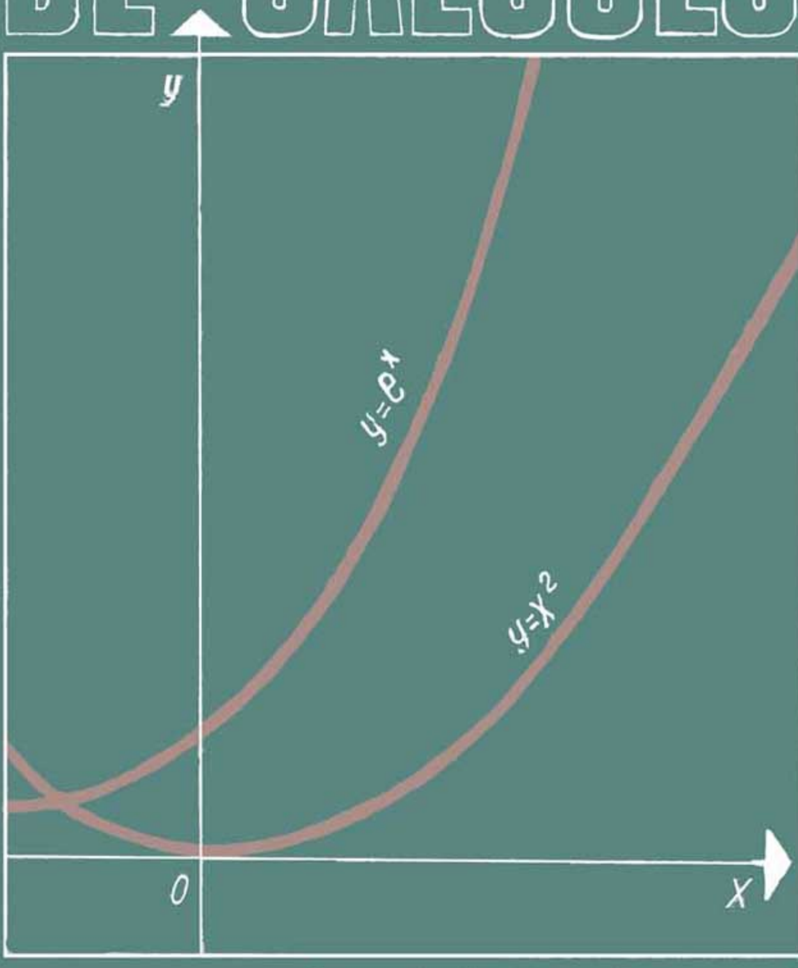
MATEMÁTICA DE CÁLCULO



Editorial Mir Moscú

Н. И. Данилина, Н. С. Дубровская,
О. П. Кваша, Г. Л. Смирнов

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Издательство «Высшая школа»

N.I. Danílina, N.S. Dubróvskaya. O.P. Kvashá,
G.L. Smirnov

MATEMÁTICA DE CÁLCULO

(ANÁLISIS NUMÉRICO)

Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso por A. I. Samojválov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-001813-1

Indice

Prefacio

El proceso actual de desarrollo impetuoso de la técnica de cálculo origina la ampliación constante de la esfera de aplicación de las partes modernas de matemáticas. Los métodos cuantitativos se introducen prácticamente en todos los campos de la actividad humana. Al mismo tiempo la utilización de la técnica de calculación en la economía nacional exige especialistas de alta calificación que posean los métodos de matemática de cálculo.

La matemática de cálculo es una de las asignaturas principales indispensables para preparar especialistas de alto nivel profesional en distintas ramas de la economía nacional. El objetivo de su estudio consiste en enculcar a los alumnos los fundamentos teóricos y hábitos prácticos para la resolución de diferentes problemas aplicados con el empleo de los modelos matemáticos y métodos numéricos realizables en el ordenador.

El material principal del Manual abarca todas las cuestiones contenidas en el programa de la asignatura «Matemática de cálculo» para la especialidad «Programación para los ordenadores de alta velocidad» y constituye un curso entero, acabado. Al mismo tiempo, comprendiendo que incluso actualmente el contenido de la materia no se ha formado definitivamente, así como teniendo en cuenta las perspectivas de desarrollo de los métodos numéricos, los autores consideraron necesario incluir algunas cuestiones que hoy día salen de los marcos del programa vigente. El material respectivo compuesto con caracteres menudos no es obligatorio para el estudio, pero puede ser recomendado al trabajar con los alumnos más preparados.

El contenido del manual comprende tres secciones grandes: «Métodos del álgebra» (caps. II—VI), «Métodos numéricos del análisis matemático» (caps. I, VII, VIII) y «Métodos numéricos de resolución de las ecuaciones diferenciales (caps. IX, X).

El material teórico está ilustrado por numerosos ejemplos. Al final de cada capítulo se dan ejercicios para el trabajo individual.

En el libro están adoptadas las siguientes designaciones: el comienzo y el final de la demostración de cualquier afirmación se señalan con signos $\square$ y $\blacksquare$, respectivamente, el comienzo y el final de la resolución de un ejemplo, con signos $\triangle$ y $\blacktriangle$.

Autores

Introducción

Los métodos de cálculo fueron desarrollados por tales eminentes científicos como K. Gauss, I. Newton, O. Cauchy, C. Hermite, B. G. Galerkin, A. N. Krylov, N. I. Lobachevski, P. L. Chébyshev, L. Euler.

En la formación y desarrollo de los métodos modernos de la matemática de cálculo desempeña gran papel la escuela soviética de matemáticas que está en vanguardia de la ciencia mundial.

Así, en el dominio de aproximación, de estabilidad y convergencia do los esquemas de diferencias los trabajos fundamentales de importancia primordial fueron cumplidos por S. K. Godunov, V. S. Riábenki, A. A. Samarski, A. V. Filíppov y otros.

Las obras de A. A. Dorodnitsin, M. V. Kéldysh, V. I. Krylov, O. A. Ladýzhenskaya, G. I. Marchuk, A. A. Samarski, S. L. Sóbolev dieron gran aportación al desarrollo de los métodos numéricos y a su aplicación práctica a los problemas de la física matemática.

Los métodos do resolución de los problemas incorrectos se desarrollan a base del concepto de regulación, introducido por el académico A. N. Tíjonov.

En el álgebra lineal los métodos de cálculo obtuvieron gran desarrollo, en primer lugar, merced a las investigaciones realizadas por V. V. Voevodin, L. V. Kantoróvich, D. K. Faddéev y N. V. Faddéeva.

En el campo de optimización de los métodos numéricos es necesario mencionar importantes trabajos de los matemáticos soviéticos N. S. Bajválov, A. N. Kolmogórov, S. L. Sóbolev y otros.

Antes de pasar a la exposición inmediata del material básico procuremos dar una característica breve de la matemática de cálculo. Para esto vamos a responder a las tres preguntas siguientes:

1) ¿Qué cosa es la matemática de cálculo?

2) ¿Cuáles distinciones de principio de la matemática de cálculo permitieron separarla de las matemáticas generales y convertirla en autónoma?

3) ¿Qué importancia tiene la matemática de cálculo para la economía nacional?

1. Actualmente por término «Matemática de cálculo» suele entenderse la parte de matemáticas que estudia un círculo de cuestiones relacionadas con la aplicación de los ordenadores.

En la matemática de cálculo pueden destacarse tres tendencias. La primera es la vinculada con el uso de los ordenadores en diferentes esferas de la actividad científica y práctica que incluye, en particular, la solución numérica de diferentes problemas matemáticos. La segunda es la tendencia ligada con el desarrollo de nuevos métodos numéricos y algoritmos y con el perfeccionamiento de los existentes. La tercera es la relacionada con las cuestiones de la interacción del hombre con el ordenador.

Este libro está dedicado a la primera del las tendencias mencionadas, es decir, a la aplicación de los métodos numéricos para la resolución de los problemas prácticos.

De fundamento sobre el cual se apoya la matemática de cálculo sirven los medios de cálculo y, en primer lugar, los ordenadores que están desarrollándose hoy día con ritmos sin precedentes y esto es un rasgo característico del período actual del progreso técnico. Así, durante 30 años, la velocidad de cómputo ha aumentado de una operación por segundo (en la regla de cálculo) hasta 3 000 000 operaciones por segundo, o sea, $3 \cdot 10^6$ veces. Cabe señalar que desde el tiempo de invención de la máquina de vapor la velocidad de viaje ha aumentado de 13 km/h (velocidad del caballo) a 40 000 km/h (velocidad de la nave cósmica), es decir, sólo $3 \cdot 10^3$ veces.

2. Vamos a ilustrar las particularidades características de la matemática de cálculo, las cuales la distinguen de las así llamadas matemáticas «puras», citando los ejemplos siguientes.

Desde el punto de vista del matemático «puro» resolver un problema significa demostrar la existencia de su solución y señalar el proceso que converge a la solución. En cambio, para el que calcula el tiempo de obtención de la solución, o sea, la velocidad de convergencia del proceso, resulta ser con frecuencia un factor de mayor importancia. Así, es sabido que la solución del sistema de n ecuaciones algebraicas puede obtenerse teóricamente para todo n fijado como resultado del número finito de operaciones, por ejemplo, con ayuda de los métodos de Cramer o de Gauss. Por eso desde el punto de vista del matemático «puro» tal problema se considera ya resuelto. Sin embargo, durante la realización práctica de los métodos indicados se encuentran dos dificultades de principio que no siempre, ni mucho menos, son superables. La primera dificultad consiste en lo siguiente. Con n bastante grande el número de operaciones, aunque sea finito, alcanza una magnitud tan enorme que la ejecución de todas estas operaciones llega a ser imposible incluso para los ordenadores más potentes. Así, para resolver el sistema de n ecuaciones con el método de Cramer se necesita cumplir $n \cdot n!$ operaciones lo que para $n = 20$ constituye $4{,}6 \cdot 10^{19}$ operaciones. Si el ordenador tiene una rapidez de $3 \cdot 10^6$ operaciones por segundo, debería estar trabajando ininterrumpidamente acerca de medio millón de años. El método de Gauss resulta mucho más económico: el número de operaciones, al resolver el mismo problema, tiene el orden de n^3.

No obstante, un número de operaciones tan grande engendra la segunda dificultad de principio: el error de cálculo acumulado en cada operación ejerce una influencia tan grande sobre el resultado final que a menudo está muy lejos de la solución verdadera.

Actualmente los métodos exactos suelen utilizarse para resolver los sistemas cuyo orden no supere 10^3. Por eso, desde el punto de vista del «calculador» el problema de resolver sistemas cuyo orden es mayor que 10^3 dista mucho de ser trivial. Para resolver tales sistemas se emplean los métodos iterativos los cuales, a pesar de ser aproximados, poseen una ventaja importante de no acumular el error de cálculo al pasar de una iteración a la otra. Ahora bien, se trata de un hecho que parece paradójico a primera vista, pero a pesar de esto es característico para los métodos numéricos: preferencia de un algoritmo aproximado al exacto.

3. La ampliación considerable de las esferas de aplicación de la matemática de cálculo, incluyendo su introducción en la economía nacional, se explica principalmente por el hecho de que los fenómenos de la naturaleza y de la vida social, diferentes por su esencia, a menudo tienen una estructura formal semejante y, por consiguiente, pueden ser descritos por los mismos modelos matemáticos. Por eso la solución de los problemas, descritos por estos modelos, se puede obtener con ayuda de los mismos métodos numéricos.

Hoy día la Unión Soviética tiene un rumbo decisivo hacia la formentación ulterior de la economía y el aumento de la efectividad de la producción a costa de su intensificación. En la realización de este rumbo el papel primordial pertenece al progreso científico-técnico con la utilización de los últimos alcances de las ciencias fundamentales y aplicadas. Uno de los factores fundamentales que contribuyen a la aceleración del progreso científico-técnico y al cumplimiento de los programas complejos y de destinación especial encaminados a resolver los problemas científico-técnicos más importantes y elevar ulteriormente la productividad del trabajo lo constituye la técnica de cálculo electrónico. El desarrollo de los ordenadores y de la matemática de cálculo permitirá, por ejemplo, pasar de la automatización del mando de los sistemas técnicos y de los procesos tecnológicos a la del mando de los procesos de producción.

La amplia implantación de los modelos matemáticos y de los ordenadores en la práctica de planificación y la utilización de los mismos en las cuestiones de optimización contribuirá a resolver felizmente los problemas de desarrollo económico y social.

CAPÍTULO I

Teoría elemental de los errores

§ 1.1. Números exactos y aproximados. Fuentes de errores y su clasificación

En el proceso de resolución de un problema nos vemos obligados a tratar diferentes números que pueden ser exactos o aproximados. Los números exactos presentan el valor verdadero del número y los aproximados, un valor próximo al verdadero con la particularidad de que el grado de proximidad se determina por el error de cálculo.

Por ejemplo, en las afirmaciones «el cubo tiene 6 caras», «en la mano hay 5 dedos», «en la clase hay 32 alumnos», «en el libro hay 582 páginas» los números 6, 5, 32 y 582 son exactos.

En las afirmaciones «la anchura de la casa es de 14,25 m», «el radio de la Tierra es igual a 6000 km», «la masa de una caja de cerillas es de 10 g» los números 14,25; 6000; 10 son aproximados. Esto está relacionado, ante todo, con la imperfección de los instrumentos (medios) de medida que utilizamos. No existen los aparatos de medida absolutamente exactos, cada uno tiene su precisión, o sea, admite cierto error en las mediciones. En el segundo ejemplo, además, el carácter aproximado del número está encerrado en el mismo concepto de radio de la Tierra. La cosa consiste en que, hablando en rigor, la Tierra no es un globo y hablar sobre su radio se puede sólo aproximadamente. En el tercer ejemplo el carácter aproximado del número se determina, además, por el hecho de que diferentes cajas pueden tener diferente masa y el número 10 determina la masa de cierta caja media.

En otros casos un mismo número puede ser tanto exacto como aproximado. Así, por ejemplo, el número 3 es exacto si se trata del número de lados de un triángulo y es aproximado si se utiliza en vez del número π al calcular el área del círculo con ayuda de la fórmula $S = \pi R^2$.

En la práctica de cálculos por *número aproximado a* se entiende un número que se distingue insignificantemente del número exacto A y lo sustituye en los cálculos.

La resolución de la mayoría de problemas prácticos puede ser representada, con cierto grado de convencionalismo, en forma de dos etapas sucesivas: 1) descripción matemática del problema dado; 2) resolución del problema matemático formulado.

En la primera etapa hay dos fuentes características de errores. En primer lugar, los procesos en desarrollo real no siempre pueden ser descritos matemáticamente y las simplificaciones introducidas ofrecen sólo la posibilidad de obtener modelos más o menos idealizados. En segundo lugar, la fijación de los parámetros iniciales que se obtienen, por lo general, de un experimento que ofrece no más que un resultado aproximado, es insuficientemente exacta.

En consonancia con lo dicho el error sumario del modelo matemático y de los datos de partida da el *error de información inicial.* Teniendo presente que este error es independiente de la segunda etapa de resolución del problema, se llama con frecuencia *error inevitable.*

La solución exacta de un problema matemático (la segunda etapa), por vía analítica o en un ordenador, es, como regla, irrealizable. Así, por ejemplo, sólo para una clase muy restringida de ecuaciones diferenciales, se puede lograr la solución exacta. Por eso en los cálculos prácticos se utilizan los métodos de obtención de las soluciones aproximadas y, en primer lugar, soluciones numéricas.

Es precisamente tal sustitución forzada de la solución exacta por una aproximada que engendra el *error del método* o, como suele llamarse, *error de aproximación.*

Por último, en el proceso de resolución del problema se lleva a cabo el redondeo de los datos iniciales y de los resultados intermedios y finales. Estos errores, así como los que aparecen durante la ejecución de las operaciones aritméticas sobre los números aproximados, se transportan en una u otra medida, a los resultados de cálculos y forman el así llamado *error de cálculo* (o *error de redondeos*).

En relación con lo expuesto, al plantear un problema, se señala la precisión requerida de la solución, es decir, se asigna el error máximamente admisible en el proceso de todos los cálculos o se limita por el requisito de computar el error total del resultado. Por eso al trabajar con los números aproximados es necesario saber resolver los problemas siguientes:

1) dar las características matemáticas de la exactitud de los números aproximados;

2) conociendo el grado de precisión de los datos iniciales, estimar el grado de precisión del resultado;

3) elegir los datos iniciales con el grado de precisión que asegure la precisión prefijada del resultado;

4) construir del modo óptimo el proceso de cálculo para no efectuar cómputos que no influyan sobre las cifras exactas del resultado.

§ 1.2. Notación decimal y redondeo de los números

Todo número decimal positivo a puede ser representado en forma de una fracción decimal finita o infinita:

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \dots \\ \dots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots, \qquad (1)$$

donde α_i son las cifras del número ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) con la particularidad de que $\alpha_1 \neq 0$; m, el orden (posición) decimal superior del número a.

