Capítulo 4

Series de Fourier. Integral de Fourier

§ 4.1. Series trigonométricas

La función $f(x)$ se llama *periódica* (*de período* a) si está definida sobre todo el eje real y para ella se cumple la igualdad

$$f(x+a) = f(x)$$

para todos los valores de x.

Por ejemplo, las funciones trigonométricas

$$1,\ \cos x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos 2x,\ \operatorname{sen} 2x,\ \cos 3x,\ \ldots \tag{1}$$

tienen el período de 2π.

En realidad las funciones $\cos kx$ y $\operatorname{sen} kx$ para cada número natural k tienen el período $2\pi/k$. De este modo $2\pi/k < 2\pi$ cuando $k > 1$. En este caso la constante $y = 1$ tiene un período tan pequeño como se quiera. No obstante, todas las funciones de la sucesión (1) tienen el período igual a 2π.

La función periódica

$$s = f(t)$$

representa un movimiento periódico (oscilación del punto que tiene en el instante de tiempo t la coordenada s (sobre el eje s).

La función (de período $2l$)

$$s = A\cos\left(\frac{k\pi}{l}t + \omega\right), \tag{2}$$

donde $A > 0$, $l > 0$ y ω son constantes y k es un número natural, define la *oscilación armónica del punto que posee la amplitud* A, *la fase* ω *y la frecuencia* k.

La función (2) tiene el período $2l/k$, o sea, una oscilación completa se efectúa por un intervalo de tiempo igual a $2l/k$. En este caso la cantidad de oscilaciones por unidad de tiempo vale $k/2l$. El número $k/2l$ es el que debería denominarse frecuencia de oscilación, pero de ordinario se llama *frecuencia* (de oscilación) al número k.

Notemos que la función

$$a_k \cos\frac{k\pi}{l}t + b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}t \quad \left(\sqrt{a_k^2 + b_k^2} > 0\right),$$

donde k es un número natural, determina la oscilación armónica, porque

$$a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos \frac{k\pi}{l} t + \right.$$

$$\left. + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right) = A_k \cos \left(\frac{k\pi}{l} t + \omega_k \right),$$

donde

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

y ω_k se define unívocamente por las relaciones

$$0 \leqslant \omega_k < 2\pi, \quad a_k / \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \cos \omega_k,$$

$$b_k / \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \operatorname{sen} \omega_k.$$

Como ejemplo de oscilación armónica puede servir la de un péndulo de muelle (fig. 105). Supongamos que el muelle suspendido del punto B tiene en su extremo inferior una carga de masa m y en el instante $t = 0$ la coordenada del centro de gravedad de esta carga es igual a $z = 0$. A la carga se le aplica en el instante $t = 0$ un impulso $z' = \mu$ en el sentido del eje z. Como resultado la carga oscilará. Designemos por $z = z(t)$ su desviación del punto de equilibrio. Por cuanto la fuerza que actúa sobre la carga en la primera aproximación es igual, según la ley de Newton, a $mz'' = -kz$, entonces

$$z'' + \nu^2 z = 0 \quad \left(\nu^2 = \frac{k}{m} \right).$$

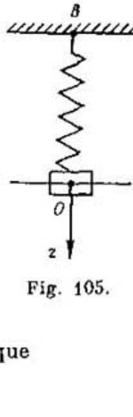

Fig. 105.

La solución general de esta ecuación diferencial tiene la forma

$$z = C_1 \cos \nu t + C_2 \operatorname{sen} \nu t,$$

donde C_1 y C_2 son las constantes arbitrarias. Puesto que

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = \mu,$$

podemos decir que

$$z = \frac{\mu}{\nu} \operatorname{sen} \nu t = A \cos \left(\nu t - \frac{\pi}{2} \right), \quad A = \frac{\mu}{\nu}$$

y entonces hemos obtenido que el centro de gravedad de la carga oscila armónicamente.

Los movimientos (oscilaciones) periódicos se estudian en las más diferentes esferas del conocimiento: en la teoría de elasticidad, la acústica, la radiotecnia, la electrotecnia y por doquier las oscilaciones armónicas son movimientos periódicos elementales.

La suma final de oscilaciones armónicas con el período dado $2l$ es una oscilación compleja

$$S_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}t+b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}t\right). \tag{3}$$

El término nulo de esta suma lo hemos escrito en la forma $a_0/2$. Luego veremos que esto es más cómodo.

Por último, una oscilación (movimiento) periódica más compleja puede obtenerse como la suma de la serie convergente (para todos los valores de t)

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}t+b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}t\right) \tag{4}$$

llamada *serie trigonométrica.*

Los números a_k y b_k se denominan *coeficientes de la serie trigonométrica* (4) y sus sumandos

$$a_k\cos\frac{k\pi}{l}t+b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}t$$

llevan el nombre de *términos de la serie* (4) o de *armónicos* de ésta (correspondientes a la frecuencia k).

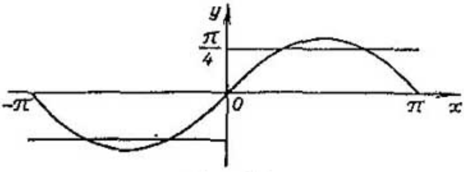

Fig. 106.

EJEMPLO 1. Las figs. 106 a 109 muestran los gráficos de las primeras cuatro sumas parciales de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2k-1)x}{2k-1}=\frac{\operatorname{sen}x}{1}+\frac{\operatorname{sen}3x}{3}+\frac{\operatorname{sen}5x}{5}+\frac{\operatorname{sen}7x}{7}+\dots$$

y el gráfico de la función

$$\psi(x)=\begin{cases}\pi/4, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=0,\ x=\pi,\\ -\pi/4, & -\pi<x<0.\end{cases}$$

La fig. 106 (junto con el gráfico de $\psi(x)$) presenta la función $S_1(x) = \operatorname{sen} x$. En la fig. 107 con línea de trazos están dibujados los gráficos de $S_1(x)$ y $\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}$ y con línea continua, los de la función

$$S_2(x) = S_1(x) + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3}.$$

En la fig. 108 con línea de trazos están representados los gráficos

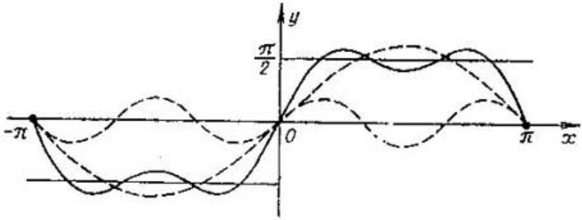

Fig. 107.

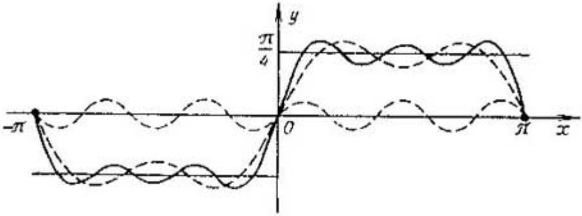

Fig. 108,

de $S_2(x)$ y $\frac{\operatorname{sen} 5x}{5}$ y con línea continua, los de la función

$$S_3(x) = S_2(x) + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5},$$

etc. Ya de la fig. 109 se ve que es necesario suponer

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \psi(x) \quad (-\pi < x \leqslant \pi). \tag{5}$$

Es así en la realidad. Lo que a esto atañe véase a continuación el § 4.4. Las funciones $S_n(x)$ tienen para todo n el período 2π:

$$S_n(x + 2\pi) = S_n(x).$$

Prolonguemos la función $\psi(x)$ sobre todo el eje real, periódicamente con el período 2π. En este caso ella tendrá un gráfico análogo al de la fig. 110. Por cuanto la igualdad (5) se cumple para todos los

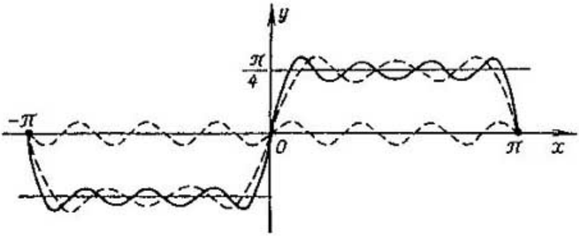

Fig. 109.

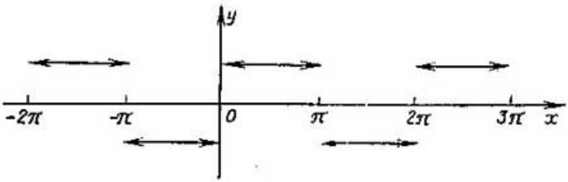

Fig. 110.

valores de $x \in (-\pi, \pi]$ y las funciones $S_n(x)$ y $\psi(x)$ son de período 2π, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \psi(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

EJEMPLO 2. La fig. 111 muestra tres funciones periódicas cuyo período es 2π

$S_2(x) = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$ (con línea continua),

$S_3(x) = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3}$ (con línea de trazos).

$S_4(x) = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}$ (con línea de puntos).

Para los valores de n mayores, el gráfico de la suma $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$ puede verse esquemáticamente dibujado (no muy exacto) en la fig. 112 lo que sugiere que la función límite

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

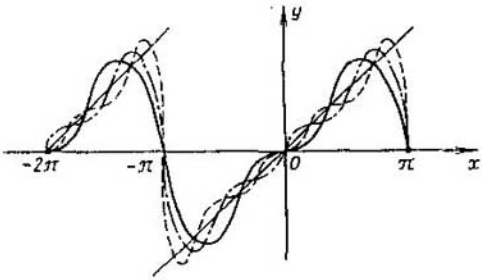

Fig. 111.

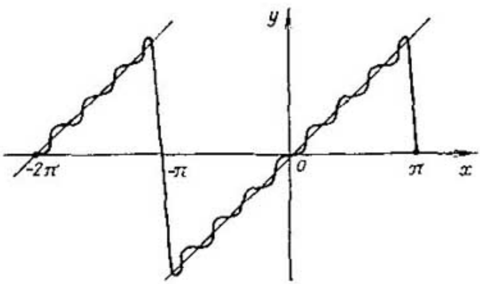

Fig. 112.

es una función periódica (de período 2π) que se define por las igualdades

$$S(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0 & x = \pi. \end{cases}$$

De hecho es así (véase el § 4.4).

§ 4.2. Convergencia de series trigonométricas

Supongamos que está dada la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right). \tag{1}$$

Para aclarar si converge o no esta serie es natural examinar la serie numérica

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) \tag{2}$$

que mayorea, como se dice, la *serie* (1). Sus términos superan, respectivamente, los valores absolutos de los términos de la serie (1):

$$\left|a_k\cos\frac{k\pi}{l}x\right|\leqslant|a_k|,\quad \left|b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right|\leqslant|b_k|.$$

De aquí se deduce que si la serie (2) converge, converge asimismo la serie (1) para todos los valores de x y además absoluta e uniformemente (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 9.8, teorema 1). Sin embargo, la serie (1) puede converger sin que converja la serie (2). Es que sus términos para cada valor de x, al variar k, cambian de signo (oscilan) un número infinito de veces y ella puede resultar convergente debido a la compensación de sus términos positivos por los negativos. En la teoría general de las series existen criterios de convergencia de las series semejantes. Tales criterios son el de Dirichlet y el de Abel [1] (véase el § 9.9, teoremas 3 y 4 del mismo libro), cómodos para la investigación de las series trigonométricas.

De un modo u otro, si se establece que la serie (1) converge, entonces del hecho de que sus términos sean funciones continuas de período $2l$ se deduce que también su suma

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right) \tag{3}$$

es una función continua de período $2l$ (véanse el § 9.8, teorema 2 y el § 9.9, teorema 2 del mismo libro) y la serie (3) puede ser integrada término a término.

[1] N. H. Abel (1802—1829), matemático noruego. P. G. L. Dirichlet (1805—1859), matemático alemán.

La serie (3) se puede derivar formalmente respecto a x:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \left(-a_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x + b_k \cos \frac{k\pi}{l} x \right) \tag{4}$$

y formar su serie mayorante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} (|a_k| + |b_k|). \tag{5}$$

Nuevamente, si la serie (5) converge, la serie (4) también converge y con ello uniformemente. Al mismo tiempo, en virtud del teorema noto de la teoría de las series uniformemente convergentes la suma de la serie (4) es derivada de la suma de la serie (3), o sea,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \left(-a_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} \cdot x + b_k \cos \frac{k\pi}{l} x \right).$$

En general, si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^s (|a_k| + |b_k|) < \infty$$

para cierto s natural converge, es legítimo derivar la serie (3) término a termino s veces.

Asimismo es necesario recordar que no se excluye legitimidad de derivar la serie (3) una vez más (es decir, $s + 1$ veces).

EJEMPLO 1. Determinar el número de veces que puede ser derivada término a término la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kx \quad (0 < q < 1).$$

Derivemos formalmente la serie dada s veces:

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} k^s q^k \begin{Bmatrix} \cos kx \\ \operatorname{sen} kx \end{Bmatrix}.$$

La serie mayorante $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^s q^k$ $(0 < q < 1)$ converge para todo número natural s hecho que puede ser determinado con ayuda del criterio de D'Alembert. Por eso la serie inicial se puede derivar término a término tantas veces como se quiera.

PROBLEMA 1. ¿Cuántas veces se pueden derivar, a ciencia cierta, término a término las series

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k^4}, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3},$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} q^k (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \quad (0 < q < 1, |a_k|, |b_k| < M).$$

¿Cuántas derivadas continuas tienen a ciencia cierta las sumas de estas series? (véase también el ejemplo 1 del § 9.9 del libro anteriormente mencionado).

§ 4.3. Serie de Fourier

Supongamos que está dada la función $f(t)$, cuyo período es $2l$. Es noto que ésta se puede ser desarrollada en serie trigonométrica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right), \tag{1}$$

es decir, ella ya es la suma de cierta serie trigonométrica (de la forma (1)) para todos los números t (o, quizás, para todos los números t a excepción de algunos valores de t). La pregunta es: ¿cómo determinar a partir de la función $f(t)$ los coeficientes a_k y b_k? Esta cuestión fue resuelta, en principio, por los matemáticos y físicos de comienzos del siglo pasado. Hizo gran aportación a su resolución J. Fourier [1]). Mostró que los coeficientes a_k y b_k de la serie trigonométrica que representa la función periódica $f(t)$, de período $2l$, pueden ser calculados por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi}{l} t f(t)\, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t f(t)\, dt \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Los números a_k y b_k que se calculan por estas fórmulas se llaman *coeficientes de Fourier* de la función $f(t)$ y la serie trigonométrica (1) la cual en vez de a_k y b_k contiene los coeficientes respectivos de Fourier lleva el nombre de *serie de Fourier* de la función $f(t)$.

[1]) J. B. Fourier (1768—1830), matemático francés.

Cabe señalar que en algunos casos (para clases más estrechas de funciones) las fórmulas (2) eran conocidas aún por Euler. Por eso las denominan también fórmulas de Euler — Fourier.

En el § 4.6 será hecha la deducción de las fórmulas (2) en suposición de que ya es sabido que la función periódica $f(t)$ de período $2l$ se desarrolla en serie trigonométrica que converge uniformemente hacia ella.

Conviene decir que desde hace mucho los físicos creían que todo movimiento periódico compuesto de un punto (oscilación compleja) — la oscilación mecánica de un punto de una cuerda sonora o la oscilación electromagnética, o bien la oscilación relacionada con la propagación del sonido— se descompone en oscilaciones armónicas, es decir, el movimiento periódico compuesto hay que imaginarlo como la suma (finita o infinita) de las oscilaciones armónicas simples del mismo período. La separación de una oscilación armónica, correspondiente a la frecuencia dada k, que forma parte de un movimiento periódico compuesto tiene gran importancia práctica. Los físicos obtienen tal separación de la oscilación armónica a partir de un movimiento real con ayuda de aparatos especiales llamados resonadores. El matemático, si tiene dado el movimiento en cuestión con ayuda de la función periódica $s = f(t)$, obtiene esta separación por medio de cálculos. Calcula simplemente los coeficientes de Fourier a_k y b_k de esta función y entonces el k-ésimo armónico respectivo tendrá la forma

$$a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t.$$

Notemos que si el período de la función $f(t)$ es a y ésta es integrable sobre el segmento $[0, a]$ o, como se dice, es integrable sobre el período, para ella será válida la igualdad

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_\lambda^{a+\lambda} f(x)\,dx, \tag{3}$$

cualquiera que sea el número real λ (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 6.4. ejemplo 8).

La propiedad (3) muestra, en particular, que los coeficientes de Fourier de una función periódica $f(t)$ de período $2l$ se pueden escribir en la forma

$$a_k = \frac{1}{l} \int_\lambda^{\lambda+2l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} t\,dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_\lambda^{\lambda+2l} f(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

donde λ es un número real arbitrario, porque las funciones $\cos \frac{k\pi}{l} t$ y $\operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t$ son de período $2l$ y el producto de las funciones de período $2l$ son, a su vez, funciones de período $2l$.

Notemos, además, que si la función f es par sobre el segmento $[-a, a]$, entonces (véase el § 6.4, ejemplo 6, del libro arriba mencionado)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Si la función f es impar sobre el segmento $[-a, a]$, entonces (véase el ejemplo 7 del § 6.4 del libro arriba mencionado)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

La función $\cos \frac{k\pi}{l} t$ es par y la función $\operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t$ es impar. Además el producto de dos funciones pares y dos impares es una función par y el producto de una función par por una impar es una función impar. Por eso para la función par $f(t)$ de período $2l$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l} x\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

y para la función impar:

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l} x\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

EJEMPLO 1. Desarrollar en serie de Fourier la función (de período 2π) $f(x) = x^2$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$.

La función dada es par. Entonces su serie de Fourier se compone solamente de cosenos $(b_k = 0)$. Calculemos los coeficientes a_k:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

y

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_0^\pi - \frac{4}{k\pi}\int_0^\pi x \operatorname{sen} kx\,dx =$$

$$= \frac{4x}{\pi k}\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^\pi - \frac{4}{\pi k^2}\int_0^\pi \cos kx\,dx =$$

$$= (-1)^k \frac{4}{k^2} \qquad (k>0).$$

Ahora bien,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

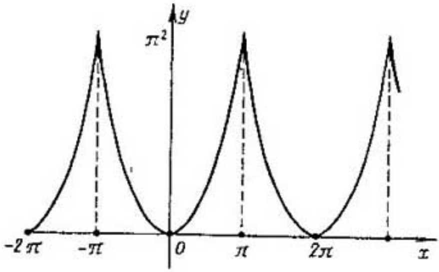

Fig. 113.

El gráfico de la suma de esta serie se puede ver en la fig. 113.

§ 4.4. Criterios de convergencia de las series de Fourier

Para simplificar las notaciones vamos a considerar las funciones de período 2π. Para las funciones de período $2l$, donde l es un número natural positivo, los razonamientos son análogos.

Como sabemos, se llama serie de Fourier de la función $f(x)$ de período 2π a la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \tag{1}$$

cuyos coeficientes se calculan por las fórmulas

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

De aquí vemos que para que la serie de Fourier de la función f de período 2π tenga significado, en todo caso deben tener significado las integrales (2).

En nuestros razonamientos las integrales (2) siempre tendrán significado, porque hablaremos de funciones acotadas continuas o continuas a trozos sobre un período.

Hagamos la siguiente pregunta: ¿qué condiciones debe satisfacer la función $f(x)$ para que su serie de Fourier converja hacia ella?

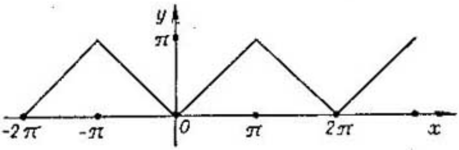

Fig. 114.

Los matemáticos se ocuparon mucho de este problema. Nos limitaremos a formular algunos criterios suficientes de convergencia de las series de Fourier, importantes desde el punto de vista práctico, sin demostrarlos.

Si una función $f(x)$ de período 2π es continua sobre todo el eje real y tiene la derivada continua a trozos sobre el período, entonces su serie de Fourier converge uniformemente hacia ella:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

EJEMPLO 1. La función $\psi(x)$ de período 2π, que es par y se define sobre el segmento $[0, \pi)$ por la igualdad

$$\psi(x) = x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi),$$

satisface, evidentemente, el criterio enunciado (véase el gráfico de esta función en la fig. 114). Sus coeficientes de Fourier $b_k = 0$

y los coeficientes

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,x\,\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx = \frac{2}{\pi k^2}\cos kx\,\Big]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1),\quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ahora bien,

$$a_0 = \pi,\quad a_{2k} = 0,\quad a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Pero entonces, conforme al criterio indicado,

$$\psi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}\quad (-\infty < x < \infty);$$

con la particularidad de que la convergencia de la serie es uniforme.

El hecho de que esta serie converje uniformemente se deduce asimismo de la teoría general de las series (según el criterio de Weierstrass [1]). Pero no es trivial que converja precisamente a la función $\psi(x)$.

Notemos, además, que la función periódica dada $\psi(x)$ coincide con la función $y = x$ solamente sobre el segmento $[0, \pi]$ y fuera del segmento $[0, \pi]$ estas funciones son diferentes.

Enunciemos otro criterio de convergencia de la serie de Fourier llamado *criterio de Dirichlet*.

Se dice que una *función $f(x)$ de período 2π satisface la condición de Dirichlet si sobre el segmento* $[0, 2\pi]$ *se puede señalar un número finito de puntos* $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = 2\pi$ *tales que sobre los intervalos* (x_j, x_{j+1}) *la función esté acotada y sea monótona (no decrece o no crece) y en cada punto* x_j *de discontinuidad de* f

$$f(x_j) = \frac{1}{2}(f(x_j+0) + f(x_j-0)),$$

o sea, el valor de f en x_j sea la media aritmética de los límites derecho e izquierdo de f en x_j.

[1]) K. Th. W. Weierstrass (1815—1897), célebre matemático alemán.

Si la función $f(x)$ de período 2π satisface la condición de Dirichlet, su serie de Fourier convergirá hacia ella para todo valor de x:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen}kx)\quad(-\infty<x<\infty).$$

EJEMPLO 2. La función $\varphi(x)$ de período 2π, que se define por la igualdad

$$\varphi(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0<x<2\pi,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

como se ve de su gráfico (fig. 115), satisface la condición de Dirichlet. Es que los puntos $0=x_0<x_1=2\pi$ poseen la siguiente propiedad:

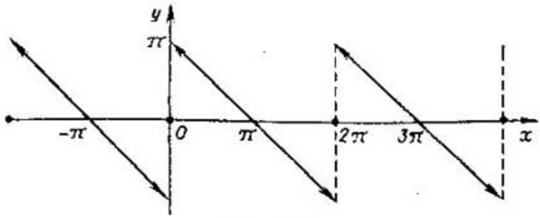

Fig. 115.

la función $\varphi(x)$ decrece y está acotada sobre el invervalo (x_0, x_1) y

$$\varphi(0)=\frac{\varphi(0+0)+\varphi(0-0)}{2}=\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0,$$
$$\varphi(2\pi)=\frac{\varphi(2\pi+0)+\varphi(2\pi-0)}{2}=\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0.$$

La función $\varphi(x)$ es impar, por eso su serie de Fourier se compone solamente de senos; por consiguiente, los coeficientes de Fourier para ella

$$a_k=0\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\operatorname{sen}kx\,dx=-\frac{2}{\pi}(\pi-x)\left.\frac{\cos kx}{k}\right|_0^{\pi}-$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,dx=\frac{2}{k}-\frac{2}{\pi k}\left.\frac{\operatorname{sen}kx}{k}\right|_0^{\pi}=\frac{2}{k}\quad(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Así, pues,

$$\varphi(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \quad (-\infty < x < \infty).$$

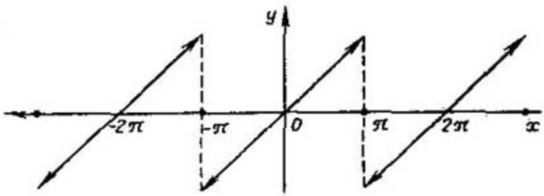

Fig. 116.

