curvas suaves (fig. 34)

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

donde

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Supongamos que en la clausura  $\bar{\Omega}$  de la región  $\Omega$  se da una función continua arbitraria  $f(x, y)$ . Para calcular la integral múltiple

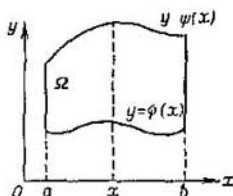


Fig. 34.

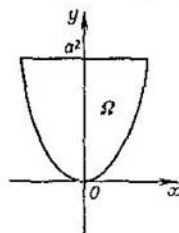


Fig. 35.

de  $f(x, y)$  respecto a la región  $\Omega$  (o bien lo que es lo mismo, respecto a  $\bar{\Omega}$ ) se aplica el método siguiente: primeramente se integra la función  $f(x, y)$  respecto a la variable  $y$  entre  $y = \varphi(x)$  e  $y = \psi(x)$ , considerando  $x$  constante, y luego el resultado se integra respecto a  $x$  sobre el segmento  $[a, b]$ :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (6)$$

En el caso cuando  $\Omega$  es un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas la igualdad (6) ha sido argumentada anteriormente (véase el teorema 3). Utilizando los mismos razonamientos se podría argumentar (6) también en el caso general.

**EJEMPLO 1.** Calcular el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (a, b > 0).$$

Llamamos elipse a un conjunto de puntos  $(x, y)$  para los cuales  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ , al igual que el conjunto de puntos  $(x, y)$  para los

cuales  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Nos permitiremos cierta libertad llamando elipsoide tanto al conjunto de los puntos  $(x, y, z)$  para los cuales  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  como también al conjunto de los puntos  $(x, y, z)$  que satisfacen la ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

RESOLUCIÓN. La región  $\Omega$  de que se trata está limitada inferiormente por la curva

$$y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a)$$

y superiormente por la curva

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a).$$

El área buscada es igual a

$$\begin{aligned} m\Omega &= \iint_{\Omega} dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \\ &= \frac{2b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \\ &= (x = a \operatorname{sen} \theta, dx = a \cos \theta d\theta) = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \cos \theta d\theta = \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \\ &= 2ab \left[ \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right] \Big|_0^{\pi/2} = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Calcular el área de la figura  $\Omega$  limitada por la parábola  $y = x^2$  y la recta  $y = a^2$  (fig. 35).

Tenemos

$$m\Omega = \iint_{\Omega} dx dy = 2 \int_0^{a^2} dy \int_0^{\sqrt{y}} dx = 2 \int_0^{a^2} \sqrt{y} dy = \frac{4}{3} a^3.$$

El método de calcular las integrales múltiples reduciéndolas a las unidimensionales se aplica en los espacios de mediciones cualesquiera. Mostremos esto, citando ejemplos.

EJEMPLO 3. Es necesario calcular el volumen  $\Omega$  del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (a, b, c > 0).$$

Para esto resolvamos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

De ello obtenemos dos funciones continuas

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Estas funciones están definidas sobre el conjunto  $\omega$  de los puntos  $(x, y)$  que satisfacen la inequación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

El volumen o la medida tridimensional  $\Omega$  es igual a la integral múltiple

$$V = m\Omega = \iiint_{\Omega} 1 \cdot dx \, dy \, dz.$$

Para calcularlo es necesario para cualquier punto  $(x, y) \in \omega$  integrar la función unidad (igual a 1) respecto a  $z$  entre

$$z = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \text{ y } z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

El resultado, dependiente de  $(x, y)$ , debe ser integrado luego respecto a todos los puntos  $(x, y) \in \omega$ ;

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz = \iint_{\omega} dx \, dy \int_{-c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}^{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dz = \\ &= 2c \iint_{\omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx \, dy = \\ &= 2c \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy. \end{aligned}$$

La última igualdad en esta cadena se deduce de la fórmula (6). Los cálculos ulteriores exigen solamente el dominio de la técnica de integración:

$$\begin{aligned} V &= \frac{8c}{b} \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} (a^2-x^2) - y^2} dy = \\ &= \left( y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2} \operatorname{sen} t \right) = \frac{8c}{b} \int_0^a dx \int_0^{\pi/2} \frac{b^2}{a^2} (a^2-x^2) \cos^2 t dt = \\ &= \frac{8bc}{a^3} \frac{\pi}{4} \int_0^a (a^2-x^2) dx; \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Luego

$$V = \frac{2\pi bc}{a^3} \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi abc.$$

**EJEMPLO 4.** Hallar el volumen de una parte del paraboloido de revolución  $\Omega: x^2 + y^2 \leq z \leq a^2$  (fig. 36). Al igual que en el ejemplo 3 tenemos

$$m\Omega = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{\omega} dx dy \int_{x^2+y^2}^{a^2} dz,$$

donde  $\omega$  es el conjunto de los puntos  $(x, y)$  que satisfacen la inequación  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , o sea, es un círculo de radio  $a$ . Luego tenemos

$$\begin{aligned} m\Omega &= \iint_{\omega} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2 - x^2 - y^2) dy = \\ &= 4 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2 - x^2 - y^2) dy = \frac{8}{3} \int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2} dx = (x = a \operatorname{sen} t) = \\ &= \frac{8a^4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{8a^4}{3} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \\ &= \frac{\pi a^4}{3} + \frac{2a^4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^2 2t dt = \\ &= \frac{\pi a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 4t) dt = \frac{\pi a^4}{3} + \frac{\pi a^4}{6} = \frac{\pi a^4}{2}. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 5.** Hallar el volumen del cuerpo  $\Omega$  limitado por las superficies de los paraboloides de revolución  $x^2 + y^2 = z$ ,  $z = 2(x^2 + y^2)$  y por las superficies cilíndricas  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$  (fig. 37).

Nuestro cuerpo es un «zapatillo parabólico» que corta las superficies cilíndricas  $y = \sqrt{x}$  e  $y = x^2$  entre los paraboloides de revolución. El zapatillo está limitado inferiormente por un trozo de la

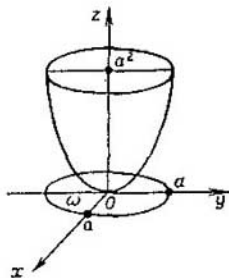


Fig. 36.

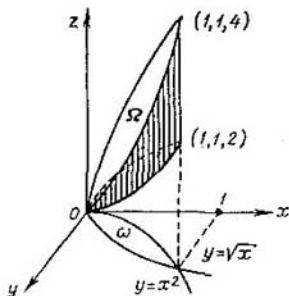


Fig. 37.

superficie  $z = x^2 + y^2$  y superiormente por un trozo de la superficie del paraboloides de revolución  $z = 2(x^2 + y^2)$ . La proyección de este cuerpo  $\Omega$  sobre el plano  $(x, y)$  proporciona el conjunto  $\omega$  compuesto de los puntos  $(x, y)$  cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ .

Por eso

$$\begin{aligned}
 m\Omega &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{\omega} dx dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \\
 &= \iint_{\omega} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy = \\
 &= \int_0^1 \left[ x^2(\sqrt{x} - x^2) + \frac{1}{3}(x^{3/2} - x^6) \right] dx = \\
 &= \int_0^1 \left( x^{5/2} - x^4 + \frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} + \frac{2}{15} - \frac{1}{21} = \frac{6}{35}.
 \end{aligned}$$



Volvamos de nuevo a la integral (1) que depende del parámetro.

**TEOREMA 4.** Si la función  $f(x, y)$  es continua y tiene una derivada continua  $f'_x$  sobre el rectángulo

$$\Delta = [a, b] \times [c, d],$$

entonces la función

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

tiene una derivada sobre el segmento  $[a, b]$ , además

$$F'(x) = \int_c^d f'_x(x, y) dy. \quad (7)$$

**DEMOSTRACION.** Debemos demostrar que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \int_c^d f'_x(x, y) dy. \quad (8)$$

Aplicando la igualdad (fórmula de Newton — Leibniz)

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_0^h \varphi'(x+u) du,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - \int_c^d f'_x(x, y) dy \right| = \left| \int_c^d \frac{\Delta x f(x, y)}{\Delta x} dy - \int_c^d f'_x(x, y) dy \right| = \\ &= \left| \int_c^d \left( \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} f'_x(x+u, y) du \right) dy - \int_c^d f'_x(x, y) dy \right| = \\ &= \left| \int_c^d \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} [f'_x(x+u, y) - f'_x(x, y)] du dy \right|. \end{aligned}$$

Puesto que  $f'_x(x, y)$  es continua sobre  $\Delta$ , ella será también uniformemente continua sobre  $\Delta$ , por eso

$$|f'_x(x, y) - f'_x(x+u, y)| < \varepsilon$$

tan pronto como  $|u| \leq |\Delta x| < \delta$  para todos puntos  $(x, y) \in \Delta$ . Sobre esta base

$$\Delta \leq \int_c^d \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_0^{\Delta x} \varepsilon du \right| dy = \varepsilon (d-c)$$

cuando  $|\Delta x| < \delta$ . Ahora bien, la igualdad (8), y con ella también (7), queda demostrada.

Examinemos ahora una integral más general que (1)

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy, \quad (9)$$

donde  $\varphi(x)$  y  $\psi(x)$  son las funciones continuas sobre el segmento  $[a, b]$  que satisfacen las desigualdades

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

y la función  $f(x, y)$  es continua para todos los puntos  $(x, y)$  que satisfacen las desigualdades

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x).$$

Mostremos que para las condiciones indicadas la función  $F(x)$  es continua sobre el segmento  $[a, b]$ .

En efecto, sustituyamos en la integral (9) la variable de integración  $y$  por la variable  $u$  con ayuda de la igualdad

$$y = \varphi(x) + u[\psi(x) - \varphi(x)] \quad (a \leq x \leq b). \quad (10)$$

Cuando  $u = 0$   $y = \varphi(x)$ , cuando  $u = 1$   $y = \psi(x)$ ,  $dy = [\psi(x) - \varphi(x)] du$  ( $x$  está fijo y lo consideramos constante al sustituir la variable). Por consiguiente,

$$F(x) = [\psi(x) - \varphi(x)] \int_0^1 f(x, \varphi(x) + u[\psi(x) - \varphi(x)]) du. \quad (11)$$

Aquí el factor  $\psi(x) - \varphi(x)$  es la función continua de  $x \in [a, b]$  y bajo el signo integral está la función continua del punto  $(x, u)$  perteneciente al rectángulo  $[a, b] \times [0, 1]$ . Por eso la misma integral es la función continua sobre el segmento  $[a, b]$  según el teorema 4. La función  $F(x)$  será continua sobre el segmento  $[a, b]$  como producto de dos funciones continuas.

**TEOREMA 5.** Si la función  $f(x, y)$  es continua con su derivada parcial  $f'_x$  sobre la región

$$\Omega = \{a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

y las funciones  $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$  son continuas sobre el segmento  $[a, b]$ , entonces la función (9) tiene la derivada que se calcula por la fórmula

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x, y) dy + \psi'(x) f(x, \psi(x)) - \varphi'(x) f(x, \varphi(x)). \quad (12)$$

DEMOSTRACION. Introduzcamos la función auxiliar

$$I(x, u, v) = \int_u^v f_1(x, y) dy$$

dada sobre el conjunto  $\{a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq u \leq v \leq \psi(x)\}$ . Conforme al teorema 4

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \int_u^v f'_x(x, y) dy$$

Utilizando la regla de derivación de una integral con el límite variable de integración, tenemos

$$\frac{\partial I}{\partial v} = f(x, v), \quad \frac{\partial I}{\partial u} = -f(x, u).$$

Luego  $F(x) = I[x, \varphi(x), \psi(x)]$ , por eso según la regla de derivación de una función compuesta obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial I[x, \varphi(x), \psi(x)]}{\partial x} + \frac{\partial I[\dots]}{\partial u} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial I[\dots]}{\partial v} \frac{d\psi}{dx} = \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f'_x(x, y) dy - f(x, \varphi(x)) \varphi'(x) + f(x, \psi(x)) \psi'(x) \end{aligned}$$

que es lo que se necesitaba demostrar.

EJEMPLO 6. Hallar la derivada de la función

$$F(x) = \int_{x^2}^x \operatorname{sen}(x^2 + y^2) dy.$$

Con arreglo a (12) obtenemos

$$F'(x) = \int_{x^2}^x \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x dy + 1 \operatorname{sen}(x^2 + y^2) - 2x \operatorname{sen}(x^2 + x^4).$$

## § 2.5. Demostración de la existencia de la integral de una función continua

Asignemos sobre un conjunto acotado cerrado  $\bar{\Omega}$  del espacio  $R_n$  una función continua  $f(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Supongamos que  $m\Omega > 0$ . Realicemos dos particiones  $\rho$  y  $\rho'$  de la región  $\Omega$  en partes medibles que nunca se intersequen, en cada caso, a no ser en sus fronteras:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k, \quad \Omega = \bigcup_{l=1}^M \Omega'_l$$

y determinemos las sumas integrales correspondientes

$$S_\rho = \sum_{k=1}^N f(\xi^k) m\Omega_k \quad (\xi^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k) \in \Omega_k),$$

$$S_{\rho'} = \sum_{l=1}^M f(\eta^l) m\Omega_l \quad (\eta^l = (\eta_1^l, \dots, \eta_n^l) \in \Omega_l).$$

Designemos la intersección de  $\Omega_k$  y  $\Omega_l$  por

$$\Omega_{kl} = \Omega_k \cap \Omega_l.$$

Es evidente que

$$S_\rho = \sum_{k=1}^N f(\xi^k) \sum_{l=1}^M m\Omega_{kl} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M f(\xi^k) m\Omega_{kl},$$

$$S_{\rho'} = \sum_{l=1}^M f(\eta^l) \sum_{k=1}^N m\Omega_{kl} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M f(\eta^l) m\Omega_{kl}.$$

Por eso

$$|S_\rho - S_{\rho'}| \leq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M |f(\xi^k) - f(\eta^l)| m\Omega_{kl} \leq \sum' |f(\xi^k) - f(\eta^l)| m\Omega_{kl}$$

donde la suma  $\sum'$  concierne a los conjuntos no vacíos  $\Omega_{kl}$ , puesto que la medida de un conjunto vacío es también igual a cero.

Por cuanto la función  $f(x)$  es continua sobre el conjunto acotado cerrado  $\bar{\Omega}$ , ella es uniformemente continua sobre éste, por eso para cualquier  $\varepsilon > 0$  se puede indicar tal  $\delta > 0$  que

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2m\Omega}$$

para todos los  $x', x'' \in \bar{\Omega}$  que satisfagan las desigualdades

$$|x' - x''| < \delta.$$

Supongamos que las particiones  $\rho$  y  $\rho'$  son tales que los diámetros de sus conjuntos parciales sean menores que  $\delta$ :

$$d(\Omega_k) < \delta, \quad d(\Omega_l) < \delta. \quad (1)$$

Pero entonces sobre un conjunto no vacío  $\Omega_{kl}$

$$|f(\xi^k) - f(\eta^l)| = |f(\xi^k) - f(\lambda^{kl}) + f(\lambda^{kl}) - f(\eta^l)| \leq$$

$$\leq |f(\xi^k) - f(\lambda^{kl})| + |f(\lambda^{kl}) - f(\eta^l)| < \frac{\varepsilon}{2m\Omega} + \frac{\varepsilon}{2m\Omega} = \frac{\varepsilon}{m\Omega},$$

donde

$$\lambda^{kl} = (\lambda_1^{kl}, \dots, \lambda_n^{kl})$$

es cierto punto perteneciente a  $\Omega_{kl}$ . Pero entonces al cumplirse la condición (1)

$$|S_\rho - S_{\rho'}| < \sum' \frac{\varepsilon}{m\Omega} m\Omega_{kl} = \frac{\varepsilon}{m\Omega} \sum' m\Omega_{kl} = \frac{\varepsilon}{m\Omega} \cdot m\Omega = \varepsilon$$

lo cual, como se puede demostrar, lleva la existencia de la integral de  $f$  respecto a  $\bar{\Omega}$ .

Si  $m\Omega = 0$ , la integral de  $f$  sobre  $\Omega$  existe, evidentemente, y es igual a cero.

## § 2.6. Cambio de variables. Caso elemental

Mostremos cómo se modifica la integral

$$\iint_{\Omega'} f(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 \quad (1)$$

si en ella se efectúa la sustitución de las variables

$$\begin{aligned} x'_1 &= ax_1 + bx_2, \\ x'_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \quad \left( D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right). \quad (2)$$

Suponemos que  $\Omega'$  es la región con una frontera continua suave a trozos  $\Gamma'$  (fig. 38).

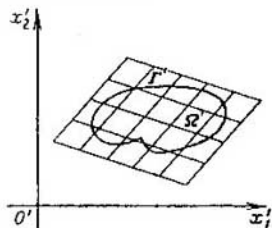


Fig. 38.

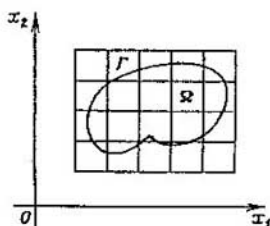


Fig. 39.

La transformación inversa a (2) aplica  $\Omega'$  sobre cierta región  $\Omega$  del plano  $(x_1, x_2)$  con la frontera suave a trozos  $\Gamma$  (fig. 39). De esta manera sobre  $\Omega$  queda definida la función

$$F(x_1, x_2) = f(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Introduzcamos en el plano  $(x_1, x_2)$  una cuadrícula cuyos cuadrados  $\Delta$  tienen lados de longitud  $h$ . Ella se aplica con ayuda de las ecuaciones (2), hablando en general, en una red oblicuángula que divide el plano  $(x'_1, x'_2)$  en paralelogramos iguales  $\Delta'$  (imágenes de  $\Delta$ ) que tienen el área (las explicaciones siguen a continuación) igual a

$$|\Delta'| = |D| \cdot |\Delta| = h^2 |D|. \quad (3)$$

De este modo quedan definidas las particiones  $\rho$  y  $\rho'$  de las regiones  $\Omega$  y  $\Omega'$ , respectivamente.

Explicuemos la igualdad (3) con más detalles. Un cuadrado arbitrario  $\Delta$  se define por los vectores  $(h, 0)$  y  $(0, h)$  que, como supondremos, salen del vértice inferior izquierdo de  $\Delta$ . El primer vector (segmento dirigido) coincide con la base de  $\Delta$  y el segundo, con el lado vertical de  $\Delta$ . La transformación (2) aplica estos vectores en los

vectores  $(ah, ch)$  y  $(bh, dh)$ , respectivamente, que son los lados del paralelogramo  $\Delta'$ . El área de  $\Delta'$ , como sabemos<sup>1)</sup>, es igual a

$$|\Delta'| = \left| \begin{vmatrix} ah & ch \\ bh & dh \end{vmatrix} \right| = h^2 \cdot |D|.$$

Tenemos

$$S_p(f) = \sum f(x'_1, x'_2) |\Delta'| = \sum F(x_1, x_2) |D| \cdot |\Delta| = S_p(|D|F),$$

$$((x_1, x_2) \in \Delta, (x'_1, x'_2) \in \Delta'). \quad (4)$$

Consideramos que la segunda suma de esta cadena concierne solamente a los cuadrados completos  $\Delta \subset \Omega$  y, respectivamente, la primera, a los paralelogramos completos correspondientes  $\Delta'$  (véase el § 2.1, observación 4). Pasando al límite en (4) para  $h \rightarrow 0$ , obtenemos la fórmula

$$\iint_{\Omega'} f(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 = \iint_{\Omega} F(x_1, x_2) |D| dx_1 dx_2 =$$

$$= |D| \iint_{\Omega} F(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (5)$$

En este razonamiento la función  $f$  se puede considerar que es continua sobre  $\overline{\Omega}'$  y entonces la función  $F$  será continua sobre  $\overline{\Omega}$ . Pero este resultado sigue siendo justo en el caso en que  $f$  está acotada sobre  $\Omega'$  y es continua por doquier sobre  $\Omega'$ , a excepción de algunos puntos o algunas líneas suaves a trozos.

En el párrafo siguiente se da la fórmula general de sustitución de las variables en las integrales múltiples.

## § 2.7. Cambio de variables. Caso general

Limitémonos primero al caso bidimensional. Asignemos dos funciones

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \varphi(x_1, x_2), \\ x'_2 &= \psi(x_1, x_2), \end{aligned} \right\} (x_1, x_2) \in \Omega \quad (1)$$

que tienen las derivadas continuas en la clausura  $\overline{\Omega}$  de la región acotada con una frontera suave a trozos. Suponemos que la transformación (1) aplica biunívocamente  $\Omega$  sobre cierta región  $\Omega'$  con una frontera suave a trozos.

<sup>1)</sup> Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 12.

Asignemos una función  $f(x')$  que sea continua sobre  $\bar{\Omega}'$  o bien esté acotada sobre  $\Omega'$  y sea continua por doquier, salvo algunos puntos y algunas líneas suaves a trozos.

A estas condiciones la fórmula (5) del § 2.6, relativa a la sustitución de las variables en la integral múltiple se conserva, pero el papel del determinante  $D$  lo desempeña desde este momento el determinante de Jacobi<sup>1)</sup>

$$D(x) = \frac{D(x'_1, x'_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0:$$

$$\iint_{\Omega'} f(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 = \iint_{\Omega} f[\varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2)] |D(x)| dx_1 dx_2. \quad (2)$$

El determinante  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  del cual se trató en el § 2.6 también puede considerarse como jacobiano del sistema lineal

$$x'_1 = ax_1 + bx_2, \quad x'_2 = cx_1 + dx_2.$$

En el caso tridimensional la fórmula de sustitución de las variables tiene el aspecto siguiente:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega'} f(x'_1, x'_2, x'_3) dx'_1 dx'_2 dx'_3 &= \\ &= \iiint_{\Omega} f[\varphi(x_1, x_2, x_3), \psi(x_1, x_2, x_3), \\ &\quad \chi(x_1, x_2, x_3)] |D(x)| dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (3)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \varphi(x_1, x_2, x_3), \\ x'_2 &= \psi(x_1, x_2, x_3), \\ x'_3 &= \chi(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \right\} (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad (4)$$

son las funciones continuamente derivables en la clausura  $\bar{\Omega}$  de la región  $\Omega$  con la frontera suave a trozos y

$$D(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial x_2} & \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

<sup>1)</sup> K. G. J. Jacobi (1804—1851), gran matemático y mecánico alemán.

En este caso se supone que la región  $\Omega$  se aplica biunívocamente sobre  $\Omega'$  con ayuda de (4). También se supone, como antes, que  $f(x')$  es continua sobre  $\bar{\Omega}'$  o bien está acotada sobre  $\Omega'$  y es continua sobre  $\bar{\Omega}'$ , a excepción de un número finito de puntos, de líneas suaves a trozos y de superficies suaves a trozos.

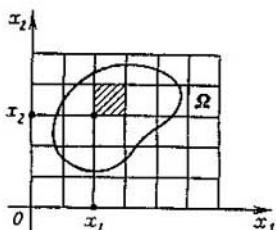


Fig. 40.

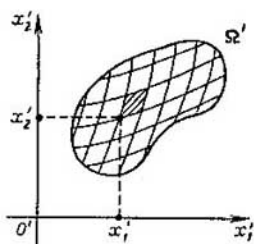


Fig. 41.

En las figs. 40 y 41 se muestran las regiones  $\Omega$  y  $\Omega'$  en los planos  $x_1, x_2$  y  $x_1', x_2'$ , respectivamente. La cuadrícula que divide el plano  $x_1, x_2$  en cuadrados  $\Delta$  con un lado de longitud  $h$  se transforma en red curvilínea que divide  $\Omega'$  en paralelogramos curvilíneos  $\Delta'$ .

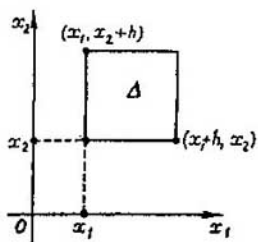


Fig. 42.

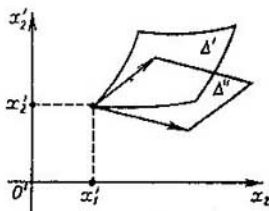


Fig. 43.

Examinemos un cuadrado arbitrario  $\Delta \subset \Omega$  (fig. 42). Mediante las transformaciones (1) este cuadrado se aplica en paralelogramo curvilíneo  $\Delta'$  (fig. 43). Del vértice de  $\Delta'$  con las coordenadas  $(x_1', x_2')$  salen vectores tangentes a los «lados» de  $\Delta'$ :

$$\left( h \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, h \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right), \quad \left( h \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, h \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)$$



(la pendiente de la tangente a la curva  $\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \varphi(x_1, x_2), \\ x'_2 = \psi(x_1, x_2) \end{array} \right.$  para  $x_2$  fijo es igual a  $\frac{\partial \psi}{\partial x_1} / \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ ). Estos vectores sustituyen los «lados» respectivos con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior (¡cuando  $h \rightarrow 0$ !). El paralelogramo  $\Delta''$  construido sobre estos vectores tiene un área que se calcula exactamente así:

$$|\Delta''| = h^2 \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{array} \right| = h^2 \left| \frac{D(x'_1, x'_2)}{D(x_1, x_2)} \right| = h^2 |D(x)|.$$

Se puede mostrar exactamente que el área (medida bidimensional) del paralelogramo curvilíneo  $\Delta'$  tiene la forma

$$|\Delta'| = (|D(x)| + \varepsilon_\Delta) h^2,$$

donde la magnitud  $\varepsilon_\Delta$  tiende a cero cuando  $h \rightarrow 0$  y, además, uniformemente para todos los cuadraditos  $\Delta$ . Para cada cuadradito  $\Delta$  la magnitud  $\varepsilon_\Delta$  depende de  $\Delta$  y tiende a cero cuando  $h \rightarrow 0$ . La uniformidad de la tendencia se manifiesta en que para todo  $\varepsilon > 0$  se puede indicar tal  $\delta > 0$  que

$$|\varepsilon_\Delta| < \varepsilon, \quad \forall \Delta \text{ cuando } h < \delta.$$

Examinemos la suma integral de la función  $f(x')$  que corresponde a la partición de  $\Omega'$ , como se muestra en la fig. 41. En este caso tomamos la suma de  $\Delta'$  «completos», o sea, de tales que correspondan a los cuadrados  $\Delta$  pertenecientes por completo a  $\Omega$  ( $\Delta \subset \Omega$ ). Entonces

$$\begin{aligned} \sum' f(x') |\Delta'| &= \sum' f[\varphi(x), \psi(x)] [ |D(x)| + \varepsilon_\Delta ] h^2 = \\ &= \sum' f[\varphi(x), \psi(x)] |D(x)| h^2 + r_n \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} f[\varphi(x), \psi(x)] |D(x)| dx. \end{aligned}$$

Aquí  $x'$  es un punto arbitrario perteneciente a  $\Delta'$  ( $x' \in \Delta'$ ) y  $x$  es el punto que, con ayuda de (1), le corresponde y pertenece, evidentemente, a  $\Delta$  ( $x \in \Delta$ ). El signo  $\sum'$  significa que la suma concierne a los cuadrados completos  $\Delta$  ( $\Delta \subset \Omega$ ). Luego

$$|r_n| = \left| \sum' f[\varphi(x), \psi(x)] \varepsilon_\Delta h^2 \right| \leq M \varepsilon \sum' h^2 \leq M \cdot \varepsilon m \Omega$$

$$(M \geq |f[\varphi(x), \psi(x)]|),$$

de donde se ve que

$$r_n \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

De esta manera la fórmula (2) queda demostrada.

