

Capítulo 6

Teoría de las funciones de una variable compleja

§ 6.1. Concepto de función de una variable compleja

Hemos examinado el concepto de número complejo en nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», capítulo 5. Allí mismo han sido examinados los polinomios $Q_n(z)$ de una variable compleja. Los polinomios son un ejemplo elemental de funciones de una variable compleja.

Hemos convenido en representar los números complejos mediante los puntos del plano donde está dado el sistema rectangular de coordenadas.

Definamos el concepto de *función de una variable compleja*.

Sean dados dos planos de números complejos $z = x + iy$ y $w = u + iv$ (fig. 125). Examinemos cierto conjunto de los puntos D

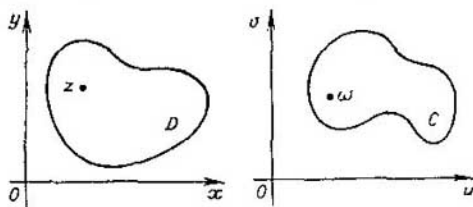


Fig. 125.

en el plano z y cierto conjunto G en el plano w . Si, según cierta ley, a cada número $z \in D$ se le hace corresponder un número complejo determinado $w \in G$, entonces se dice que sobre el conjunto D está *definida una función unívoca de una variable compleja, función que aplica el conjunto D en el conjunto G* . Simbólicamente esto se designa así:

$$w = f(z).$$

El conjunto D se llama *dominio de definición* de la función $f(z)$. Si cada punto del conjunto G es un valor de la función, se dice que G es el *campo de valores* de esta función o bien *imagen del conjunto D* con ayuda de la función f ($G = f(D)$). En este caso se dice, además, que la función f *aplica D sobre G* .

La función $f(z)$ se puede escribir en la forma

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

donde

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(z), \\ v(x, y) &= \operatorname{Im} f(z) \end{aligned} \quad (x, y) \in D,$$

son las funciones reales de las variables x e y .

Si a cada $z \in (D)$ le corresponden varios valores diferentes de w , la función $w = f(z)$ se denomina *multiforme*.

Los conceptos de límite y de continuidad de una función de una variable compleja se introducen de modo análogo a cómo esto se hace para una función de una variable real; es necesario sólo por doquier en vez del valor absoluto escribir el módulo del número complejo.

Se dice que la función

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

tiene el límite en el punto z_0 , igual al número $A = a + ib$, si

$$\lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} |f(z) - A| = 0. \quad (1)$$

En este caso se escribe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

En el lenguaje de las funciones u y v la propiedad (1) se escribe en forma de la igualdad

$$\lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} \sqrt{(u-a)^2 + (v-b)^2} = 0 \quad (2)$$

o bien, lo que es lo mismo, en forma de dos igualdades ¹⁾

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = a, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = b. \quad (3)$$

Para las funciones complejas $f(z)$ y $g(z)$ tienen lugar las propiedades análogas a las propiedades correspondientes de las funciones reales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) g(z)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} \quad (\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

¹⁾ Véase la definición del límite de una función de dos variables en nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 8.3.

Como siempre, las fórmulas (4) deben entenderse de modo que si existen los límites que están en sus segundos miembros, entonces existen también los límites que están en sus primeros miembros y se cumple la igualdad respectiva.

La función $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ se llama *continua* en el punto z_0 si para ella se cumple la propiedad

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (5)$$

Ahora bien, una función continua en el punto z_0 debe estar definida en el entorno de este punto, inclusive en este mismo punto, y debe cumplirse la igualdad (5). La igualdad (5) es equivalente a dos igualdades:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Por consiguiente, la continuidad de f en el punto z_0 es equivalente a la continuidad de las funciones u y v en el punto (x_0, y_0) .

De las propiedades (4) resulta que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de las funciones complejas $f(z)$ y $g(z)$, continuas en el punto z_0 , es una función continua en este punto. Si se trata del cociente, en esta enunciación es necesario suponer que $g(z_0) \neq 0$.

EJEMPLO 1. La función $w = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ se da sobre todo el plano complejo. Sus valores son números no negativos. Esta función es continua en todos los puntos del plano complejo:

$$\|z + \Delta z - z\| \leq |\Delta z| \rightarrow 0 \quad (\Delta z \rightarrow 0).$$

EJEMPLO 2.

$$w = \text{Arg } z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots). \quad (6)$$

Es una función multiforme (infinitiforme); $\varphi = \arg z$ es el valor principal del argumento ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

EJEMPLO 3. La función $w = z$. Es continua:

$$|z + \Delta z - z| = |\Delta z| \rightarrow 0 \quad (\Delta z \rightarrow 0).$$

Pero entonces también la función z^n ($n = 2, 3, \dots$) es continua como producto de un número finito de funciones continuas.

Llamaremos *región* al conjunto de los números complejos D , si este conjunto de puntos del plano es abierto y conexo. La región D se denomina *simplemente conexa*, si toda curva cerrada continua autodisjunta, trazada en D , limita cierta región G perteneciente por completo a D . Llamaremos a la región que no posee esta propiedad *múltiplemente conexa*.

· EJEMPLO 4. El anillo $r < |z| < R$ es una región múltiplemente conexa (doblemente conexa). La curva L (fig. 126) pertenece al

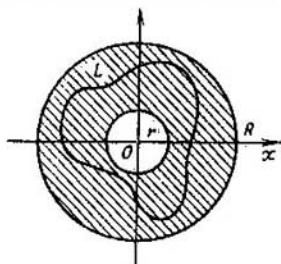


Fig. 126.

anillo, pero limita una región que no forma por completo parte de éste.

§ 6.2. Derivada de la función de una variable compleja

Supongamos que está dada la función uniforme $w = f(z)$ sobre la región D (un conjunto conexo abierto) del plano complejo z .

Se llama *derivada de la función $f(z)$ en el punto z* el límite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{dw}{dz} \quad (1)$$

cuando Δz de un modo cualquiera tiende a cero.

Ni mucho menos toda función de una variable compleja puede ser derivada. La existencia del límite (1) es una exigencia muy fuerte: acercándose $z + \Delta z$ a z por una ruta cualquiera, cada vez debe existir el límite indicado en (1).

La función $f(z)$ que tiene la derivada continua en todo punto de la región D de un plano complejo se denomina *función analítica sobre esta región*.

Se puede demostrar que si la derivada de la función analítica $f(z)$ no es igual a cero sobre la región D , entonces el conjunto de los valores G de la función $f(z)$ asimismo será una región. Hagamos uso de esta propiedad.

Representemos geoméricamente la derivada $f'(z)$ cuando ésta no es igual a cero. Introduzcamos, además del plano z , un plano más de los puntos w . Describamos desde el punto z el círculo abierto σ de radio $\delta > 0$ que tiene por centro este mismo punto (fig. 127).

El punto arbitrario σ tiene la forma $z + \Delta z$, donde Δz es un número complejo arbitrario cuyo módulo es menor que δ : $|\Delta z| < \delta$. Escribamos Δz en la forma potencial

$$\Delta z = \rho e^{i\theta} \quad (\rho > 0). \quad (2)$$

Con ayuda de la función $w = f(z)$ el círculo σ se transforma en cierta región σ' del plano w . La región σ' se compone de los puntos $w + \Delta w$,

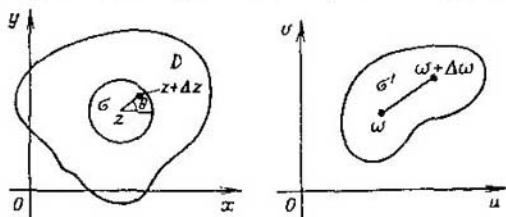


Fig. 127.

donde los incrementos Δw corresponden a todos los incrementos posibles indicados Δz ($|\Delta z| < \delta$) (véase la fig. 127).

De (1) se deduce la igualdad

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(\Delta z), \quad \text{donde } \alpha(\Delta z) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0.$$

Multiplicando los miembros primero y segundo de la última igualdad por Δz , obtenemos

$$\Delta w = f'(z) \Delta z + \Delta z \cdot \alpha(\Delta z). \quad (3)$$

El producto $\Delta z \cdot \alpha(\Delta z)$ tiende a cero con mayor rapidez que Δz cuando $\Delta z \rightarrow 0$. Por eso, si $f'(z) \neq 0$, el primer término del segundo miembro de (3) es *principal*. Aproximadamente, con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior (en comparación con Δz), siendo Δz bastante pequeños, se puede escribir

$$\Delta w \approx f'(z) \Delta z.$$

Vamos a escribir el número $f'(z)$ en la forma exponencial

$$f'(z) = r e^{i\varphi} \quad (r > 0). \quad (4)$$

Por eso, teniendo en cuenta (2), obtenemos

$$\Delta w \approx r \rho e^{i(\varphi + \theta)} \quad (|\Delta z| = \rho < \delta).$$

Vemos que el módulo $|\Delta w|$, con una exactitud hasta un infinitésimo de orden superior, es $r = |f'(z)|$ veces mayor que el módulo $|\Delta z|$:

$$|\Delta w| \approx r \rho = r |\Delta z|$$

y el argumento Δw (asimismo con una exactitud hasta un infinitésimo de orden superior) se obtiene del argumento Δz , adicionándole el número φ (fig. 128):

$$\text{Arg}(\Delta w) \approx \text{Arg}(\Delta z) + \varphi.$$

Ahora bien, para imaginarse a dónde han pasado los puntos $z + \Delta z$, con $|\Delta z| < \delta$, con ayuda de la función $w = f(z)$ es necesario:

1) hacer girar el círculo σ en el ángulo $\varphi = \arg f'(z)$ y 2) estirarlo $r = |f'(z)|$ veces. Con ayuda de estas dos operaciones cada punto $z + \Delta z$, $|\Delta z| < \delta$, se transformará en cierto punto el cual se debe, además, desplazar en la magnitud $\Delta z \cdot \alpha$ (Δz), o sea, en un infinitésimo de un orden superior a Δz .

Sean Γ_1 y Γ_2 las curvas suaves que salen del punto z . Las tangentes a estas curvas forman con el eje x los ángulos θ_1 y θ_2 , respectivamente, (que se leen a partir del eje x en el sentido contrario al de las agujas del reloj).

Las imágenes de estas curvas Γ'_1 y Γ'_2 sobre el plano w (fig. 129), con ayuda de la función $w = f(z)$, tienen las tangentes en el punto w que forman con el eje de abscisas los ángulos θ'_1 y θ'_2 ,

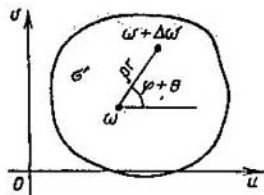


Fig. 128.

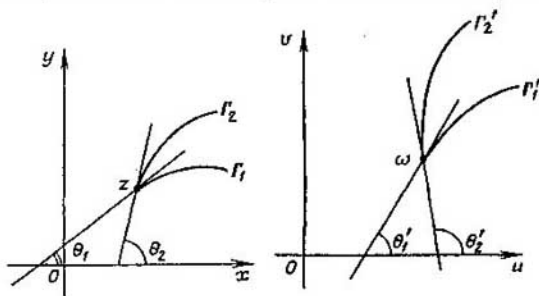


Fig. 129.

respectivamente, (que asimismo se leen en el sentido contrario al de las agujas del reloj). Además, (en virtud de la propiedad 1))

$$\theta'_1 = \theta_1 + \varphi, \quad \theta'_2 = \theta_2 + \varphi,$$

de donde se deduce la propiedad

$$\theta'_2 - \theta'_1 = \theta_2 - \theta_1$$

que expresa, como se dice, que la *aplicación dada conserva los ángulos* con la particularidad de que queda invariable el sentido de la lectura (si $\theta_2 > \theta_1$, entonces $\theta'_2 > \theta'_1$).

Además, como hemos visto anteriormente, la aplicación dada realiza en cada punto z , donde $f'(z) \neq 0$ el estiramiento que no depende de la dirección.

La aplicación que posee (con una exactitud hasta infinitésimos de orden superior) la propiedad de conservar los ángulos (con la conservación del sentido de la lectura) y la propiedad de constancia de los estiramientos se llama *aplicación (transformación) conforme*.

De lo expuesto anteriormente resulta que la *aplicación con ayuda de la función analítica $w = f(z)$ es conforme en todos los puntos donde $f'(z) \neq 0$* .

Observación 1. Si la función $f(z)$ de la variable compleja z tiene por doquier sobre la región D la derivada $f'(z)$, entonces esta derivada es automáticamente continua por doquier sobre D , o sea, $f(z)$ es analítica sobre D . Haremos uso de esta afirmación, aunque no vamos a demostrarla.

Observación 2. De la igualdad (3) se deduce que si la función $f(z)$ tiene una derivada en el punto z , ella es continua en este punto.

La derivada de orden k de la función $f(z)$ se designa por $f^{(k)}(z)$ y se determina por inducción

$$(f^{(k-1)}(z))' = f^{(k)}(z) \quad (k = 1, 2, \dots; f^{(0)}(z) = f(z)).$$

Sabiendo que la función $f(z)$, analítica sobre la región D , posee la derivada continua sobre D , en adelante no será difícil sacar la conclusión de que $f(z)$ tiene sobre D las derivadas continuas de todo orden

$$f'(z), f''(z), f'''(z), \dots$$

Se usa, además, tal terminología: la función $f(z)$ se llama *analítica en el punto z_0* si es analítica en cierto entorno de este punto. Por último, se dice que la función $f(z)$ es analítica en la clausura \bar{D} de la región D , si existe la región G que contiene \bar{D} ($G \supset \bar{D}$) sobre la cual $f(z)$ es analítica.

Citémos las *principales propiedades de las derivadas* de funciones de una variable compleja que son análogas a las propiedades correspondientes de las derivadas para las funciones de una variable real y se demuestran de un modo análogo:

$$[u(z) \pm v(z)]' = u'(z) \pm v'(z), \quad (5)$$

$$[u(z)v(z)]' = u(z)v'(z) + u'(z)v(z), \quad (6)$$

$$\left[\frac{u(z)}{v(z)} \right]' = \frac{u'(z)v(z) - u(z)v'(z)}{v^2(z)} \quad (v(z) \neq 0), \quad (7)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dv} \frac{dv}{dz}. \quad (8)$$

La fórmula (8) debe entenderse así: si w es la función $w = \varphi(v)$ de la variable compleja v , función que tiene la derivada $\frac{dw}{dv} = \varphi'(v)$ y $v = \psi(z)$ es la función de la variable compleja z , función que tiene la derivada $\frac{dv}{dz} = \psi'(z)$ entonces la derivada de la función compuesta

$$w = F(z) = \varphi[\psi(z)]$$

se calcula por la fórmula (8).

A continuación citamos algunas funciones elementales de una variable compleja.

Función potencial

$$w = z^n,$$

donde n es un número entero.

Esta función tiene la derivada que se calcula por la fórmula

$$(z^n)' = nz^{n-1} \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, \dots).$$

Cuando $n > 0$, es cómodo calcularla como límite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1},$$

aplicando el binomio de Newton.

Cuando $n < 0$, se puede utilizar la fórmula (7).

Para $n \geq 0$ la función z^n es analítica sobre todo el plano z y para $n < 0$ es analítica sobre todo el plano, expulsando de él el punto $z = 0$.

Funciones e^z , $\operatorname{sen} z$, $\operatorname{cos} z$, $\operatorname{tg} z$.

Las primeras tres de estas funciones están definidas en nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 9.13, como sumas de las series de potencias:

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots, \\ \operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \\ \operatorname{cos} z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

El radio de convergencia de cada una de estas series es igual a ∞ . Por eso las derivadas de estas funciones pueden ser obtenidas, para cualquier z , por la derivación término a término de las series correspondientes:

$$\begin{aligned} (e^z)' &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = e^z, \\ (\operatorname{sen} z)' &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \operatorname{cos} z, \\ (\operatorname{cos} z)' &= -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots = -\operatorname{sen} z. \end{aligned}$$

Las fórmulas para las funciones trigonométricas de la suma de los argumentos complejos se mantienen las mismas que en el caso de una variable real.

La función $\operatorname{tg} z$ se determina por la fórmula

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z}.$$

Su derivada es igual a

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{\operatorname{cos}^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{cos}^2 z} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 z} \quad (\operatorname{cos} z \neq 0)$$

lo que se deduce de la fórmula (7).

La función a^z ($a > 0$) puede ser determinada por la fórmula

$$a^z = e^{z \ln a} = \exp(z \ln a).$$

Su derivada se calcula sobre la base de la fórmula (8) concierne a la derivada de una función compuesta

$$(a^z)' = (e^{z \ln a})' = e^{z \ln a} \ln a = a^z \ln a.$$

Las funciones hiperbólicas $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$ se definen por las fórmulas

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

De aquí se deduce que

$$\operatorname{sh} iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \operatorname{sen} z, \quad \operatorname{ch} iz = \operatorname{cos} z. \quad (9)$$

Sustituyendo en (9) z por iz , obtenemos

$$\operatorname{cos} iz = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{sen} iz = i \operatorname{sh} z. \quad (10)$$

Señalemos una fórmula más que es fácil de comprobar

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Las fórmulas de adición para las funciones hiperbólicas es fácil de obtenerlas de (9) y (10) y de las fórmulas respectivas para las funciones trigonométricas de una variable compleja. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(z_1 + z_2) &= \operatorname{cos} i(z_1 + z_2) = \\ &= \operatorname{cos} iz_1 \operatorname{cos} iz_2 - \operatorname{sen} iz_1 \operatorname{sen} iz_2 = \\ &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2. \end{aligned}$$

Las derivadas de estas funciones se calculan basándose en las fórmulas (5), (7) y (8):

$$(\operatorname{sh} z)' = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z,$$

$$(\operatorname{th} z)' = \frac{\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z}{\operatorname{ch}^3 z} = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 z} \quad (\operatorname{ch} z \neq 0).$$

EJEMPLO 1. Separar las partes real e imaginaria en la función $w = \cos z$ y hallar los ceros de esta función.

Sean $z = x + iy$ y $w = u(x, y) + iv(x, y)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \cos z = \cos(x + iy) &= \cos x \cos yi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy = \\ &= \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Así, pues, $u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$ y $v(x, y) = -\operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$. Para hallar los ceros de la función $\cos z$ debemos igualar a cero sus partes real e imaginaria:

$$\left. \begin{aligned} \cos x \operatorname{ch} y &= 0, \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Resolvamos este sistema. Puesto que $\operatorname{ch} y \neq 0$ para toda y real, entonces de la primera ecuación obtenemos $\cos x = 0$. De la segunda ecuación para $y \neq 0$ obtenemos $\operatorname{sen} x = 0$. Cuando las x son reales, el coseno y el seno no se convierten en cero simultáneamente, por eso para $y \neq 0$ el sistema no tiene soluciones. Si $y = 0$, entonces $\operatorname{sh} y = 0$ y la segunda ecuación se satisface para todo valor de x . Ahora bien, los ceros de la función $\cos z$ se encuentran sobre el eje real x y coinciden con los ceros de $\cos x$.

Observación 3. De esta afirmación se deduce que los ceros de la función $\operatorname{ch} z$ coinciden con los de la función $\cos y$, donde $y = \operatorname{Im} z$.

Observación 4. Notemos, además, que el § 6.15, dedicado a las funciones lineal y lineal fraccional, puede leerse también directamente después del presente párrafo.

§ 6.3. Condiciones de d'Alembert—Euler (de Cauchy—Riemann)

Examinemos la función compleja

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z \in D),$$

definida sobre la región D del plano complejo. Supongamos que su derivada en el punto $z \in D$ es

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (1)$$

Ahora bien, cualquiera que sea el procedimiento por el cual $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ tiende hacia cero, debe existir el límite (1) igual

a un mismo número complejo $f'(z)$. En particular, esto debe tener lugar si

$$a) \Delta z = \Delta x + i0 = \Delta x \quad \text{y} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

o bien si

$$b) \Delta z = 0 + i\Delta y = i\Delta y \quad \text{y} \quad \Delta y \rightarrow 0.$$

En el primer caso (véase el § 6.1, (3))

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

En el segundo caso

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] = \\ &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} = \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Pero entonces deben cumplirse las igualdades

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

que suelen llamarse *condiciones de Cauchy — Riemann*. Antes pensaban que fueron Cauchy y Riemann los primeros en obtener estas condiciones. Ahora se ha descubierto que ya las conocían Euler y d'Alembert.