PROBLEMA 1. Desarrollar en serie de Fourier la función de período 2π definida sobre $[-\pi, \pi]$ por la igualdad (fig. 116)

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

RESPUESTA. $f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$.

§ 4.5. Propiedades ortogonales de las funciones trigonométricas

Examinemos la sucesión de funciones trigonométricas

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots \tag{1}$$

Para ellas son válidas las fórmulas importantes (fáciles de comprobar):

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \pi, & k = l, \end{cases} \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} lx\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \pi, & k = l, \end{cases} \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \operatorname{sen} lx\,dx = 0 \quad (k,\, l = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots), \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = 0 \qquad\qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots), \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\,dx = 0 \qquad\qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots), \\
&\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

De (2), en particular, resulta que la integral, sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, del producto de cualesquiera dos funciones de la sucesión (1) es igual a cero.

Esta propiedad se enuncia así: *las funciones de la sucesión* (1) *son ortogonales sobre el segmento* $[-\pi, \pi]$.

Además, de las fórmulas (2) resulta:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \pi, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1,\, 2,\, \ldots \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 kx\,dx = \pi, \\
&\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = 2\pi.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

PROBLEMA 1. Obtener unas fórmulas que sean análogas a las (2) y (3) para las funciones trigonométricas

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{l}x,\ \cos\frac{2\pi}{l}x,\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{l}x,\ \ldots .$$

Indicación. Estas fórmulas se pueden obtener directamente por medio del cálculo. Pero pueden obtenerse también, sustituyendo en las integrales de las (2) y (3) la variable $x = \frac{\pi u}{l}$.

§ 4.6. Coeficientes de Fourier

Supongamos que la función $f(x)$ de período 2π queda desarrollada en serie trigonométrica

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen}kx) \tag{1}$$

y resulta que esta serie converge uniformemente hacia ella.

Cada término de la serie (1) es una función continua y puesto que la serie (1), según la condición, converge uniformemente, su suma $f(x)$ es la función continua (sobre un eje real) (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 9.8, teorema 2).

Multipliquemos el primero y segundo miembros de (1) por $\cos mx$, donde m es el número natural. Por cuanto la función $\cos mx$ es continua y está acotada, la serie obtenida volverá a estar compuesta de funciones continuas y volverá a converger uniformemente, esta vez ya hacia la función continua $f(x)\cos mx$. Pero es legítimo integrar las series uniformemente convergentes de las funciones continuas término a término sobre el segmento finito. Vamos a integrar la serie obtenida término a término sobre el período, o sea, sobre el segmento $[-\pi,\ \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos mx\,dx+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos mx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}kx\cos mx\,dx\right)=$$
$$=a_m\cdot\pi \quad (m=1,\ 2,\ \ldots).$$

La segunda igualdad se deduce de las fórmulas (2) del § 4.5 (propiedad de ortogonalidad de las funciones trigonométricas).

Análogamente obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}mx\,dx=b_m\pi \quad (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,1\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+\right.$$
$$\left.+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}kx\,dx\right)=\frac{a_0}{2}2\pi=a_0\pi$$

en virtud de las últimas tres fórmulas (2) del § 4.5.

Como ya hemos señalado en el § 4.5, (2), los números a_m y b_m que se calculan por las fórmulas (2) se llaman *coeficientes de Fourier de la función f* y la misma serie trigonométrica (1), donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de la función f, se denomina *serie de Fourier* de la función f.

Pues, hemos demostrado que *si la función f puede ser representada en forma de suma de la serie trigonométrica* (1) *que converge uniformemente* (*¡para todos los valores de x!*), *los números a_k y b_k serán necesariamente los coeficientes de Fourier de la función f.*

Observación 1. De este modo, *toda serie trigonométrica que converge uniformemente es la serie de Fourier de su propia suma.*

Observación 2. Hemos examinado aquí la función $f(x)$ de período 2π para no complicar la notación. En cuanto al período $2l$, los razonamientos son análogos.

§ 4.7. Estimación de los coeficientes de Fourier

TEOREMA 1. *Supongamos que la función $f(x)$ de período 2π tiene la derivada continua $f^{(s)}(x)$ de orden s que satisface sobre todo el eje real la inecuación*

$$|f^{(s)}(x)| \leqslant M_s; \tag{1}$$

entonces los coeficientes de Fourier de la función f satisfacen la desigualdad

$$|a_k| \leqslant \frac{2M_s}{k^s}, \quad |b_k| \leqslant \frac{2M_s}{k^s} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN. Integrando por partes y teniendo en cuenta que $f(-\pi) = f(\pi)$, tenemos

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[f(t)\,\frac{\operatorname{sen} kt}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,\frac{\operatorname{sen} kt}{k}\,dt\right] = -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\operatorname{sen} kt\,dt. \tag{3}$$

Por eso

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} M_1\cdot 1\,dx = \frac{2M_1}{k}.$$

Al integrar sucesivamente por partes el segundo miembro de (3), teniendo en cuenta que las derivadas $f', \ldots, f^{(s-1)}$ son continuas y toman valores iguales en los puntos $t = -\pi$ y $t = \pi$, así como la estimación (1), obtenemos la primera estimación en (2).

La segunda estimación en (2) se obtiene de un modo semejante.

§ 4.8. Espacio de las funciones con el producto escalar

La función $f(x)$ se llama *continua a trozos sobre el segmento* $[a, b]$ si es continua sobre este segmento, a excepción, quizás, de un número finito de puntos donde ella tiene discontinuidades de primer género (véase también el § 7.4 de nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral»). Tales funciones se pueden sumar y multiplicar por números reales y volver a obtener como resultado funciones continuas a trozos sobre $[a, b]$.

Llamaremos *producto escalar* de dos funciones f y φ continuas a trozos sobre $[a, b]$ $(a < b)$ a la integral

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{1}$$

Es evidente que para cualesquiera funciones f, φ, ψ continuas a trozos sobre $[a, b]$ se cumplen las propiedades:

1) $(f, \varphi) = (\varphi, f)$.

2) $(f, f) \geqslant 0$ y de la igualdad $(f, f) = 0$ se deduce que $f(x) = 0$ sobre $[a, b]$, salvo, quizás, un número finito de puntos x.

3) $(\alpha f + \beta\varphi, \psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(\varphi, \psi)$,

donde α y β son los números reales arbitrarios.

Sea $L_2' = L_2'(a, b)$ el conjunto de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $[a, b]$, para las cuales se ha introducido el producto escalar mediante la fórmula (1) y lo llamaremos *espacio* L_2' o bien $L_2'(a, b)$.

Observación 1. En las matemáticas se llama espacio $L_2 = L_2(a, b)$ el conjunto de funciones $f(x)$ integrables en el sentido de Lebesgue sobre $[a, b]$ junto con sus cuadrados para los cuales se ha introducido el producto escalar por la fórmula (1). El espacio L_2' que se examina es una parte de L_2. El espacio L_2' posee muchas propiedades del espacio L_2, pero no todas (véase a continuación § 4.9, nota).

De las propiedades 1), 2) y 3) se deduce la importante *desigualdad de Buniakovski* [1]) (véase nuestro libro «Matemáticas superiores.

---

[1]) V. Ya. Buniakovski (1804—1889), matemático ruso.

Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 6 (6))

$$|(f, \varphi)| \leqslant (f, f)^{1/2} (\varphi, \varphi)^{1/2}$$

la cual en el lenguaje de las integrales aparece así:

$$\left| \int_a^b f(x) \varphi(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\, dx}\,.$$

La magnitud

$$\| f \| = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{1/2} = (f, f)^{1/2}$$

se denomina *norma* de la función f.

La norma posee las propiedades siguientes:

1) $$\| f \| \geqslant 0,$$

con la particularidad de que la igualdad puede existir solamente para la función nula $f = 0$, o sea, para la función igual a cero, a excepción, quizás, de un número finito de puntos (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 6.2, teorema 5),

2) $$\| f + \varphi \| \leqslant \| f \| + \| \varphi \|,$$

3) $$\| \alpha f \| = |\alpha| \cdot \| f \|,$$

donde α es el número real.

La segunda propiedad en el lenguaje de las integrales tiene la forma siguiente:

$$\left(\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b \varphi^2(x)\, dx \right)^{1/2}$$

y se llama *desigualdad de Minkowski*.

Se dice que la *sucesión de las funciones* $\{f_n\}$ pertenecientes a L_2' *converge a la función* $f \in L_2'$ *en media cuadrática sobre* $[a, b]$ (o de otro modo *según la norma* L_2') *si*

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} = 0.$$

Notemos que si la sucesión de las funciones $f_n(x)$ converge uniformemente hacia la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, entonces para n suficientemente grandes la diferencia $f(x) - f_n(x)$ debe ser pequeña, en su valor absoluto, para todos los valores de $x \in [a, b]$.

Sin embargo, si $f_n(x)$ tiende hacia $f(x)$ en media cuadrática sobre el segmento $[a, b]$, entonces la diferencia indicada puede no ser también asimismo pequeña para grandes n *por doquier* sobre $[a, b]$. En algunos lugares del segmento $[a, b]$ esta diferencia puede ser incluso grande y es importante solamente que la integral tomada de su cuadrado sobre el segmento $[a, b]$ sea pequeña para grandes n.

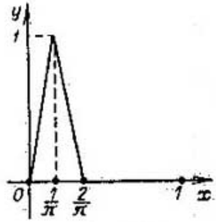

Fig. 117.

EJEMPLO 1. Supongamos dada sobre el segmento $[0, 1]$ la función continua lineal a trozos $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ representada en la fig. 117, además,

$$f_n(0) = f_n(2/n) = f_n(1) = 0,$$
$$f_n(1/n) = 1.$$

Para cualquier n natural

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} f_n(x) = 1,$$

y, por consiguiente, esta sucesión de las funciones no es uniformemente convergente hacia cero cuando $n \to \infty$.

Mientras tanto

$$\| f_n - 0 \| = \| f_n \| = \left(\int_0^1 f_n^2(x)\, dx \right)^{1/2} =$$
$$= \left(\int_0^{1/n} (nx)^2\, dx + \int_{1/n}^{2/n} (2 - nx)^2\, dx \right)^{1/2} =$$
$$= \left(2 \int_0^{1/n} (nx)^2\, dx \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3n} \right)^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

o sea, la sucesión de las funciones $\{f_n(x)\}$ tiende a cero en media cuadrática sobre $[0, 1]$.

A partir de los elementos de la sucesión $f_1, f_2, f_3, \ldots$ se puede construir la serie

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots. \tag{2}$$

La suma de sus primeros n términos

$$\sigma_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

es una función perteneciente a L_2'. Si en L_2' existe una función f tal que

$$\| f - \sigma_n \| \to 0, \quad n \to \infty,$$

entonces se dice que la serie (2) converge hacia la función f en media cuadrática y se escribe

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots .$$

Observación 2. Se puede examinar el espacio $L_2' = L_2'(a, b)$ de las funciones de valores complejos $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, donde f_1 y f_2 son las funciones reales continuas a trozos sobre $[a, b]$. En este espacio las funciones se multiplican por los números complejos y el producto escalar de las funciones $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ y $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ se determina del modo siguiente:

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)]\,[\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)]\,dx$$

y la norma f se determina como

$$\| f \| = (f, f)^{1/2} = \left(\int_a^b f \cdot \bar{f}\,dx \right)^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_a^b [f_1^2(x) + f_2^2(x)]\,dx \right)^{1/2}$$

§ 4.9. Sistema ortogonal de funciones

La función $\varphi \in L_2' = L_2'(a, b)$ se llama *normal* si

$$\| \varphi \| = (\varphi, \varphi)^{1/2} = 1.$$

Dos funciones $\varphi, \psi \in L_2'$ se denominan *ortogonales* (entre sí) si $(\varphi, \psi) = 0$.

Un sistema (finito o infinito) de las funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$.

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{1}$$

se dice *ortogonal* si las funciones tienen una norma positiva y son dos a dos ortogonales.

El sistema (1) se llama *ortogonal* y *normal* (*ortonormal*) u *ortonormalizado* si

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l, \end{cases}$$

o sea, es ortogonal y la norma de cada función que forma parte de este sistema es unitaria.

Todo sistema ortogonal finito de funciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ es *linealmente independiente en* L_2', o sea, del hecho de que

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(x) = 0, \quad x \in [a, b],$$

donde α_k son los números, se deduce que todos los números $\alpha_k = 0$. En efecto, si multiplicamos escalarmente ambos miembros de esta igualdad por φ_l ($l = 1, \ldots, N$), entonces en virtud de las propiedades lineales del producto escalar obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k, \varphi_l\right) = \alpha_l (\varphi_l, \varphi_l) = 0$$

y puesto que $(\varphi_l, \varphi_l) > 0$, entonces $\alpha_l = 0$ ($l = 1, \ldots, N$).

Si $f \in L_2' = L_2'(a, b)$ es una función arbitraria, el número

$$\frac{1}{\|\varphi_k\|^2} (f, \varphi_k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

lleva el nombre de *coeficiente de Fourier de la función f* respecto a la función φ_k del sistema ortogonal (1). La serie

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} (f, \varphi_k) \varphi_k \tag{2}$$

engendrada por la función $f \in L_2'$ se llama *serie de Fourier de la función f en el sistema ortogonal* (1).

Si el sistema (1) es ortonormal, entonces $\|\varphi_k\| = 1$ ($k = 1, 2, \ldots$) y la serie de Fourier de la función f se escribirá de una manera más sencilla

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k \tag{3}$$

En este caso los números (f, φ_k) son los coeficientes de Fourier. A continuación examinaremos solamente los sistemas ortonormalizados (1). El paso de estos sistemas a los ortogonales arbitrarios tiene un carácter técnico.

TEOREMA 1. *Si el sistema* (1) *es ortonormalizado, entonces para toda función* $f \in L_2'$ *la norma*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\|$$

entre todos los posibles sistemas de números $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ *alcanza su mínimo para el único sistema de números definidos por las igualdades*

$$\alpha_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 1, \ldots, N),$$

es decir, para los coeficientes de Fourier de la función f.

Ahora bien,

$$\min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|, \tag{4}$$

entonces

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)^2. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k, \ f - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j\right) =$$

$$= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} [(f, \varphi_k)^2 - 2\alpha_k (f, \varphi_k) + \alpha_k^2] + (f, f) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} [(f, \varphi_k) - \alpha_k]^2 + (f, f) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)^2 \geqslant$$

$$\geqslant (f, f) - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)^2.$$

En este caso es evidente que la última relación en esta cadena se convierte en igualdad únicamente en el caso cuando $\alpha_k = (f, \varphi_k)$ para todo valor de k. De este modo quedan demostradas las relaciones (4) y (5).

De la igualdad (5), si se tiene en cuenta que su primer miembro es un número no negativo, se deduce la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)^2 \leqslant (f, f)$$

que es justa para todo N. Pero entonces, si el sistema (1) se compone de un número infinito de funciones φ_k, la serie formada por los cuadrados de los coeficientes de Fourier de la función f converge y es válida la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 \leqslant (f, f) \tag{6}$$

llamada *desigualdad de Bessel*.

Es muy importante el caso cuando el sistema ortonormalizado (1) es tal que la desigualdad (6) se convierta en igualdad (*igualdad de Parseval — Steklov* [1]))

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 = (f, f) \tag{7}$$

para todas las funciones $f \in L_2'$.

Para determinar el valor de la igualdad de Parseval, asignemos la función arbitraria $f \in L_2'$ y formemos para ella la serie de Fourier

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\, \varphi_k .$$

La suma de los primeros n términos de esta serie

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\, \varphi_k(x)$$

se llama *n-ésima suma de Fourier de la función f en el sistema ortogonal* (1).

Con arreglo a la fórmula (5) la desviación de $S_n(x)$ respecto a $f(x)$ en media cuadrática (en el sentido de L_2') es igual a

$$\| f - S_n \|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2. \tag{8}$$

Si para la función $f \in Z_2'$ se cumple la igualdad de Parseval (7), entonces

$$\| f - S_n \| \to 0, \quad n \to \infty \tag{9}$$

e inversamente, de (9) se deduce la validez de la igualdad de Parseval (7).

Existe la terminología siguiente. El *sistema ortogonal* (1) se denomina *completo en L_2'* si la serie de Fourier de toda función $f \in L_2'$ converge en media cuadrática hacia f, o sea, tiene lugar la propiedad (9) para todas las funciones $f \in L_2'$.

---

[1]) M. A. Parseval (1755—1836), matemático francés. V. A. Steklov (1864—1926), matemático y físico ruso.

Ahora bien, hemos demostrado que *para que el sistema ortonormalizado* (1) *sea completo en L_2' es necesario y suficiente que para toda función $f \in L_2'$ se cumpla la igualdad de Parseval* (7).

Nota. Ya hemos señalado en la observación 1 del § 4.8 que $L_2 = L_2(a, b)$ designa el espacio de las funciones $f(x)$ integrables en el sentido de Lebesgue sobre $[a, b]$ junto con sus cuadrados y que $L_2' \subset L_2$.

Examinemos un sistema de funciones continuas ortonormalizado sobre el segmento $[a, b]$

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \varphi_3(x), \ \ldots$$

que sea completo en el sentido en que lo hemos definido anteriormente. Sabemos que si $f \in L_2'$, entonces para los números

$$c_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 1, 2 \ldots) \tag{10}$$

se cumple la igualdad de Parseval

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Esto es justo asimismo para las funciones $f \in L_2$, sólo que es necesario entender las integrales en el sentido de Lebesgue.

No obstante, tiene lugar también la afirmación inversa: si los números c_k $(k = 1, 2, \ldots)$ son tales que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$$

converge, entonces en L_2 existe una función $f(x)$ tal que se cumplan las igualdades (7).

Sin embargo, en L_2' tal función puede no existir. En esto se manifiesta la imperfección del espacio L_2'. En el espacio L_2' hay una cantidad insuficiente de funciones para que esta afirmación inversa tenga lugar.

§ 4.10. Completitud de funciones trigonométricas

En el § 4.4 hemos citado los criterios de convergencia de la serie de Fourier. Se trataba allí de una convergencia corriente. Ahora enunciemos el criterio de convergencia de la serie de Fourier en media cuadrática.

El conjunto de todas las funciones f de período 2π acotadas sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y continuas sobre éste, a excepción, quizás, de un número finito de puntos donde f tiene la discontinuidad de primer género, lo designemos por $L_2'{*} = L_2'{*}(-\pi, \pi)$.

Si la función $f \in L_2'*$, entonces su serie de Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen}kx), \tag{1}$$

$$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left\{\begin{matrix}\cos kt\\ \operatorname{sen}kt\end{matrix}\right\}dt \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

converge hacia ella en media cuadrática, o sea,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx\to 0 \quad (n\to\infty), \tag{2}$$

donde

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen}kx).$$

En el caso dado la fórmula (1), que tiene el signo de igualdad, debe leerse así: la función $f(x)$ es la suma de su serie de Fourier que converge hacia ella (sobre el segmento $[-\pi, \pi]$) en media cuadrática.

Calculemos directamente la integral en (2), teniendo en cuenta las propiedades ortogonales de las funciones trigonométricas,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen}kx)\Big]^2dx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-2\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx-$$

$$-2\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen}kx\,dx\Big)+$$

$$+\frac{a_0^2}{2}\pi+\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

Para la función $f \in L_2'*$ esta expresión, cuando $n\to\infty$, tiende a cero. Pero entonces tiene lugar la igualdad

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) \quad (f\in L_2'*) \tag{3}$$

llamada *igualdad de Parseval* para las funciones trigonométricas (*igualdad de Liapunov*).

Observación 1. Al comparar la fórmula (3) con la fórmula (7) del § 4.9, es necesario tener en cuenta que la última se ha deducido para el sistema ortonormalizado, mientras que la fórmula (3) que está examinándose se ha obtenido para un sistema ortogonal, pero no normalizado y tal es el sistema

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots.$$

Las funciones

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots$$

forman un sistema ortogonal sobre el segmento $[0, \pi]$. Tenemos el siguiente

TEOREMA 1. *Toda función $f \in L_2'(0, \pi)$, o sea, continua a trozos sobre $[0, \pi]$ se puede desarrollar en serie de Fourier respecto a los cosenos:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

y, además, la serie (5) *converge hacia f en media cuadrática sobre* $[0, \pi]$.

En efecto, esta función puede prolongarse sobre $[-\pi, \pi]$ del modo par y luego periódicamente, de período 2π, sobre todo el eje real. Se obtendrá la función $f \in L_{2*}'$. La serie de Fourier de la función f respecto a las funciones $1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots$ en virtud del carácter par de f tiene exactamente la forma (5) y, como ya sabemos, esta serie converge hacia $f(x)$ en media cuadrática sobre $[-\pi, \pi]$. Con mayor razón ella converge hacia la función indicada en media cuadrática sobre $[0, \pi]$.

Lo dicho se puede expresar con las palabras siguientes: *el sistema de funciones* (4) *es ortogonal y es un sistema completo en $L_2'(0, \pi)$.*

Es justa asimismo la afirmación:

El sistema de funciones

$$\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \ldots \tag{6}$$

ortogonal precisamente es un sistema completo en $L_2'(0, \pi)$, o sea, tiene lugar el siguiente

TEOREMA 2. *Toda función $f \in L_2'(0, \pi)$ puede ser desarrollada en serie de Fourier respecto a los senos:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt \quad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (7)$$

la cual converge a ella en media cuadrática sobre $[0, \pi]$.

La ortogonalidad del sistema (6) se comprueba directamente y de hecho se deduce de (2) del § 4.5. En cuanto a su completitud, ésta se deriva de las consideraciones siguientes.

Prolonguemos la función $f \in L_2'(0, \pi)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ de un modo impar y luego periódicamente, de período 2π. Su serie de Fourier respecto al sistema $1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots$ converge en media cuadrática sobre $[-\pi, \pi]$. Con mayor razón ella converge en este sentido sobre $[0, \pi]$. Además, esta serie tiene la forma (7).

EJEMPLO 1. Desarrollar la función $y = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ en serie respecto a los senos.