## § 2.8. Sistema polar de coordenadas en el plano

El rayo que sale del punto dado  $O$  se llama *eje polar* y el punto  $O$  se llama *polo* del sistema polar de coordenadas (fig. 44). El punto arbitrario  $A$  del plano tiene las coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , donde

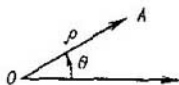


Fig. 44.

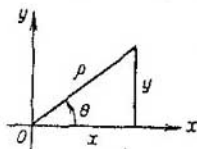


Fig. 45.

$\rho$  es la distancia desde  $A$  hasta  $O$  y  $\theta$  es el ángulo entre el vector (segmento dirigido)  $\vec{OA}$  y el eje polar, ángulo que se lee a partir de este último en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Introduzcamos el sistema de coordenadas rectangulares  $x, y$  cuyo eje positivo  $x$  coincide con el eje polar (fig. 45).

El sistema de ecuaciones

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad (1)$$

realiza la transformación de las coordenadas polares en cartesianas (rectangulares). Los segundos miembros de las igualdades (1) son las funciones continuamente derivables con el jacobiano

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \geq 0. \quad (2)$$

La ecuación

$$\rho = \psi(\theta) \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2),$$

donde  $\psi(\theta)$  es la función continua sobre el segmento  $[\theta_1, \theta_2]$ , determina en las coordenadas polares la curva  $\Gamma$ , o sea, el lugar geométrico de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen esta ecuación.

Supongamos que  $0 < \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ . Entonces la curva  $\Gamma$  es tal que todo rayo que sale del polo  $O$  bajo el ángulo  $\theta$  al eje  $x$ , donde  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ , corta  $\Gamma$  en un solo punto (fig. 46).

Asignemos en el plano  $(x, y)$  la región  $\Omega$  limitada por los rayos  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$  y por la curva  $\Gamma$ . En las condiciones mencionadas todo punto  $(x, y) \in \Omega$  corresponde, con ayuda de las ecuaciones (1), sólo a un par  $(\rho, \theta)$ , donde  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ . Supongamos ahora que en la clausura  $\bar{\Omega}$  de nuestra región  $\Omega$  viene dada la función continua  $f(x, y)$  de  $(x, y)$  o bien ella puede estar acotada sobre  $\Omega$  y ser conti-

na por doquier, salvo algunos puntos y algunas líneas suaves. Entonces tiene lugar la igualdad

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{\psi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) \rho d\rho. \quad (3)$$

Con arreglo a la fórmula (2) del § 2.7 hemos sustituido  $x, y$  por  $\rho, \theta$  mediante las igualdades (1) y hemos introducido como factor el

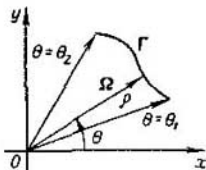


Fig. 46.

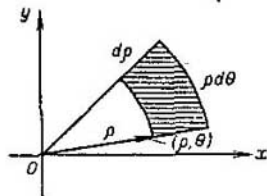


Fig. 47.

valor absoluto del jacobiano  $|\rho| = \rho$ . Para la región  $\Omega'$  de pares  $(\rho, \theta)$ , correspondiente a la región inicial  $\Omega$ , se han determinado ya los límites: primero integramos respecto a  $\rho$  entre 0 y  $\psi(\theta)$  y luego respecto a  $\theta$  entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

## EJEMPLO 1.

$$\begin{aligned} \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \exp(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \exp \rho^2 \rho d\rho = \\ &= \pi \int_0^R \exp \rho^2 d(\rho^2) = (u = \rho^2) = \pi \int_0^{R^2} e^u du = \pi [e^{R^2} - 1]. \end{aligned}$$

Hemos seguido la fórmula (3). Hay que tener en cuenta que la región que se define en las coordenadas cartesianas por la desigualdad  $x^2 + y^2 < R^2$ , en las coordenadas polares se define por la desigualdad  $\rho < R$ .

La fórmula (3) se puede obtener partiendo de las consideraciones naturales sin recurrir a la fórmula general (2) del § 2.7.

Vamos a partir el plano  $x, y$  en figuras elementales por unas circunferencias concéntricas cercanas y por unos rayos que salen del polo del sistema polar (fig. 47). El área de una figura elemental arbitraria (cerca del punto  $(\rho, \theta)$ ) o, como se dice, el elemento del área en las coordenadas polares vale con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior  $\Delta s \sim \rho d\rho d\theta$  (la figura rayada en la fig. 47 se puede tomar aproximadamente por rectángulo de lados  $d\rho$

y  $\rho d\theta$ ). Por eso, si sumamos estos elementos, obtenemos

$$\lim_{\Delta\rho, \Delta\theta \rightarrow 0} \sum F_j \rho_j \Delta\rho_j \Delta\theta_j = \iint_{\Omega} F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta,$$

donde

$$F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta).$$

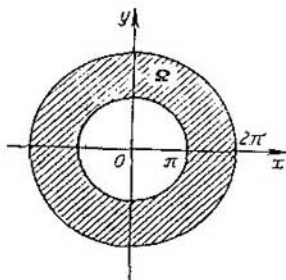


Fig. 48.

EJEMPLO 2. Calcular la integral

$$I = \iint_{\pi^2 < x^2 + y^2 \leq 4\pi^2} \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Pasando a las coordenadas polares (fig. 48), obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} \rho \cdot \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \rho \operatorname{sen} \rho d\rho = (\rho = u, \operatorname{sen} \rho d\rho = du) = \\ &= 2\pi \left[ -\rho \cos \rho \Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos \rho d\rho \right] = -6\pi^2 + 2\pi \operatorname{sen} \rho \Big|_{\pi}^{2\pi} = -6\pi^2. \end{aligned}$$

## § 2.9. Sistema polar de coordenadas en el espacio

El sistema de ecuaciones

$$x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = \rho \operatorname{sen} \theta \quad (1)$$

realiza el paso a partir de las *coordenadas polares (esféricas)* en el espacio a las cartesianas (fig. 49). Aquí  $\rho$  es la distancia entre el punto  $P(x, y, z)$  y el origen de coordenadas (polo del sistema polar),  $\theta$  es

el ángulo entre el radio vector  $\rho$  del punto  $P$  y su proyección sobre el plano  $(x, y)$  y  $\varphi$  es el ángulo entre la proyección mencionada y el sentido positivo del eje  $x$ . Se lee en el sentido en que es necesario girar alrededor del eje  $z$  el eje  $x$  para llegar al eje  $y$  por la vía más corta. Se puede considerar que  $0 \leq \varphi < 2\pi$  y  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Las funciones del segundo miembro en (1) son continuamente derivables con el jacobiano

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi - \rho \cos \theta \sin \varphi - \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi - \rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta & 0 & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho^2 \cos \theta. \quad (2)$$

Sea  $\sigma$  una superficie que se describe en las coordenadas polares por la función  $\rho = \psi(\theta, \varphi)$   $((\theta, \varphi) \in \omega)$  continua en la clausura

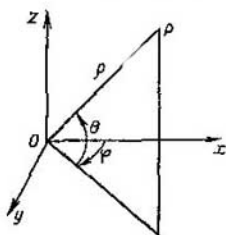


Fig. 49.

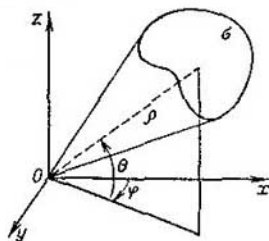


Fig. 50.

de la región  $\omega$  y sea  $\Omega$  una región tridimensional del espacio  $(x, y, z)$  que está acotada por la superficie  $\sigma$  y por la superficie cónica cuyos rayos salen del punto nulo y se apoyan en el borde de  $\sigma$  (fig. 50). Entonces para la función  $f(x, y, z)$ , continua sobre  $\bar{\Omega}$ , tiene lugar la igualdad

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\omega} d\theta d\varphi \int_0^{\psi(\theta, \varphi)} F(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \cos \theta d\rho, \quad (3)$$

donde  $F(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta)$ . Hemos hecho uso de la fórmula general (3) del § 2.7, teniendo en cuenta las desigualdades (1) y (2). En el caso dado  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ , por eso  $\rho^2 \cos \theta \geq 0$ .

Para obtener de un modo evidente un elemento del volumen en las coordenadas polares debemos dividir el espacio en pequeñas partes mediante las superficies esféricas concéntricas que tienen como centro el polo polar (punto  $\rho = 0$ ), mediante los planos que

pasan por el eje  $z$  y mediante las superficies cónicas que se definen por los ángulos  $\theta$  y  $\theta + d\theta$  (fig. 51) y tienen como eje el eje  $z$ . Es fácil ver que las pequeñas células obtenidas en este caso pueden considerarse, aproximadamente, como paralelepípedos rectangulares

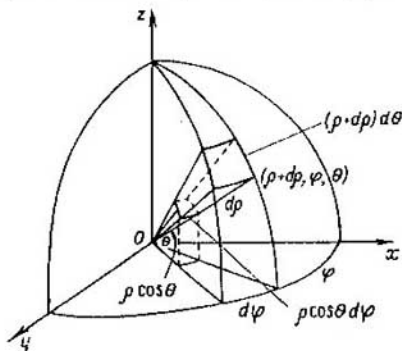


Fig. 51.

con aristas  $\rho d\theta$ ,  $d\rho$ ,  $\rho \cos \theta d\varphi$ , por eso su volumen, con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior, es

$$\Delta v = \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta d\varphi,$$

donde  $(\rho, \theta, \varphi)$  es uno de los puntos de la célula.

EJEMPLO. Calcular la integral triple

$$I = \iiint_{\Omega} xyz \, dx \, dy \, dz,$$

donde  $\Omega$  es la región de puntos con coordenadas positivas, limitada por las superficies  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Introduzcamos las coordenadas polares (esféricas) por medio de las fórmulas (1), entonces para la región  $\Omega$ :  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Con arreglo a la fórmula (3) tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^5 \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \, d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} -\cos \varphi \, d\cos \varphi \int_0^{\pi/2} -\cos^3 \theta \, d\cos \theta \int_0^1 \rho^5 \, d\rho = \\ &= -\frac{\cos^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} \left( -\frac{\cos^4 \theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

## § 2.10. Coordenadas cilíndricas

Asignemos en el espacio tridimensional el sistema rectangular de coordenadas  $x, y, z$ . Un punto arbitrario  $A = (x, y, z)$  del espacio se define asimismo por una triplete de números  $(\rho, \theta, z)$ , donde  $z$  es su  $z$ -coordenada y  $(\rho, \theta)$  son las coordenadas polares del punto

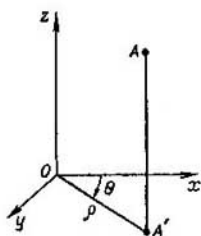


Fig. 52.

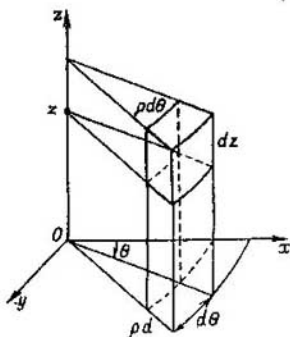


Fig. 53.

$(x, y)$  del plano  $xOy$ , suponiendo que el eje polar coincide con el sentido positivo del eje  $x$  (fig. 52). Es evidente que

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \operatorname{sen} \theta, \\ z &= z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

El jacobiano de esta transformación

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \geq 0. \quad (2)$$

En este caso la fórmula de cambio de las variables se escribirá así:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, z) \rho d\rho d\theta dz.$$

Para obtener, de un modo evidente, un elemento del volumen en las coordenadas cilíndricas tendremos que partir el espacio mediante las superficies circulares cilíndricas concéntricas que tienen como eje el eje  $z$ , mediante los planos que pasan por el eje  $z$  y mediante otros que son paralelos al plano  $xOy$  (fig. 53). El elemento del espacio, limi-

tado por estas superficies con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior, no es más que un paralelepípedo rectangular con aristas  $d\rho$ ,  $dz$ ,  $\rho d\theta$ . Su volumen es igual a  $\rho d\rho d\theta dz$ .

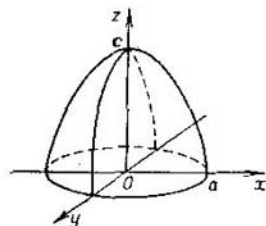


Fig. 54.

**EJEMPLO.** Hallar el volumen del cuerpo  $\Omega$  limitado por las superficies

$$\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^2 + \frac{z}{c} = 1, \quad z=0, \quad a, c > 0 \quad (\text{fig. 54}).$$

Como sabemos,

$$V = m\Omega = \iiint_{\Omega} dx dy dz.$$

Introduciendo las coordenadas cilíndricas (1), obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega'} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{c\left[1-\frac{\rho^2}{a^2}\right]} \rho d\rho d\theta dz = \\ &= 2\pi c \int_0^a \rho \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) d\rho = \frac{2}{3} \pi a^2 c. \end{aligned}$$

### § 2.11. Area de una superficie

Asignemos en el espacio tridimensional  $R = R_3$ , donde está definido el sistema de coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$ , la superficie  $S$  descrita por la ecuación

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{G}). \quad (1)$$



Supongamos que  $G$  es una región limitada abierta del plano  $x, y$  con una frontera suave a trozos y la función  $f$  tiene las derivadas parciales continuas

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2)$$

sobre  $\bar{G}$ . Cortemos  $\bar{G}$  en partes que no se intersequen dos a dos, a no ser en sus fronteras (suaves a trozos),

$$\bar{G} = \sum_{j=1}^N G_j.$$

Sea  $(x_j, y_j)$  un punto arbitrario de  $G_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Le corresponde el punto  $P_j \in S$  con las coordenadas  $(x_j, y_j, f_j)$ , donde  $f_j = f(x_j, y_j)$ . Tracemos por el punto  $P_j$  un plano  $L_j$  tangente a  $S$ . Construyamos en la frontera de  $G_j$ , como en la directriz, la superficie cilíndrica  $\Gamma_j$  con una generatriz paralela al eje  $z$ . Esta superficie cortará en el plano tangente  $L_j$  un trozo  $l_j$ . Designemos el área de este trozo por  $|l_j|$ .

Por definición se llama *área de la superficie*  $S'$  el límite

$$|S| = \lim_{\max d(G_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N |l_j|.$$

El coseno del ángulo agudo de la normal  $n_j$  a  $S$  en el punto  $P_j$  con el eje  $z$  es igual a

$$\cos(n_j, z) = 1/\sqrt{1+p_j^2+q_j^2},$$

donde la raíz cuadrada se ha tomado con el signo  $+$  y  $p_j, q_j$  designan los resultados de la sustitución de los valores  $x_j, y_j$  en  $p, q$ . Pues, la ecuación del plano tangente tiene la forma<sup>1)</sup>

$$(Z - z_j) - p_j(X - x_j) - q_j(Y - y_j) = 0$$

y, por consiguiente, la normal a éste se define por el vector  $(-p_j, -q_j, 1)$ . Es evidente que  $G_j$  es la proyección  $l_j$  sobre el plano  $x, y$  y, por lo tanto, el área (medida bidimensional) de  $G_j$  es igual a

$$|G_j| = |l_j| \cos(n_j, z),$$

$$|l_j| = |G_j| \sqrt{1+p_j^2+q_j^2}$$

y

$$\begin{aligned} |S| &= \lim_{\max d(G_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N |l_j| = \lim_{\max d(G_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \sqrt{1+p_j^2+q_j^2} |G_j| = \\ &= \iint_G \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», §§ 8.7. 8.8.

puesto que la función  $\sqrt{1+p^2+q^2}$  es continua sobre  $\bar{G}$  y, por consiguiente, es integrable.

Hemos demostrado que el área de la superficie  $S$  descrita por la ecuación (1) se expresa por la fórmula

$$|S| = \iint_G \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2} dx dy. \quad (3)$$

Desde luego, si la superficie  $S$  está dada por la función

$$x = F(y, z) \quad ((y, z) \in H), \quad (1')$$

que expresa explícitamente la dependencia de  $x$  respecto a  $y, z$ , entonces

$$|S| = \iint_H \sqrt{1+(F'_y)^2+(F'_z)^2} dy dz \quad (3')$$

y si  $S$  se asigna por la función

$$y = \Phi(x, z) \quad ((x, z) \in \Lambda), \quad (1'')$$

entonces

$$|S| = \iint_\Lambda \sqrt{1+(\Phi'_x)^2+(\Phi'_z)^2} dx dz. \quad (3'')$$

**EJEMPLO 1.** Calcular el área de una parte de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , encerrada dentro del cilindro circular  $x^2 + y^2 = b^2$  ( $b \leq a$ ).

En el caso dado  $z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ . Sea  $G_b$  una cuarta parte del círculo de radio  $b$  que tiene por centro el origen de coordenadas (fig. 55). Conforme a (3), teniendo en cuenta la simetría, encontramos

$$\begin{aligned} |S_b| &= 8 \iint_{G_b} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} dx dy = \\ &= 8 \iint_{G_b} \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 8a \int_0^b \int_0^{\pi/2} \frac{\rho d\rho d\theta}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = \\ &= 2\pi a \left[ -2(a^2 - \rho^2)^{1/2} \Big|_0^b \right] = 4\pi a (a - \sqrt{a^2 - b^2}). \end{aligned}$$

Cuando  $b = a$ , las integrales de esta cadena deben entenderse en el sentido impropio (véase a continuación el § 2.13).

Transformemos la integral (3), haciendo en ella la sustitución

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad ((u, v) \in \bar{\Omega}) \quad (4)$$

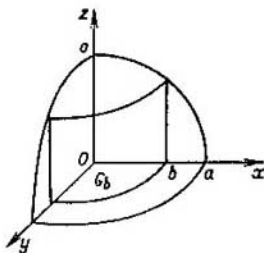


Fig. 55.

que pone en correspondencia biunívoca las regiones  $\Omega$  y  $G$ , al suponer que  $\varphi$  y  $\psi$  son continuamente derivables sobre  $\bar{\Omega}$  y el jacobiano

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \text{ sobre } \Omega. \quad (5)$$

Sustituyendo en la fórmula (1) las expresiones  $x$  e  $y$  de (4), obtenemos

$$z = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = \chi(u, v).$$

Entonces

$$\frac{\partial \chi}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Resolviendo estas ecuaciones respecto a  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$  y teniendo en cuenta (5), obtenemos

$$p = -\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \Big/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad q = -\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \Big/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Por eso, aplicando a la integral (3) la fórmula sobre el cambio de las variables (2) del § 2.7, obtenemos

$$\begin{aligned} |S| &= \iint_G \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy = \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left( \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \Big/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \Big/ \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2} \times \\ &\quad \times \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \, du \, dv. \quad (6) \end{aligned}$$

Ahora bien, el área de la superficie  $S$  se expresa asimismo por la fórmula

$$|S| = \int_{\Omega} \int \sqrt{\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2} du dv. \quad (7)$$

La superficie suave  $S$  se puede asignar paramétricamente, por tres ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Omega, \quad (8)$$

donde las funciones  $x, y, z$  tienen las derivadas parciales continuas en la clausura  $\bar{\Omega}$  de la región  $\Omega$  de los valores  $(u, v)$  llamados parámetros de  $S$ . Con ello se supone que el rango de la matriz

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \quad (9)$$

es igual a 2 para todos los puntos  $(u, v) \in \Omega$ . Esto muestra que tiene lugar la inecuación

$$\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 > 0, \quad \forall (u, v) \in \Omega. \quad (10)$$

En efecto, esta inecuación expresa el hecho de que para todo  $(u, v) \in \Omega$  al menos uno de los términos de la suma del primer miembro de (10) no es igual a cero lo que equivale a que uno de los determinantes de segundo orden, engendrados por la matriz (9), no es igual a cero.

Notemos que tres ecuaciones (8) de la superficie  $S$  pueden ser escritas en la forma vectorial:

$$r(u, v) = x(u, v) i + y(u, v) j + z(u, v) k, \quad (11)$$

donde, por lo tanto, el vector  $r = r(u, v)$  (radio vector del punto de la superficie  $S$ ) depende de dos parámetros escalares  $u$  y  $v$ .

Derivando la igualdad (11) respecto a  $u$  y respecto a  $v$ , obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_u &= \frac{\partial x}{\partial u} i + \frac{\partial y}{\partial u} j + \frac{\partial z}{\partial u} k, \\ \dot{r}_v &= \frac{\partial x}{\partial v} i + \frac{\partial y}{\partial v} j + \frac{\partial z}{\partial v} k. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\begin{aligned} \dot{r}_u \times \dot{r}_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) i + \\ &+ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) j + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) k = \\ &= i \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + j \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + k \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad (13) \end{aligned}$$

o sea, el cuadrado de la longitud del vector  $\dot{r}_u \times \dot{r}_v$  resulta igual al primer miembro de (10)

$$|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|^2 = \left( \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right)^2.$$

Las ecuaciones

$$x = \cos \theta \cos \varphi, \quad y = \cos \theta \sin \varphi, \quad z = \sin \theta$$

definen la superficie esférica de radio 1 que tiene por centro el punto nulo ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ). De aquí vemos que toda la superficie esférica puede ser asignada en forma paramétrica por ecuaciones únicas. En forma explícita, o sea, en una de las formas (1), (1'), (1'') la superficie esférica en conjunto, como es evidente, no puede ser representada. Sólo algunos trozos de la superficie esférica, si ésta se proyecta unívocamente sobre uno u otro plano de coordenadas, pueden ser descritos en la forma explícita.

Por otro lado, la superficie  $S$  representada paraméricamente por las ecuaciones (8) siempre puede expresarse explícitamente, pero sólo de un modo local. En efecto, asignemos un punto cualquiera  $A \in S$  que corresponda a los parámetros  $(u_0, v_0)$ . En virtud de la condición (10) uno de los sumandos del primer miembro de (10) en este punto es mayor de cero, supongamos que tal es el primer sumando. Entonces en el entorno  $(u_0, v_0)$  se pueden resolver las dos primeras ecuaciones de (8) respecto a  $u$  y  $v$  y obtener

$$u = \lambda(x, y), \quad v = \mu(x, y).$$

Sustituyendo estas funciones en la tercera ecuación de (8), obtenemos que cierto trozo  $\sigma$  de la superficie  $S$ , que contiene el punto  $A$ , se describe explícitamente por la ecuación

$$z = f(x, y).$$

De aquí vemos que la representación paramétrica de la superficie es más general que la explícita.

Si la superficie  $S$  está representada paramétricamente por las ecuaciones (8), entonces, por definición, se llama área de la misma el número igual a

$$|S| = \iint_{\Omega} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv. \quad (14)$$

Notemos que a cada región  $\omega$  perteneciente a  $\Omega$  le corresponde, con ayuda de las ecuaciones (8), cierta superficie  $\sigma \subset S$ . Esta es un trozo de la superficie  $S$ . Conforme a la definición (14) el área de  $\sigma$  es igual a

$$|\sigma| = \iint_{\omega} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv. \quad (15)$$

Claro está que si  $\sigma$  se corta en dos trozos  $\sigma_1, \sigma_2$  por las regiones respectivas  $\omega_1, \omega_2$  ( $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ ), entonces

$$\begin{aligned} |\sigma| &= \iint_{\omega} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv = \iint_{\omega_1} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv + \\ &+ \iint_{\omega_2} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv = |\sigma_1| + |\sigma_2|. \end{aligned}$$

Esto muestra que la definición (14) posee una propiedad natural: el área del trozo  $\sigma$  de la superficie  $S$  es igual a la suma de las áreas de los trozos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  en los cuales este trozo ha sido partido.

Notemos asimismo que si la definición (14) del área  $|\sigma|$  se aplica al trozo  $\sigma$  que se proyecta unívocamente sobre uno u otro plano de coordenadas, ella es equivalente a la definición inicial del área de tal trozo ((3), (3') ó (3'')). Esto ha sido demostrado anteriormente (véase (6)).

**EJEMPLO 1.** Hallar el área de la superficie representada paramétricamente:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi, \quad z = b\varphi, \\ 0 &< r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

La superficie dada se llama *helicoides*. Calculemos los jacobianos:

$$\begin{aligned} \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} &= r, \quad \frac{D(x, z)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \operatorname{sen} \varphi \\ 0 & b \end{vmatrix} = b \cos \varphi, \\ \frac{D(y, z)}{D(r, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \varphi & r \cos \varphi \\ 0 & b \end{vmatrix} = b \operatorname{sen} \varphi. \end{aligned}$$

Luego

$$\left[ \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} \right]^2 + \left[ \frac{D(y, z)}{D(r, \varphi)} \right]^2 + \left[ \frac{D(x, z)}{D(r, \varphi)} \right]^2 = r^2 + b^2.$$

Por eso, basándonos en la fórmula (7), tenemos

$$\begin{aligned} |S| &= \int_{\Omega} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + b^2} dr d\varphi = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + b^2} dr d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^a \sqrt{r^2 + b^2} dr = 2\pi \left[ \frac{r}{2} \sqrt{r^2 + b^2} + \frac{b^2}{2} \ln(r + \sqrt{r^2 + b^2}) \right]_0^a = \\ &= \pi \left[ a \sqrt{a^2 + b^2} + b^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right]. \end{aligned}$$

### § 2.12. Coordenadas del centro de masas

Supongamos que en el espacio en el que se encuentra el sistema rectangular de coordenadas está dado un punto material  $P = (x_1, x_2, x_3)$  de masa  $M_P$ . El producto  $M_P \cdot x_i$  se llama *momento estático* de este punto respecto al plano  $x_i = 0$  y se designa por el símbolo

$$K_{x_i} = M_P x_i.$$

El momento estático respecto al plano  $x_i = 0$  de un sistema finito de puntos materiales  $P_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$  de masas  $M_j$  se define por la igualdad

$$K_{x_i} = \sum_j M_j x_i^{(j)}.$$

Por último, si la masa queda distribuida sobre cierto conjunto  $G$ , el *momento estático del cuerpo  $G$*  respecto al plano  $x_i = 0$  se define como la integral

$$K_{x_i} = \int_G \rho(P) x_i dG = \int_G \rho(P) x_i dx_1 dx_2 dx_3,$$

donde  $\rho(P)$  es la densidad de distribución de la masa.