De esta manera hemos demostrado el siguiente

TEOREMA 1. Si la derivada de la función

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

se encuentra en el punto $z = x + iy$, sus componentes reales u y v tienen en el punto (x, y) las derivadas parciales de primer orden que satisfacen la condición de Cauchy — Riemann.

El teorema 1 puede ser invertido, si suponemos además que las derivadas parciales de u y v son continuas.

TEOREMA 2. Si las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen en el punto (x, y) derivadas parciales continuas que satisfacen las condiciones de Cauchy—Riemann, entonces la función de la variable compleja $f(z) = u + iv$ tiene una derivada en el punto $z = x + iy$.

DEMOSTRACION. Supongamos que las funciones u y v tienen las derivadas parciales continuas en el punto (x, y) . Entonces son derivables en este punto, o sea, sus incrementos, correspondientes a los incrementos Δx , Δy , pueden ser escritos en la forma

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o_1(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta v &= v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o_2(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0),\end{aligned}$$

donde $\rho = |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o_1(\rho)$ y $o_2(\rho)$ ($\rho \rightarrow 0$) son las funciones infinitésimas cuya pequeñez es de un orden superior a ρ , o sea, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o_j(\rho)}{\rho} = 0$ ($j = 1, 2$). Por eso, teniendo en cuenta que $o_1(\rho) + io_2(\rho) = o(\rho)$ ($\rho \rightarrow 0$), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + \frac{o(\rho)}{\Delta z}}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x} (-\Delta y + i\Delta x)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + o(1),\end{aligned}$$

porque $\left| \frac{\rho}{\Delta z} \right| = \frac{\rho}{|\Delta z|} = 1$. El símbolo $o(1)$ designa la función infinitésima cuando $\rho \rightarrow 0$. Así, pues,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

o sea, la función f tiene en el punto z la derivada que es igual a

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Utilizando las condiciones (2), se puede obtener también otras formas para expresar la derivada $f'(z)$. El teorema queda demostrado.

Si tenemos en cuenta que la existencia de la derivada $f'(z)$ sobre la región D conlleva automáticamente su continuidad sobre D , de los teoremas 1 y 2 se deduce el siguiente

TEOREMA 3. Para que la función

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

sea analítica sobre la región D del plano z es necesario y suficiente que las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v sean continuas sobre D y se cumplan las condiciones de Cauchy — Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad ((x, y) \in D).$$

Las funciones u y v se llaman *conjugadas una a otra sobre D* .

EJEMPLO 1. Las funciones $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ no son analíticas sobre el plano z . En efecto, cada una de ellas puede ser escrita en la forma $f(z) = u + iv$, donde $u \neq 0$ y $v \equiv 0$ son las funciones reales que, evidentemente, no satisfacen las condiciones de Cauchy — Riemann.

EJEMPLO 2. Comprobar el cumplimiento de las condiciones de Cauchy — Riemann para las partes real e imaginaria de la función $w = \cos z$.

En el ejemplo 1, § 6.2, hemos mostrado que

$$u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v(x, y) = -\operatorname{sen} x \operatorname{sh} y,$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\operatorname{sen} x \operatorname{ch} y, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \cos x \operatorname{sh} y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\cos x \operatorname{sh} y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\operatorname{sen} x \operatorname{ch} y. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\forall x, y),$$

o sea, las condiciones de Cauchy — Riemann están cumplidas.

Puesto que las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v son continuas para cualesquiera puntos (x, y) , la función $w = \cos z$ es analítica sobre todo el plano complejo.

PROBLEMA 1. Escribir las funciones e^z , $\operatorname{sen} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, z^n (n es un número natural) en la forma

$$f(z) = u + iv,$$

donde $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$, y cerciorarse de que satisfacen las condiciones de Cauchy — Riemann.

Observación 1. Si la función $f(z)$ se representa en la forma

$$f(z) = R(x, y) \exp(i\Phi(x, y)),$$

donde R es el módulo y Φ , el argumento de la función $f(z)$, entonces las condiciones de Cauchy — Riemann tienen el aspecto

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

§ 6.4. Funciones armónicas

Supongamos que sobre la región D del plano z está dada la función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Entonces, como ya hemos señalado en el § 6.2, la función $f(z)$ tiene sobre D las derivadas continuas de cualquier orden. Pero en este caso las funciones u y v tienen sobre D las derivadas parciales continuas de cualquier orden y las derivadas primeras satisfacen las condiciones de Cauchy — Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

de las cuales resulta que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Sumando estas igualdades, obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

El primer miembro de la ecuación (2) se designa por el símbolo

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

La ecuación

$$\Delta u = 0 \quad (3)$$

se llama *ecuación de Laplace*. El símbolo $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ se denomina *operador de Laplace*.

La función u que posee derivadas parciales continuas de segundo orden sobre D y satisface la ecuación de Laplace (3) ha recibido el nombre de *armónica sobre D* .

Pues, hemos establecido que la *parte real de una función analítica sobre D es la función armónica sobre D* .

Si la primera igualdad en (1) se deriva respecto a y y la segunda respecto a x y se sustruye la segunda igualdad de la primera, se obtiene

$$\Delta v = 0,$$

o sea, la parte imaginaria de una función analítica es también una función armónica.

No obstante, la función $f(z) = u + iv$, donde u y v son funciones arbitrarias armónicas sobre D , no es siempre analítica sobre D . Será analítica sólo si las funciones u y v satisfacen sobre D las condiciones de Cauchy — Riemann.

Mostremos que si D es una región simplemente conexa, entonces para toda función $u(x, y)$ armónica sobre D existe, con una exactitud hasta una constante arbitraria, la función v , conjugada a la u sobre D , tal que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

es analítica sobre D .

Sea dada sobre D la función armónica $u(x, y)$. Pongamos

$$P(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Por cuanto u tiene sobre D las derivadas parciales continuas de segundo orden que satisfacen la ecuación de Laplace, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

De la igualdad obtenida

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ sobre } D$$

y de la conexión simple de D se deduce (véase el § 3.4) que la integral curvilínea

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} (P dx + Q dy) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = v(x, y) \quad (4)$$

tomada a lo largo de una ruta suave a trozos cualquiera $L \subset D$ que une los puntos (x_0, y_0) y (x, y) , depende de estos puntos, pero no depende de la forma de la ruta. En este caso v es una función potencial para el vector (P, Q) sobre D , o sea,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = P = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = Q = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5)$$

Esto muestra que v tiene las derivadas parciales continuas sobre D que satisfacen junto con u las condiciones de Cauchy — Riemann. Pero entonces u y v son las funciones conjugadas una a la otra.

Si v_1 es otra función conjugada a u sobre D , entonces

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6)$$

De (5) y (6) se deduce

$$\frac{\partial(v_1 - v)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(v_1 - v)}{\partial y} = 0 \text{ sobre } D.$$

Pero entonces $v_1 - v = C$ sobre D , donde C es la constante. La afirmación queda demostrada.

EJEMPLO 1. La función $u = x^2 - y^2$ satisface, evidentemente, la ecuación $\Delta u = 0$. Hallar la función analítica $f(z)$, en la cual $\operatorname{Re} f(z) = u$.

Determinemos la parte imaginaria de esta función por la fórmula (4) (fig. 130):

$$\begin{aligned} v &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2y dx + 2x dy) = \\ &= \int_0^x (2 \cdot 0 dx + 2x \cdot 0) + \int_0^y (2y \cdot 0 + 2x dy) = \int_0^y 2x dy = 2xy + C. \end{aligned}$$

Entonces la función $f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + C) = z^2 + iC$ es analítica en todo el plano complejo.

EJEMPLO 2. La función $w = z = x + iy$ es analítica sobre el plano z . Por consiguiente, las funciones $u = x$, $v = y$ son armónicas y satisfacen las condiciones de Cauchy — Riemann sobre el plano z . Esto se puede comprobar directamente.

EJEMPLO 3. Las funciones $u = x$, $v = -y$ son armónicas, pero las condiciones de Cauchy — Riemann en este caso no se cumplen, por eso la función $f(z) = x + i(-y) = \bar{z}$ no es analítica.

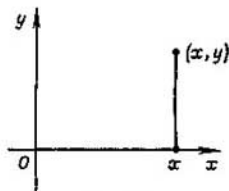


Fig. 130.

Vamos a convencernos de esto directamente: $w = \bar{z} = x - iy$,

$$\Delta w = \overline{(z + \Delta z)} - \bar{z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} - \bar{z} = \overline{\Delta z}, \quad \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i \Delta y}{\Delta x + i \Delta y}.$$

Escojamos dos rutas de acercamiento del punto $z + \Delta z$ al punto z , a saber, a) $\Delta x = 0$, $\Delta y \rightarrow 0$; b) $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y = 0$. Entonces:

$$\text{en el caso a) } \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{-i \Delta y}{i \Delta y} = -1, \text{ o sea, } \frac{\Delta w}{\Delta z} \rightarrow -1;$$

$$\text{en el caso b) } \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \text{ o sea, } \frac{\Delta w}{\Delta z} \rightarrow 1.$$

Ahora bien, cuando $\Delta z \rightarrow 0$ el límite de $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ no existe y la función $w = \bar{z}$ no tiene la derivada en ningún punto del plano.

Observación 1. En las coordenadas polares $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ la función armónica $u(x, y)$ se transformará en cierta función nueva respecto a las coordenadas ρ y θ

$$u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \omega(\rho, \theta).$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned}\omega'_\rho &= u'_x \cos \theta + u'_y \sin \theta, \\ \omega''_{\rho^2} &= u''_{xx} \cos^2 \theta + 2u''_{xy} \cos \theta \sin \theta + u''_{yy} \sin^2 \theta, \\ \omega'_\theta &= -u'_x \rho \sin \theta + u'_y \rho \cos \theta, \\ \omega''_{\theta^2} &= u''_{xx} \rho^2 \sin^2 \theta - 2u''_{xy} \rho^2 \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad + u''_{yy} \rho^2 \cos^2 \theta - \rho u''_{xx} \cos \theta - \rho u''_{yy} \sin \theta,\end{aligned}$$

de donde

$$\omega''_{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \omega'_\rho + \frac{1}{\rho^2} \omega''_{\theta^2} = u''_{xx} + u''_{yy} = \Delta u = 0.$$

En relación con esta ecuación se escribe

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

y el segundo miembro de esta igualdad simbólica se llama operador de Laplace en las coordenadas polares. Hemos demostrado que

$$\Delta \omega(\rho, \theta) = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right).$$

§ 6.5. Función inversa

Supongamos que está dada la función analítica

$$w = f(z), \quad (z \in D), \quad (1)$$

que aplica la región D del plano z sobre la región G del plano w de un modo biunívoco. Esto significa que a cada $z \in D$ le corresponde, con ayuda de la función (1), un valor de $w \in G$ y, además, cada $w \in G$, en virtud de esta ley, corresponde solamente a un valor de $z \in D$. De esta manera sobre G queda definida la función unívoca

$$z = \varphi(w), \quad (w \in G), \quad (2)$$

que posee la propiedad consistente en que

$$f[\varphi(w)] = w \quad (w \in G).$$

Evidentemente tiene lugar también otra igualdad

$$\varphi[f(z)] = z \quad (z \in D).$$

La función $z = \varphi(w)$ se llama *función inversa* a $w = f(z)$ ($z \in D$). Mostremos que si

$$f'(z) \neq 0 \quad (z \in D),$$

entonces la función $z = \varphi(w)$ es una función analítica sobre G .

En efecto, sean los puntos $w, w + \Delta w \in G$. Con ayuda de la función inversa a estos puntos les corresponden los puntos $z, z + \Delta z$. Puesto que, según la condición, la función f tiene una derivada en el punto z , ella es continua en este punto: $\Delta w \rightarrow 0$, si $\Delta z \rightarrow 0$. En virtud de la biunivocidad indicada es justo asimismo lo inverso, lo que se puede demostrar, pero omitimos esta demostración, $\Delta z \rightarrow 0$ si $\Delta w \rightarrow 0$. Pero entonces

$$\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z)} \quad (f'(z) \neq 0).$$

Esto muestra que la derivada de la función inversa $z = \varphi(w)$ existe en el punto w y es igual a

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad (w \in G). \quad (3)$$

Puesto que w es un punto arbitrario de G , $f'(z)$ es una función continua y $f'(z) \neq 0$, entonces la función $\varphi(w)$ es analítica sobre G .

EjemPlo 1. La función ¹⁾

$$w = az + b$$

para $a \neq 0$ aplica biunívocamente todo el plano z sobre todo el plano w . En este caso la función inversa tiene la forma

$$z = \frac{w-b}{a}.$$

Directamente se ve que estas dos funciones son analíticas sobre los planos z y w , respectivamente ($w' = a$, $z' = 1/a$).

Función $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ (n es un número natural). Partamos el plano R de los puntos z en n sectores por medio de los rayos

$$\theta = \theta_k = \frac{2\pi}{n} k, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

que salen del punto nulo (véase la fig. 131, donde $n = 3$). Sea D_k el sector

$$\theta_k < \theta < \theta_{k+1}, \quad \rho > 0, \quad (4)$$

¹⁾ Una información más detallada sobre esta función véase en el § 6.15.

o más exactamente, el conjunto de los puntos $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, que tienen el argumento $\theta = \arg z$ que satisface las desigualdades (4).

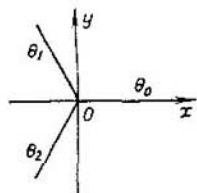


Fig. 131.

Es evidente que D_h es una región. Designemos ahora por D_h^* el conjunto que se obtiene agregando a D_h el rayo $\theta = \theta_h$ (junto con el punto nulo). Los puntos de D_h^* se pueden escribir en la forma

$$z = \rho e^{i\theta} \quad (\theta_h \leq \theta < \theta_{k+1}, \quad \rho \geq 0).$$

Pongamos, además,

$$\theta = \theta_h + \psi \quad (\theta_h \leq \theta < \theta_{k+1}).$$

Si $0 \leq \psi < \theta_1 = 2\pi/n$, entonces $\theta_h \leq \theta < \theta_{h+1}$ e inversamente.

La función $w = z^n$ aplica D_h^* biunívoca y continuamente sobre todo el plano

$$w = r e^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

el cual designemos por R' .

En efecto,

$$r e^{i\varphi} = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n e^{in \left(\frac{2\pi}{n} h + \psi \right)} = \rho^n e^{i n \psi},$$

por eso

$$r = \rho^n, \quad \varphi = n\psi \quad \left(0 \leq \psi < \theta_1 = \frac{2\pi}{n} \right),$$

de donde

$$\rho = r^{1/n} = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \varphi/n,$$

donde $\sqrt[n]{r}$ es el valor aritmético de la raíz n -ésima de r , o sea, un número no negativo cuya n -ésima potencia es igual a r . De lo dicho se deduce que la función $w = z^n$ sobre el conjunto D_h^* tiene la función inversa

$$z = (z)_k = \rho e^{i\theta} = r^{1/n} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k=0, 1, \dots, n-1; \quad w \in R'. \quad (5)$$

En general, la función $w = z^n$ tiene la función n -iforme inversa

$$z = \sqrt[n]{w}$$

que tiene n ramas continuas (5) correspondientes a los números $k = 0, 1, \dots, n-1$. Las ramas (5) que se definen por los números $k = 0, 1, \dots, n-1$ aplican R' sobre $D_0^*, D_1^*, \dots, D_{n-1}^*$, respectivamente.

Para calcular la derivada de la k -ésima rama tenemos que examinar la región $D_k \subset D_k^*$. Designemos por R'_1 el espacio R' sin el rayo $\varphi = 0$.

La función analítica $w = z^n$ aplica biunívocamente D_k sobre R'_1 . En este caso la función inversa correspondiente se determina por las fórmulas (5). En virtud de (3) la derivada de ella es igual a ($z \in D_k$)

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{w})' &= (\sqrt[n]{w})'_k = \frac{1}{(z^n)'} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{z}{nw} = \\ &= \frac{1}{n} \frac{r^{1/n} e^{i \frac{\varphi+2k\pi}{n}}}{r e^{i(\varphi+2k\pi)}} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} e^{i(\frac{1}{n}-1)(\varphi+2k\pi)} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

Examinando las regiones D_k en vez de los conjuntos D_k^* , excluimos del examen los rayos $\theta = \theta_k$ del plano R . Si nos interesara el comportamiento de la función z^n en los entornos de estos rayos, deberíamos cortar el plano R mediante los rayos

$$\theta = \theta_k + \alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi/n, \quad k = 0, 1, \dots, n-1)$$

y suponer que D_k y D_k^* son los conjuntos de los puntos $z \in R$ definidas respectivamente por las desigualdades

$$\theta_k + \alpha < \theta < \theta_{k+1} + \alpha, \quad \theta_k + \alpha \leq \theta < \theta_{k+1} + \alpha.$$

Funciones e^z y $\ln z$. La función

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \quad (z = x + iy)$$

es analítica sobre el plano R de los puntos z . No es igual a cero para todos los valores de $z \in R$. Esto se desprende del hecho de que

$$e^x \neq 0 \quad \text{y} \quad |e^{iy}| = 1.$$

Designemos por R' el plano de los puntos w , por R'_0 este plano con el punto O sacado del mismo y por R'_1 este plano con el rayo positivo del eje x , sacado del mismo.

A continuación veremos que la imagen R , con ayuda de la función $w = e^z$, es la región R'_0 . Sin embargo, la aplicación de R sobre R'_0 no es biunívoca: la función inversa a $w = e^z$, llamada *logaritmo natural de w* y designada por

$$z = \ln w \quad (w \in R'_0),$$

es infinitiforme. A continuación definiremos esta función.

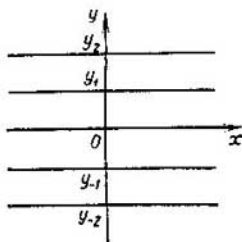


Fig. 132.

Para esto partimos R en franjas mediante las rectas (fig. 132)

$$y = y_k = 2\pi k \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Designemos la franja abierta $y_k < y < y_{k+1}$ por D_k y la franja semicerrada $y_k \leq y < y_{k+1}$ por D_k^* .

El cambio de la variable y por η con ayuda de la igualdad

$$y = y_k + \eta$$

aplica biunívocamente la franja D_k^* de los puntos $z = x + iy$ sobre la franja D_0^* de los puntos $x + i\eta$.

Examinemos la función $w = e^z$ sobre el conjunto D_k^* . Poniendo $z = x + iy$, $w = re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, tendremos

$$w = re^{i\varphi} = e^x e^{iy} = e^x e^{i(2k\pi + \eta)} = e^x e^{i\eta} \quad (0 \leq \eta < 2\pi),$$

de donde

$$r = e^x, \quad \varphi = \eta.$$

Ahora bien

$$x = \ln r = \ln |w|,$$

$$y = y_k + \eta = y_k + \varphi = 2k\pi + \arg w \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Por consiguiente, la función $w = e^z$ tiene sobre la franja D_k^* la función unívoca inversa

$$z = x + iy = (z)_k = \ln |w| + i(\arg w + 2k\pi), \\ k = 0, \pm 1, \dots, \quad w \in R'_0. \quad (6)$$

En general, la función $w = e^z$ tiene una función inversa infinitiforme

$$z = \ln w, \quad (w \in R'_0),$$

que tiene un número infinito de las ramas continuas (6) correspondientes a los números $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Mediante la función analítica $w = e^z$ la región D_k se aplica biunívocamente sobre la región R'_k del plano w . La función unívoca inversa a ella, que se define para el número k dado por la igualdad (6), es analítica sobre R'_k . Su derivada se calcula de la mejor manera con ayuda de la fórmula (3):

$$(\ln w)' = (\ln w)'_k = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w} \quad (w \in R'_k). \quad (7)$$

Subrayamos que aquí no hemos calculado la derivada de la función multiforme $\ln w$, sino de su determinada rama unívoca que corresponde a cierto número k .