Ejemplo 1. Representemos el número 1905,0778 en la forma (1):

$$1905{,}0778 = 1\cdot10^3 + 9\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 5\cdot10^0 + \\ + 0\cdot10^{-1} + 7\cdot10^{-2} + 7\cdot10^{-3} + 8\cdot10^{-4}.$$

Cada unidad del i-ésimo orden respectivo, si se considera de la izquierda a la derecha, tiene el propio valor 10^{m-i+1} llamado *valor posicional*. Así, el primer (a la izquierda) valor posicional es 10^m y el segundo valor posicional, 10^{m-1}, etc.

En el ejemplo considerado el valor posicional correspondiente a la cifra 9 es $10^{3-2+1} = 100$; a la cifra 5 es $10^{3-4+1} = 1$; a la cifra 8 es $10^{3-8+1} = 0{,}0001$.

En la práctica de cálculos surge a menudo la necesidad de *redondear* un número, o sea, reemplazarlo con otro que tiene una menor cantidad de cifras. En este caso se conservan una o más cifras, contando de la izquierda a la derecha, y se omiten todas las sucesivas.

Las más usadas son las siguientes **reglas de redondeo:**

1°. *Si las cifras a omitir constituyen un número que sea mayor de la mitad de la unidad del último orden conservado, la última cifra quedada se toma con exceso (aumenta en unidad).*

En cambio, *si las cifras a suprimir constituyen un número que sea menor que la mitad de la unidad del último orden conservado, las cifras que se quedan no varían.*

2°. *Si las cifras a omitir constituyen un número que sea igual a la mitad de la unidad del último orden conservado, entonces la última cifra quedada se toma con exceso si es impar y no se somete a la variación si es par.*

Esta regla suele llamarse **regla de la cifra par.**

Ejemplo 2. Redondear los números siguientes: $A_1 = 12{,}7852$; $A_2 = 394{,}261$; $A_3 = 6{,}265001$; $A_4 = 147{,}5$; $A_5 = 148{,}5$ hasta tres cifras.

△ Siguiendo la 1ª regla de redondeo, obtenemos $a_1 = 12{,}8$; $a_2 = 394$; $a_3 = 6{,}27$, puesto que $0{,}0852 > 0{,}5\cdot10^{-1}$; $0{,}261 < 0{,}5\cdot10^0$; $0{,}005001 > 0{,}5\cdot10^{-2}$.

Siguiendo la 2ª regla de redondeo, obtenemos $a_4 = 148$; $a_5 = 148$, puesto que la cifra 7 es impar y 8 es par. ▲

En algunos casos, que actualmente tienen cada vez mayor aplicación, se utiliza una regla de redondeo más simple. Esta regla consiste en omitir todas las cifras comenzando con cierto orden (posición). Valiéndonos de esta regla, obtendríamos los siguientes valores al redondear los números del ejemplo considerado: $a_1 = 12{,}7$; $a_2 = 394$; $a_3 = 6{,}26$; $a_4 = 147$; $a_5 = 148$.

§ 1.3. Errores absoluto y relativo

Sea A un número exacto y a, su valor aproximado. Si $a < A$, se dice que el número a es un *valor aproximado del número A por defecto*; si $a > A$, *un valor aproximado por exceso.*

La diferencia entre el número exacto A y su valor aproximado a se llama *error*.

Por lo general, la magnitud del error $A - a$ e incluso su signo no se puede determinar, puesto que se desconoce el número exacto A. Por eso en vez del mismo error se utiliza la cota superior de su magnitud absoluta.

Se denomina *error absoluto* de un número aproximado a a la magnitud Δ_a que satisface la desigualdad

$$\Delta_a \geqslant |A - a|. \tag{1}$$

El error absoluto es la cota superior de desviación del número exacto A respecto al aproximado:

$$a - \Delta_a \leqslant A \leqslant a + \Delta_a. \tag{2}$$

La desigualdad (2) se escribe frecuentemente en la forma siguiente:

$$A = a \pm \Delta_a. \tag{3}$$

En calidad de error absoluto se toma, en la medida de lo posible, el número mínimo. Por ejemplo, midiendo la longitud de un segmento, nos hemos cerciorado de que el error admitido no supera 0,5 cm; con mayor razón éste no excede 1, 2 y 3 cm. Cada uno de estos números puede considerarse valor absoluto. Sin embargo, por error absoluto conviene tomar el menor de estos números, ya que cuanto menor sea el error absoluto tanto más estrecho será el intervalo dentro del cual se asigna el número exacto.

En la práctica se emplean a menudo las expresiones siguientes: «con precisión hasta 0,01», «con precisión hasta 1 cm», etc. Esto quiere decir que el error absoluto es igual, respectivamente, a 0,01; 1 cm, etc.

Ejemplo 1. Hemos medido la longitud de un segmento L con precisión hasta 0,05 cm y obtenido $l = 18{,}4$ cm. Aquí el error absoluto $\Delta_l = 0{,}05$ cm. De acuerdo con la fórmula (3) es necesario escribir $l = 18{,}4 \pm 0{,}05$ cm. La magnitud exacta de la longitud del segmento está encerrada, según la fórmula (2), entre las cotas siguientes: $18{,}35 \leqslant L \leqslant 18{,}45$.

Ejemplo 2. Se ha medido la longitud de un segmento L con ayuda de una regla en la cual el valor de una división es de 0,1 cm. Resultó que el valor exacto de L está entre 4,6 y 4,7 cm. En este caso como valor aproximado debe tomarse $l = 4{,}65$, o, sea, el centro del intervalo dentro del cual se encuentra el número exacto L. Es evidente que en este caso de error absoluto sirve la mitad del valor de una división de la regla: $\Delta_l = 0{,}05$. Ahora bien, $L = 4{,}65 \pm 0{,}05$ cm.

El error absoluto representa sólo el aspecto cuantitativo del error sin reflejar el aspecto cualitativo, es decir, sin mostrar cómo hemos realizado la medición o el cálculo: bien o mal. Efectivamente, supongamos que midiendo con la misma regla, en la cual el valor de una división es de 1 cm, la longitud del tablero de una mesa y el espesor del mismo, hemos obtenido los resultados siguientes (en cm): el espesor $L_1 = 2 \pm 0,05$ y la longitud $L_2 = 100 \pm 0,5$. Tanto en la primera medición como en la segunda el error absoluto es igual y constituye 0,5 cm. No obstante, se ve que la segunda medición está cumplida más cualitativamente que la primera. Con el fin de estimar la calidad de los cálculos cumplidos o las mediciones respectivas se introduce el concepto de error relativo.

Se llama *error relativo* de un número aproximado a la magnitud δ_a que satisface la desigualdad:

$$\delta_a \geqslant \left| \frac{A-a}{a} \right|, \quad a \neq 0. \tag{4}$$

En particular, por error relativo se puede tomar

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, \quad a \neq 0 \tag{5}$$

y la relación (3) puede ser representada en la forma

$$A = a\,(1 \pm \delta_a). \tag{6}$$

Nótese que el error relativo es un número abstracto y se expresa, a veces, en tanto por ciento.

Retornando a la medición del espesor del tablero de la mesa y de la longitud del mismo, determinemos sus errores relativos:

$$\delta_{L_1} = 0,5/2 = 0,25 \text{ o bien } 25\%;$$
$$\delta_{L_2} = 0,5/100 = 0,005 \text{ o bien } 0,5\%.$$

En tales casos se dice que la longitud del tablero de la mesa está medida relativamente mejor (en 50 veces) que su espesor.

Ejemplo 3. Un valor exacto A se encuentra en el intervalo [23,07; 23,10]. Determinar su valor aproximado, así como los errores absoluto y relativo.

△ Tomamos por valor aproximado el centro del intervalo dado: $a = 23,085$. El error absoluto es la mitad de su longitud: $\Delta_a = 0,015$. Tomemos por error relativo $\delta_a = \Delta_a/a = 0,000604...$ La magnitud del error suele redondearse hasta una o dos cifras distintas del cero. Por eso se puede poner $\delta_a = 0,07\%$. Nótese que en los problemas de semejante género el redondeo del error se ejecuta en la dirección de aumento del mismo para asegurar el cumplimiento de las desigualdades (2) y (4). ▲

Ejemplo 4. Determinar (en tanto por ciento) el error relativo del número aproximado $a = 35,148$, si $A = 35,148 \pm 0,00074$.

△ Hagamos uso de la fórmula (5). Tenemos

$$\delta_a = \Delta_a/|a| = 0,00074/35,148 = 0,000022 \approx 0,003\%. \quad ▲$$

Ejemplo 5. Determinar el valor absoluto del número aproximado $a = 4,123$, si $\delta_a = 0,01\%$.

△ Escribamos los porcentajes en forma de la fracción decimal y para determinar el error absoluto utilicemos la fórmula (5). Entonces

$$\Delta_a = |a| \cdot \delta_a = 4{,}123 \cdot 0{,}0001 \approx 0{,}0005;$$
$$A = 4{,}123 \pm 0{,}0005. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 6. Determinar en qué caso la calidad de cálculos es superior:

$$A_1 = 13/19 \approx 0{,}684, \text{ o bien } A_2 = \sqrt{52} \approx 7{,}21.$$

$\triangle$ Para hallar los errores absolutos tomemos los números a_1 y a_2 con mayor número de signos decimales: $13/19 \approx 0{,}68421$; $\sqrt{52} \approx$ $\approx 7{,}2111$ ... Determinamos los valores absolutos rodendeándolos con exceso:

$$\Delta_{a_1} = |0{,}68421 \ldots - 0{,}684| \approx 0{,}00022;$$
$$\Delta_{a_2} = |7{,}2111 \ldots - 7{,}21| \approx 0{,}0012.$$

Encontramos los errores relativos:

$$\delta_{a_1} = \Delta_{a_1}/|a_1| = 0{,}00022/0{,}684 \approx 0{,}00033 \approx 0{,}04\%;$$
$$\delta_{a_2} = \Delta_{a_2}/|a_2| = 0{,}0012/7{,}21 \approx 0{,}00017 \approx 0{,}02\%.$$

En el segundo caso la calidad de cálculos resulta superior, ya que $\delta_{a_2} < \delta_{a_1}$. $\blacktriangle$

§ 1.4. Cifras significativas justas

Al resolver los problemas se impone con frecuencia la condición: calcular el resultado con precisión hasta 0,1; 0,01, etc. Puede crearse la impresión de que la precisión de cálculos se determina por el número de cifras decimales puestas después de la coma. No obstante, no es cierto. La exactitud de cálculo se determina por el número de cifras del resultado que son fiables.

Se llaman *cifras significativas* de un número todas sus cifras, a excepción de los ceros, puestas a la izquierda de la primera cifra distinta del cero.

Los ceros puestos al fin de un número son siempre cifras significativas (en el caso contrario no se escriben).

Ejemplo 1. Los números 0,001604 y 30,500 tienen, respectivamente, 4 y 5 cifras significativas.

Al escribir los números enteros pueden haber algunos pormenores. Si, por ejemplo, queremos mostrar que en el número 400 000 los últimos tres ceros no son significativos, el número dado ha de escribirse en la forma de dos factores: $400 \cdot 10^3$ ó $40{,}0 \cdot 10^4$, o bien $0{,}400 \cdot 10^6$. La última forma de la notación se llama *normalizada* y es preferible. En este caso se dice que 400 es *mantisa* del número y 6, su *orden*.

Recuérdese que todo número decimal positivo, exacto y aproximado, puede ser representado en la forma

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} \quad + \ldots$$

La cifra α_n del número aproximado a se llama *cifra significativa justa* (o simplemente *justa*) siempre que se cumpla la desigualdad

$$|A - a| \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}, \tag{1}$$

o sea siempre que el valor absoluto de la diferencia entre el número exacto y su valor aproximado no sobrepase la mitad de la unidad del orden decimal en que está α_n.

Puesto que de ordinario en vez de $|A - a|$ se considera el error absoluto Δ_a, la desigualdad (1) se reemplaza a menudo por la siguiente:

$$\Delta_a \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}, \tag{2}$$

puesto que al cumplirse esta desigualdad se cumple la desigualdad inicial (1).

Por otro lado, si se da un número n de cifras justas del número aproximado a, por valor absoluto se puede tomar

$$\Delta_a = 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}. \tag{3}$$

Si la desigualdad (2) no se cumple, la cifra α_n se llama *dudosa*. Es evidente que si la cifra α_n es justa, todas las precedentes (a la izquierda de ella) también son justas.

Ejemplo 2. El número $a = 23{,}10$ se ha obtenido por redondeo de cierto número exacto. ¿Cuántas cifras justas contiene el número a?

△ Al redondear los números según la regla de la cifra par el error absoluto no puede superar la mitad de la unidad del último orden conservado. Esto quiere decir que en el número obtenido por redondeo todas las cifras quedadas son justas. Es evidente que en el caso en cuestión todas las cuatro cifras son justas y el error $\Delta_a = 0{,}005$. ▲

Ejemplo 3. El número $a = 23{,}071937$ contiene cinco cifras justas. Determinar el error absoluto del mismo.

△ Hagamos uso de la fórmula (3). Aquí $m = 1$, $n = 5$, por lo que por error absoluto se puede tomar $\Delta_a = 0{,}5 \cdot 10^{1-5+1} = 0{,}0005$. ▲

Ejemplo 4. El error absoluto del número $a = 705{,}1978$ es igual a $\Delta_a = 0{,}3$. Determinar qué cifras en el número a son justas y redondear el número a, conservando sólo las cifras justas.

△ Utilicemos la fórmula (2). Aquí $m = 2$, $\Delta_a = 0{,}3$ y n ha de determinarse de la desigualidad $0{,}3 \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{3-n}$. Por verificación directa nos convencemos de que el n máximo que satisfaga esta desigualdad es igual a 3 y la cifra 5 es justa: $0{,}3 < 0{,}5 \cdot 10^{2-3+1}$, y la cifra 1 es dudosa: $0{,}3 > 0{,}5 \cdot 10^{2-4+1}$.

Por consiguiente, el número $a = 705{,}1978$ tiene tres cifras justas. Vamos a redondearlo hasta tres cifras: $a_1 = 705$. En este caso el error total es igual a la suma del error inicial y del error de redondeo: $\Delta_a = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$, así que se puede escribir: $A = 705 \pm 0{,}5$. ▲

En las tablas matemáticas todas las cifras significativas colocadas son, como regla, justas. Así, en las conocidas Tablas de V. M. Bradis los valores de seno se dan con error absoluto que no excede de $0,5 \cdot 10^{-4}$.

El último tiempo está utilizándose con más frecuencia el concepto de cifras significativas justas en sentido lato. Este concepto está vinculado con la regla elemental de redondeo la cual hemos mencionado al fin del § 1.2.

La cifra α_n del número aproximado

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots$$

se llama *cifra significativa justa en sentido lato*, si se cumple la desigualdad

$$\Delta_a \leqslant 1 \cdot 10^{m-n+1}, \tag{4}$$

o sea, si el error absoluto del número a no supera la unidad del orden decimal que incluye α_n.

§ 1.5. Relación entre el número de cifras justas y el error del número

El número de cifras justas de un número aproximado se determina por la desigualdad

$$| A - a | \leqslant 0,5 \cdot 10^{m-n+1}, \tag{1}$$

lo que se desprende de la definición de la cifra significativa justa.

Dividiendo ambos miembros de la desigualdad (1) por $| a |$, obtenemos

$$\left| \frac{A-a}{a} \right| \leqslant \frac{0,5 \cdot 10^{m-n+1}}{|\alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{0,5 \cdot 10^{m-n+1}}{\alpha_1 \cdot 10^m} = \frac{0,5}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}}. \tag{2}$$

Ahora bien, si la cifra α_n del número aproximado a es justa, por error relativo se puede tomar

$$\delta_a = \frac{0,5}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}}. \tag{3}$$

Por otro lado, para que la cifra α_n del número aproximado a sea justa es necesario que se cumpla la desigualdad

$$\delta_a \leqslant \frac{0,5}{(\alpha_1 + 1) \cdot 10^{n-1}}, \tag{4}$$

puesto que en este caso se cumplen las desigualdades (2) y (1).

En el caso en que se trata de cifras significativas justas en sentido lato, se puede obtener una fórmula análoga:

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}}. \tag{5}$$

Ejemplo 1. ¿Cuál es el error relativo del número aproximado $a = 4,176$ si todas sus cifras son justas?

$\triangle$ Puesto que en el número 4,176 todas las cuatro cifras son justas, con ayuda de la fórmula (3) encontramos el error relativo

$$\delta_a = \frac{0,5}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^3} \approx 0,00013 = 0,013\%.$$

Nótese que el error relativo del número a puede ser hallado valiéndose de la fórmula $\delta_a = \Delta_a / | a |$. Ya que en el número dado a todas las cifras son justas, $\Delta_a = 0,0005$. Así pues,

$$\delta_a = 0,0005/4,176 \approx 0,00012 = 0,012\,\%.$$

Como vemos, la diferencia no es grande, pero la aplicación de la fórmula (3) simplifica algo el cálculo. $\blacktriangle$

Ejemplo 2. ¿Cuál es el error relativo del número $a = 14,278$ si todas sus cifras son justas en sentido lato?