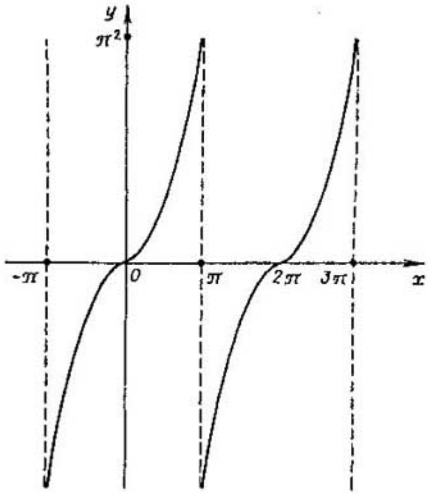

Fig. 118.

Vamos a prolongar esta función de un modo impar sobre $[-\pi, 0]$ y luego periódicamente, con período de 2π, sobre todo el eje real. Entonces la serie de Fourier de esta función $\psi(x)$ será formada solamente por los senos:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} kx\, dx = \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k} + \frac{4}{\pi k^3}[(-1)^k - 1],$$

de donde

$$b_{2k} = -\frac{\pi}{k}, \quad b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi(2k-1)^3}.$$

Ahora bien,

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx .$$

El gráfico de la suma de esta serie está representado en la fig. 118.

§ 4.11. Forma compleja de la serie de Fourier

Sean a_k y b_k los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$. En virtud de las fórmulas de Euler

$$a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx =$$
$$= a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx},$$

donde (supondremos $b_0 = 0$)

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}. \tag{1}$$

De aquí

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\cos kt - i \operatorname{sen} kt) f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2} f(t)\, e^{-ikt} dt,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\cos kt + i \operatorname{sen} kt) f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\, e^{ikt} dt .$$

Estas dos igualdades pueden escribirse como una sola fórmula

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots). \tag{2}$$

Es importante señalar que si $f(x)$ es una función real, entonces a_k y b_k son números reales y los números c_k y c_{-k}, aunque, en general, sean complejos, son mutuamente conjugados:

$$c_{-k} = \bar{c}_k. \tag{3}$$

Es evidente que la n-ésima suma de la serie de Fourier de la función f se puede escribir en la forma

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \tag{4}$$

y la misma serie de Fourier de la función f, en forma de la serie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{5}$$

Diremos que la serie (5) converge para el valor dado de x si existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

Ahora bien, una convergencia definida se llama *convergencia en valor principal*.

Es que podría considerarse la convergente si existiera el límite

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{-m}^{n} c_k e^{ikx}$$

cuando m y n crecen infinitamente de un modo independiente uno de otro.

Las funciones complejas

$$\{e^{ikx}\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{6}$$

forman un sistema ortogonal sobre el segmento $[0, 2\pi]$, ya que para $k \neq l$

$$(e^{ikx}, e^{ilx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} \overline{e^{ilx}} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \left. \frac{e^{i(k-l)x}}{k-l} \right|_0^{2\pi} = 0$$

(la primera igualdad está notada según la definición del producto escalar para las funciones de valores complejos, véase la observación 2 del § 4.8). Luego

$$(e^{ikx}, e^{ikx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ikx} dx = 2\pi.$$

§ 4.12. Concepto de integral de Fourier. Integral reiterada de Fourier

Examinemos primeramente la función suave a trozos $f(x)$ de período 2π que satisface la propiedad

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{1}$$

Esto quiere decir que f es de período 2π, continua y tiene la derivada continua por doquier sobre el eje real, a excepción de los puntos cuya cantidad es finita sobre el período $[-\pi, \pi]$; con la particularidad de que en estos puntos existen los límites de f y f' por la derecha y por la izquierda. Además, suponemos que en todo punto se cumple la igualdad (1). Esta condición es esencial, naturalmente, sólo para los puntos de discontinuidad de f, porque en los puntos de continuidad ella se cumple automáticamente. Designemos por L'_* el conjunto de las funciones periódicas indicadas f.

Para cada función $f \in L'_*$ se puede examinar su serie de Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}, \tag{2}$$

donde

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\operatorname{sen} kt\,dt \quad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{4}$$

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-ikt}dt \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \tag{5}$$

$$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2},\ c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2} \quad (k=0,1,2,\ldots;\ b_0=0).$$

Escribamos, además, la N-ésima suma de la serie de Fourier de la función f:

$$S_N^*(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen} kx)=\sum_{k=-N}^{N}c_ke^{ikx}. \tag{6}$$

En la teoría de las series de Fourier se demuestra que para toda función $f \in L_*'$ tiene lugar

$$\lim_{N\to\infty} S_N^*(x) = f(x), \tag{7}$$

o sea, la *serie de Fourier de la función* $f \in L_*'$ *converge hacia ella en todo punto* x.

Las integrales de Fourier pueden ser introducidas por analogía con las series de Fourier.

Examinemos ahora las funciones no periódicas f que son suaves a trozos y absolutamente integrables sobre el eje real. Para ellas, pues, la integral (impropia)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$$

es finita.

El término función suave a trozos se entiende así. La función f es continua y tiene la derivada continua para todos los puntos x del eje real, a excepción de un número finito de puntos donde la función f o su derivada f' es discontinua. No obstante, en los puntos de discontinuidad existen los límites por la derecha y por la izquierda tanto de f como de f'; en este caso tiene lugar la igualdad

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Designemos por $L' = L'(-\infty, \infty)$ el conjunto indicado de las funciones no periódicas.

Por analogía con los coeficientes de Fourier introducimos para las funciones $f \in L'$ las funciones

$$a(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ts\,dt \quad (-\infty < s < \infty), \tag{3'}$$

$$b(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}\, st\,dt \quad (-\infty < s < \infty), \tag{4'}$$

$$c(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-ist}dt \quad (-\infty < s < \infty). \tag{5'}$$

Mientras que los coeficientes de Fourier se determinan para los valores discretos $k = 0, 1, 2, \ldots$, sus análogos (3′) a (5′) son ya las funciones del argumento continuo s.

Según nuestra suposición la función f es continua a trozos; no obstante, las *funciones* $a(s)$, $b(s)$ y $c(s)$ *son continuas.*

Por ejemplo, supongamos, para mayor sencillez, que la función f tiene un solo punto de discontinuidad x_0. Entonces la integral (3') se puede partir en dos integrales

$$a(s)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{\infty} f(t)\cos ts\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x_0} f(t)\cos ts\,dt. \tag{8}$$

Si la función $f(t)$ se modifica en el punto $t=x_0$, suponiendo que $f(x_0)=f(x_0+0)$, entonces bajo la primera integral en (8) se encontrará la función continua de s y t ($-\infty<s<\infty$, $x_0<t<\infty$). Según el criterio de Weierstrass (véase el § 2.15, teorema 3) la primera integral converge uniformemente, porque

$$|f(t)\cos ts|\leqslant|f(t)|,$$

$$\int_{x_0}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty .$$

Pero entonces la primera integral es una función continua de s (véase el § 2.15, teorema 1). De un modo semejante se demuestra también la continuidad según s de la segunda integral (8).

Notemos, además, que

$$\lim_{s\to\infty} a(s)=0, \tag{9}$$

$$\lim_{s\to\infty} b(s)=0, \tag{10}$$

$$\lim_{s\to\infty} c(s)=0. \tag{11}$$

Por ejemplo, para demostrar la propiedad (9) introduzcamos en la integral (3') la sustitución de la variable $t=u+\frac{\pi}{s}$. Entonces

$$a(s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(u+\frac{\pi}{s}\right)\cos(su+\pi)\,du=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(u+\frac{\pi}{s}\right)\cos us\,du=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t+\frac{\pi}{s}\right)\cos ts\,dt.$$

De esta igualdad y de (3') se deduce:

$$a(s)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(t+\frac{\pi}{s}\right)-f(t)\right]\cos ts\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(t+\frac{\pi}{s}\right)-f(t)\right|dt\to 0\quad(s\to\infty).$$

Esta última relación (tendencia a cero) debe ser demostrada, desde luego, pero no vamos a hacer esto ahora.

Como análogo de un término separado de la serie de Fourier (del armónico) es natural considerar la función

$a(s)\cos xs + b(s)\,\mathrm{sen}\ xs =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,[\cos st\cos xs + \mathrm{sen}\ st\ \mathrm{sen}\ xs]\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(t-x)\,s\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,[e^{is(t-x)} + e^{-is(t-x)}]\,dt =$$

$$= c(s)\,e^{isx} + c(-s)\,e^{-isx}. \quad (12)$$

Más exactamente, en calidad de análogo de un término de la serie de Fourier es necesario considerar

$$(a(s)\cos xs + b(s)\,\mathrm{sen}\ xs)\,ds = (c(s)\,e^{isx} + c(-s)\,e^{-ixs}\,ds. \quad (12')$$

Como análogo de la N-ésima suma de la serie de Fourier hace falta considerar la siguiente integral (véase (12)):

$$S_N(x) = \int_0^N [a(s)\cos xs + b(s)\,\mathrm{sen}\ xs]\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^N\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(t-x)\,s\,dt\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_0^N f(t)\cos(t-x)\,s\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\int_0^N \cos(t-x)\,s\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\mathrm{sen}\ N(t-x)}{t-x}\,dt. \quad (13)$$

Hemos cambiado de lugar las integrales. En el caso dado esto es legítimo. En virtud del teorema de Fubini [1], conocido en el análisis,

---

[1] G. Fubini (1879—1943), matemático italiano.

se pueden reordenar las integrales en una integral múltiple si después de la reordenación se obtiene una integral múltiple absolutamente convergente. En el caso dado

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{N}|f(t)\cos(t-x)s|\,dt\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{N}|f(t)|\,ds\,dt=\frac{N}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty.$$

En virtud de (12) la función $S_N(x)$ se puede escribir también en la forma compleja

$$S_N(x)=\int_{0}^{N}[c(s)e^{isx}+c(-s)e^{-isx}]\,ds=$$

$$=\int_{-N}^{N}c(s)e^{isx}ds=\int_{-N}^{N}e^{isx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ist}dt\,ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}e^{isx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ist}dt\,ds. \qquad (13')$$

La función

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\operatorname{sen}N(t-x)}{t-x}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u+x)\frac{\operatorname{sen}Nu}{u}\,du \qquad (14)$$

se llama *integral simple de Fourier*.

Se puede demostrar que si $f\in L'(-\infty,\infty)$, para todo valor de x

$$\lim_{N\to\infty}S_N(x)=f(x), \qquad (15)$$

o sea, tiene lugar una propiedad análoga a la propiedad de (7) para las series de Fourier.

Notemos que la N-ésima suma de la serie de Fourier de una función periódica se puede escribir del modo siguiente (las explicaciones se dan a continuación):

$$S_N^*(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen}kx)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt\cos kx+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\operatorname{sen}kt\;dt\operatorname{sen}kx\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{N}(\cos kt\cos kx+\operatorname{sen}kt\operatorname{sen}kx)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos k(t-x)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\frac{\operatorname{sen}(N+1/2)(t-x)}{2\operatorname{sen}((t-x)/2)}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u+x)\,\frac{\operatorname{sen}(N+1/2)\,u}{2\operatorname{sen}(u/2)}\,du. \qquad (16)$$

En la penúltima igualdad hemos hecho uso de la fórmula (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 9.8, (15))

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos k\alpha=\frac{\operatorname{sen}(N+1/2)\,\alpha}{2\operatorname{sen}(\alpha/2)}.$$

En la última igualdad (16) hemos sustituido la variable $t=u+x$. En virtud de esta sustitución la integral sobre el segmento $[-\pi,\pi]$ respecto a t se transformará en integral sobre $[x-\pi, x+\pi]$ respecto a u, pero el último segmento se puede volver a sustituir por el segmento $[-\pi,\pi]$, porque la función subintegral (de u) es de período 2π (véase § 4.3, (3)).

Vemos que la integral en el segundo miembro de (16) se parece mucho a la integral (14). Por eso ya no es tan sorprendente el que ambas estas dos integrales tiendan, cuando $N\to\infty$, hacia la función $f(x)$.

De (13) y (15) se deduce que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{N}ds\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(t-x)\,s\,dt=f(x). \qquad (17)$$

Por consiguiente, para toda función $f \in L'(-\infty, \infty)$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(t-x)s\,dt = f(x). \tag{18}$$

Es una igualdad muy importante que constituye la base en la teoría de las integrales de Fourier.

La integral en (18) se llama *integral reiterada de Fourier.*

La igualdad (18) afirma que *para las funciones $f \in L'(-\infty, \infty)$ la integral reiterada de Fourier de f en el punto x es igual al valor de la función f en el punto x.*

En la integral de (18) no se puede cambiar el orden de integración, puesto que no se conseguiría ya nada útil. Si hubiéramos hecho tal sustitución, habríamos debido integrar respecto a s la función $\cos(t-x)s$ (siendo fijos los valores de t y x) sobre el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$, pero tal integral no tiene significado.

Ahora bien, en la integral reiterada de (18) debemos integrar primeramente la función $f(t)\cos(t-x)s$ respecto a t sobre $(-\infty, \infty)$ y luego, respecto a s sobre $(0, \infty)$. Ambas integrales son impropias. Es evidente que la integral respecto a t converge absolutamente. En lo que se refiere a la integral respecto a s, hablando en general, esto no es así.

Las letras s y t en la integral de (18), siempre que se desee, pueden ser sustituidas naturalmente, por otras letras cualesquiera, por ejemplo, por s' y t' lo que no cambiará la magnitud de la integral.

De (13) y (15) hemos obtenido la fórmula (18). Por otro lado, de (13') y (15) hemos obtenido otra fórmula importante que es justa para las funciones $f \in L'(-\infty, \infty)$:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} e^{isx}ds \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)\,e^{-ist}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}ds\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-ist}dt = f(x). \tag{19}$$

Introduzcamos las designaciones

$$\tilde{f}(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(t)\,e^{-ixt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-ixt}dt = \sqrt{2\pi}\,c(x),$$

$$\hat{f}(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(t)e^{ixt}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{ixt}dt = \sqrt{2\pi}\,c(-x).$$

$\widetilde{f}(x)$ se llama *transformación de Fourier* o *transformación directa de Fourier de la función* f y $\hat{f}(x)$ se denomina *transformación inversa de Fourier de la función* f. *Las operaciones* $\sim$ *y* $\wedge$ *son recíprocamente inversas*. Si se aplica a la función f la operación $\sim$ y se aplica a la función obtenida $\widetilde{f}$ la operación $\wedge$, entonces, como se ve de (19), volvemos a obtener la función f:

$$\hat{\widetilde{f}} = f.$$

PROBLEMA 1. Demostrar las fórmulas siguientes para las funciones $f \in L'(-\infty, \infty)$:

1) $\hat{f}(-t) = \widetilde{f}(t)$;

2) $\widetilde{f}(-x) = \hat{f}(x)$;

3) $\widetilde{f(at)} = \frac{1}{|a|}\widetilde{f}(x/a)$;

4) $\widehat{f(at)} = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a \neq 0)$;

5) $\widehat{e^{i\mu t}\widetilde{f}} = \widetilde{e^{-i\mu t}\hat{f}} = f(x+\mu)$ (μ es un número real);

6) $\widetilde{\hat{f}} = f$.

Por ejemplo,

$$\widehat{e^{i\mu t}\widetilde{f}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu t}e^{ixt}\,dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-iut}\,du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mu+x)t}\,dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-iut}\,du = \hat{\widetilde{f}}(\mu+x) = f(\mu+x).$$

§ 4.13. Coseno y seno transformaciones de Fourier

En virtud del § 4.12, (18) para $f \in L'(-\infty, \infty)$ tiene lugar la igualdad

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ds\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(t-x)\,s\,dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos xs\,ds\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos ts\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen} xs\,ds\int_{-\infty}^\infty f(t)\operatorname{sen} ts\,dt. \quad (1)$$

Si la función $f(t)$ es par, la segunda integral en el segundo miembro de (1) es igual a cero y en la primera integración respecto a t sobre $(-\infty, \infty)$ se reduce a la integración sobre $(0, \infty)$ y obtenemos la fórmula

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xs\,ds\int_0^\infty f(t)\cos ts\,dt=f(x). \quad (2)$$

Para la función impar $f(t)$ la primera integral por la derecha en (1) es igual a cero y la función $f(t)\operatorname{sen} ts$ es par. Por eso

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen} xs\,ds\int_0^\infty f(t)\operatorname{sen} ts\,dt=f(x) \quad (3)$$

En las fórmulas (2) y (3) se puede suponer que $x\geqslant 0$ y $f(t)$ es una función suave a trozos arbitraria, perteneciente a $L'(0, \infty)$. Es que en estas fórmulas se utilizan solamente los valores de f sobre el semieje $[0, \infty)$. Aclaremos esta observación más detalladamente.

Supongamos que se da una función suave a trozos $f\in L'(0, \infty)$ tal que $f(0)=f(0+0)$. Prolongándola sobre todo el eje real de un modo par, obtenemos una función suave a trozos par $f\in L'(-\infty, \infty)$ para la cual es justa la fórmula (2); en particular, es justa para $x\geqslant 0$.

Ahora supongamos que para nuestra función suave a trozos $f\in \in L'(0, \infty)$ se cumple la igualdad $f(0)=0$ (en general, $f(0+0)\neq \neq f(0)$). Prolonguemos f de un modo impar sobre $(-\infty, \infty)$, obteniendo una función suave a trozos impar $f\in L'(-\infty, \infty)$ para la cual es justa la fórmula (3); en particular, es justa para $x\geqslant 0$. Recalquemos que en la fórmula (3) $f(0)=0$, mientras que en la fórmula (2) el valor de $f(0)=f(0+0)$ puede ser cualquiera.

Las integrales

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos ts\,dt, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\operatorname{sen} ts\,dt$$

se llaman *coseno* y *seno transformaciones de Fourier*, respectivamente. De las fórmulas (2) y (3) se deduce directamente que si aplicamos sivamente dos veces la coseno (o seno) transformación de Fourier a la función suave a trozos $f \in L'(0, \infty)$, obtendremos la función inicial f. En este sentido la coseno (seno) transformación de Fourier es inversa a sí misma.

§ 4.14. Ejemplos

Son válidas las igualdades (las explicaciones se dan a continuación)

1) $$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & 0\leqslant |x|<a \\ 0, & |x|>a \end{array}\right\}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xs \frac{\operatorname{sen} as}{s}\,ds.$$

2) $$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{sign} x, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{array}\right\}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen} xs \frac{1-\cos s}{s}\,ds.$$

3) $$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & a<x<b \\ 0, & x<a,\ b<x \end{array}\right\}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} s(x-a)-\operatorname{sen} s(x-b)}{s}\,ds.$$

4) $$\int_0^\infty e^{-as}\cos sx\,ds=\frac{a}{a^2+x^2}\quad (a>0).$$

5) $$\int_0^\infty e^{-as}\operatorname{sen} sx\,ds=\frac{x}{a^2+x^2}\quad (a>0).$$

6) $$e^{-as}=\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xs}{a^2+x^2}\,dx\quad (a>0,\ 0\leqslant s\leqslant\infty).$$

7) $$e^{-as}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x}{a^2+x^2}\operatorname{sen} xs\,dx\quad (a>0,\ 0<s<\infty).$$

8) $$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{sen} x, & |x|\leqslant\pi \\ 0, & |x|>\pi \end{array}\right\}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} s\pi}{1-s^2}\operatorname{sen} sx\,ds.$$

9) $$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2} \\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2} \end{array}\right\}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\frac{s\pi}{2}}{1-s^2}\cos sx\,ds.$$

10) $$f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x=$$

$$=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\pi \cos sx\left[\frac{1}{(s-\beta)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(s+\beta)^2+\alpha^2}\right]ds\quad (\alpha>0).$$

11) $f(x)=e^{-\alpha|x|}\operatorname{sen}\beta x=$

$$=\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int_0^\infty \frac{s\operatorname{sen} sx\,ds}{[(s-\beta)^2+\alpha^2][(s+\beta)^2+\alpha^2]}\quad(\alpha>0).$$

Valiéndose de métodos corrientes de la teoría de las integrales indefinidas, no se ve cómo se pueden calcular las integrales que están en los segundos miembros de las igualdades 1), 2), 3). Por otra parte, las funciones 1), 2), 3) son suaves a trozos y pertenecen a $L'(-\infty,\infty)$ ($f\in L'(-\infty\ \infty)$). Por eso se les puede aplicar la fórmula de representación (1) del § 4.13. Esta fórmula se simplifica y tiene la forma de (2) del § 4.13 si f es una función par y si f es impar, tiene la forma de (3) del § 4.13. Por ejemplo, la función (1) es par y por eso

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xs\,ds\int_0^a \cos ts\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xs\,\frac{\operatorname{sen} sa}{s}\,ds$$

donde se puede suponer que en los puntos de discontinuidad de f se cumple la igualdad

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Las integrales 4) y 5) se calculan integrando por partes.

Utilizando la igualdad (4), tenemos

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xs}{a^2+x^2}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xs\,dx\int_0^\infty e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda=e^{-a|s|}$$

donde la última igualdad tiene lugar en virtud de la fórmula (2) del § 4.13 que es aplicable, porque $e^{-\alpha\lambda}\in L'(0,\infty)$ es una función suave. De suerte que la igualdad 6) queda demostrada.

Por unos razonamientos semejantes se obtiene la fórmula 7) a partir de 5), aplicando la fórmula (3) del § 4.13.

La función 8) es suave a trozos e impar. Para obtener la integral necesaria, representémosla mediante la fórmula (3) del § 4.13 donde la integral interior es igual a

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} st\, f(t)\,dt=\int_0^\pi \operatorname{sen} st\operatorname{sen} t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos t(s-1)-\cos t(s+1)]dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}\pi(s-1)}{s-1}-\frac{\operatorname{sen}\pi(s+1)}{s+1}\right]=\frac{\operatorname{sen}\pi s}{1-s^2}.$$

La representación de la función 9) se obtiene análogamente a la aplicación de la fórmula (2) del § 4.13.

La función 10) es par. Para obtener la integral necesaria, representémosla por la fórmula (2) del § 4.13 donde la integral interior es igual a

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos\beta t\cos st\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta+s)\,t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos(\beta-s)\,t\,dt=$$

$$=\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{(\beta+s)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(\beta-s)^2+\alpha^2}\right].$$

La última igualdad se ha escrito en virtud de 4).

Razonamientos análogos son válidos para la función 11) con la utilización de la fórmula (3) del § 4.13.

Por último, vamos a citar un ejemplo más cuyo método de cálculo se distingue de los precedentes.

12) Hallar la coseno transformación de la función $\exp(-t^2)$.

Sea

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda^2)\cos\lambda s\,d\lambda=I(s).$$

Es fácil ver que (véase el § 2.13, ejemplo 3)

$$I(0)=\int_0^\infty \exp(-\lambda^2)\,d\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Derivando la función $I(s)$, obtenemos

$$I'(s)=-\int_0^\infty \lambda\exp(-\lambda^2)\operatorname{sen}\lambda s\,d\lambda$$

(la derivación es legítima, puesto que la última integral converge uniformemente). Integrando por partes, la derivada $I'(s)$ se puede representar en la forma ($\lambda\exp(-\lambda^2)\,d\lambda=dv$, $\operatorname{sen}\lambda s=u$)

$$I'(s)=\frac{\operatorname{sen}\lambda s}{2}\exp(-\lambda^2)\Big|_{\lambda=0}^{\infty}-\frac{s}{2}\int_0^\infty \exp(-\lambda^2)\cos\lambda s\,d\lambda=-\frac{s}{2}I(s).$$

Resolviendo la última ecuación diferencial de primer orden, tenemos

$$\frac{dI}{I} = -\frac{s}{2}\,ds, \quad \ln\left|\frac{I}{C}\right| = -\frac{s^2}{4}, \quad I(s) = C\exp\left(-\frac{s^2}{4}\right).$$

De la condición $I(0) = \sqrt{\pi}/2$ encontramos que $C = \sqrt{\pi}/2$. Ahora bien,

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda^2)\cos\lambda s\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{s^2}{4}\right).$$

§ 4.15. Aproximación de una integral de Fourier

Aclaremos el significado físico del concepto de integral de Fourier. Examinemos un movimiento aperiódico para el cual la ordenada y en cierto punto es la función $y = f(x)$, del tiempo x.