El hecho de que la derivada resulta igual a la función $1/w$ no dependiente de k tiene su explicación en que las diferentes ramas (6) se distinguen en una constante.

Al calcular la derivada de $z = \ln w$ hemos supuesto que los puntos z pertenecen a las regiones D_k sin someter a examen las rectas $y = y_k$ del plano R .

Si nos interesara el comportamiento de las funciones investigadas sobre las rectas $y = y_k$, deberíamos cortar el plano R mediante las rectas desplazadas

$$y = y_k + \alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi, \quad y_k = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

considerando de este modo que D_k es la región de los puntos $z = x + iy$ para los cuales $y_k + \alpha < y < y_{k+1} + \alpha$.

La función potencial z^α (α es un número real) se determina por la fórmula

$$w = z = e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha [\ln |z| + i (\arg z + 2k\pi)]} = |z|^\alpha e^{i\alpha (\arg z + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8)$$

o bien

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha (\theta + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (8')$$

donde

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Si α es un número entero, entonces

$$e^{i\alpha 2k\pi} = 1$$

y

$$w = (\rho e^{i\theta})^\alpha = z^\alpha,$$

donde z^α se entiende en el sentido habitual como el producto α de los factores z .

Si $\alpha = \pm p/q$, donde $p > 0$, $q > 0$, son los números enteros, entonces los números del segundo miembro en (8') son esencialmente diferentes sólo para $k = 0, 1, \dots, q-1$:

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha (\theta + 2k\pi)} \quad (k = 0, 1, \dots, q-1).$$

En particular, cuando $\alpha = 1/n$ y n es un número natural, ya hemos obtenido este resultado (véase (5)).

No obstante, si α es un número irracional, entonces las funciones definidas por la fórmula (8) ó (8') para diferentes k son distintas. Son las ramas continuas de la función multiforme (infinitiformes) $w = z^\alpha$.

Luego tenemos ($z = \rho e^{i\theta}$).

$$\begin{aligned} (z^\alpha)' &= (e^{\alpha \ln z})' = e^{\alpha \ln z} \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha \frac{e^{\alpha [\ln \rho + i (\theta + 2k\pi)]}}{e^{[\ln \rho + i (\theta + 2k\pi)]}} = \\ &= \alpha e^{(\alpha-1) [\ln \rho + i (\theta + 2k\pi)]} = \alpha z^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

o sea, la igualdad

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1} \quad (9)$$

justa para toda rama z^α . De esta manera, la rama $z^{\alpha-1}$ del segundo miembro de (9) debe ser tomada con el mismo valor de k con el que ha sido tomada la rama z^α del primer miembro.

Observación 1. Las funciones inversas para las funciones trigonométricas e hiperbólicas se pueden introducir de un modo análogo.

Por ejemplo, la función $w = \text{Arcsen } z$ es inversa a la función $z = \text{sen } w$, o sea, $\text{sen} [\text{Arcsen } z] = z$.

De la ecuación

$$z = \text{sen } w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}}$$

encontramos

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0, \quad e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2},$$

o sea,

$$iw = \ln |iz \pm \sqrt{1 - z^2}| + i [\arg (iz \pm \sqrt{1 - z^2}) + 2k\pi].$$

Así, pues,

$$w = \text{Arcsen } z = -i [\ln |iz \pm \sqrt{1 - z^2}| + i [\arg (iz \pm \sqrt{1 - z^2}) + 2k\pi]]$$

es una función de infinitiforme ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Análogamente se puede obtener

$$\text{Arccos } z = -i [\ln |z \pm \sqrt{z^2 - 1}| + i [\arg (z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2k\pi]],$$

$$\text{Arctg } z = -\frac{i}{2} \left[\ln \left| \frac{1+zi}{1-zi} \right| + i \left(\arg \frac{1+zi}{1-zi} + 2k\pi \right) \right],$$

$$\text{Arsh } z = \ln |z \pm \sqrt{z^2 + 1}| + i [\arg (z \pm \sqrt{z^2 + 1}) + 2k\pi],$$

$$\text{Arch } z = \ln |z \pm \sqrt{z^2 - 1}| + i [\arg (z \pm \sqrt{z^2 - 1}) + 2k\pi].$$

§ 6.6. Integración de funciones de una variable compleja

Sea $w = f(z) = u + iv$ una función continua de la variable compleja z , definida en la región D , y sea L una curva suave en D , teniendo por comienzo el punto A y por fin el punto B (fig. 133), curva definida por la ecuación

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \\ (\alpha \leq t \leq \beta)$$

o, lo que es lo mismo, por las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned} \right\} (\alpha \leq t \leq \beta). \quad (1)$$

Como siempre, la dirección sobre L corresponde a la variación del parámetro t entre α y β ($A = z(\alpha)$, $B = z(\beta)$).

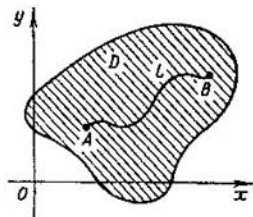


Fig. 133.

La integral de la función $f(z)$ tomada a lo largo de la curva L se define del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \int_L (u + iv)(dx + i dy) = \int_L (u dx - v dy) + \\ &+ i \int_L (v dx + u dy) = \int_\alpha^\beta [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), \\ &y(t)) y'(t)] dt + i \int_\alpha^\beta [v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)] dt. \quad (2) \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta que $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ y $u(x(t), y(t)) = u(z(t))$, la igualdad (2) se puede escribir en forma abreviada así:

$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)] z'(t) dt. \quad (3)$$

Ahora bien, de (2) se ve que la integral de una variable compleja es la suma de dos integrales curvilíneas y su cálculo se reduce al de las integrales ordinarias.

La integral (2) existe para toda función continua $f(z)$ (en este caso las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ también son continuas) y para toda curva suave L (o sea, cuando $x'(t)$, $y'(t)$ son continuas y $x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0$).

Si la curva L es suave a trozos y se compone de trozos suaves orientados L_1, \dots, L_n , entonces, según la definición, consideramos

$$\int_L f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{L_k} f(z) dz. \quad (4)$$

En virtud de las propiedades de una integral curvilínea obtenemos fácilmente

$$1) \int_L f(z) dz = - \int_{L^-} f(z) dz,$$

donde L^- es la misma curva que L , pero de orientación contraria (véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral», § 7.4).

$$2) \int_L [Af(z) + B\varphi(z)] dz = A \int_L f(z) dz + B \int_L \varphi(z) dz,$$

donde A y B son los números constantes.

3) Si $|f(z)| \leq M$ para $z \in L$, entonces

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq Ml,$$

donde l es la longitud de L .

En efecto, en virtud de la propiedad ordinaria tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_L f(z) dz \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f[z(t)]| \cdot |z'(t)| dt \leq \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} M |z'(t)| dt = M \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = Ml. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.

$$\int_L \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i, \quad (5)$$

donde L es la circunferencia que tiene por centro el punto z_0 y está orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

En efecto, la ecuación de L se puede escribir en la forma

$$z = z_0 + \rho e^{it} \quad (0 \leq t < 2\pi),$$

donde ρ es el radio de la circunferencia L . Por eso

$$\int_L \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{it} dt}{\rho e^{it}} = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

EJEMPLO 2. Para un n entero, $n \neq -1$,

$$\int_L (z - z_0)^n dz = 0, \quad (6)$$

donde L es la circunferencia que tiene por centro el punto z_0 y está orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_L (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} i e^{i(n+1)t} dt = \\ &= i \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i \rho^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = 0 \quad (n+1 \neq 0), \end{aligned}$$

porque $e^{i2(n+1)\pi} = 1$ para n enteros cualesquiera.

TEOREMA 1 (DE CAUCHY). Si la función $f(z)$ es analítica sobre una región D simplemente conexa, entonces la integral de $f(z)$ tomada a lo largo de cualquier contorno cerrado suave a trozos Γ , perteneciente a D , es igual a cero

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

DEMOSTRACIÓN Por cuanto $f(z) = u + iv$ es una función analítica sobre D , las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuamente derivables y se cumplen las condiciones de Cauchy—Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7)$$

en virtud de las cuales las expresiones $v dx + u dy$ y $u dx - v dy$ son las diferenciales totales de ciertas funciones. Por eso las integrales curvilíneas de estas expresiones tomadas a lo largo del contorno cerrado Γ son iguales a cero (véanse los §§ 3.4 y 3.5). Pero entonces, conforme a la igualdad (2),

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\Gamma} (v dx + u dy) = 0.$$

EJEMPLO 3.

$$\int_{\Gamma} z^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{\Gamma} e^z dz = 0, \quad \int_{\Gamma} a^z dz = 0 \quad (a > 0),$$

$$\int_{\Gamma} \operatorname{sen} z dz = 0, \quad \int_{\Gamma} \cos z dz = 0,$$

$$\int_{\Gamma} \operatorname{sh} z dz = 0, \quad \int_{\Gamma} \operatorname{ch} z dz = 0,$$

donde Γ es un contorno suave a trozos cerrado arbitrario, porque las funciones subintegrales son analíticas sobre el plano z . Estas tienen la derivada continua en todos los puntos z del plano complejo.

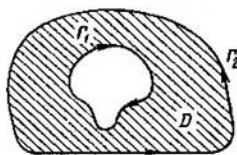


Fig. 134.

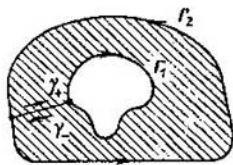


Fig. 135.

Como corolario del teorema 1 obtenemos el siguiente

TEOREMA 2. *Supongamos que la región D de un plano complejo está limitada por un contorno suave a trozos compuesto Γ , orientado positivamente, o sea, al recorrer el contorno Γ los puntos de D quedan a la izquierda. Entonces para la función $f(z)$, analítica sobre \bar{D} , tiene lugar la igualdad*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Aclaremos este teorema. En la fig. 134 está representada la región doblemente conexa D cuyo contorno suave a trozos $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ está orientado positivamente.

Unamos los contornos Γ_1 y Γ_2 con ayuda de un trozo suave γ , como lo muestra la fig. 135. Orientemos γ por dos métodos contrarios: γ_+ , γ_- . Como resultado obtenemos la región nueva D^1 , simplemente

conexa, limitada por el contorno orientado $\Gamma_2 + \gamma_+ + \Gamma_1 + \gamma_-$. Según el teorema 1

$$\int_{\Gamma_2 + \gamma_+ + \Gamma_1 + \gamma_-} f(z) dz = 0.$$

Pero

$$\int_{\gamma_- + \gamma_+} f(z) dz = \int_{\gamma_-} f(z) dz + \int_{\gamma_+} f(z) dz = 0,$$

por eso

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0.$$

En este caso cada una de las integrales \int_{Γ_1} y \int_{Γ_2} puede también no ser igual a cero.

Observación 1. Para brevedad, a continuación escribiremos a veces en lugar de «contorno suave a trozos continuo cerrado» simplemente «contorno».

Del teorema 2 se deduce como corolario el siguiente

TEOREMA 3. *Supongamos que la región D está limitada por el contorno exterior Γ , orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj, y por los contornos interiores $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$, orientados en el mismo sentido (como lo muestra la fig. 136, donde $N = 3$) y supongamos que sobre D está dada la función analítica $f(z)$.*

Entonces tiene lugar la igualdad

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} f(z) dz. \quad (8)$$

En efecto, si suponemos que Γ_k^- es un contorno igual a Γ_k , pero orientado en el sentido de las agujas del reloj, entonces según el teorema 2

$$\int_{\Gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k^-} f(z) dz = 0,$$

de donde se deduce (8), puesto que

$$\int_{\Gamma_k^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma_k} f(z) dz.$$

Señalemos que si en el teorema $3N = 1$, entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz \quad (9)$$

(fig. 137).

Observación 2. De la igualdad (9), o sea, del teorema 3 para $N = 1$, resulta que las igualdades (5) y (6) siguen siendo justas si en ellas la circunferencia L que tiene por centro el punto z_0 se

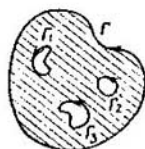


Fig. 136.



Fig. 137.

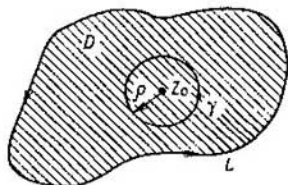


Fig. 138.

sustituye por cualquier contorno suave a trozos cerrado L' que contenga dentro el punto z_0 y esté orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj:

$$\int_{L'} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad (10)$$

$$\int_{L'} (z - z_0)^n dz = 0 \quad (n \neq -1). \quad (11)$$

Las fórmulas (10) y (11) son *principales* en esta teoría. Son precisamente ellas a las que, como veremos suele reducirse el cálculo de las integrales curvilíneas de las funciones analíticas (véase a continuación los §§ 6.10 y 6.11).

§ 6.7. Fórmula de Cauchy

Supongamos que la función $f(z)$ es analítica en la región cerrada simplemente conexa \bar{D} ($\bar{D} = D \cup \partial D$) provista de una frontera suave a trozos L . Entonces tiene lugar la fórmula de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{z - z_0}, \quad (1)$$

donde z_0 es un punto cualquiera dentro del contorno L , y la integración se realiza en el sentido positivo (fig. 138), o sea, en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Ahora bien, es suficiente determinar la función analítica sobre el contorno L y con ayuda de la fórmula (1) se puede obtener automáticamente sus valores en otros puntos de D .

Para demostrar la fórmula (1) examinemos la función

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2)$$

La función $\varphi(z)$ es analítica en todos los puntos de \bar{D} , salvo $z = z_0$. Describamos alrededor del punto z_0 la circunferencia $\gamma \subset D$ (véase la fig. 138). Entonces, según el teorema 3 del § 6.6

$$\int_L \varphi(z) dz = \int_\gamma \varphi(z) dz \quad (3)$$

y el valor de la integral

$$\int_\gamma \varphi(z) dz = \int_{|z-z_0|=\rho} \varphi(z) dz$$

de hecho no depende de ρ . Observemos que de (2) se desprende que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = f'(z_0).$$

Si la función $\varphi(z)$ se define en el punto z_0 , poniendo $\varphi(z_0) = f'(z_0)$, entonces se hace continua en la región cerrada \bar{D} y, por consiguiente, su módulo está acotado: $|\varphi(z)| \leq M, \forall z \in \bar{D}$. En virtud de lo dicho (véase la propiedad 3 del § 6.6)

$$\left| \int_\gamma \varphi(z) dz \right| \leq M \cdot 2\pi\rho.$$

Puesto que el número ρ se puede tomar tan pequeño como se quiera y la integral $\int_\gamma \varphi(z) dz$ no depende de ρ , entonces

$$\int_\gamma \varphi(z) dz = 0.$$

Por eso de (3) tenemos

$$\int_L \varphi(z) dz = \int_L \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$

Ya que (véase (10) del § 6.6)

$$\int_L \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_L \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0),$$

la fórmula de Cauchy queda demostrada.

La fórmula de Cauchy tiene lugar también para una región múltiplemente conexa y su demostración se puede reducir a la fórmula de Cauchy para la región simplemente conexa, ya demostrada.

En la fig. 139 está representada la región doblemente conexa D cuya frontera L orientada positivamente se compone de dos contornos cerrados, correspondientemente orientados ($L = L_0 + L_1$).

Sea z_0 un punto arbitrario de D . Vamos a unir los contornos L_0 y L_1 por una curva suave a trozos γ orientada desde L_1 hasta L_0 .

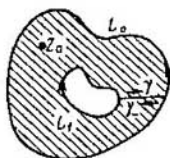


Fig. 139.

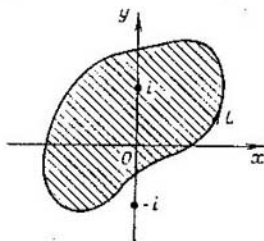


Fig. 140.

la cual no pasa por el punto z_0 . Junto con la curva γ introduzcamos la curva γ_- que coincide con aquélla, pero es de orientación contraria.

Si de la región D se saca γ , la región D_* que queda será simplemente conexa, provista de una frontera orientada positivamente:

$$L' = L_0 + \gamma_- + L_1 + \gamma = L + \gamma_- + \gamma.$$

La función $f(z)$ es analítica sobre \bar{D}_* y $z_0 \in D_*$. Por eso en virtud del teorema de Cauchy para la región simplemente conexa

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{L_0} + \int_{\gamma} + \int_{L_1} \right) \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz, \end{aligned}$$

porque $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{\gamma_-} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0$.

EJEMPLO 1. Calcular la integral

$$\int_L \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+1} dz,$$

donde L es el contorno, orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj, que contiene el punto $z = i$ (fig. 140) y es tal que el punto $z = -i$ se encuentra fuera de él.

Escribamos nuestra integral en la forma

$$\int_L \frac{\operatorname{sen} z \, dz}{(z+i)(z-i)}$$

y examinemos la función $f(z) = \operatorname{sen} z/(z+i)$. En virtud de nuestras suposiciones sobre el contorno L esta función es analítica en la región cerrada, limitada por el contorno L , y por eso, según la fórmula de Cauchy,

$$\int_L \frac{\operatorname{sen} z \, dz}{z^2+1} = \int_L \frac{f(z)}{z-i} \, dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{\operatorname{sen} i}{2i} = \pi \operatorname{sen} i = \pi i \operatorname{sh} 1.$$

§ 6.8. Integral del tipo de Cauchy

La expresión

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) \, dz}{z-z_0},$$

donde $f(z)$ es la función analítica en la región cerrada \bar{D} limitada por el contorno L orientado positivamente, se llama *integral de Cauchy*.

Si z_0 se encuentra dentro de L , la integral será igual a $f(z_0)$; si z_0 está fuera de L , $\frac{f(z)}{(z-z_0)}$ será la función analítica en \bar{D} y, por consiguiente, la integral de Cauchy será igual a cero.

Supongamos ahora que \mathcal{L} es cualquier curva suave a trozos orientada, no obligatoriamente cerrada y $\varphi(z)$ una función continua determinada a lo largo de \mathcal{L} . La expresión

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(z)}{z-z_0} \, dz \quad (1)$$

se denomina *integral del tipo de Cauchy*. No es más que la función $F(z_0)$ determinada fuera de \mathcal{L} ($z_0 \notin \mathcal{L}$).

TEOREMA 1. La integral (1) del tipo de Cauchy es la función analítica $F(z_0)$ para todos los valores de $z_0 \notin \mathcal{L}$.

La derivada del orden n de $F(z_0)$ se calcula por la fórmula

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(z) \, dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea σ un círculo arbitrario sin puntos comunes con la curva \mathcal{L} . La función de dos variables complejas z_0 y z

$$\Phi(z_0, z) = \frac{\varphi(z)}{z - z_0}$$

es continua sobre el conjunto $\sigma \times \mathcal{L}$ ($z_0 \in \sigma$, $z \in \mathcal{L}$) y tiene sobre éste la derivada parcial continua

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_0} = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^2}$$

(hay que tener en cuenta que puesto que el círculo σ no se interseca con \mathcal{L} , entonces, cualesquiera que sean $z_0 \in \sigma$ y $z \in \mathcal{L}$, la diferencia $z - z_0 \neq 0$). Esto muestra que la derivación de $F'(z_0)$ respecto al parámetro z_0 es legítimo realizarla bajo el signo integral en (1):

$$F''(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(z) dz}{(z - z_0)^2}.$$

En este caso la derivada $F''(z_0)$ es continua fuera de \mathcal{L} (véase el § 2.4, teorema 4, el cual se generaliza fácilmente para el caso de integral de una variable compleja).

Hemos demostrado la fórmula (2) para $n = 1$. Para $n \geq 2$ los razonamientos se efectúan por inducción.

COROLARIO 1. Si la función $w = f(z)$ es analítica en la región D , o sea, es continua su derivada primera sobre D , entonces ella tiene derivadas de todos los órdenes.