$\triangle$ Puesto que todas las cinco cifras son justas en sentido lato, entonces, utilizando la fórmula (5), obtenemos

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{1 \cdot 10^4} = 0,0001 = 0,01\%. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 3. ¿Con cuántas cifras decimales justas hace falta tomar $\sqrt{18}$ para que el error no exceda del 0,1%?

$\triangle$ Aquí $A = \sqrt{18} \approx 4, \ldots$; $\delta_a \leqslant 0,1\,\%$, o sea, $\delta_a \leqslant 0,001$. Tenemos $\delta_a = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^{n-1}} \leqslant 0,001$, de donde $125 \leqslant 10^{n-1}$; $1,25 \cdot 10^2 \leqslant 10^{n-1}$; $\log 1,25 + 2 \leqslant n - 1$; $n \geqslant 3 + \log 1,25$, es decir $n \geqslant 4$. $\blacktriangle$

§ 1.6. Errores de la suma y de la diferencia

Consideremos los números exactos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y sus valores aproximados $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sea $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ la suma de todos los números exactos y $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$, suma de sus valores aproximados. Planteemos el problema: conociendo los errores absolutos Δ_{a_1}, $\Delta_{a_2}, \ldots, \Delta_{a_n}$ de todos los números aproximados, estimar el error absoluto de su suma a. Planteemos la diferencia

$$A - a = (A_1 - a_1) + (A_2 - a_2) + \ldots + (A_n - a_n).$$

Pasando a los valores absolutos de los miembros segundo y primero de esta relación y utilizando la propiedad de los valores absolutos, obtenemos

$$| A - a | \leqslant | A_1 - a_1 | + | A_2 - a_2 | + \ldots + | A_n - a_n |.$$

Por lo tanto,

$$| A - a | \leqslant \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n} \tag{1}$$

y por error absoluto del número aproximado a, o sea, de la suma de los números aproximados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se puede tomar la suma de los errores absolutos de los sumandos:

$$\Delta_a = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n}. \qquad (2)$$

De la última fórmula se deduce que, hablando en general, el error absoluto de la suma algebraica no debe ser menor que el error absoluto del menos exacto entre los sumandos. Por eso, con el fin de no realizar cálculos superfluos, no se debe conservar las cifras superfluas también en sumandos más exactos.

Al adicionar los números de exactitud absoluta distinta se suele proceder del modo siguiente:

1) se separa el número (o los números) de la exactitud mínima (es decir, el número que tiene el error absoluto máximo);

2) se redondean números más exactos de modo que en ellos se conserve una cifra más que en el número separado (es decir, se deja una cifra de reserva),

3) se efectúa la adición, teniendo en cuenta todas las cifras conservadas;

4) el resultado obtenido se redondea suprimiendo una cifra.

Observación. Si hay una gran cantidad de sumandos ($n > 10$), la estimación del error absoluto de la suma realizada con ayuda de la fórmula (2) resulta fuertemente aumentada, ya que de ordinario ocurre una compensación parcial de errores de signos opuestos. Si todos los sumandos están redondeados hasta el m-ésimo orden decimal, o sea, sus errores se evalúan por la magnitud $0{,}5 \cdot 10^{-m}$, la estimación estadística del error absoluto de la suma se calcula por la fórmula siguiente:

$$\Delta_a = \sqrt{n} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-m}. \qquad (3)$$

Ejemplo 1. Adicionar los números aproximados:

$a = 0{,}1732 + 17{,}45 + 0{,}000333 + 204{,}4 + 7{,}25 + 144{,}2 + 0{,}0112 + 0{,}634 + 0{,}0771$ cada uno de los cuales tiene justas todas las cifras escritas.

△ Elegimos los números de la mínima exactitud (de máximo error absoluto). Tales números son: 204,4 y 144,2. El error de cada uno de ellos constituye 0,05. Redondeamos los demás números, dejando una cifra (de reserva) más y sumamos todos los números:

$$\begin{array}{r} 0{,}17 \\ 17{,}45 \\ 0{,}00 \\ 204{,}4 \\ +\quad 7{,}25 \\ 144{,}2 \\ 0{,}01 \\ 0{,}63 \\ 0{,}08 \\ \hline 374{,}19 \end{array}$$

Redondeamos la suma obtenida, suprimiendo una cifra: 374,2.

Evaluemos la exactitud del resultado. El error absoluto de la suma se compone de dos sumandos:

1) del error inicial, o sea, de la suma de los errores de los números menos exactos y de los errores de redondeo de los demás números: $0,05 \cdot 2 + 0,005 \cdot 7 \approx 0,14$;

2) del error de redondeo del resultado: 0,01.

Ahora bien, el error absoluto de la suma es 0,15 y el resultado ha de escribirse en la forma $A = 374,2 \pm 0,15$. Es posible también tal forma de la notación: $A = 374,2 \pm 0,2$. ▲

De un modo análogo se procede también en el caso en que uno o varios números aproximados son negativos.

Ejemplo 2. Hallar la diferencia de los números aproximados $a = a_1 - a_2$ y estimar el error absoluto y relativo del resultado si $A_1 = 17,5 \pm 0,02$, $A_2 = 45,6 \pm 0,03$.

△ Encontramos $a = a_1 - a_2 = 17,5 - 45,6 = -28,1$; $\Delta_a = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} = 0,02 + 0,03 = 0,05$. Ahora bien, $A = -28,1 \pm 0,05$. Determinemos el error relativo: $\delta_a = 0,05/|-28,1| \approx 0,002 \approx 0,2\%$. ▲

Se puede mostrar que si el error absoluto de la suma de números aproximados se determina por la fórmula (2) y el error relativo de la suma $\delta_a = \Delta_a \mid a \mid$, entonces

$$\delta_{\text{mín}} \leqslant \delta_a \leqslant \delta_{\text{máx}}.$$

Ejemplo 3. Estimar el error relativo de la suma de números del ejemplo 1 y compararlo con los errores relativos de los sumandos.

△ Determinemos el error relativo de la suma:

$$\delta_a = 0,2/374,2 = 0,0006 = 0,06\%.$$

Los errores relativos de los sumandos constituyen:

$$\delta_{a_1} = 0,005/0,17 = 3\%; \quad \delta_{a_2} = 0,005/17,45 = 0,03\%;$$
$$\delta_{a_3} = 0,05/204,4 = 0,03\%; \quad \delta_{a_4} = 0,005/7,25 = 0,07\%;$$
$$\delta_{a_5} = 0,05/144,2 = 0,04\%; \quad \delta_{a_6} = 0,005/0,01 = 50\%;$$
$$\delta_{a_7} = 0,005/0,63 = 0,8\%; \quad \delta_{a_8} = 0,005/0,08 = 7\%.$$

Así pues, $\delta_{\text{mín}} = 0,03\%$, $\delta_{\text{máx}} = 50\%$, $\delta_a = 0,06\%$, o sea, el error relativo de la suma está encerrado entre los errores relativos mínimo y máximo de los sumandos. ▲

Nótese que al sustraer los números próximos aparece con frecuencia la situación llamada *pérdida de exactitud*. Sea $x > 0$, $y > 0$ y $a = x - y$; entonces

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x - y|}.$$

Ahora bien, si los números x e y poco se distinguen uno de otro, entonces, incluso al ser pequeños los errores Δ_x y Δ_y, la magnitud del error relativo de la diferencia puede resultar considerable.

Ejemplo 4. Sea $x = 5{,}125$, $y = 5{,}135$; aquí $\Delta_x = 0{,}0005$, $\Delta_y = 0{,}0005$, $\delta_x \approx \delta_y \approx 0{,}01\%$. El error relativo de la diferencia $a = x - y$ constituye

$$\delta_a = \frac{0{,}0005 + 0{,}0005}{0{,}01} \cdot 100 = 10\%.$$

Es evidente que como resultado de la sustracción de dos números próximos puede tener lugar gran pérdida de exactitud. Para evitar esto, es necesario procurar que el esquema de cálculo se transforme de un modo tal que las pequeñas diferencias de las magnitudes se calculen inmediatamente.

Ejemplo 5. Hallar la diferencia $A = \sqrt{6{,}27} - \sqrt{6{,}26}$, y estimar el error relativo del resultado.

Δ Sea $A_1 = \sqrt{6{,}27} \approx 2{,}504$; $\Delta_{a_1} = 0{,}0005$; $A_2 = \sqrt{6{,}26} \approx 2{,}502$; $\Delta_{a_2} = 0{,}0005$. Entonces $a = 2{,}504 - 2{,}502 = 0{,}2 \cdot 10^{-2}$; $\Delta_a = 0{,}0005 + 0{,}0005 = 0{,}001$, de donde

$$\delta_a = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-2}}{0{,}2 \cdot 10^{-2}} = 0{,}5 = 50\%.$$

No obstante, cambiando el esquema de cálculo se puede obtener una estimación mucho mejor del error relativo:

$$A = \sqrt{6{,}27} - \sqrt{6{,}26} = \frac{(\sqrt{6{,}27} - \sqrt{6{,}26})(\sqrt{6{,}27} + \sqrt{6{,}26})}{\sqrt{6{,}27} + \sqrt{6{,}26}} =$$

$$= \frac{6{,}27 - 6{,}26}{\sqrt{6{,}27} + \sqrt{6{,}26}} = \frac{0{,}01}{\sqrt{6{,}27} + \sqrt{6{,}26}} \approx 0{,}2 \cdot 10^{-2} = a;$$

$$\delta_a = \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}}{a_1 + a_2} = \frac{0{,}001}{5{,}006} = 0{,}2 \cdot 10^{-3} = 0{,}02\%.$$

Ahora bien, al calcular con las mismas cuatro cifras justas de a_1 y a_2 hemos obtenido un resultado mucho mejor desde el punto de vista del error relativo. ▲

Ejemplo 6. Calcular el valor de la función $y = 1 - \cos x$ para los siguientes valores del argumento: 1) $x_1 = 80°$; 2) $x_2 = 1°$. Calcular los errores absoluto y relativo del resultado.

Δ 1) Con ayuda de las «Tablas matemáticas de cuatro cifras» de Bradis encontramos $\cos 80° \approx 0{,}1736$ y puesto que todas las cifras de este número son justas, tenemos $\Delta_{0{,}1736} = 0{,}00005$. Entonces $y_1 = 1 - 0{,}1736 = 0{,}8264$ y $\Delta_{y_1} = 0{,}00005$ (del número exacto, igual a la unidad, se sustraye el número aproximado con error absoluto que no excede de 0,00005).

Por consiguiente,

$$\delta_{y_1} = 0{,}00005/0{,}8264 = 0{,}00006 = 0{,}006\%.$$

2) Tenemos $\cos 1° \approx 0{,}9998$; $\Delta_{0{,}9998} = 0{,}00005$; $y_2 = 1 - 0{,}9998 = 0{,}0002$; $\Delta_{y_2} = 0{,}00005$; por lo tanto,

$$\delta_{y_2} = 0{,}00005/0{,}0002 = 0{,}25 = 25\%.$$

De los ejemplos dados se ve que para pequeños valores del argumento el cálculo inmediato por la fórmula $y = 1 - \cos x$ da el error relativo del orden de 25%. Para $x = 80°$ el error relativo constituye sólo 0,006%.

Cambiemos el esquema de cálculo y para hallar los valores de la función $y = 1 - \cos x$, siempre que los valores del argumento sean pequeños, hagamos uso de la fórmula $y = 1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 (x/2)$. Designemos $A = \operatorname{sen} 0°30' \approx 0{,}0087$. Entonces $\Delta_a = 0{,}00005$; $\delta_a = 0{,}5/87 = 0{,}58\%$. Pero

$$y_2 = 2 \cdot 0{,}0087^2 = 0{,}000151;$$
$$\delta_{y_2} = 1{,}2\%$$

(véase a continuación el § 1.7). Como resultado obtenemos

$$\Delta_{y_2} = y_2 \delta_{y_2} = 0{,}000151 \cdot 0{,}012 = 0{,}000002$$

(antes hemos tenido $\Delta_{y_2} = 0{,}00005$). Ahora bien, la simple transformación de la fórmula de cálculo ha permitido, con los mismos datos iniciales, obtener un resultado más exacto. ▲

Sin embargo, no siempre es posible transformar el esquema de cálculo. Por eso al sustraer números próximos uno a otro es necesario tomarlos con una cantidad suficiente de cifras justas de reserva (si esto es posible). Si se conoce que los primeros m cifras significativas pueden desaparecer y el resultado debe obtenerse con n cifras significativas justas, los datos iniciales han de tomarse con $m + n$ cifras significativas justas, como hemos hecho en el ejemplo 5.

§ 1.7. Error del producto. Número de cifras justas del producto

Error del producto. Examinemos dos números exactos A_1 y A_2 y sus valores aproximados a_1 y a_2. Sea $A = A_1 A_2$ y $a = a_1 a_2$. Planteemos el problema: conociendo los errores relativos δ_{a_1} y δ_{a_2}, estimar el error relativo del producto δ_a.

Representemos los valores exactos A_1 y A_2 en la forma

$$A_1 = a_1 + \Delta_1, \quad A_2 = a_2 + \Delta_2, \tag{1}$$

donde las incógnitas Δ_1 y Δ_2 satisfacen las desigualdades

$$|\Delta_1| \leqslant |a_1| \delta_{a_1}, \quad |\Delta_2| \leqslant |a_2| \delta_{a_2}. \tag{2}$$

Multiplicando los miembros segundos y primeros de las relaciones (1), obtenemos

$$A_1 A_2 = a_1 a_2 + \Delta_1 a_2 + \Delta_2 a_1 + \Delta_1 \Delta_2.$$

Pasando a los valores absolutos de los miembros segundo y primero de esta relación y utilizando las propiedades de los valores absolutos, encontramos

$$|A_1 A_2 - a_1 a_2| \leqslant |\Delta_2 a_1| + |\Delta_1 a_2| + |\Delta_1 \Delta_2|. \tag{3}$$

Suprimamos el último sumando del segundo miembro en virtud de su pequeñez y dividamos los miembros segundo y primero de la desigualdad por $|a| = |a_1 a_2|$. Entonces, en vista de las relaciones (2), tenemos

$$\left|\frac{A-a}{a}\right| \leqslant \delta_{a_1} + \delta_{a_2}. \tag{4}$$

De la relación obtenida se deduce que por error relativo del producto $a = a_1 a_2$ se puede tomar la suma de errores relativos de los factores

$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}. \tag{5}$$

La desigualdad (5) se extiende fácilmente al producto de unos cuantos factores, así que si $A = A_1 A_2 \ldots A_n$ y $a = a_1 a_2 \ldots a_n$, se puede tomar que

$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \ldots + \delta_{a_n}. \tag{6}$$

En el caso en que todos los factores, a excepción de uno, son números exactos, de la fórmula (6) se desprende que el error relativo del producto coincide con el error relativo del factor aproximado. Ahora bien, si de número aproximado sirve sólo el valor del factor a_i, entonces

$$\delta_a = \delta_{a_i}. \tag{7}$$

Observación. Al multiplicar el número aproximado a por el factor exacto k el error relativo del producto es igual al error relativo del número aproximado a y el error absoluto es $|k|$ veces mayor que el error absoluto del número aproximado.

En efecto, sea $a = ka_1$, donde k es el factor exacto, distinto del cero. Entonces, según la fórmula (7) tenemos $\delta_a = \delta_{a_1}$, o bien

$$\Delta_a = |a|\delta_a = |a|\delta_{a_1} = |ka_1| \frac{\Delta_{a_1}}{|a_1|} = |k|\,\Delta_{a_1},$$

o sea,

$$\Delta_a = |k|\Delta_{a_1}. \tag{8}$$

Conociendo el error relativo δ_a del producto a, se puede determinar su valor absoluto por la fórmula $\Delta_a = |a|\delta_a$.

Si el error relativo del producto de números aproximados se halla con ayuda de la fórmula (6), al multiplicar los números de diferente error relativo no conviene conservar las cifras superfluas en los números de menor error relativo. Se suele proceder del modo siguiente:

1) se separa el número con cantidad mínima de cifras significativas justas;

2) los factores quedados se redondean de un modo tal que contengan una cifra significativa más que la cantidad de cifras significativas justas en el número separado;

3) se conservan en el producto tantas cifras significativas cuantas cifras significativas justas tiene el menos exacto de los factores (número separado).

Ejemplo 1. Hallar el producto de los números aproximados $x_1 = 3,6$ y $x_2 = 84,489$ todas las cifras de los cuales son justas.