La función $f(x)$ se puede escribir del modo siguiente:

$$f(x) = \int_0^\infty [a(s)\cos xs + b(s)\,\text{sen}\,xs]\,ds = \int_0^\infty [c(s)\,e^{-isx} + c(-s)\,e^{isx}]\,ds.$$

Cuando N es suficientemente grande y luego cuando Δs $(\Delta s = \Delta s_j)$ son suficientemente pequeños, con cierta aproximación

$$f(x) \sim \int_0^N [a(s)\cos xs + b(s)\,\text{sen}\,xs]\,ds =$$

$$= \int_0^N [c(s)\,e^{-isx} + c(-s)\,e^{isx}]\,ds \sim$$

$$\sim \sum_j [a(s_j)\cos xs_j + b(s_j)\,\text{sen}\,xs_j]\,\Delta s =$$

$$= \sum_j [c(s_j)\,e^{-ixs_j} + c(-s_j)\,e^{ixs_j}]\,\Delta s. \qquad (1)$$

La primera aproximación se puede realizar con cualquier precisión en todo caso si las integrales de $a(s)$ y $b(s)$ (y, por consiguiente, también de $c(s)$) convergen absolutamente sobre $(0, \infty)$, en particular si las funciones $a(s)$ y $b(s)$ (y, por lo tanto, también $c(s)$) son iguales a cero para $s > s_0$, donde s_0 es cierto número. La segunda aproximación se puede realizar, en todo caso, para los valores de x pertenecientes a un segmento dado arbitrario $[x_1, x_2]$. De esta manera (para el segmento dado $[x_1, x_2]$) se pueden seleccionar los números necesarios s_j de modo que resulten racionales. Pero entonces el movimiento $y = f(x)$ será aproximadamente igual, en el segmento de tiempo $[x_1, x_2]$, a la suma de las oscilaciones armónicas que poseen incluso el período común.

Se llama *espectro de una función periódica* $f(x)$ el conjunto de los coeficientes de Fourier. Por el espectro, en particular, se ve de qué armónicos no triviales (no iguales idénticamente a cero) se compone el movimiento periódico $y = f(x)$.

Se llama *espectro de una función no periódica* $f(x)$ las funciones $a(s)$ y $b(s)$ que ella engendra o la función $c(s)$.

Si las funciones $a(s)$ y $b(s)$ son iguales a cero fuera del intervalo (p, q), entonces la suma que aproxima $f(x)$ por la fórmula (1) se compone de las oscilaciones armónicas con frecuencias $s_j \in (p, q)$.

La función $\tilde{f}(s) = \sqrt{2\pi}c(s)$ se denomina también espectro de f.

§ 4.16. Suma de Fejér [1]

Hemos examinado anteriormente las series de Fourier de las funciones $f(x)$ y hemos determinado los criterios suficientes de convergencia de la serie de Fourier hacia la función $f(x)$.

Los matemáticos Du Bois-Reymond y Fejér construyeron ejemplos de funciones continuas cuyas series de Fourier divergen en un punto o sobre el conjunto de todos los puntos racionales del período $[-\pi, \pi]$.

Ahora bien, si sólo es noto que la función $f(x)$ es continua, esto no será suficiente para decir que su serie de Fourier converge.

Para la convergencia es necesario imponer sobre la función f ciertas condiciones adicionales. Entre nuestros criterios había tales condiciones adicionales de que la función f tuviese la derivada o debiese satisfacer la condición de Dirichlet (debiese ser monótona a trozos o, como suele decirse, tener un número finito de máximos y mínimos).

A propósito, estas condiciones pueden ser sustituidas por otras, más generales que no someteremos a examen.

Designemos por C^* la clase de funciones periódicas y continuas sobre todo el eje real. En esta clase (espacio) se puede introducir la norma:

$$\|f\|_{C^*} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|.$$

Las propiedades de la norma (véase el § 4.8) se comprueban fácilmente.

Así, pues, la *serie de Fourier de la función* $f \in C^*$ no obligatoriamente converge hacia $f(x)$ en todos los puntos $x \in [-\pi, \pi]$.

---

[1] L. Fejér (1880—1959), ilustre matemático húngaro.

Por eso tiene gran importancia el hecho de que la serie de Fourier de una función arbitraria $f \in C^*$ se suma a esta última con ayuda del método de medias aritméticas (véase el § 9.16 de nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral») y, por lo demás, de un modo uniforme sobre todo el eje real. Asignemos la función $f \in C^*$ y formemos para ella la serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Supongamos que

$$S_n = S_n(f;\ x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

es la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de la función f y

$$\sigma_n = \sigma_n(f;\ x) = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1} \tag{1}$$

es la n-ésima suma media aritmética de la serie de Fourier de la función f.

La función $\sigma_n(f;\ x)$ se llama *suma de Fejér de orden n*.

Nuestra primera tarea consistirá en obtener una expresión compacta para σ_n.

Puesto que (véase el § 4.12, (16))

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) \, dt,$$

entonces

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) \, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} D_k(t) \right\} dt.$$

Aquí

$$D_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{k}\cos jt=\frac{\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$$

es el núcleo de Dirichlet.

Para simplificar la expresión entre llaves bajo el signo integral calculemos previamente la suma:

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)x=\psi(x). \tag{2}$$

Multipliquemos ambos miembros de la igualdad (2) nor 2 $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ Entonces obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n}[\cos kx-\cos(k+1)x]=2\psi(x)\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

o bien

$$[1-\cos x]+[\cos x-\cos 2x]+\ldots+[\cos nx-\cos(n+1)x]=$$
$$=2\psi(x)\operatorname{sen}\frac{x}{2},$$

$$1-\cos(n+1)x=2\psi(x)\operatorname{sen}\frac{x}{2}.$$

De la última igualdad encontramos que

$$\psi(x)=\frac{1-\cos(n+1)x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=\frac{\operatorname{sen}^2\frac{n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}. \tag{3}$$

En virtud de (3) obtenemos

$$\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}D_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\frac{\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}=\frac{\sum\limits_{0}^{n}\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}=$$
$$=\frac{\operatorname{sen}^2\frac{n+1}{2}t}{2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}.$$

Ahora bien,

$$\sigma_n(f;\,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,F_n(t)\,dt, \tag{4}$$

donde

$$F_n(t)=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\right)^2. \tag{5}$$

La función $F_n(t)$ se llama *núcleo de Fejér de orden n*. Es fácil ver que

$$F_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}\cos kt=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos kt. \tag{6}$$

Por eso la suma $\sigma_n(x)$ puede escribirse, además , así:

$$\sigma_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen}kx)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen}nx). \tag{7}$$

Observación 1. De la fórmula (7) se ve que la suma de Fejér $\sigma_n(f;\,x)$ se distingue de la suma de Fourier $S_n(f;\,x)$ de la función $f(x)$ por el que cada término $(a_k\cos kx+b_k\operatorname{sen}kx)$ de la suma $S_n(f;\,x)$ está multiplicado por el número

$$\lambda_k^{(n)}=1-\frac{k}{n+1}\quad(k=0,\,1,\,\ldots,\,n).$$

Notemos las propiedades siguientes del núcleo de Fejér $F_n(t)$:

1) $F_n(t)$ es un polinomio trigonométrico par no negativo de orden (véase (5) y (6);

$$2)\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}F_n(t)\,dt=1, \tag{8}$$

(véase (6), tener en cuenta la ortogonalidad de la función $\cos kx$ $(k=1,\,\ldots,\,n)$ a la unidad;

3) para todo número $\delta > 0$

$$\int_{\delta}^{\pi} F_n(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)^2} \leqslant \frac{1}{2(n+1)\left(\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\right)^2} \int_{\delta}^{\pi} dt =$$

$$= \frac{\pi-\delta}{2(n+1)\left(\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\right)^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

TEOREMA 1 (DE FEJÉR). *Para toda función $f(x)$ continua sobre un eje real de período 2π (o sea, $f \in C^*$) la suma de Fejér de orden n tiende uniformemente hacia ella cuando $n \to \infty$, es decir,*

$$\| f - \sigma_n(f) \|_{C^*} = \max_x | f(x) - \sigma_n(f;\, x) | \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la propiedad 2) del núcleo de Fejér tenemos

$$\sigma_n(f;\, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t)\,dt - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t)\,dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] F_n(t)\,dt. \tag{10}$$

En virtud de (10) y de la propiedad 1) del núcleo $F_n(t)$ tenemos

$$|\sigma_n(f;\, x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) f(x+t) - f(x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leqslant \delta} F_n(t) |f(x+t) - f(x)|\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta < |t| \leqslant \pi} F_n(t) |f(x+t) - f(x)|\,dt, \tag{11}$$

donde $\delta > 0$ es un número arbitrario $(0 < \delta < \pi)$.

Puesto que según la condición del teorema la función $f(x)$ es continua sobre $[-\pi,\, \pi]$, ella está obligatoriamente acotada

$$|f(x)| \leqslant M \quad (x \in [-\pi,\, \pi]).$$

Entonces

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant 2M \tag{12}$$

para todos los valores de $x \in [-\pi,\, \pi]$ y $\delta < |t| \leqslant \pi$.

Luego, la función $f(x)$ es uniformemente continua sobre $[-\pi, \pi]$, por eso para todo valor de $\varepsilon > 0$ se puede indicar un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{13}$$

para $|t| \leqslant \delta$ y todos los valores de x, $x + t \in [-\pi, \pi]$.

Ahora, al tomar en (11) el valor de δ tal que se indica en (13), en virtud de la propiedad 2) del núcleo, teniendo en cuenta (12) y (13), obtenemos

$$|\sigma_n(f;\, x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_{|t|\leqslant\delta} F_n(t)\, dt + \frac{2M}{\pi} \int\limits_{\delta<|t|\leqslant\pi} F_n(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\, dt + \frac{2M}{\pi} \int\limits_{\delta<|t|\leqslant\pi} F_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4M}{\pi} \int\limits_{\delta}^{\pi} F_n(t)\, dt.$$

Ahora, cuando n_0 es lo suficientemente grande, en virtud de la propiedad 3) del núcleo $F_n(t)$ el segundo sumando del segundo miembro en la última desigualdad se puede hacer menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Así, pues, finalmente obtenemos

$$|\sigma_n(f;\, x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n > n_0,\ x \in [-\pi, \pi]).$$

Por lo tanto,

$$\|\sigma_n(f;\, x) - f(x)\|_{C^*} = \max_x |\sigma_n(f;\, x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad (n > n_0), \tag{14}$$

o sea, la sucesión $\{\sigma_n(f;\, x)\}$ converge uniformemente sobre $[-\pi, \pi]$ hacia la función $f(x)$. El teorema queda demostrado.

Ya hemos señalado anteriormente que las medias aritméticas de una serie numérica pueden tender hacia el límite, mientras que la misma serie puede divergir (véase el § 9.16, ejemplo 2, en nuestro libro «Matemáticas Superiores. Cálculo diferencial e integral»). Este fenómeno tiene lugar precisamente para las series de Fourier de funciones continuas. Existe una función continua cuya serie de Fourier diverge sobre el conjunto de todos los números racionales (conjunto numerable); sin embargo, como hemos mostrado, esto no impide que las sumas medias aritméticas de Fourier para toda función continua f converjan hacia $f(x)$, e incluso uniformemente.

COROLARIO (TEOREMA DE WEIERSTRASS). *Para toda función $f(x)$ continua y periódica sobre un eje real y para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico $T_n(x)$ tal que*

$$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in [-\pi, \pi]).$$

Para la demostración es suficiente considerar como $T_n(x)$ la suma de Fejér $\sigma_n(f; x)$.

§ 4.17. Completitud de los sistemas de funciones en C y L_2'

El sistema de las funciones

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \ \ldots \tag{1}$$

continuas sobre el segmento $[a, b]$ se llama *completo* en el espacio $C[a, b]$ de funciones continuas, si para toda función $f \in C[a, b]$ y para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe una combinación lineal finita de estas funciones

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \tag{2}$$

tal que para todos los valores de $x \in [a, b]$ se cumpla la inecuación

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Se dice, además, que el sistema (1) es *completo* en el espacio $L_2'(a, b)$, si para toda función $f \in L_2'(a, b)$ y para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe una combinación lineal (2) tal que

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right\|_{L_2'} = \left(\int_a^b \left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\right|^2 dx \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Es fácil ver que si el sistema (1) es completo en $C[a, b]$, será completo asimismo en $L_2'(a, b)$, porque

$$\left(\int_a^b \left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\right|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b \varepsilon^2 \, dx \right)^{1/2} = \varepsilon \sqrt{b-a}.$$

En el § 4.9 hemos examinado un sistema arbitrario, ortonormalizado sobre el segmento $[a, b]$, de las funciones

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots$$

y lo hemos llamado completo en $L_2'(a, b)$ si la serie de Fourier de toda función $f \in L_2'(a, b)$ en este sistema converge en media cuadrática hacia f.

Ahora bien, en el caso de un sistema ortonormalizado

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{3}$$

tenemos dos definiciones de la completitud en $L_2'(a, b)$. Son equivalentes. En efecto, supongamos que el sistema ortonormalizado (3) es completo en $L_2'(a, b)$ en el sentido del § 4.9 y supongamos que $f \in L_2'(a, b)$.

Entonces

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_{L_2'(a, b)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

y esto es lo que muestra que para todo valor de $\varepsilon > 0$ se puede indicar una combinación lineal $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$, donde $c_k = (f, \varphi_k)$ para la cual

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\|_{L_2'(a, b)} < \varepsilon.$$

Por consiguiente, el sistema (3) es completo en $L_2'(a, b)$ también en el sentido de la segunda definición.

Al revés, si el sistema (3) es completo en el sentido de la segunda definición y viene dada la función $f \in L_2'(a, b)$, entonces para todo valor de $\varepsilon > 0$ existe una combinación lineal

$$\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k\varphi_k$$

tal que

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k\varphi_k \right\|_{L_2'(a, b)} < \varepsilon.$$

Pero según el teorema 1 del § 4.9

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_{L_2'(a, b)} \leqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k\varphi_k \right\|_{L_2'(a, b)} < \varepsilon.$$

Tenemos luego para $n \geqslant n_0$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2_{L_2'(a, b)} =$$

$$= (f, f) - \sum_{k=1}^{n_0} (f, \varphi_k)^2 \geqslant (f, f) - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2 =$$

$$= \left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2_{L_2'(a, b)}.$$

Por eso

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}(f,\ \varphi_k)\,\varphi_k\|_{L_2'(a,\,b)}<\varepsilon\quad(\forall\, n\geqslant n_0)$$

y, por consiguiente, la serie de Fourier de la función f converge en media cuadrática hacia la misma, o sea, el sistema (3) es completo en el sentido de la definición dada en el § 4.9.

En el § 4.9 hemos enunciado, sin demostrar, la afirmación importante de que la serie de Fourier de la función $f \in L_2'$ en el sistema trigonométrico converge en media cuadrática hacia f. Una vez demostrado el teorema de Weierstrass (véase el § 4.16) esta afirmación puede ser fundamentada en su totalidad.

En efecto, ya hemos hecho uso del teorema 1 del § 4.9, que afirma la validez de la igualdad

$$\min_{\alpha_k}\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\|=\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\|,$$

donde c_k son los coeficientes de Fourier de la función $f \in L_2'$ en el sistema ortonormalizado $\{\varphi_k\}$. Notemos que esta igualdad tiene lugar asimismo para un sistema ortogonal arbitrario, no obligatoriamente normal. En este caso los coeficientes de Fourier

$$c_k=\frac{(f,\ \varphi_k)}{\|\varphi_k\|}\quad(k=1,\ \ldots,\ n).$$

El sistema trigonométrico

$$1,\ \cos x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos 2x,\ \operatorname{sen} 2x,\ \ldots$$

es ortogonal sobre el segmento $[-\pi,\ \pi]$.

El teorema de Weierstrass expresa el hecho de que este sistema es completo en C^*, pero entonces, como sabemos, es completo asimismo en el $L_2'^*$.

Y esto es lo que significa que la serie de Fourier de toda función $f \in L_2'^*$ en el sistema trigonométrico converge en media cuadrática hacia la misma.

§ 4.18. Nociones de la teoría de series múltiples de Fourier

Vamos a examinar las funciones $f(x)$, $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ de muchas variables, definidas sobre cierto rectángulo n-dimensional

$$\Delta=\{a_j\leqslant x_j\leqslant b_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n\},$$

donde a_j y b_j son números reales.

De la teoría de integrales múltiples (véase el § 2.4, teorema 3) se deduce que si la función $f(x)$ integrable sobre Δ se puede representar en la forma del producto de las funciones integrables de una variable

$$f(x)=\prod_{j=1}^{n} f_j(x_j),$$

entonces

$$\int_{\Delta} f(x)\,dx=\prod_{j=1}^{n}\int_{\Delta_j} f_j(x_j)\,dx_j, \tag{1}$$

donde $\Delta_j=[a_j, b_j]$.

El rectángulo Δ se puede considerar como producto directo de los segmentos de Δ_j (véase el § 2.15, llamada 2))

$$\Delta=\Delta_1\times\Delta_2\times\ldots\times\Delta_n.$$

Notemos que en el primer miembro de la igualdad (1) se encuentra la integral múltiple de n y en el segundo miembro, las integrales unidimensionales de Riemann de las funciones $f_j(x_j)$ dadas sobre Δ_j.

Las funciones

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_jx_j}\quad (k_j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots; j=1, \ldots, n)$$

tienen, como sabemos, el período 2π según la variable x_j ($j=1, \ldots, n$). Estas funciones (de una variable x_j) son continuas sobre todo el eje x_j y en el período $[-\pi, \pi]$ y, por lo tanto, son integrables según Riemann sobre el segmento $[-\pi, \pi]$. Además, sabemos que las funciones $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_jx_j}$ forman el sistema ortogonal $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_jx_j}\right\}$ sobre $[-\pi, \pi]$, o sea,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_jx_j}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{il_jx_j}\,dx_j=\begin{cases}0, & k_j\neq l_j,\\ 1, & k_j=l_j.\end{cases} \tag{2}$$

Introduzcamos las designaciones

$$k=(k_1, \ldots, k_n),\quad kx=\sum_{j=1}^{n}k_jx_j,$$

$$\Delta_*=\Delta_*^{(n)}=\{-\pi\leqslant x_j\leqslant\pi,\ j=1, \ldots, n\}.$$

Entonces en virtud de (1) y (2) las funciones

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{ik_1x_1}e^{ik_2x_2}\ldots e^{ik_nx_n}\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{ikx}\quad (k_j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots; j=1, \ldots, n) \tag{3}$$

de n variables serán ortogonales sobre el cubo Δ_*:

$$\int_{\Delta_*} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ilx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - l_j)x_j}\, dx_j = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

Por igualdad de los vectores de números enteros k y l entendemos, como de ordinario, la igualdad de sus coordenadas respectivas y $k \neq l$ significa que los vectores k y l se distinguen al menos en una sola coordenada.

Vamos a examinar las funciones $f(x)$ de período 2π para cada una de las variables x_j, $j = 1, \ldots, n$.

Designemos por símbolo C^* la clase (espacio) de funciones periódicas continuas con la norma (véase el § 4.8)

$$\| f \|_{C^*} = \max_{x \in \Delta_*} | f(x) |.$$

El conjunto de todas las funciones periódicas continuas a trozos para las cuales se ha introducido el producto escalar con ayuda de la fórmula

$$(f, g) = \int_{\Delta_*} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \tag{4}$$

lo designaremos por $L'_{2^*} \equiv L'_2(\Delta_*)$ y lo llamaremos espacio L'_{2^*}. La norma se introduce en esta clase (espacio) así:

$$\| f \| = \| f \|_{L'_{2^*}} = \left(\int_{\Delta_*} | f(x)^2\, dx \right)^{1/2}.$$

El hecho de que $f(x)$ es una función continua a trozos significa lo siguiente: el cubo Δ_* (período) se puede cortar en un número finito de partes con ayuda de superficies suaves a trozos (con una dimensión menor que n) de modo que sobre cada parte la función $f(x)$ sea continua, mientras que a lo largo de los cortes pueda tener discontinuidades.

Todas las propiedades de la norma (véase el § 4.8) para el espacio L'_{2^*} se han cumplido. Por función nula ($f = 0$) entendemos una función igual a cero por doquier sobre Δ_*, a excepción de un número finito de superficies suaves a trozos.

Por ejemplo, si se trata de funciones de dos variables, admitimos que la función nula $f(x_1, x_2)$ puede no ser igual a cero en un número finito de puntos de Δ_* o sobre un número finito de curvas suaves a trozos.

Notemos que la medida n-dimensional de Jordan de las superficies indicadas es igual a cero, por eso la integral múltiple de n de la función nula tomada sobre Δ_* es igual a cero.

Supongamos ahora que la función $f(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ es de período 2π para cada una de las variables y es noto que puede ser desarrollada en serie múltiple:

$$f(t) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \equiv \sum c_k e^{ikt}, \tag{5}$$

donde la última suma concierne a todos los vectores posibles $k = (k_1, \ldots, k_n)$ con coordenadas enteras.

Se pregunta ¿cómo determinar a partir de la función $f(t)$ los coeficientes c_k?

Aquí se puede proceder igual que hemos hecho en el § 4.3 en el caso unidimensional, o sea, para la función f de una variable real.

Si la serie (5) converge uniformemente sobre Δ_*, entonces (al igual que para la función de una variable, véase el § 4.6)

$$c_k(f) \equiv c_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} f(t)\, e^{-ikt}\, dt. \tag{6}$$

Los números c_k calculados por la fórmula (6) se llaman *coeficientes de Fourier de la función $f(t)$* y la serie (5), en la cual de c_k están sustituidos por los coeficientes de Fourier se denomina *serie de Fourier de la función $f(t)$ en la forma compleja* (véase el § 4.11).

Pues, si la función $f(t) = f(t_1, \ldots, t_n)$ se puede representar en forma de suma de una serie múltiple (5) que converja uniformemente sobre Δ_*, entonces los números c_k serán necesariamente coeficientes de Fourier de la función $f(t)$.

Si en la serie (5) los coeficientes c_k están calculados por las fórmulas (6), entonces la llamaremos serie de Fourier de la función $f(t)$ sin importar converge esta serie hacia $f(t)$ o no. En este caso escribiremos

$$f(t) \sim \sum c_k e^{ikt}. \tag{7}$$

Si la función $f \in C^*$, la serie (7) no obligatoriamente convergirá hacia $f(t)$ en todos los puntos $t \in \Delta_*$ (véase el § 4.16).