DEMOSTRACIÓN. Sean z_0 cualquier punto de D y σ un círculo, con el centro en z_0 , que se halla por completo en la región D y sea γ la circunferencia, o sea, la frontera de σ orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Entonces por la fórmula de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0},$$

o sea, la función $f(z_0)$ se representa por la integral del tipo de Cauchy cuando $\mathcal{L} = \gamma$ y $\varphi(z) = f(z)$. Por lo tanto, en virtud del teorema 1, $f(z)$ es infinitamente derivable y

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

§ 6.9. Serie de potencias

Examinemos la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h (z - z_0)^h, \quad (|z - z_0| < R), \quad (1)$$

cuyo radio de convergencia es $R > 0$.

De la teoría de las series de potencias sabemos que la serie (1) converge uniformemente sobre el círculo $|z| \leq \rho$, donde ρ es todo número positivo menor que R ($\rho < R$). Por eso la suma $f(z)$ de la serie (1) es una función continua en el círculo abierto $|z - z_0| < R$. Además, $f(z)$ tiene sobre este círculo la derivada continua $f^{(n)}(z)$ de todo orden la cual se puede calcular derivando la serie (1) término a término. Esto muestra que la suma de la serie de potencias es una *función analítica* en el círculo (abierto) de su convergencia. Los números c_k se calculan por la fórmula

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

lo que muestra que la serie de potencias es la serie de Taylor de su suma. En virtud de las igualdades (3) del § 6.8 esta fórmula puede ser sustituida por la siguiente:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

donde L es un contorno arbitrario orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj, que pertenece al círculo de convergencia de la serie (1) y contiene dentro el punto z_0 .

Sin embargo, es justo también el siguiente

TEOREMA 1. *La función $f(z)$, analítica en el círculo $|z - z_0| < R$, se desarrolla en una serie de potencias, convergente hacia ella, según las potencias de $(z - z_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(z)$ una función analítica en el círculo $|z - z_0| < R$. Designemos por z un punto cualquiera dentro de este círculo (fig. 141). Describamos la circunferencia L , que tiene por centro el punto z_0 y es de radio $\rho < R$, de modo que el punto z resulte dentro del contorno L . Entonces la función $f(z)$ será analítica sobre el contorno L y dentro de él. Por eso, según el teorema de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)}. \quad (3)$$

La fracción $1/(\zeta - z)$ se puede representar en la forma

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}. \quad (4)$$

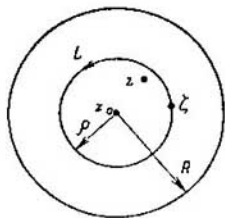


Fig. 141.

Cuando el punto $\zeta \in L$ y z se halla dentro de este contorno, entonces

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} < 1. \quad (5)$$

Por eso $1 / \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)$ se puede considerar como suma de la progresión geométrica convergente

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^2 + \dots \quad (6)$$

De (4) y (6) obtenemos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\zeta - z_0)^3} + \dots, \quad (7)$$

además, la serie (7) converge uniformemente para cualesquiera $\zeta \in L$ y z constante, porque, como se ve de (5), la expresión $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|$ no depende de $\zeta \in L$ y es menor que 1.

Multiplicando (7) por $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ (sin alterar su convergencia uniforme) e integrando a lo largo de L , tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} + \dots$$

En virtud de (3)

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad (8)$$

donde hemos designado

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Por lo tanto, hemos demostrado que la función analítica $f(z)$ en el círculo $|z - z_0| < R$ se representa por la serie de potencias (8) con los coeficientes (9), o sea, por su serie de Taylor.

EJEMPLO 1. Al desarrollar las funciones en serie de Taylor se puede utilizar los desarrollos conocidos de las funciones elementales. Por ejemplo,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

por eso

$$\operatorname{sen}^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2} = \frac{-1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}.$$

EJEMPLO 2. La función $\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z}$ en un entorno bastante pequeño de $z = 0$ es una función analítica ($(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 z}$, $\operatorname{cos} z \neq 0$). Por eso la función dada puede desarrollarse en serie de Taylor según las potencias de z , aunque es difícil de calcular la forma general del coeficiente. Tenemos $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 2$, o sea,

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{2z^3}{3!} + \dots$$

EJEMPLO 3. Desarrollar en serie de Taylor la función $w = \operatorname{sh} z$ y $w = \operatorname{ch} z$. Tenemos $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, por eso $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

§ 6.10. Serie de Laurent ¹⁾

TEOREMA 1. Sea $0 \leq r < R \leq \infty$. Toda función analítica $f(z)$ en el anillo

$$r < |z - z_0| < R \quad (1)$$

se representa unívocamente en este anillo en la forma de la serie convergente

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad (2)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3)$$

y γ es cualquier circunferencia $|\zeta - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$ orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

La serie (1) se llama *serie de Laurent de la función $f(z)$* según las potencias de $(z - z_0)$ o *desarrollo de Laurent de la función $f(z)$* en el anillo $r < |z - z_0| < R$.

¹⁾ P. Laurent (1813—1854), matemático francés.

OBSERVACIÓN 1. Cuando se dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge, se entiende que convergen por separado las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ y $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n r^n$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. Tomemos las circunferencias c y C de radios r' y R' ($r < r' < R' < R$) que tienen por centro el punto z_0 , donde están orientadas en el sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. 142).

En virtud de la condición del teorema $f(z)$ es analítica en el anillo entre las circunferencias c y C y sobre las mismas circunferencias. Por eso según la fórmula de Cauchy para un contorno compuesto tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{c^-} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (4)$$

o bien

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (4)$$

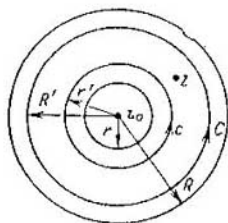


Fig. 142.

donde z es un punto entre las circunferencias c y C .

En la primera integral la ζ designa un punto de la circunferencia C , por eso

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R'} < 1, \\ \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) \left[1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad (5)$$

con la particularidad de que la serie que se encuentra a la derecha converge uniformemente para $\zeta \in C$ (para un valor fijo de z).

En la segunda integral ζ designa un punto de la circunferencia c , por eso

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r'}{|r - z_0|} < 1, \\ \frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - z_0) \left[1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right]} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (6)$$

con la particularidad de que la serie dispuesta a la derecha converja uniformemente para todos los valores de $\zeta \in c$ (siendo fijo el valor de z).

Sustituyendo (5) y (6) en (4) e integrando término a término, obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n}} (z - z_0)^{-n-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} (z - z_0)^{-n} \quad (7) \end{aligned}$$

Puesto que la función $f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{n+1}$ es analítica en el anillo para todo valor de n , entonces, en virtud del teorema de Cauchy, la integral (3) será igual a la integral semejante tomada sobre una circunferencia cualquiera, en particular sobre c y C . Por eso de (7) se deduce (2), donde los números c_n se calculan mediante las fórmulas (3).

La primera serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ en el segundo miembro de (2) converge en el círculo $|z - z_0| < R$ hacia cierta función $f_1(z)$, analítica en este círculo. Se llama *parte regular de la serie de Laurent*.

La segunda serie en el segundo miembro de (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

converge para $|z - z_0| > r$. Determina cierta función analítica $f_2(z)$ denominada *parte principal de la serie de Laurent*.

Así, pues,

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

donde $f_1(z)$ es la función analítica en el círculo $|z - z_0| < R$ y $f_2(z)$, fuera del círculo de radio r con el centro en el punto z_0 ($|z - z_0| > r$). Dentro del anillo $r < |z - z_0| < R$ estas dos funciones son analíticas.

Los coeficientes c_n de la serie de Laurent de la función $f(z)$ examinada son únicos, porque se calculan por las fórmulas (3).

EJEMPLO 1. La función

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

es analítica sobre el plano z , a excepción de los puntos $z = 2$ y $z = 3$.

a) La función $f(z)$ es analítica en el círculo $|z| < 2$ y por eso en virtud del teorema 1 del § 6.9 puede ser desarrollada en serie de Taylor según las potencias de z , convergente en el círculo $|z| < 2$:

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h. \quad (8)$$

Los números c_h se pueden calcular por la fórmula

$$c_h = \frac{f^{(h)}(0)}{h!} \quad (h = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Sin embargo, en el caso dado puede asimismo obtenerse la serie (8), aplicando la fórmula para la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente. Tenemos (si $|z| < 2$)

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \left[1 + \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \dots \right] = -\frac{1}{3} \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^h,$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots \right] = -\frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^h.$$

Por eso para nuestra función $c_h = \frac{1}{2^{h+1}} - \frac{1}{3^{h+1}}$.

En virtud de la unicidad del desarrollo de la función en la serie de potencias los números obtenidos c_h son iguales, respectivamente, a los números c_h calculados por la fórmula (9).

b) La función $f(z)$ es analítica en el anillo $2 < |z| < 3$. Por eso puede ser desarrollada en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_h z^h, \quad (10)$$

$$c_h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{h+1}}, \quad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (11)$$

donde γ es la circunferencia $|\zeta| = \rho$, $2 < \rho < 3$, orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Pero los números c_h

se pueden obtener sin recurrir a las complicadas fórmulas (11). Tenemos para $2 < |z| < 3$

$$\frac{1}{z-3} = - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^h}{3^{h+1}},$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \dots \right] = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{2^{h-1}}{z^h}.$$

Por eso la serie de Laurent de la función $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{2^{h-1}}{z^h} - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^h}{3^{h+1}}.$$

Debido a la unicidad del desarrollo en serie de Laurent los coeficientes obtenidos son iguales, respectivamente, a los números c_h determinados por las fórmulas (11).

c) La función $f(z)$ es analítica también en el exterior del círculo $|z| \leq 3$, o sea, para los valores de z que satisfacen la desigualdad $|z| > 3$ y posee la propiedad

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0. \quad (12)$$

Por eso $f(z)$ puede ser desarrollada en la serie de Laurent de la forma siguiente:

$$f(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{c_{-h}}{z^h}. \quad (13)$$

Los términos cuya forma es $c_h z^h$ ($h = 0, 1, \dots$) no pueden formar parte del desarrollo de Laurent de la función f , o sea, $c_h = 0$ para los h indicados. En el caso contrario esto contradiría la propiedad (12).

Aquí los números c_{-h} también pueden ser obtenidos directamente. Tenemos para $|z| > 3$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{3}{z} + \left(\frac{3}{z}\right)^2 + \dots \right] = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{3^{h-1}}{z^h},$$

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{2^{h-1}}{z^h}.$$

Por eso

$$f(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{3^{h-1} - 2^{h-1}}{z^h}.$$

EJEMPLO 2. Es necesario desarrollar la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} \quad (14)$$

en serie de Taylor por las potencias de $z - i$ y determinar el radio de convergencia de esta serie.

RESOLUCION. El círculo mayor, con el centro en el punto i , dentro del cual la función $f(z)$ es analítica tiene el radio igual a la distancia entre el punto i y su punto singular más próximo. Tal es, evidentemente, el punto $z = 2$. Por consiguiente, el radio indicado es igual a

$$R = |2 - i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Designemos por σ el círculo abierto (sin frontera) de radio $R = \sqrt{5}$ que tiene por centro el punto i .

Dentro del círculo σ la función $f(z)$ es analítica y todo círculo concéntrico de mayor radio contiene el punto singular $z = 2$ en el cual la analiticidad se altera.

En virtud del teorema 1 del § 6.9 la función $f(z)$ se desarrolla en serie de Taylor según las potencias de $z - i$. Es fácil de obtener esta serie efectivamente.

Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z-i) + (i-2)} = \frac{1}{\frac{z-i}{i-2} + 1} \cdot \frac{1}{i-2} = \\ &= \frac{1}{i-2} \left(1 - \frac{z-i}{i-2} + \left(\frac{z-i}{i-2} \right)^2 - \dots \right), \quad (15) \end{aligned}$$

y hemos obtenido la serie de potencias de $z - i$ convergente, evidentemente, en el círculo $|z - i| < R$, $R = |i - 2| = \sqrt{5}$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-3} &= \frac{1}{(z-i) + (i-3)} = \frac{1}{i-3} \frac{1}{1 + \frac{z-i}{i-3}} = \\ &= \frac{1}{i-3} \left(1 - \frac{z-i}{i-3} + \left(\frac{z-i}{i-3} \right)^2 - \dots \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Hemos vuelto a obtener la serie de potencias de $z - i$ que asimismo converge en el círculo $|z - i| < R$. De hecho converge en el círculo de radio $|i - 3| = \sqrt{10}$, pero esto no lo necesitaremos.

La diferencia entre las series (16) y (15) es el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Taylor según las potencias de $z - i$. El radio de convergencia de esta serie es igual a $R = \sqrt{5}$.

PROBLEMA. Desarrollar la función $f(z)$ (véase (14)) en serie de Laurent según las potencias de $z - i$: a) en el anillo $\sqrt{5} < |z - i| < \sqrt{10}$ y b) en el entorno de $z = \infty$.

§ 6.11. Clasificación de puntos singulares aislados. Residuos

En el § 6.10 hemos demostrado el teorema 1 que afirma que si $0 \leq r < R \leq \infty$ y la función $f(z)$ es analítica en el anillo

$$r < |z - z_0| < R,$$

entonces ésta se desarrolla en serie de Laurent que converge hacia ella

$$f(z) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h (z - z_0)^h = f_1(z) + f_2(z) \quad (r < |z - z_0| < R), \quad (1)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{h=0}^{\infty} c_h (z - z_0)^h \quad (|z - z_0| < R), \\ f_2(z) &= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{c_{-h}}{(z - z_0)^h} \quad (|z - z_0| > r). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Sea $r = 0$. Se supone, de este modo, que la función es analítica en el círculo abierto $0 < |z - z_0| < R$ del cual está excluido el punto z_0 . En el mismo punto z_0 la función f suele quedar, con más frecuencia, no definida.

En este caso se dice que z_0 es un *punto singular aislado* de la función f . A continuación se dará la clasificación de puntos singulares aislados.

La serie de potencias

$$f_1(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h (z - z_0)^h \quad (|z - z_0| < R)$$

tiene el radio de convergencia $R > 0$. Por eso su suma tiene la derivada continua en el círculo $|z - z_0| < R$.

Examinemos tres casos (para $r = 0$).

Caso a). La función $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = f_1(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h (z - z_0)^h, \quad (3)$$

o sea, todos los números $c_{-h} = 0$ ($h = 1, 2, \dots$). Puesto que la serie de potencias (3) converge para todos los valores de z con $|z - z_0| < R$, su radio de convergencia es igual a R y, por consiguiente (véase el § 6.9), su suma $f_1(z)$ está determinada y es continuamente derivable en todos los puntos del círculo $|z - z_0| < R$, incluyendo también el punto z_0 . Ahora bien, la función $f_1(z)$ es analítica en este círculo.

Por eso, si se toma que

$$f(z_0) = f_1(z_0) = c_0,$$

entonces la función $f(z)$ asimismo será analítica en dicho círculo.

En este caso se dice que *la singularidad que tiene la función f en el punto z_0 es evitable*. Basta poner $f(z_0) = c_0$ para que la función f llegue a ser analítica no sólo en la proximidad del punto z_0 sino también en el mismo punto.

Observemos que en el caso dado la integral

$$\int_L f(z) dz = 0$$

para todo contorno cerrado L que contenga dentro el punto z_0 y pertenezca al círculo $|z - z_0| < R$.

Caso b). La función $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{h=1}^m \frac{c_{-h}}{(z-z_0)^h} = \sum_{h=-m}^{\infty} c_h (z-z_0)^h \quad (c_{-m} \neq 0). \quad (5)$$

Así, pues, $c_h = 0$ para $h = -(m+1), -(m+2), \dots$.

En este caso se dice que el punto z_0 es *el polo de la función $f(z)$ de orden (multiplicidad) m* . Cuando $m = 1$ el punto z_0 se llama, además, *polo simple*.

Puesto que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = c_0$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{h=1}^m \frac{c_{-h}}{(z-z_0)^h} &= \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(z-z_0)^m} [c_{-m} + c_{-(m-1)}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1}] = \infty, \quad (6) \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty. \quad (7)$$

Ahora si L es un contorno que esté orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj, contenga dentro z_0 y pertenezca al círculo $|z - z_0| < R$, entonces

$$\int_L f(z) dz = 2\pi i c_{-1}. \quad (8)$$

En efecto,

$$\int_L f(z) dz = \int_L f_1(z) dz + \sum_{h=1}^m \int_L \frac{c_{-h}}{(z-z_0)^h} dz = 0 + 2\pi i c_{-1},$$

porque

$$\int_L \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i, \quad \int_L \frac{dz}{(z-z_0)^k} = 0 \quad (k=2, \dots, m)$$

(véanse (10) y (11) del § 6.6).

Caso c). La función $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h (z-z_0)^h + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{c_{-h}}{(z-z_0)^h} = f_1(z) + f_2(z), \quad (9)$$

donde en la serie

$$f_2(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{c_{-h}}{(z-z_0)^h}$$

el número infinito de coeficientes c_{-h} no es igual a cero.

En este caso se dice que la función $f(z)$ tiene en el punto z_0 una singularidad esencial.

Sabemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = c_0.$$

No obstante a las condiciones indicadas $f_2(z)$ no tiende, cuando $z \rightarrow z_0$, hacia algún límite, finito o infinito. No tenemos la posibilidad de demostrar aquí este hecho y diremos solamente que se deduce del conocido teorema de Sojotski ¹⁾.

Observemos que los razonamientos aplicados para demostrar la igualdad (6) en el caso del polo en esta ocasión son inaplicables, porque para las sumas infinitas la operación del paso límite, término a término, no siempre es legítima.

EJEMPLO 1. La función $e^{-1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n}$ tiene una singularidad esencial en el punto $z = 0$. Esta función no tiene límite en el punto $z = 0$.

En efecto, para $z = x$ (x es un número real) $\exp(-1/x^2) \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow 0$. Sin embargo, si $z = i/n$, entonces $\exp(-1/z^2) = \exp(n^2) \rightarrow +\infty$ para $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la función $\exp(-1/z^2)$ no tiene límite en el punto $z = 0$.

¹⁾ Yu. V. Sojotski (1842-1929), matemático ruso.

Para cualquier contorno L orientado en el sentido contrario a las agujas del reloj y perteneciente al círculo $|z - z_0| < R$ dentro del cual se contiene el punto z_0 , al igual que en el caso del polo,

$$\int_L f(z) dz = 2\pi i c_{-1}. \quad (10)$$

El hecho consiste en que la integral sobre L en el caso dado (véase el § 6.6, observación 2) puede ser sustituida por la integral sobre cualquier circunferencia γ , orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj, que tenga por centro el punto z_0 y pertenezca al círculo $|z - z_0| < R$. Pero sobre la circunferencia γ las series (9) convergen uniformemente y, por consiguiente, se puede integrarlas término a término a lo largo de γ . No obstante, como sabemos,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^k} = 0 \quad (k \neq 1) \quad \text{y} \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$$

de donde se deduce la igualdad (10).

Ahora hagamos la siguiente definición: sea z_0 un punto singular aislado de la función $f(z)$, es decir, sea la función $f(z)$ analítica en cierto círculo

$$|z - z_0| < R$$

del cual queda excluido el punto z_0 . Se llama residuo de la función f en el punto z_0 la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) dz = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z), \quad (11)$$

donde L es el contorno en el círculo $|z - z_0| < R$ que está orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj y contiene el punto z_0 .

En virtud de lo dicho anteriormente (véanse los casos a), b) y c)), si

$$f(z) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h (z - z_0)^h \quad (0 < |z - z_0| < R)$$

es la serie de Laurent de f en el punto z_0 , entonces

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} \quad (12)$$

Por eso, si se conoce el desarrollo de la función en la serie de Laurent, el residuo se encuentra fácilmente, en el caso de un punto singular cualquiera.

En particular, si z_0 es un punto singular evitable, entonces

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0.$$

A veces es difícil desarrollar la función $f(z)$ en serie de Laurent y por eso es necesario buscar otros métodos para calcular el residuo, sin desarrollar la función en serie de Laurent.