El centro de gravedad  $P^c$  del cuerpo  $G$  tiene las coordenadas  $(x_1^c, x_2^c, x_3^c)$  que se definen por las igualdades

$$x_i^c = \frac{\int_G x_i \rho(P) dG}{\int_G \rho(P) dG} \quad (i = 1, 2, 3).$$

En particular, si  $n = 2$  y  $G$  es un trapecio curvilíneo en el plano  $(x_1, x_2)$ , trapecio que esté limitado superiormente por el gráfico de

la función  $x_2 = f(x_1)$  e inferiormente por el eje  $x_1$  y lleno uniformemente de masas con densidad  $\rho \equiv 1$ , entonces (fig. 56)

$$x_2^c = \frac{\int_G x_2 dx_1 dx_2}{\int_G dx_1 dx_2} = \frac{\int_a^b dx_1 \int_0^{f(x_1)} x_2 dx_2}{mG} = \frac{1}{2mG} \int_a^b f^2(x_1) dx_1.$$

De aquí

$$2\pi x_2^c \cdot mG = \pi \int_a^b f^2(x_1) dx_1. \quad (1)$$

En el segundo miembro de (1) está el volumen de un cuerpo obtenido por la revolución del trapecio curvilíneo  $G$  alrededor del eje  $x_1$ .

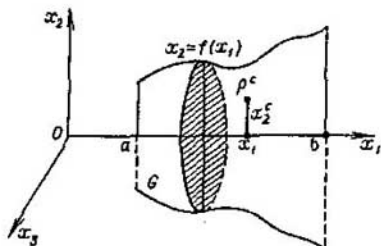


Fig. 56.

Así, pues, hemos obtenido el conocido teorema de Guldin<sup>1)</sup> que dice: *el volumen del cuerpo de revolución es igual al área del trapecio curvilíneo  $G$  multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de masas (de gravedad) de este trapecio alrededor del eje  $x_1$ .*

Si  $G$  es la curva  $x_2 = f(x_1)$ ,  $a \leq x_1 \leq b$ , uniforme ( $\rho \equiv 1$ ), entonces

$$x_2^c = \frac{\int_G x_2 dl}{mG} = \frac{\int_G f(x_1) dl}{mG},$$

donde  $mG$  es la longitud de la curva dentro de los límites de  $[a, b]$  y  $dl$ , el elemento de la longitud del arco. Puesto que  $dl =$

<sup>1)</sup> P. Guldin (1577—1643), matemático suizo.



$= \sqrt{1 + f'(x_1)^2} dx_1$ , entonces

$$x_2^c = \frac{1}{mG} \int_a^b f(x_1) \sqrt{1 + f'(x_1)^2} dx_1$$

o bien

$$2\pi x_2^c mG = 2\pi \int_a^b f(x_1) \sqrt{1 + f'(x_1)^2} dx_1. \quad (2)$$

En el segundo miembro (2) se encuentra el área de la superficie de revolución de la curva  $G$  ( $x_2 = f(x_1)$ ,  $a \leq x_1 \leq b$ ) alrededor del eje  $x_1$ . Ahora bien, la igualdad (2) ofrece el otro teorema de Guldin

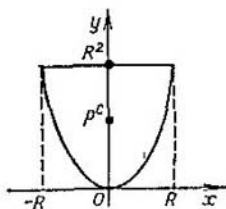


Fig. 57.

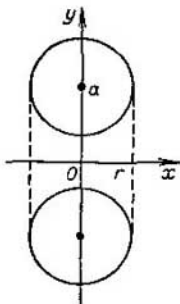


Fig. 58.

que reza: *el área de la superficie de revolución es igual a la longitud del arco de la curva  $G$  ( $x_2 = f(x_1)$ ,  $a \leq x_1 \leq b$ ) multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de masas de esta curva alrededor del eje  $x_1$ .*

Los teoremas de Guldin permiten encontrar a partir de dos magnitudes conocidas la tercera. Por ejemplo, si se conocen las coordenadas del centro de gravedad y el volumen del cuerpo de revolución, se puede determinar el área del trapecio curvilíneo, etc.

**EJEMPLO 1.** Hallar las coordenadas del centro de gravedad del trapecio curvilíneo  $G = \{-R \leq x \leq R, x^2 \leq y \leq R^2\}$  (fig. 57).

Sea  $P^c = (x^c, y^c)$  el centro de gravedad. En virtud de la simetría es claro que  $x^c = 0$  (suponemos que  $\rho \equiv 1$ ). Hallemos el área del trapecio  $G$ :

$$mG = R^2 \cdot 2R - 2 \int_0^R x^2 dx = 2R^3 - \frac{2}{3} R^3 = \frac{4}{3} R^3.$$

El volumen del cuerpo obtenido por la revolución de  $G$  alrededor del eje  $x$  es igual a

$$V = 2R \cdot \pi R^4 - 2\pi \int_0^R (x^2)^2 dx = 2\pi R^5 - \frac{2}{5} \pi R^5 = \frac{8}{5} \pi R^5.$$

Sobre la base del primer teorema de Guldin

$$y^c = \frac{V}{2\pi mG} = \frac{3}{5} R^2.$$

**EJEMPLO 2.** Hallar el volumen del cuerpo obtenido por la revolución del círculo  $G = \{x^2 + (y - a)^2 \leq r^2\}$  de radio  $r$  ( $r \leq a$ ) que tiene por centro el punto  $(0, a)$ , en torno al eje  $x$  (fig. 58).

Es claro que el centro de gravedad del círculo (homogéneo) coincide con su centro geométrico, o sea,  $x^c = 0$ ,  $y^c = a$ . El área del círculo  $mG = \pi r^2$ . Por eso, conforme al primer teorema de Guldin,

$$V = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 a.$$

**EJEMPLO 3.** Hallar el área de la superficie del cuerpo de revolución examinado en el ejemplo 2.

La superficie dada puede ser considerada como superficie obtenida por la revolución de la circunferencia  $x^2 + (y - a)^2 = r^2$  alrededor del eje  $x$ . La longitud de esta circunferencia es igual a  $2\pi r$ . Por eso, conforme al segundo teorema de Guldin,

$$S = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar$$

(el centro de gravedad de la circunferencia homogénea coincide asimismo con el centro  $(0, a)$  de esta circunferencia).

**EJEMPLO 4.** Hallar el centro de gravedad del semicírculo  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $y > 0$ , homogéneo ( $\rho = 1$ ); de la semicircunferencia  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $y > 0$ .

Es sabido que el volumen de una esfera de radio  $R$  es igual a  $\frac{4}{3} \pi R^3$  y el área de su superficie es igual a  $4\pi R^2$ . Por la fórmula (1) obtenemos (fig. 59)

$$2\pi y_{sc}^c \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad y_{sc}^c = \frac{4R}{3\pi},$$

donde  $y_{sc}^c$  es la ordenada del centro de gravedad del semicírculo.

Por la fórmula (2) para la ordenada  $y_{st}^c$  del centro de gravedad de la semicircunferencia tenemos

$$2\pi y_{st}^c \cdot \pi R = 4\pi R^2, \quad y_{st}^c = \frac{2R}{\pi}.$$

**MOMENTOS.** Se llama *momento de q-ésimo orden* ( $q = 2, 3, \dots$ ) del punto material  $P$  de masa  $M_p$  respecto al plano  $x_i = 0$  el producto

$$I_{x_i}^{(q)} = M_p x_i^q.$$

Si las masas están distribuidas sobre un conjunto medible  $G$  de densidad  $\rho(P)$ , entonces

$$I_{x_i}^{(q)} = \int_G x_i^q \rho(P) dG \quad (i = 1, 2, 3).$$

Si  $q = 2$ , el momento respectivo de segundo orden se denomina *momento de inercia*.

Además, pueden examinarse los momentos de  $q$ -ésimo orden del cuerpo  $G$  respecto al origen de coordenadas

$$I_0^{(q)} = \int_G \rho(P) \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{q/2} dG;$$

respecto al eje  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Por ejemplo, el momento de  $q$ -ésimo orden respecto al eje  $x_1$  se escribirá así:

$$I_{x_1 x_2}^{(q)} = \int_G \rho(P) (x_2^2 + x_3^2)^{q/2} dG.$$

### § 2.13. Integrales impropias <sup>1)</sup>

Supongamos que la función  $u = f(x)$  está dada sobre la región cerrada  $\bar{G}$  ( $\bar{G} = G \cup \partial G$ ). El punto  $x^0 \in G$  se llama *punto singular* de la

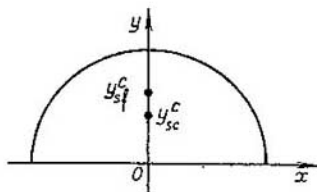


Fig. 59.

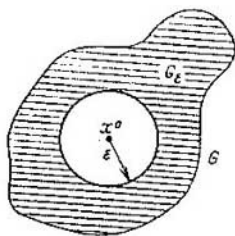


Fig. 60.

función, si en todo  $\varepsilon$ -entorno del punto  $x^0$  la función  $f(x)$  no está acotada. Sea (fig. 60)  $G_\varepsilon = G \setminus U(x^0, \varepsilon)$ , donde  $U(x^0, \varepsilon)$  es la

<sup>1)</sup> En el § 2.13 designamos los puntos  $x, y$  del espacio utilizando caracteres claros (no semigruesos).

esfera abierta de radio  $\varepsilon$  que tiene por centro el punto  $x^0$  ( $\rho(x, x^0) = |x - x^0| < \varepsilon$ ).

Si la función  $f(x)$  tiene un único punto singular  $x^0$  sobre la región  $\bar{G}$  y es continua sobre la región  $G_\varepsilon$  para  $\forall \varepsilon > 0$ , entonces se llama *integral impropia* de la función  $f(x)$  sobre  $G$  el límite (si éste existe)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{G_\varepsilon} f(x) dx = \int_G f(x) dx. \quad (1)$$

Si el límite finito (1) existe, la *integral impropia converge* y si el límite (1) no existe o es igual al infinito, la *integral impropia diverge*.

La integral (1) se denomina *absolutamente convergente*, si converge la integral

$$\int_G |f(x)| dx < \infty. \quad (2)$$

del valor absoluto  $|f(x)|$ .

Una *integral absolutamente convergente converge*. En efecto, de la convergencia absoluta de la integral (2) se deduce que el límite

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{G_\varepsilon} |f(x)| dx$  existe y es finito. Entonces, aplicando a este límite

el criterio de Cauchy (respecto a la función de una variable  $\varepsilon$ ), obtenemos que para todo valor de  $\eta > 0$  existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \eta > \left| \int_{G_\varepsilon} |f| dx - \int_{G_{\varepsilon'}} |f| dx \right| &= \int_{G_\varepsilon \setminus G_{\varepsilon'}} |f| dx \geq \\ &\geq \left| \int_{G_\varepsilon \setminus G_{\varepsilon'}} f dx \right| \geq \left| \int_{G_\varepsilon} f dx - \int_{G_{\varepsilon'}} f dx \right|, \\ &\forall \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

De suerte, para todo valor de  $\eta > 0$  existe un valor de  $\varepsilon_0$ , tal que para todos los números positivos  $\varepsilon, \varepsilon'$  que satisfagan las desigualdades  $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_0$  tiene lugar

$$\left| \int_{G_\varepsilon} f dx - \int_{G_{\varepsilon'}} f dx \right| < \eta.$$

Esto muestra, según el criterio de Cauchy, que existe el límite (1), o sea, existe la integral impropia (1).

**EJEMPLO 1.** Investigar la convergencia de la integral

$$\int_Q |x|^{-\alpha} dx, \quad (3)$$

donde  $\alpha > 0$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ,  $\Omega$  es la esfera unidad  $|x| \leq 1$ .

RESOLUCION. La función  $|x|^{-\alpha}$  tiene un único punto singular  $(0, 0, 0)$ . Por eso, pasando a las coordenadas polares, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x|^{-\alpha} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} |x|^{-\alpha} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\varepsilon}^1 r^2 \cos \theta \cdot r^{-\alpha} dr d\theta d\varphi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi \int_{\varepsilon}^1 r^{2-\alpha} dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3-\alpha} r^{3-\alpha} \Big|_{\varepsilon}^1 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3-\alpha} (1 - \varepsilon^{3-\alpha}) = \begin{cases} 4\pi/(3-\alpha), & \alpha < 3, \\ \infty & \alpha > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Hemos demostrado que la integral (3) converge cuando  $\alpha < 3$ . Si  $\alpha > 3$ , la integral (3) diverge. Para  $\alpha = 3$  la integral (3) asimismo diverge (al calcular la integral respecto a  $r$  la primitiva es igual a  $\ln r$ ).

Observación 1. En un espacio de  $n$  dimensiones, o sea, cuando  $|x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$  la integral (3) converge para  $\alpha < n$  y diverge para  $\alpha \geq n$ .

Si la región  $G$  no está acotada y la función  $f(x)$  es continua sobre la región  $G_R = G \cap U(O, R)$  para cualquier  $R$  (fig. 61), entonces el número igual al límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{G_R} f(x) dx = \int_G f(x) dx \quad (4)$$

se llama *integral impropia respecto a la región no acotada  $G$* .

EJEMPLO 2. La integral  $\int_G |x|^{-\alpha} dx$ , donde  $G = E^3 \setminus U(O, 1)$ , converge cuando  $\alpha > 3$  y diverge cuando  $\alpha \leq 3$ .

Realizando los cálculos, al igual que en el ejemplo 1, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_G |x|^{-\alpha} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{G_R} |x|^{-\alpha} dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi \int_1^R r^{-\alpha+2} dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{3-\alpha} (R^{3-\alpha} - 1) = \\ &= \begin{cases} \infty, & \alpha < 3, \\ 4\pi/(\alpha-3), & \alpha > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Cuando  $\alpha = 3$

$$\int_G |x|^{-\alpha} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi \int_1^R r^{-1} dr = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi \ln R = \infty.$$

*Observación 2.* En el espacio de  $n$  dimensiones la integral

$$\int_G |x|^{-\alpha} dx, \quad G = E^n \setminus U(O, 1)$$

converge para  $\alpha > n$  y diverge para  $\alpha \leq n$ .

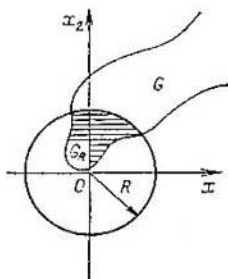


Fig. 61.

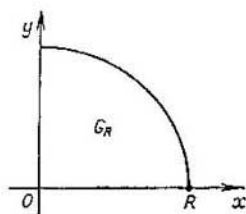


Fig. 62.

**EJEMPLO 3.** Investigar la integral

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2.$$

Por definición tenemos

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{G_R} \exp(-x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2,$$

donde  $G_R = \{|x| \leq R, x_1 > 0, x_2 > 0\}$  es una cuarta parte del círculo de radio  $R$  (fig. 62). Pasando a las coordenadas polares

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < r < R\right), \quad \frac{D(x_1, x_2)}{D(r, \varphi)} = r,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^R \exp(-x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2 &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \exp(-r^2) r dr d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^R \exp(-r^2) \frac{dr^2}{2} = \frac{-\pi}{4} \exp(-r^2) \Big|_0^R = \\ &= \frac{\pi}{4} [1 - \exp(-R^2)] \rightarrow \frac{\pi}{4}, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-x_1^2 - x_2^2) dx_1 dx_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Pero

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x_1^2 - x_2^2} dx_1 dx_2 = \left( \int_0^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \right) \left( \int_0^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \right) = \left( \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right)^2,$$

donde la integral impropia de una variable del segundo miembro (*integral de Poisson*) converge. Por eso obtenemos

$$\int_0^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

EJEMPLO 4. Calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x^2) (2\alpha x^2 + 1)^{-2} dx \quad (\alpha > 0).$$

Integrando dos veces por partes, tenemos

$$\begin{aligned} \int_e^N e^{-\alpha x^2} (2\alpha x^2 + 1)^{-2} dx &= \left( u = \frac{e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x}, dv = \frac{4\alpha x dx}{(2\alpha x^2 + 1)^2} \right) = \\ &= -\frac{e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x (2\alpha x^2 + 1)} \Big|_e^N + \int_e^N \frac{1}{2\alpha x^2 + 1} e^{-\alpha x^2} \frac{(-2\alpha x^2 - 1)}{4\alpha x^2} dx = \\ &= \frac{-e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x (2\alpha x^2 + 1)} \Big|_e^N - \int_e^N e^{-\alpha x^2} \frac{dx}{4\alpha x^2} = \left( u = e^{-\alpha x^2}, dv = \frac{dx}{x^2} \right) = \\ &= \frac{-e^{-\alpha x^2}}{4\alpha x (2\alpha x^2 + 1)} \Big|_e^N - \frac{1}{4\alpha} \left[ -e^{-\alpha x^2} \frac{1}{x} \Big|_e^N - 2\alpha \int_e^N e^{-\alpha x^2} x \frac{dx}{x} \right] = \\ &= \frac{x}{2} \frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha x^2 + 1} \Big|_e^N + \frac{1}{2} \int_e^N e^{-\alpha x^2} dx. \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$ , tendremos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} (2\alpha x^2 + 1)^{-2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = (\sqrt{\alpha}x = z) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \end{aligned}$$

### § 2.14. Integral impropia con particularidades a lo largo de la línea

Supongamos que la función  $F(x, y)$  es continua sobre el círculo abierto

$$G_a = \{x^2 + y^2 < a^2\} \quad (a > 0),$$

pero no está acotada sobre éste. Además, suponemos que al aproximarse a cualesquiera puntos de la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$  la función  $F$  tiende hacia el infinito.

Entonces para todo número positivo  $b < a$  la integral

$$\iint_{G_b} F(x, y) dx dy = \iint_{\tilde{G}_b} F(x, y) dx dy$$

existe, pero la integral de  $F$  sobre  $G_a$  no existe en el sentido habitual (de Riemann). Es que sabemos que de la existencia de la integral respecto a  $G_a$  en el sentido de Riemann debe deducirse la acotación de  $F$  sobre  $G_a$ .

Sin embargo, puede suceder que existe el límite

$$\lim_{\substack{b \rightarrow a \\ b < a}} \iint_{G_b} F(x, y) dx dy = I.$$

El límite  $I$  se llama *integral de  $F$  respecto a  $G_a$  en el sentido impropio* y se designa como *integral habitual de Riemann*:

$$I = \iint_{G_a} F(x, y) dx dy.$$

Con esta situación ya nos hemos encontrado al examinar el ejemplo 1 en el § 2.11. La función subintegral de la integral allí representada es continua sobre el círculo abierto  $G_a$ , pero no está acotada sobre  $G_a$ .

Tuvimos que determinar el área de la esfera  $|S_a|$ , correspondiente a  $G_a$ , no con ayuda de una integral habitual de Riemann

$$\begin{aligned} |S_a| &= \lim_{b \rightarrow a} \iint_{G_b} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\ &= \iint_{G_a} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \end{aligned}$$



Acabamos de examinar el ejemplo de una integral impropia cuando la función subintegral no está acotada a lo largo de la línea. En el caso precedente hemos citado los ejemplos de las integrales impropias cuando la función subintegral no está acotada en el entorno de un punto.

### § 2.15. Integral impropia dependiente de un parámetro <sup>1)</sup>

Examinemos la integral impropia

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \quad (1)$$

que depende del parámetro  $x = (x_1, \dots, x_m)$ . Supongamos que la integral tiene una sólo particularidad en el punto  $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0) \in \bar{\Omega}$ .

Examinemos más exactamente la región  $\Omega$  de puntos  $y = (y_1, \dots, y_n)$  del espacio de  $n$  dimensiones respecto a la cual se efectúa la integración y la región  $G$  de puntos  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , o sea, la región de parámetros. Puesto que integramos respecto a  $\Omega$  y a continuación integraremos también respecto a  $G$ , supondremos que ambas regiones  $\Omega$  y  $G$  están limitadas y tienen una frontera suave a trozos. En lo que se refiere a la función  $f(x, y)$ , se supone que es continua sobre  $\bar{G} \times \bar{\Omega}^2$  a excepción de los puntos  $(x, y^0)$  donde ella tiene la particularidad.

En general, sobre  $\Omega$  en el entorno de cada punto  $(x, y^0)$  la función  $f(x, y)$  no está acotada.

Supongamos que la integral impropia (1) existe para todos los valores de  $x \in \bar{G}$ . Esto significa que para cada  $x \in \bar{G}$  existe el límite finito

$$F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_{\epsilon}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\epsilon}} f(x, y) dy = \int_{\Omega} f(x, y) dy, \quad (2)$$

donde

$$F_{\epsilon}(x) = \int_{\Omega_{\epsilon}} f(x, y) dy \quad (3)$$

<sup>1)</sup> En el § 2.15 hemos designado los puntos  $x, y$  del espacio, utilizando caracteres claros (no semigruesos).

<sup>2)</sup> El símbolo  $G \times \Omega$  designa el producto directo de los conjuntos  $G$  y  $\Omega$ , o sea, el conjunto de todos los pares  $(x, y)$ , donde  $x \in G, y \in \Omega$ .

y  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus U(y^0, \varepsilon)$  es el conjunto de los puntos  $y \in \Omega$  de los cuales ha sido eliminada la esfera de radio que tiene por centro el punto  $y^0$ .

Es importante señalar que la integral (3) es una integral habitual (propia) de Riemann y ya que la función  $f(x, y)$  es continua sobre  $\bar{G} \times \Omega_\varepsilon$  para todo valor de  $\varepsilon > 0$ , para esta integral se cumplen las propiedades conocidas, a saber:

- 1)  $F_\varepsilon(x)$  es una función continua de  $x \in \bar{G}$ .
- 2) Es legítimo cambiar de lugar el orden de integración

$$\int_{\bar{G}} dx \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y) dy = \int_{\Omega_\varepsilon} dy \int_{\bar{G}} f(x, y) dx. \quad (4)$$

- 3) Es legítimo derivar bajo el signo de la integral

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y) dy = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy \quad (5)$$

a la condición adicional de que la derivada parcial  $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)$  sea continua sobre  $\bar{G} \times \Omega_\varepsilon$ .

De aquí surge la pregunta ¿se conservan o no las propiedades 1)–3) para  $\varepsilon = 0$ , o sea, se conservan o no estas propiedades para la integral impropia (1)? Hablando en general, esto no es así. No obstante, si sobre la convergencia de  $F_\varepsilon(x)$  hacia  $F(x)$  y de  $\frac{\partial}{\partial x_j} F_\varepsilon$  hacia  $\frac{\partial}{\partial x_j} F$  se impone la condición adicional de convergencia uniforme, entonces las propiedades 1)–3) se mantienen. Por esta razón es útil el concepto de convergencia uniforme de una integral impropia.

Por definición, la integral (1) converge uniformemente sobre  $\bar{G}$  (o respecto a  $x \in \bar{G}$ ) si

$$F_\varepsilon(x) \rightarrow F(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

o sea,

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y) dy - \int_{\Omega} f(x, y) dy \right| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

uniformemente sobre  $\bar{G}$ .

Con otras palabras, la integral (1) converge uniformemente sobre  $\bar{G}$  si se cumple la condición siguiente: para todo valor de  $\eta > 0$  existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |F(x) - F_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{\Omega} f(x, y) dy - \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y) dy \right| = \\ &= \left| \int_{\Omega \cap U(y^0, \varepsilon)} f(x, y) dy \right| < \eta, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \forall x \in \bar{G}. \end{aligned}$$

A las integrales uniformemente convergentes se les puede aplicar la teoría de sucesiones uniformemente convergentes de las funciones, vinculada con la teoría de series uniformemente convergentes.

Sabemos que si la sucesión de las funciones  $F_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) continuas sobre el conjunto  $\bar{G}$  converge uniformemente sobre  $\bar{G}$ , la función límite  $F(x)$  es continua sobre  $\bar{G}$  y entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{G}} F_n(x) dx = \int_{\bar{G}} F(x) dx. \quad (6)$$

Sabemos también que si adicionalmente suponemos que las derivadas parciales  $\frac{\partial}{\partial x_j} F_n(x)$  existen y son continuas sobre  $\bar{G}$  y, además,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_n(x) \rightarrow \psi(x), \quad x \in \bar{G},$$

uniformemente sobre  $\bar{G}$ , la función  $F(x)$  tiene la derivada  $\frac{\partial}{\partial x_j} F(x)$  igual a  $\psi(x)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \psi(x), \quad \forall x \in \bar{G}.$$

Al demostrar estas propiedades no tiene importancia el hecho de que  $n$ , creciendo, recorra los números naturales. Se puede considerar asimismo que  $n = \varepsilon$  tiende continuamente a cero ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Por eso las propiedades indicadas se extienden de manera automática a las integrales impropias uniformemente convergentes.

**TEOREMA 1.** *Si la integral (1) converge uniformemente sobre  $\bar{G}$  y la función  $f(x, y)$  es continua sobre  $\bar{G} \times \bar{\Omega}$ , a excepción de los puntos  $(x, y^0)$ , entonces la integral (1) será una función continua de  $x$ . En este caso*

$$\int_{\bar{G}} dx \int_{\bar{\Omega}} f(x, y) dy = \int_{\bar{\Omega}} dy \int_{\bar{G}} f(x, y) dx.$$

En efecto, de la continuidad  $F_\varepsilon(x)$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , y de la convergencia uniforme  $F_\varepsilon(x) \rightarrow F(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , sobre  $\bar{G}$  se deduce que  $F(x)$  es continua sobre  $\bar{G}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{G}} dx \int_{\bar{\Omega}} f(x, y) dy &= \int_{\bar{G}} F(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{G}} F_\varepsilon(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{G}} dx \int_{\bar{\Omega}_\varepsilon} f(x, y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Omega}_\varepsilon} dy \int_{\bar{G}} f(x, y) dx = \\ &= \int_{\bar{\Omega}} dy \int_{\bar{G}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

En esta cadena hemos hecho uso (en la segunda igualdad) de la fórmula

$$\int_{\bar{G}} F_{\varepsilon}(x) dx \rightarrow \int_{\bar{G}} F(x) dx, \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

que es justa, porque  $F_{\varepsilon}$  y  $F$  son continuas sobre  $G$  y  $F_{\varepsilon} \rightarrow F$  uniformemente sobre  $\bar{G}$ , y (en la cuarta igualdad) de la fórmula (4).