Asignemos el vector $N = (N_1, \ldots, N_n)$, donde N_j son los números naturales y determinemos la respectiva suma particular de Fourier de la función f del modo siguiente:

$$S_N(f; x) = \sum_{\substack{|k_j| \leqslant N_j \\ j=1, \ldots, n}} c_k e^{ikx} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} \sum_{\substack{|k_j| \leqslant N_j \\ j=1, \ldots, n}} e^{-ik(t-x)} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \prod_{j=1}^{n} D_{N_j}(t_j - x_j)\, f(t)\, dt, \tag{8}$$

donde

$$D_{N_j}(u)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N_j}\cos ku=\frac{\operatorname{sen}\left(N_j+\frac{1}{2}\right)u}{2\operatorname{sen}\frac{u}{2}}$$

es el núcleo de Dirichlet de orden N_j. Aquí hemos hecho uso de la fórmula de Euler: $e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x$.

En particular, si $N_1=N_2=\ldots=N_n=N$, entonces

$$S_N(f;x)=\frac{1}{\pi^n}\int_{\Delta_*}\prod_{j=1}^{n}D_N(t_j-x_j)f(t)\,dt. \tag{8'}$$

El análogo multidimensional de la suma de Fejér tiene la forma

$$\sigma_N(f;x)=\frac{\sum_{k_1=0}^{N_1}\cdots\sum_{k_n=0}^{N_n}S_k(f;x)}{(N_1+1)\ldots(N_n+1)}=\frac{\sum_{k=0}^{N}S_k(f;x)}{(N_1+1)\ldots(N_n+1)}=$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\int_{\Delta_*}\Phi_N(t-x)f(t)\,dt=\frac{1}{\pi^n}\int_{\Delta_*}\Phi_N(u)f(u+x)\,du, \tag{9}$$

donde

$$\Phi_N(u)=\prod_{j=1}^{n}F_{N_j}(u_j),\quad F_{N_j}(t)=\frac{1}{2(N_j+1)}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{N_j+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\right)^2 \tag{10}$$

es el núcleo de Fejér de orden N_j. Si $N_1=\ldots=N_n=N$, entonces en la fórmula (9) el núcleo $\Phi_N(u)$ un poco se simplificará.

Puesto que $\Phi_N(u)\geqslant 0$, entonces

$$\frac{1}{\pi^n}\int_{\Delta_*}\Phi_N(u)\,du=1.$$

Luego si $\Delta_\varepsilon=\{|u_j|\leqslant\varepsilon,\ j=1,\ldots,n\}$, entonces

$$\frac{1}{\pi^n}\int_{\Delta_\varepsilon}\Phi_N(u)\,du\leqslant\frac{1}{\pi^n}\int_{\Delta_*}\Phi_N(u)\,du=1.$$

Además,

$$\frac{1}{\pi^n}\int_{\Delta_*\setminus\Delta_\varepsilon}\Phi_N(u)\,du\to 0 \tag{11}$$

cuando $N_1\to\infty,\ \ldots,\ N_n\to\infty$.

Demostremos la última propiedad para el caso bidimensional:

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\Delta_*\setminus\Delta_\varepsilon}\Phi_N(u)\,du=$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\Bigg(\int\limits_{|u_1|\leqslant\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u_2|\leqslant\pi}+\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u_1|\leqslant\pi}\int\limits_{|u_2|\leqslant\pi}\Bigg)\Phi_N(u)\,du\leqslant$$
$$\leqslant c\Bigg(\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u_2|\leqslant\pi}F_{N_2}(u_2)\,du_2+\int\limits_{\varepsilon\leqslant|u_1|\leqslant\pi}F_{N_1}(u_1)\,du_1\Bigg)\to 0$$

cuando $N_1\to\infty$ y $N_2\to\infty$ (véase el § 4.16, propiedad 3) del núcleo de Fejér).

TEOREMA 1. *Si la función $f(t)\in C^*$, entonces*

$$\|f(x)-\sigma_N(f;x)\|_{C^*}\to 0\quad (N_j\to\infty,\ j=1,\ldots,n).$$

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la propiedad del núcleo $\Phi_N(u)$ tenemos

$$\sigma_N(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*}[f(x+t)-f(x)]\,\Phi_N(t)\,dt.$$

De aquí

$$|\sigma_N-f|\leqslant\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*}\Phi_N(t)\,|f(x+t)-f(x)|\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,|f(x+t)-f(x)|\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\Delta_*\setminus\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,|f(x+t)-f(x)\,dt,$$

donde $\delta>0$ es un número arbitrario $(0<\delta<\pi)$.

Puesto que según la condición del teorema la función $f(x)$ es continua sobre Δ_*, ésta quedará acotada y uniformemente continua sobre Δ_*:

$$|f(x)|\leqslant M,\quad \forall x\in\Delta_*;\tag{12}$$

para todo valor de $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\tag{13}$$

para $|t_j|<\delta$ $(j=1,\ldots,n)$ y para todos valores de x, $(x+t)\in\Delta_*$.

Ahora, tomando δ de (13), en virtud de las propiedades del núcleo $\Phi_N(t)$ obtenemos

$$|\sigma_N - f| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\pi^n}\int_{\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,dt + \frac{2M}{\pi^n}\int_{\Delta_*\setminus\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi^n}\int_{\Delta_*}\Phi_N(t)\,dt + \frac{2M}{\pi^n}\int_{\Delta_*\setminus\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi^n}\int_{\Delta_*\setminus\Delta_\delta}\Phi_N(t)\,dt.$$

Ahora para el vector N^0 con coordenadas lo suficientemente grandes, en virtud de la propiedad (11), en la última desigualdad el segundo sumando del segundo miembro se puede hacer, para $N_j > N_j^0$ $(j = 1, \ldots, n)$, menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Entonces finalmente obtenemos

$$|\sigma_N(f; x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

cuando $N_j > N_j^0$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\forall x \in \Delta_*$.

De aquí

$$\| \sigma_N(f; x) - f(x) \|_{C^*} \leqslant \varepsilon$$

y el teorema queda demostrado.

Observación 1. El teorema demostrado se puede expresar con las palabras siguientes: *si $f \in C^*$, entonces la sucesión de sus sumas de Fejér $\sigma_N(f; x) = \sigma_{N_1, \ldots, N_n}(f; x)$ converge uniformemente hacia la función $f(x)$ a condición de que $N_1 \to \infty, \ldots, N_n \to \infty$.*

Observación 2. El sistema de las funciones (3) es completo en C^* y, por consiguiente, asimismo en L'_{2^*} (véase el § 4.17).

Observación 3. Ya hemos señalado que la serie múltiple de Fourier de una función continua no obligatoriamente converge hacia ella en todos los puntos de Δ_*. Sin embargo, la suma múltiple de Fejér $\sigma_N(f; x)$ de una función periódica continua f converge, como hemos demostrado más arriba, hacia $f(x)$ en todos los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta_*$.

Es válido el siguiente

TEOREMA 2. *La serie de Fourier (7) de la función $f \in L'_{2^*}$ converge en media cuadrática hacia $f(x)$*

$$\| f(x) - S_N(f; x) \|_{L'_2{}^*} \to 0 \quad (N_1 \to \infty, \ldots, N_n \to \infty)$$

y tiene lugar la igualdad de Parseval

$$\| f \|^2_{L'_{2^*}} = \sum |c_k|^2.$$

LA DEMOSTRACIÓN de esto teorema se puede llevar a cabo al igual que en el caso unidimensional (véanse los §§ 4.9 y 4.17), valiéndose de la observación 2 acerca de la completitud del sistema (3).

Examinemos ahora la serie de Fourier (7) en el caso bidimensional. Si hacemos uso de las fórmulas de Euler $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$, entonces (7) se transforma formalmente en serie

$$\begin{aligned} f(x, y) \sim \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k0} \cos kx + d_{k0} \operatorname{sen} kx) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} (a_{0l} \cos ly + c_{0l} \operatorname{sen} ly) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} ly + \\ + c_{kl} \cos kx \operatorname{sen} ly + d_{kl} \operatorname{sen} kx \cos ly), \end{aligned} \tag{14}$$

donde hemos puesto

$$\begin{aligned} a_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos ku \cos lv \, du \, dv, \\ b_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \operatorname{sen} ku \operatorname{sen} lv \, du \, dv, \\ c_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos ku \operatorname{sen} lv \, du \, dv, \\ d_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \operatorname{sen} ku \cos lv \, du \, dv. \end{aligned} \tag{15}$$

Observación 4. Si $f(u, v)$ es una función real, entonces a_{kl}, b_{kl}, c_{kl} y d_{kl} son los números reales.

Notemos que podríamos deducir la serie (14) directamente, partiendo del sistema de funciones, ortogonal sobre $\Delta_* = \{-\pi \leqslant x, y \leqslant \pi\}$,

$$\cos kx \cos ly, \ \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} ly, \ \cos kx \operatorname{sen} ly, \ \operatorname{sen} kx \cos ly \quad (k, \ l = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots). \tag{16}$$

La serie (14), donde los números a_{kl}, b_{kl}, c_{kl} y d_{kl} se calculan por las fórmulas (15) se llama *serie de Fourier de la función f según el sistema trigonométrico de funciones* (16). Los números de (15) se denominan *coeficientes de Fourier de la función f según el sistema* (16).

Ahora bien, la serie múltiple de Fourier se puede escribir tanto en la forma compleja (7) como en la forma de una serie trigonométrica múltiple (14).

Si volvemos a examinar el caso n-dimensional, suponiendo que

$$f \in C^*, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \in C^*,$$

el coeficiente de Fourier c_k, donde $k_n \neq 0$, se puede transformar del modo siguiente:

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} e^{-ikt} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*^{(n-1)}} e^{-i\sum_{j=1}^{n-1} k_j t_j} dt_1 \ldots dt_{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_n t_n} f(t)\, dt_n;$$

integrando por partes en la última integral ($u = f(t)$, $e^{-ik_n t_n} dt_n = dv$) obtenemos

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*^{(n-1)}} e^{-i\sum_{j=1}^{n-1} k_j t_j} dt_1 \ldots dt_{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{ik_n} e^{-ik_n t_n} \frac{\partial f(t)}{\partial t_n} dt_n =$$

$$= \frac{1}{ik_n} c_k\left(\frac{\partial f}{\partial t_n}\right),$$

$$\Delta_*^{(n-1)} = \{-\pi \leqslant x_j \leqslant \pi,\ j = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

En general, si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es el vector entero no negativo dado y $f^{(s)} \in C^*$, para un vector entero no negativo cualquiera $s \leqslant \lambda$ ($s_j \leqslant \lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$), entonces después de la aplicación respectiva del proceso de integración por partes (teniendo en cuenta la periodicidad de la función f y de todas sus derivadas) obtenemos:

$$c_k(f) = \frac{1}{i^{|\lambda|} k^\lambda} c_k(f^{(\lambda)}), \tag{17}$$

donde

$$|\lambda| = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j, \quad k^\lambda = k_1^{\lambda_1} k_2^{\lambda_2} \ldots k_n^{\lambda_n}$$

Además suponemos que si $k_j = 0$, entonces $\lambda_j = 0$ y $k_j^{\lambda_j} = 0^0 = 1$. Los números $c_k(f^{(\lambda)})$ son los coeficientes de Fourier de la derivada

$$f^{(\lambda)}(t) = \frac{\partial^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} f}{\partial t_1^{\lambda_1} \ldots \partial t_n^{\lambda_n}} = \frac{\partial^{|\lambda|} f}{\partial t_1^{\lambda_1} \ldots \partial t_n^{\lambda_n}}.$$

TEOREMA 3. *Supongamos que $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es un vector con componentes enteros positivos y la función $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in C^*$, junto con sus derivadas parciales $f^{(k)}$ del orden $k \leqslant \lambda$ $(k_j, \lambda_j, j = 1, \ldots, n)$ y se cumplen las inecuaciones*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} |f^{(l)}(x)|^2 \, dx \leqslant M^2 \tag{18}$$

para todo vector $l = (l_1, \ldots, l_n)$ que tenga los componentes l_j iguales a cero o a λ_j.

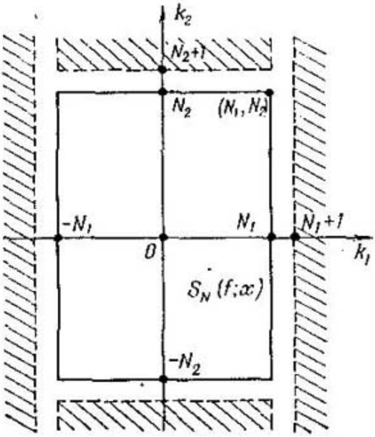

Fig. 118a

Entonces la suma de Fourier $S_N(f; x)$ $(N = (N_1, \ldots, N_n))$ de la función f se desvía de $f(x)$ con la estimación

$$|f(x) - S_N(f; x)| \leqslant cM \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(N_j+1)^{\lambda_j - \frac{1}{2}}}, \tag{19}$$

donde c no depende de M ni de N_j y depende solamente de λ.

DEMOSTRACIÓN. Para mayor sencillez, vamos a estimar el residuo de la serie de Fourier de la función en el caso bidimensional

$$\rho_N(f; x) = \Big(\sum_{|k_1| > N_1} \sum_{k_2 = -\infty}^{\infty} + \sum_{|k_1| \leqslant N_1} \sum_{|k_2| > N_2} \Big) c_k e^{ikx}.$$

Si examinamos el plano de los puntos (k_1, k_2) (fig. 118a), entonces del término residual $\rho_N(f; x)$ forman parte los términos de la serie de Fourier que corresponden a los puntos (k_1, k_2) con coordenadas de números enteros, pertenecientes a la parte rayada.

Tomando en cuenta que $|e^{ikx}| = 1$, tenemos

$$
\begin{aligned}
|\rho_N(f; x)| \leqslant \Big(\sum_{|k_1|>N_1} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} + \sum_{|k_1|\leqslant N_1} \sum_{|k_2|>N_2} \Big) |c_k| = \\
= \sum_{|k_1|>N_1} |c_{k_1,0}| + \sum_{|k_1|>N_1} \sum_{|k_2|\geqslant 1} |c_k| + \\
+ \sum_{|k_2|>N_2} |c_{0,k_2}| + \sum_{1\leqslant |k_1|\leqslant N_1} \sum_{|k_2|>N_2} |c_k|.
\end{aligned}
$$

En virtud de la fórmula (17) obtenemos

$$
\begin{aligned}
|\rho_N(f; x)| \leqslant \sum_{|k_1|>N_1} \frac{1}{|k_1|^{\lambda_1}} \left| c_{k_1,0}\left(\frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}}\right)\right| + \\
+ \sum_{|k_1|>N_1} \sum_{|k_2|\geqslant 1} \frac{1}{|k_1|^{\lambda_1} |k_2|^{\lambda_2}} \left| c_k\left(\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right| + \\
+ \sum_{|k_2|>N_2} \frac{1}{|k_2|^{\lambda_2}} \left| c_{0,k_2}\left(\frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right| + \\
+ \sum_{1\leqslant |k_1|\leqslant N_1} \sum_{|k_2|>N_2} \frac{1}{|k_1|^{\lambda_1} |k_2|^{\lambda_2}} \left| c_k\left(\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right|.
\end{aligned}
$$

Aplicando la desigualdad de Buniakovski para las sumas (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos de álgebra lineal y de geometría analítica», § 6 (7)), obtenemos

$$
\begin{aligned}
|\rho_N(f; x)| \leqslant \Big(\sum_{|k_1|>N_1} \frac{1}{k_1^{2\lambda_1}} \Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{|k_1|>N_1} \left| c_{k_1,0}\left(\frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}}\right)\right|^2 \Big)^{1/2} + \\
+ \Big(\sum_{|k_1|>N_1} \sum_{|k_2|\geqslant 1} \frac{1}{k_1^{2\lambda_1} k_2^{2\lambda_2}} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{|k_1|>N_1} \sum_{|k_2|\geqslant 1} \left| c_k\left(\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right|^2 \Big)^{1/2} + \\
+ \Big(\sum_{|k_2|>N_2} \frac{1}{k_2^{2\lambda_2}} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{|k_2|>N_2} \left| c_{0,k_2}\left(\frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right|^2 \Big)^{1/2} + \\
+ \Big(\sum_{1\leqslant |k_1|\leqslant N_1} \sum_{|k_2|>N_2} \frac{1}{k_1^{2\lambda_1} k_2^{2\lambda_2}} \Big)^{1/2} \times \\
\times \Big(\sum_{1\leqslant |k_1|\leqslant N_1} \sum_{|k_2|>N_2} \left| c_k\left(\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}\right)\right|^2 \Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Ahora, en virtud de la igualdad de Parseval y de (18) tenemos, $(\lambda_j \geqslant 1,\ j = 1,\ \ldots,\ n)$,

$$\begin{aligned} |\rho_N(f;\,x)| \leqslant {} & \frac{c}{(N_1+1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}}}\left\|\frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}}\right\|_{L'_{2*}} + \frac{c}{(N_1+1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}}}\left\|\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1}\,\partial x_2^{\lambda_2}}\right\|_{L'_{2*}} + \\ & + \frac{c}{(N_2+1)^{\lambda_2-\frac{1}{2}}}\left\|\frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}}\right\|_{L'_{2*}} + \frac{c}{(N_2+1)^{\lambda_2-\frac{1}{2}}}\left\|\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1}\,\partial x_2^{\lambda_2}}\right\|_{L'_{2*}} \leqslant \\ & \leqslant cM\left(\frac{1}{(N_1+1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(N_2+1)^{\lambda_2-\frac{1}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$|\rho_N(f;\,x)| \leqslant cM\left(\frac{1}{(N_1+1)^{\lambda_1-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(N_2+1)^{\lambda_2-\frac{1}{2}}}\right), \tag{20}$$

donde la constante c no depende de M ni de N_1, ni de N_2.

En el caso n-dimensional la estimación del residuo se puede llevar a cabo del modo semejante.

La estimación (20) dice que la serie de Fourier de la función $f(x)$ converge *uniformemente sobre* Δ_* *cuando* $\lambda_j \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$.

En virtud del teorema 2 la serie de Fourier de la función f converge en media cuadrática hacia $f(x)$. En tal caso esta serie converge de un modo uniforme justamente hacia la función $f(x)$ (véase a continuación el lema 1) y por eso

$$|\rho_N(f;\,x)| = |f(x) - S_N(f;\,x)| \leqslant cM \sum_{j=1}^{n} (N_j+1)^{-\lambda_j+\frac{1}{2}}$$

y el teorema queda demostrado.

COROLARIO 1. *Si la función $f \in C^*$ y sus derivadas parciales que tienen la forma*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\,\partial x_n},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_1 \ldots \partial x_{n-1}},\ \ldots$$
$$\ldots,\ \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_2 \ldots \partial x_n},\ \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \in C,$$

entonces la serie múltiple de Fourier de la función $f(x)$ converge uniformemente sobre Δ_* hacia la función $f(x)$.

LEMA 1. *Si la serie*

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots$$

de las funciones continuas sobre la región $\Omega \subset R_n$ converge en media cuadrática hacia la función continua $S(x)$ y al mismo tiempo esta serie *converge uniformemente sobre Ω hacia la función $\varphi(x)$, entonces para todos los puntos $x \in \Omega$*

$$S(x) = \varphi(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $S_N(x)$ es la suma de los primeros N términos de la serie, $V \subset \Omega$ es una esfera arbitraria y

$$\varkappa_N = \max_{x \in V} |\varphi(x) - S_N(x)|.$$

Según la condición del lema $\chi_N \to 0$ $(N \to \infty)$. Por eso en virtud de la desigualdad triangular (véase el § 4.8)

$$\left(\int_V |S(x) - \varphi(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_V |S(x) - S_N(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} + \left(\int_V |S_N(x) - \varphi(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_V |S(x) - S_N(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} + \varkappa_N \cdot \sqrt{mV} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Por consiguiente, el primer miembro de la última inecuación es igual a cero (éste no depende de N):

$$\int_V |S(x) - \varphi(x)^2| \, dx = 0.$$

Luego, puesto que según la condición la función $S(x)$ es continua sobre Ω y $\varphi(x)$ será continua también sobre Ω como suma de la serie uniformemente convergente de las funciones continuas, para todos los valores de $x \in V$

$$S(x) - \varphi(x) \equiv 0.$$

Si supusiéramos que existe al menos un punto x^0 en el cual

$$[S(x^0) - \varphi(x^0)]^2 > 0,$$

entonces obtendríamos que

$$\int_V [S(x) - \varphi(x)]^2 \, dx > 0$$

(véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 6.2, teorema 8).

Luego, puesto que V es una esera arbitraria que forma parte de la región Ω (conjunto conexo abierto), entonces

$$S(x) \equiv \varphi(x), \quad \forall x \in \Omega$$

y el lema queda demostrado.

TEOREMA 4. *Para la función $f \in C^*$, cuando un valor arbitrario de $\eta > 0$, tiene lugar la igualdad*

$$S_N(f;\ x) - f(x) = \frac{1}{\pi^n} \int_{K_\eta} \prod_{j=1}^{n} D_{N_j}(u_j)\,[f(x+u) - f(x)]\,du + o(1)$$

$$(N \to \infty) \qquad (21)$$

uniformemente sobre toda región $\Omega \subset \Delta_*$.

Aquí el conjunto K_η (cruz) es la unión de los conjuntos

$$\Omega_{j,n} = \{|u_j| < \eta\} \quad (j = 1, \ldots, n), \text{ o sea, } K_\eta = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_{j,n}.$$

El símbolo $N \to \infty$ significa que $N_1 \to \infty, \ldots, N_n \to \infty$.

El teorema tiene lugar también si la función f es simplemente integrable (según Riemann o Lebesgue). No vamos a demostrar este teorema, notemos sólo que para demostrarlo es necesario utilizar las propiedades de las integrales múltiples de Fourier que son análogas a las de las integrales unidimensionales de Fourier (véase el § 4.12, fórmulas (9), (10) y (11)).

Notemos, además, que en la fórmula (21) no se puede sustituir el conjunto (cruz) K_η por el cubo $\Delta_\eta = \{|u_j| < \eta, j = 1, \ldots, n\}$ y en esto consiste la diferencia esencial entre las series de Fourier de las funciones de muchas variables y de las funciones de una variable.

La fórmula (21) puede ser utilizada al obtener distintos criterios suficientes de convergencia de una serie múltiple de Fourier hacia la función $f(x)$ en dependencia de las propiedades de la función $f(x)$.

Capítulo 5

Ecuaciones de la física matemática

§ 5.1. Temperatura de un cuerpo

Examinemos un cuerpo físico Ω. Designemos su temperatura en el punto (x, y, z) en el instante t por

$$u = u(x, y, z, t).$$

Mostremos que la función u satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad ((x, y, z) \in \Omega) \tag{1}$$

o bien, si hacemos uso de la designación

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \tag{1'}$$

que se llama *ecuación de conducción del calor*. La última sirve de ejemplo de una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales de segundo orden.