Sea $z = z_0$ el polo de orden $m \geq 1$. Entonces

$$f(z) = \sum_{h=0}^{+\infty} c_h (z - z_0)^h + \sum_{h=0}^m c_{-h} (z - z_0)^{-h} \quad (c_{-m} \neq 0). \quad (13)$$

Multiplicando los miembros primero y segundo de (13) por $(z - z_0)^m$, tenemos

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1} (z - z_0) + \dots + c_{-1} (z - z_0)^{m-1} + \sum_{h=0}^{\infty} c_h (z - z_0)^{h+m}. \quad (14)$$

Si se deriva la igualdad (14) $(m - 1)$ veces, el término libre a la derecha será igual a $(m - 1)! c_{-1}$ y, por consiguiente,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}} = (m - 1)! c_{-1},$$

de donde

$$\operatorname{Res} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}. \quad (15)$$

Si la función $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, donde $\varphi(z_0) \neq 0$ y $\psi(z)$ tiene un cero simple para $z = z_0$ ($\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$), entonces $z = z_0$ es un polo simple de $f(z)$. En virtud de la fórmula (15) (cuando $m = 1$) tenemos

$$\operatorname{Res} f(z) = \operatorname{Res} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Ahora bien, en el caso dado

$$\operatorname{Res} f(z) = c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (16)$$

Cuando $z = z_0$ es un punto singular esencial no tenemos sino que un único método de calcular el residuo, o sea, el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Laurent.

EJEMPLO 2. Hallar el residuo de la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos z}$ en el punto $z = \pi/2$.

En el caso dado $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, donde $\varphi(z) = \operatorname{sen}^2 z$ y $\psi(z) = \cos z$. El punto $z = \pi/2$ es un polo simple de la función $f(z)$, ya que

$\varphi(\pi/2) = 1 \neq 0$, $\psi(\pi/2) = 0$, $\psi'(z) = -\operatorname{sen} z$, $\psi'(\pi/2) = -1 \neq 0$. Por lo tanto, por la fórmula (16) obtenemos

$$\operatorname{Res}_{z=\pi/2} f(z) = \frac{\varphi(\pi/2)}{\psi'(\pi/2)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

EJEMPLO 3. Hallar el residuo de la función $\exp(1/z)$ en el punto $z = 0$.

Tenemos

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

Ahora bien, el punto $z = 0$ es singular esencial y

$$\operatorname{Res}_{z=0} \exp\left(\frac{1}{z}\right) = c_{-1} = 1.$$

EJEMPLO 4. Hallar el residuo de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-3)}$$

respecto al punto $z = 2$.

El punto dado es el polo de segundo orden, por eso por la fórmula (15) tenemos

$$\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} [(z-2)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \frac{1}{z-3} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-1}{(z-3)^2} = -1.$$

§ 6.12. Clasificación de puntos singulares en el infinito

Supongamos ahora que en el teorema 1 del § 6.10 $z_0 = 0$ y $R = \infty$, mientras que r es un número no negativo cualquiera ($0 \leq r < \infty$). Entonces el teorema 1 reza: si la función $f(z)$ es analítica para todos los números complejos z que satisfagan la desigualdad

$$|z| > r, \quad (1)$$

entonces ésta puede ser desarrollada en serie de Laurent según las potencias de z :

$$f(z) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h z^h = F_1(z) + F_2(z), \quad (|z| > r), \quad (2)$$

que es convergente para todos los valores de z con $|z| > r$. Aquí

$$F_1(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{c_{-h}}{z^h}, \quad F_2(z) = \sum_{h=1}^{\infty} c_h z^h. \quad (3)$$

El conjunto (1) se llama *exterior del círculo* $|z| \leq r$. Es cómodo considerar que este conjunto es *el entorno de un punto infinitamente alejado* (punto ∞).

Ahora bien, añadimos formalmente al conjunto de los puntos (números) complejos un punto abstracto infinitamente alejado ($z = \infty$).

La función $f(z)$ es analítica en el entorno del punto $z = \infty$, excluyendo el mismo punto ∞ que es natural en el caso dado llamar *punto singular aislado de la función* f .

Según el comportamiento de la función $f(z)$ en el entorno del punto $z = \infty$ es lógico introducir la clasificación siguiente:

a) *La singularidad en el punto $z = \infty$ es evitable si*

$$c_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

o sea, si

$$f(z) = F_1(z) \quad (|z| > r).$$

En este caso

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} F_1(z) = c_0.$$

Es evidente asimismo que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} f(z) dz = -c_{-1},$$

donde L_- es el contorno arbitrario, orientado en el sentido de las agujas del reloj, que contiene dentro la circunferencia $|z| = r$.

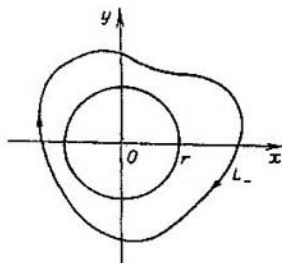


Fig. 143.

(fig. 143). Con cierta imaginación se puede suponer que el punto ∞ se encuentra dentro del contorno L_- : si nos movemos por el contorno L_- en el sentido de las agujas del reloj, el punto ∞ queda a la izquierda.

b) El punto $z = \infty$ es el polo de orden m si

$$f(z) = F_1(z) + \sum_{h=1}^m c_h z^h \quad (c_m \neq 0).$$

En este caso, evidentemente, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$. Luego

$$\int_{L_-} f(z) dz = \sum_{h=0}^{\infty} c_{-h} \int_{L_-} \frac{dz}{z^h} + \sum_{h=1}^m c_h \int_{L_-} z^h dz = -c_{-1} \int_{L_-} \frac{dz}{z} = -2\pi i c_{-1},$$

porque

$$\int_{L_-} z^k dz = - \int_{L} z^k dz = 0 \quad (k \neq -1).$$

c) El punto $z = \infty$ es un punto singular esencial si

$$f(z) = F_1(z) + \sum_{h=1}^{\infty} c_h z^h \quad (4)$$

y hay un conjunto infinito de los números c_h no iguales a cero.

La función $F_1(z)$ tiende al límite finito cuando $z \rightarrow \infty$, mientras que la función $\sum_{h=1}^{\infty} c_h z^h$, en virtud del teorema de Sojotski, no tiende a ningún límite para $z \rightarrow \infty$. Por eso la función $f(z)$ tampoco tiende hacia un límite cuando $z \rightarrow \infty$.

Luego

$$\int_{L_-} f(z) dz = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h \int_{L_-} z^h dz = -2\pi i c_{-1}.$$

Aquí la integración término a término es legítima, puesto que, como sabemos, las integrales \int_{L_-} se pueden sustituir por las integrales

\int_C sobre la circunferencia de radio $\rho > r$ en la cual la serie (4) converge uniformemente.

Formulemos la definición.

Se llama *residuo de la función $f(z)$ en un punto infinitamente alejado*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} f(z) dz = \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z),$$

donde L_- es un contorno cerrado arbitrario, orientado en el sentido de las agujas del reloj y perteneciente al conjunto $|z| > r$ (¡donde la función

$f(z)$ es analítica). En el caso dado se dice que al movernos por el contorno en el sentido de las agujas del reloj el punto ∞ queda a la izquierda».

En virtud de lo dicho (véanse a), b) y c)), si

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad (|z| > r),$$

es la serie de Laurent de la función f en el exterior de la circunferencia $|z| = r$, entonces

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Si $z = \infty$ es un punto singular evitable, en la serie de Laurent de la función $f(z)$ faltan las potencias positivas de z , mientras que z^{-1} puede estar presente, por eso en este caso $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$ no obligatoriamente es igual a cero.

EjemPlo 1. La función

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-1-2n} \quad (|z| > 1) \end{aligned}$$

tiene la singularidad evitable en el punto $z = \infty$ y $c_{-1} = 1$, por lo tanto,

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -1.$$

§ 6.13. Teorema de los residuos

TEOREMA 1. Sea la función $f(z)$ analítica sobre todo el plano z , a excepción de un número finito de puntos z_1, \dots, z_N . Entonces tiene lugar la igualdad

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \quad (1)$$

DEMOSTRACIÓN. Construyamos las circunferencias $\gamma_1^-, \gamma_2^-, \dots$, \dots, γ_N^- , orientadas en el sentido de las agujas del reloj, que tengan por centros z_1, z_2, \dots, z_N , respectivamente, y sean de un radio tan pequeño que no se intersequen.

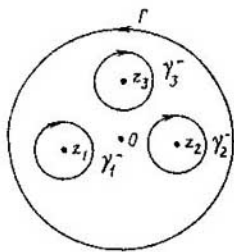


Fig. 144.

Vamos a construir, además la circunferencia Γ , orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj, que tenga por centro el punto nulo y un radio tan grande que las circunferencias $\gamma_1^-, \dots, \gamma_N^-$ resulten dentro de Γ (fig. 144). El contorno compuesto $L = \gamma_1^- + \gamma_2^- + \dots + \gamma_N^- + \Gamma$ limita la región Ω dentro de la cual la función $f(z)$ es analítica. Es analítica asimismo sobre L . Además, al recorrer L , la región Ω queda a la izquierda.

Pero entonces, en virtud del teorema de Cauchy para un contorno compuesto,

$$\int_{\gamma_1^-} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_N^-} f(z) dz + \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (2)$$

o bien, si multiplicamos el primer miembro de esta igualdad por $-1/2\pi i$, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1^-} f(z) dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N^-} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} f(z) dz = 0.$$

o sea,

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + \dots + \operatorname{Res}_{z=z_N} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Hay que tener en cuenta que dentro de cada uno de los contornos γ_k hay un solo punto singular z_k y fuera de Γ hay un solo punto singular $z = \infty$. El teorema queda demostrado.

La aplicación de este teorema se reduce a lo siguiente. Si es dificultoso calcular una de las integrales que forma parte de (2), entonces se puede procurar realizar el cálculo del resto de las integrales que forman parte de (2) y obtener la integral buscada de (2).

El mismo cálculo de estas integrales se reduce al desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Laurent en el entorno de los puntos singulares correspondientes. En realidad, tampoco es necesario saber estos desarrollos por completo. Basta sólo conocer los términos que tienen la forma $c_{-1}/(z - z_k)$ en estos desarrollos para llegar al objetivo.

§ 6.14. Cálculo de integrales con ayuda de los residuos

Sea la función $f(z)$ analítica en el semiplano superior, incluyendo el eje real, salvo un número finito de los puntos singulares a_1, a_2, \dots, a_N que están en el semiplano indicado. Examinemos para estas condiciones los métodos de cálculo de las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx.$$

TEOREMA 1. *Supongamos que la función $f(z)$ satisface las condiciones citadas y, además, $|f(z)| \leq M/|z|^m$ cuando $|z| \geq R$, donde $m \geq 2$ y R es un número lo bastante grande. Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res} f(z). \quad (1)$$

DEMOSTRACION. Describamos la semicircunferencia L (orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj) de radio R y con

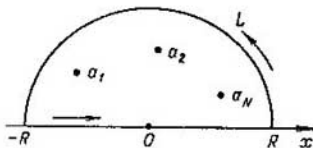


Fig. 145.

el centro en el punto O de modo que todos los puntos singulares de la función $f(z)$ lleguen a parar en el interior de L (fig. 145). En virtud del teorema 1 del § 6.13

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_L f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res} f(z). \quad (2)$$

Como $|f(z)| \leq M/|z|^m$ para $|z| \geq R$, entonces

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^m} \pi R = \frac{\pi M}{R^{m-1}} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \quad (m-1 \geq 1).$$

Pasando al límite en la igualdad (2) cuando $R \rightarrow \infty$, obtenemos (1).

EJEMPLO 1. Calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

La función $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ es analítica en el semiplano superior a excepción de los puntos

$$a_1 = e^{\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad a_2 = e^{3\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$$

en los cuales los polos son simples. Además, $|f(z)| \leq 1/|z|^4$ ($m = 4 > 2$). Hallemos los residuos de la función $f(z)$ en los puntos a_1 y a_2 . Según la fórmula (16) del § 6.11.

$$\operatorname{Res}_{z=a_j} f(z) = \frac{1}{\psi'(a_j)}, \quad (j = 1, 2),$$

donde $\psi(z) = 1 + z^4$. Tenemos $\psi'(z) = 4z^3$, $\psi'(a_1) = 4e^{3\pi i/4} = -4e^{-\pi i/4} \neq 0$, $\psi'(a_2) = 4e^{i\pi/4} = 4e^{i\pi/4} \neq 0$, de donde

$$\operatorname{Res}_{z=a_1} f(z) = -\frac{1}{4} e^{i\pi/4}, \quad \operatorname{Res}_{z=a_2} f(z) = \frac{1}{4} e^{-i\pi/4}.$$

A base de la fórmula (1) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \frac{2\pi i}{4} (-e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) = \\ &= \pi \frac{e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}}{2i} = \pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

TEOREMA 2. *Supongamos que la función $f(z)$ satisface las condiciones indicadas al principio del párrafo y $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ uniformemente respecto a $\arg z = \psi$. Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z) e^{iz}. \quad (3)$$

DEMOSTRACION. Lo mismo que al demostrar el teorema 1 tenemos

$$\int_{-R}^R f(x) e^{ix} dx + \int_L f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z) e^{iz} \quad (4)$$

(la función $f(z) e^{iz}$ tiene las mismas particularidades que $f(z)$).

Debemos demostrar que cuando $R \rightarrow \infty$ la integral $\int_L f(z) e^{iz} dz$ tiende a cero. Tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda = \left| \int_L f(z) e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{-R \operatorname{sen} \varphi} e^{iR \cos \varphi} i Re^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \\ &\leq \int_0^{\pi} |f(Re^{i\varphi})| e^{-R \operatorname{sen} \varphi} R d\varphi. \end{aligned}$$

En virtud de la condición del teorema $|f(\operatorname{Re}^{i\varphi})| \leq \varepsilon$ cuando $R > N_1$ para todos los valores de φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$). Por eso ($\operatorname{sen} \varphi > 2\varphi/\pi$ cuando $0 \leq \varphi \leq \pi/2$)

$$\begin{aligned} \Lambda &\leq \varepsilon \int_0^{\pi} R e^{-R \operatorname{sen} \varphi} d\varphi = 2\varepsilon \int_0^{\pi/2} R e^{-R \operatorname{sen} \varphi} d\varphi \leq 2\varepsilon \int_0^{\pi/2} R e^{-2R\varphi/\pi} d\varphi = \\ &= \left(\frac{2R}{\pi} \varphi = t \right) = \varepsilon \pi \int_0^R e^{-t} dt = \pi \varepsilon (1 - e^{-R}) < \pi \varepsilon \quad (R > N_1). \end{aligned}$$

Pasando al límite en (4), para $R \rightarrow \infty$ obtenemos (3).

Si la función $f(z)$ tiene singularidades sobre el eje real, entonces aplicando una construcción especial del contorno de integración se pueden calcular las integrales respectivas si éstas existen.

EJEMPLO 2. Sea $f(z) = 1/z$. Esta función tiene el polo simple sobre el eje real en el punto $z = 0$. Luego, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ uniformemente respecto a $\arg z = \varphi$.

Construyamos el contorno de integración según se indica en la fig. 146. El recorrido del contorno se lleva a cabo según las flechas

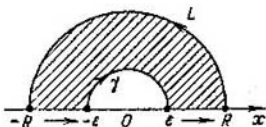


Fig. 146.

señaladas en esta figura. En la parte rayada la función e^{iz}/z es analítica para todo R y todo ε , por eso de acuerdo con el teorema de Cauchy (la semicircunferencia está orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj)

$$\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_L \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (5)$$

Al igual que anteriormente, es fácil demostrar que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_L z^{-1} e^{iz} dz = 0$.

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} e^{iz} \frac{dz}{z} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} \frac{i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = \\ &= i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} d\varphi = i \int_0^{\pi} d\varphi = \pi i. \end{aligned}$$

Ahora bien, la igualdad (5) en el límite, cuando $R \rightarrow \infty$ y $\varepsilon \rightarrow 0$, toma la forma

$$\pi i = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2xi} dx = 2i \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx,$$

o sea,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Puesto que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es par, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi.$$

Observación 1. Si bajo el signo integral se encuentra el factor $\operatorname{sen} x$ o $\operatorname{cos} x$, con frecuencia resulta más cómodo examinar la integral de la función sustituyendo $\operatorname{sen} x$ o $\operatorname{cos} x$ por e^{ix} . Esto se explica por el hecho de que $|\operatorname{sen} z|$ y $|\operatorname{cos} z|$ crecen indefinidamente cuando $z \rightarrow \infty$, mientras que $|e^{iz}| = e^{-y} \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow \infty$ ($y > 0$). Por eso, en general, el comportamiento de la función $f(z) \begin{cases} \operatorname{sen} z \\ \operatorname{cos} z \end{cases}$ será otro que el de la función $f(z)$. Luego, una vez obtenido el valor de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$, al separar las partes real e imaginaria, encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{cos} x dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} x dx.$$

EJEMPLO 3. Calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{cos} ax dx}{a^2 + x^2} \quad (\alpha, a > 0).$$

Examinemos la función $e^{iaz}/(a^2 + z^2)$. Esta función es analítica en el semiplano superior, a excepción del punto $z = ai$. La función $f(z) = 1/(a^2 + z^2) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$ uniformemente respecto a $\arg z = \varphi$. Por eso según el teorema 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{a^2 + x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ai} \frac{e^{iaz}}{a^2 + z^2} = 2\pi i \frac{e^{iaai}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}.$$

Separando la parte real, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-aa}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-aa}.$$

EJEMPLO 4. Calcular la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2} dx.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} e^{-2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-2} = \frac{\pi}{4} (1-e^{-2}) \end{aligned}$$

Así, pues,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} (1-e^{-2}).$$

EJEMPLO 5.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx &= \int_0^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (1-e^{-2}) = \frac{\pi}{4} (1+e^{-2}). \end{aligned}$$

EJEMPLO 6. Calcular las integrales de Fresnel¹⁾

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x^2 dx.$$

Examinemos la función $e^{i^2 z^2}$. Dentro de la región rayada (fig. 147) esta función es analítica, por eso según el teorema de Cauchy

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_L e^{i^2 z^2} dz + \int_\gamma e^{iz^2} dz = 0,$$

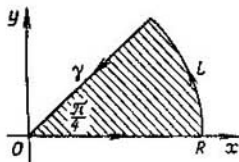


Fig. 147.

¹⁾ A. J. Fresnel (1788—1827), físico francés.

donde L es una parte de la circunferencia $|z| = R$ y γ es el segmento de la recta $z = \rho e^{i\pi/4}$, $0 \leq \rho \leq R$ (orientados por las flechas). Luego

$$\int_{\gamma} e^{iz^2} dz = \int_R^0 e^{i\rho^2} e^{i\pi/4} d\rho = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho \rightarrow -e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho;$$

$$\left| \int_L e^{iz^2} dz \right| = \left| \int_0^{\pi/4} e^{i(Re^{i\varphi})^2} Rie^{i\varphi} d\varphi \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\pi/4} Rie^{i\varphi} e^{iR^2 \cos 2\varphi} e^{-R^2 \sin 2\varphi} d\varphi \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi/4} R e^{-R^2 \sin 2\varphi} d\varphi \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \frac{4\varphi}{\pi}} d\varphi \leq \frac{c}{R} \int_0^{\infty} e^{-t} dt \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, en el límite para $R \rightarrow \infty$ obtenemos (véase el § 2.13, ejemplo 3)

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

Separando las partes real e imaginaria, tenemos

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{4}}, \quad \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{4}},$$

o sea,

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

§ 6.15. Función lineal. Función lineal fraccional

Función lineal entera. Vamos a examinar las funciones

$$w = z + c, \tag{1}$$

$$w = rz, \tag{2}$$

$$w = e^{i\theta} z, \tag{3}$$

donde c es un número complejo constante, $r > 0$ y θ , un número real arbitrario.

Las tres funciones (1), (2) y (3) aplican el plano z sobre todo el plano w .

La función (1) lleva a cabo el desplazamiento del plano z en el vector c (fig. 148).

La función (2) ($|r| > 0$) realiza el estiramiento (cuando $r > 1$) y la contracción (cuando $r < 1$) del plano z r veces: $|w| = r|z|$, $\text{Arg } w = \text{Arg } z$. La fig. 149 muestra el caso cuando $r > 1$.