△ En el primer número hay dos cifras significativas justas y en el segundo, cinco. Por eso redondeamos el segundo número hasta tres cifras significativas. Una vez realizado el redondeo, tenemos $x_1 = 3,6$; $x_2 = 84,5$. De aquí

$$x_1x_2 = 3,6 \cdot 84,5 = 304,20 \approx 3,0 \cdot 10^2.$$

Como resultado hemos conservado dos cifras significativas, o sea, tantas cuantas tenía el factor con cantidad mínima de cifras significativas justas. ▲

Ejemplo 2. Determinar el producto de los números aproximados $x_1 = 12,4$ y $x_2 = 65,54$ y el número de cifras justas contenidas en el mismo si todas las cifras escritas en los factores son justas.

△ En el primero de los números hay tres cifras significativas justas y en el segundo, cuatro; se puede multiplicar los números sin redondearlos previamente; $x_1x_2 = 12,4 \cdot 65,54 = 812,696$. Es necesario conservar tres cifras significativas, ya que el menos exacto de los factores tiene tanta cantidad de cifras significativas justas; ahora bien, $a = 813$. Calculemos el error:

$$\delta_a = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} = \frac{0,05}{12,4} + \frac{0,005}{65,54} = 0,0041.$$

Entonces $\Delta_a = 813 \cdot 0,0041 \approx 3,4$. Por lo tanto, el producto tiene dos cifras justas y debe escribirse así $A = 813 \pm 4$. ▲

Número de cifras justas del producto. Supongamos que se da el producto de k factores ($k \leqslant 10$) $a = a_1a_2 \ldots a_k$, donde $a_i \neq 0$. Cada uno de los factores contiene n cifras justas ($n > 1$), por lo menos.

Supongamos que cada uno de los factores tiene la forma

$$\begin{aligned} a_i = {} & \alpha_i \cdot 10^{l_i} + \beta_i \cdot 10^{l_i - 1} + \\ & + \gamma_i \cdot 10^{l_i - 2} + \ldots \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \end{aligned} \tag{9}$$

donde α_i son las primeras cifras significativas de los factores aproximados escritos en el sistema decimal de numeración.

Para el error relativo del número aproximado que tiene n cifras justas utilicemos la fórmula

$$\delta_{a_i} = \frac{0,5}{\alpha_i \cdot 10^{n-1}} \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Entonces el error relativo del producto de k números aproximados, cada uno de los cuales tiene n cifras significativas justas, es igual a

$$\begin{aligned} \delta_a = {} & \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \ldots + \delta_{a_k} = \\ = {} & \frac{0,5}{10^{n-1}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_k} \right). \end{aligned} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta que la cantidad de factores es no más de 10 ($k \leqslant 10$), obtenemos

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_k}\leqslant 10$$

y, por consiguiente,

$$\delta_a \leqslant \frac{0,5}{10^{n-2}}.$$

Ahora bien, si todos los factores tienen n cifras significativas y la cantidad de factores no es más de 10, entonces la cantidad de cifras justas del producto es una o dos unidades menor que n. En el caso en que los factores tienen diferente exactitud, por n es necesario entender la cantidad de cifras justas contenidas en el menos exacto de los factores.

Observación. Si hay una gran cantidad de factores ($k > 10$) es cómodo hacer uso de la estimación estadística que tiene en cuenta la compensación parcial de los errores de signos opuestos. Si todos los números a_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) tienen, aproximadamente, el mismo error relativo δ, el error relativo del producto se toma igual a

$$\delta_a = \sqrt{n}\delta. \tag{11}$$

Ejemplo 3. Determinar el error relativo y la cantidad de cifras justas del producto $a = 84,76 \cdot 8,436$, donde todas las cifras de los factores son justas.

△ Aquí $a_1 = 84,36$; $a_2 = 8,436$; $n_1 = n_2 = 4$. El mismo producto $a = 715,03\ldots$ comienza con la cifra 7, es decir su $\alpha_1 = 7$. Ahora por la fórmula (10) tenemos

$$\delta_a = \frac{0,5}{10^{4-1}}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{0,5}{4\cdot 10^{4-1}}.$$

Comparando este resultado con el segundo miembro de la fórmula (4) del § 1.5, hallamos

$$\frac{0,5}{(7+1)\,10^{4-1}} < \frac{0,5}{4\cdot 10^{4-1}} < \frac{0,5}{(7+1)\,10^{3-1}}.$$

Por consiguiente, el producto tiene tres cifras justas, por lo menos.

Verifiquemos si es así. Determinemos el error absoluto con ayuda de la fórmula $\Delta_a = |a|\,\delta_a$; obtenemos $\Delta_a = 715 \cdot 0,125 \cdot 10^{-3} \approx \approx 0,09$. De aquí se desprende que el valor aproximado del producto tiene tres cifras justas y teniendo en cuenta el error de redondeo del resultado se puede escribir $A = 715 \pm 0,2$. ▲

Ejemplo 4. Determinar el error relativo del producto $a = 145,35 \cdot 1,24386$ y la cantidad de cifras justas contenidas en el mismo si los números se dan con cifras justas.

△ Aquí $a_1 = 145,35$, $n_1 = 5$, $a_2 = 1,24386$, $n_2 = 6$. Los números dados tienen diferente cantidad de cifras significativas justas; elegimos $n = 5$. Por la fórmula (10) obtenemos

$$\delta_a = \frac{0,5}{10^{5-1}}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)=\frac{0,5}{7,5\cdot 10^{4-1}}.$$

Al calcular el producto $a = a_1 \cdot a_2 = 770{,}43\ldots$, comparemos la magnitud δ_a con el segundo miembro de la fórmula (4) del § 1.5:

$$\frac{0{,}5}{(7+1)\cdot 10^{4-1}} < \frac{0{,}5}{7{,}5\cdot 10^{4-1}} < \frac{0{,}5}{(7+1)\,10^{3-1}}.$$

Por consiguiente, el producto tiene, como mínimo, tres cifras significativas justas. ▲

Ahora bien, en el caso desfavorable el producto de los números aproximados puede tener $n - 2$ cifras significativas justas (donde n es la cantidad mínima de cifras significativas justas de los factores dados).

§ 1.8. Error del cociente. Número de cifras justas del cociente

Error del cociente. Consideremos los números exactos A_1, A_2 y sus valores aproximados a_1, a_2 con errores aproximados Δ_{a_1}, Δ_{a_2}. Planteemos el problema: estimar el error relativo del valor aproximado del cociente $a = a_1/a_2$ para el valor exacto $A = A_1/A_2$. Sea $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. Representemos los valores exactos A_1 y A_2 en la forma

$$A_2 = a_1 + \Delta_1, \quad A_2 = a_2 + \Delta_2, \tag{1}$$

donde las incógnitas Δ_1 y Δ_2 satisfacen las desigualdades

$$|\Delta_1| \leqslant \Delta_{a_1}, \quad |\Delta_2| \leqslant \Delta_{a_2}. \tag{2}$$

Consideremos ahora la diferencia

$$A - a = \frac{a_1+\Delta_1}{a_2+\Delta_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2\Delta_1 - a_1\Delta_2}{a_2(a_2+\Delta_2)}.$$

Dividiendo los miembros segundo y primero por a, examinemos sus valores absolutos:

$$\left|\frac{A-a}{a}\right| = \left|\frac{a_2\Delta_1 - a_1\Delta_2}{a_1(a_2+\Delta_2)}\right| = \left|\frac{a_2}{a_2+\Delta_2}\right| \left|\frac{\Delta_1}{a_1} - \frac{\Delta_2}{a_2}\right|.$$

Teniendo en cuenta que Δ_2 es pequeño en comparación con a_2, pongamos aproximadamente que $a_2/(a_2 + \Delta_2) \approx 1$. Entonces, utilizando las propiedades de los valores absolutos y las desigualdades (2), obtenemos

$$\left|\frac{A-a}{a}\right| = \left|\frac{\Delta_1}{a_1} - \frac{\Delta_2}{a_2}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta a_1}{|a_1|} + \frac{\Delta a_2}{|a_2|} = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}.$$

Ahora bien, por error relativo del cociente $a = a_1/a_2$ se puede tomar la suma de errores relativos del dividiendo y del divisor:

$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}. \tag{3}$$

Al utilizar la fórmula (3) para la estimación del error relativo del cociente hacen la aportación principal en este error los números menos exactos (que tienen el máximo error relativo). Por eso al dividir los números de diferente error relativo se suele proceder del modo siguiente:

1) se separa el número menos exacto, o sea, el número que tiene la cantidad mínima de cifras exactas;

2) se redondea el segundo número, conservando una cifra significativa más que las tiene el número separado;

3) en el cociente se conservan tantas cifras significativas cuantas las había en el número exacto menor.

Conociendo el error relativo del cociente, es fácil determinar su error absoluto con ayuda de la fórmula

$$\Delta_a = |a|\,\delta_a = \left|\frac{a_1}{a_2}\right| (\delta_{a_1} + \delta_{a_2}). \tag{4}$$

Ejemplo 1. Calcular el cociente $a = x/y$ de los números aproximados $x = 5{,}735$ e $y = 1{,}23$ si todas las cifras del dividiendo y del divisor son justas. Determinar los errores relativo y absoluto.

1) Primeramente calculemos el cociente. Puesto que el dividiendo $x = 5{,}735$ contiene cuatro cifras significativas justas y el divisor las contiene tres, se puede realizar la división sin previo redondeo; tenemos $a = 5{,}735 : 1{,}23 = 4{,}66$. Como resultado hemos conservado tres cifras significativas, puesto que el número exacto mínimo (divisor) contiene tres cifras significativas justas.

2) Calculemos el error relativo del cociente por la fórmula (3), teniendo en cuenta que $\Delta_x = 0{,}0005$; $\Delta_y = 0{,}005$:

$$\delta_a = \delta_x + \delta_y = \frac{0{,}0005}{5{,}735} + \frac{0{,}005}{1{,}23} = 0{,}00009 + 0{,}0041 = 0{,}0042 \approx 0{,}5\%.$$

3) Determinemos el error absoluto

$$\Delta_a = |a|\,\delta_a = 4{,}66 \cdot 0{,}0042 = 0{,}02.$$

El resultado final, teniendo en cuenta el error de redondeo del producto (0,005), ha de escribirse así: $A = 4{,}66 \pm 0{,}03$.

Nótese que la cifra de centésimas partes es dudosa, puesto que $0{,}03 > 0{,}005$. Si queremos dejar en el resultado sólo cifras justas, es necesario redondear el resultado y tener en cuenta el error de redondeo. El número aproximado $a_1 = 0{,}5$ satisface este requisito, puesto que $\Delta_{a_1} = \Delta_a + \Delta^1_{\text{red}} = 0{,}02 + 0{,}4 = 0{,}42 < 0{,}5$.

Al mismo tiempo es imposible dejar en el número aproximado a dos cifras justas, ya que en este caso obtendríamos $a_2 = 4{,}7$ y $\Delta_{a_2} = \Delta_a + \Delta^2_{\text{red}} = 0{,}02 + 0{,}05 = 0{,}07 > 0{,}05$. ▲

Cantidad de cifras justas del cociente. Supongamos que los números aproximados

$$a_1 = \alpha_1 \cdot 10^{l_1} + \alpha_2 \cdot 10^{l_1 - 1} + \ldots;$$
$$a_2 = \beta_1 \cdot 10^{l_2} + \beta_2 \cdot 10^{l_2 - 1} + \ldots$$

tienen n cifras significativas justas cada uno. Entonces, utilizando las desigualdades

$$\delta_{a_1} = \frac{0{,}5}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}}, \quad \delta_{a_2} = \frac{0{,}5}{\beta_1 \cdot 10^{n-1}},$$

hallamos el error relativo del cociente $a = a_1/a_2$:

$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} = \frac{0,5}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}} + \frac{0,5}{\beta_1 \cdot 10^{n-1}} = \frac{0,5}{10^{n-1}}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}\right). \quad (5)$$

Por consiguiente, si $\alpha_1 \geqslant 2$ y $\beta_1 \geqslant 2$, entonces el cociente tiene por lo menos $n - 1$ cifras significantes justas. Si $\alpha_1 = 1$ o bien $\beta_1 = 1$, entonces el cociente puede tener $n - 2$ cifras significantes justas.

Ejemplo 2. Calcular el cociente $a = 39,356 : 2,21$ y determinar cuántas cifras significativas justas se contienen en el mismo si en el dividiendo y en el divisor todas las cifras son justas.

△ 1) Puesto que en el divisor hay tres cifras significativas justas y en el dividiendo las hay cinco, redondeamos el dividiendo hasta cuatro cifras significativas y realizamos la división; tenemos $a = 39,36 : 2,21 = 17,81 \approx 17,8$ (como resultado conservamos tantas cifras significativas cuantas las hay en el número con menor cantidad de cifras significativas justas).

2) Determinemos el error relativo con ayuda de la fórmula (5) donde $n = 3$, ya que el número de exactitud menor contiene tres cifras justas; $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 2$. Por lo tanto,

$$\delta_a = \frac{0,5}{10^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12} \cdot 10^{-2} = 0,42\%.$$

Comparando la magnitud δ_a con el segundo miembro de la fórmula (4) del § 1.5, obtenemos

$$\frac{0,5}{(1+1)\,10^{3-1}} < \frac{0,5}{1,2 \cdot 10^{3-1}} < \frac{0,5}{(1+1)\,10^{2-1}}.$$

Por lo tanto el cociente tiene, por lo menos, dos cifras significativas justas, o sea, una cifra significante menos que en el número aproximado (divisor) con menor cantidad de cifras significativas justas. ▲

Ejemplo 3. Determinar el error relativo del cociente $a = 15,834 : 1,72$ y la cantidad de cifras justas contenidas en el mismo si el dividiendo y el divisor contienen las cifras significadas justas.

△ El número de exactitud menor contiene tres cifras significativas justas. Determinemos el error relativo con ayuda de la fórmula (5):

$$\delta_a = \frac{0,5}{10^{3-1}}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) = \frac{0,5 \cdot 2}{10^{3-1}}.$$

Calculando el cociente $a = 9,20\ldots$ y comparando la magnitud δ_a con el segundo miembro de la fórmula (4) del § 1.5, obtenemos ($\alpha_1 = 9$)

$$\frac{0,5}{10 \cdot 10^{2-1}} < \frac{0,5 \cdot 2}{10^{3-1}} < \frac{0,5}{10 \cdot 10^{1-1}}.$$

Por consiguiente, podemos garantizar en el cociente sólo una cifra significativa justa lo que es dos cifras significativas menor que en el divisor, el menos exacto de los dos. ▲

§ 1.9. Errores de la potencia y de la raíz

Consideremos el número aproximado a_1 que tiene el error relativo δ_{a_1}. Supongamos que se necesita estimar el error relativo de la potencia $a = a_1^m$. Es evidente que

$$a = a_1^m = \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{m \text{ factores}}.$$

El error relativo del producto es

$$\delta_a = \underbrace{\delta_{a_1} + \delta_{a_1} + \ldots + \delta_{a_1}}_{m \text{ sumandos}} = m\delta_{a_1}. \quad (1)$$

Ahora bien, al elevar el número aproximado a a la potencia m el error relativo de este número aumenta m veces. En los cálculos prácticos al elevar a potencia un número aproximado como resultado se conservan tantas cifras significativas cuantas se contenían en el mismo número aproximado.

Ejemplo 1. El lado del cuadrado $a = 36{,}5$ cm (con precisión hasta 1 mm). Hallar el área del cuadrado, los errores relativo y absoluto, así como la cantidad de cifras justas del resultado.

△ 1) Calculemos el área del cuadrado

$$S = a^2 = 36{,}5^2 = 1332{,}25 \approx 1{,}33 \cdot 10^3 \text{ cm}^2.$$

2) Determinemos el error relativo del área

$$\delta_s = 2\delta_a = 2 \cdot \frac{0{,}1}{36{,}5} \approx 0{,}0055 = 0{,}55\%.$$

3) Determinemos el error absoluto del área

$$\Delta_s = S\delta_s = 1{,}33 \cdot 10^3 \cdot 0{,}0055 \approx 7{,}4 \text{ cm}^2.$$

La respuesta definitiva puede ser escrita así:

$$S = (1{,}33 \pm 0{,}01) \cdot 10^3 \text{ cm}^2.$$

Ahora bien, el resultado tiene dos cifras significativas justas. ▲

Consideremos el número aproximado a_1 que tiene el error relativo δ_{a_1}. Se puede mostrar que el error relativo del número $a = \sqrt[m]{a_1}$ es m veces menor que el error relativo del número a_1:

$$\delta_a = \frac{1}{m}\delta_{a_1}. \quad (2)$$

En los problemas prácticos al extraer la raíz del número aproximado como resultado se conservan tantas cifras significativas cuantas se contenían en el número subradical.

Ejemplo 2. Determinar, con qué error relativo y con cuántas cifras significativas justas se puede hallar el lado del cuadrado si su área $S = 16{,}45$ cm^2 con precisión hasta 0,01.