**TEOREMA 2.** Si, además de cumplirse las condiciones del teorema 1, se conoce que la derivada parcial  $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)$  es continua sobre  $\bar{G} \times \bar{\Omega}$ , a excepción de los puntos  $(x, y^0)$ , y la integral

$$\int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy$$

converge uniformemente sobre  $\bar{G}$ , entonces tiene lugar la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\bar{\Omega}} f(x, y) dy = \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy, \quad (7)$$

o sea, es legítimo derivar bajo el signo de la integral.

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\bar{\Omega}} f(x, y) dy &= \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_j} F_{\varepsilon}(x) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\bar{\Omega}_{\varepsilon}} f(x, y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Omega}_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy = \int_{\bar{\Omega}} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

En la segunda igualdad de esta cadena se ha aplicado la propiedad que reza: si las funciones  $F(x)$  y  $\frac{\partial}{\partial x_j} F_{\varepsilon}(x)$  son continuas sobre  $\bar{G}$  y ambas convergen uniformemente sobre  $\bar{G}$  hacia  $F(x)$  y  $\psi(x)$ , respectivamente, entonces  $\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \psi(x)$  sobre  $\bar{G}$ . En la cuarta igualdad se ha aplicado la propiedad (5) que es justa para todo valor de  $\varepsilon > 0$ .

El teorema siguiente ofrece un criterio suficiente de convergencia uniforme de la integral impropia (1).

**TEOREMA 3 (CRITERIO DE WEIERSTRASS).** Si la función  $f(x, y)$  es continua sobre  $\bar{G} \times \bar{\Omega}$  a excepción de los puntos  $(x, y^0)$  ( $y^0 \in \bar{\Omega}$ ), y satisface sobre  $\bar{G} \times \bar{\Omega}$  la desigualdad

$$|f(x, y)| \leq \varphi(y) \quad (x \in \bar{G}), \quad (8)$$

donde la integral

$$\int_a^{\infty} \varphi(y) dy < \infty \quad (8')$$

converge, la integral (1) converge uniformemente sobre  $\bar{G}$ .

DEMOSTRACIÓN. Asignemos  $\eta > 0$ . En virtud de la convergencia de la integral (8') existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que

$$\left| \int_{\Omega \cap U(y^0, \varepsilon)} \varphi(y) dy \right| = \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \varphi(y) dy \right| < \eta, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0,$$

por eso, si  $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_0$ , entonces

$$\eta > \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon'}} \varphi(y) dy - \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \varphi(y) dy \right| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon'}} \varphi(y) dy \right|,$$

$$\forall \varepsilon, \varepsilon' < \varepsilon_0.$$

Pero entonces, en virtud de (8)

$$\eta > \left| \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon'}} \varphi(y) dy \right| > \left| \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon'}} f(x, y) dy \right| = |F_\varepsilon(x) - F_{\varepsilon'}(x)|$$

para todos los valores de  $\varepsilon, \varepsilon' < \varepsilon_0$  y para todo valor de  $x \in \bar{G}$ .

Hemos obtenido la condición de Cauchy para la convergencia uniforme de  $F_\varepsilon(x)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  sobre  $\bar{G}$ . Esto muestra que tiene lugar la convergencia uniforme

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f(x, y) dy = \int_{\Omega} f(x, y) dy.$$

EJEMPLO 1. La integral

$$\psi(a) = \int_0^1 x^{a-1} dx \quad (a > 0) \quad (9)$$

existe para todo valor de  $a > 0$ . Para  $0 < a < 1$  el punto  $x = 0$  es singular y para  $a \geq 1$  sobre el segmento  $[0, 1]$  la función subintegral es continua y la integral no tiene particularidades.

Para aclarar la cuestión acerca de la convergencia uniforme de la integral impropia, tenemos que apreciar la integral

$$\left| \int_0^\varepsilon x^{a-1} dx \right| = \frac{\varepsilon^a}{a}$$

que suele llamarse *resto de la integral* correspondiente al punto singular  $x = 0$ . Para un número arbitrario  $\eta > 0$  es imposible escoger  $\varepsilon_0 > 0$  de modo que el resto sea menor que  $\eta$ ,  $\forall a > 0$ ,  $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ , porque para cualquier  $\varepsilon$  fijo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon^a/a = \infty \quad (a > 0).$$

Por eso la integral (9) converge no uniformemente respecto a  $a > 0$ .

De suerte, la función  $x^{a-1} = \varphi(x, a)$  es continua sobre  $[0, 1] \times [0, 1]$ , a excepción de los puntos con  $x = 0$ . La misma integral  $\psi(a) = 1/a$  es una función discontinua sobre  $[0, 1]$ . Esto muestra que la exigencia de que la integral converja uniformemente es esencial para la continuidad de la misma.

Luego, es evidente que para  $0 < a_0 \leq a \leq 1$  la integral (9) converge uniformemente. En efecto, si  $a_0 \leq a$ , entonces sobre el segmento  $[0, \varepsilon]$ , donde  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $x^{a-1} \leq x^{a_0-1}$  y la integral

$$\int_0^{\varepsilon} x^{a_0-1} dx = \frac{\varepsilon^{a_0}}{a_0} < \infty;$$

por eso, según el criterio de Weierstrass, la integral (9) converge uniformemente para  $a_0 \leq a \leq 1$ .

Así, pues, la integral (9) es una función continua sobre  $[a_0, 1]$ . Si  $a > 0$ , la integral (9) se puede derivar bajo el signo de la integral, o sea,

$$\psi'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} x^{a-1} dx = \int_0^1 x^{a-1} \ln x dx. \quad (10)$$

En efecto, puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda \ln x = 0$  ( $\lambda > 0$ ), la función

$$\mu(x) = \begin{cases} x^\lambda \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es continua sobre  $[0, 1]$  y, por consiguiente, está acotada sobre  $[0, 1]$ . Por eso para  $0 < a_0 \leq a \leq 1$

$$|x^{a-1} \ln x| \leq |x^{a-\lambda-1}| \cdot |x^\lambda \ln x| \leq c|x^{a-\lambda-1}|$$

y la integral

$$\int_0^{\varepsilon} x^{a-\lambda-1} dx = \frac{\varepsilon^{a-\lambda}}{a-\lambda} < \infty. \quad (0 < \lambda \leq a - a_0).$$

De aquí, según el criterio de Weierstrass, la integral del segundo miembro de (10) converge uniformemente. Luego, la función  $\frac{\partial}{\partial a} x^{a-1} = x^{a-1} \ln x$  es continua sobre  $[0, 1] \times [0, 1]$ , a excepción de los puntos en que  $x = 0$ . Por eso, conforme al teorema 2, la fórmula (10) es justa.

La integral (1) se puede examinar para una región no acotada  $\Omega$ , suponiendo que la función  $f(x, y)$  es continua sobre el conjunto  $\bar{G} \times \Omega$  de los puntos  $(x, y)$ . Por cuanto la región  $\Omega$  no está acotada, la integral (1) como la de Riemann, no existe, pero puede existir en el sentido impropio como el límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F_R(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Omega_R} f(x, y) dy = \int_{\Omega} f(x, y) dy = F(x), \quad (11)$$

donde  $\Omega_R = \Omega \cap U(O, R)$ ,  $U(O, R)$  es la esfera de radio  $R$  que tiene por centro el punto nulo.

Supongamos que

$$F_R(x) = \int_{\Omega_R} f(x, y) dy$$

y que existe el límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F_R(x) = F(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy$$

para todos los valores de  $x \in \bar{G}$ , o sea, que la integral (11) como impropia existe para todos los valores de  $x \in \bar{G}$ .

En este caso se dice que el *punto alejado infinitamente es el punto singular de la integral (11)*.

Por definición, la integral (11) se llama *uniformemente convergente*, si  $F_R(x) \rightarrow F(x)$ ,  $R \rightarrow \infty$ , uniformemente respecto a  $x \in \bar{G}$ .

Al igual que en el caso de un punto singular finito, se demuestra que para una función  $f(x, y)$  continua sobre  $\bar{G} \times \Omega$  la integral (11), si converge uniformemente sobre  $\bar{G}$ , es una función continua de  $x \in \bar{G}$ . Luego, si  $G$  es una región acotada con frontera suave a trozos, tiene lugar la igualdad

$$\int_G dx \int_{\Omega} f(x, y) dy = \int_{\Omega} dy \int_G f(x, y) dx.$$

Si  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  es continua sobre  $\Omega$  y la integral de  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$

respecto a  $\Omega$  converge uniformemente respecto a  $x \in \bar{G}$ , entonces (11) puede derivarse bajo el signo de la integral

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} f(x, y) dy = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y) dy.$$

EJEMPLO 2. Investigar la integral

$$I(x) = \int_0^{\infty} x e^{-xy} dy \quad (x \geq 0).$$

Es evidente que  $I(0) = 0$  y para  $x \neq 0$

$$I(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x e^{-xy} dy = \lim_{R \rightarrow \infty} -e^{-xy} \Big|_0^R = 1.$$

Ahora bien, la función  $I(x)$  es discontinua sobre  $[0, \infty)$ . Esto se debe a que nuestra integral converge no uniformemente; el resto de la integral

$$\int_R^{\infty} x e^{-xy} dy = e^{-Rx}$$

no tiende a cero para cualquier  $R$  fijo y cuando  $x \rightarrow 0$  (este resto tiende hacia 1).

EJEMPLO 3. FUNCION GAMMA. La integral

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (12)$$

se llama *función gamma* o *integral de Euler de segundo género*.

Cuando  $a \geq 1$ , ella tiene el punto singular  $x = \infty$  y cuando  $0 < a < 1$ , tiene dos puntos singulares  $x = 0$ ,  $x = \infty$ .

Para investigar esta integral es cómodo desarrollarla en dos integrales

$$\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Puesto que para  $0 < x \leq 1$  tenemos  $x^{a-1} e^{-x} \leq x^{a-1}$ , entonces (como esto se ve del ejemplo 1) la primera integral converge uniformemente para todos los valores de  $a \geq a_0 > 0$ , cualquiera que sea el número  $a_0 > 0$ . La segunda integral converge, evidentemente, para todo número real  $a$ .



Si  $a_0$  es un número cualquiera, entonces para  $a \leq a_0$

$$x^{a-1}e^{-x} \leq x^{a_0-1}e^{-x} \quad (1 \leq x < \infty),$$

y como

$$\int_1^{\infty} x^{a_0-1}e^{-x} dx < \infty,$$

entonces, según el criterio de Weierstrass, la segunda integral converge uniformemente  $\forall a \leq a_0$ . No obstante, la convergencia de esta integral para un valor cualquiera de  $a$  no es uniforme.

Por ejemplo, cuando  $a > 1$  y  $R > 1$

$$\int_R^{\infty} x^{a-1}e^{-x} dx \geq R^{a-1} \int_R^{\infty} e^{-x} dx = R^{a-1}e^{-R} \rightarrow \infty$$

para  $a \rightarrow +\infty$  y cualquiera  $R$  fijo.

Cuando  $a > 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -x^{a-1}e^{-x} \Big|_0^R + (a-1) \int_0^R x^{a-2}e^{-x} dx \right\} = \\ &= (a-1) \Gamma(a-1). \end{aligned}$$

Por eso para  $a = n$  natural

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!\Gamma(1) = \\ &= n! \int_0^{\infty} e^{-x} dx = n!, \end{aligned}$$

de donde se ve que es natural considerar la función gamma como generalización del factorial.

## Capítulo 3

### Análisis vectorial

#### § 3.1. Curva orientada suave a trozos

La curva

$$r(t) = \varphi(t) i + \psi(t) j + \chi(t) k \quad (a \leq t \leq b) \quad (1)$$

se llama *suave a trozos continua*, si las funciones  $(\varphi, \psi, \chi)$  son continuas sobre  $[a, b]$  y el segmento  $[a, b]$  se puede partir en un número finito de segmentos parciales por los puntos

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

de modo que sobre cada uno de ellos las funciones  $\varphi, \psi, \chi$  tengan las derivadas continuas que no sean simultáneamente iguales a cero<sup>1)</sup>.

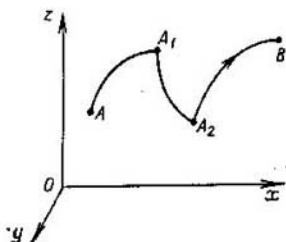


Fig. 63.

La fig. 63 muestra una curva suave a trozos continua. En los puntos  $A_1$  y  $A_2$  ella es continua, pero las derivadas  $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)$  todas o algunas, sufren discontinuidad (de primer género).

Designaremos la curva (1) con una letra, por ejemplo, con la letra  $\Gamma$ . Generalmente  $\Gamma$  significa no sólo el lugar geométrico de los puntos  $(x, y, z)$  definidos por las ecuaciones (1) sino también el orden de seguimiento de estos puntos cuando  $t$  crece continuamente de  $a$  a  $b$

( $a < b$ ). En este sentido se dice que  $\Gamma$  es una *curva orientada*. El orden de seguimiento se designa en la figura con una flecha (fig. 63): cuando  $t$  crece continuamente de  $a$  a  $b$  el punto  $(x, y, z)$  se desplaza por  $\Gamma$  en el sentido de la flecha.

Si  $t = \lambda(\tau)$  es la función con una derivada positiva continua sobre cierto segmento  $[c, d]$  y, además  $\lambda(c) = a, \lambda(d) = b$ , entonces la ecuación

$$r(\lambda(\tau)) = \varphi[\lambda(\tau)] i + \psi[\lambda(\tau)] j + \chi[\lambda(\tau)] k \quad (c \leq \tau \leq d) \quad (1')$$

define la misma curva orientada que  $\Gamma$ . Se designa por la misma letra  $\Gamma$ , solamente en el caso de la ecuación (1) se dice que  $\Gamma$  se define por el parámetro  $t$  y en el caso de (1'), por el parámetro  $\tau$ . En ambos

<sup>1)</sup> Véase nuestro libro «Matemáticas superiores, Cálculo diferencial e integral», §§ 4.21, 7.3.

casos, al crecer  $t$  de  $a$  a  $b$  o al crecer  $\tau$  de  $c$  a  $d$ , los puntos respectivos de  $\Gamma$  se desplazan en el mismo sentido.

Otra cosa es si se lleva a cabo la sustitución de  $t = \lambda(\tau)$ , donde  $\lambda(\tau)$  tiene una derivada negativa continua sobre el segmento  $[c, d]$  ( $ic < dI$ ). En este caso  $\lambda(c) = b$ ,  $\lambda(d) = a$  y al crecer continuamente  $\tau$  de  $c$  a  $d$  el parámetro  $t$  decrecerá y sobre nuestro objeto geométrico es necesario orientar la flecha en el otro sentido.

Por eso cuando  $\lambda'(\tau) < 0$  designaremos la curva ( $1'$ ) por otro símbolo  $\Gamma_-$  y diremos que  $\Gamma_-$  es la misma curva que  $\Gamma$ , pero orientada en el sentido opuesto. En algunos casos designaremos la curva orientada inicial con el símbolo  $\Gamma_+$ .

La curva orientada (1) se denomina *cerrada* o *contorno cerrado*, si  $r(a) = r(b)$  o, lo que es lo mismo, si

$$\varphi(a) = \varphi(b), \quad \psi(a) = \psi(b), \quad \chi(a) = \chi(b).$$

En otras palabras, cuando el valor del parámetro  $t$  crece continuamente de  $a$  a  $b$  el punto correspondiente  $(x, y, z)$  hace en el espacio



Fig. 64.

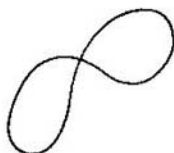


Fig. 65.

un recorrido continuo que empieza y termina en un mismo punto. Si en este caso la curva  $\Gamma$  no se corta a sí misma en otros puntos, se llama *curva autodisjunta cerrada*. La fig. 64 muestra una curva autodisjunta cerrada y la fig. 65, una curva *autointersectora* cerrada.

*Observación.* La ecuación vectorial (1) de la curva  $\Gamma$  es equivalente a tres ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

En este caso diremos que la curva  $\Gamma$  es dada en forma paramétrica.

EjemPlo 1. Supongamos que la curva  $\Gamma$  se da por la ecuación

$$r(t) = iR \cos t + jR \sin t \quad (x = R \cos t, \quad y = R \sin t),$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Por cuanto  $x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$ , la curva dada es una circunferencia de radio  $R$  que tiene por centro el origen de coordenadas. Al crecer  $t$  de  $0$  a  $2\pi$  el punto  $A = (x, y)$  se mueve por la circunferencia en el sentido contrario al de las agujas del reloj. En este caso a diferentes  $t$  corresponden diferentes puntos  $A$ .

Cuando  $t = 0$  y  $t = 2\pi$  tenemos  $r(0) = r(2\pi) = iR$ . Por lo tanto, la circunferencia es una curva autodisjunta cerrada (fig. 66).

**EJEMPLO 2.** La curva  $r(t) = a(i \cos t + j \sin t) + btk$ , donde  $0 \leq t < \infty$ ,  $a, b$  son números positivos, se llama *hélice*. Esta puede ser obtenida del modo siguiente. Un segmento de longitud  $a$ , per-

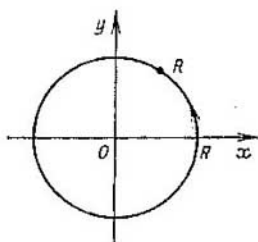


Fig. 66.

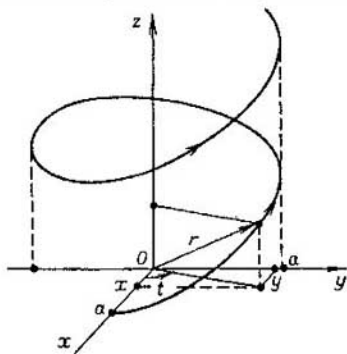


Fig. 67.

pendicular al eje  $z$ , con un extremo se desliza por el eje  $z$  y a la vez gira alrededor del eje  $z$ , entonces el otro extremo del segmento describe una hélice. Supongamos que la altura de elevación del segmento en el eje  $z$  es proporcional al ángulo de giro  $t$  ( $z = bt$ ). Al crecer  $t$  el punto  $(x, y, z)$  se mueve según se indica en la fig. 67. Es evidente que la hélice está situada sobre la superficie lateral de un cilindro circular de radio  $a$  con una generatriz paralela al eje  $z$ .

### § 3.2. Integral curvilínea de primer género

Supongamos que está dada la curva suave a trozos continua  $\Gamma$

$$r(t) = \varphi(t) i + \psi(t) j + \chi(t) k, \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1)$$

y supongamos que sobre  $\Gamma$  o en el entorno de  $\Gamma$  se define la función continua  $F(x, y, z)$ .

El número igual a

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) ds = \int_0^T F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt \quad (2)$$

se llama *integral curvilínea de primer género de la función*  $F(x, y, z)$  *respecto a la curva*  $\Gamma$ .

El primer miembro de (2) es la designación de la integral de primer género y su segundo miembro es la definición de la misma; es una integral definida corriente respecto a  $t$  sobre  $[0, T]$ .

Por ejemplo, si la curva  $\Gamma$  posee una masa con una densidad de distribución  $F(x, y, z)$  en los puntos  $(x, y, z) \in \Gamma$ , entonces la masa total  $M$  de la curva se calcula por medio de la integral (2). Así, el elemento de la curva material correspondiente al segmento  $[t, t + dt]$  de variación de  $t$  tiene una masa, con una exactitud hasta un infinitésimo de orden superior, igual a

$$F ds = F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt,$$

donde  $ds$  es la diferencial del arco de  $\Gamma$ ; esto muestra que  $M$  es igual al segundo miembro de (2).

*La magnitud de la integral de primer género no varía al cambiar la orientación de la curva:*

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) ds = \int_{\Gamma^-} F(x, y, z) ds.$$

Por ejemplo, la curva (1) puede definirse por las ecuaciones

$$x = \varphi(T - \tau), \quad y = \psi(T - \tau), \quad z = \chi(T - \tau) \quad (0 \leq \tau \leq T),$$

que la orientan en el sentido contrario y entonces

$$\begin{aligned} & \int_0^T F[\varphi(T - \tau), \psi(T - \tau), \chi(T - \tau)] \times \\ & \quad \times \sqrt{\varphi'(T - \tau)^2 + \psi'(T - \tau)^2 + \chi'(T - \tau)^2} d\tau = \\ & = - \int_T^0 F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt = \\ & = \int_0^T F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 1.** Supongamos que a lo largo de la hélice definida en el ejemplo 2 del § 3.1 están distribuidas las masas de densidad  $F(x, y, z) = z^2$ . Hallar la masa  $M$  de un tramo de la hélice cuando el parámetro  $t$  varía de 0 a 3 ( $0 \leq t \leq 3$ ).

Escribamos la ecuación de la hélice que se examina en la forma

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad (0 \leq t \leq 3).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^3 F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \\
 &= \int_0^3 b^2 t^2 \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \operatorname{cos}^2 t + b^2} dt = \\
 &= b^2 \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^3 t^2 dt = 9b^2 \sqrt{a^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2.** Calcular la integral de primer género sobre la elipse

$$x = a \operatorname{cos} t, \quad y = b \operatorname{sen} t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

de la función  $F(x, y) = \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2}$ .

Tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} F(x, y) ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 \operatorname{cos}^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \operatorname{cos}^2 t} dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} (b^2 \operatorname{cos}^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t) dt = \pi (a^2 + b^2).
 \end{aligned}$$

### § 3.3. Integral del vector a lo largo de una curva

Supongamos que en el espacio  $R_3$  donde está definido un sistema rectangular de coordenadas  $x, y, z$  está dada una curva suave a trozos continua orientada  $\Gamma$  con el punto inicial  $A_0$  y el punto final  $A_1$ . Si  $\Gamma$  está cerrada,  $A_0$  coincide con  $A_1$ . Supongamos que

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

son las ecuaciones de  $\Gamma$  y al valor  $t = 0$  le corresponde el punto  $A_0$  y al valor  $t = T$  le corresponde el punto  $A_1$ .

En cada punto interior (no anguloso)  $A$  de un trozo suave cualquiera de  $\Gamma$  está definido biunívocamente el vector unidad  $\tau$  de la tangente a  $\Gamma$ , dirigido en el sentido de crecimiento de  $t$ .

Supongamos que sobre  $\Gamma$  o sobre el conjunto  $\Omega$  que contiene  $\Gamma$  está dado un campo del vector continuo (el vector se asigna)

$$a = P(x, y, z) i + Q(x, y, z) j + R(x, y, z) k,$$

donde  $P, Q, R$  son las funciones continuas sobre  $\Gamma$  (o sobre  $\Omega$ ).

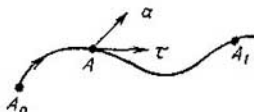


Fig. 68.

Es mejor representar este cuadro así (fig. 68): de un punto cualquiera  $(x, y, z) \in \Gamma$  (o  $\Omega$ ) sale el vector  $a$  cuyo sentido y longitud dependen de este punto ( $a = a(x, y, z)$ ).

La magnitud

$$\int_{\Gamma} (a ds) = \int_{\Gamma} (a\tau) ds = \int_0^T \{P[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \varphi'(t) + \\ + Q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \chi'(t)\} dt \quad (1)$$

se llama *integral curvilínea del vector  $a$  a lo largo de la curva orientada  $\Gamma$* .

Los términos primero y segundo de la cadena (1) son las designaciones de un concepto nuevo, o sea, de la integral de  $a$  a lo largo de (o sobre)  $\Gamma$ . El tercer término es su definición: es una integral corriente respecto a  $t$  sobre  $[0, T]$ .

Por símbolo  $ds$  en el primer término de la cadena (1) se entiende un vector de dirección  $\tau$  y una longitud igual a la del arco  $ds$  de la curva  $\Gamma$ . El símbolo  $(a ds)$  es el producto escalar de  $a$  y  $ds$ .

La tripleta  $(\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t))$  es un vector tangente a  $\Gamma$ . Normalizándolo, obtenemos el vector unidad tangente

$$\tau = \left( \frac{\varphi'}{s'_t}, \frac{\psi'}{s'_t}, \frac{\chi'}{s'_t} \right), \quad s'_t = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}.$$

Por eso

$$(a ds) = (a\tau) ds = [P(\varphi, \psi, \chi) \varphi' + Q(\varphi, \psi, \chi) \psi' + R(\varphi, \psi, \chi) \chi'] dt.$$

Integrando este elemento respecto a  $t$ , obtenemos el segundo miembro de (1). Se aplica, además, la siguiente designación para la integral del vector  $a$  sobre  $\Gamma$ :

$$\int_{\Gamma} (a ds) = \int_{\Gamma} [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz]. \quad (2)$$

Ella muestra que si se requiere calcular la integral de  $\mathbf{a}$  a lo largo  $\Gamma$ , es necesario poner en el segundo miembro de (2)  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \chi(t)$ ,  $dx = \varphi'(t) dt$ ,  $dy = \psi'(t) dt$ ,  $dz = \chi'(t) dt$  e integrar el resultado respecto a  $t$  entre 0 y  $T$ .

La expresión

$$\int_{\Gamma} \mathbf{a}(ds) \quad (3)$$

( $ds$  es un vector) se llama *integral de segundo género*.

Recalquemos: para calcular la integral de segundo género, introducimos el vector unidad  $\boldsymbol{\tau}$  de la tangente a  $\Gamma$  dirigido de acuerdo con la orientación de  $\Gamma$  y escribimos el elemento subintegral en (3) en la forma

$$(\mathbf{a} ds) = (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}) ds.$$

Aquí  $ds$  ( $ds > 0$ ), escalar, es la diferencial del arco de  $\Gamma$  y la magnitud  $(\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})$  es la función definida sobre  $\Gamma$ .

El cálculo de la integral (3) de segundo género se reduce al cálculo de la integral de primer género:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a} ds) = \int_{\Gamma} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}) ds. \quad (4)$$

El primer miembro de (4) es la integral de segundo género y el segundo miembro es la integral de primer género igual a aquélla.

Ahora bien, las denominaciones integral de primero o segundo género no se relacionan con la esencia de la cuestión sino con las designaciones.

La expresión

$$\int_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz)$$

se llama asimismo *integral de segundo género*.