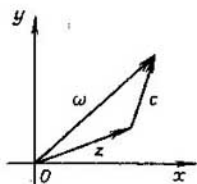


Fig. 148.

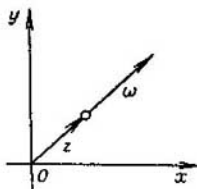


Fig. 149.

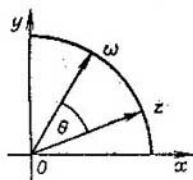


Fig. 150.

La función (3) expresa el giro del plano z alrededor del punto nulo en el ángulo θ (fig. 150).

Las funciones (1), (2) y (3) tienen respectivamente las derivadas

$$w' = 1, \quad w' = r, \quad w' = e^{i\theta},$$

no iguales a cero, y por eso realizan aplicaciones conformes.

Estas tres funciones son casos particulares de una *función lineal* entera más general

$$w = az + b, \quad (a \neq 0), \quad (4)$$

donde a y b son los números complejos constantes.

La aplicación realizada por ella se puede escribir en la forma

$$w = a(z + c) = re^{i\theta}(z + c),$$

donde $c = b/a$, $a = re^{i\theta}$.

De aquí se desprende que se reduce a (1), (2) y (3):

$$w = ru, \quad u = e^{i\theta}v, \quad v = z + c.$$

En otras palabras, la transformación del plano z efectuada por la función (4) se reduce a la traslación (en el vector c), luego al giro del plano (en el ángulo θ) y luego al estiramiento o contracción del plano r veces.

Función $w = \frac{1}{z}$. Suponiendo $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$, tenemos

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \theta = -\varphi, \quad (5)$$

donde la segunda igualdad se toma con una exactitud hasta $2k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

De aquí se ve que la circunferencia $|z| = 1$ pasa a sí misma, o más exactamente, cada uno de sus puntos pasa a un punto simétrico respecto al eje real.

Observemos que si la circunferencia $|z| = 1$ es recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj, la circunferencia aplicada $|w| = 1$ es recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

Es cómodo dividir la transformación (5) en dos transformaciones:

$$r' = \frac{1}{r}, \quad \varphi' = \varphi; \quad (6)$$

$$\rho = r', \quad \theta = -\varphi'. \quad (7)$$

La transformación (6) se llama *inversión* respecto a la circunferencia unidad.

En la inversión respecto a la circunferencia unidad los puntos z y z'

situados sobre el rayo que constituye el ángulo φ con el eje x pasan a los puntos que están sobre este mismo rayo y además de modo que

$$rr' = 1.$$

La construcción del punto $z' = r'e^{i\varphi}$ según el punto conocido $z = re^{i\varphi}$ está representada en la fig. 151 donde se examina el caso cuando z se halla fuera de la circunferencia $|z| = 1$. Del punto z trazamos la tangente a la circunferencia $|z| = 1$, T es el punto de tangencia, $Tz' \perp Oz$. De la semejanza de los triángulos ($\Delta OTz'$ y ΔOTz)

$$\frac{OT}{r'} = \frac{r}{OT}, \quad OT = 1, \quad rr' = 1.$$

Si el punto z se encuentra dentro de la circunferencia $|z| = 1$, levantamos de este punto la perpendicular a Oz hasta la intersección con la circunferencia en el punto T . Por este punto trazamos la tangente a la circunferencia hasta la intersección con el rayo Oz . El punto de intersección será precisamente el punto z' .

Los puntos z y z' se llaman *recíprocamente simétricos respecto a la circunferencia $|z| = 1$* .

Aplicando ahora (según (7)) el punto z' especularmente respecto al eje real, obtenemos el punto

$$w = r'e^{-i\varphi} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{z}.$$

De la fórmula $w = 1/z$ se ve que cuando $z \rightarrow 0$ el punto w tiene un módulo indefinidamente creciente, por eso es cómodo considerar que con ayuda de esta fórmula al punto $z = 0$ le corresponde un

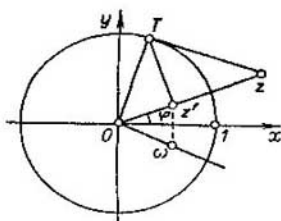


Fig. 151.

«punto infinitamente alejado» que se designa por el símbolo $w = \infty$.

Así, pues, la función $w = 1/z$ aplica el plano z sobre el plano w con ayuda de la inversión respecto a la circunferencia $|z| = 1$ y de la aplicación especular respecto al eje x . Además, el punto $z = 0$ pasa al punto $w = \infty$ y el punto $z = \infty$ al punto $w = 0$.

Luego $w' = \frac{-1}{z^2} \neq 0$ para cualesquiera z con $|z| > 0$, por eso la aplicación con ayuda de la función $w = 1/z$ ($|z| > 0$) es conforme.
Función lineal fraccional

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (8)$$

Suponemos que $ad - bc \neq 0$. Es evidente que el punto $z = -d/c$ ($c \neq 0$) pasa al punto $w = \infty$.

La función w , separando su parte entera, puede representarse en la forma

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}, \quad (9)$$

de donde se ve que

$$w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \quad (cz+d \neq 0),$$

o sea, la aplicación con ayuda de la función (8) es conforme.

De la igualdad (9) se desprende que la aplicación dada se compone de las aplicaciones anteriormente examinadas:

$$z' = cz + d, \quad z'' = 1/z', \quad w = Az'' + B.$$

Si consideramos la línea recta como circunferencia de un radio infinito, entonces en la transformación (9) la circunferencia pasa a la circunferencia (*propiedad circular*).

De las consideraciones geométricas queda claro que debido a la traslación paralela, estiramiento y giro la circunferencia pasa a la circunferencia. Además, el interior de la circunferencia que se aplica pasa al interior de la circunferencia aplicada. Por eso es suficiente comprobar la propiedad circular para la transformación $w = 1/z$. Como sabemos, la ecuación de la circunferencia en el plano xOy tiene la forma

$$A(x^2 + y^2) + mx + ny + l = 0,$$

o bien

$$Az\bar{z} + m\frac{z+\bar{z}}{2} + n\frac{z-\bar{z}}{2i} + l = 0 \quad (z = x + iy, \bar{z} = x - iy),$$

o bien

$$Azz + \bar{B}z + B\bar{z} + l = 0 \quad \left(B = \frac{m+in}{2} \right). \quad (10)$$

En el caso examinado $z = 1/w$, $\bar{z} = 1/\bar{w}$. Por lo tanto, la ecuación (10) se transforma en la ecuación

$$A \frac{1}{ww} + \frac{\bar{B}}{w} + \frac{B}{\bar{w}} + l = 0$$

o en la ecuación $A + \bar{B}w + B\bar{w} + lww = 0$

lo cual describe cierta circunferencia en el plano w .

En particular, para $l = 0$ obtenemos una línea recta, o sea, la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas en el plano z se transforma en recta en el plano w .

Observemos que la aplicación con ayuda de la función (9) puede hacer pasar el interior de la circunferencia que se aplica tanto al interior como al exterior de la circunferencia aplicada.

En principio, la función (9) depende de tres parámetros en calidad de los cuales se puede tomar la relación de los números a , b , c , d respecto a uno de ellos (desigual a cero).

Por eso para determinar la transformación (9) es necesario prefijar tres condiciones. Por regla general, se dan tres pares de los puntos correspondientes:

$$w_k = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx_k+d)} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Es fácil calcular que

$$w - w_k = \frac{(ad-bc)(z-z_k)}{(cz+d)(cx_k+d)}, \quad w_k - w_j = \frac{(ad-bc)(z_k-z_j)}{(cx_k+d)(cx_j+d)}.$$

$$\text{De aquí } \frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \quad (11)$$

Esta es precisamente la transformación (9) que hace pasar los puntos z_k a w_k ($k = 1, 2, 3$).

Supongamos que están dadas las circunferencias Γ y Γ' en los planos z y w , respectivamente. Es necesario hallar la aplicación lineal fraccional que hace pasar Γ a Γ' y el interior de Γ al de Γ' .

Asignemos sobre Γ y Γ' las tripletas arbitrarias respectivas de los puntos $\{z_1, z_2, z_3\}$ y $\{w_1, w_2, w_3\}$ que siguen en el sentido positivo, o sea, en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Entonces la transformación (11) será precisamente la solución del problema planteado.

En efecto, aplica los puntos z_k en los puntos w_k ($k = 1, 2, 3$), respectivamente, y, evidentemente, la circunferencia Γ sobre Γ' (en virtud de la propiedad circular).

El hecho de que en el caso dado el interior de Γ pasa al interior de Γ' se deduce de la conformidad de la aplicación realizada por la función lineal fraccional.

En el caso dado las circunferencias Γ y Γ' tienen la orientación positiva (son recorridas en el sentido contrario al de las agujas del reloj). En virtud de la conformidad de la aplicación la normal interior a la Γ (por ejemplo, en el punto z_1) se transforma en el arco de la circunferencia (perpendicular a Γ' en el punto w_1) situada dentro de Γ' lo cual asegura la aplicación del interior de Γ sobre el interior de Γ' .

No obstante, si es necesario hallar una transformación lineal fraccional que aplique Γ sobre Γ' y el interior de Γ sobre el exterior

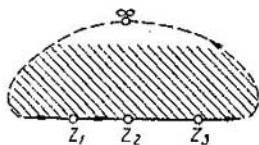


Fig. 152.

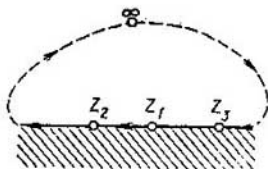


Fig. 153.

de Γ' , entonces en la fórmula (11) hay que tomar los puntos $\{z_1, z_2, z_3\}$ sobre Γ orientados en el sentido positivo y los puntos $\{w_1, w_2, w_3\}$ sobre Γ' orientados en el sentido negativo.

Estas conclusiones conciernen también al caso cuando ora Γ , ora Γ' , ora Γ y Γ' al mismo tiempo son las rectas. Sin embargo, es preciso explicar qué es lo que debe entenderse por interior de la recta Γ si lleva marcados los puntos $\{z_1, z_2, z_3\}$.

Si se trata de la fig. 152 esto es el semiplano superior y si se trata de la fig. 153, el semiplano inferior.

Si la recta Γ está completada por el punto ∞ , se puede imaginarla como una circunferencia continua (véanse las figs. 152 y 153) de radio infinito.

Vamos a movernos por Γ (posiblemente, a través de un punto infinitamente alejado) de z_1 a z_2 en un sentido tal que el arco $z_1 z_2$ no contenga z_3 . De este modo el sentido de recorrido sobre Γ queda determinado y entonces se llama interior de Γ la región situada a la izquierda de Γ cuando nos movemos en esta dirección. En realidad es el semiplano superior o inferior el que hace las veces de esta región.

PROBLEMAS.

1. Hallar una transformación lineal fraccional que aplique el interior del círculo unidad sobre el semiplano superior de modo que los puntos $z_1 = +1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ pasen a los puntos $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ y $w_3 = 2$, respectivamente.

2. Escribir una transformación lineal fraccional del semiplano superior en sí mismo con la cual los puntos $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ pasen a los puntos $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ y $w_3 = 3$, respectivamente.

§ 7.1. Transformada de Laplace

En este capítulo examinaremos, por regla general, las funciones $f(t)$ de una variable real t , dadas sobre $\{0, \infty\}$. A veces consideraremos que $f(t)$ está definida sobre $(-\infty, \infty)$, pero para $t < 0$ la función $f(t) \equiv 0$. Además, supondremos que la función $f(t)$ es continua a trozos y sobre cada intervalo finito tiene un número finito de los



Fig. 154.

puntos de discontinuidad de primer orden. Sea $p = a + ib$ un número complejo.

Examinemos la función

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

Si

$$|f(t)| \leq M \exp(s_0 t), \quad (2)$$

donde $a > s_0$, la función $F(p)$ es analítica en el semiplano $\text{Re } p > s_0$ (fig. 154).

En efecto,

$$\begin{aligned} |F'(p)| &= \left| \int_0^{\infty} t \exp(-at - ibt) f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} t \exp(-at) |f(t)| dt \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} \exp(-at) \cdot t M \exp(s_0 t) dt = M \int_0^{\infty} t \exp(-(a - s_0)t) dt < \infty, \quad (3) \end{aligned}$$

ya que $a > s_0$. La legitimidad de la derivación respecto a p bajo el signo integral se deduce de la desigualdad (3) y del hecho de que

la función $t f(t) \exp(-pt)$ es continua a trozos (véase el § 2.15 teorema 2).

La función $F(p)$ se llama *transformada de Laplace* de la función $f(t)$, *L-transformada* o *transformación de Laplace*.

Vamos a emplear las designaciones siguientes:

$$F(p) = L(f(t); p), \quad f(t) \stackrel{L}{\rightleftharpoons} F(p), \quad F(p) \stackrel{L}{\leftarrow} f(t).$$

En este caso la función $f(t)$ se denomina *función inicial* u *original*. El número s_0 ($s_0 = s_0(f)$) se llama *índice de crecimiento de la función* $f(t)$ (a continuación, si no se menciona especialmente, supondremos que el índice de crecimiento de f es igual a s_0).

La determinación de la transformada para el original dado y a revés la determinación del original para la transformada conocida se denomina *cálculo operacional* cuyo comienzo dio Heaviside¹⁾. Al elaborar el cálculo operacional Heaviside no lo fundamentó. Notemos que examinó la transformación

$$\bar{F}(p) = p \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt,$$

o sea, $\bar{F}(p) = pF(p)$.

En algunos problemas es cómoda la transformación de Laplace y en otros, la de Heaviside. Nosotros examinaremos la transformación de Laplace.

La argumentación del cálculo operacional fue dada en los años veinte de nuestro siglo en los trabajos de varios matemáticos.

TEOREMA 1 (DE UNICIDAD). *Si dos funciones continuas $f(t)$ y $g(t)$ tienen una misma L-transformada $F(p)$, ellas son idénticamente iguales.*

No demostraremos este teorema.

En virtud del teorema 1 podemos decir que para una función continua $f(t)$, no igual idénticamente a cero, la transformada no puede ser una función periódica.

En efecto, si $\forall p F(p) = F(p + \omega)$, donde $\omega \neq 0$, entonces:

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt = \int_0^{\infty} \exp(-(p + \omega)t) f(t) dt.$$

Según el teorema 1

$$f(t) = \exp(-\omega t) f(t),$$

o sea, $\exp(-\omega t) \equiv 1$ ($\omega \neq 0$) lo que no puede ser.

¹⁾ O. Heaviside (1850—1925), ingeniero-electricista inglés.

§ 7.2. Transformada de funciones elementales y propiedades de las transformadas

Se llama *función unidad* o *función de Heaviside* la función

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Es evidente que el índice de crecimiento de esta función es $s_0 = 0$. Hallemos la L -transformada de esta función en la región $\text{Re } p > 0$:

$$L(\sigma_0(t); p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt = -\frac{1}{p} \exp(-pt) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Ahora bien,

$$\sigma_0(t) = \frac{1}{p}. \quad (1)$$

Análogamente, para la función $f(t) = \cos t$, integrando por partes, encontramos

$$\begin{aligned} L(\cos t; p) &= \int_0^{\infty} \exp(-pt) \cos t dt = \{\exp(-pt) = u, \cos t dt = dv\} = \\ &= \exp(-pt) \sin t \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} \exp(-pt) \sin t dt = \\ &= p \int_0^{\infty} \exp(-pt) \sin t dt = p \left[-\exp(-pt) \cos t \Big|_0^{\infty} - \right. \\ &\quad \left. - p \int_0^{\infty} \exp(-pt) \cos t dt \right] = p - p^2 L[\cos t; p]. \end{aligned}$$

De aquí

$$L(\cos t; p) = \frac{p}{1+p^2} \quad (\text{Re } p > 0),$$

o sea,

$$\cos t = \frac{p}{1+p^2}. \quad (2)$$

De paso hemos demostrado que

$$L(\cos t; p) = pL(\sin t; p),$$

de donde

$$\operatorname{sen} t \doteq \frac{1}{1+p^2}. \quad (3)$$

TEOREMA 1 (DE SEMEJANZA). Si $f(t) \doteq F(p)$, entonces $f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ ($\alpha > 0$), $\operatorname{Re} p > \max\{s_0, \alpha s_0\}$.

En efecto.

$$\begin{aligned} L[f(\alpha t); p] &= \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(\alpha t) dt = \left\{ \alpha t = u, dt = \frac{du}{\alpha} \right\} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{p}{\alpha} u\right) f(u) du = \frac{1}{\alpha} L\left[f(u); \frac{p}{\alpha}\right]. \end{aligned}$$

En virtud del teorema 1 obtenemos

$$\cos \alpha t \doteq \frac{1}{\alpha} \frac{p/\alpha}{1+(p/\alpha)^2} = \frac{p}{p^2 + \alpha^2}; \quad (4)$$

$$\operatorname{sen} \alpha t \doteq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1+(p/\alpha)^2} = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}. \quad (5)$$

TEOREMA 2 (PROPIEDAD DE LINEALIDAD). Tiene lugar la igualdad

$$L[Af(t) + Bg(t); p] = AL[f(t); p] + BL[g(t); p],$$

donde A y B son los números constantes.

Esta propiedad se deduce de la propiedad correspondiente de una integral impropia. Notemos que si los índices de crecimiento de las funciones f y g son iguales a s_0 y \bar{s}_0 , respectivamente, entonces la transformada $Af + Bg$ existe en el semiplano $\operatorname{Re} p > \max\{s_0, \bar{s}_0\}$.

EJEMPLO 1. Hallar la transformada de la función

$$f(t) = 3\sigma_0(t) + 2 \cos 3t.$$

En virtud de (1), (4) y del teorema (2) tenemos

$$L[f(t); p] = 3L[\sigma_0(t); p] + 2L[\cos 3t; p] = \frac{3}{p} + 2 \frac{p}{p^2 + 9}.$$

EJEMPLO 2. Hallar el original de la transformada

$$F(p) = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2 + 16}.$$

Representemos la transformada $F(p)$ en la forma

$$F(p) = 2 \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{4}{p^2 + 4^2}.$$

Tenemos

$$\frac{1}{p} \doteq \sigma_0(t), \quad \frac{4}{p^2 + 4^2} \doteq \operatorname{sen} 4t.$$

Por consiguiente, el original (según el teorema 1 del § 7.1)...

$$f(t) = 2\sigma_0(t) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4t.$$

TEOREMA 3 (DESPLAZAMIENTO DE LA TRANSFORMADA).

$$L[f(t) \exp(-\alpha t); p] = L[f(t); p + \alpha], \quad \operatorname{Re}(p + \alpha) > s_0.$$

La demostración es evidente.

EJEMPLO 3. Hallar la transformada de las funciones $e^{-\alpha t} \cos \beta t$, $e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$, $e^{-\alpha t}$.

Puesto que

$$\cos \beta t = \frac{p}{p^2 + \beta^2},$$

entonces según el teorema 3

$$L[\exp(-\alpha t) \cos \beta t; p] = \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}. \quad (6)$$

Análogamente, utilizando las fórmulas (5) y (1), tenemos

$$L[\exp(-\alpha t) \operatorname{sen} \beta t; p] = \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad (7)$$

$$L[\exp(-\alpha t); p] = L[\sigma_0(t); p + \alpha] = \frac{1}{p + \alpha}. \quad (8)$$

EJEMPLO 4. Hallar $L[\operatorname{ch} \alpha t; p]$, $L[\operatorname{sh} \alpha t; p]$.

Utilizando el teorema 2 y la igualdad (8), tenemos

$$\begin{aligned} L[\operatorname{ch} \alpha t; p] &= L\left[\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}; p\right] = \frac{1}{2} L[e^{\alpha t}; p] + \frac{1}{2} L[e^{-\alpha t}; p] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{p - \alpha} + \frac{1}{2} \frac{1}{p + \alpha} = \frac{p}{p^2 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$L[\operatorname{sh} \alpha t; p] = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}.$$

EJEMPLO 5. Hallar el original para la transformada $F(p) = 1/(p^2 + 2p + 5)$.

tenemos

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{2}{2[(p+1)^2 + 2^2]} = \frac{2}{p^2 + 2^2} = e^{-t} \operatorname{sen} 2t, \\ \frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} &= e^{-t} \operatorname{sen} 2t, \quad f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

TEOREMA 4 (DERIVACIÓN DE UNA TRANSFORMADA).