△ Tenemos $a = \sqrt{S} = 4{,}056$ cm;

$$\delta_a = \frac{1}{2}\delta_s = \frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}01}{16{,}45} = 0{,}0003 = 0{,}03\%;$$

$$\Delta_a = 4{,}056\cdot 0{,}0003 = 1{,}3\cdot 10^{-3}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta el redondeo del resultado, $A = 4{,}056 \pm 0{,}002$ cm y la cantidad de cifras significativas justas es igual a 3. ▲

§ 1.10. Reglas de cómputo de las cifras

Durante los cálculos, siempre que no se realice un cómputo estricto de errores, se recomienda usar las reglas de cómputo de las cifras. Estas reglas indican cómo hay que efectuar el redondeo de todos los resultados para que, en primer lugar, se garantice la precisión prefijada del resultado definitivo y, en el segundo lugar, no se lleven a cabo los cálculos con cifras superfluas que no ejercen influencia en las cifras justas del resultado.

Vamos a exponer las **reglas de cómputo de las cifras.**

1°. Al adicionar y sustraer los números aproximados, en el resultado conviene conservar tantas cifras decimales cuantas se contienen en el número aproximado dado con menor cantidad de cifras decimales.

2°. Al multiplicar y dividir, en el resultado es necesario conservar tantas cifras significativas cuantas se contienen en el número aproximado dado con menor cantidad de cifras significativas justas.

3°. Al elevar un número aproximado al cuadrado o al cubo en el resultado han de conservarse tantas cifras significativas cuantas se contiene en la base de la potencia.

4°. Al extraer la raíz cuadrada o cúbica de un número aproximado, en el resultado es necesario conservar tantas cifras significativas cuantas se contienen en el número subradical.

5°. Al calcular los resultados intermedios conviene conservar una cifra más que se recomienda por las reglas 1°—4°. En el resultado final esta cifra «de reserva» se suprime.

6°. Si ciertos datos tienen más cifras decimales (durante la adición y la sustracción) o más cifras significativas (durante otras operaciones) que otros, es necesario redondearlos previamente, conservando sólo una cifra «de reserva».

7°. Al calcular una expresión monomial con ayuda de los logaritmos se recomienda computar la cantidad de cifras significativas en el número aproximado dado con menor cantidad de cifras significativas y hacer uso de la tabla de logaritmos con cantidad de cifras decimales mayor en una unidad. En el resultado final la última cifra significativa se suprime.

8°. Si los datos pueden tomarse con precisión arbitraria, entonces para obtener el resultado con m cifras justas los datos iniciales han de tomarse con tanta cantidad de cifras que, según las reglas precedentes, garanticen $m+1$ cifras en el resultado.

Estas reglas se dan suponiendo que los componentes de operaciones contienen únicamente cifras justas y la cantidad de operaciones no es grande.

Ejemplo 1. Calcular $X=\frac{A^3\sqrt{B}}{C^2}$, donde $A=7{,}45\pm 0{,}01$, $B=50{,}46\pm 0{,}02$, $C=15{,}4\pm 0{,}03$. Determinar el error del resultado.

△ Al calcular los resultados intermedios, conservaremos una cifra «de reserva», o sea, si según la regla general es necesario dejar n cifras significativas, entonces en los resultados intermedios conservaremos $n+1$ cifras. Tenemos

$$a^3=413{,}5;\ \sqrt{b}=7{,}1035;\ c^2=237{,}2;\ x=\frac{413{,}5\cdot 7{,}1035}{237{,}2}=12{,}4.$$

En el resultado hemos dejado tres cifras significativas, ya que en los factores la cantidad menor de cifras significativas es igual a 3.

Vamos a computar los errores del resultado:

$$\delta_x=3\delta_a+\frac{1}{2}\delta_b+2\delta_c=3\cdot\frac{0{,}01}{7{,}45}+\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}02}{50{,}46}+$$
$$+2\cdot\frac{0{,}03}{15{,}4}\approx 0{,}0041+0{,}0002+0{,}004\approx 0{,}009;$$
$$\Delta_x=12{,}4\cdot 0{,}009\approx 0{,}12.$$

Así pues, obtenemos la respuesta: $X=12{,}4\pm 0{,}2$; $\delta_x=0{,}9\%$ ▲.

Ejemplo 2. Calcular $X=\frac{(A+B)M}{(C-D)^2}$, donde $A=2{,}754\pm 0{,}001$; $B=11{,}7\pm 0{,}04$; $M=0{,}56\pm 0{,}05$; $C=10{,}536\pm 0{,}002$; $D=6{,}32\pm 0{,}008$. Determinar los errores del resultado.

△ Hallamos

$$a+b=2{,}75+11{,}7=14{,}45;$$
$$\Delta_{a+b}=\Delta_a+\Delta_b+\Delta_{\text{red}}=0{,}001+0{,}04+0{,}004=0{,}045;$$
$$c-d=10{,}536-6{,}32=4{,}216;\ \Delta_{c-d}=0{,}002+0{,}008=0{,}010.$$

Por eso

$$x=\frac{14{,}45\cdot 0{,}56}{4{,}216^2}=\frac{14{,}45\cdot 0{,}56}{17{,}75}=0{,}456\approx 0{,}46=4{,}6\cdot 10^{-1};$$
$$\delta_x=\frac{0{,}045}{14{,}45}+\frac{0{,}005}{0{,}56}+2\cdot\frac{0{,}01}{4{,}216}=0{,}00311+0{,}00894+$$
$$+0{,}00474=0{,}02=2\%.$$

Por consiguiente,

$$\Delta_x = 0{,}46 \cdot 0{,}02 = 0{,}01.$$

Así pues, obtenemos la respuesta: $X = 0{,}46 \pm 0{,}01$; $\delta_x = 2\%$. ▲

Ejemplo 3. Haciendo uso de las reglas de cómputo de las cifras, calcular

$$v = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right),$$

donde $h = 11{,}8$, $\pi = 3{,}142$, $r = 23{,}67$.

△ Hallamos

$$v = 3{,}142 \cdot 11{,}8^2 (23{,}67 - 3{,}933) = 3{,}142 \cdot 11{,}8^2 \cdot 19{,}737 = \\ = 3{,}142 \cdot 139{,}2 \cdot 19{,}737 = 437{,}37 \cdot 19{,}737 = 8630 \approx \\ \approx 8{,}63 \cdot 10^3.$$ ▲

Ejercicios

1. Ejecutar los redondeos sucesivos de los números siguientes: a) 2,75464; b) 3,14159; c) 0,56453; d) 4,1945; e) 0,60653.

2. Redondeando los números siguientes hasta tres cifras significativas, determinar los errores absoluto Δ_a y relativo (en tanto por ciento) δ_a de las aproximaciones obtenidas: a) 1,1426; b) 0,01015; c) 0,1245; d) 921,55; e) 0,002462.

3. Determinar el error absoluto Δ_x de los siguientes números absolutos basándose en su error relativo: a) $x = 2{,}52$; $\delta_x = 0{,}7\%$; b) $x = 0{,}986$; $\delta_x = 10\%$; c) $x = 46{,}75$; $\delta_x = 1\%$; d) $x = 199{,}1$; $\delta_x = 0{,}01$; e) $x = 0{,}86341$; $\delta_x = 0{,}0004$.

4. Determinar la cantidad de cifras significativas justas para los siguientes números aproximados: a) $39{,}285 \pm 0{,}034$; b) $1{,}2785 \pm \pm 0{,}0007$; c) $183{,}3 \pm 0{,}1$; d) $0{,}056 \pm 0{,}0003$; e) $84{,}17 \pm 0{,}0073$.

5. Determinar, cuál de las igualdades es más exacta: a) $6/25 \approx \approx 1{,}4$ o bien $1/3 \approx 0{,}333$; b) $1/9 \approx 0{,}1$ o bien $1/3 \approx 0{,}33$; c) $15/7 \approx \approx 2{,}14$ o bien $1/9 \approx 0{,}11$, d) $6/7 \approx 0{,}86$ ó $\pi \approx 22/7$; e) $\pi \approx 3{,}142$ o bien $\sqrt{10} \approx 3{,}1623$.

Indicación. Hallar previamente los errores relativos. Más exacta es la igualdad cuyo error relativo es menor.

6. Redondear las cifras dudosas del número $A = 47{,}453 \pm 0{,}024$, conservando en éste las cifras justas.

7. Redondear las cifras dudosas del número $A = 46{,}3852 \pm \pm 0{,}0031$, conservando en éste las cifras justas.

8. Redondear las cifras dudosas del número aproximado $a = = 3{,}2873$ si $\delta_a = 0{,}1\%$, conservando en el mismo las cifras justas.

9. Hallar los errores absolutos y relativos de los números aproximados si éstos tienen sólo las cifras justas: a) $a = 0{,}7538$; b) $a = = 17{,}354$.

Indicación. Utilizar la fórmula (3) del § 1.5.

10. Calcular las siguientes expresiones y dar las estimaciones de sus errores. En la respuesta conservar todas las cifras justas y una dudosa. Todos los números se dan con cifras justas.

a) $y=\frac{3{,}07\cdot 326}{36{,}4\cdot 323}$; b) $y=\frac{36\cdot 245\cdot 85}{975\cdot 642}$;

c) $y=\frac{37{,}2+458{,}67}{36{,}5\cdot 246}$; d) $y=\frac{96{,}891-4{,}25}{33{,}3+0{,}426}$.

11. Utilizando las reglas de cómputo de las cifras, calcular:

a) $s=\frac{h^2}{18}\cdot\frac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$, donde $h=2{,}73$, $a=0{,}152$, $b=0{,}328$;

b) $s=\frac{1}{4}\pi(a^2-b^2)$, donde $a=0{,}937$, $b=0{,}0630$.

CAPÍTULO II

Álgebra matricial y algunas nociones de la teoría de los espacios vectoriales lineales

§ 2.1. Matrices y vectores. Operaciones principales con matrices y vectores

Una tabla rectangular que se compone de elementos (en este caso, de números) y tiene m filas (líneas) y n columnas se llama *matriz* de tamaño $m \times n$. Los elementos de la matriz se designan con a_{ij}, donde i es el número de la fila y j, el número de la columna en el cruce de los cuales está este elemento.

Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es la matriz de tamaño $m \times n$ que tiene m filas y n columnas.

La notación abreviada tiene la forma $A = [a_{ij}]$, donde $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, o bien $[a_{ij}]_{m \times n}$.

Si en la matriz la cantidad de filas no es igual a la de columnas, $m \neq n$, la matriz se denomina *rectangular*.

La matriz que tiene una sola fila, o sea, $m = 1$ se llama *matriz fila* (o *vector fila*), por ejemplo,

$$A = [a_{11} a_{12} \dots a_{1n}] \text{ o bien } A = [1 \ 2 \ 3 \ 4].$$

La matriz que tiene una sola columna, o sea, $n = 1$ se denomina *matriz columna* (o *vector columna*), por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \text{o bien} \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

A continuación la matriz fila o la matriz columna llamarémoslas *vector* y designaremos con $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ o bien $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2, \ \dots, \ x_n]$.

Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llaman *coordenadas* (o *elementos*) del vector $\mathbf{x}$. Puesto que la cantidad de coordenadas del vector es, por definición, su dimensión, el vector $\mathbf{x}$ es n-dimensional.

Si en la matriz la cantidad de filas es igual a la de columnas, o sea, $m = n$ la matriz se define como *cuadrada*. Tal matriz puede escribirse en la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para una matriz cuadrada la cantidad total de filas o columnas se denomina *orden* de la matriz.

Se llama *diagonal principal* de una matriz cuadrada a la que pasa por los ángulos superior izquierdo e inferior derecho, o sea, el conjunto de los elementos que tiene la forma a_{ii}, donde $i = 1, 2, \ldots, n$.

La matriz cuadrada en la cual todos los elementos dispuestos fuera de la diagonal principal son iguales a cero se denomina matriz *diagonal*. Esta matriz tiene la forma siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

La matriz diagonal en la cual todos los elementos dispuestos en la diagonal principal son iguales a la unidad se denomina matriz *unidad*. La matriz unidad se designa con el símbolo E y tiene la forma

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

El índice n señala el orden de la matriz unidad. En el cálculo matricial la matriz unidad desempeña el papel de unidad.

La matriz cuadrada en la cual todos los elementos se disponen simétricamente respecto a la diagonal principial se define como *simétrica*. En caso de la matriz simétrica tiene lugar la igualdad $a_{ij} = a_{ji}$ $(i \neq j)$.

Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

es una matriz simétrica.

La matriz en la cual todos los elementos son iguales a cero se denomina *nula* y se designa con O. Si es necesario indicar el número de filas y de columnas, se escribe

$$O_{m\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ se llaman *iguales* si: 1) son del mismo tamaño, o sea, la cantidad de filas de la matriz A es igual a la de filas de la matriz B y la cantidad de columnas de la matriz A es igual a la de columnas de la matriz B; 2) los elementos correspondientes de estas matrices son iguales entre sí. Ahora bien, si

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

y $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$, entonces $A = B$.

Se llama *suma* de dos matrices del mismo tamaño $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ a la matriz $C = [c_{ij}]$ del mismo tamaño en la cual los elementos c_{ij} con iguales a las sumas de los elementos correspondientes a_{ij} y b_{ij} de las matrices A y B, o sea, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

La *diferencia* de las matrices se define de un modo análogo a la suma, no obstante, en los elementos de la matriz a sustraer el signo cambia por el opuesto: $D = A - B$; $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$.

Se llama *producto de la matriz* $A = [a_{ij}]$ por el número α la matriz cuyos elementos se obtienen por la multiplicación de todos los elementos de la matriz A por el número α:

$$\alpha A=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

La matriz $-A = (-1)\,A$ es *opuesta* a la matriz A.

La adición de las matrices se subordina a las leyes siguientes: 1°) $A + (B + C) = (A + B) + C$; 2°) $A + B = B + A$; 3°) $A + O = A$; 4°) $A + (-A) = O$.

El producto de la matriz por un número se subordina a las leyes siguientes:

1°) $1\cdot A = A$; 2°) $0\cdot A = O$; 3°) $\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Ejemplo 1. Sea

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & 5 \\ -7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$C=A+B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix};\ D=A-B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 11 \\ -6 & -3 & 6 & 9 \\ -8 & 12 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2. El producto de la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

por el número 2 es la matriz

$$2A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ -6 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Se llama *producto* AB *de dos matrices*

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nq} \end{bmatrix}$$

que tienen los tamaños $m \times n$ y $n \times q$, respectivamente,a la matriz

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{bmatrix}$$

de tamaño $m \times q$. Nótese que la matriz $C = AB$ está definida sólo cuando la cantidad de columnas de la matriz A es igual a la de filas de la matriz B.

Los elementos de la matriz C se calculan con ayuda de la **regla** siguiente: *para hallar el elemento c_{ij} dispuesto en la i-ésima fila y en j-ésima columna del producto de dos matrices es necesario los elementos de la i-ésima fila de la primera matriz multiplicar por los elementos correspondientes de la j-ésima columna de la segunda y sumar los productos obtenidos*:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$
$$(i = 1, 2, \dots, m;\quad j = 1, 2, \dots, q).$$

Por ejemplo, $c_{23} =$
$= a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + \ldots + a_{2n}b_{n3}$, $c_{41} = a_{41}b_{11} +$
$+ a_{42}b_{21} + \ldots + a_{4n}b_{n1}$, etc.

Ejemplo 3. $$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 8\cdot 0 + 1\cdot 3 & 3(-1) + 2\cdot(-3) + 8\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + (-4)\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot 3 & 1(-1) + (-4)\cdot(-3) + 0\cdot 1 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}.$$

Aquí $AB = [a_{ij}]_{2\times 4}\cdot[b_{ij}]_{4\times 2} = C = [c_{ij}]_{2\times 2}$.

Ejemplo 4. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 6\cdot 3 \\ 7\cdot 1 + 8\cdot 2 + 9\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Aquí $AB = [a_{ij}]_{3\times 3}[b_{ij}]_{3\times 1} = [c_{ij}]_{3\times 1}$.

Ejemplo 5. $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 1 + 6\cdot 3 & 5\cdot 2 + 6\cdot 4 \\ 7\cdot 1 + 8\cdot 3 & 7\cdot 2 + 8\cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix},$$ o sea, $AB \neq BA$.

Ejemplo 6. $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 3 + 5\cdot 2 + 6\cdot 4 & 4\cdot 2 + 5\cdot 1 + 6\cdot 3 & 4\cdot 4 + 5\cdot 3 + 6\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 13 & 10 \\ 46 & 31 & 31 \end{bmatrix}; \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$ no existe, ya que la cantidad de columnas de la matriz A no es igual a la de filas de la matriz B.

El producto de las matrices se subordina a las leyes siguientes:
1°) $A(BC) = (AB)C$; 2°) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$;
3°) $(A + B)C = AC + BC$; 4°) $EA = A$.