Sabemos que la integral de primer género sobre  $\Gamma$  no depende de la orientación de  $\Gamma$ . Sin embargo, la integral de segundo género sobre  $\Gamma$  depende de la orientación de  $\Gamma$ . A saber, ella cambia de signo al cambiar la orientación

$$\int_{\Gamma_-} (\mathbf{a} ds) = - \int_{\Gamma} (\mathbf{a} ds).$$

En efecto,

$$\int_{\Gamma_-} (\mathbf{a} ds) = \int_{\Gamma_-} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}_-) ds = \int_{\Gamma} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}_-) ds = - \int_{\Gamma} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}) ds = - \int_{\Gamma} (\mathbf{a} ds).$$



Aquí  $\tau$  es el vector unidad de la tangente a la curva orientada  $\Gamma$  y  $\tau_+$  es el vector unidad de la tangente a  $\Gamma_+$ .

El segundo término de esta cadena es la integral de primer género de la función  $(a\tau_+)$  (definida sobre  $\Gamma$ ). No depende de la orientación de  $\Gamma$  que es lo que explica la segunda igualdad de la cadena. La tercera igualdad se deduce del hecho de que

$$(a\tau_+) = -(a\tau).$$

La última igualdad se deduce de la definición de la integral de segundo género del vector  $a$  sobre la curva orientada  $\Gamma$ .

Si la curva orientada  $\Gamma$  es la suma de dos diferentes curvas orientadas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  ( $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ), entonces

$$\int_{\Gamma} (a ds) = \int_{\Gamma_1} (a ds) + \int_{\Gamma_2} (a ds).$$

La fig. 69 muestra la curva orientada  $\Gamma$  partida en dos curvas respectivamente orientadas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .

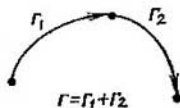


Fig. 69.

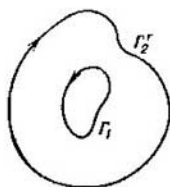


Fig. 70.

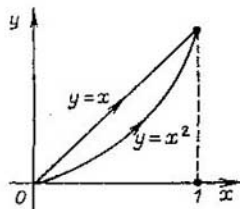


Fig. 71.

En la fig. 70 están representados dos contornos cerrados orientados  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . Por  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  se entiende el contorno orientado compuesto, o sea, la unión de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .

Por definición se supone que

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}.$$

**EJEMPLO 1.** Calcular la integral de segundo género (fig. 71)

$$I_1 = \int_{AB} (x^2 dx + xy dy)$$

a lo largo del segmento rectilíneo que va del punto  $(0, 0)$  al punto  $(1, 1)$  y respecto al arco de la parábola  $y = x^2$  que une estos mismos puntos.

En el primer caso tenemos ( $y = x$ )

$$I_1 = \int_{AB} (x^2 dx + xy dy) = \int_0^1 (x^2 + x^2) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

En el segundo caso ( $y = x^2$ )

$$I_1 = \int_0^1 (x^2 dx + x^3 2x dx) = \int_0^1 (x^2 + 2x^4) dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

EJEMPLO 2. Calcular la integral de segundo género

$$I_2 = \int_{AB} \left( x^2 y dx + \frac{x^3}{3} dy \right)$$

tomada a lo largo de las mismas curvas que en el ejemplo 1.

Tenemos ( $y = x$ )

$$I_2 = \int_0^1 \left( x^3 dx + \frac{x^3}{3} dx \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Luego, para  $y = x^2$  obtenemos

$$I_2 = \int_0^1 \left( x^4 dx + \frac{x^3}{3} 2x dx \right) = \int_0^1 \left( x^4 + \frac{2}{3} x^4 \right) dx = \frac{5}{3} \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{3}.$$

Estos ejemplos muestran que, en general, la integral de segundo género depende de la curva sobre la cual se calcula o, dicho de otro modo, depende de la ruta de integración.

En el segundo ejemplo hemos recibido un mismo valor siguiendo diferentes rutas de integración. Resulta que esto no es casual. A continuación vamos a aclarar la causa de la última propiedad.

### § 3.4. Campo de un potencial

Un caso importante del campo del vector

$$a = P(x, y, z) i + Q(x, y, z) j + R(x, y, z) k$$

es el que consiste en que sobre la región  $\Omega$ , donde está dado el campo existe la función  $U(x, y, z)$  con derivadas parciales continuas para las cuales se cumplen las igualdades (sobre  $\Omega$ )

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Tal función se llama *función potencial* o simplemente *potencial* del vector  $a$  sobre  $\Omega$ . Dicho también de otro modo, el vector  $a$  es el *gradiente de la función  $U$*  y se escribe<sup>1)</sup>

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k = a.$$

**EJEMPLO 1.** La función

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

está definida sobre todo el espacio, a excepción del punto nulo  $(0, 0, 0)$ . Su gradiente es igual a

$$\text{grad } U = \frac{x}{r^3} i + \frac{y}{r^3} j + \frac{z}{r^3} k = a.$$

En la igualdad

$$a = \frac{1}{r^2} \left( \frac{x}{r} i + \frac{y}{r} j + \frac{z}{r} k \right)$$

entre paréntesis se encuentra el vector unidad dirigido en el sentido del radio vector del punto  $(x, y, z)$ . Pero entonces

$$|a| = \frac{1}{r^2}.$$

Estos hechos se pueden interpretar del modo siguiente. En el punto nulo está la carga unidad eléctrica; en el punto  $(x, y, z)$  también está la carga unidad del mismo signo. La fuerza de interacción (de repulsión) entre estas cargas es el vector, aplicado al punto  $(x, y, z)$ , que está orientado como radio vector del punto  $(x, y, z)$ ; su magnitud es igual a  $1/r^2$ .

Como vemos, el vector  $a$  tiene el potencial  $U = -1/r$ .

Pasemos a las propiedades generales del campo de vector con un potencial.

**TEOREMA 1.** *Para que el campo del vector  $a$ , dado en la región  $\Omega$  del espacio, tenga un potencial es necesario y suficiente que cumpla una de las dos condiciones siguientes:*

1) *La integral del vector  $a$  tomada sobre cualquier contorno cerrado (suave a trozos)  $\Gamma$ , perteneciente a  $\Omega$ , es igual a cero.*

2) *La integral tomada por cualquier ruta (suave a trozos)  $\Gamma \subset \Omega$  que une dos puntos cualquiera de  $\Omega$  no depende de la ruta de integración.*

<sup>1)</sup> Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 8.8.

Si  $U(x, y, z)$  es la función potencial del vector  $a$ , entonces la integral de  $a$  tomada a lo largo de cualquier ruta  $\Gamma_{AB} \subset \Omega$  que une los puntos  $A = (x_0, y_0, z_0)$  y  $B = (x, y, z)$  es igual a

$$\int_{\Gamma_{AB}} (a \, ds) = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0). \quad (1)$$

DEMOSTRACION. Demostremos, ante todo, la equivalencia de las propiedades 1) y 2).

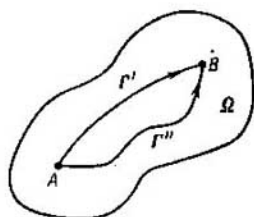


Fig. 72.

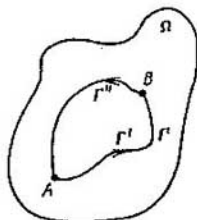


Fig. 73.

Supongamos que es justa la propiedad 1). Asignemos en  $\Omega$  dos puntos  $A$  y  $B$  (fig. 72). Unámoslos por medio de dos curvas diferentes  $\Gamma'$  y  $\Gamma''$  orientadas de  $A$  a  $B$ .

En virtud de 1)

$$\int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''} = 0,$$

por eso

$$\int_{\Gamma'} = - \int_{\Gamma''} = \int_{\Gamma''}$$

y queda demostrada la propiedad 2).

Inversamente, supongamos que es justa la propiedad 2). Asignemos un contorno cerrado orientado  $\Gamma$  (fig. 73).

Cortemos este contorno en los puntos  $A$  y  $B$  de modo que se obtengan respectivamente dos curvas orientadas

$$\Gamma = \Gamma' + \Gamma''.$$

En virtud de la propiedad 2)

$$\int_{\Gamma'} = \int_{\Gamma''},$$

de donde

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''} = \int_{\Gamma'} - \int_{\Gamma''} = 0$$

y queda demostrada 1).

Supongamos ahora que se sabe que el campo del vector  $a$  tiene en la región  $\Omega$  la función potencial  $U(x, y, z)$ .

Asignemos sobre  $\Omega$  el punto  $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y el punto variable  $A = (x, y, z)$ . Unamos  $A_0$  con  $A$  por medio de la curva suave a trozos continua  $\Gamma = \Gamma_{A_0 A}$ , orientada de  $A_0$  a  $A$  y definida por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\tau), & y &= \psi(\tau), \\ z &= \chi(\tau) & (t_0 \leq \tau \leq t). \end{aligned}$$

Ahora bien, a los valores  $t_0, t$  del parámetro  $\tau$  les corresponden los puntos  $A_0, A$ .

Si se sustituyen en  $U$   $x, y, z$  por las funciones  $\varphi, \psi, \chi$ , respectivamente, entonces  $U$  será la función suave a trozos continua de  $\tau$ . En virtud del teorema acerca de la función compuesta derivada en los puntos de suavidad de  $\Gamma$  (donde  $\Gamma$  tiene la tangente)

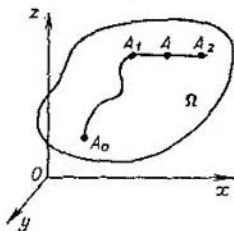


Fig. 74.

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{d\psi}{d\tau} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{d\chi}{d\tau}.$$

De aquí resulta que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz) &= \\ &= \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial x} \varphi'(\tau) + \frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial y} \psi'(\tau) + \frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial z} \chi'(\tau) \right) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial U}{\partial \tau} d\tau = U[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] - U[\varphi(t_0), \psi(t_0), \chi(t_0)] = \\ &= U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U(A) - U(A_0) \equiv V(A), \quad (2) \end{aligned}$$

o sea, la integral curvilínea de segundo género para el punto  $A_0$  fijo depende solamente de la posición del punto  $A \in \Omega$  y no depende de la ruta por la cual este punto se alcanza a partir del punto  $A_0$ . De este modo hemos demostrado la propiedad 2) y la igualdad (1) si se sabe que el vector  $a$  tiene en la región  $\Omega$  una función potencial.

Nos queda por demostrar que de la propiedad 2) se deduce que existe la función potencial  $U(x, y, z)$ , definida sobre  $\Omega$ , cuyo gradiente sobre  $\Omega$  es igual a  $\mathbf{a}$ . En efecto, asignemos el punto fijo  $A_0 \in \Omega$  (fig. 74). Supongamos que se cumple la propiedad 2), o sea, el campo del vector  $\mathbf{a}$  es tal que la integral curvilínea tomada sobre cualquier curva suave a trozos continua que une  $A_0$  con un punto arbitrario  $A \in \Omega$  no depende de esta curva y depende solamente del punto  $A$ . Ahora bien, existe la función  $V(A)$  definida sobre  $\Omega$ , tal que

$$\int_{\Gamma_{A_0 A}} (P dx + Q dy + R dz) = V(A) = V(x, y, z).$$

Para demostrar que  $\frac{\partial V}{\partial x} = P$  en el punto  $A$ , razonaremos del modo siguiente. Unamos el punto  $A_0$  con  $A$  por la curva especial  $\Gamma_{A_0 A} \subset \Omega$  (véase la fig. 74) que termina con cierto segmento  $A_1 A$ , paralelo al eje  $x$ . Prolonguemos este segmento hasta cierto punto  $A_2$ . Ahora bien, el punto variable  $A$  del segmento  $A_1 A_2$  tiene las coordenadas constantes  $y$  y  $z$  y una sola coordenada variable  $x$ . Representemos la curva  $\Gamma_{A_0 A}$  en forma de la suma de las curvas

$$\Gamma_{A_0 A} = \Gamma_{A_0 A_1} + \Gamma_{A_1 A}$$

y entonces

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \int_{\Gamma_{A_0 A}} (a ds) = \int_{\Gamma_{A_0 A_1}} (a ds) + \int_{\Gamma_{A_1 A}} (a ds) = \\ &= K + \int_{x_1}^x P(t, y, z) dt, \quad (3) \end{aligned}$$

donde  $K = \int_{\Gamma_{A_0 A_1}} (a ds)$  es la constante que no varía al moverse el punto  $A$  por el segmento  $A_1 A_2$  y  $A_1 = (x_1, y, z)$ . Hay que tener en cuenta que las ecuaciones del segmento  $A_1 A_2$  se pueden escribir en forma paramétrica (por el parámetro  $t$ )  $x = t$ ,  $y = y$ ,  $z = z$  de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{A_1 A}} Q dy &= \int_{x_1}^x Q(t, y, z) \cdot 0 dt = 0, \\ \int_{\Gamma_{A_1 A}} R dz &= \int_{x_1}^x R(t, y, z) \cdot 0 dt = 0. \end{aligned}$$

De esta manera hemos obtenido la igualdad (3) que es justa cualquiera que sea el punto  $(x, y, z)$  del segmento  $A_1A_2$ . Aquí  $y, z$  son fijas y  $x$  puede variar. Puesto que bajo la integral respecto a  $t$  en el segundo miembro de (3) se encuentra la función continua de  $t$ , entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x P(t, y, z) dt = P(x, y, z).$$

Análogamente, se puede demostrar que

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \Omega),$$

introduciendo las curvas especiales  $\Gamma_{A_0A} \subset \Omega$  que terminan con un segmento que es paralelo al eje  $y$  en un caso y es paralelo al eje  $z$  en el otro.

EJEMPLO 2. Si la fuerza  $\alpha$  es constante (en cuanto a su magnitud y su sentido) y el camino  $AB$  es rectilíneo, entonces, como es noto de la física, el trabajo de la fuerza es igual al producto de la magnitud de esta fuerza por la longitud del camino y por el coseno del ángulo entre la fuerza y la traslación, o sea, el trabajo es igual al producto escalar  $(\alpha, \overrightarrow{AB})$ .

Sin embargo, si la fuerza  $\alpha = \{P, Q, R\}$  es variable y el camino es curvilíneo, entonces, evidentemente, un elemento de trabajo de esta fuerza tomado sobre un tramo elemental del camino, correspondiente a la variación del parámetro de  $t$  a  $t + \Delta t$ , será aproximadamente igual al producto escalar de la fuerza  $\alpha$  en cierto punto de este tramo y del vector de traslación que no es más que la cuerda que une los extremos del tramo:

$$P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta z.$$

Sumando estos elementos del trabajo y pasando al límite (para  $\Delta t \rightarrow 0$ ), obtenemos el trabajo realizado a lo largo de toda la curva  $\Gamma$

$$\int_0^T [P\varphi'(t) + Q\psi'(t) + R\chi'(t)] dt = \int_{\Gamma} (\alpha\tau) ds = \int_{\Gamma} (\alpha ds).$$

Así, pues, la integral curvilínea de segundo género no es más que el trabajo de una fuerza variable (del vector  $\alpha$ ) realizado a lo largo de un camino orientado.

Calculemos el trabajo que realiza la fuerza  $\alpha$ , definida en el ejemplo 1, a lo largo del camino que une los puntos  $(1, 2, 2)$  y  $(3, 0, 4)$

La fuerza  $\alpha$  tiene la función potencial

$$U(x, y, z) = -1/r = -1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sobre la región  $\Omega$  que no es más que el espacio sin el punto nulo. Por eso la integral curvilínea no depende del camino.

En virtud de la fórmula (1) la integral del vector  $\alpha$  tomada a lo largo de cualquier camino (suave a trozos)  $\Gamma \subset \Omega$  que une los puntos (1, 2, 2) y (3, 0, 4) es igual a

$$\int_{\Gamma} (\alpha ds) = U(3, 0, 4) - U(1, 2, 2) = - \\ = -\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2^2+2^2}} = \frac{2}{15}.$$

Por tanto el trabajo buscado realizado por el vector  $\alpha = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$  es igual a  $2/15$ .

Surge la pregunta ¿cómo determinar si tiene o no el vector  $\alpha$  una función potencial sobre la región dada  $\Omega$ ? Para esto introduzcamos algunos conceptos nuevos.

Introduzcamos el vector simbólico  $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ . Se llama *operador de Hamilton*<sup>1)</sup>.

Se denomina *rotor del vector  $\alpha$*  el vector

$$\text{rot } \alpha = \nabla \times \alpha = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k.$$

Ahora bien, se puede decir que el rotor del vector  $\alpha$  es igual al producto vectorial del vector simbólico (operador de Hamilton) por el vector  $\alpha$ .

Los dos teoremas siguientes dan respuesta a la pregunta planteada anteriormente.

**TEOREMA 2.** *Si el vector  $\alpha$  tiene sobre  $\Omega$  la función potencial  $U$  que posee segundas derivadas parciales continuas, entonces*

$$\text{rot } \alpha = 0.$$

En efecto, según la condición del teorema

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

<sup>1)</sup> W. R. Hamilton (1805-1865), mecánico y matemático inglés.



Por eso

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0\end{aligned}$$

sobre  $\Omega$  que es lo que se necesitaba demostrar.

La afirmación inversa asimismo es justa, pero, hablando en general, para regiones simplemente conexas.

La región  $\Omega$  se llama *simplemente conexa* si cualquier curva  $\gamma$  suave a trozos cerrada que le pertenece puede ser contraída en un punto perteneciente a  $\Omega$ . Además, en el proceso de contracción  $\gamma$  debe pertenecer siempre a  $\Omega$ .

En esta definición es suficiente suponer que las curvas  $\gamma$  son auto-disjuntas. Tales curvas son fronteras de las regiones simplemente conexas respectivas  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ .

Como ejemplo de las regiones simplemente conexas puede servir todo el espacio o la esfera sin su frontera (superficie esférica).

Por otro lado, todo el espacio (tridimensional) del cual está sacada la recta es el ejemplo de una región no simplemente conexa.

**TEOREMA 3.** *Si la región  $\Omega$  es simplemente conexa y sobre ella está dado el vector  $a$ , con componentes continuamente derivables, para el cual*

$$\operatorname{rot} a = 0,$$

*entonces el vector  $a$  tiene sobre  $\Omega$  una función potencial (el potencial).*

En el caso tridimensional el teorema 3 se deduce de la fórmula de Stokes<sup>1)</sup> que será demostrada en el § 3.15; en el caso bidimensional (plano) éste se deduce de la fórmula de Green<sup>2)</sup> que demostraremos en el § 3.7.

En el caso plano examinamos el campo del vector

$$a = P(x, y) i + Q(x, y) j \quad ((x, y) \in \Omega),$$

donde  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son las funciones continuas sobre la región  $\Omega$  del plano.

La función  $U(x, y)$  se llama potencial para el vector  $a$  sobre  $\Omega$  si

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Los hechos expuestos anteriormente son justos asimismo para un plano. Sólo es necesario omitir por doquier  $z$  y suponer  $R \equiv 0$ .

<sup>1)</sup> G. Stokes (1819—1903), físico y matemático inglés.

<sup>2)</sup> G. Green (1793—1841), matemático inglés.

En el caso plano la definición de la región simplemente conexa se conserva. Prestemos atención a que un plano (espacio bidimensional) del cual está sacado un punto no es una región simplemente conexa.

EJEMPLO 3. El vector  $a$  con las componentes

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

tiene las derivadas parciales continuas sobre la región  $G$  que no es más que un plano con el punto nulo sacado.

Si el vector  $a$  se escribe en la forma

$$a = Pi + Qj + 0 \cdot k,$$

entonces se deduce que

$$\text{rot } a = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k.$$

Es fácil comprobar que en el caso dado

$$\text{rot } a = 0 \quad (\text{sobre } G).$$

La región  $G$  (¡de un plano!) no es simplemente conexa. No satisface la condición del teorema 3 y el mismo teorema, como veremos, para ella no es justa.

En efecto, la curva  $\gamma$  (circunferencia)

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

evidentemente, está cerrada y pertenece a  $G$ . La integral curvilínea del vector  $a$  tomada a lo largo de  $\gamma$  es igual a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (a \, ds) &= \int_{\gamma} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Vemos que existe la curva cerrada  $\gamma \subset G$  a lo largo de la cual la integral de  $a$  no es igual a cero.

Esto muestra, en virtud del teorema 1, que sobre  $G$  no existe una función potencial para el vector  $a$  que aquí se examina.

Por otro lado, si del plano  $(x, y)$  se saca el semieje negativo de  $x$  (fig. 75), o dicho de otro modo, si se lleva a cabo el corte del plano

por el semieje negativo de  $x$ , entonces el conjunto que queda y que designemos por  $G_1$ , será simplemente conexo y puesto que sobre  $G_1$   $\text{rot } \alpha = 0$ , entonces, en virtud del teorema 3, sobre  $G_1$  ya existe

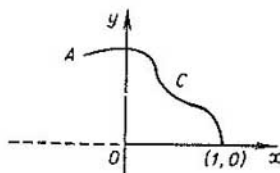


Fig. 75.

la función potencial del vector  $\alpha$ . Esta función puede ser escrita del modo siguiente:

$$U(A) = U(x, y) = \int_C \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2},$$

donde  $C \subset G_1$  es la curva orientada que une cierto punto inicial fijo  $A_0$ , por ejemplo  $(1, 0)$ , y el punto variable  $A = (x, y) \in G_1$  (véase la fig. 75).

Notemos que la curva  $C$  no debe cortar el semieje negativo de  $x$ .

### § 3.5. Ecuación diferencial en diferenciales totales

Examinemos la ecuación diferencial

$$M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = 0, \quad (1)$$

donde  $M$  y  $N$  son las funciones continuas sobre cierta región plana simplemente conexa  $\Omega$ .

Supongamos que el primer miembro de (1) sea una diferencial total, o sea, que exista sobre  $\Omega$  una función  $U(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) \quad (2)$$

En este caso la ecuación (1) se llama *ecuación en diferenciales totales*.

Esta puede ser escrita en la forma

$$dU(x, y) = 0. \quad (1')$$

Para resolver la ecuación (1), es necesario hallar la función  $U(x, y)$  e igualarla a la constante arbitraria

$$U(x, y) = C. \quad (3)$$

La ecuación (3) ofrece la integral general de la ecuación (1), tanto respecto a sus soluciones que tienen la forma  $y = y(x)$  como respecto a las que tienen la forma  $x = x(y)$  (véase el teorema 1 del § 1.2).

Notemos que en virtud de las igualdades (2) la función  $U(x, y)$  es el potencial del vector

$$a = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (4)$$

Del § 3.4 sabemos que para hallar la función  $U$  es necesario calcular la integral curvilínea

$$U(x, y) = \int_C (P dx + Q dy)$$

sobre la curva suave a trozos  $C \subset \Omega$  que une el punto fijo  $A_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$  con el punto variable  $A = (x, y) \in \Omega$ .

Supongamos que  $\Omega$  es un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes  $x$  e  $y$  (fig. 76).

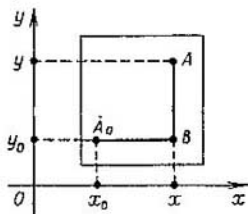


Fig. 76.

Se puede alcanzar el punto  $A$  a partir del punto  $A_0$  por la vía  $A_0BA$  y entonces deben efectuarse los cálculos siguientes:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{C_{A_0B}} (P dx + Q dy) + \int_{C_{BA}} (P dx + Q dy) = \\ &= \int_{x_0}^x P(u, y_0) du + \int_{y_0}^y Q(x, v) dv, \quad (5) \end{aligned}$$

porque

$$\int_{C_{A_0B}} Q dy = 0 \quad \int_{C_{AB}} P dx = 0$$

Recordemos que de los teoremas 2 y 3 del § 3.4 resulta que para la región plana simplemente conexa  $\Omega$  la ecuación (1) será ecuación en diferenciales totales si y sólo si ( $\text{rot } \alpha = 0$ )

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (6)$$

(naturalmente, a condición de que  $M$  y  $N$  sean continuamente derivables sobre  $\Omega$ ).

EJEMPLO. Resolver la ecuación diferencial

$$(x^\alpha + y^{\beta+1}) dx + (\beta + 1) xy^\beta dy = 0, \quad (7)$$

donde  $\alpha, \beta$  son los números reales, en la región  $\Omega$  de los puntos  $(x, y)$  con coordenadas positivas ( $x > 0, y > 0$ ). Aquí

$$M(x, y) = x^\alpha + y^{\beta+1}, \quad N(x, y) = (\beta + 1) xy^\beta,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (\beta + 1) y^\beta, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = (\beta + 1) y^\beta,$$

o sea,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ sobre } \Omega,$$

donde  $\Omega$  es la región simplemente conexa. Por eso

$$\text{rot } \alpha = \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) k = 0$$

y, por consiguiente, según el teorema 3 del § 3.4 existe la función  $U(x, y)$  cuya diferencial total es el primer miembro de (7). Se puede obtener esta función por la fórmula (5):

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x (u^\alpha + y_0^{\beta+1}) du + \int_{y_0}^y (\beta + 1) xv^\beta + dv = \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{x_0^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy_0^{\beta+1} - x_0y_0^{\beta+1} + xy^{\beta+1} - xy_0^{\beta+1} = \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy^{\beta+1} + C \quad (\alpha \neq -1). \end{aligned}$$

Ahora bien, la solución general de la ecuación (7) en  $\Omega$  es la función  $y(x)$  que satisface la ecuación

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy^{\beta+1} = C,$$

donde  $C$  es la constante arbitraria. Cuando  $\alpha = -1$ , la solución general se halla de la ecuación

$$\ln |x| + xy^{\beta+1} = C.$$

### § 3.6. Orientación de una región plana

En el plano hay dos tipos de sistemas rectangulares de coordenadas representados en las figs. 77 y 78.

Su diferencia consiste en que es imposible, trasladando estos sistemas en el plano, hacerlos coincidir de modo que coincidan sus ejes positivos  $x$  e  $y$ .

La fig. 77 muestra la región simplemente conexa  $\Omega$  con una frontera orientada suave a trozos  $\Gamma$ . Para el sistema de coordenadas

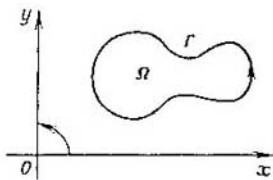


Fig. 77.

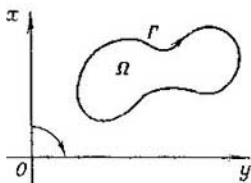


Fig. 78.

representado el recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj se considera *positivo*. Al moverse por  $\Gamma$  en el sentido antihorario la región  $\Omega$  queda *a la izquierda*.