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} L[f(t); p] = L[t^n f(t); p].$$

DEMOSTRACION. Si $\operatorname{Re} p > s_0$, donde s_0 es el índice de crecimiento de la función $f(t)$, entonces la integral

$$\int_0^{\infty} t^n f(t) \exp(-pt) dt$$

existe para todo valor de $n = 1, 2, \dots$. Luego, es evidente que

$$\frac{d^n}{dp^n} \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt = \int_0^{\infty} (-t)^n \exp(-pt) f(t) dt,$$

de donde

$$(-1)^n L[f(t) t^n; p] = \frac{d^n}{dp^n} L[f(t); p].$$

EJEMPLO 6. Por cuanto $\frac{1}{p} \doteq \sigma_0(t)$, entonces en virtud del teorema 4 obtenemos

$$(-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) \doteq 1 \cdot t,$$

o sea,

$$t \doteq \frac{1}{p^2}.$$

Continuando la derivación, obtenemos

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Si n no es un número entero, entonces

$$t^n \doteq \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}},$$

donde

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^a dt = L[t^a; 1].$$

Cuando n es un número natural, tenemos $\Gamma(n+1) = n!$

EJEMPLO 7. Hallar la transformada de la función $t \cos \alpha t$.
Tenemos

$$\frac{p}{p^2 + \alpha^2} \doteq \cos \alpha t, \quad -\left(\frac{p}{p^2 + \alpha^2} \right)' \doteq t \cos \alpha t$$

o bien

$$\frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2} \doteq t \cos \alpha t. \quad (1)$$

TEOREMA 5 (SOBRE LA DERIVACION DEL ORIGINAL). Es válida fórmula

$$L[f'(t); p] = pL[f(t); p] - f(0) \quad (\operatorname{Re} p > s_0) \quad (1)$$

suponiendo que la función $f(t)$ es continua ¹⁾, tiene la derivada $f'(t)$ continua a trozos sobre $[0, \infty)$ con discontinuidades de primer género y los índices de crecimiento de $f(t)$ y $f'(t)$ son iguales a s_0 .

DEMOSTRACION. Tenemos

$$\begin{aligned} L[f'(t); p] &= \int_0^{\infty} \exp(-pt) f'(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \exp(-pt) f'(t) dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[e^{-pt} f(t) \Big|_0^N + p \int_0^N e^{-pt} f(t) dt \right] = \\ &= -f(0) + pL[f(t); p] \quad (\operatorname{Re} p > s_0), \end{aligned}$$

porque

$$|e^{-pN} f(N)| \leq e^{-\alpha N} M e^{\sigma_0 N} = M e^{-(\alpha - \sigma_0)N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

CONOLARIO 1. Es válida la fórmula

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(t); p] &= p^n L[f(t); p] - p^{n-1} f(0) - \dots \\ &\dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (\operatorname{Re} p > s_0) \quad (12) \end{aligned}$$

a condición de que $f(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ sean continuas, $f^{(n)}$ sea continua a trozos sobre $[0, \infty)$ y el crecimiento de la función f junto con sus derivadas hasta el orden de n , inclusivamente, sea igual a s_0 .

En particular, cuando

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0 \quad (13)$$

tiene lugar

$$L[f^{(n)}(t); p] = p^n L[f(t); p]. \quad (14)$$

EJEMPLO 8. Hallar la transformada de la función $f(t) = \cos^2 t$.

Sea $F(p) \stackrel{\cdot}{=} \cos^2 t = f(t)$. Entonces

$$f'(t) \stackrel{\cdot}{=} pF(p) - f(0).$$

Pero

$$f(0) \stackrel{\cdot}{=} \cos^2 0 = 1, \quad f'(t) = -2 \operatorname{sen} t \cos t = -\operatorname{sen} 2t \stackrel{\cdot}{=} -\frac{2}{p^2 + 4}.$$

¹⁾ Hay casos cuando la función $f(t)$ de la cual se trata en el teorema está dada sobre el intervalo $(0, \infty)$ y existe el límite por la derecha de $f(0 + 0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$. Entonces en la fórmula (11) es necesario sustituir $f(0)$ por $f(0 + 0)$.

Por consiguiente,

$$pF(p) - 1 = -\frac{2}{p^2+4},$$

de donde

$$F(p) = \frac{1}{p} \left[1 - \frac{2}{p^2+4} \right] = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

Este mismo resultado se obtiene si se hace uso de la igualdad

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2},$$

$$L[\cos^2 t; p] = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+4} = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

TEOREMA 6 (INTEGRACIÓN DEL ORIGINAL).

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

En efecto, haciendo variar el orden de integración, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_0^t f(\tau) d\tau dt &= \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(\tau) d\tau dt = \int_0^{\infty} f(\tau) \frac{-e^{-pt}}{p} \Big|_{\tau}^{\infty} d\tau = \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} L[f(\tau); p] = \frac{F(p)}{p}. \end{aligned}$$

TEOREMA 7 (INTEGRACIÓN DE LA TRANSFORMADA).

Si la integral $\int_p^{\infty} F(q) dq$ converge, entonces ésta es la transformada de la función $f(t)/t$:

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{\infty} F(q) dq.$$

DEMOSTRACION. Haciendo variar el orden de integración, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_p^{\infty} F(q) dq &= \int_p^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-qt} f(t) dt \right) dq = \int_0^{\infty} \left(\int_p^{\infty} e^{-qt} dq \right) f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-qt}}{t} \Big|_{q=p}^{\infty} \right) f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt = L \left[\frac{f(t)}{t}; p \right] \end{aligned}$$

Observación 1. Aquí y a continuación aplicaremos la variación del orden de integración. Conforme al teorema de Fubini que aquí queda sin demostrar esta operación es legítima si la integral múltiple obtenida después de la variación converge absolutamente. Además, supongamos que la ruta de integración se encuentra enteramente en el semiplano $\text{Re } p > s_0$.

COROLARIO 2.

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(q) dq,$$

si convergen las integrales impropias correspondientes.

EJEMPLO 9. Hallar la transformada $\int_0^t \text{sen } 2\tau d\tau$.

Tomemos

$$\text{sen } 2\tau \doteq \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Según el teorema 6

$$\int_0^t \text{sen } 2\tau d\tau \doteq \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$$

EJEMPLO 10. Hallar la transformada de la función $\frac{\text{sen } t}{t}$. Sabemos que $\text{sen } t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$. Por eso según el teorema 7

$$\frac{\text{sen } t}{t} \doteq \int_p^{\infty} \frac{dq}{q^2 + 1} = \text{arc tg } q \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } p.$$

EJEMPLO 11. Hallar la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt.$$

Utilizando el ejemplo 10 y el corolario 2, obtenemos

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{dq}{q^2 + 1} = \text{arctg } q \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

TEOREMA 8 (TARDANZA DEL ORIGINAL).

Sea $f(t) = 0$ para $t < 0$, entonces

$$L[f(t - t_0); p] = e^{-pt_0} L[f(t); p],$$

donde t_0 es cierto punto.

DEMOSTRACION. Tenemos

$$\begin{aligned} L[f(t-t_0); p] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t-t_0) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \{t-t_0 = u, dt = du\} = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-p(u+t_0)} f(u) du = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du = e^{-pt_0} L[f(u); p] \end{aligned}$$

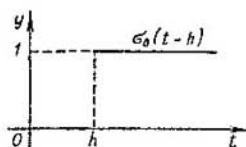


Fig. 155.

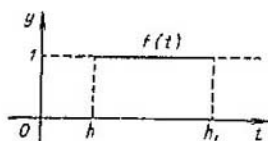


Fig. 156.

EJEMPLO 12. Como $L[\sigma_0(t); p] = \frac{1}{p}$, entonces (fig. 155)

$$L[\sigma_0(t-h); p] = e^{-ph} \frac{1}{p}.$$

EJEMPLO 13. Sea (fig. 156)

$$f(t) = \sigma_0(t-h) - \sigma_0(t-h_1) \quad (h < h_1).$$

Según el teorema 2 y el teorema 8 tenemos

$$L[f(t); p] = L[\sigma_0(t-h); p] - L[\sigma_0(t-h_1); p] = \frac{e^{-ph} - e^{-ph_1}}{p}.$$

EJEMPLO 14. Hallar la transformada de la función $f(t)$ (fig. 157) definida sobre el segmento $[0, 2a]$ por las igualdades

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq a, \\ 0, & a < t < 2a \end{cases}$$

y prolongada luego para todo el rayo $t > 0$ con el período $2a$.

Tenemos

$$\begin{aligned} L[f(t); p] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{h=0}^{\infty} \int_{ha}^{(h+1)a} e^{-pt} f(t) dt = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \int_{2ha}^{(2h+1)a} e^{-pt} A dt = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A}{p} [e^{-p2ka} - e^{-p(2h+1)a}] = \\ &= \frac{A(1 - e^{-pa})}{p} \sum_{h=0}^{\infty} e^{-2hpa} = \frac{A(1 - e^{-pa})}{p(1 - e^{-2pa})} = \frac{A}{p(1 + e^{-pa})}. \end{aligned}$$

La expresión

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

se llama *convolución de las funciones* $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y se designa por el símbolo $f_1 * f_2$.

Es fácil comprobar que

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

(es necesario sustituir la variable $t - \tau = u$).

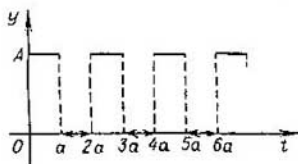


Fig. 157.

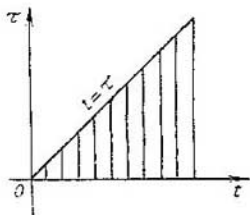


Fig. 158.

TEOREMA 9. La transformación de Laplace de la convolución es igual al producto de las transformaciones de Laplace de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ ($s_0(f_1) = s_0(f_2)$):

$$L \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau; p \right] = L[f_1(t); p] \cdot L[f_2(t); p].$$

DEMOSTRACION. Recordemos nuestra suposición de que $f_1(t) = f_2(t) = 0$ para $t < 0$. Haciendo variar el orden de integración

(fig. 158) y teniendo en cuenta que $f_2(t - \tau) = 0$ para $0 < t < \tau$, tenemos

$$\begin{aligned} L[f_1 * f_2; p] &= \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_0^t f_1(\tau; f_2(t-\tau)) d\tau dt = \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t-\tau) dt d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_2(t-\tau) dt \right) d\tau = \{t-\tau=z, dt=dz\} = \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) \left(\int_0^{\infty} e^{-p(\tau+z)} f_2(z) dz \right) d\tau = \int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} f_2(z) e^{-pz} dz = \\ &= L[f_1(\tau); p] \cdot L[f_2(z); p]. \end{aligned}$$

Notemos que la integral doble de la función $e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t-\tau)$ sobre el sector infinito $\{0 < \tau \leq t, 0 < t < \infty\}$ converge absolutamente cuando $\operatorname{Re} p > s_0$.

EJEMPLO 15.

$$L \left[\int_0^t e^{-\tau} \operatorname{ch} \alpha \tau d\tau; p \right] = L[e^t; p] L[\operatorname{ch} \alpha t; p] = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{p}{p^2 - \alpha^2}.$$

COROLARIO 3. Sean $F(p) \stackrel{\dagger}{=} f(t)$ y $G(p) \stackrel{\dagger}{=} g(t)$, entonces tiene lugar la fórmula de Duhamel³⁾

$$pF(p)G(p) \stackrel{\dagger}{=} f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau) d\tau. \quad (15)$$

DEMOSTRACION. Tenemos

$$F(p)G(p) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau.$$

Da aquí, según el teorema 5 sobre la derivación del original obtenemos

$$pF(p)G(p) \stackrel{\dagger}{=} \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \right)_t = f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau) d\tau.$$

³⁾ En cuanto a la función $g(t)$ se puede hacer la misma nota que en la llamada puesta al pie de la pág. 423. Duhamel (1797-1872), matemático francés.

TEOREMA 10. Si $\mathcal{F}(f(x); y)$ y $L[f(x); p]$ son las transformaciones de Fourier y de Laplace, respectivamente, de la función f ($s_0(f) < 0$), entonces

$$2\pi \mathcal{F}(f(x); y) = L[f(x); iy] + L[f(-x); -iy]. \quad (16)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 2\pi \mathcal{F}(f(x); y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx + \int_{-\infty}^0 e^{-ixy} f(x) dx = \\ &= L[f(x); iy] + \int_0^{\infty} e^{ixy} f(-x) dx = \\ &= L[f(x); iy] + L[f(-x); -iy]. \end{aligned}$$

Por la fórmula (16) es fácil encontrar la transformada de Fourier si se conoce la transformación de Laplace de la función f .

EJEMPLO 16. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} \cos \beta x, & x \geq 0, \quad \alpha > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Hallar la transformación de Fourier de esta función.

La transformación de Laplace de la función f existe ($s_0(f) = -\alpha$), por eso

$$2\pi \mathcal{F}(f(x); y) = L[f(x); iy] = L[e^{-\alpha x} \cos \beta x; iy] = \frac{iy + \alpha}{(iy + \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Vamos a exponer sin demostración varios teoremas sobre la determinación del original a partir de la transformada conocida.

TEOREMA 11. Sea $F(p)$ una función analítica sobre un plano complejo extendido y sean $p = \infty$ regular y $F(\infty) = 0$, es decir, su serie de Laurent tiene la forma

$$F(p) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{c_h}{p^h}.$$

Entonces el original de esta transformada está dada por la fórmula

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{t^n}{n!}, & t > 0. \end{cases} \quad (17)$$

En efecto,

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{p^{n+1}} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{c_h}{p^h}.$$

En virtud del teorema (de unicidad) 1 del § 7.1 el teorema queda demostrado.

TEOREMA 12. Sea $F(p)$ una función racional fraccional con los polos p_1, p_2, \dots, p_m . Entonces

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} [F(p) e^{pt}]. \quad (18)$$

Si p_k son polos simples y $F(p) = A(p)/B(p)$, donde $A(p)$ y $B(p)$ son polinomios sin raíces comunes, entonces

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (19)$$

TEOREMA 13 (FORMULA DE MELLIN¹⁾. Si $F(p)$ es una función analítica en $\operatorname{Re} p > s_0$, $F(p) \rightarrow 0$ uniformemente respecto a $\arg p$, para $|p| \rightarrow \infty$, $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy < M$, entonces $F(p)$ es la transformada de la función

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-y\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (x > s_0). \quad (20)$$

EJEMPLO 17. Hallar el original de la función

$$F(p) = 1/(p-1)(p^2+1).$$

Valgámonos del teorema 12. Aquí $A(p) \equiv 1$, $B(p) = (p-1) \times (p^2+1)$. Los puntos $p=1$ y $p = \pm i$ son polos simples de la función $F(p)$. Por la fórmula (19) tenemos $B'(p) = 3p^2 - 2p + 1$

$$f(t) = \frac{e^t}{2} - \frac{e^{it}}{2(1+i)} + \frac{e^{-it}}{2(1-i)} = \frac{1}{2} [e^t - \cos t - \operatorname{sen} t].$$

EJEMPLO 18. Hallar el original $f(t)$ si $F(p) = \operatorname{sen}(1/p)$. Tenemos

$$\operatorname{sen} \frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3!p^3} + \frac{1}{5!p^5} - \dots,$$

o sea, $F(p)$ satisface la condición del teorema 1. Por eso

$$f(t) = 1 - \frac{1}{3!} \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{5!} \frac{t^4}{4!} - \dots$$

Para mayor comodidad representaremos todas las transformadas obtenidas en una tabla.

¹⁾ R. H. Mellin (1854–1933), matemático finlandés.

Nº de orden	Original	Transformada
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$\text{sen } \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$
3	$\text{cos } \alpha t$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$
4	$\text{cos } \alpha (t - t_0)$	$\frac{pe^{-pt_0}}{p^2 + \alpha^2}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
6	$\text{sh } \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$
7	$\text{ch } \alpha t$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$
8	$e^{-\alpha t} \text{sen } \beta t$	$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$
9	$e^{-\alpha t} \text{cos } \beta t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$
10	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
11	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$
12	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
13	$t \text{sen } \alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2 + \alpha^2)^2}$
14	$t \text{cos } \alpha t$	$\frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2}$
15	$f^{(n)}(t), f(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$	$p^n F(p)$
16	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$

Continuacion

Nº de orden	Original	Transformada
17	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(q) dq$
18	$f(t-t_0)$	$e^{-pt_0} F(p)$
19	$\sigma_0(t-h)$	$e^{-ph} \frac{1}{p}$
20	$f_1^* f_2$	$L[f_1; p] \cdot L[f_2; p]$
21	$f(t)g'(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau) d\tau$	$pL[f; p] \cdot L[g; p]$
22	$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \frac{t^k}{k!} (t > 0)$	$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{c_h}{p^h}$

§ 7.3. Aplicaciones del cálculo operacional

Supongamos que está dada la ecuación diferencial lineal de n -ésimo orden con coeficientes constantes

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t). \quad (1)$$

Es preciso hallar la solución de la ecuación (1) cuando $t \geq 0$ para las condiciones siguientes

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

Supongamos que $x(t)$ es la solución de (1) que satisface las condiciones iniciales (2). Entonces, al sustituir esta función en (1), obtenemos la identidad. Por lo tanto, la función que figura en el primer miembro de (1) y la función $f(t)$ tienen una misma L -transformada

$$L \left[\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x}{dt^k}; p \right] = L[f(t); p].$$

En virtud del corolario 1 del § 7.2

$$L \left[\frac{d^h x}{dt^h}; p \right] = p^h L \{x; p\} - p^{h-1} x(0) - \dots - p x^{(h-2)}(0) - x^{(h-1)}(0). \quad (0)$$

Por eso, utilizando la propiedad de linealidad de la transformada, obtenemos

$$\begin{aligned} a_n L \left[\frac{d^n x}{dt^n}; p \right] + \dots + a_0 L \{x; p\} &= L \{f; p\}; \\ a_n [p^n L \{x; p\} - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x'_0 - \dots - p x_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}] + \\ &+ a_{n-1} [p^{n-1} L \{x; p\} - p^{n-2} x_0 - \dots - p x_0^{n-3} - x_0^{(n-2)}] + \\ &+ \dots + a_1 [L \{x; p\} - x_0] + a_0 L \{x; p\} = L \{f; p\}. \end{aligned}$$

Para abreviar la notación designemos $L \{x; p\} = \bar{x}(p)$, $L \{f; p\} = F(p)$. Entonces

$$\begin{aligned} \bar{x}(p) \cdot [a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0] &= \\ &= a_n [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x'_0 + \dots + x_0^{(n-1)}] + \\ &+ a_{n-1} [p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x'_0 + \dots + x_0^{n-2}] + \dots \\ &\dots + a_2 [p x_0 + x'_0] + a_1 x_0 + F(p). \quad (3) \end{aligned}$$

Llamaremos a la ecuación (3) *ecuación auxiliar*, *ecuación de la transformada* o *ecuación operatoria*.

Notemos que el coeficiente de $\bar{x}(p)$ en (3) se obtiene del primer miembro de (1) mediante la sustitución formal de las derivadas $\frac{d^h x}{dt^h}$ por las potencias de p^h . Designemos este coeficiente por

$$R_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Es fácil ver que este coeficiente es el primer miembro de la ecuación característica para la ecuación diferencial (1) (véase el § 1.16 (2)). Entonces encontramos la transformada de la solución en la forma

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)} + \frac{\Psi_{n-1}(p)}{R_n(p)}, \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi_{(n-1)}(p) &= a_1 x_0 + a_2 (p x_0 + x'_0) + \\ &+ a_3 (p^2 x_0 + p x'_0 + x''_0) + \dots + a_n [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x'_0 + \dots \\ &\dots + p x_0^{(n-2)} + x_0^{(n-1)}] t \end{aligned}$$

Si las condiciones iniciales son nulas, o sea, $x_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$, la fórmula (4) se escribirá

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)}. \quad (4')$$

Si ahora a partir de la transformada (4) ó (4') hallamos el original, entonces, en virtud del teorema de unicidad, éste será precisamente la solución buscada de $x(t)$.