Examinemos un cubo elemental σ del cuerpo Ω (fig. 119). La cantidad de calor que atraviesa la cara izquierda de σ de derecha a izquierda durante el tiempo $(t, t + \Delta t)$ es igual, con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior, a

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t.$$

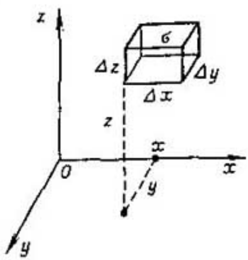

Fig. 119.

Aquí α es el coeficiente de conductibilidad térmica del cuerpo el cual se considera constante en cualquiera de sus puntos. El hecho consiste en que la cantidad indicada de calor es, evidentemente, proporcional al número α, al área $\Delta y \Delta z$ de la cara que se examina, al incremento de tiempo Δt y a la velocidad de variación de la temperatura en la dirección del eje x que es igual a la derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial x}$. La derivada parcial varía dentro de los límites de la cara, pero, despreciando infinitésimos de orden superior, se puede suponer que ella por doquier en esta cara es igual a $\frac{\partial u}{\partial x}$ en el punto (x, y, z, t).

La cantidad de calor que pasa por la cara derecha de σ de derecha a izquierda es, evidentemente, igual a

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, \ y, \ z, \ t) \Delta y \Delta z \Delta t.$$

La cantidad de calor que entra en el cubo σ por sus caras izquierda y derecha durante el lapso de indicado es igual a

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, \ y, \ z, \ t) \Delta y \Delta z \Delta t - \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, \ y, \ z, \ t) \Delta y \Delta z \Delta t \sim$$
$$\sim \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \ y, \ z, \ t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t.$$

La cantidad total de calor que entra en σ en el lapso $(t, \ t+\Delta t)$ es, evidentemente, igual a la suma de las cantidades de calor que entran durante este tiempo por todas las caras de σ:

$$\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \tag{2}$$

Pero este número (cantidad de calor) es igual también a

$$\beta \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t, \tag{3}$$

donde β es el calor específico del cuerpo que consideramos constante en todos sus puntos.

Igualando las magnitudes de (2) y (3), obtenemos, después de las simplificaciones, la ecuación diferencial (1), donde

$$a^2 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Pues, hemos mostrado que la temperatura del cuerpo Ω es la función $u = u(x, y, z, t)$ que satisface la ecuación (1), donde a^2 es la constante positiva cuyo significado físico ha sido explicado más arriba. Es que nos hemos limitado al caso cuando el cuerpo tiene en todos sus puntos un calor específico constante y un coeficiente de conductibilidad invariable.

La ecuación diferencial (1) tiene un conjunto infinito de soluciones. Para hallar entre ellas una solución determinada es necesario imponer sobre la función u condiciones adicionales. Suelen ser las así llamadas *condiciones iniciales* y *de frontera*.

A continuación examinaremos varios problemas matemáticos relacionados con esta cuestión.

§ 5.2. Problema de Dirichlet

La distribución del calor en un cuerpo se llama *estacionaria* si la temperatura u del cuerpo depende de la posición del punto (x, y, z) y no depende del tiempo t, o sea,

$$u = u(x, y, z).$$

En este caso

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

y la función u satisface la ecuación

$$\Delta u = 0.$$

DEFINICIÓN. La función $u(x, y, z)$ se llama *armónica* sobre la región Ω si tiene derivadas parciales continuas de segundo orden sobre Ω y satisface sobre Ω la ecuación

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

La ecuación (1) se llama *ecuación de Laplace* [1]. Es válido el siguiente

TEOREMA 1. *Supongamos que la región limitada Ω del espacio tiene una frontera suave a trozos (de la superficie) Γ sobre la cual se da la función continua $f(x, y, z)$. Entonces en la clausura $\overline{\Omega}$ existe la única función continua $u(x, y, z)$, armónica sobre Ω, tal que*

$$u \mid_{\Gamma} = f(x, y, z).$$

El teorema 1 tiene una interpretación física evidente. Si sobre la frontera Γ del cuerpo Ω se mantiene sin interrupción una temperatura u, igual a $u\mid_{\Gamma} = f(x, y, z)$ donde $f(x, y, z)$ es la función continua dada sobre Γ, entonces dentro del cuerpo se establece la temperatura bien determinada (única) $u(x, y, z)$. Desde el punto de vista de la física esta afirmación debe considerarse evidente. Sin embargo, puede ser demostrada asimismo matemáticamente. Este problema, llamado *problema de Dirichlet*, está investigado muy bien; con la particularidad de que, se dan diferentes métodos aproximados de su resolución.

El problema de Dirichlet tiene gran aplicación práctica también en un caso plano. En el caso plano este problema se enuncia así.

Sobre la frontera suave a trozos Γ de una región plana Ω está dada una función continua $f(x, y)$. Es necesario hallar una función $u(x, y)$ que sea continua sobre $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ y armónica sobre Ω, es decir,

---

[1]) P. S. Laplace (1749—1827), ilustre matemático y físico francés.

que tenga las derivadas parciales segundas continuas y sati faga la ecuación de Laplace sobre Ω:

$$\Delta u = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Este problema se resuelve positivamente: sobre $\overline{\Omega}$ existe, y sólo la única función $u(x, y)$ que satisface los requisitos de esta problema.

Sobre todo son importantes los casos cuando el problema de Dirichlet se resuelve *de manera efectiva*.

A continuación ofrecemos la resolución efectiva del problema de Dirichlet para un círculo.

§ 5.3. Problema de Dirichlet para un círculo

TEOREMA 1. *Sea σ un círculo unitario abierto que tiene por centro el origen del sistema rectangular de coordenadas (x, y) y sobre su frontera viene dada una función continua $f(\theta)$ (de período 2π), donde θ es el ángulo polar de un punto de Γ. Entonces en la clausura $\overline{\sigma} = \sigma + \Gamma$ del círculo σ existe y sólo la única función $u(x, y)$ que sea continua sobre $\overline{\sigma}$, armónica sobre σ e igual a $f(\theta)$ sobre Γ:*

$$u \mid_{\Gamma} = f(\theta). \tag{1}$$

En las coordenadas polares (ρ, θ) la función $u = u(\rho, \theta)$ se escribe en la forma de la serie

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta), \tag{2}$$

donde

$$\left. \begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \left\{ \begin{matrix} \cos k\theta \\ \operatorname{sen} k\theta \end{matrix} \right\} d\theta \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

son los coeficientes de Fourier de la función $f(\theta)$.

Demostremos el teorema 1 suponiendo que la función $f(\theta)$ tiene la derivada segunda continua, aunque el teorema es justo también si $f(\theta)$ es simplemente continua.

Desarrollemos la función $f(\theta)$ en serie de Fourier

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta).$$

Como $f(\theta)$ tiene la derivada segunda continua, entonces

$$|a_k| \leqslant \frac{2M}{k^2}, \quad |b_k| \leqslant \frac{2M}{k^2}, \quad k \neq 0, \tag{3}$$

donde la constante $M = \max\limits_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} |f''(t)|$ (véase el § 4.7). Tenemos $|\rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta)| \leqslant |a_k| + |b_k|$ $(0 \leqslant \rho \leqslant 1)$, y puesto que la serie

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leqslant \frac{|a_0|}{2} + 4M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

converge, entonces, según el teorema de Weierstrass, la serie (2) converge uniformemente sobre $\bar{\sigma}$. Pero entonces $u(\rho, \theta)$ es una función continua sobre $\bar{\sigma}$, como la suma de la serie uniformemente convergente de las funciones continuas. Además,

$$u(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) = f(\theta),$$

o sea, se cumple la propiedad (1).

Cada término de la serie (2) satisface la ecuación de Laplace en coordenadas polares

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0$$

(véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral» § 9.9, ejemplo 3). Además, tienen lugar las igualdades $(0 \leqslant \rho < 1)$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \rho} &= \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\rho^{k-2} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \rho^k (-a_k \cos k\theta - b_k \operatorname{sen} k\theta).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En el caso dado la derivación de la serie (2) término a término es legítima, porque para todo número positivo $\rho_0 < 1$ los términos de las series (4) no superan, respectivamente, el número

$$\rho_0^k k^2 \frac{4M}{k^2} = 4M\rho_0^k \quad (0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0)$$

y la serie

$$4M\sum_{1}^{\infty}\rho_0^k<\infty \quad (0<\rho_0<1)$$

converge.

Por eso la suma de la serie (2) $u(\rho, \theta)$ es la solución del problema planteado (es una función armónica).

El hecho de que la solución del prob ema de Dirichlet sea la única, no vamos a demost arlo.

§ 5.4. Problema de Dirichlet para un semiplano

Supon amos que en el semiplano $R_2^+ = \{-\infty < x < \infty, y > 0\}$ es preciso hallar una solución acotada de la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

que satisfaga la condición de frontera

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{2}$$

Es fácil comprobar que las funciones

$$u_\lambda(x, y) = [\alpha(\lambda)\cos\lambda x + \beta(\lambda)\operatorname{sen}\lambda x]\exp(-\lambda y)$$

para todo número fijo $\lambda > 0$ están acotadas y son armónicas sobre R_2^+, o sea, satisfacen sobre R_2 la ecuación (1). Pero entonces la suma de tales funciones, e incluso la integral tomada sobre el parámetro, será asimismo la solución de la ecuación (1):

$$u(x, y) = \int_0^\infty [\alpha(\lambda)\cos\lambda x + \beta(\lambda)\operatorname{sen}\lambda x]\exp(-\lambda y)\,d\lambda \tag{3}$$

con tal de que sea legítima la derivación bajo el signo integral respecto a los parámetros x e y. Las constantas $\alpha(\lambda)$ y $\beta(\lambda)$ las hallamos de la condición (2)

$$u(x, 0) = \int_0^\infty [a(\lambda)\cos\lambda x + \beta(\lambda)\operatorname{sen}\lambda x]\,d\lambda = \varphi(x). \tag{4}$$

Escribamos el desarrollo de la función $\varphi(x)$ en integral de Fourier

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \left\{\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\xi\lambda\,d\xi\right)\cos\lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\operatorname{sen}\xi\lambda\,d\xi\right)\operatorname{sen}\lambda x\right\}d\lambda. \tag{5}$$

Comparando las fórmulas (4) y (5), vemos que

$$\alpha(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\xi\lambda\,d\xi,\quad \beta(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\operatorname{sen}\xi\lambda\,d\xi. \tag{6}$$

Sustituyendo estas funciones en (3), obtenemos

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(-\lambda y)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\cos\lambda(t-x)\,dt\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\left[\int_{0}^{\infty}\exp(-\lambda y)\cos\lambda(t-x)\,d\lambda\right]dt.$$

Conforme al § 4.14, ejemplo 4), tenemos

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{y\,dt}{y^2+(t-x)^2}. \tag{3'}$$

Observación 1. Supongamos que la función $\varphi(x)$ tiene derivadas continuas hasta el cuarto orden inclusive y satisface las condiciones

$$\varphi^{(k)}(x)\to 0,\quad x\to\infty\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4);$$

$$M_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi^{(k)}(x)|\,dx<\infty\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Entonces de (6) resultan las estimaciones

$$|\alpha(\lambda)|\leqslant\frac{c}{1+\lambda^4},\qquad |\beta(\lambda)|\leqslant\frac{c}{1+\lambda^4}, \tag{7}$$

donde c es cierta constante. En efecto, si $|\lambda|<1$, entonces

$$|\alpha(\lambda)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\xi)|\,d\xi=M_0\leqslant\frac{2M_0}{1+\lambda^4}. \tag{8}$$

Si $|\lambda|\geqslant 1$, entonces, integrando cuatro veces por partes, obtenemos

$$\alpha(\lambda)=\frac{1}{\pi}\varphi(\xi)\frac{\operatorname{sen}\lambda\xi}{\lambda}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(\xi)\operatorname{sen}\xi\lambda\times d\xi=$$

$$=-\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(\xi)\operatorname{sen}\lambda\xi\,d\xi=\ldots=\frac{1}{\pi\lambda^4}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(4)}(\xi)\cos\xi\lambda\,d\xi,$$

de donde

$$|\alpha(\lambda)|\leqslant\frac{M_4}{\lambda^4}\leqslant\frac{2M_4}{1+\lambda^4} \tag{9}$$

De (8) y (9) se deduce la primera desigualdad (7). La segunda desigualdad (7) se demuestra de un modo análogo.

Las estimaciones (7) aseguran la existencia, la continuidad y el carácter acotado de las funciones u, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en el semiplano superior R_2^+.

Observación 2. Se puede demostrar que si la función $\varphi(x)$ es continua y está acotada sobre $(-\infty, \infty)$, entonces la solución del problema de Dirichlet, obtenida con ayuda de la fórmula (3'), para el semiplano superior es la única en la clase de funciones acotadas.

§ 5.5. Ecuación de conducción del calor por una barra

Examinemos una barra fina aislada (revestida con un aislamiento térmico) que se halla sobre el segmento $[0, \pi]$ del eje x (fig. 120). Se supone que sus propiedades físicas son iguales en los puntos de cualquier sección de la misma. Por eso la temperatura de la barra es la función

$$u = u(x, t)$$

de la abscisa x de la sección y del tiempo t.

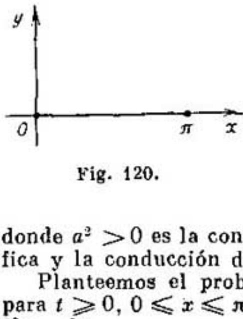

Fig. 120.

En virtud de lo dicho en el § 5.1 la función u satisface la ecuación diferencial en las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

donde $a^2 > 0$ es la constante, si suponemos que la capacidad calorífica y la conducción del calor de la barra no dependen de x.

Planteemos el problema: hallar una función $u(x, t)$, continua para $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, que tenga las derivadas parciales continuas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ para $t > 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ y satisfaga la ecuación diferencial (1) para $t > 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, y las condiciones siguientes:

1) la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi), \tag{2}$$

donde $f(x)$ es la función continua dada sobre el segmento $[0, \pi]$;

2) las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{3}$$

Ahora bien, se supone que en el instante inicial de tiempo $t = 0$ la temperatura de la barra se expresa por la función $f(x)$ (véase (2)) y durante el tiempo de realización del experimento en los extremos de la barra se mantiene artificialmente la temperatura igual a cero (véase (3)).

Resolvamos la ecuación (1) por el *método de Fourier* de separación de variables. La esencia de este método consiste en buscar soluciones particulares de la ecuación (1), que satisfagan tan sólo las condiciones de frontera (3), en forma del producto de dos funciones cada una de las cuales no depende sino de una variable:

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{4}$$

En este caso buscamos soluciones no triviales, es decir, no iguales idénticamente a cero. De (4) tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t)\frac{d^2X}{dx^2} = TX'', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = XT'.$$

Sustituyendo estas expresiones en (1), obtenemos

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}. \tag{5}$$

En (5) el primer miembro no depende de x y el segundo no depende de t, por eso

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu, \tag{6}$$

donde μ es cierta constante.

Ahora bien, las funciones $X(x)$ y $T(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' + \mu X = 0. \tag{7}$$

$$T' + a^2\mu T = 0, \tag{8}$$

donde μ es cierta constante.

Puesto que buscamos soluciones que satisfagan las condiciones (3), para todos los valores de t deben cumplirse las igualdades

$$u(0, t) = X(0)\,T(t) = 0, \quad u(\pi, t) = X(\pi)\,T(t) = 0.$$

Si suponemos que $T(t) = 0$, $\forall t$, entonces $u(x, t) \equiv 0$ para todos los valores de x y t. Por eso existe al menos un valor de t para el cual $T(t) \neq 0$. Pero entonces

$$X(0) = X(\pi) = 0. \tag{9}$$

Hemos llegado al problema siguiente. Es necesario hallar tales números μ para los cuales la ecuación diferencial (7) tiene una solución no trivial (no igual idénticamente a cero) sobre el segmento $[0, \pi]$ la cual satisfaga las condiciones de frontera (9).

Este problema se llama *problema de Sturm — Liouville* [1]) para

[1]) J. Liouville (1809—1882), matemático francés, J. Ch. F. Sturm (1803—1855), matemático francés.

la ecuación (7) sobre el segmento $[0, \pi]$ a las condiciones de frontera (9). Los números buscados μ se denominan *valores propios* del problema de Sturm — Liouville y las funciones no triviales respectivas que satisfacen las condiciones de frontera (9) se llaman *funciones propias* correspondientes a estos valores.

Busquemos la solución del problema planteado entre los números positivos $\mu = \lambda^2 > 0$ $(\lambda > 0)$. En este caso los números $\pm i\lambda$ son las raíces de la ecuación característica, por eso la solución general de la ecuación (7) se escribirá así:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x.$$

De (9) encontramos

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1, \\ 0 &= C_1 \cos \lambda\pi + C_2 \operatorname{sen} \lambda\pi, \end{aligned}\right\} \text{ o bien } \left.\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_2 \operatorname{sen} \lambda\pi &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Para obtener una solución que no sea igual idénticamente a cero es necesario considerar $C_2 \neq 0$ y $\operatorname{sen} \lambda\pi = 0$. Esto último es posible solamente para los números naturales $\lambda = k = 1, 2, 3, \ldots$. A cada k le corresponde la solución

$$X_k(x) = d_k \operatorname{sen} kx \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

que satisface, evidentemente, las condiciones de frontera (9). Es la solución no trivial (no igual idénticamente a cero) de la ecuación (7). Así, pues, los números

$$\mu_k = k^2 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

son los *valores propios* del problema de frontera mencionado arriba (problema de Sturm — Liouville) y las funciones

$$X_k = d_k \operatorname{sen} kx \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

para $d_k \neq 0$ son las *funciones propias* correspondientes a estos valores.

Hemos hallado todos los valores propios y las funciones propias del problema planteado de Sturm — Liouville, por cuanto, cualquiera que sea $\mu \leqslant 0$, la ecuación diferencial (7) tiene sólo la solución trivial (igual idénticamente a cero) que satisface las condiciones $X(0) = X(\pi) = 0$.

En efecto, cuando $\mu = -\lambda^2 < 0$ la solución general de la ecuación (7) tiene la forma $X = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$. Hallemos las constantes C_1 y C_2 de la condición (9):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= C_1 e^{\lambda\pi} + C_2 e^{-\lambda\pi} \end{aligned}\right\}$$

El determinante de este sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\pi} & e^{-\lambda\pi} \end{vmatrix} = e^{-\lambda\pi} - e^{\lambda\pi} \neq 0,$$

por eso el sistema tiene solamente la solución trivial $C_1 = C_2 = 0$. Así, pues, para $\mu = -\lambda^2 < 0$ no existe una solución particular de la ecuación (7) que no sea igual idénticamente a cero y satisfaga las condiciones (9).

Si $\mu = 0$, la ecuación característica tendrá el número cero como raíz múltiple, por eso la solución general (7) se escribirá así:

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno, obtenemos $C_1 = 0$, $C_1 + C_2\pi = 0$, de donde $C_1 = C_2 = 0$ y $X(x) \equiv 0$.

Queda resolver la ecuación (8) para $\mu_k = k^2$ hallados:

$$T' + a^2k^2T = 0, \quad \frac{dT}{T} = -a^2k^2\,dt, \quad T(t) = A_k \exp(-a^2k^2t),$$

donde A_k es la constante arbitraria.

Así, pues,

$$u_k(x, t) = b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx \quad (b_k = A_k d_k) \qquad (10)$$

son las soluciones particulares de la ecuación (1) que satisfacen las condiciones de contorno (3).

Es fácil ver que la suma finita arbitraria

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx,$$

donde b_k son las constantes arbitrarias que, a su vez, son la solución de la ecuación diferencial (1) la cual satisface las condiciones de frontera $u_N(0, t) = u_N(\pi, t) = 0$. Pero entonces la suma de la serie infinita

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx \qquad (11)$$

también satisfará la ecuación (1) y las condiciones de frontera $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ siempre que los coeficientes b_k sean suficientemente pequeños.

Escojamos ahora los números b_k de modo que se cumpla la igualdad

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi). \qquad (12)$$

Los números b_k se seleccionan de un modo único, a saber, por la fórmula

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt\,dt,$$

o sea, deben ser coeficientes de Fourier de la función f (véase el § 4.3).

Si la función $f(x)$ es continua sobre $[0, \pi]$, entonces la serie (12) converge hacia ella en media cuadrática sobre $[0, \pi]$ (véase el § 4.10, teorema 2). Si resulta que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$$

converge, entonces debido a las desigualdades

$$|b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx| \leqslant |b_k| \tag{13}$$

la serie (11) converge uniformemente y su suma será la función continua para $t \geqslant 0$.

Cuando $t > 0$, la serie (11) converge con gran rapidez: ésta puede ser derivada término a término tantas veces como se quiera. En particular,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

de donde se ve que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La legitimidad de las igualdades (14), es decir, de la derivabilidad de la serie (11) término a término para $t > 0$ se puede examinar del modo siguiente. Si se da $t > 0$, tomemos t_0 de modo que $0 < t_0 < t$. Entonces, por ejemplo, si se trata de la primera serie (14), suponiendo que $|b_k| \leqslant M$, tendremos

$$|k^2 b_k \exp(-a^2k^2t) \operatorname{sen} kx| \leqslant Mk^2 \exp(-a^2k^2t_0).$$

Pero la serie formada de los números positivos (¡constantes!)

$$M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \exp(-a^2k^2t_0) < \infty$$

converge (lo que se puede comprobar por el criterio de d'Alembert o el de Cauchy) y esto junto con la estimación (13) muestra que la derivación realizada dos veces término a término respecto a x es legítima.

Observación. Anteriormente hemos obtenido que el problema de Sturm — Liouville

$$X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0 \tag{15}$$

tiene los valores propios

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 4, \quad \mu_3 = 9, \quad \ldots, \quad \mu_k = k^2, \quad \ldots. \tag{16}$$

Estos valores son positivos y les corresponden las funciones propias

$$\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen} 2x, \quad \operatorname{sen} 3x, \quad \ldots, \quad \operatorname{sen} kx, \quad \ldots \tag{17}$$

que forman el sistema ortogonal sobre el segmento $[0, \pi]$:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} lx \, dx = 0 \quad (k \neq l).$$

De la teoría de las series trigonométricas se sabe que el sistema (17) es completo en $L_2'(0, \pi)$ (véase el § 4.10, teorema 2), es decir, la serie de Fourier de una función arbitraria, suave a trozos sobre el segmento $[0, \pi]$, según este sistema converge hacia ella en media cuadrática.

El lector puede encontrar en el § 5.10 algunas nociones que generalizan estos hechos.

§ 5.6. Conducción del calor para una barra infinita

Conforme al § 5.5 la temperatura $u(x, y)$ del punto x de una barra en el instante t satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Veamos una barra infinita $(-\infty < x < \infty)$. Las condiciones de contorno en este caso no son de rigor, por eso buscaremos una solución acotada de la ecuación (1) que satisfaga sólo la condición inicial

$$u|_{t=0} = u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

donde la función $\varphi(x)$ está definida sobre todo el eje real. Supondremos que la función φ es continua y pertenece a $L'(-\infty, \infty)$. Este problema se denomina *problema de Cauchy* para la ecuación (1).

Para simplificar la notación a continuación supondremos $a = 1$.