En la fig. 78 está representada la misma región  $\Omega$ , pero en el otro sistema rectangular de coordenadas. Aquí el recorrido por  $\Gamma$

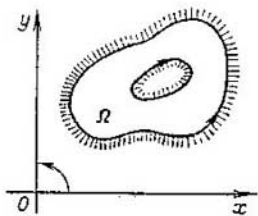


Fig. 79.

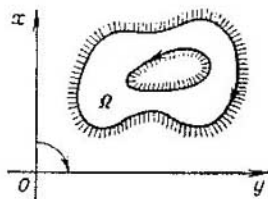


Fig. 80.

en el sentido de las agujas del reloj se considera positivo y entonces al moverse por  $\Gamma$  en el sentido horario la región  $\Omega$  queda *a la derecha*.

Por definición, en el caso del sistema mostrado en la fig. 79, la frontera (contorno)  $\Gamma$  de una región plana múltiplemente (no simplemente) conexa  $\Omega$  se considera *orientada positiva* o *negativamente* en dependencia del hecho de que quede  $\Omega$  a la izquierda o a la derecha al moverse por  $\Gamma$  en el sentido indicado por la flecha.

En las figs. 79 y 80 están representadas las regiones doblemente conexas  $\Omega$  en diferentes sistemas de coordenadas. Las flechas indicadas en sus fronteras corresponden al sentido positivo de  $\Gamma$ .

La fig. 81 muestra una región triplemente conexas cuya frontera está orientada negativamente.

Se dice, además, que la región  $\Omega$  está orientada positiva o negativamente si su frontera  $\Gamma$  está orientada, respectivamente, en el sentido positivo o negativo.

Si  $\Omega$  está orientada positivamente, entonces  $\Omega_+$  designa la misma región orientada negativamente.

Es útil el acuerdo siguiente. Sean  $\Omega$  la región en el plano  $x, y$ ,  $\Omega_+$  la región  $\Omega$  orientada positivamente y  $\Omega_-$  la región  $\Omega$  orientada negativamente. Entonces, por definición,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_+} f(x, y) dx dy &= \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy, \\ \iint_{\Omega_-} f(x, y) dx dy &= - \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

donde los segundos miembros son las integrales dobles corrientes sobre  $\Omega$  de  $f(x, y)$ .

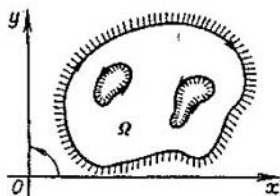


Fig. 81.

### § 3.7. Fórmula de Green

Para regiones planas suficientemente generales  $\Omega$  provistas de una frontera  $\Gamma$  positivamente orientada es válida la fórmula

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (P dx + Q dy) \quad (1)$$

llamada *fórmula de Green*. En ella se supone que  $Q$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $P$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  son continuas en la clausura  $\bar{\Omega}$  de la región  $\Omega$ .

Examinemos primeramente la región plana  $\Omega$  representada en la fig. 82 que denominaremos  *$H_y$ -región elemental*. Inferior y superiormente  $\Omega$  está limitada por las curvas suaves a trozos expresadas por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x), \quad y = \psi(x), \\ \varphi(x) &\leq \psi(x), \quad (a \leq x \leq b). \end{aligned}$$

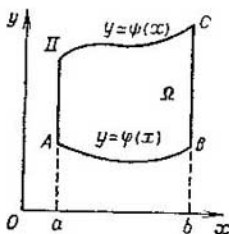


Fig. 82.

A la izquierda y a la derecha  $\Omega$  está limitada por segmentos de rectas paralelas al eje de ordenadas. Notemos que estos segmentos pueden degenerar en puntos.

La frontera  $\Gamma$  de la región  $\Omega$  se compone de cuatro partes:

$$\Gamma = \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA} + \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC}.$$

Para tal región  $\Omega$  tiene lugar la igualdad

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx = \\ &= - \int_b^a P(x, \psi(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx = \\ &= - \int_{\Gamma_{CD}} P(x, y) dx - \int_{\Gamma_{DA}} P(x, y) dx - \int_{\Gamma_{AB}} P(x, y) dx - \\ &\quad - \int_{\Gamma_{BC}} P(x, y) dx = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Aclaremos la última igualdad. La curva  $\Gamma_{CD}$  tiene las ecuaciones paramétricas (con el parámetro  $x$ )

$$x = x, \quad y = \psi(x).$$

En este caso al valor  $x = b$  le corresponde el punto  $C$  y al valor  $x = a$ , el punto  $D$ . La curva  $\Gamma_{AB}$  se define por las ecuaciones

$$x = x, \quad y = \varphi(x).$$

Al valor  $x = a$  le corresponde el punto  $A$  y al valor  $x = b$ , el punto  $B$ . Por último, el segmento  $BC$  tiene las ecuaciones  $x = b, y = y$



(con el parámetro  $y$ ). A lo largo de este segmento  $dx = 0$ , por eso de hecho

$$\int_{\Gamma_{BC}} P(x, y) dx = 0.$$

Análogamente, la integral sobre el segmento  $DA$  es igual a cero:

$$\int_{\Gamma_{DA}} = P(x, y) dx = 0.$$

Así, pues, hemos demostrado que

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \quad (2)$$

Esta fórmula concierne a toda región  $\Omega$  que pueda ser partida en un número finito de  $H_y$ -regiones elementales. Llamaremos a tal región simplemente  $H_y$ -región.

En efecto, sea  $\Omega = \sum_{j=1}^N \Omega_j$ , donde  $\Omega_j$  son  $H_y$ -regiones elementales con frontera  $\gamma_j$  que vamos a considerar orientadas positivamente (fig. 83). Entonces

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_{j=1}^N \iint_{\Omega_j} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_{j=1}^N - \int_{\gamma_j} P dx = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \quad (3)$$

La tercera igualdad necesita explicaciones.

Aquí es importante notar que si dos contornos  $\gamma_i$  y  $\gamma_j$  ( $i \neq j$ ) tienen un trozo común  $\gamma'$ , entonces éste, como parte de  $\gamma_i$  y de  $\gamma_j$ , está orientado en dirección contraria y por eso las integrales curvilí-

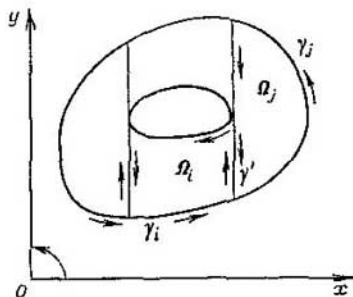


Fig. 83.

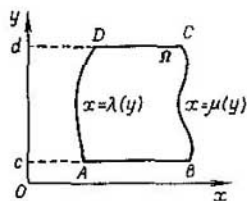


Fig. 84.

neas de  $P$  sobre  $\gamma'$  no se diferencian en ambos casos sino por el signo: su suma es igual a cero. Si lo último se tiene en cuenta la suma  $\sum_{j=1}^N$  en la cadena (3) se reducirá a la suma de las integrales curvilíneas sobre los trozos  $\gamma_j$ , pertenecientes a  $\Gamma$ , a la suma que es igual a la integral sobre el contorno  $\Gamma$ .

Por analogía, se puede introducir el concepto de  $H_x$ -región elemental. En este caso  $\Omega$  está limitada a la izquierda y a la derecha por las curvas suaves a trozos (fig. 84)

$$\begin{aligned} x &= \lambda(y), & x &= \mu(y), \\ \lambda(y) &\leq \mu(y) & (c \leq y \leq d). \end{aligned}$$

Superior e inferiormente  $\Omega$  está limitada por los segmentos de las rectas paralelas al eje  $x$ .

Se puede decir también que la  $H_x$ -región elemental se define al igual que la  $H_y$ -región elemental, con la sola diferencia de que ahora es la coordenada  $x$  la que desempeña el papel de  $y$ .

Para la  $H_x$ -región elemental  $\Omega$  obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d [Q(\mu(y), y) - Q(\lambda(y), y)] dy = \\ &= \int_c^d Q(\mu(y), y) dy + \int_d^c Q(\lambda(y), y) dy = \\ &= \int_{\Gamma_{BC}} Q(x, y) dy + \int_{\Gamma_{DA}} Q(x, y) dy = \\ &= \int_{\Gamma_{BC}} Q dy + \int_{\Gamma_{CD}} Q dy + \int_{\Gamma_{DA}} Q dy + \int_{\Gamma_{AB}} Q dy = \int_{\Gamma} Q(x, y) dy, \quad (4) \end{aligned}$$

ya que  $dy = 0$  sobre los segmentos  $CD$  y  $AB$ , entonces también

$$\int_{\Gamma_{CD}} Q dy = \int_{\Gamma_{AB}} Q dy = 0.$$

La fórmula (4) asimismo concierne a toda región  $\Omega$  que pueda partirse en un número finito de  $H_x$ -regiones elementales. Llamaremos a tal región simplemente  $H_x$ -región.

Así, pues, hemos demostrado la proposición siguiente:

**TEOREMA 1.** Si la región  $\Omega$  es simultáneamente una  $H_x$ -región y una  $H_y$ -región, para ella será válida la fórmula de Green.

Para la demostración es suficiente restar de la igualdad (4) la igualdad (3) que son válidas para la región  $\Omega$  que posee las propiedades indicadas.

Como ejemplos de las regiones que son a la vez  $H_x$ - y  $H_y$ -regiones pueden servir la región

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} x^2 < y < 1 \\ -1 < x < 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{y} < x < \sqrt{y} \\ 0 < y < 1 \end{array} \right\}$$

y la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1.$$

Además, estas regiones son  $H_x$ - y  $H_y$ -regiones elementales.

*Observación 1.* Se puede demostrar una afirmación más general. Si la región  $\Omega$  está limitada por un contorno suave a trozos cerrado arbitrario  $\Gamma$ , que sea autodisjunto, entonces para ella será justa la fórmula de Green (1).

**COROLARIO 1.** Si una región plana  $\Omega$  es simplemente conexa y sobre ella queda asignado el vector continuamente derivable

$$a = P(x, y) i + Q(x, y) j$$

para el cual

$$\text{rot } a = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k = 0,$$

entonces  $a$  tiene sobre  $\Omega$  un potencial (o sea, tiene lugar en el caso plano el teorema 3 del § 3.4).

En efecto, asignemos un contorno suave a trozos continuo autodisjunto arbitrario  $\gamma \subset \Omega$  que sea orientado positivamente (fig. 85).

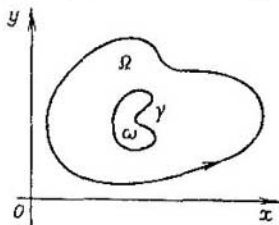


Fig. 85.

Este contorno sirve de frontera de cierta región  $\omega$ . Con arreglo al teorema (fórmula) de Green (véase la observación 1)

$$\int_{\gamma} (P dx + Q dy) = \iint_{\omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\omega} 0 dx dy = 0$$

y por cuanto  $\gamma \subset \Omega$  es un contorno autodisjunto cerrado arbitrario, entonces, en virtud del teorema 1 del § 3.4 el vector  $a$  tiene un potencial sobre  $\Omega$ .

*Observación 2.* Puesto que la integral doble de la función unidad sobre la región  $\Omega$  es igual al área (medida) de la región  $\Omega$ , entonces, escogiendo  $P$  y  $Q$  de modo que  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1$ , obtenemos diferentes expresiones del área de la región  $\Omega$  por medio de una integral curvilínea:

$$m\Omega = \int_{\Gamma} (P dx + Q dy).$$

En particular, cuando  $P = -y/2$  y  $Q = x/2$ , obtenemos

$$m\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (-y dx + x dy). \quad (5)$$

**EJEMPLO.** Calcular el área limitada por la elipse

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Según la fórmula (5) tenemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (-y dx + x dy) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2 t + ab \cos^2 t) dt = \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

### § 3.8. Integral sobre una superficie de primer género

Supongamos que la superficie suave  $S$  está definida por la ecuación

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \varphi i + \psi j + \chi k \\ ((u, v) \in \Omega \Rightarrow S, \quad |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| > 0), \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\Omega$  es una región acotada provista de frontera suave a trozos y  $\varphi, \psi, \chi$  son las funciones continuamente derivables sobre  $\bar{\Omega}$ . El símbolo  $\Omega \Rightarrow S$  designa la correspondencia biunívoca entre los puntos  $(u, v) \in \Omega$  y los de  $S$ .

Supongamos luego que sobre  $\bar{S}$  o en el entorno de  $\bar{S}$  está dada la función continua  $F(x, y, z)$ . Efectuemos la división de  $\Omega$  en partes con fronteras suaves a trozos que no se intersequen dos a dos a no

ser por sus fronteras. A cada parte  $\Omega_j$  le corresponde cierta parte  $S_j$  de la superficie  $S$ . Sea  $A_j = (x_j, y_j, z_j)$  un punto arbitrario sobre  $S_j$ . Hagamos la suma

$$\Pi_N = \sum_{j=1}^N F(A_j) |S_j|,$$

donde  $|S_j|$  es el área  $S_j$  (véase el § 2.11). Su límite

$$\lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N F(A_j) |S_j| = \int_S F(x, y, z) dS \quad (2)$$

se llama *integral sobre la superficie  $S$  (de primer género)* de la función  $F$  (o bien *integral de superficie de primer género*).

Por ejemplo, si sobre  $S$  está distribuida una masa con una densidad de distribución  $F$ , entonces la integral de  $F$  sobre  $S$  expresará la masa total  $S$ .

La integral (2) se calcula por la fórmula siguiente:

$$\int_S F(x, y, z) dS = \int_{\Omega} F[\varphi, \psi, \chi] |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| du dv, \quad (3)$$

donde en el segundo miembro se encuentra una integral múltiple corriente respecto a  $(u, v) \in \Omega$ .

En particular, si la superficie suave  $S$  está definida por la ecuación  $z = f(x, y)$  ( $(x, y) \in G$ ), donde  $f$  es continua junto con sus derivadas parciales de primer género sobre  $\bar{G}$ , entonces se puede considerar que está dada paraméricamente por  $x, y$ :

$$x = x, \quad y = y, \quad z = f(x, y).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y &= -f'_x \mathbf{i} - f'_y \mathbf{j} + \mathbf{k}, \\ |\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{r}}_y| &= \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \left( p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\int_S F(x, y, z) dS = \int_G F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (4)$$

Demostremos la fórmula (3). Sea  $A_j = (x_j, y_j, z_j)$  y

$$\begin{aligned} x_j &= \varphi(u_j, v_j), \quad y_j = \psi(u_j, v_j), \quad z_j = \chi(u_j, v_j), \\ (u_j, v_j) &\in \Omega_j \quad (j = 1, \dots, N). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Pi_N &= \sum_{j=1}^N F(A_j) \int_{\Omega_j} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv = \sum_{j=1}^N F(A_j) |\dot{r}_u \times \dot{r}_v|_j^* |\Omega_j| = \\ &= \sum_{j=1}^N F(A_j) |\dot{r}_u \times \dot{r}_v|_j |\Omega_j| + \varepsilon_N \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\Omega} F(\varphi, \psi, \chi) |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv \quad (\max d(\Omega_j) \rightarrow 0), \end{aligned}$$

donde el signo  $|_j$  significa que entre  $|$  está puesto el punto  $A_j$  y  $|_j^*$ , que entre  $|$  está puesto un punto tal que se cumpla el teorema del valor medio para la integral

$$\int_{\Omega_j} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| \, du \, dv = |\dot{r}_u \times \dot{r}_v|_j^* |\Omega_j|$$

(véase el § 2.3, teorema 3).

Es evidente que  $(K > |F(A)|)$  para todo valor pequeño de  $\eta$

$$\begin{aligned} |\varepsilon_N| &= \left| \sum_{j=1}^N F(A_j) (|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|_j^* - |\dot{r}_u \times \dot{r}_v|_j) |\Omega_j| \right| \leq \\ &\leq K\eta \sum_{j=1}^N |\Omega_j| = K\eta |\Omega| \end{aligned}$$

si sólo  $d(\Omega_j) < \delta$ , donde  $\delta$  es un número dependiente de  $\eta$ , porque la función  $|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|$  es continua sobre  $\bar{\Omega}$ .

### § 3.9. Orientación de una superficie

Examinemos un trozo de la superficie suave  $S$ , definido por la ecuación vectorial

$$\begin{aligned} r = r(u, v) &= \varphi(u, v) i + \psi(u, v) j + \chi(u, v) k \\ &((u, v) \in \bar{\Omega}), \end{aligned} \quad (1)$$

donde las funciones  $\varphi, \psi, \chi$  son continuamente derivables en la clausura  $\bar{\Omega}$  de la región  $\Omega$  provista de una frontera suave a trozos y

$$|\dot{r}_u \times \dot{r}_v| > 0, \quad (u, v) \in \bar{\Omega}. \quad (2)$$

Suponemos, como siempre, que tiene lugar la correspondencia biunívoca  $\bar{\Omega} \rightleftharpoons S$  entre los puntos  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  y los puntos de  $S$ .

La normal unidad en un punto arbitrario de  $S$  se determina por la fórmula

$$n = \pm \frac{\dot{r}_u \times \dot{r}_v}{|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|}, \quad (u, v) \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

Al signo «+» le corresponde un lado de la superficie  $S$  con la escobilla de vectores unitarios normales, continuamente dependientes de  $(u, v)$ , salidos en dirección de ésta, y al signo «-», el otro lado de  $S$ .

Demos la definición. Si de cada punto  $A$  de una superficie suave  $S$  se puede hacer salir la normal unidad  $n(A)$  de modo que la función vectorial obtenida de  $A$  sea continua sobre toda la superficie  $S$ , entonces  $S$  se llama superficie orientada.

Además, la función  $n(A)$  se denomina campo continuo de normales.

La superficie para la cual queda definida tal función  $n(A)$  se llama orientada con ayuda de  $n(A)$ . Si decimos que  $S$  es una superficie orientada, entonces de este modo consideramos que  $S$  significa no sólo una superficie (conjunto de puntos) sino también el hecho de que ella lleva asignada la función  $n(A)$  que es continua sobre  $S$ . Se dice, además, que  $n(A)$  asigna un lado determinado de la superficie suave orientada (hacia donde sale de  $S$  la escobilla de vectores unitarios de  $n(A)$ , dependientes continuamente de  $A$ ).

La misma superficie pero orientada de modo opuesto (con la escobilla de vectores unitarios normales dirigidos en el sentido contrario) es necesario ya designarla con otra letra. Dos superficies como éstas orientadas en direcciones contrarias es cómodo designarlas con las letras  $S_+$  y  $S_-$ . Una de ellas se anota arbitrariamente por  $S_+$  y la otra obtiene automáticamente la designación  $S_-$ .

Como ejemplo elemental de una superficie orientable se puede presentar el plano  $xOy$ . Los vectores unitarios que son perpendiculares al plano y van dirigidos en el sentido positivo del eje  $z$  definen un lado del plano y los vectores que van dirigidos en el sentido negativo del eje  $z$ , el otro lado del plano ( $n(A) = \pm k$ ).

La superficie de un elipsoide es también orientable: el vector unitario normal salido de cualquier punto de ésta al exterior del elipsoide se prolonga, evidentemente, (de un modo unívoco) sobre toda la superficie.

De esta manera la superficie queda orientada (está definido el lado exterior del elipsoide).

La orientación contraria de esta superficie se define por el vector unitario normal a ella que va hacia el interior del elipsoide (el lado interior del elipsoide).

Hemos visto más arriba que si  $S$  es una superficie suave definida por las ecuaciones paramétricas (1) y posee las propiedades allí

indicadas, ella es orientable. Al signo «+» le corresponde en la fórmula (3) una orientación determinada de  $S$  y al signo «-», la orientación contraria.

En general, existen asimismo superficies suaves *no orientables*.

Si torcemos la hoja rectangular  $abb'a'$  (fig. 86) una vez y encolamos sus lados  $ab$  y  $a'b'$  de tal modo que los puntos  $a$ ,  $b'$  y  $b$ ,  $a'$

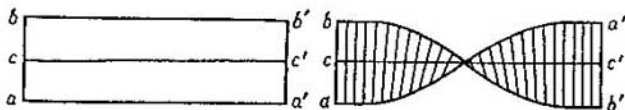


Fig. 86.

queden pegados dos a dos, obtendremos una superficie no orientable (fig. 87) llamada *cinta de Möbius*<sup>1)</sup>.

En la fig. 86 se señala el segmento  $cc'$ , o sea, la línea media de la hoja de papel rectangular. En la cinta de Möbius a esta línea le corresponde la curva cerrada  $cc'$  en la cual los puntos  $c$  y  $c'$  coinciden

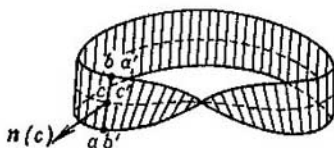


Fig. 87.

formando un solo punto. Hagamos que de  $c$  salga la normal unidad  $n(c)$  de manera arbitraria, pero determinada. Una vez escogido el sentido de  $n(c)$  (entre dos posibles), inevitablemente se determina la opción de  $n(A)$  para todos los puntos  $A \in cc'$  si queremos que el vector de  $n(A)$  dependa continuamente de  $A$ . Sin embargo, en el punto  $c'$  el vector  $n(c')$  ya está escogido: puesto que  $c$  y  $c'$  coinciden. Es fácil ver que si el punto de la línea media del rectángulo se mueve continuamente de  $c$  a  $c'$ , la normal unidad  $n(A)$ , donde  $A$  es el punto de la cinta de Möbius, tenderá hacia  $-n(c)$  y no hacia  $n(c)$  y, por consiguiente, la función vectorial  $n(A)$  resulta discontinua en el punto  $c = c' \in S$ . De este modo la cinta de Möbius es inorientable.

<sup>1)</sup> A. F. Möbius (1790—1868), matemático alemán.



### § 3.10. Sistema de coordenadas y orientación de una superficie

En el espacio tridimensional hay dos sistemas rectangulares de coordenadas esencialmente diferentes, representados en las figs. 88 y 89. Su diferencia consiste en que es imposible realizar tal movimiento de uno de los sistemas que, como resultado de ello, coincidan los puntos  $O$  y las semirrectas positivas respectivas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de ambos sistemas.

El primer sistema (fig. 88) se llama *derecho* y el segundo (fig. 89), *izquierdo*<sup>1)</sup>. Si se mira de abajo arriba a lo largo del eje positivo  $z$ , entonces, para que el eje positivo  $x$  coincida con el positivo  $y$  en la

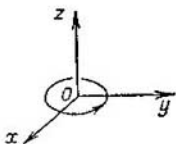


Fig. 88

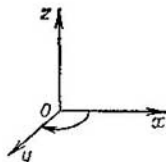


Fig. 89.

dirección más breve, es necesario girar el eje  $x$  en el plano  $x, y$  en el caso de la fig. 88 de izquierda a derecha (en el sentido de las agujas del reloj) y en el caso de la fig. 89 de derecha a izquierda (en el sentido contrario al de las agujas del reloj).

Es natural que con cada uno de los sistemas que se examinan se relacione el «sacacorchos», o sea, la combinación compuesta por el vector unitario orientado en el sentido positivo del eje  $z$  y por el círculo (cabeza del sacacorchos), perpendicular al eje  $z$ , en cuya frontera (circunferencia) se da el sentido de recorrer del eje  $x$  al eje  $y$  en la dirección más breve.

Si en el caso de la fig. 88 consideramos que  $z$  es el eje del tornillo (sacacorchos) y éste es de «rosca dextrorsa», entonces, girando la cabeza de este tornillo en dirección de la flecha, haremos que el sacacorchos se mueva en dirección del eje positivo  $z$  (sacacorchos dextrorso). Alcanzaremos el mismo efecto en el caso de la fig. 89 si el eje  $z$  es el del tornillo que tiene la rosca sinistrorsa (sacacorchos sinistrorso).

La cabeza del sacacorchos puede estar torcida, o sea, puede representar un trozo de la superficie suave, no obligatoriamente plana, pero tal que el eje  $z$  sea normal a este trozo en el punto  $O$ . También en este caso la combinación hecha de tal cabeza, en la cual se da el

<sup>1)</sup> Véase nuestro libro «Matemáticas superiores, Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 11.

sentido del recorrido, y de la normal unidad forma un sacacorchos (dextrorso o sinistrorso).

Por último, se puede imaginar un sacacorchos dextrorso o sinistrorso con un vector normal que vaya en el sentido arbitrario que no obligatoriamente coincida con el eje  $z$ . En adelante es importante que se figure la estructura siguiente. Supongamos que en el espacio tridimensional está dado un sistema rectangular de coordenadas (dextrorso o sinistrorso) y una superficie orientada  $S$ . Ahora bien, de cada punto  $P \in S$  sale la normal unidad  $\mathbf{n}(P)$ , continuamente dependiente de  $P$ . Una esfera  $V(P)$  de radio suficientemente pequeño

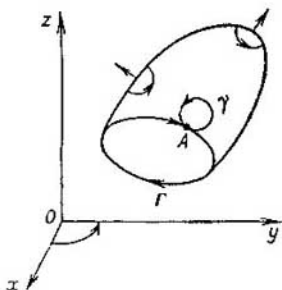


Fig. 90.

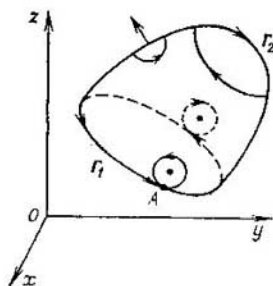


Fig. 91.

que tiene por centro el punto  $P$  entalla de la superficie  $S$  cierto trozo conexo  $\sigma(P)$  que contiene el punto  $P$ . Determinemos sobre el contorno (sobre el borde)  $\gamma(P)$  de este trozo el sentido de recorrer de modo que el vector  $\mathbf{n}(P)$  y el trozo  $\sigma(P)$  formen un sacacorchos orientado al igual que el sistema dado de coordenadas, o sea, si el sistema de coordenadas es dextrorso (sinistrorso), el sacacorchos asimismo debe ser dextrorso (sinistrorso).

Si la superficie  $S$  tiene el borde  $\Gamma$ , entonces la estructura diseñada conduce, de un modo natural, a determinada dirección del recorrido sobre  $\Gamma$  (fig. 90). Prestemos atención, por ejemplo, al punto  $A$  del contorno  $\Gamma$ . En este punto el sentido del recorrido por  $\Gamma$  y el del recorrido por el círculo torcido cerrado  $\gamma$ , perteneciente a  $S$ , coinciden.

Si la superficie dada hubiera sido orientada de un modo contrario y hubiera quedado el sistema anterior de coordenadas, los sentidos del recorrido determinados más arriba deberían ser cambiados por los opuestos.