Nótese que $AB \neq BA$, o sea, el producto de dos matrices no posee, en el caso general, la propiedad de conmutatividad. La matriz unidad constituye la excepción $AE = EA = A$. Así pues, en el caso general no se puede cambiar de lugar los factores sin cambiar su producto. Si cambia el orden de factores puede resultar que, en general, es imposible realizar la multiplicación de matrices (véase el ejemplo 6).

Hablando del producto AB de dos matrices A y B, suponemos que la matriz B se multiplica por la A a la izquierda o bien que la matriz A se multiplica por la B a la derecha.

El producto de unas cuantas matrices ABC es necesario entender así: la matriz A se multiplica a la derecha por la B y la matriz obtenida se multiplica a la derecha por la C, etc. La cantidad de matrices a multiplicar puede ser cualquiera siempre que se pueda multiplicar cada dos matrices dispuestas una junto a la otra.

La matriz A^n se llama n-ésima *potencia* de la matriz A. Si A es una matriz cuadrada y n, un número positivo entero, entonces

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \ldots A}_{n \text{ factores}}.$$

Las operaciones de adición y de multiplicación por un número sobre las matrices columna y las matrices fila (o sea, sobre los vectores) se llevan a cabo análogamente a las operaciones correspondientes sobre las matrices cuadradas. Así, se llama *suma de dos vectores* $\mathbf{x} = [x_1 x_2 \ldots x_n]$ e $\mathbf{y} = [y_1 y_2 \ldots y_n]$ el vector $\mathbf{z} = [z_1 z_2 \ldots z_n]$ que tiene por coordenadas $z_1 = x_1 + y_1$, $z_2 = x_2 + y_2$, ..., $z_n = x_n + y_n$ y se llama *producto del vector* $\mathbf{x} = [x_1 x_2 \ldots x_n]$ por el número α el vector $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} = [\alpha x_1 \alpha x_2 \ldots \alpha x_n]$.

Ejemplo 7. La suma de los vectores $\mathbf{x} = [1\ 2\ 3]$ e $\mathbf{y} = [-5\ -2\ 4]$ es el vector $\mathbf{z} = [-4\ 0\ 7]$; el producto del vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ por el número $\alpha = 2$ es el vector $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$.

§ 2.2. Matriz transpuesta

Si en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

de tamaño $m \times n$ se reemplazan las filas por las columnas correspondientes, se obtiene la matriz

$$A^{t} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

de tamaño $n \times m$ que se denomina *transpuesta* respecto a la matriz A.

Ejemplo 1. Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

de tamaño 3×4 de matriz transpuesta sirve

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

de tamaño 4×3.

Ejemplo 2. Para la matriz fila $B = [1\ 2\ 3\ 4]$ de matriz transpuesta sirve la matriz columna

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nótense las siguientes propiedades de la operación de transposición.

1°. Si sobre la matriz A se realiza dos veces la operación de transposición, la matriz no cambia:

$$(A^t)^t = A.$$

2°. La matriz transpuesta de la suma de dos matrices es igual a la suma de las matrices transpuestas:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

lo que se deduce de la definición de la suma de dos matrices.

3°. La matriz transpuesta del producto de dos matrices es igual al producto de las matrices transpuestas tomadas en el orden inverso:

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

La matriz $(AB)^t$ está obtenida multiplicando los elementos de las filas de la matriz A por los elementos de las columnas de la matriz B, reemplazando sucesivamente las filas por las columnas. El mismo resultado puede obtenerse multiplicando los elementos de las columnas de la matriz B (de las filas de la B^t) por los elementos de la matriz A (de las columnas de la A^t).

§ 2.3. Determinante de la matriz. Propiedades del determinante y reglas de su cálculo

Sea A la matriz cuadrada arbitraria de orden n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Con la matriz A está ligado el *determinante* el cual se designa con d, D, det A o bien $|A|$:

$$d=D=\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

El determinante de la matriz es el número que se calcula por ciertas reglas que consideraremos a continuación.

En el determinante se distinguen dos diagonales: principal y secundaria. Al igual que en la matriz cuadrada, la *diagonal principal* se compone de elementos a_{ii}, donde $i=1, 2, \dots, n$. La *diagonal secundaria* pasa perpendicularmente a la principal a partir del ángulo derecho superior del determinante al izquierdo inferior. El orden del determinante corresponde al de la matriz de determinante de la cual él sirve.

Si el orden de al matriz es igual a la unidad, o sea, esta matriz consta de un solo elemento a_{11}, entonces el número igual a este elemento se llama *determinante de primer orden* correspondiente a tal matriz. Sea dada la matriz cuadrada de segundo orden

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Se denomina *determinante de segundo orden*, correspondiente a esta matriz, el número

$$\det A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{2}$$

La fórmula (2) expresa la regla de cálculo del determinante de segundo orden: *el determinante de segundo orden es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.*

Ejemplo 1. Calcular el determinante de la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

△ $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot 5-4\cdot 2=-3.$ ▲

Se denomina *determinante de tercer orden* el número

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}. \tag{3}$$

Ahora bien, *cada término del determinante de tercer orden no es sino el producto de tres sus elementos tomados uno a uno de cada fila y de cada columna. Estos productos se toman con signos determinados: con signo más se toman tres términos compuestos por los elementos de la diagonal* *principal y por los dispuestos en los vértices de los triángulos isósceles cuyas bases son paralelas a la diagonal principal* (fig. 2.1); *con signo menos se toman tres términos situados de un modo análogo respecto a la diagonal secundaria* (fig. 2.2). Dicha regla se llama **regla de los triángulos**.

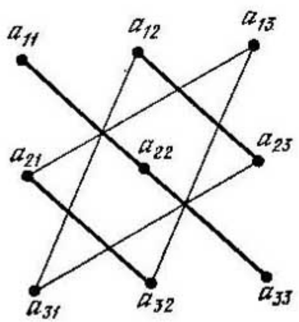


Fig. 2.1

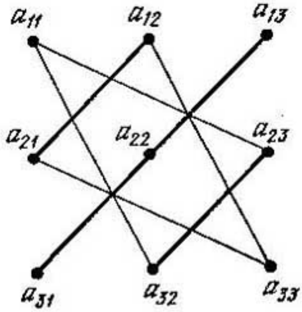


Fig. 2.2

Ejemplo 2. Calcular el determinante de la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\triangle$ det $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot5\cdot2+$

$+3\cdot1\cdot(-4)+2\cdot(-1)\cdot2-2\cdot5\cdot3-1\cdot(-1)\cdot1-2\cdot(-4)\cdot2=-19.$ ▲

Consideremos ahora el determinante de todo orden n, donde $n\geqslant 2$. Para calcular tal determinante es necesario introducir el concepto de menor y de complemento algebraico.

Se llama *menor del elemento* a_{ij} del determinante de n-ésimo orden (1) el determinante de orden $(n-1)$ obtenido del inicial borrando la i-ésima fila y la j-ésima columna (de aquella fila y de aquella columna en cuya intersección está el elemento a_{ij}).

El menor del elemento a_{ij} se designa M_{ij}. Aquí el primer subíndice designa el número de la fila y el segundo, el número de la columna las cuales se borran.

Por ejemplo, en el determinante de tercer orden

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

de menor del elemento a_{12} sirve el determinante de segundo orden

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Se denomina *complemento algebraico* del elemento a_{ij} del determinante de n-ésimo orden (1) el número

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Es evidente que si la suma $i+j$ es par, el complemento algebraico tiene el mismo signo que el menor; en cambio, si la suma $i+j$ es impar, el signo cambia por el contrario.

Teorema 1. *El determinante es igual a la suma de los productos de toda fila (columna) suya por los complementos algebraicos correspondientes*

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ \dots\ +a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\ (i=1,\ 2,\ \dots,\ n) \quad (4)$$

o bien

$$\det A=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ \dots\ +a_{nj}A_{nj}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\quad (j=1,\ 2,\ \dots,\ n). \quad (5)$$

La fórmula (4) se llama *desarrollo del determinante según los elementos de la i-ésima fila*, y la fórmula (5), *desarrollo del determinante según los elementos de la j-ésima columna.*

Al desarrollar el determinante de segundo orden según los elementos de toda fila (columna) se obtiene la fórmula (2) citada anteriormente; al desarrollar el determinante de tercer orden según los elementos de toda fila (columna) se obtiene la fórmula (3) (regla de los triángulos).

Ejemplo 3. Calcular el determinante $d=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, desarrollándolo según los elementos de la primera fila.

△ En consonancia con la fórmula (4) tenemos

$$d=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}.$$

Puesto que $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 4=4$; $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 3=-3$, entonces $d=1\cdot 4+2(-3)=-2$. ▲

Ejemplo 4. Calcular el determinante $d=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, desarrollándolo según los elementos de la segunda columna.

△ Con ayuda de la fórmula (5) obtenemos

$$d = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

Luego hallamos

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-9) = 5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6-3 = 3;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9-2) = -7;$$

de donde $d = 2\cdot 5 + 5\cdot 3 + 4(-7) = -3$. ▲

Teorema 2 (corolario del teorema 1). *Si todos los elementos de la i-ésima fila (columna) del determinante d, a excepción de uno, por ejemplo, de a_{ik}, son iguales a cero, el determinante es igual al producto del elemento a_{ik} por su complemento algebraico:*

$$d = a_{ik}A_{ik}. \tag{6}$$

Ejemplo 5. Calcular el determinante de cuarto orden

$$d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -11 \end{bmatrix}$$

desarrollándolo según los elementos de la segunda columna.

△ Puesto que $a_{22} = a_{32} = a_{42} = 0$, entonces por la fórmula (6) obtenemos

$$d = a_{12}A_{12} = 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix}$$

de donde, volviendo a desarrollar el determinante obtenido de tercer orden según los elementos de la segunda columna, hallamos

$$d = -(-5)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5(2-12) = 50. \ ▲$$

Teorema 3. *La suma de los productos de los elementos de una fila o de una columna cualquiera del determinante por los complementos algebraicos de los elementos correspondientes de la fila (o de la columna) paralela es igual a cero.*

Así, para el determinante de tercer orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

son válidas las igualdades $a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0$, $a_{31}A_{21}+$ $+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}=0$, etc.

Enumeremos ahora las propiedades del determinante.

1°. *El determinante no cambia en caso de la transposición*:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Esto quiere decir que las filas y las columnas del determinante son equitativas.

De esta propiedad se desprende que el *determinante de la matriz A es igual al de la matriz transpuesta A^t.*

Por ejemplo,

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot5\cdot2+$$

$$+3\cdot(-4)\cdot1+2\cdot(-1)\cdot2-3\cdot5\cdot2-1\cdot(-1)\cdot1-2\cdot(-4)\cdot2=-19.$$

2°. *Si una de las filas o una de las columnas del determinante se compone de ceros, el determinante es igual a cero.*

Por ejemplo,

$$\det A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 15 \end{vmatrix}=0\cdot3\cdot15+0\cdot1\cdot4+0\cdot2\cdot10-$$

$$-0\cdot3\cdot2-0\cdot1\cdot15-0\cdot4\cdot10=0.$$

3°. *Al permutar dos filas o dos columnas el determinante cambia sólo el signo.*

Por ejemplo,

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(-1)+2\cdot2\cdot(-4)+2\cdot5\cdot3-$$

$$-3\cdot1\cdot(-4)-5\cdot2\cdot1-2\cdot2\cdot(-1)=19$$

(compárese con el ejemplo que ilustra la propiedad 1°).

4°. *El determinante que contiene dos filas iguales o dos columnas iguales es igual a cero.*

Por ejemplo,

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot2\cdot2+2\cdot3\cdot2+1\cdot1\cdot3-2\cdot2\cdot3-$$

$$-1\cdot2\cdot2-1\cdot1\cdot3=0.$$

5°. *Si todos los elementos de cierta fila o de cierta columna del determinante se multiplican por el número $k \neq 0$, entonces el mismo determinante se multiplicará por este número.*

De otro modo esta propiedad puede ser enunciada así: *el factor de todos los elementos de cierta fila o de cierta columna puede ser sacado del signo del determinante.*

Por ejemplo,

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 19 = 57$$

(compare con el ejemplo que ilustra la propiedad 3°).

6°. *El determinante que contiene dos filas proporcionales es igual a cero.*

Por ejemplo,

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 = 0.$$

7°. *Si todos los elementos de la i-ésima fila del determinante de n-ésimo orden están representados en forma de la suma de dos sumandos: $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, el determinante dado es igual a la suma de dos determinantes en los cuales todas las filas, a excepción de la i-ésima, son las mismas que en el determinante asignado, y la i-ésima fila en uno de los sumandos consta de los elementos b_{ij}, mientras que en el otro, de los elementos c_{ij},* o sea,

$$\det A =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} = b_{21} + c_{21} & a_{22} = b_{22} + c_{22} & a_{23} = b_{23} + c_{23} & \ldots a_{2n} = b_{2n} + c_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1.$$

8°. *Si una de las filas del determinante representa la suma de cualesquiera otras filas o la suma de los productos de cualesquiera otras filas del determinante por el número k, el determinante es igual a cero.* (Esto se deduce de las propiedades 6° y 7° del determinante.)

Por ejemplo,

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&7\\1&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&0&2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&2\\1&0&2\end{vmatrix}=0+2\cdot0=0.$$

9°. *El determinante no cambiará si a los elementos de una de sus filas (columnas) se les añaden los elementos correspondientes de otra fila (columna) multiplicados por un mismo número.*

Por ejemplo, $\det A=\begin{vmatrix}2&7&9\\1&3&4\\1&0&2\end{vmatrix}=-1$ (véase el ejemplo que ilustra la propiedad 7°). Multipliquemos la tercera fila por 3 y sumemos lo obtenido a la segunda fila, entonces

$$\det A=\begin{vmatrix}2&7&9\\4&3&10\\1&0&2\end{vmatrix}=2\cdot3\cdot2+1\cdot7\cdot10+4\cdot0\cdot9-1\cdot3\cdot9-$$

$$-4\cdot7\cdot2-2\cdot0\cdot10=-1.$$

Aplicando las propiedades mencionadas de los determinantes, se puede simplificar el problema de calcular los determinantes de n-ésimo orden. Las transformaciones que no varían la magnitud del determinante suele denominarles *elementales.*

Ejemplo 6. Calcular el determinante

$$d=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&2&3&4\\-2&3&6&10\\3&4&10&20\end{vmatrix},$$

desarrollándolo según los elementos de la primera columna.

△ En consonancia con la fórmula (5) $d=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+a_{41}A_{41}$. Hallamos los complementos algebraicos. Tenemos

$$A_{11}=(-1)^{1+1}=\begin{vmatrix}2&3&4\\3&6&10\\4&10&20\end{vmatrix}=2\cdot2\begin{vmatrix}2&3&2\\3&6&5\\2&5&5\end{vmatrix}=$$

$$=4\left(2\begin{vmatrix}6&5\\5&5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3&2\\5&5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3&2\\6&5\end{vmatrix}\right)=4(2\cdot5-3\cdot5+2\cdot3)=4.$$

Hemos sacado del signo del determinante de A_{11} el factor común 2 de la tercera fila y el factor común 2 de la tercera columna y luego hemos desarrollado el determinante obtenido según los elementos de la primera columna.

Calculamos

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 6 & 10\\ 4 & 10 & 20\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 6 & 10\\ 2 & 5 & 10\end{vmatrix}=$$

$$=-2\left(\begin{vmatrix}6 & 10\\ 5 & 10\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3 & 10\\ 2 & 10\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 6\\ 2 & 5\end{vmatrix}\right)=-2(10-10+3)=-6.$$

Hemos sacado el factor común 2 a partir de la tercera fila y desarrollado el determinante según los elementos de la primera fila.

Análogamente obtenemos

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 10 & 20\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 10\end{vmatrix}=$$

$$=2\left(\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 10\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 10\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}\right)=2(10-12+4)\ 4;$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 6 & 10\end{vmatrix}=$$

$$=-\left(\begin{vmatrix}3 & 4\\ 6 & 10\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 10\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix}\right)=-6+8-3=-1.$$

Desarrollando el determinante de A según los elementos de la primera columna hallamos definitivamente

$$d=1\cdot 4+(-1)\cdot(-6)+(-2)\cdot 4+3\cdot(-1)=-1. \ \blacktriangle$$

El cálculo del determinante se simplifica considerablemente si, utilizando las propiedades del mismo, éste se transforma de un modo tal que al calcularlo se puede aplicar la fórmula (6).

Ejemplo 7. Calcular el determinante

$$d=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 3 & 6 & 10\\ 3 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}$$

con ayuda de las transformaciones elementales.