Para resolver el problema planteado apliquemos el método de separación de variables que lleva el nombre de Fourier. Buscaremos la solución particular en la forma

$$u(x, t) = X(x)\, T(t).$$

Sustituyendo esta función en (1), obtenemos

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}=\mu,$$

$$T'=\mu T, \tag{3}$$

$$X''=\mu X. \tag{4}$$

La solución de la ecuación (3) tiene la forma

$$T(t)=C\exp(\mu t).$$

Teniendo en cuenta las consideraciones físicas, está claro que la temperatura $u(x, t) = X(x)T(t)$ no puede crecer indefinidamente cuando $t\to\infty$. Esto quiere decir que la constante μ debe ser negativa. Pongamos $\mu = -\lambda^2$. Entonces la solución de la ecuación (4) será la siguiente:

$$X(x)=A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\operatorname{sen}\lambda x.$$

La función

$$u_\lambda(x, t)=[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\operatorname{sen}\lambda x]\exp(-\lambda^2 t) \tag{5}$$

es una solución particular de la ecuación (1) para $\forall\lambda$. Pero entonces la suma de tales soluciones, e incluso la integral de la función (5) respecto al parámetro λ, será asimismo solución de la ecuación (1):

$$u(x, t)=\int_0^\infty[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\operatorname{sen}\lambda x]\exp(-t^2\lambda)\,d\lambda. \tag{6}$$

Naturalmente, las funciones $\alpha(\lambda)$ y $\beta(\lambda)$ deben decrecer con bastante rapidez hacia cero para que sea legítimo derivar (6) respecto a los parámetros x y t. Las funciones $\alpha(\lambda)$ y $\beta(\lambda)$ se determinan a partir de la condición inicial

$$u(x, 0)=\int_0^\infty[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\operatorname{sen}\lambda x]\,d\lambda=\varphi(x). \tag{7}$$

Escribamos el desarrollo de la función φ en integral de Fourier (véase el § 4.13, (1)):

$$\varphi(x)=\int_0^\infty\left\{\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\varphi(\xi)\cos\xi\lambda\,d\xi\right)\cos\lambda x+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\varphi(\xi)\operatorname{sen}\lambda\xi\,d\xi\right)\operatorname{sen}\lambda x\right\}d\lambda. \tag{8}$$

Comparando las fórmulas (7) y (8) vemos que

$$\alpha(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\xi\lambda\,d\xi,\quad \beta(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,\mathrm{sen}\,\xi\lambda\,d\xi. \tag{9}$$

Sustituyendo estos valores en (6), obtenemos (véase el § 4.14, (12))

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi\right]\exp(-\lambda^2 t)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+\xi)\left[\int_{0}^{\infty}\exp(-\lambda^2 t)\cos\lambda\xi\,d\lambda\right]d\xi=$$

$$=\left(\lambda=\frac{z}{\sqrt{t}}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+\xi)\left[\int_{0}^{\infty}\exp(-z^2)\cos\frac{\xi z}{\sqrt{t}}\,\frac{dz}{\sqrt{t}}\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+\xi)\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi+x)\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)d\xi. \tag{10}$$

Así, el problema (1), (2) queda resuelto por completo.

Observación 1. Si la función φ satisface las condiciones señaladas en la observación 1 del § 5.4, entonces la solución del problema de Cauchy obtenida mediante la fórmula (10) será continua y acotada junto con sus derivadas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ y será solución única en esta clase de funciones acotadas.

§ 5.7. Vibraciones pequeñas de una cuerda

Se llama *cuerda* un hilo fino que resiste a la tracción y no resiste a la flexión. Si una cuerda floja se somete al arrugamiento, no opondrá ninguna resistencia; sin embargo, si se estira, en ella surgirán tensiones.

Supongamos que los extremos de un trozo de cuerda tensa están sujetos en los puntos $x = a$ y $x = b$ del eje x. Supongamos también que la magnitud de la tensión que surge en ella es igual a T. Supondremos luego que la densidad de la cuerda en toda su extensión es igual a ρ. Hagamos salir del equilibrio nuestra cuerda en el instante $t = 0$, por ejemplo, tirémosla con el dedo hacia un lado y dejemos que vibre (oscile) libremente efectuando pequeñas vibraciones.

En el instante t designaremos la desviación de la cuerda en un punto cualquiera de la misma cuya abscisa es x por

$$u = u(x, t) \quad (a \leqslant x \leqslant b,\ t \geqslant 0).$$

Escribamos la ecuación diferencial a la cual satisface la función u. La fig. 121 muestra el gráfico de nuestra cuerda en el instante t.

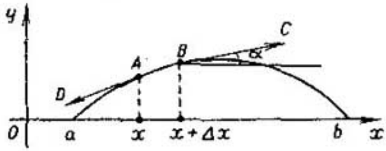

Fig. 121.

El elemento de éste correspondiente al segmento $[x, x + \Delta x]$ está sometido a la acción de dos fuerzas de tensión $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$. La magnitud escalar de cada una de estas fuerzas es igual a T:

$$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| = T.$$

La fuerza $\overrightarrow{BC}$ está aplicada al punto B, que tiene por abscisa $x + \Delta x$, está orientada por la recta tangente a la cuerda en este punto y forma con el sentido positivo del eje x el ángulo α cuya tangente es igual a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}.$$

Puesto que la cuerda realiza vibraciones pequeñas, se puede considerar, aproximadamente,

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \operatorname{sen} \alpha.$$

Ahora bien,

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}.$$

La proyección de la fuerza $\overrightarrow{BC}$ sobre el eje u es, evidentemente, igual a

$$T \operatorname{sen} \alpha \approx T \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}.$$

La proyección de la fuerza $\overrightarrow{AD}$ sobre el eje u es, evidentemente, igual a

$$-T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

La suma de estas proyecciones es igual a

$$T\,\frac{\partial u(x+\Delta x,\,t)}{\partial x}-T\,\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial x}\approx T\,\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2}\,\Delta x.$$

Despreciamos siempre los infinitésimos de un orden superior al de Δx, puesto que examinamos, por decirlo así, las pequeñas vibraciones de la cuerda.

Por otro lado, el producto de la masa por la aceleración del elemento de la cuerda que examinamos es igual a

$$\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial t^2}.$$

Por eso

$$\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\Delta x.$$

Al simplificar por Δx, obtenemos para la cuerda la ecuación diferencial de su vibración:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad\left(a^2=\frac{T}{\rho}\right). \tag{1}$$

Ahora el problema matemático al cual conduce el estudio de las vibraciones libres de la cuerda se puede enunciar así: es preciso resolver una ecuación diferencial lineal con derivadas parciales de segundo orden (1) para las condiciones iniciales

$$u(x,\,0)=f(x),\quad \frac{\partial u(x,\,0)}{\partial t}=F(x) \tag{2}$$

y para las condiciones de contorno

$$u(0,\,t)=u(\pi,\,t)=0. \tag{3}$$

Las condiciones iniciales (2) muestran en qué posición se encontraba la cuerda en el instante inicial de tiempo y cuál era la velocidad de cada uno de sus puntos para el instante $t=0$. Las funciones dadas son $f(x)$ y $F(x)$.

Las condiciones de contorno (3) muestran que los extremos de la cuerda están sujetos en los puntos $a=0$ y $b=\pi$.

El problema planteado puede ser resuelto por el método de Fourier (al igual que en el § 5.5). Buscamos primeramente la solución de la ecuación (1) en forma del producto

$$u(x,\,t)=X(x)\,T(t) \tag{4}$$

que satisface las condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned}X(0)\,T(t)&=0,\\ X(\pi)\,T(t)&=0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

para todos los valores de $t > 0$. Pero entonces

$$X(0) = X(\pi) = 0,$$

porque de otro modo sería $T(t) \equiv 0$ y $u(x, t) \equiv 0$. Sustituyendo el producto (4) en (1), obtenemos

$$XT'' = a^2X''T$$

o bien

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Pero la función de t puede ser igual a la de x sólo si ambas son iguales al número constante que designaremos por $-\mu$:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu.$$

Como resultado obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{6}$$

$$T'' + a^2\mu T = 0. \tag{7}$$

La ecuación (6) debe resolverse para las condiciones de contorno $X(0) = X(\pi) = 0$, o sea, es necesario resolver para esta ecuación el problema de Sturm — Liouville (véase el § 5.5). Como muestra el § 5.5, los números (valores propios)

$$\mu_k = k^2 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

y las funciones no triviales (funciones propias) que les corresponden

$$X_k(x) = \operatorname{sen} kx \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

y que satisfacen con estos números las condiciones de (5) son la solución de este problema.

Para los valores hallados de $\mu_k = k^2$ la solución general de la ecuación (7) tiene la forma

$$T_k(t) = A_k \cos akt + B_k \operatorname{sen} akt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación diferencial (1) que tienen la forma (4) y satisfacen las condiciones de frontera (5) se pueden escribir así:

$$u_k(x, t) = (A_k \cos akt + B_k \operatorname{sen} akt) \operatorname{sen} kx \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

donde las constantes A_k y B_k para cada k pueden tomarse arbitrariamente. Pero entonces cualesquiera sumas

$$\sum_{k=1}^{N} (A_k \cos akt + B_k \operatorname{sen} akt) \operatorname{sen} kx$$

son asimismo las soluciones de la ecuación (1) que satisfacen las condiciones de frontera (5). Junto con estas sumas poseen dicha propiedad también las sumas de las series infinitas

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos akt+B_k\operatorname{sen}akt)\operatorname{sen}kx \tag{8}$$

si los números A_k y B_k con suficiente rapidez tienden a cero para que estas series se puedan derivar término a término dos veces.

Ahora a nuestra disposición tenemos una gran reserva de funciones $u(x, t)$ que satisfacen la ecuación (1) y las condiciones de frontera (3): se determinan por la fórmula (8), donde A_k y B_k son números arbitrarios, con tal de que se cumplan las condiciones indicadas de convergencia.

Para hallar una solución del problema planteado que satisfaga las condiciones iniciales (2) vamos a derivar (8) respecto a t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}ak\,(-A_k\operatorname{sen}akt+B_k\cos akt)\operatorname{sen}kx \tag{9}$$

e igualamos (8) y (9), para $t=0$, a las funciones dadas $f(x)$ y $F(x)$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\operatorname{sen}kx,\quad F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}akB_k\operatorname{sen}kx. \tag{10}$$

De aquí

$$A_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\operatorname{sen}kt\,dt,\quad B_k=\frac{2}{\pi ak}\int_0^{\pi}F(t)\operatorname{sen}kt\,dt. \tag{11}$$

Si las funciones $f(x)$ y $F(x)$ son continuas sobre $[0, \pi]$, esto será suficiente para que se puedan calcular los números A_k y B_k por las fórmulas (11) y las series (10) converjan hacia estas funciones en media cuadrática en todo caso (véase el § 4.10). Desde luego, si no sólo son continuas las funciones $f(x)$ y $F(x)$ sino también sus derivadas (bastan las de tercer orden), entonces la suma de la serie (8) tendrá, a ciencia cierta, las derivadas segundas continuas.

§ 5.8. Vibraciones de una cuerda infinita. Fórmula de d'Alembert

Si la cuerda es muy larga, los extremos de la misma ejercerán poca influencia sobre las vibraciones que surgen en alguna parte próxima al centro.

Por eso, examinando las vibraciones libres de una cuerda infinita, debemos resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

sólo para las condiciones iniciales

$$u(x,\ 0)=f(x), \qquad (2)$$

$$u'_t(x,\ 0)=F(x). \qquad (3)$$

Tal problema se llama *problema de Cauchy* o *problema con condiciones iniciales*.

Es cómodo resolverlo del modo siguiente. Introduzcamos las nuevas variables

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at. \qquad (4)$$

Entonces (1) se convierte en ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0. \qquad (5)$$

La función

$$u=\varphi(\xi)+\psi(\eta),$$

donde φ y ψ son las funciones arbitrarias que consideraremos dos veces derivables, es, evidentemente, la solución de la ecuación (5).

Retornando a las variables anteriores, obtenemos la solución de la ecuación (1) en la forma siguiente:

$$u(x,\ t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at), \qquad (6)$$

Por derivación inmediata de (6) es fácil convencerse de que es precisamente así. Tenemos

$$u'_x=\varphi'(x-at)+\psi'(x+at),$$

$$u'_t=-a\varphi'(x-at)+a\psi'(x+at),$$

$$u''_{xx}=\varphi''(x-at)+\psi''(x+at),$$

$$u''_{tt}=a^2\varphi''(x-at)+a^2\psi''(x+at),$$

es decir,

$$a^2u''_{xx}=u''_{tt}.$$

La solución obtenida (6) que depende de dos funciones arbitrarias se denomina *solución de d'Alembert* [1]).

Utilizando las condiciones iniciales, hallemos las funciones φ y ψ:

$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x), \qquad (7)$$

$$-a\varphi'(x)+a\psi'(x)=F(x). \qquad (8)$$

[1]) J. d'Alembert (1717—1783), ilustre matemático francés.

Integrando (8) sobre el segmento $[0, x]$, obtenemos

$$-\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{a}\int_{0}^{x} F(y)\,dy+C, \tag{9}$$

donde C es la constante arbitraria. De (7) y (9) obtenemos

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_{0}^{x} F(y)\,dy-\frac{C}{2},\\ \psi(x)&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x} F(y)\,dy+\frac{C}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ahora la solución del problema de Cauchy se escribirá así:

$$u(x,\ t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at)=$$

$$=\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{0}^{x-at} F(y)\,dy+\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at} F(y)\,dy,$$

o bien

$$u(x,\ t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(y)\,dy. \tag{11}$$

La fórmula (11) se denomina *fórmula de d'Alembert.*

§ 5.9. Vibración de una membrana circular

Supongamos que una membrana circular de radio 1 ocupa en el estado de reposo un círculo de radio 1 que tiene por centro el origen del sistema polar de coordenadas (r, φ) (fig. 122). Supongamos también que la membrana se encuentra sujeta por una circunferencia de $r = 1$. Si actuamos sobre la membrana con cierta fuerza, la desviación de los puntos de la membrana u será función de las coordenadas r, φ y del tiempo t:

$$u = u(r,\ \varphi,\ t).$$

Al igual que en el § 5.7, se puede obtener la ecuación de vibraciones de esta cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right). \tag{1}$$

Para la ecuación (1) resolveremos el problema con la condición de contorno

$$u|_{r=l}=0 \tag{2}$$

y las condiciones iniciales

$$u\Big|_{t=0}=f(r),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=F(r). \tag{3}$$

Ahora bien, examinemos la vibración de eje de simetría de la membrana a la cual todos los puntos de la circunferencia de radio $r \leqslant 1$, que tiene por centro el origen de coordenadas, poseen en el instante inicial la velocidad y las desviaciones independientes del ángulo φ. Así, pues, la función u dependerá sólo de r y t y la ecuación (1) se simplifica:

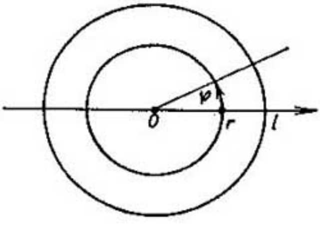

Fig. 122.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{4}$$

La solución de la ecuación (4) con las condiciones (2) y (3) se puede hallar haciendo uso del método de Fourier. Buscamos primero todas las soluciones que tienen la forma

$$u(r, t) = U(r)\,T(t).$$

Es fácil mostrar (al igual que en el § 5.7) que las funciones $T(t)$ y $U(r)$ satisfacen las ecuaciones

$$T'' + \mu^2a^2T = 0, \tag{5}$$

$$U'' + \frac{1}{r}U' + \mu^2U = 0. \tag{6}$$

Ahora bien, es necesario hallar los números μ para los cuales la ecuación (6) tiene una solución no trivial $U(r)$ que satisfaga la condición de frontera

$$U(1) = 0. \tag{7}$$

Estos números μ se llaman *valores propios* del problema dado de Sturm — Liouville y las funciones $U(r)$ que les pertenecen se denominan *funciones propias*.

Observación 1. En el § 5.7 se examinaba el problema de Sturm — Liouville para la ecuación diferencial de segundo orden con dos condiciones de frontera ($X(0) = X(\pi) = 0$). En el problema dado, asimismo para la ecuación de segundo orden, figura una sola condición de frontera ($U(1) = 0$). Esto tiene lugar porque la ecuación dada dispone de una singularidad en el punto $r = 0$ merced a la cual esta ecuación tiene, junto con las soluciones acotadas, otras no acotadas. De hecho en el caso dado también se buscan funciones propias que satisfagan dos condiciones de frontera: la primera condición que dice que la función propia $U(r)$ debe estar acotada en el entorno $r = 0$ y la segunda condición, $U(1) = 0$.

Para obtener la solución de la ecuación (6) introduzcamos la nueva variable

$$\rho = r\mu, \quad V(\rho) = U(\rho/\mu).$$

Entonces la ecuación (6) se transforma en ecuación igual, pero para $\mu = 1$:

$$V''(\rho) + \frac{1}{\rho} V'(\rho) + V(\rho) = 0. \tag{8}$$

Ya hemos estudiado la ecuación (8) en el § 1.24, ejemplo 2. Tiene dos soluciones linealmente independientes una de las cuales es no acotada en el entorno del punto $\rho = 0$, mientras que otra es la función de Bessel de orden nulo

$$J_0(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\rho^{2k}}{2^{2k}(k!)^2},$$

donde la serie de potencias a la derecha converge sobre el intervalo $-\infty < \rho < \infty$. Todas las posibles soluciones de la ecuación (8) acotadas en el entorno del punto nulo tienen la forma $CJ_0(\rho)$, donde C es la constante arbitraria (véase la observación 1 del § 1.24). Las funciones respectivas

$$CJ_0(r\mu)$$

serán precisamente las soluciones necesarias de la ecuación (6), acotadas sobre $[0, 1]$.

Ahora queda escoger μ de modo que se cumpla la condición de frontera

$$J_0(1 \cdot \mu) = 0.$$

Vemos que el número μ debe ser la raíz de la función $J_0(r)$. Es bien noto que la función $J_0(r)$ tiene un número infinito de ceros: $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$. Por ejemplo,

$$\mu_1 = 2{,}40; \quad \mu_2 = 5{,}52; \; \ldots.$$

Así, pues, los números μ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ son los valores propios a los cuales pertenecen $J_0(\mu_k r)$, que son funciones propias de nuestro problema de contorno. Estas funciones se pueden multiplicar por las constantes arbitrarias $c_k \neq 0$ y volver a obtener las funciones propias

$$c_k J_0(\mu_k r) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

pertenecientes a los números μ_k.

Cuando $\mu = \mu_k$, la solución de la ecuación (5) se escribirá como sigue:

$$T_k(t) = a_k \cos \mu_k at + b_k \operatorname{sen} \mu_k at.$$

Las correspondientes soluciones de la ecuación en derivadas parciales (4), que satisfacen la condición de frontera (2), tienen la forma

$$u_k(r, t) = (a_k \cos \mu_k at + b_k \operatorname{sen} \mu_k at) J_0(\mu_k r),$$

donde a_k y b_k son las constantes arbitrarias. Pero entonces la suma de la serie infinita

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k at + b_k \operatorname{sen} \mu_k at) J_0(\mu_k r) \tag{9}$$

es asimismo la solución de la ecuación (4), solución que satisface la condición de frontera (2) si, naturalmente, los números a_k y b_k tienden a cero con suficiente rapidez para que estas series se puedan derivar dos veces término a término.

Para hallar la solución del problema planteado, calculamos los coeficientes a_k y b_k a partir de las condiciones iniciales (3):

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r) = f(r), \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a\mu_k b_k J_0(\mu_k r) = F(r). \tag{11}$$

Las funciones de Bessel $J_0(\mu_k r)$ poseen propiedades semejantes a las de las funciones trigonométricas. Así, si la función $f(r)$ es suave a trozos sobre $[0, 1]$, entonces ésta se desarrollará obligatoriamente en una serie que tiene la forma (10) (con coeficientes constantes a_k), serie que siempre converge hacia aquélla en media cuadrática (véase también el § 5.10).

Sabemos que las funciones trigonométricas son ortogonales sobre $[0, 2\pi]$. Las funciones de Bessel $J_0(\mu_k x)$ también lo son sobre $[0, 1]$, pero, como se dice, con el peso x:

$$\int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_l x)\, dx = 0 \quad (k \neq l) \tag{12}$$

De aquí, como demostraremos a continuación, resulta que en las igualdades (10) y (11) los números a_k y b_k se calculan necesariamente por las fórmulas

$$\left.\begin{gathered} a_k = \frac{\int\limits_0^1 xJ_0(\mu_k x)\, f(x)\, dx}{\int\limits_0^1 x\,[J_0(\mu_k x)]^2\, dx}, \\ a\mu_k b_k = \frac{\int\limits_0^1 xJ_0(\mu_k x)\, F(x)\, dx}{\int\limits_0^1 x\,[J_0(\mu_k x)]^2\, dx} \\ (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{gathered}\right\} \tag{13}$$

El sistema de las funciones

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots \tag{14}$$

continuas sobre el segmento $[a,\ b]$ se llama *ortogonal sobre* $[a,\ b]$ *con el peso* $\rho(x) \geqslant 0$, donde $\rho(x)$ es la función continua, si se cumplen las igualdades

$$\int\limits_a^b \rho(x)\,\varphi_k(x)\,\varphi_l(x)\,dx = 0 \quad (k \neq l). \tag{15}$$

Si la función $f(x)$ está desarrollada en serie uniformemente convergente sobre $[a,\ b]$ según las funciones $\varphi_k(x)$ del sistema (14):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{16}$$

entonces

$$c_m = \frac{\int\limits_a^b \rho(x)\,\varphi_m(x)\,f(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\,[\varphi_m(x)]^2\,dx} \quad (m=1,\ 2,\ \ldots). \tag{17}$$

En efecto, después de multiplicar la serie por $\rho(x)\,\varphi_m(x)$ su convergencia uniforme no se altera y la integración término a término sobre $[a, b]$, en virtud de las propiedades de (15), conduce a la igualdad

$$\int_a^b \rho(x)\,\varphi_m(x)\,f(x)\,dx = c_m \int_a^b \rho(x)\,[\varphi_m(x)]^2\,dx$$

$$(m = 1, 2, \ldots),$$

de donde obtenemos precisamente las fórmulas (17).

Demostremos (12). La función $J_0(\mu_k x)$ satisface la ecuación

$$\frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_k x) + \frac{1}{x}\,\frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) + \mu_k^2 J_0(\mu_k x) = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Multiplicando la ecuación provista del índice k por $xJ_0(\mu_n x)$ y una ecuación análoga provista del índice n por $xJ_0(\mu_k x)$ y restando una de la otra, obtenemos

$$x\left[J_0(\mu_n x)\,\frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x)\,\frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_n x)\right] + \\ + \left[J_0(\mu_n x)\,\frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x)\,\frac{d}{dx} J_0(\mu_n x)\right] + \\ + (\mu_k^2 - \mu_n^2)\,xJ_0(\mu_k x)\,J_0(\mu_n x) = 0.$$

Es fácil comprobar que esta ecuación puede ser representada en la forma

$$\frac{d}{dx}\left\{x\left[J_0(\mu_n x)\,\frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x)\,\frac{d}{dx} J_0(\mu_n x)\right]\right\} + \\ + (\mu_k^2 - \mu_n^2)\,xJ_0(\mu_k x)\,J_0(\mu_n x) = 0.$$

Integrando esta igualdad respecto a x entre los límites de 0 a 1, obtenemos

$$(\mu_k^2 - \mu_n^2) \int_0^1 xJ_0(\mu_k x)\,J_0(\mu_n x)\,dx = 0 \quad (k \neq n),$$

ya que la integral del primer sumando es igual a cero en virtud de que $J_0(\mu_k) = J_0(\mu_n) = 0$.