La fig. 91 presenta una superficie orientada con un borde constituido por dos curvas suaves cerradas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .

Notemos, además, el hecho siguiente. Supongamos que una superficie suave orientada  $S$  está partida por un arco suave  $h$  en dos superficies del mismo modo orientadas  $S_1$  y  $S_2$  (fig. 92). Entonces los sentidos del recorrido de los contornos de  $S_1$  y  $S_2$  a lo largo del arco  $h$  serán contrarios.

Esta observación servirá de guía para definir de un modo justo el concepto de superficie suave a trozos orientada.

*Una superficie suave a trozos  $S$  se llama orientada si cada uno de sus trozos suaves está orientado y los sentidos surgidos del recorrido de los contornos de estos trozos están concordados de modo que a lo largo*

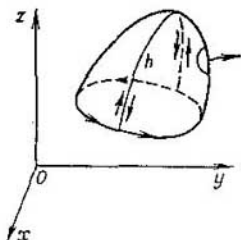


Fig. 92.

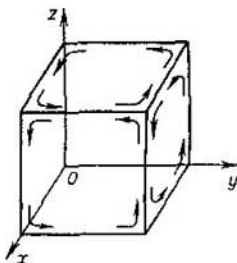


Fig. 93.

*de cada arco donde dos contornos semejantes coinciden, las direcciones de sus recorridos sean contrarias.*

La fig. 93. representa un cubo cuya superficie está orientada por su normal exterior.

Es cómodo considerar como vectores los trozos pequeños de una superficie orientada (elementos de la superficie).

Sea  $S$  una superficie suave orientada y, por lo tanto, de cada punto  $A \in S$  sale una normal unidad  $n(A)$  a  $S$  en  $A$ , continuamente dependiente de  $A$ . Sea  $\sigma$  un trozo suave de  $S$ . Supongamos que  $\sigma$  es un vector cuya magnitud escalar sea igual al área  $|\sigma|$  del trozo  $\sigma$  y cuyo sentido se determine por el vector  $n(A)$ , donde  $A$  es un punto  $\sigma$  cualquiera. Ahora bien,  $\sigma = |\sigma| n(A)$ .

Desde luego, de esta manera el vector  $\sigma$  no está definido unívocamente. Sin embargo, si el diámetro  $d(\sigma)$  es pequeño, entonces el sentido de  $n(A)$  no sale fuera de los límites de cierto cono pequeño y si  $\sigma$  es un trozo variable que contiene constantemente el punto fijo  $A_0$ , entonces, evidentemente,  $n(A) \rightarrow n(A_0)$  ( $d(\sigma) \rightarrow 0$ ), donde  $d(\sigma)$  es el diámetro de  $\sigma$ , sin importar el hecho de cómo se ha escogido el punto  $A \in \sigma$  para cada  $\sigma$ .

*Es natural que el elemento diferencial de una superficie orientada  $S$  en el punto  $A \in S$  se considere como vector  $dS = n(A) dS$  el cual, por lo tanto, será igual al producto del elemento diferencial del área*

de  $S$  en el punto  $A$  por el vector de la normal unitaria  $n(A)$  que determina la orientación de  $S$ .

Si  $S$  se define por la ecuación

$$r = r(u, v) = \varphi i + \psi j + \chi k \quad ((u, v) \in \bar{G}),$$

entonces  $n(A)$  se define por una de las siguientes igualdades

$$n(A) = \pm \frac{\dot{r}_u \times \dot{r}_v}{|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|} \quad (1)$$

y  $dS = |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| du dv$ . De aquí

$$dS = \pm (\dot{r}_u \times \dot{r}_v) du dv. \quad (2)$$

A continuación suponemos que en (1) y (2) se ha escogido el signo «+». Siempre se puede alcanzar esto al cambiar, en caso de necesidad, de lugar los parámetros  $u$  y  $v$ . De este modo si tenemos dada cierta superficie suave orientada  $S$ , siempre se puede suponer que ésta se describe por tal función vectorial  $r = r(u, v)$  que la normal unidad  $n(A)$  ( $A \in S$ ), que determina la orientación de  $S$ , se exprese por la igualdad

$$n(A) = \frac{\dot{r}_u \times \dot{r}_v}{|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|} \quad (3)$$

y, respectivamente,

$$dS = (\dot{r}_u \times \dot{r}_v) du dv. \quad (4)$$

Si queremos que, al transformar los parámetros  $(u, v)$  en parámetros  $(u', v')$ , no aparezca el signo «-» en estas expresiones, es necesario que el jacobiano de la transformación  $\frac{D(u, v)}{D(u', v')}$  sea positivo. En efecto,

$$\begin{aligned} n(A) &= \frac{\dot{r}_u \times \dot{r}_v}{|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|} = \\ &= \frac{\frac{D(y, z)}{D(u, v)} i + \frac{D(z, x)}{D(u, v)} j + \frac{D(x, y)}{D(u, v)} k}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2}} = \\ &= \frac{\frac{D(y, z)}{D(u', v')} i + \frac{D(z, x)}{D(u', v')} j + \frac{D(x, y)}{D(u', v')} k}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{D(u', v')}{D(u, v)}}{\left|\frac{D(u', v')}{D(u, v)}\right|} = \\ &= \frac{\dot{r}_{u'} \times \dot{r}_{v'}}{|\dot{r}_{u'} \times \dot{r}_{v'}|} \cdot \text{sign} \frac{D(u', v')}{D(u, v)} \quad ^1) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 8.18.

Ahora bien, la fórmula (3) (¡con el signo «+»!) para la normal unidad  $n(A)$  (y junto con ella también la fórmula (4) es invariante sólo respecto a las transformaciones de los parámetros con un jacobiano positivo.

Por eso al transformar los parámetros conviene recomendar las transformaciones con jacobianos positivos.

No obstante, hay casos cuando tenemos que examinar las transformaciones con jacobiano negativo. Entonces hay que controlar especialmente la aplicación correcta de los signos.

En lo que se refiere a una superficie arbitraria orientada en el espacio  $x, y, z$  no hay ninguna razón para decir que está orientada positiva o negativamente. Otra cosa es si la superficie es plana, perteneciente a uno de los planos de coordenadas.

La región orientada  $G$ , perteneciente al plano  $xOy$ , se llama positiva (negativa) y se designa por el símbolo  $G_+$  ( $G_-$ ) si la normal unidad  $n(A)$ , correspondiente a la región  $G$ , es igual a  $k$ , donde  $k$  es el versor del eje  $z$ .

Esta definición concuerda con la dada en el § 3.6. Hace falta sólo suponer allí que miramos el plano  $xOy$  a partir de  $z$  positivos.

Si en esta definición sustituimos  $x, y$  por  $y, z$  o por  $z, x$ , respectivamente, así como  $k$  por el versor  $i$  del eje  $x$  o por el versor  $j$  del eje  $y$ , respectivamente, obtenemos la definición de  $G_+$  para las regiones pertenecientes a los planos  $yOz, zOx$ .

Para las regiones  $G_-$  pertenecientes a  $xOy, yOz$  o  $zOx$  es necesario sustituir  $k, i, j$  por  $-k, -i, -j$ , respectivamente.

### § 3.11. Integral sobre una región plana orientada

En el § 3.6 hemos introducido el concepto de integral de  $f$  sobre una región orientada. A saber,

$$\int_{G_+} f dx dy = \int_G f dx dy = - \int_{G_-} f dx dy.$$

Lo útil de estas definiciones se puede ver del hecho siguiente. Representemos dos planos donde se dan los sistemas rectangulares de coordenadas  $x, y$  y  $x', y'$  igualmente orientados. Supongamos que  $G$  designa una región orientada del plano  $x, y$  con frontera suave a trozos (orientada)  $\Gamma$  y supongamos que la transformación continuamente derivable

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y) \quad ((x, y) \in \overline{G}) \quad (1)$$

aplica la región biunívoca  $G$  sobre la región  $G'$  del plano  $x', y'$  y  $\Gamma$  sobre la frontera  $\Gamma'$  de la región  $G'$ . Supongamos que el jacobiano

$$D = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \neq 0 \text{ (sobre } G\text{)}.$$

Con esta transformación el recorrido de  $\Gamma$  induce sobre  $\Gamma'$  un recorrido bien determinado y  $G'$  puede considerarse como región orientada.

Si  $D > 0$ , al pasar de  $\Gamma$  a  $\Gamma'$  la orientación de  $\Gamma'$  no cambia.

Sin embargo, si  $D < 0$ , los recorridos de  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  son contrarios.

De lo dicho se deduce que para toda función  $f(x, y)$  continua en la clausura  $\bar{G}$  de una región orientada medible  $G$

$$\iint_G f \, dx \, dy = \iint_{G'} f \cdot \frac{D(x, y)}{D(x', y')} \, dx' \, dy',$$

donde  $G'$  designa la región orientada correspondiente a  $G$ . En esta fórmula de sustitución de las variables el jacobiano no se escribe bajo el signo del valor absoluto.

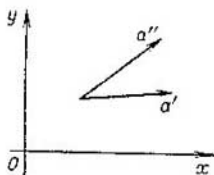


Fig. 94.

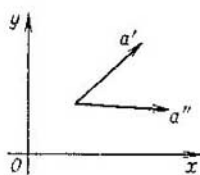


Fig. 95.

Aclaremos lo dicho respecto a la relación de la orientación de  $\Gamma$  con el signo  $D$ . Asignemos en el sistema rectangular de coordenadas  $x, y$  dos vectores no colineales  $a' = (a'_1, a'_2)$  y  $a'' = (a''_1, a''_2)$ . Si el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 \\ a'_2 & a''_2 \end{vmatrix}$$

es positivo<sup>1)</sup>, esto significa que el sistema de  $a'$  y  $a''$  está orientado al igual que los ejes  $x$  e  $y$  (fig. 94). No obstante, si  $\Delta < 0$ , el sistema de  $a'$  y  $a''$  está orientado opuestamente (fig. 95).

La transformación (1) aplica la red angular del plano  $x, y$  en curvilínea (figs. 96—98) con la particularidad de que pueden tener lugar dos casos característicos diferentes de las aplicaciones representadas en las figs. 97 y 98.

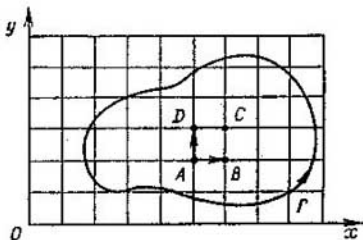


Fig. 96.

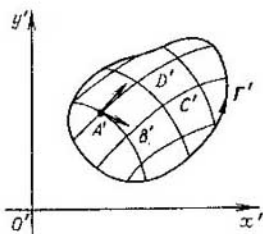


Fig. 97.

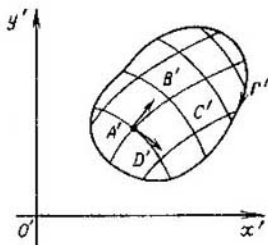


Fig. 98.

El cuadrado  $ABCD$  se convierte en el paralelogramo curvilíneo  $A'B'C'D'$ , el vector  $\vec{AB}$  se convierte, con una precisión hasta infinitésimos de orden superior en la tangente al arco  $\widehat{A'B'}$  en el punto  $A'$  definido por el vector  $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}\right)$  y el vector  $\vec{AD}$ , en la tangente al arco  $\widehat{A'D'}$  en el punto  $A'$  definido por el vector  $\left(\frac{\partial x'}{\partial y}, \frac{\partial y'}{\partial y}\right)$ . Si el determinante  $D' = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} > 0$ , la situación de estos vectores será tal como la muestra la fig. 97 y esto conduce a que las direcciones de los recorridos en  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  coincidan y, por consiguiente, coincidan los sentidos de los recorridos de  $\Gamma$  y  $\Gamma'$ .

Sin embargo, si  $D' < 0$  ( $DD' \equiv 1$ ), la situación de los vectores tangentes a  $\widehat{A'B'}$  y  $\widehat{A'D'}$  uno respecto al otro cambia por la contraria lo cual conlleva (fig. 98) a que los recorridos de  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  sean contrarios.

<sup>1)</sup> Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 12.

Análogamente se determinan las integrales para las regiones  $G_+$  y  $G_-$  definidas sobre otros planos de coordenadas  $yz$  y  $zx$ .

### § 3.12. Flujo de un vector a través de una superficie orientada

En el espacio tridimensional  $E = E_3$  con el sistema rectangular de coordenadas  $x, y, z$  está dada la región  $H$  y sobre ella se define el campo del vector continuo

$$a(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

En la región  $H$  se da la superficie suave orientada  $S^*$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) &= \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k} \\ ((u, v) \in \Omega, |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| > 0), \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\Omega$  es la región provista de frontera suave a trozos en el plano de los parámetros  $(u, v)$  y  $\varphi, \psi, \chi$  son las funciones continuamente derivables sobre  $\bar{\Omega}$ . Suponemos que la normal unidad a  $S^*$  se define por la igualdad vectorial (conforme a lo dicho, véase el § 3.10, (1) y (3))

$$\mathbf{n}(A) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|}. \quad (2)$$

Entonces los cosenos de los ángulos de la normal  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(A)$  con los ejes  $x, y, z$  se expresan por las igualdades

$$\left. \begin{aligned} \cos(\mathbf{n}, x) &= \kappa \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \cos(\mathbf{n}, y) = \kappa \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \\ \cos(\mathbf{n}, z) &= \kappa \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad \kappa = 1/|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Designemos, además, por  $S$  una misma superficie igual, pero no orientada: la orientación está excluida de ella.

Se llama *flujo del vector  $a$  a través de la superficie orientada  $S^*$*  la magnitud designada del modo siguiente:

$$\int_{S^*} (a \, dS^*)$$

y definida por la igualdad

$$\int_{S^*} (a \, dS^*) = \int_S (an) \, dS \quad (4)$$



cuyo segundo miembro es la integral de superficie de primer género del producto escalar

$$(an) = P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)$$

del vector  $a$  y de la normal unidad que define la orientación de  $S^*$

Por cuanto  $(an)$  es una función continua del punto  $A \in S$ , entonces en el segundo miembro de (4) existe la integral de primer género sobre  $S$  lo cual ha sido demostrado en el § 3.8. La expresión dada en el primer miembro de (4) se llama *integral de superficie de segundo género*<sup>1)</sup>.

Supongamos, por ejemplo, que en el campo  $H$  tiene lugar la corriente estacionaria de un líquido de tal modo que su velocidad  $a$  en un punto cualquiera  $A \in H$  dependa de  $A$  y no dependa del tiempo. El flujo de la velocidad del líquido a través de la superficie orientada  $S^*$  es su cantidad que pasa, en unidad de tiempo, por  $S$  en el sentido en que está orientada  $S$ .

Es válida la igualdad

$$\begin{aligned} \int_S (an) dS &= \int_S (P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)) dS = \\ &= \iint_{\Omega} \left( P \frac{D_x^2(y, z)}{D(u, v)} + Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right) du dv, \quad (5) \end{aligned}$$

donde en el segundo miembro está una integral múltiple (doble) habitual sobre la región; en esta integral en  $P, Q, R$  es necesario sustituir  $x, y, z$  por las correspondientes funciones  $\varphi, \psi, \chi$  de  $u, v$ . Esta igualdad se deduce de (3) y de la fórmula (3) del § 3.8.

A veces es cómodo calcular la integral (5) en las coordenadas cartesianas. Mostremos a qué cálculos lleva esto, suponiendo que un trozo suave  $\bar{S}$  de la superficie se proyecta biunívocamente sobre las partes medibles de los tres planos de coordenadas. Muchas superficies planas se pueden partir en un número finito de tales trozos.

Supongamos, pues, que el trozo suave  $\bar{S}$  se describe por cualquiera de las tres funciones

$$\begin{aligned} x &= f_1(y, z) \quad ((y, z) \in \bar{S}_x), \\ y &= f_2(z, x) \quad ((z, x) \in \bar{S}_y), \\ z &= f_3(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{S}_z) \end{aligned}$$

que son continuas en las proyecciones de  $\bar{S}$  sobre los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , respectivamente, y tienen las derivadas parciales continuas, hablando en general, sólo dentro de estas proyecciones  $S_x, S_y, S_z$  (conjuntos medibles).

<sup>1)</sup> La otra designación de la integral de segundo género véase a continuación: el segundo miembro de (6) y (7).

Designemos, además, por  $S_x^*$ ,  $S_y^*$ ,  $S_z^*$  las proyecciones orientadas respectivas de la superficie orientada  $S^*$  sobre los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . El recorrido del contorno de  $S^*$  determina al proyec-

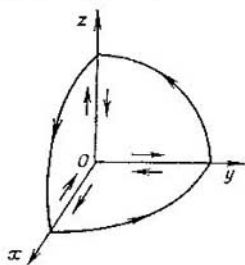


Fig. 99.

tar el recorrido correspondiente de  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  (fig. 99). La normal  $n$  a  $S$  forma con el eje  $z$  un ángulo cuyo coseno es igual a

$$\cos(n, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \left( p = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f_3}{\partial y} \right),$$

donde es necesario tomar «+» ó «-» según la orientación de  $S^*$ . Tenemos (véase el § 3.8, (4) y el § 3.10)

$$\begin{aligned} \int_S R \cos(n, z) dS &= \\ &= \int_{S_z} R(x, y, f_3(x, y)) \frac{\pm 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = \\ &= \pm \int_{S_z} R(x, y, f_3(x, y)) dx dy = \\ &= \int_{S_z^*} R(x, y, f_3(x, y)) dx dy = \int_{S^*} R(x, y, z) dx dy, \quad (6) \end{aligned}$$

donde la penúltima integral está tomada sobre  $S_z^*$  orientada (véase el § 3.8). En lo que se refiere a la última integral de esta cadena, ésta se debe considerar como designación de la penúltima. Es la así llamada integral de *segundo género*. Para calcularla es necesario sustituir  $z$  por  $f_3(x, y)$  e integrar sobre la proyección orientable  $S_z^*$ .

Del § 3.8 sabemos que  $\int_{S_z^*} = \pm \int_{S_z}$ , donde debe tomarse «+» ó «-»

en dependencia del hecho de cómo será orientada  $S_z^*$ : positiva o negativamente (véase también el § 3.6). Los razonamientos análogos

pueden ser llevados a cabo también respecto a las demás dos integrales (fig. 99):

$$\int_S P \cos(n, x) dS = \int_{S_x^*} P(f_1(y, z), y, z) dy dz = \int_{S^*} P(x, y, z) dy dz,$$

$$\int_S Q \cos(n, y) dS = \int_{S_y^*} Q(x, f_2(z, x), z) dz dx = \int_{S^*} Q(x, y, z) dz dx.$$

Hemos demostrado que el flujo del vector  $a$  a través de la superficie orientada  $S^*$ , definida por la normal  $n$ , se puede calcular por la fórmula

$$\int_S (an) dS = \int_{S^*} (P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy) \quad (7)$$

Si la superficie  $S^*$  puede ser cortada en un número finito de partes,  $S^* = \sum S_k^*$ , cada una de las cuales se proyecta sobre los tres planos de coordenadas, entonces, para calcular el flujo de  $a$  a través de  $S^*$ , se puede calcular los flujos de  $a$  a través de cada uno de los trozos de  $S_k^*$ , haciéndose uso del procedimiento indicado, y sumarlos.

Una superficie esférica que tiene por centro el punto nulo del sistema de coordenadas se corta, naturalmente, por los planos de coordenadas en ocho trozos que poseen la propiedad indicada.

Como ya hemos notado más arriba, la expresión del segundo miembro de (7) se llama *integral de segundo género sobre una superficie*.

*Observación 1.* Si la superficie orientable  $S = G$  en el espacio  $(x_1, x_2, x_3)$  es un trozo del plano de coordenadas (su ecuación es  $x_j = 0$  para cierto  $j = 1, 2, 3$ ), entonces el flujo del vector  $a$  a través de  $G_+$  es simplemente una integral doble de la proyección respectiva del vector  $a$  sobre el eje respectivo. En particular, si  $G_+$  es una parte del plano  $x_3 = 0$  con la normal  $n(A) = +k$ , entonces  $(\cos(n, z) = 1)$

$$\int_S (an) dS = \int_S R(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 = \int_{G_+} R(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 = \int_G R(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2.$$

Inversamente, si se da, por ejemplo, una integral doble que tiene la forma

$$\int_G f(x, y) dx dy,$$

se puede interpretarla como flujo del vector  $a$  a través de  $G_+$  cuya proyección sobre el eje  $z$  es igual a  $R(x, y, z) = f(x, y)$ .

*Observación 2.* La integral de segundo género del vector  $a$  sobre la superficie orientada  $S^*$  varía al cambiarse la orientación de la superficie (a saber, cambia el signo).

En efecto, supongamos que  $S_-^*$  designa la misma superficie que  $S^*$ , pero orientada contrariamente. Entonces

$$\int_{S^*} (a \, dS^*) = \int_S (an) \, dS$$

y

$$\int_{S_-^*} (a \, dS_-^*) = \int_S (a, -n) \, dS = - \int_S (an) \, dS = - \int_{S^*} (a \, dS^*).$$

### § 3.13. Divergencia. Teorema de Gauss—Ostrogradski <sup>1)</sup>

Sean  $E$  el espacio tridimensional donde se da el sistema rectangular de coordenadas  $x, y, z$  y  $G \subset E$  la región provista de frontera suave a trozos  $S$  sobre la cual está definido el campo del vector

$$a(x, y, z) = Pi + Qj + Rk \quad ((x, y, z) \in G). \quad (1)$$

Supongamos que  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  son continuas so-

bre  $\bar{G}$ , de donde se deduce que para el vector  $a$  tiene el significado la función continua

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad ((x, y, z) \in \bar{G}), \quad (2)$$

llamada *divergencia del vector  $a$* .

Es fácil ver que

$$\operatorname{div} a = \nabla a \quad \left( \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right),$$

o sea, la divergencia es igual al producto escalar del vector simbólico  $\nabla$  (operador de Hamilton) (véase el § 3.4) y del vector  $a$ .

Vamos a considerar que la superficie  $S$  está orientada con ayuda de la normal unidad  $n$  dirigida al exterior de  $G$ .

<sup>1)</sup> K. F. Gauss (1777—1855), célebre matemático alemán. M. V. Ostrogradski (1801—1861), célebre matemático ruso.

Nuestro objetivo consistirá en demostrar la igualdad

$$\int_G \operatorname{div} a \, dG = \int_S (an) \, dS \quad (3)$$

para ciertas condiciones adicionales que se imponen sobre  $G$ . Esta igualdad se llama *fórmula de Gauss—Ostrogradski*, en honor de los matemáticos que la demostraron.

La fórmula de Gauss—Ostrogradski reza que la *integral de volumen (triple) de la divergencia del vector sobre la región  $G$  es igual al flujo del vector a través de la frontera de esta región, orientada en el sentido de su normal exterior.*

Examinemos primero la región  $\Lambda$  representada en la fig. 100 a la cual llamaremos  $H_z$ -*región elemental*. La región  $\Lambda$  está limitada inferior y superiormente por las superficies  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , con bordes suaves a trozos, que se definen, respectivamente, por las ecuaciones

$$z = \lambda_1(x, y), \quad z = \lambda_2(x, y), \\ \lambda_1(x, y) \leq \lambda_2(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{\Lambda}_z),$$

donde  $\Lambda_z$  es la región plana con frontera suave a trozos  $\gamma$  y  $\lambda_1, \lambda_2$  son continuas sobre  $\bar{\Lambda}_z$  y tienen las derivadas parciales continuas sobre el conjunto abierto  $\Lambda_z$ . A la izquierda y la derecha la región  $\Lambda$  está limitada por la superficie cilíndrica  $\sigma^*$  con la directriz  $\gamma$  y la generatriz paralela al eje  $z$ .

Sea  $S^*$  la frontera de  $\Lambda$  orientada con ayuda de la normal exterior a  $\Lambda$  (las explicaciones se dan a continuación). De este modo los trozos inferior y superior  $\sigma_1^*$  y  $\sigma_2^*$ , al igual que la superficie lateral  $\sigma^*$  de la región  $\Lambda$ , están orientados correspondientemente. Para la región  $\Lambda$  tienen lugar las igualdades (las explicaciones se dan a continuación)

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{\partial R}{\partial z} \, d\Lambda &= \iint_{\Lambda_z} dx \, dy \int_{\lambda_1(x, y)}^{\lambda_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz = \\ &= \iint_{\Lambda} \{R(x, y, \lambda_2(x, y)) - R(x, y, \lambda_1(x, y))\} \, dx \, dy = \\ &= \int_{\sigma_2^*} R(x, y, \lambda_2(x, y)) \, dx \, dy + \int_{\sigma_1^*} R(x, y, \lambda_1(x, y)) \, dx \, dy = \\ &= \int_{S^*} R(x, y, z) \, dx \, dy. \quad (4) \end{aligned}$$

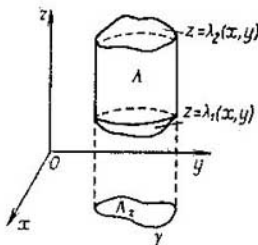


Fig. 100.

La normal  $n$  a  $\sigma_1^*$  y  $\sigma_2^*$  forma con el eje  $z$  los ángulos obtuso y agudo, respectivamente, por eso las proyecciones  $\sigma_{1,z}^*$  y  $\sigma_{2,z}^*$  de los trozos  $\sigma_1^*$  y  $\sigma_2^*$  sobre el plano  $z = 0$  están orientadas: la primera en dirección negativa y la segunda en dirección positiva. Esto argumenta el paso del tercer término de la cadena (4) al cuarto. A la suma que forma el cuarto término se le puede agregar formalmente la integral

$$\iint_{\sigma^*} R(x, y, z) dx dy = 0$$

igual a cero, porque  $\cos(n, z) = 0$  a lo largo de  $\sigma^*$ . Pero entonces la suma de tres integrales obtenida es igual a la integral que ocupa el último término de la cadena (4) (al flujo del vector  $(0, 0, R)$  a través de  $S^*$ ).

Hemos demostrado el teorema de Gauss—Ostrogradski para la  $H_x$ -región elemental y el vector  $(0, 0, R)$ .

Llamemos ahora a la región  $G$   $H_x$ -región si su clausura  $\bar{G}$  puede ser partida en un número finito de  $H_x$ -regiones elementales

$$\bar{G} = \sum_{h=1}^N \bar{G}_h$$

de modo que los trozos inferiores y superiores de la frontera de  $G_h$  sean partes de la frontera orientada  $S^*$  de la región  $G$  y demostremos que para  $G$  y el vector  $(0, 0, R)$  es válido también el teorema de Gauss—Ostrogradski.