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación

$$\bar{x} + 4x = 2, \quad x_0 = x'_0 = 0.$$

Según la fórmula (4') tenemos

$$\bar{x}(p) = \frac{2}{p(p^2+4)},$$

ya que $2 \doteq 2/p$. Desarrollemos la transformada en fracciones simples

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4} \right].$$

De aquí

$$x(t) = \frac{1}{2} \sigma_0(t) - \frac{1}{2} \cos 2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Hemos obtenido la solución $(1 - \cos 2t)/2$ sólo para $t \geq 0$. Es fácil comprobar que satisface nuestra ecuación también para $t < 0$. Además, este hecho se deduce de las consideraciones generales en las cuales no nos detendremos. Esta observación se refiere asimismo a los ejemplos 2, 3, 4.

Se puede utilizar también el teorema 12 del § 7.2 ($A \equiv 2$, $B = p(p^2 + 4)$, $B' = 3p^2 + 4$; $0, \pm 2i$ son ceros simples del polinomio $B(p)$):

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \left[\frac{e^{0t}}{B'(0)} + \frac{e^{2it}}{B'(2i)} + \frac{e^{-2it}}{B'(-2i)} \right] = \\ &= 2 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{-8} e^{2it} + \frac{1}{-8} e^{-2it} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. $y'' + 2y' + 5y = \operatorname{sen} x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Planteemos la ecuación auxiliar:

$$\begin{aligned} [p^2 \bar{y}(p) - py(0) - y'(0)] + 2[p\bar{y}(p) - y(0)] + 5\bar{y}(p) &= \frac{1}{p^2+1}, \\ \bar{y}(p)(p^2 + 2p + 5) &= \frac{1}{p^2+1} + 1. \end{aligned}$$

De aquí

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)} + \frac{1}{p^2+2p+5} = \frac{p^2+2}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}.$$

El polinomio $B(p) = (p^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)$ tiene los ceros simples $p = \pm i$, $p = -1 \pm 2i$. En virtud del teorema 12 del § 7.2.

$$(A = p^2 + 2, B'(p) = 2p(p^2 + 2p + 5) + 2(p + 1)(p^2 + 1))$$

tenemos

$$A(\pm i) = 1, \quad B'(i) = 4i(2+i), \quad B'(-i) = -4i(2-i),$$

$$A(-1+2i) = -1-4i; \quad B'(-1+2i) = -8i(2i+1),$$

$$A(-1-2i) = 4i-1, \quad B'(-1-2i) = -8i(2i-1),$$

$$y(x) = \frac{e^{ix}}{4i(2+i)} + \frac{e^{-ix}}{-4i(2-i)} + \frac{-(1+4i)e^{(-1+2i)x}}{-8i(2i+1)} + \\ + \frac{(4i-1)e^{(-1-2i)x}}{-8i(2i-1)} = \frac{\sin x}{5} - \frac{\cos x}{10} + e^{-x} \left[\frac{\cos 2x}{10} + \frac{9}{20} \sin 2x \right].$$

Se puede utilizar asimismo el procedimiento de desarrollar la transformada en fracciones simples

$$\frac{p^2+2}{(p^2+1)(p^2+2p+5)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{Cp+D}{p^2+2p+5}.$$

Encontramos los números A , B , C y D con ayuda del método de coeficientes indeterminados: $A = -1/10$, $B = 1/5$, $C = 1/10$ y $D = 1$.

Así, pues,

$$\bar{y}(p) = \frac{-\frac{p}{10} + \frac{1}{5}}{p^2+1} + \frac{\frac{p}{10} + 1}{p^2+2p+5} = -\frac{1}{10} \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5} \frac{1}{p^2+1} + \\ + \frac{1}{10} \frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{9}{20} \frac{2}{(p+1)^2+4}.$$

En virtud de la tabla de las transformadas tenemos

$$y(x) = -\frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + \frac{1}{10} e^{-x} \cos 2x + \frac{9}{20} e^{-x} \sin 2x.$$

Al resolver una ecuación diferencial es cómodo, a veces, utilizar la fórmula de Duhamel (véase el § 7.2, (15)).

Examinemos la ecuación (1) para las condiciones iniciales nulas: $x(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$. Siempre se puede reducir el problema a este caso sustituyendo la función buscada con ayuda de la fórmula

$$x(t) = y(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0).$$

Admitamos que se conoce la solución de la ecuación (1) cuando el segundo miembro es igual a la unidad y las condiciones iniciales son nulas. Para el problema dado la ecuación operatoria tiene la forma

$$R_n(p) \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p}, \quad (5)$$

donde $\bar{x}_1(p)$ es la transformada de la solución $x_1(t)$ del problema indicado. De las igualdades (4') y (5) encontramos

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)} = p\bar{x}_1(p) F(p). \quad (6)$$

Conforme a la fórmula de Duhamel

$$pF(p)\bar{x}_1(p) \doteq f(t)x_1(0) + \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$$

o teniendo en cuenta que $x_1(0) = 0$, obtenemos

$$\bar{x}(p) = pF(p)\bar{x}_1(p) \doteq \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau.$$

De aquí que la solución de la ecuación (1) para las condiciones iniciales nulas tendrá la forma

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau, \quad (7)$$

donde $x_1(t)$ es la solución de la ecuación (1) cuando $f(t) \equiv 1$ y las condiciones iniciales son nulas.

EJEMPLO 3. Resolver la ecuación

$$x'' - x = \frac{1}{1 + \varepsilon t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Primero resolvamos el problema de Cauchy para la ecuación

$$x_1'' - x_1 = 1, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Planteemos la ecuación operatoria:

$$p^2\bar{x}_1(p) - \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p}, \quad \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p(p^2-1)} = \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{p}.$$

De aquí

$$x_1(t) = \operatorname{ch} t - 1.$$

Observación. Puesto que el segundo miembro de la ecuación $x_1'' - x_1 = 1$ tiene una forma especial, esta ecuación puede resolverse también de un modo habitual (véase el § 1.18).

Según la fórmula (7)

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau} \operatorname{sh}(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{e^{t-\tau} - e^{-t+\tau}}{2(1+e^\tau)} d\tau = \\
 &= \frac{e^t}{2} \int_0^t \frac{e^{-\tau} d\tau}{1+e^\tau} - \frac{e^{-t}}{2} \int_0^t \frac{d(e^\tau+1)}{1+e^\tau} = \\
 &= -\frac{e^{-t}}{2} \ln \frac{e^t+1}{2} - \frac{e^t}{2} \int_0^t \frac{e^{-\tau} d e^{-\tau}}{e^{-\tau}+1} = \\
 &= -\frac{e^{-t}}{2} \ln \frac{e^t+1}{2} - \frac{e^t}{2} (e^t-1) + \frac{e^t}{2} \int_0^t \frac{d(e^{-\tau}+1)}{e^{-\tau}+1} = \\
 &= -\frac{e^{-t}}{2} \ln \frac{e^t+1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^t}{2} + \frac{e^t}{2} \ln \frac{e^{-t}+1}{2} = \\
 &= \operatorname{sh} t \ln \frac{e^t+1}{2} + \frac{1}{2} [-te^t + e^t - 1].
 \end{aligned}$$

RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES. Examinemos esta cuestión citando un ejemplo concreto.

EJEMPLO 4. Supongamos que es preciso hallar la solución del sistema lineal

$$\left. \begin{aligned}
 2\dot{x} + \dot{y} + x &= 1, \\
 \dot{x} + 3\dot{y} + 2y &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

para las condiciones iniciales $y(0) = x(0) = 0$.

Designemos por $\bar{x}(p)$, $\bar{y}(p)$ las transformadas de las funciones buscadas. Planteemos las ecuaciones auxiliares:

$$\left. \begin{aligned}
 2p\bar{x}(p) + p\bar{y}(p) + \bar{x}(p) &= \frac{1}{p}, \\
 p\bar{x}(p) + 3p\bar{y}(p) + 2\bar{y}(p) &= 0.
 \end{aligned} \right\}$$

Ahora bien, para las transformadas hemos obtenido un sistema lineal de ecuaciones algebraicas. El determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2p+1 & p \\ p & 3p+2 \end{vmatrix} = 5p^2 + 7p + 2.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas, encontramos

$$\bar{x}(p) = \frac{3p+2}{p(5p^2+7p+2)}, \quad \bar{y}(p) = \frac{-1}{5p^2+7p+2}.$$

Escribamos la transformada $\bar{y}(p)$ en la forma

$$\bar{y}(p) = -\frac{1}{5} \frac{1}{(p+0,7)^2 - 0,09} = -\frac{2}{3} \frac{0,3}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2},$$

de donde

$$y(t) = -\frac{2}{3} e^{-0,7t} \operatorname{sh}(0,3)t.$$

Luego

$$\begin{aligned} \bar{x}(p) &= \frac{3}{5[(p+0,7)^2 - (0,3)^2]} + \frac{1}{p} - \frac{5p+7}{5p^2+7p+2} = \\ &= 2 \frac{0,3}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2} + \frac{1}{p} - \frac{p+0,7}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2} - \frac{0,7}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2}, \end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-0,7t} \operatorname{sh}(0,3t) + 1 - e^{-0,7t} \operatorname{ch}(0,3t) - \\ &- \frac{7}{3} e^{-0,7t} \operatorname{sh}(0,3t) = 1 - \frac{1}{3} e^{-0,7t} \operatorname{sh}(0,3t) - e^{-0,7t} \operatorname{ch}(0,3t). \end{aligned}$$

CÁLCULO DE LAS INTEGRALES.

EJEMPLO 5. Calcular la integral $I(x) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} dt$.

Hallemos la transformada de esta integral:

$$\begin{aligned} L[I(x); p] &= \int_0^{\infty} e^{-px} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} dt dx = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-px} (1 - \cos xt) dx \frac{dt}{t^2} = \int_0^{\infty} L[1 - \cos xt; p] \frac{dt}{t^2} = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + t^2} \right] \frac{dt}{t^2} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{p(p^2 + t^2)} = \frac{1}{p^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{p} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2p^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I(x) = \frac{\pi}{2} x.$$

Índice alfabético de materias

- Amplitud de oscilación, 248
Aplicación conforme, 360
Área de una superficie, 166
Armónico, 250
- Bernoulli, ecuación, 30
Bessel, funciones, 199, 337
- Cálculo de integrales con ayuda de los residuos, 405
— operacional, 416
Cambio de variables en una integral, 155, 156
Campo de direcciones, 20
— de un potencial, 200
— de vectores, 87
Centro, 122
— de masas, 173
— de gravedad, 174
Cinta de Möbius, 222
Circulación del vector, 243
Clasificación de los puntos de reposo, 117
— de puntos singulares aislados, 395
— — — en el infinito, 400
Coeficientes de Fourier, 256, 266, 271
— de la serie trigonométrica, 250
Completitud de funciones trigonométricas, 274
Condición inicial, 13, 52, 316
Condiciones de Cauchy—Riemann, 364
Conjunto conexo, 357
— con la medida cero, 136
Contorno cerrado, 193
Convergencia de una integral impropia, 178, 179
— de una serie de potencias, 387
— en media cuadrática, 268
— según la norma, 268
Convolución de las funciones, 426
Coordenadas cilíndricas, 165
— del centro de masas, 173
— esféricas, 162
— polares, 160
Coseno transformación de Fourier, 288
Criterios de convergencia de las series de Fourier, 259
Cuerda, 329
Curva autodisjunta, 193
— cerrada, 193
— continua, 192
— envuelta, 50
— integral, 11, 52
— orientada, 205
— suave a trozos, 192
- Derivación del original, 421
— de una transformada, 420
Derivada de la función, 357
— de una matriz, 88
- Desigualdad de Bessel, 273
— de Buniakovski, 267
— de Minkowski, 268
— triangular, 34
Determinante de Jacobi, 157
— de Wronski, 65, 90
Distancia, 34
Distribución estacionaria del calor, 317
Divergencia del vector, 234
Dominio de definición de la función, 354
- Ecuación auxiliar, 432
— característica, 70, 94
— con coeficientes constantes, 70
— de Bernoulli, 30
— de conducción del calor, 305, 322, 327
— de Euler, 74
— de la transformada, 432
— diferencial, 10
— — — con variables separables, 24
— — — de orden superior, 56
— — — de vibración de una cuerda, 331
— — — en diferenciales totales, 209
— — — lineal, 28
— — — de orden superior, 63
— — — de primer orden, 28
— — — homogénea, 25
— — — ordinaria, 10
— en variaciones, 346
— operatoria, 432
Ecuaciones equivalentes, 12
Enrolladura, 120
Envuelta de la familia de curvas, 49
Espacio completo, 35
— de fases, 84, 86, 87
— métrico, 34
Espectro de una función no periódica, 293
— — — periódica, 293
Estimación de los coeficientes de Fourier, 266
Estructura de la solución general de una ecuación homogénea lineal, 63
Euler, ecuación, 74
—, método de resolución aproximada de la ecuación diferencial, 43
—, quebrada, 45
- Fase de oscilación, 346
Figura exterior del conjunto, 133
— interior del conjunto, 133
Flujo de un vector, 230
Foco, 123
Fórmula de Cauchy, 382
— de D' Alembert, 335
— de Duhamel, 428
— de Green, 207, 213
— de Mellin, 429
— de Stokes, 207, 243
Fourier, coeficiente, 256
—, integral, 280

- Fourier, — reiterada, 288
 —, — simple, 284
 —, serie, 246
 —, transformación, 287, 288
 —, — directa, 287
 —, — inversa, 287
- Frecuencia de oscilación, 248
- Función analítica, 357
 — armónica, 317, 367
 — de Bessel, 109
 — gamma, 192
 — inversa, 376
 —, logaritmo natural, 373
 —, multiforme de una variable compleja, 355
 — normal, 270
 — potencial, 202, 361
 — propia, 324
 — unidad, 418
 —, invoca de una variable compleja, 354
 — vectorial, 89
- Funciones linealmente dependientes, 64
 — — independientes, 64
- Gradiente de la función, 201
- Igualdad de Parseval—Steklov, 273, 276
- Imagen del conjunto, 354
- Índice de crecimiento de la función, 417
- Integración de ecuaciones mediante series, 106
 — de funciones de una variable compleja, 376
 — de la transformada, 423
 — del original, 423
- Integral como función del parámetro, 143
 — curvilínea de primer género, 194
 — — de segundo género, 198
 — de Dirichlet, 343
- Integral de Fourier, 280
 — del tipo de Cauchy, 385
 — del vector a lo largo de la curva, 197
 — de Poisson, 181
 — de Riemann, 128
 — de superficie de segundo género, 231
 — de una matriz, 89
 — doble, 128
 — general de la ecuación diferencial, 15
 — impropia, 178
 — — absolutamente convergente, 178
 — — convergente, 178, 179
 — — uniformemente, 184, 189
 — — dependiente de un parámetro, 183
 — múltiple, 128
 — reiterada, 286
 —, resto, 188
 — simple de Fourier, 284
 — sobre una región plana orientada, 227
 — sobre una superficie de primer género, 219
 — triple, 128
- Isoclina, 21
- Jacobi, determinante, 157
- Jacobiano, 157, 227
- Lado de una superficie, 221
- Lebesgue, medida, 134
- Linealidad de la transformada, 419
- Matriz de Cauchy, 92
 — fundamental, 91
- inversa, 88
 — simétrica, 99
 — unidad, 89, 93
- Medida de Jordan, 120, 134
 — exterior del conjunto, 134
 — interior del conjunto, 134
- Método de Euler de resolución aproximada de la ecuación, 43
 — de Fourier de separación de variables, 323
 — de Lagrange, 103
 — de Newton, 39
 — de tangentes, 39
 — de variación de una constante arbitraria, 30
- Momento de inercia, 177
- Norma de la función, 268
- Nudo estable, 119, 123
 — inestable, 120, 123
- Operador aditivo, 63
 — autoconjugado, 99
 — continuo, 34
 — contractivo, 34
 — de Hamilton, 206
 — de Laplace, 247, 367, 370
 — homogéneo, 63
 — lineal, 63
 — — diferencial de n-ésimo orden, 63
- Orientación de una curva, 192
 — de una región, 212
 — de una superficie, 221, 225
- Original, 418
- Ortogonalidad de funciones, 263, 270
- Oscilación armónica, 248
- Parte principal de la serie de Laurent, 391
 — regular de la serie de Laurent, 391
- Paso de cálculo, 44
- Polo de la función, 396, 402
- Posición de equilibrio del sistema, 115
- Potencial, 202
- Principio de aplicaciones contraídas, 36
- Problema de Cauchy, 13, 52
 — de Dirichlet, 317, 318, 320
 — de Sturm—Liouville, 323, 336, 340
 — de variación, 345
 — planteado correctamente, 113
- Producto directo de los conjuntos, 183
 — escalar de funciones, 267
- Punto de reposo, 115
 — fijo del operador, 34
 — singular aislado, 395, 401
 — — de la integral, 189
- Rectángulo, 130
- Reducción del orden de una ecuación, 59
- Región del tipo H, 214, 235, 237
 — elemental, 214
 — simplemente conexa, 207, 356
- Residuo de la función, 398, 402
- Rotor del vector, 206
- Sacacorechos dextrorso, 223
 — sinistrorso, 223
- Seno transformación de Fourier, 288
- Serie convergente, 254
 — de Fourier, 256, 286, 271
 — — — en el sistema ortogonal, 271
 — — — en forma compleja, 278
 — de Laurent, 389

- Serie de potencias, 386
 — de Taylor, 387
 — que mayorca, 234
 — trigonométrica, 250
 Singularidad esencial, 397
 — evitable, 398, 401
 Sistema de coordenadas cilíndrico, 163
 — — — derecho, 223
 — — — esférico, 162
 — — — izquierdo, 223
 — — — polar, 160
 Sistema de ecuaciones autónomo, 86
 — — — dinámico, 86
 — — — elíptico, 125
 — — — hiperbólico, 125
 — — — homogéneo, 87
 — — — normal, 55, 57, 86
 — — — parabólico, 125
 — de funciones linealmente dependientes, 64
 — — — independientes, 64, 90, 271
 — fundamental de soluciones, 64, 69, 91
 — normal autónomo, 86
 — ortogonal completo de funciones, 273
 — — de funciones, 270, 339
 — ortonormalizado de funciones, 271
 Solución asintóticamente estable, 114
 — de D' Alembert, 334
 — de una ecuación diferencial, 11
 — estable, 113
 — general de una ecuación lineal homogénea, 68
 — — — — no homogénea, 77
 — particular, 12
 — — de una ecuación no homogénea, 77
 — singular, 48
 Sucesión convergente, 34
 — de funciones, 34
 — — —, convergente en media cuadrática, 268
 — — —, convergente según la norma, 268
 — — —, convergente uniformemente, 35
 — — — fundamental, 34
 — — — iterativa, 36
 Suma integral de Riemann, 131
 Superficie poliedral, 246
 — suave, 218
 — — a trozos, 235
 Tabla de transformadas, 430
 Tardanza del original, 424
 Temperatura de un cuerpo, 305
 Teorema de Cauchy, 379
 — de existencia de la solución de una ecuación de primer orden, 31, 40
 — — — para un sistema de ecuaciones, 55
 — — — — — de orden superior, 57
 — de Gauss — Ostrogradski, 235
 Teorema de Guldin, 174
 — de Liapunov, 118
 — de los residuos, 403
 Término de la serie, 250
 Transformación de Fourier, 287, 289
 — de Heaviside, 417
 — de Laplace, 417
 — — — de la convolución, 428
 Transformada de Laplace, 417
 — — — de la función, 417
 Trayectoria de fases, 88
 Valor propio, 324
 Variación, método, 30, 75, 103
 Vector propio, 94
 Velocidad de fases, 87
 Vibración de una cuerda, 329
 — de una membrana, 335
 Wronski, determinante, 65, 90
 Wronskiano, 65