△ Aplicando las transformaciones elementales del determinante, hagamos ceros todos los elementos de la primera fila, a excepción de $a_{11} = 1$. Para esto, conservando la primera columna sin variar, multipliquemos todos sus elementos por (-1) y adicionemos lo obtenido sucesivamente a las columnas 2, 3 y 4. Tenemos

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 12 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix}.$$

En el determinante de tercer orden obtenido hagamos nulos también todos los elementos de la tercera fila, salvo el primero. Para esto, conservando sin variar la primera columna, multipliquémosla sucesivamente por (-7) y a por (-17) y adicionemos lo obtenido a las columnas 2 y 3, respectivamente; desarrollemos el determinante obtenido según los elementos de la tercera fila:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & -17 & -46 \\ 5 & -27 & -73 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -17 & -46 \\ -27 & -73 \end{vmatrix} = -1. \ \blacktriangle$$

§ 2.4. Matriz inversa

Una matriz cuadrada se llama *inversa* respecto a la matriz cuadrada dada si la multiplicación de aquélla tanto a la derecha como a la izquierda por la matriz dada arroja la matriz unidad. Para la matriz A la matriz inversa se designa A^{-1}. Por definición.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \qquad (1)$$

La matriz cuadrada se considera *regular* (no especial o *no degenerada*) si su determinante no es igual a cero. En cambio, si el determinante de la matriz es igual a cero, ella se dice *singular* (o degenerada).

Teorema. *Para que la matriz cuadrada A tenga la matriz inversa es necesario y suficiente que el determinante de la matriz A sea distinto del cero, o sea, que la matriz A sea regular.*

La determinación de la matriz inversa se denomina *inversión* de la matriz dada.

Consideremos el proceso de inversión de una matriz. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

una matriz cuadrada regular de n-ésimo orden cuyo determinante $d \neq 0$. Formemos la matriz a partir de los complementos algebraicos de los elementos de la matriz dada y luego transpongámosla. La matriz obtenida se llama *adjunto* (o *asociada*) respecto a la matriz A y se designa $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Calculando los productos $A\widetilde{A}$ y $\widetilde{A}A$ por las reglas de multiplicación de las matrices, obtenemos

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = dE. \tag{4}$$

□ Vamos a demostrar la validez de las igualdades (4) citando como ejemplo una matriz de tercer orden. Sea

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ y } \widetilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A\widetilde{A}=\begin{bmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+ & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+ & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+ \\ +a_{13}A_{13} & +a_{13}A_{23} & +a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+ & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+ & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+ \\ +a_{23}A_{13} & +a_{23}A_{23} & +a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+ & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+ & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+ \\ +a_{33}A_{13} & +a_{33}A_{23} & +a_{33}A_{33} \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con el teorema 3 del § 2.3 todos los elementos del producto $A\widetilde{A}$, a excepción de los diagonales, son iguales a cero. Por consiguiente,

$$A\widetilde{A}=\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}=d\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=dE.$$

Análogamente se puede mostrar que $\widetilde{A}A=dE$. ■

Puesto que $A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=dE$, con la particularidad de que $d\neq 0$, entonces

$$A\frac{\widetilde{A}}{d}=\frac{\widetilde{A}}{d}A=E.$$

Por otro lado, según la definición de la matriz inversa tenemos

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Comparando las últimas igualdades matriciales, obtenemos la fórmula para hallar la matriz inversa

$$A^{-1}=\widetilde{A}/d=\begin{bmatrix} A_{11}/d & A_{21}/d & A_{31}/d \\ A_{12}/d & A_{22}/d & A_{32}/d \\ A_{13}/d & A_{23}/d & A_{33}/d \end{bmatrix}.$$

En la forma general para una matriz cuadrada regular de n-ésimo orden la matriz inversa se calcula con ayuda de la fórmula

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}/d & A_{21}/d & \dots & A_{n1}/d \\ A_{12}/d & A_{22}/d & \dots & A_{n2}/d \\ A_{1n}/d & A_{2n}/d & \dots & A_{nn}/d \end{bmatrix}, \tag{5}$$

o sea, los elementos de la matriz inicial e inversa están ligados por la relación $a_{ij}^{-1} = A_{ij}/d$.

Ejemplo 1. Hallar la matriz inversa A^{-1} para la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

△ 1) Calculamos el determinante para la matriz dada A:

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 2\cdot 5+3\cdot 3\cdot 2+1\cdot 4\cdot 3-2\cdot 2\cdot 3-$$

$$-1\cdot 3\cdot 5-4\cdot 3\cdot 2=-1.$$

Puesto que $d\neq 0$, la matriz inversa A^{-1} existe.

2) Hallamos los complementos algebraicos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-2;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-3;\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-4;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-2;\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

3) Componemos la matriz adjunta

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4) Calculamos la matriz inversa

$$A^{-1}=\widetilde{A}/d=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$Verificación: AA^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacktriangle$$

Ejemplo 2. Invertir la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\triangle$ 1) Calculamos

$$d=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

para lo cual desarrollamos el determinante según los elementos de la primera fila. Tenemos

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1+2-6-3=-8;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-(-3-1+3+2)=-1;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=9-1+12-9+2-6=7;$$

$$A_{14}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-(1-4+3+6)=-6.$$

Por lo tanto,

$$d=1\cdot(-8)+2\cdot(-1)+4\cdot 7+2\cdot(-6)=6,$$

es decir, la matriz inversa existe.

2) Calculamos los demás complementos algebraicos de los elementos de la matriz A:

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 4 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-(-2+8+4-12)=2;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\ -2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1-4-2+8=1;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-(3-2-8+6+4-2)=-1;$$

$$A_{24}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=2-16+12+2=0;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2-24-4-4=-30;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-(1+12+2-12)=-3;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=1+6+12+2+6-6=21;$$

$$A_{34}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-(-2+24+4-2)=-24;$$

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & -3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=-(2-36-2-6-6-4)=52;$$

$$A_{42}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & -3\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=1+24-6+4-12-3=8;$$

$$A_{43}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-(1+12+18+4+9-6)=-38;$$

$$A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-4+36+8-3+6=42.$$

3) Componemos la matriz adjunta

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 & 2 & -30 & 52 \\ -1 & 1 & -3 & 8 \\ 7 & -1 & 21 & -38 \\ -6 & 0 & -24 & 42 \end{bmatrix}.$$

4) Dividimos todos los elementos de la matriz adjunta por $d=6$ y obtenemos la matriz inversa A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -8/6 & 2/6 & -30/6 & 52/6 \\ -1/6 & 1/6 & -3/6 & 8/6 \\ 7/6 & -1/6 & 21/6 & -38/6 \\ -6/6 & 0 & -24/6 & 42/6 \end{bmatrix}.$$

Verificación:

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8/6 & 2/6 & -30/6 & 52/6 \\ -1/6 & 1/6 & -3/6 & 8/6 \\ 7/6 & -1/6 & 21/6 & -38/6 \\ -6/6 & 0 & -24/6 & 42/6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{-8-2+28-12}{6} & \frac{2+2-4+0}{6} & \frac{-30-6+84-48}{6} & \frac{52+16-152+84}{6} \\ \frac{-24-1+7+18}{6} & \frac{6+1-1+0}{6} & \frac{-90-3+21+72}{6} & \frac{156+8-38-126}{6} \\ \frac{16-3-7-6}{6} & \frac{-4+3+1+0}{6} & \frac{60-9-21-24}{6} & \frac{-104+24+38+42}{6} \\ \frac{8-2+0-6}{6} & \frac{-2+2+0+0}{6} & \frac{30-6+0-24}{6} & \frac{-52+16+0+42}{6} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E. \ \blacktriangle$$

Si el orden de la matriz A es grande, con el método indicado de inversión de la matriz se necesita realizar un trabajo de cálculo complicado. Existen otros métodos de inversión de la matriz que examinaremos más abajo.

La determinación de la matriz inversa A^{-1} tiene importancia primordial para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales.

§ 2.5. Resolución de las ecuaciones matriciales

Consideremos tres tipos de las ecuaciones matriciales:

$$AX = B, \tag{1}$$

$$XA = B, \tag{2}$$

$$AXB = C, \tag{3}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

son las matrices cuadradas dadas del mismo tamaño y

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

es la matriz cuadrada del mismo tamaño cuyos elementos son desconocidos.

Vamos a resolver cada una de las ecuaciones (1)—(3).

Para resolver la ecuación (1) multipliquemos a la izquierda ambos miembros suyos por A^{-1} (suponiendo que la matriz inversa A^{-1} existe):

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Pero el producto $A^{-1}A = E$; por consiguiente, $EX = A^{-1}B$, de donde

$$X = A^{-1}B. \tag{4}$$

Ejemplo 1. Resolver la ecuación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{B}.$$

△ 1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 23 \neq 0.$

2) Hallamos A^{-1}. Puesto que $A_{11} = 9$, $A_{21} = -5$, $A_{12} = 1$, $A_{22} = 2$, entonces

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ de donde } A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3) Con ayuda de la fórmula (4) obtenemos

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{23}\begin{bmatrix}9 & -5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{23}\begin{bmatrix}-23 & 22\\ 0 & 5\end{bmatrix}. \ \blacktriangle$$

En la práctica se encuentra frecuentamente la ecuación del tipo (1), donde **x** y **b** son los vectores columna del mismo tamaño que la matriz A.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\ -4\\ -2\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

$\triangle$ 1) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{vmatrix}=-4+8+4+8-2-8=6\neq 0.$

2) Hallamos A^{-1}. Tenemos $A_{11}=-6$, $A_{21}=-2$, $A_{31}=4$; $A_{12}=0$, $A_{22}=-4$; $A_{32}=2$; $A_{13}=6$; $A_{23}=3$, $A_{33}=-3$, o sea,

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}-6 & -2 & 4\\ 0 & -4 & 2\\ 6 & 3 & -3\end{bmatrix};\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1/3 & 2/3\\ 0 & -2/3 & 1/3\\ 1 & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}.$$

3) Con ayuda de la fórmula (4) obtenemos

$$x=A^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-1 & -1/3 & 2/3\\ 0 & -2/3 & 1/3\\ 1 & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ -4\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -2\end{bmatrix}. \ \blacktriangle$$

Para resolver la ecuación (2) multipliquemos a la derecha ambos miembros suyos por A^{-1} (suponiendo que la matriz inversa A^{-1} existe):

$$XAA^{-1}=BA^{-1},$$

Por lo tanto, $XE=BA^{-1}$, de donde

$$X=BA^{-1}. \tag{5}$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación matricial

$$X\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}6 & 2 & -1\\ 6 & 1 & 1\\ 8 & -1 & 4\end{bmatrix}}_{B}.$$

△ Hallamos

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3;\ A_{11}=-1;\ A_{21}=-1;\ A_{31}=0;$$

$$A_{12}=-1;\ A_{22}=2;\ A_{32}=-3;\ A_{13}=1;\ A_{23}=1;\ A_{33}=-3;$$

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix};\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 0\\ 1/3 & -2/3 & 1\\ -1/3 & -1/3 & 1\end{bmatrix}.$$

Con ayuda de la fórmula (5) obtenemos

$$X=BA^{-1}=\begin{bmatrix}6 & 2 & -1\\ 6 & 1 & 1\\ 8 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 0\\ 1/3 & -2/3 & 1\\ -1/3 & -1/3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}.\ \blacktriangle$$

Para resolver la ecuación (3) multipliquemos ambos miembros suyos: a la izquierda por A^{-1} y a la derecha por B^{-1} (suponiendo que las matrices inversas indicadas existen); entonces obtenemos
$A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$ o bien $EXE=A^{-1}CB^{-1}$,
de donde $X=A^{-1}CB^{-1}$. (6)

Ejemplo 4. Resolver la ecuación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 0\\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix}}_{A}X\underbrace{\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{bmatrix}8 & -4 & -4\\ 18 & 5 & 10\\ 17 & -3 & -1\end{bmatrix}}_{C}$$

△ Hallamos

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-12 & -1 & 8\\ -9 & -1 & 6\\ -7 & -1 & 5\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1 & -2 & 1\\ -3/4 & 5/4 & -1/4\end{bmatrix}$$

(realice los cálculos de por sí). Luego tenemos

$$A^{-1}C=\begin{bmatrix}-12 & -1 & 8\\ -9 & -1 & 6\\ -7 & -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -4 & -4\\ 18 & 5 & 10\\ 17 & -3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 19 & 30\\ 12 & 13 & 20\\ 11 & 8 & 13\end{bmatrix}.$$

Ahora con ayuda de la fórmula (6) obtenemos

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{bmatrix}22 & 19 & 30\\ 12 & 13 & 20\\ 11 & 8 & 13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1 & -2 & 1\\ -3/4 & 5/4 & -1/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}.\ \blacktriangle$$

§ 2.6. Matrices triangulares. Desarrollo de la matriz en producto de dos matrices triangulares

La matriz cuadrada se llama *triangluar* si los elementos dispuestos más arriba o más abajo de la diagonal principal son iguales a cero. Si son iguales a cero los elementos dispuestos más arriba de la diagonal principal, la matriz se dice *triangular inferior*; tal es, por ejemplo, la matriz

$$T_1 = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{vmatrix}.$$

En cambio si son iguales a cero los elementos dispuestos más abajo de la diagonal principal, la matriz se denomina *triangular superior*; tal es, por ejemplo, la matriz

$$T_2 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

El determinante de la matriz trangular es igual al producto de sus elementos diagonales. Si $T = [t_{ij}]$ es una matriz triangular, entonces

$$\det T = t_{11}t_{22} \dots t_{nn}.$$

La matriz inversa de una matriz regular es también la matriz triangular del mismo tamaño y de la misma estructura.

Si una matriz cuadrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

tiene *menores diagonales* (así se llaman menores del determinante de la matriz en los cuales sobre las diagonales principales están los elementos diagonales de la matriz) distintos de cero, o sea

$$a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, \det A \neq 0,$$

se puede desarrollarla en producto de dos matrices triangulares (superior e inferior). Este desarrollo es único si a los elementos diagonales de una de las matrices triangulares se les asignan de antemano valores distintos del cero (por ejemplo, ponerlos iguales a la unidad).

Sea

$$A = CB,$$

donde C es la matriz triangular inferior y B, la matriz triangular superior con los elementos diagonales iguales a 1.

Tomando a título de ejemplo una matriz de cuarto orden, obtenemos las fórmulas que expresan la dependencia entre los elementos de las matrices A, B y C.:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Realicemos la multiplicación e igualemos los elementos obtenidos de la matriz CB a los elementos correspondientes de la matriz A:

$$c_{11} = a_{11}, \tag{1}$$

$$c_{21} = a_{21}, \tag{2}$$

$$c_{31} = a_{31}, \tag{3}$$

$$c_{41} = a_{41}, \tag{4}$$

$$c_{11}b_{12} = a_{12}, \tag{5}$$

$$c_{21}b_{12} + c_{22} = a_{22}, \tag{6}$$

$$c_{31}b_{12} + c_{32} = a_{32}, \tag{7}$$

$$c_{41}b_{12} + c_{42} = a_{42}, \tag{8}$$

$$c_{11}b_{13} = a_{13}, \tag{9}$$

$$c_{21}b_{13} + b_{22}b_{23} = a_{23} \tag{10}$$

$$c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23} + c_{33} = a_{33}, \tag{11}$$

$$c_{41}b_{13} + c_{42}b_{23} + c_{43} = a_{43}, \tag{12}$$

$$c_{11}b_{14} = a_{14}, \tag{13}$$

$$c_{21}b_{14} + c_{22}b_{24} = a_{24}, \tag{14}$$

$$c_{31}b_{14} + c_{32}b_{24} + c_{33}b_{34} = a_{34}, \tag{15}$$

$$c_{41}b_{14} + c_{42}b_{24} + c_{43}b_{34} + c_{44} = a_{44}. \tag{16}$$

De las ecuaciones (1). . .(16) obtenemos los elementos b_{ij} y c_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4$) de las matrices triangulares B y C en el orden siguiente:

I. La primera columna de la matriz C [fórmulas (1). . .(4)]:

$$c_{i1} = a_{i1}; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

II. La primera fila de la matriz B [fórmulas (5), (9), (13)]:

$$b_{1j} = a_{1j}/c_{11}; \quad j = 2, 3, 4.$$

III. La segunda columna de la matriz C [fórmulas (6), (7), (8)]:

$$c_{i2}=a_{i2}-c_{i1}b_{12};\ i=2,\ 3,\ 4.$$

IV. La segunda fila de la matriz B [fórmulas (10), (14)]:

$$b_{2j}=(a_{2j}-c_{21}b_{1j})/c_{22};\ j=3,\ 4.$$

V. La tercera columa de la matriz C [fórmulas (11), (12)]:

$$c_{i3}=a_{i3}-c_{i1}b_{13}-c_{i2}b_{23};\ i=3,\ 4.$$

VI. La tercera fila de la matriz B [fórmula (15)]:

$$b_{34}=(a_{34}-c_{31}b_{14}-c_{32}b_{24})/c_{33}.$$

VII. La cuarta columna de la matriz C [fórmula (16)]:

$$c_{44}=a_{44}-c_{41}b_{14}-c_{42}b_{24}-c_{43}b_{34}.$$

Sucesión de determinación de los elementos b_{ij} y c_{ij}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l|llll}
c_{11}=a_{11} & b_{12}=a_{12}/c_{11}; & b_{13}=a_{13}/c_{11}; & b_{14}=a_{14}/c_{11} & \to \mathrm{II}\\
c_{21}=a_{21} & c_{22} & b_{23} & b_{24} & \to \mathrm{IV}\\
c_{31}=a_{31} & c_{32} & c_{33} & b_{34} & \to \mathrm{VI}\\
c_{41}=a_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathrm{I} & \mathrm{III} & \mathrm{V} & \mathrm{VII} &
\end{array}$$

Las cifras romanas de las flechas indican la sucesión en la cual han de determinarse los elementos c_{ij} y b_{ij}. Con tal desarrollo primero se determinan las columnas y luego, las filas.