En efecto, designemos por  $S_{1,h}$  y  $S_{2,h}$  los trozos inferiores y superiores de las fronteras de  $G_h$ , respectivamente, y por  $S_k$ , los trozos laterales de  $G_h$ . Entonces (las explicaciones se dan a continuación)

$$\begin{aligned} \int_G \frac{\partial R}{\partial z} dG &= \sum_{h=1}^N \int_{G_h} \frac{\partial R}{\partial z} dG = \sum_{h=1}^N \left( \int_{S_{1,h}^*} R(x, y, z) dx dy + \right. \\ &+ \left. \int_{S_{2,h}^*} R(x, y, z) dx dy + \int_{S_k^*} R(x, y, z) dx dy \right) = \int_{S^*} R(x, y, z) dx dy, \end{aligned}$$

porque las integrales sobre  $S_k^*$ , evidentemente, son iguales a cero y los trozos  $S_{1,h}^*$  y  $S_{2,h}^*$  bien sea forman en conjunto la superficie  $S^*$ , bien sea, si no es así, el conjunto

$$\sigma = S^* - \sum_1^N S_{1,h}^* - \sum_1^N S_{2,h}^*$$

es una parte de  $S^*$ , la normal en todo punto de la cual es perpendicular al eje  $z$ . Pero entonces la integral sobre  $\sigma$  es igual a cero.

Por analogía, se pueden introducir los conceptos de  $H_x$ -región y de  $H_y$ -región. Por ejemplo,  $H_x$ -región posee la propiedad consis-

tente en que se puede partir su clausura en un número finito de clausuras de  $H_x$ -regiones elementales. En este caso la  $H_x$ -región elemental se define al igual que la  $H_x$ -región elemental sólo que ahora es  $x$  que desempeña el papel de  $z$ . Por analogía, se demuestra que para  $H_x$ -región de  $G$  tiene lugar la igualdad

$$\int_G \frac{\partial P}{\partial x} dG = \int_{S^*} P(x, y, z) dy dz,$$

o sea, la fórmula de Gauss—Ostrogradski para el vector  $(P, 0, 0)$  y para la  $H_y$ -región de  $G$  tiene lugar la fórmula

$$\int_G \frac{\partial Q}{\partial y} dG = \int_{S^*} Q(x, y, z) dz dx.$$

Si  $G$  es simultáneamente  $H_x$ -,  $H_y$ - y  $H_z$ -región, para ella, evidentemente, será justo el teorema de Gauss—Ostrogradski para un vector arbitrario  $a = (P, Q, R)$  continuamente derivable sobre  $\bar{G}$ , o sea, para ella es justa la igualdad

$$\begin{aligned} & \iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \int_{S^*} (P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy), \quad (5) \end{aligned}$$

donde la integral en el segundo miembro es la integral sobre la superficie  $S^*$  orientada por la normal exterior a  $G$ .

Si en la fórmula de Gauss—Ostrogradski se pone  $P = x$ ,  $Q = y$ ,  $R = z$ , so obtiene la expresión para el volumen de la región  $G$

$$|G| = \frac{1}{3} \int_{S^*} (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$$

a través de la integral tomada sobre su frontera  $S^*$  orientada (por la normal exterior).

Las regiones de las cuales generalmente se trata son simultáneamente  $H_x$ -,  $H_y$ - y  $H_z$ -regiones.

EjemPlo 1. La esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  es una  $H_z$ -región, incluso una  $H_z$ -región elemental, porque todo su interior está limitado por dos superficies suaves sobre el círculo  $x^2 + y^2 < 1$  que están una por encima de la otra

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

y son continuas sobre el círculo cerrado  $x^2 + y^2 \leq 1$  que tiene una frontera suave. Es evidente que la esfera es asimismo una  $H_x$ - y  $H_y$ -región.

**EJEMPLO 2.** *Toro.* Asignemos en el plano  $(x, y)$  una circunferencia de radio  $a$  que tenga por centro el punto  $(b, 0)$  ( $0 < a < b$ ). Su ecuación tendrá la forma  $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ . La revolución de la circunferencia dada como cuerpo sólido en el espacio  $(x, y, z)$  alrededor del eje  $y$  engendrará la superficie  $T$  llamada *toro* (la fig. 101

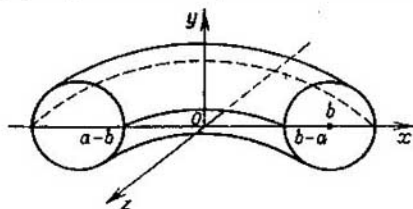


Fig. 101.

muestra una mitad del toro). La ecuación del toro en las coordenadas cartesianas reviste el aspecto

$$(\sqrt{x^2 + z^2} - b)^2 + y^2 = a^2.$$

Para convencerse de que  $T$  es una  $H_y$ -región es suficiente dividir la superficie  $T$  en dos partes por medio del plano  $x, z$ . Luego, los planos  $x = b - a$ ,  $x = a - b$  parten  $T$  en cuatro  $H_x$ -regiones elementales y los planos  $z = b - a$  y  $z = a - b$ , en cuatro  $H_x$ -regiones elementales.

La fórmula de Gauss—Ostrogradski transforma la integral de volumen en la de superficie.

Para aclarar el sentido físico del concepto de divergencia admitiremos que en  $G$  tiene lugar una corriente estacionaria del líquido cuya velocidad en un punto arbitrario  $(x, y, z)$  es igual a  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ . Asignemos un punto arbitrario, pero fijo  $A = (x, y, z) \in G$  y rodeémoslo por la esfera  $V_\varepsilon \subset G$  de radio  $\varepsilon > 0$ . Sea  $S_\varepsilon$  su frontera (superficie esférica) orientada por medio de la normal exterior. Entonces en virtud de la fórmula de Gauss—Ostrogradski,

$$\iint_{S_\varepsilon} (\mathbf{a} dS) = \iiint_{V_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx \, dy \, dz.$$

El primer miembro de esta igualdad expresa la cantidad del líquido que sale de  $V_\varepsilon$  (fuera de  $S_\varepsilon$ ) por unidad de tiempo. Aplicando a su segundo miembro el teorema del medio, obtenemos

$$\iint_{S_\varepsilon} (\mathbf{a} dS) = |V_\varepsilon| \operatorname{div} \mathbf{a}_1, \quad (6)$$



donde  $|V_\varepsilon|$  es el volumen  $V_\varepsilon$  y  $\alpha_1$ , la velocidad del líquido en cierto punto de  $V_\varepsilon$ . Dividiendo ambos miembros de la igualdad obtenida por  $|V_\varepsilon|$  y pasando al límite para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , en virtud de la continuidad de  $\text{div } a$ , hallaremos que existe el límite igual a la divergencia de  $a$ :

$$\text{div } a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|V_\varepsilon|} \iint_{S_\varepsilon} (a \, dS) \quad (7)$$

en el punto  $(x, y, z)$ . Ahora bien,  $\text{div } a$  no es más que la productividad de los manantiales distribuidos continuamente sobre  $G$  en el punto  $A = (x, y, z)$ . Si en el punto  $A$  (o por doquier sobre  $G$ )  $\text{div } a = 0$ , esto quiere decir que en  $A$  (o por doquier sobre  $G$ ) la productividad de los manantiales es igual a cero. Si  $\text{div } a < 0$ , esto significa que de hecho tiene lugar el desagüe.

De las consideraciones físicas es evidente que  $\text{div } a$  es invariante respecto a cualesquiera transformaciones de las coordenadas rectangulares. Sin embargo, esta conclusión se puede sacar también sobre la base de consideraciones matemáticas.

Como sabemos (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 18), el producto escalar de los vectores es invariante al transformar las coordenadas, por eso la divergencia (igual al producto escalar del vector simbólico  $\nabla$  y el vector  $a$ ) es invariante respecto a las transformaciones de las coordenadas rectangulares. Desde luego, consideramos (por definición) que las coordenadas del vector simbólico  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  se transforman por las mismas fórmulas que las coordenadas de los vectores corrientes. Más exactamente, si las fórmulas de transformación de las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  del punto (vector) en el primer sistema de coordenadas a las coordenadas  $(y_1, y_2, y_3)$  en el segundo sistema tiene la forma

$$y_l = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} x_s \quad (l = 1, 2, 3), \quad (8)$$

donde  $\alpha = (\alpha_{kl})$  es la matriz ortogonal correspondiente, entonces

$$\frac{\partial}{\partial y_l} = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} \frac{\partial}{\partial x_s} \quad (l = 1, 2, 3). \quad (9)$$

El operador de Hamilton se aplica a la función derivable  $f$ . Como resultado obtenemos el vector

$$\nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

llamado, como sabemos, *gradiente de la función f*. En este cálculo la función  $f$  se considera escalar. Ahora bien,  $\nabla f = \text{grad } f$  es el producto del vector  $\nabla$  por el escalar  $f$ : el resultado es el vector.

En el sistema de coordenadas  $(y_1, y_2, y_3)$

$$\nabla f = \text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial y_3} \right) = \frac{\partial f}{\partial y_1} i_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} j_1 + \frac{\partial f}{\partial y_3} k_1,$$

donde  $i_1, j_1, k_1$  son los versores del sistema  $(y_1, y_2, y_3)$ . En este caso en virtud de (9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_l} &= \left( \alpha_{l1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_{l2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_{l3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f = \\ &= \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} \frac{\partial f}{\partial x_s} \quad (l=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (10)$$

Las fórmulas (10) concuerdan con las reglas de derivación de la función compuesta  $f(x_1, x_2, x_3)$  en la cual

$$x_s = \sum_{l=1}^3 \alpha_{ls} y_l \quad (s=1, 2, 3). \quad (11)$$

Las fórmulas (11) son inversas a las de (8) ( $\alpha^{-1} = \alpha^*$ , o sea, las coordenadas  $x_s$  se expresan por las coordenadas  $y_h$  con ayuda de la  $s$ -ésima columna de la matriz  $\alpha$ ).

Aquí hemos obtenido las fórmulas (10) valiéndonos sólo del cálculo simbólico.

Pues, si un mismo campo del vector está definido en dos sistemas de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $(y_1, y_2, y_3)$  por las funciones respectivas  $a = a_1(x_1, x_2, x_3) i + a_2(x_1, x_2, x_3) j + a_3(x_1, x_2, x_3) k = b_1(y_1, y_2, y_3) i_1 + b_2(y_1, y_2, y_3) j_1 + b_3(y_1, y_2, y_3) k_1$ , donde las coordenadas  $(b_1, b_2, b_3)$  están relacionadas con las  $(a_1, a_2, a_3)$  por las fórmulas (8) y (11), entonces en un mismo punto

$$\text{div } a = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial b_l}{\partial y_l} = \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} \frac{\partial}{\partial x_s} \right) b_l = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \sum_{l=1}^3 \alpha_{ls} b_l \right) = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial a_s}{\partial x_s}.$$

Ahora bien, hemos demostrado una vez más la invariación de la divergencia durante las transformaciones de las coordenadas rectangulares, utilizando sólo el cálculo simbólico.

La fórmula de Gauss—Ostrogradski puede ser escrita en el caso plano cuando  $G$  es la región en el plano  $(x, y)$  y

$$a(x, y) = P(x, y) i + Q(x, y) j$$

es un campo definido sobre ella. Si  $n(A)$  es la normal exterior al contorno suave a trozos  $\Gamma$  de la región  $G$  ( $A \in \Gamma$ ), entonces tendrá lugar la igualdad

$$\iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (an) ds,$$

donde  $ds$  es la diferencial del arco  $\Gamma$ .

Si se supone que el sentido de la tangente en el punto  $\Gamma$  coincide con el sentido positivo de recorrido sobre  $\Gamma$  a lo largo del cual se

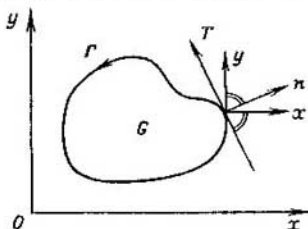


Fig. 102.

calcula también la longitud del arco del contorno  $\Gamma$ , entonces (fig. 102).

$$\cos(n, x) = \cos(T, y) = \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\cos(n, y) = \cos[\pi - (T, x)] = -\cos(T, x) = -\frac{dx}{ds}.$$

Por eso

$$\begin{aligned} (an) ds &= P dy - Q dx, \\ \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\Gamma} (P dy - Q dx). \end{aligned}$$

Si en esta fórmula sustituimos  $P$  y  $Q$  por  $Q$  y  $-P$ , respectivamente, llegamos a la fórmula de Green que ha sido obtenida en el § 3.7.

### § 3.14. Campo solenoidal

El campo (región)  $\Omega$  del vector  $a = Pi + Qj + Rk$  se llama *solenoidal (tubular)* si la divergencia de  $a$  sobre  $\Omega$  es igual a cero:

$$\operatorname{div} a = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega.$$

En virtud del teorema de Gauss—Ostrogradski para un campo solenoidal tiene lugar la igualdad

$$\iint_S (an) dS = \iiint_{\omega} \operatorname{div} a \, dx \, dy \, dz = 0$$

para toda superficie  $S$  suave a trozos cerrada orientada (fuera de  $\omega$ ) la cual es la frontera de la región  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ , o sea, se encuentra estrictamente dentro de  $\Omega$ .

En particular, si

$$S = S_1 + S_2,$$

como en la fig. 103, entonces

$$\iint_{S_1} (an) dS + \iint_{S_2} (an) dS = 0$$

o bien

$$\iint_{S_1} (an) dS = \iint_{S_2^-} (an) dS,$$

donde  $S_2^-$  es una superficie igual a  $S_2$ , pero orientada contrariamente (dentro de  $\omega$ ).

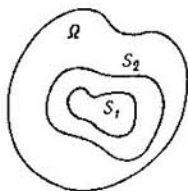


Fig. 103.

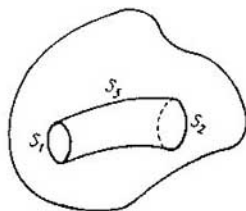


Fig. 104.

Examinemos en  $\Omega$  la región  $\omega$  de la forma especial (fig. 104), o sea, el tubo con la frontera  $S$  que se compone de tres trozos suaves:

$$S = S_1 + S_2 + S_3;$$

de este modo, según la condición, en todo punto de  $S_2$  el vector  $a$  es tangente a  $S_3$ . Entonces

$$\iint_{S_3} (an) dS = 0$$

y

$$\iint_{S_1} (an) dS + \iint_{S_2} (an) dS = 0$$

o bien

$$\int_{S_1} \int (an) dS = \int_{S_2} \int (an) dS.$$

De aquí vemos que el flujo del vector  $a$  a través de  $S_2$  es igual a este mismo flujo a través de  $S_1$ , o sea, si, por ejemplo,  $a(x, y, z)$  es la velocidad de un líquido que fluye en  $\Omega$ , entonces la cantidad de líquido que entra en el tubo por unidad de tiempo será igual a la cantidad que sale del mismo.

### § 3.15. Fórmula de Stokes

Admitamos que en cierta región del espacio  $E_3$  está dado el campo del vector continuamente derivable

$$a = P(x, y, z) i + Q(x, y, z) j + R(x, y, z) k.$$

En el § 3.4 hemos definido el concepto de rotor del vector  $a$ :

$$\text{rot } a = \nabla \times a = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) k.$$

Del álgebra vectorial se sabe (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 18) que el producto vectorial de dos vectores es invariante respecto a las transformaciones de los sistemas rectangulares con una misma orientación, o sea, tales que el sistema dextrorso se convierte en dextrorso y el sinistrorso en sinistrorso. Por eso  $\text{rot } a = \Delta \times a$  es invariante respecto a las transformaciones de los sistemas rectangulares de coordenadas que no cambian su orientación. Por consiguiente, podemos, sin calcular, decir que si nuestro vector  $a$  tiene en el nuevo (asimismo orientado) sistema rectangular de coordenadas los componentes

$$a = P_1(x', y', z') i' + Q_1(x', y', z') j' + R_1(x', y', z') k',$$

entonces tendrá lugar la igualdad

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k = \\ = \left( \frac{\partial R_1}{\partial y'} - \frac{\partial Q_1}{\partial z'} \right) i' + \left( \frac{\partial P_1}{\partial z'} - \frac{\partial R_1}{\partial x'} \right) j' + \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x'} - \frac{\partial P_1}{\partial y'} \right) k', \end{aligned}$$

donde  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$  son los versores unitarios en el sistema  $(x', y', z')$ .

Si el contorno orientado  $\Gamma$  está cerrado, entonces a la integral curvilínea de  $a$  tomada a lo largo de este contorno la llamaremos *circulación del vector  $a$  por  $\Gamma$*  y la designaremos por el símbolo

$$\int_{\Gamma} (a \, dl) = \int_{\Gamma} (P \, dx + Q \, dy + R \, dz).$$

Aquí  $dl$  es el vector dirigido en el sentido positivo de la tangente a  $\Gamma$ , vector cuya longitud es igual a la diferencial del arco  $\Gamma$ .

Nuestro objetivo consiste en argumentar la fórmula de Stokes

$$\iint_{S^*} (\text{rot } a \, dS^*) = \iint_S (\mathbf{n} \text{ rot } a) \, dS = \int_{\Gamma} (a \, dl) \quad (1)$$

que expresa el hecho de que el flujo del vector  $\text{rot } a$  a través de la superficie orientada  $S^*$  es igual a la circulación de  $a$  por el contorno  $\Gamma$  de esta superficie, orientado correspondientemente a la orientación de  $S^*$ . Notemos que por  $S^*$  hemos designado la superficie  $S$  orientada de cierto modo. Comencemos con la demostración del teorema de Stokes (o sea, de la fórmula (1)) para un trozo suave que se proyecta biunívocamente sobre los tres planos de coordenadas.

Asignemos el trozo suave orientado  $S^*$  de una superficie provista de un borde suave a trozos  $\Gamma$  que se puede escribir por tres procedimientos:

$$z = f_1(x, y) \quad (x, y) \in S_z,$$

$$x = f_2(y, z) \quad (y, z) \in S_x,$$

$$y = f_3(z, x) \quad (z, x) \in S_y.$$

De este modo se supone que cada una de estas ecuaciones se resuelve respecto a cada una de las variables y las funciones  $f_1, f_2, f_3$  son continuamente derivables en las proyecciones respectivas de  $S$  sobre los planos de coordenadas. Tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{n} \text{ rot } a) \, dS &= \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} dS. \quad (2) \end{aligned}$$

Escojamos en el segundo miembro de (2) los términos que contienen  $P$ . Entonces (las explicaciones se dan a continuación)

$$\begin{aligned} - \iint_S \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} \cos(n, z) - \frac{\partial P}{\partial z} \cos(n, y) \right\} dS &= \\ &= - \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cos(n, z) dS = \\ &= - \iint_{S_z^*} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f_1(x, y)) \, dx \, dy = \\ &= \int_{\Gamma_z} P(x, y, f_1(x, y)) \, dx = \int_{\Gamma} P(x, y, z) \, dx. \quad (3) \end{aligned}$$

Puesto que  $\text{grad}(f_1(x, y) - z)$  es ortogonal a la superficie  $z = f_1(x, y)$ , los cosenos directores de la normal en el punto  $(x, y, f_1(x, y))$  son proporcionales a las coordenadas del gradiente:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} : \frac{\partial f_1}{\partial y} : (-1) = \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z),$$

de donde

$$\cos(n, y) = -\frac{\partial f_1}{\partial y} \cos(n, z)$$

lo que origina la primera igualdad en la cadena (3). La segunda igualdad se deduce del § 3.12, fórmula (6), y de la regla de derivación de una función compuesta. La tercera igualdad resulta de la fórmula de Green y, por fin, la última se deriva del hecho de que las ecuaciones del contorno  $\Gamma$  tienen la forma

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s) = f_1(\varphi(s), \psi(s)),$$

o sea, en ambas últimas integrales curvilíneas de (3)

$$dx = \varphi'(s) ds$$

y sobre el contorno  $\Gamma_z$

$$\begin{aligned} P(x, y, f_1(x, y)) &= P(\varphi(s), \psi(s), f_1(\varphi(s), \psi(s))) = \\ &= P(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)) \end{aligned}$$

lo que que es igual a  $P(x, y, z)$  sobre  $\Gamma$ .

Por analogía se demuestra que

$$\iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos(n, z) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(n, x) \right) dS = \int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy, \quad (4)$$

$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos(n, x) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(n, y) \right) dS = \int_{\Gamma} R(x, y, z) dz. \quad (5)$$

De (3), (4) y (5) se deduce la fórmula de Stokes (1).

Hemos demostrado la fórmula de Stokes para un trozo de la superficie orientable el cual se proyecta simultáneamente sobre los tres planos de coordenadas. Existe, además, un caso sencillo importante que directamente no está incluido en nuestro examen. Se trata del caso cuando  $\sigma^*$  es un trozo perteneciente a cierto plano paralelo a uno de los ejes de coordenadas. Para tal trozo el teorema de Stokes es asimismo justo. De esto puede cerciorarse, efectuando cálculos directos semejantes a los de (3). Sin embargo, se puede razonar así. Las integrales que forman parte de la fórmula de Stokes son invariantes respecto a las transformaciones de las coordenadas rectangulares que no cambian las orientaciones de estas últimas. Siempre se puede seleccionar este tipo de transformaciones de modo que  $\sigma^*$  se proyecte sobre cualquiera de los planos de coordenadas del nuevo

sistema (por ejemplo, hagamos coincidir nuestro plano con el que pasa por los puntos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ). En este caso el teorema también quedará demostrado.

La fórmula de Stokes es justa para toda superficie orientada  $S^*$ , con un borde suave a trozos  $\Gamma$ , que se puede partir con ayuda de las líneas suaves a trozos en un número finito de trozos suaves que se proyectan sobre los tres planos de coordenadas.

En efecto, sea  $S^* = \sigma_1^* + \dots + \sigma_N^*$  una partición de este tipo y sean  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  los contornos respectivamente orientados de  $\sigma_1^*, \dots, \sigma_N^*$ . Entonces, de acuerdo con lo demostrado anteriormente,

$$\iint_S (\operatorname{rot} a \, d\sigma) = \sum_{j=1}^N \iint_{\sigma_j} (\operatorname{rot} a \, d\sigma) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (a \, dl) = \int_{\Gamma} (a \, dl)$$

porque las partes de las integrales  $\int_{\Gamma_j}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) que se toman a lo largo de los trozos interiores de  $\Gamma_j$  (no pertenecientes a  $\Gamma$ ) se pasan dos veces en el sentido opuesto y proporcionan un efecto igual a cero.

La superficie orientada que se puede partir en un número finito de triángulos (planos) se llama superficie *poliedral* y es un ejemplo de superficie elemental a la cual es aplicable la fórmula de Stokes.

Hagamos una observación más. Sea  $\sigma_\varepsilon^*$  una superficie circular orientada de radio  $\varepsilon$  que tiene por centro el punto  $A = (x, y, z)$  y el vector unidad  $n$  que la orienta y sea  $\gamma_\varepsilon$  el contorno orientado de esta superficie. Con arreglo a la fórmula de Stokes

$$\int_{\gamma_\varepsilon} (a \, dl) = \int_{\sigma_\varepsilon} (n \operatorname{rot} a) \, d\sigma_\varepsilon = \int_{\sigma_\varepsilon} \operatorname{rot}_n a \, d\sigma_\varepsilon = |\sigma_\varepsilon| \cdot \operatorname{rot}_n a,$$

donde  $\operatorname{rot}_n a$  es la función escalar igual a la proyección de  $\operatorname{rot} a$  sobre el sentido de  $n$  y  $\operatorname{rot}_n a_1$  es el valor de esta función en cierto punto medio  $\sigma_\varepsilon$ . De aquí resulta que el valor de la función  $\operatorname{rot}_n a$  en el punto  $A$  es igual a

$$\operatorname{rot}_n a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\sigma_\varepsilon|} \int_{\gamma_\varepsilon} (a \, dl), \quad (6)$$

donde, pasando al límite para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se supone que el vector  $n$  es invariable. Cualquiera que sea el sistema dextrorso (sinistorso) de coordenadas, el segundo miembro de (6) es un mismo número. Sin embargo, al sustituir el sistema dextrorso por el sinistorso manteniendo invariable  $n$ , el sentido del recorrido de  $\sigma_\varepsilon$  cambia por el opuesto lo que produce el cambio del signo en el segundo miembro



de (6). Ahora bien, hemos vuelto a convencernos, por otra vía, de que  $\text{rot } a$  es invariante respecto a las transformaciones de las coordenadas rectangulares que conservan la orientación de estas últimas.

*Observación.* Vamos a citar varias fórmulas con la participación del operador de Hamilton  $\nabla$  que son útiles en el análisis vectorial. Tenemos

$$\text{div } a = (\nabla, a), \quad \text{rot } a = \nabla \times a, \quad \text{grad } f = \nabla f,$$

donde  $f$  es la función escalar y  $a$ , el vector.

$$1) \text{ rot } [\text{grad } f] \equiv \nabla \times \nabla f = 0,$$

ya que los vectores simbólicos  $\nabla$  y  $\nabla f$  no se distinguen sino por el factor escalar. Este hecho lo hemos demostrado en el § 3.4, teorema 2.

$$2) \text{ div rot } a \equiv (\nabla, \nabla \times a) = 0,$$

puesto que el vector  $\nabla$  es ortogonal al vector  $\nabla \times a$ .

$$3) \text{ div } (fa) \equiv (\nabla, fa) = (\nabla f, a) + f(\nabla, a).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (\nabla, fa) &= \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR) = \\ &= f'_x P + f'_y Q + f'_z R + f(P'_x + Q'_y + R'_z) = (\nabla f, a) + f(\nabla, a). \end{aligned}$$

4) Es fácil comprobar que  $\text{grad } fg = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f$  o bien en la forma simbólica  $\nabla fg = f \nabla g + g \nabla f$ . Así, pues, el operador  $\nabla$  actúa sobre el producto de dos funciones como operador de derivación habitual.

5)  $\text{rot } (fa) = f \text{ rot } a + \text{grad } f \times a$  o bien  $\nabla \times fa = f(\nabla \times a) + \nabla f \times a$ .

6)  $\text{div } (a \times b) = (b, \text{rot } a) - (a, \text{rot } b)$   
o bien

$$(\nabla, a \times b) = (b, \nabla \times a) - (a, \nabla \times b).$$

$$7) \text{ div grad } f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv \Delta f,$$

donde  $\Delta$  se llama *operador de Laplace*. Es evidente que

$$(\nabla, \nabla f) = \Delta f.$$