§ 5.10. Problema general de Sturm—Liouville

Examinemos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + [\lambda\rho(x) - q(x)]\,y(x) = 0, \tag{1}$$

donde $p(x)$ es la función continuamente derivable sobre el segmento $[0, l]$ y $\rho(x)$, $q(x)$ son las funciones continuas sobre este segmento. Además $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$ y $q(x) \geqslant 0$ sobre $[0, l]$; λ es un número constante.

Planteemos el problema (de Sturm — Liouville). Es preciso hallar todos los números λ (*valores propios*) para los cuales existe una solución no trivial dos veces continuamente derivable $y(x)$ de la ecuación (1), solución (*función propia*) que satisfaga las condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned} \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \\ \gamma y(l) + \delta y'(l) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

donde α, β, γ y δ son los números constantes.

Se puede demostrar que:

1) existe un conjunto numerable de valores propios del problema

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \quad (\lambda_n \to \infty)$$

a los cuales corresponden las funciones propias

$$y_1(x), \; y_2(x), \; y_3(x), \; \ldots .$$

2) Cuando $q(x) \geqslant 0$, todos los valores propios λ_n son positivos.

3) Las funciones propias forman sobre el segmento $[0, l]$ un sistema ortogonal y normalizado con el peso $\rho(x)$:

$$\int_0^1 \rho(x)\, y_m(x)\, y_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

4) TEOREMA DE STEKLOV. Toda función $f(x)$ que satisfaga las condiciones de contorno (2) y tenga continua la derivada primera y continua a trozos la derivada segunda se desarrolla en una serie absoluta y uniformemente convergente según las funciones propias $y_n(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = \int_0^1 \rho(x)\, y_n(x)\, f(x)\, dx.$$

PROBLEMA 1. Resolver la ecuación de vibraciones libres de una cuerda si el medio opone una resistencia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

para las condiciones iniciales y de frontera

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Durante la resolución se supone que el coeficiente de rozamiento m es pequeño ($m < a$).

RESPUESTA.

$$u(x, t) = e^{-mt} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos q_k t + b_k \operatorname{sen} q_k t) \operatorname{sen} kx,$$

donde

$$q_k = \sqrt{(ka)^2 - m^2},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi q_k} \int_0^{\pi} F(x) \operatorname{sen} kx\, dx + \frac{m a_k}{q_k}.$$

PROBLEMA 2. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

para las condiciones

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(\pi, t) = u_0, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

RESPUESTA.

$$u(x, t) = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \cos \lambda_k x,$$

donde

$$\lambda_k = \frac{2k+1}{2}, \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos \lambda_k x\, dx - \frac{2u_0}{\pi \lambda_k}.$$

Indicación. Es necesario obtener la solución en forma de $u = u_0 + v(x, t)$, donde $v(x, t)$ es la función incógnita.

PROBLEMA 3. Demostrar la propiedad 3) de ortogonalidad de las funciones propias sobre $[0, l]$ que satisfacen las condiciones de frontera (2).

Indicación. Conviene seguir el esquema de demostración de la ortogonalidad de las funciones de Bessel (véase el § 5.9).

PROBLEMA 4. Reducir la ecuación (de Chébishev)

$$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0 \tag{3}$$

a la forma de (1) sobre $[-1, 1]$.

Indicación. Multiplicar el primero y segundo miembros de la ecuación (3) por $\rho(x) > 0$ y hallar la función $\rho(x)$ partiendo de la condición

$$-x\rho(x) = [(1-x^2)\rho(x)]' \quad \left(\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}\right).$$

PROBLEMA 5. Hallar la función ponderal $\rho(x)$ para la ecuación (de Chébishev — Laguerre)

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

RESPUESTA. $\rho(x) = \exp(-x)$, $0 \leqslant x < \infty$.

§ 5.11. Integral de energía (de Dirichlet)

Supongamos que en el espacio (x, y, z) tenemos dado un contorno cerrado Γ' suficientemente suave, definido en la forma paramétrica por las ecuaciones

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s),$$
$$z = \chi(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant l). \qquad (1)$$

Designemos la proyección de Γ' sobre el plano (x, y)

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s) \qquad (2)$$

por Γ. Supondremos que Γ' se proyecta sobre el plano (x, y) biunívocamente, o sea, el contorno Γ es autodisjunto y limita cierta región Ω del plano (x, y) (fig. 123).

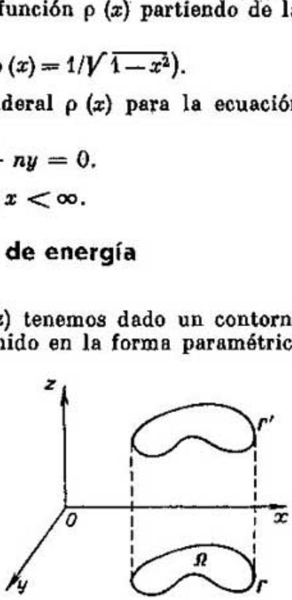

Fig. 123.

Supongamos que Γ' lleva tendida una membrana, es decir, una película que resiste a la tracción y no resiste a la flexión. Es necesario hallar su ecuación

$$z = u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \qquad (3)$$

El borde de la membrana está sujeto sobre Γ' y por eso la función $u(x, y)$ satisface la condición de frontera

$$u|_\Gamma = \chi(s) = u(\varphi(s), \psi(s)), \quad 0 \leqslant s \leqslant l. \qquad (4)$$

Se puede demostrar que la energía potencial de la membrana, con una precisión hasta el factor que caracteriza sus propiedades físicas, se expresa por la integral múltiple (doble)

$$D[u] = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \qquad (5)$$

la cual se llama *integral de Dirichlet* de la función $u(x, y)$.

Si con ayuda de las fuerzas externas damos a la membrana una forma distinta

$$z = v(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

dejándola sujeta en Γ', entonces su energía será igual a

$$D[v] = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy \tag{5'}$$

y ella misma, como antes, satisfará las condiciones de frontera

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = \chi(s) = v[\varphi(s), \psi(s)] \quad (0 \leqslant s \leqslant l). \tag{4'}$$

En este estado se encontrará todavía más tensa, por lo que $D[v] \geqslant \geqslant D[u]$.

Por consiguiente, $u(x, y)$ puede definirse como una función cuya integral de Dirichlet se convierte en mínimo entre las integrales de energía para todas las funciones indicadas v:

$$D[u] = \min_{v|_{\Gamma} = \chi(s)} D[v]. \tag{6}$$

Introduzcamos la clase W de funciones $v(x, y)$ que tengan las derivadas parciales continuas sobre $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ y satisfagan las mismas condiciones de frontera que u:

$$v|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}.$$

Existe un conjunto infinito de funciones v pertenecientes a la clase W. Una de ellas es la función buscada $u(x, y)$ que convierte $D[v]$ en mínimo entre todos los valores de $v \in W$:

$$D[u] = \min_{v \in W} D[v]. \tag{7}$$

Notemos que si a toda función f de la clase de funciones E ($f \in E$) se le hace corresponder, en virtud de cierta ley, el número $F(f)$, entonces se dice que $F(f)$ es la *funcional* definida sobre la clase de las funciones E.

La integral de Dirichlet $D[v]$ es un ejemplo de la funcional definida sobre la clase de funciones W.

Para las funcionales, al igual que para las funciones habituales, se puede examinar la teoría de los extremos llamada *cálculo de variaciones*. Se denomina *incremento* o *variación del argumento de la funcional* $F(f)$ la diferencia entre dos funciones pertenecientes a la clase E:

$$\delta f = f(x) - f_1(x).$$

Por analogía con el concepto de diferencial de una función

$$df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha \Delta x)\Delta x|_{\alpha=0} = f'(x)\, \Delta x$$

(donde α es un número real arbitrario) se puede introducir el concepto de *variación de una funcional*

$$\delta F = \frac{\partial}{\partial \alpha} F(f(x) + \alpha \delta f)|_{\alpha=0}.$$

Se dice que la funcional $F(f)$ *alcanza el mínimo (el máximo)* sobre la función $f_0(x)$ si $F(f) \geqslant F(f)$ $(F(f) \leqslant F(f_0))$. Tiene lugar la afirmación: *si una funcional que tiene la variación δF alcanza el mínimo (máximo) sobre la función $f = f_0$, entonces*

$$\delta F(f_0) = 0.$$

En efecto, para $f_0(x)$ y δf fijas la funcional $F(f_0(x) + \alpha\delta f) = \varphi(\alpha)$ es la función de una sola variable α y esta función, cuando $\alpha = 0$, alcanza el mínimo (máximo); por consiguiente, $\varphi'(0) = 0$ o bien $\frac{\partial}{\partial \alpha} F(f_0(x) + \alpha\delta f)|_{\alpha=0} = 0$, o sea,

$$\delta F(f_0(x)) = 0. \tag{8}$$

Ahora bien, (8) es la condición necesaria del extremo de la funcional.

Retornemos a la integral de Dirichlet. Introduzcamos, además, una clase auxiliar $\mathfrak{M}_0$ de funciones w que tengan derivadas parciales continuas sobre $\overline{\Omega}$ y sean iguales a cero sobre Γ:

$$w|_\Gamma = 0.$$

Si la función v tiene la forma

$$v = u + w, \quad w \in \mathfrak{M}_0,$$

entonces, evidentemente, pertenece a W. Inversamente, toda función $v \in W$ se puede escribir en la forma

$$v = u + (v - u) = u + w, \quad w \in \mathfrak{M}_0,$$

porque

$$w|_\Gamma = (v - u)|_\Gamma = v|_\Gamma - u|_\Gamma = \chi(s) - \chi(s) = 0.$$

Por eso la igualdad (7) puede escribirse, además, en la forma

$$D[u] = \min_{w|_\Gamma = 0} D[u + w]. \tag{9}$$

El problema de determinación del mínimo (9) se llama *problema de variación*. Las funciones $w \in \mathfrak{M}_0$ se denominan *variaciones* (variaciones del argumento de la funcional $D[v]$).

Para la función u se alcanza el mínimo de la integral de Dirichlet en la clase W: la adición de la variación arbitraria w a la función u saca la integral de Dirichlet del mínimo: llega a ser más grande.

Asignemos una función arbitraria $w \in \mathfrak{M}_0$. Si la multiplicamos por cualquier número λ, volvemos a obtener la función $\lambda w \in \mathfrak{M}_0$, por eso $D[u + \lambda w] \geqslant D[u]$, $\forall\lambda$. Pero

$$D[u+\lambda w] = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial(u+\lambda w)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(u+\lambda w)}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + 2\lambda \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right] dx\,dy +$$

$$+ \lambda^2 \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy =$$

$$= D[u] + 2\lambda D[u, w] + \lambda^2 D[w], \quad (10)$$

donde hemos introducido la designación

$$D[u, w] = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Como $u + \lambda w \in W$, tiene lugar la desigualdad $D[u + \lambda w] \geqslant D[u]$ para cualesquiera λ la cual se convierte en igualdad cuando $\lambda = 0$. Por eso la función $D[u + \lambda w]$ de λ se convierte en mínimo cuando $\lambda = 0$.

Pero entonces (véase (10); véase también (8))

$$\frac{d}{d\lambda} D[u+\lambda w]|_{\lambda=0} = \{2D[u, w] + 2\lambda D[w]\}|_{\lambda=0} = 2D[u, w] = 0$$

y queda demostrado que la función buscada u satisface la ecuación

$$D[u, w] = 0$$

o bien la ecuación

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right] dx\,dy = 0 \quad (11)$$

para todos los valores de $w \in \mathfrak{M}_0$. La ecuación (11) se llama *ecuación en variaciones*.

Para calcular la integral

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\, dx\,dy$$

integramos primero respecto a x para y fija. Integrando por partes, tenemos (fig. 124)

$$\int\limits_{\sigma_y} \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}\,w\Big|_A^B + \frac{\partial u}{\partial x}\,w\Big|_C^D - \int\limits_{\sigma_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,w\,dx = -\int\limits_{\sigma_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,w\,dx,$$

donde σ_y es la sección Ω de la recta compuesta por los puntos que tienen la ordenada y. En la fig. 124 σ_y consta de dos segmentos

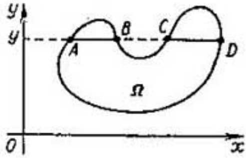

Fig. 124.

$[A,\ B]$ y $[C,\ D]$. Es necesario tener en cuenta que la función w es igual a cero en los puntos A, B, C y D que se hallan sobre Γ. Por lo tanto

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy = -\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,w\,dx\,dy.$$

Por analogía, integrando primeramente respecto a y y luego respecto a x, obtenemos

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,dy\,dx = -\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,w\,dx\,dy.$$

En tal caso de (11) se deduce que

$$\iint\limits_{\Omega} w\Delta u\,dx\,dy = 0 \tag{12}$$

para todos los valores de $w \in \mathfrak{M}_0$, donde Δ es el operador de Laplace. Pero entonces

$$\Delta u = 0, \quad \forall\ (x,\ y) \in \Omega.$$

En efecto, si se admite que $\Delta u \neq 0$ al menos en un solo punto $(x_0,\ y_0) \in \Omega$, entonces, en virtud de la continuidad de la función Δu existe el entorno $U(\delta)$ del punto $(x_0,\ y_0)$ de radio δ donde la función Δu conserva el signo del número $\Delta u\,(x_0,\ y_0)$ el cual consideraremos positivo. Entonces, tomando en calidad de la función $w \in \mathfrak{M}_0$ la función

$$w(x, y) = \begin{cases} [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\delta^2]^2, & (x, y) \in U(\delta), \\ 0 & (x, y) \in \Omega \setminus U(\delta), \end{cases}$$

obtenemos que

$$\iint_{\Omega} w\Delta u \, dx \, dy = \iint_{U(\delta)} w\Delta u \, dx \, dy > 0,$$

lo cual contradice (12).

Así, pues, hemos demostrado que la función $z = u(x, y)$ que describe la membrana satisface sobre Ω la ecuación de Laplace, es decir, u es la función armónica sobre Ω. La determinación de $u(x, y)$ se ha reducido al problema de Dirichlet: se requiere hallar una función $u(x, y)$, armónica sobre Ω, que sea continua sobre $\overline{\Omega}$ y satisfaga la condición de frontera (4).

Nota. Se considera sobreentendido el hecho de que la función u tenga sobre $\overline{\Omega}$ derivadas continuas de segundo orden, para que sea legítimo efectuar los cálculos citados anteriormente.

En efecto, esto tiene lugar, en todo caso, si las funciones φ, ψ y χ tienen las derivadas terceras continuas respecto al parámetro s.

§ 5.12. Aplicación de las transformaciones de Fourier

Más abajo se exponen ejemplos de aplicación de las transformaciones de Fourier resolviendo los problemas de la física matemática.

Supongamos que la función $f(x)$ tiene sobre el rayo $[0, \infty]$ la derivada segunda continua y se cumplen las condiciones

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Entonces

$$\int_0^\infty f''(x) \operatorname{sen} px \, dx = f'(x) \operatorname{sen} px \Big|_0^\infty - p \int_0^\infty f'(x) \cos px \, dx =$$

$$= -p \int_0^\infty f'(x) \cos px \, dx = -pf(x) \cos px \Big|_0^\infty - p^2 \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} px \, dx =$$

$$= pf(0) - p^2 \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} px \, dx$$

y queda demostrada la igualdad

$$\int_0^\infty f''(x)\,\text{sen}\,px\,dx = pf(0) - p^2 \int_0^\infty f(x)\,\text{sen}\,px\,dx. \tag{1}$$

Análogamente,

$$\int_0^\infty f''(x)\cos px\,dx = f'(x)\cos px\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f'(x)\,\text{sen}\,px\,dx =$$

$$= f'(0) + p\int_0^\infty f'(x)\,\text{sen}\,px\,dx = f'(0) + pf(x)\,\text{sen}\,px\Big|_0^\infty -$$

$$- p^2 \int_0^\infty f(x)\cos px\,dx = f'(0) - p^2 \int_0^\infty f(x)\cos px\,dx.$$

o sea, tiene lugar la igualdad

$$\int_0^\infty f''(x)\cos px\,dx = f'(0) - p^2 \int_0^\infty f(x)\cos px\,dx. \tag{2}$$

Desde luego, suponemos que las integrales impropias que forman parte de las igualdades (1) y (2) existen sobre $[0, \infty)$.

§ 5.12.1. Ecuación de conducción del calor

En calidad de ejemplo de aplicación de una seno transformación examinemos la ecuación de conducción del calor (véase el § 5.5) para una barra semiinfinita:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0,\ t > 0) \tag{3}$$

para la condición de frontera

$$u = u_0 \ \text{ cuando } \ x = 0,\ t > 0 \tag{4}$$

y para la condición inicial

$$u = 0 \ \text{ cuando } \ t = 0,\ x > 0. \tag{5}$$

Estimamos que u, $\frac{\partial u}{\partial x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Esto no contradice las consideraciones físicas. Por eso tenemos la posibilidad de aplicar la seno transformación.

Así, pues, sea

$$u_s = u_s(p, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x, t) \operatorname{sen} px \, dx \tag{6}$$

la seno transformación de la solución buscada del problema anteriormente puesto.

Multiplicando la ecuación (3) por $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} px$ e integrándola respecto a x entre los límites de 0 a ∞ obtenemos (teniendo en cuenta (4), (5) y (6)):

$$\frac{du_s}{dt} = k\left(p \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_0 - p^2 u_s\right), \quad t > 0; \tag{7}$$

$$u_s = 0 \text{ cuando } t = 0. \tag{8}$$

Ahora bien, hemos reducido el problema a la resolución de una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden. La solución limitada de la ecuación (7), que satisface la condición (8), tiene la forma

$$u_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u_0}{p} [1 - \exp(-p^2 kt)].$$

La fórmula de la inversión (véase el § 4.13, (3)) da

$$u(x, t) = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^\infty [1 - \exp(-p^2 kt)] \operatorname{sen} px \frac{dp}{p}. \tag{9}$$

Como sabemos (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 6.10), la integral $\int_0^\infty \operatorname{sen} px \frac{dp}{p}$ converge y, además, (véase más abajo el § 6.14, ejemplo 2)

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} px}{p} dp = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Por eso

$$u = u_0 \left[1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-p^2 kt) \operatorname{sen} px \frac{dp}{p}\right]. \tag{11}$$

Es útil comprobar que la función (11) satisface realmente nuestra ecuación. Al comprobar esto es necesario argumentar la legitimidad de la derivación respecto al parámetro de las respectivas integrales impropias.

Cuando $t = 0$, la integral en el segundo miembro de (11) es igual a $\frac{\pi}{2}$ en virtud de (10). Por eso se cumple la condición inicial (5).

Cuando $x = 0$, esta integral es igual a cero y $u = u_0$, o sea, se cumple la condición de frontera (4).

La integral en (11) converge cuando $t > 0$, porque

$$\int_0^\infty \exp(-p^2kt) \left| \frac{\operatorname{sen} px}{p} \right| dp \leqslant x \int_0^\infty \exp(-p^2kt)\, dp < \infty.$$

Derivando formalmente la igualdad (11) respecto a la variable t, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty p^2 \exp(-p^2kt) \operatorname{sen} px \frac{dp}{p}. \tag{12}$$

Para argumentar la legitimidad de la derivación formal cuando $t > 0$, es necesario asignar un segmento arbitrario $[a, b]$ de variación de t, donde $a > 0$, y demostrar que la integral (12) converge uniformemente sobre este segmento para el valor fijo de $x \geqslant 0$ (véase el teorema 2, § 2.15).

Puesto que $|\operatorname{sen} px| \leqslant px$, entonces, cuando el valor fijo de $x \geqslant 0$, se cumple la desigualdad

$$\int_0^\infty p^2 \exp(-p^2kt) |\operatorname{sen} px| \frac{dp}{p} \leqslant x \int_0^\infty p^2 \exp(-p^2ka)\, dp,$$

donde la integral en el segundo miembro es convergente y no depende de t. Pero entonces la integral (12) converge uniformemente sobre $[a, b]$ y, en virtud del criterio de Weierstrass de la convergencia uniforme de la integral impropia, la derivación formal de (11) es legítima y la fórmula (12) realmente tiene lugar.

De un modo semejante puede ser fundamentada la legitimidad de la derivación formal al obtener la derivada parcial $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Análogamente, utilizando la transformación compleja de Fourier, se puede resolver el problema de conducción del calor para una barra infinita en ambas direcciones $-\infty < x < \infty$ (véase el § 5.6, donde la solución del problema se ha obtenido por el método de Fourier de separación de las variables).

§ 5.12.2. Ecuación de vibración de una cuerda infinita

Como hemos determinado en el § 5.7 la ecuación de vibración de una cuerda tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(-\infty<x<\infty,\ t>0). \tag{13}$$

Resolvamos la ecuación (13) para las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} &u=f(x),\\ &\frac{\partial u}{\partial t}=0, \end{aligned}\right\}(t=0,\ -\infty<x<\infty). \tag{14}$$

Supongamos que la función $f(x)$ es tal que todos los cálculos que realicemos a continuación serán legítimos.

Sea

$$\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,\ t)\,e^{ixp}\,dx$$

la transformación compleja (inversa) de Fourier de la función $u(x,\ t)$

Integrando por partes (al suponer que u y $\frac{\partial u}{\partial x}$ se anulan cuando $x=\pm\infty$), obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx=-p^2\hat{u}. \tag{15}$$

Multiplicando la ecuación (13) por e^{ipx}, al utilizar las condiciones iniciales (14), e integrando respecto a x entre los límites de $-\infty$ a $+\infty$, al utilizar (15), obtenemos la ecuación auxiliar

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2}=-a^2p^2\hat{u}\quad(t>0). \tag{16}$$

Las condiciones iniciales se escribirán

$$\left.\begin{aligned} &\hat{u}=\hat{f}(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,e^{ipz}\,dz,\\ &\frac{d\hat{u}}{dt}=0, \end{aligned}\right\}\text{cuando}\quad t=0. \tag{17}$$

Resolviendo la ecuación (16) (una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes), obtenemos

$$\hat{u}=\hat{f}(p)\cos apt.$$

La fórmula de la inversión (véase el § 4.12, (19)) da

$$u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixp}\hat{f}(p)\cos apt\,dp=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixp}\,\frac{e^{iatp}+e^{-iatp}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{ipz}\,dz\,dp=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-ip(x-at)}+e^{ip(x+at)}]\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{ipz}\,dz\,dp=$$

$$=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)].$$

Ahora bien, hemos obtenido que

$$u=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)],$$

o sea, hemos obtenido la fórmula de d'Alembert para el problema dado (véase el § 5.8, (11)).