Para que los cálculos sean cómodos el desarrollo de la matriz A en producto de dos matrices triangulares C y B es: conveniente realizarlo utilizando la tabla 2.1.

Esta tabla se llena del modo siguiente:

1. Basándose en las fórmulas anteriormente indicadas, en la columna 1 de la matriz C se escriben los elementos de la columna 1 de la matriz A y en la fila 1 de la matriz B, los elementos de la fila 1 de la matriz A divididos por c_{11}.

2. Los elementos situados debajo de la línea escalonada se determinan así: se toma el elemento correspondiente de la matriz A y de éste se sustrayen los productos de los elementos que están en la misma fila, a la izquierda, y en la misma columna, más arriba, que el elemento a calcular; en este caso el primer elemento de la fila se

a_{11}		a_{12}		a_{13}		a_{14}	
a_{21}		a_{22}		a_{23}		a_{24}	
a_{31}		a_{32}		a_{33}		a_{34}	
a_{41}		a_{42}		a_{43}		a_{44}	
$c_{11}=a_{11}$	1	$b_{12}=a_{12}/c_{11}$		$b_{13}=a_{13}/c_{11}$		$b_{14}=a_{14}/c_{11}$	
$c_{21}=a_{21}$		c_{22}	1	b_{23}		b_{24}	
$c_{31}=a_{31}$		c_{32}		c_{33}	1	b_{34}	
$c_{41}=a_{41}$		c_{42}		c_{43}		c_{44}	1

multiplica por el primer elemento de la columna, el segundo elemento de la fila se multiplica por el segundo elemento de la columna, etc.

Por ejemplo, $c_{33} = a_{33} - c_{31}b_{13} - c_{32}b_{23}$.

3. En cambio, al calcular los elementos situados por encima de la línea escalonada se procede de la misma manera que en el subp. 2, pero el resultado obtenido se divide por el elemento diagonal c_{ii} ($i = 2, 3$) que está en la misma fila que el elemento a determinar. Por ejemplo, $b_{34} = \frac{a_{34} - c_{31}b_{14} - b_{24}}{c_{33}}$.

Análogamente, se puede desarrollar en producto de dos matrices triangulares una matriz cuadrada de todo orden n. Anteriormente hemos indicado la regla de transformación de la matriz en producto de dos matrices triangulares para el caso de $b_{ii} = 1$. Si $c_{ii} = 1$, en el primer lugar es necesario calcular los elementos de las filas de la matriz B con ayuda de las fórmulas

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}c_{kj} \, (i \leqslant j) \tag{17}$$

y luego los elementos de las columnas de la matriz C con ayuda de las fórmulas

$$c_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} c_{ik}b_{kj}}{b_{ii}} \, (i > j). \tag{18}$$

La matriz A fue representada en forma del producto CB de dos matrices triangulares, donde C es la matriz triangular inferior y B, la superior. Sin embargo, tal orden de factores no es obligatorio, es decir, se puede representar la matriz A en forma del producto BC y obtener las fórmulas análogas para los elementos de las matrices triangulares B y C.

Ejemplo. Desarrollar la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

en producto CB, donde

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

△ La solución se da en la tabla 2.2.

Verificación:

$$CB=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -5/4 & -5/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}=A. \ ▲$$

Tabla 2.2

1	2	3	4	a_{ij}
-1	2	4	-3	
2	4	5	-2	
4	3	2	1	
1	1 $\quad \frac{2}{1}=2$	$\frac{3}{1}=3$	$\frac{4}{1}=4$	b_{ij}
-1	$2-(-1)\cdot 2=4$	1 $\quad \frac{4-(-1)\cdot 3}{4}=\frac{7}{4}$	$\frac{-3-(-1)\cdot 4}{4}=\frac{1}{4}$	
2	$4-2\cdot 2=0$	$5-2\cdot 3-0\cdot\frac{7}{4}=-1$	1 $\quad \frac{-2-2\cdot 4-0}{-1}\cdot\frac{1}{4}=10$	
4	$3-4\cdot 2=-5$	$2-4\cdot 3-(-5)\cdot\frac{7}{4}=$ $=-\frac{5}{4}$	$1-4\cdot 4-(-5)\times$ $\times\frac{1}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)\times 10=$ $=-\frac{5}{4}$	1

§ 2.7. Inversión de la matriz con ayuda de su desarrollo en producto de dos matrices triangulares

De la definición de la matriz inversa se deduce que si

$$A = CB, \tag{1}$$

donde todas las matrices son regulares, la matriz inversa puede ser hallada con ayuda de la fórmula

$$A^{-1} = B^{-1}C^{-1}. \tag{2}$$

□ Para demostrar la validez de la fórmula (2) realicemos las transformaciones siguientes.

Multipliquemos ambos miembros de la igualdad (1) a la izquierda por la matriz C^{-1};

$$C^{-1}A = C^{-1}CB \text{ o bien } C^{-1}A = B. \tag{3}$$

Multipliquemos ambos miembros de la igualdad (3) a la izquierda por la matriz B^{-1}:

$$B^{-1}C^{-1}A = B^{-1}B \text{ o bien } (B^{-1}C^{-1})\, A = E. \tag{4}$$

Multipliquemos ambos miembros de la igualdad (4) a la derecha por la matriz A^{-1}:

$$(B^{-1}C^{-1})\, AA^{-1} = A^{-1} \text{ o bien } A^{-1} = B^{-1}C^{-1}. \quad \blacksquare$$

En la fórmula (2) la matriz inversa A^{-1} se expresa como producto de las matrices inversas B^{-1} y C^{-1}. No obstante, si las matrices B y C son triangulares, para calcular la matriz A^{-1} no hay necesidad de invertir las matrices B y C.

Vamos a deducir las fórmulas para calcular los elementos de la matriz inversa A^{-1} citando como ejemplo una matriz de cuarto orden. Designemos los elementos de la matriz A^{-1} con α_{ij} y los de las matrices inversas B^{-1} y C^{-1} con β_{ij} y γ_{ij}, respectivamente. Las matrices B y C son del mismo tipo que en el § 2.6. Multipliquemos la igualdad (2) a la derecha por la matriz C y a la izquierda, por la matriz B:

$$A^{-1}C = B^{-1}C^{-1}C \text{ o bien } A^{-1}C = B^{-1}; \tag{5}$$

$$BA^{-1} = BB^{-1}C^{-1} \text{ o bien } BA^{-1} = C^{-1}. \tag{6}$$

Las matrices C^{-1} y B^{-1} son las matrices triangulares del mismo tipo que las matrices C y B. Escribamos las igualdades (5) y (6) del modo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \beta_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ 0 & 1 & \beta_{23} & \beta_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Realizaremos la multiplicación sólo de aquellas filas y columnas donde los elementos de los productos en las matrices B^{-1} y C^{-1} son iguales a los ceros y las unidades, respectivamente.

Vamos a considerar primero el producto $A^{-1}C = B^{-1}$:

$$\beta_{11} = \alpha_{11}c_{11} + \alpha_{12}c_{21} + \alpha_{13}c_{31} + \alpha_{14}c_{41} = 1, \tag{9}$$

$$\beta_{21} = \alpha_{21}c_{11} + \alpha_{22}c_{21} + \alpha_{23}c_{31} + \alpha_{24}c_{41} = 0, \tag{10}$$

$$\beta_{31} = \alpha_{31}c_{11} + \alpha_{32}c_{21} + \alpha_{33}c_{31} + \alpha_{34}c_{41} = 0, \tag{11}$$

$$\beta_{41} = \alpha_{41}c_{11} + \alpha_{42}c_{21} + \alpha_{43}c_{31} + \alpha_{44}c_{41} = 0, \tag{11}$$

$$\beta_{22} = \alpha_{21}\cdot 0 + \alpha_{22}c_{22} + \alpha_{23}c_{32} + \alpha_{24}c_{42} = 1, \tag{13}$$

$$\beta_{32} = \alpha_{31}\cdot 0 + \alpha_{32}c_{22} + \alpha_{33}c_{22} + \alpha_{34}c_{42} = 0, \tag{14}$$

$$\beta_{42} = \alpha_{41}\cdot 0 + \alpha_{42}c_{22} + \alpha_{43}c_{32} + \alpha_{44}c_{42} = 0, \tag{15}$$

$$\beta_{33} = \alpha_{31}\cdot 0 + \alpha_{32}\cdot 0 + \alpha_{33}c_{33} + \alpha_{34}c_{43} = 1, \tag{16}$$

$$\beta_{43} = \alpha_{41}\cdot 0 + \alpha_{42}\cdot 0 + \alpha_{43}c_{33} + \alpha_{44}c_{43} = 0, \tag{17}$$

$$\beta_{44} = \alpha_{41}\cdot 0 + \alpha_{42}\cdot 0 + \alpha_{43}\cdot 0 + \alpha_{44}c_{44} = 1. \tag{18}$$

Consideremos ahora el producto $BA^{-1} = C^{-1}$:

$$\gamma_{12} = 1\cdot\alpha_{12} + b_{12}\alpha_{22} + b_{13}\alpha_{32} + b_{14}\alpha_{42} = 0, \tag{19}$$

$$\gamma_{13} = 1\cdot\alpha_{13} + c_{12}\alpha_{23} + b_{13}\alpha_{33} + b_{14}\alpha_{43} = 0, \tag{20}$$

$$\gamma_{14} = 1\cdot\alpha_{14} + b_{12}\alpha_{24} + b_{13}\alpha_{34} + b_{14}\alpha_{44} = 0, \tag{21}$$

$$\gamma_{23} = 0\cdot\alpha_{13} + 1\cdot\alpha_{23} + b_{23}\alpha_{33} + b_{24}\alpha_{43} = 0, \tag{22}$$

$$\gamma_{24} = 0\cdot\alpha_{14} + 1\cdot\alpha_{24} + b_{23}\alpha_{34} + b_{24}\alpha_{44} = 0, \tag{23}$$

$$\gamma_{34} = 0\cdot\alpha_{14} + 0\cdot\alpha_{24} + 1\cdot\alpha_{34} + b_{34}\alpha_{44} = 0. \tag{24}$$

Es necesario determinar 16 elementos desconocidos α_{ij} de las igualdades (9). . .(24). Tenemos:

I. $\alpha_{44} = 1/c_{44}$ [de la (18)];

$\alpha_{43} = (1/c_{33})(-\alpha_{44}c_{43})$ [de la (17)];

$\alpha_{42} = (1/c_{22})(-\alpha_{43}c_{32} - \alpha_{44}c_{42})$ [de la (15)];

$\alpha_{41} = (1/c_{11})(-\alpha_{42}c_{21} - \alpha_{43}c_{31} - \alpha_{44}c_{41})$ [de la (12)].

II. $\alpha_{34} = -b_{34}\alpha_{44}$ [de la (24)];

$\alpha_{24} = -b_{23}\alpha_{34} - b_{24}\alpha_{44}$ [de la (23)];

$\alpha_{14} = -b_{12}\alpha_{24} - b_{13}\alpha_{34} - b_{14}\alpha_{44}$ [de la (21)].

III. $\alpha_{33} = (1/c_{33})(1 - \alpha_{34}c_{43})$ [de la (16)];

$$\alpha_{32}=(1/c_{22})\,(-\alpha_{33}c_{32}-\alpha_{34}c_{42}) \qquad \text{[de la (14)];}$$

$$\alpha_{31}=(1/c_{11})\,(-\alpha_{32}c_{21}-\alpha_{33}c_{31}-\alpha_{34}c_{41}) \qquad \text{[de la (11)].}$$

IV. $$\alpha_{23}=-b_{23}\alpha_{33}-b_{24}\alpha_{43} \qquad \text{[de la (22)];}$$

$$\alpha_{13}=-b_{12}\alpha_{23}-b_{13}\alpha_{33}-b_{14}\alpha_{43} \qquad \text{[de la (20)].}$$

V. $$\alpha_{22}=(1/c_{22})\,(1-\alpha_{23}c_{32}-\alpha_{24}c_{42}) \qquad \text{[de la (13)];}$$

$$\alpha_{21}=(1/c_{11})\,(-\alpha_{22}c_{21}-\alpha_{23}c_{31}-\alpha_{24}c_{41}) \qquad \text{[de la (10)];}$$

VI. $$\alpha_{12}=-b_{12}\alpha_{22}-b_{13}\alpha_{32}-b_{14}\alpha_{42} \qquad \text{[de la (19)];}$$

VII. $$\alpha_{11}=(1/c_{11})\,(1-\alpha_{12}c_{21}-\alpha_{13}c_{31}-\alpha_{14}c_{41}) \qquad \text{[de la (9)].}$$

Utilizando las igualdades obtenidas en las etapas I. . .VII, llegamos al esquema siguiente.

Esquema de sucesión de cálculos de los elementos de la matriz inversa

$$\begin{array}{lcccc}
 & & \mathrm{VI} & \mathrm{IV} & \mathrm{II} \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\mathrm{VII} \longleftarrow & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\
\mathrm{V} \longleftarrow & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\
\mathrm{III} \longleftarrow & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\
\mathrm{I} \longleftarrow & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44}
\end{array}$$

Con ayuda de este esquema se puede calcular la matriz inversa A^{-1} para la matriz A de todo orden si está desarrollada en producto CB de dos matrices triangulares, donde C y B son las matrices triangulares del tipo anteriormente indicado.

Con tal desarrollo se obtienen las siguientes fórmulas para los elementos de la matriz A^{-1}:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{ij}&=-\sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}\alpha_{kj}\ (i<j);\\
\alpha_{ij}&=\frac{1}{c_{ij}}\left(1-\sum_{k=i+1}^{n}\alpha_{ik}c_{ki}\ (i=j),\right.\\
\alpha_{ij}&=-\frac{\sum\limits_{k=j+1}^{n}\alpha_{ik}c_{kj}}{c_{jj}}\ (i>j).
\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Ejemplo. Con ayuda del desarrollo de la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tabla 2.3

	3	-2	2	0	
	2	1	1	-2	A
	3	-1	2	1	
	1	2	-1	-1	
	3	1 $-2/3$	$2/3$	0	
	2	$1-2\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{3}$ 1	$\frac{1-2\cdot(2/3)}{7/3}=-\frac{1}{7}$	$\frac{-2-2\cdot 0}{7/3}=-\frac{6}{7}$	
C	3	$-1-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=1$	$2-3\cdot\frac{2}{3}-1\times$ $\times\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}$ 1	$\frac{1-3\cdot 0-1\cdot(-6/7)}{1/7}=13$	B
	1	$2-1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}$	$-1-1\cdot\frac{2}{3}-\frac{8}{3}\times$ $\times\left(-\frac{1}{7}\right)=-\frac{9}{7}$	$-1-1\cdot 0-\frac{8}{3}\times$ $\times\left(-\frac{6}{7}\right)-\left(-\frac{8}{7}\right)\times$ $\times 13=18$ 1	
	$1/3$	$-4/18$	0	$8/18$	
	$-12/18$	$5/18$	$1/2$	$-1/18$	A^{-1}
	$-12/18$	$11/18$	$1/2$	$-13/18$	
	$-1/3$	$-5/18$	$1/2$	$1/18$	

△ Componemos la tabla 2.3.

Realizamos el cálculo de los elementos de la matriz inversa en el orden anteriormente indicado (véase el esquema), utilizando las fórmulas (25).

I. $\alpha_{44}=1/c_{44}=1/18;$

$$\alpha_{43}=-\frac{\alpha_{44}c_{43}}{c_{33}}=-\frac{(1/18)\cdot(-9/7)}{1/7}=\frac{1}{2};$$

$$\alpha_{42}=-\frac{\alpha_{43}c_{32}+\alpha_{44}c_{42}}{c_{22}}=-\frac{(1/2)\cdot 1+(1/18)\cdot(8/3)}{7/3}=-\frac{5}{18};$$

$$\alpha_{41}=-\frac{\alpha_{42}c_{21}+\alpha_{43}c_{31}+\alpha_{44}c_{41}}{c_{11}}=$$

$$=-\frac{(-5/18)\cdot 2+(1/2)\cdot 3+(1/18)\cdot 1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

II. $\alpha_{34} = -b_{34}\alpha_{44} = -13/18;$

$$\alpha_{24} = -(b_{23}\alpha_{34} + b_{24}\alpha_{44}) =$$

$$= -\left[\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{13}{18}\right) + \left(-\frac{6}{7}\right)\cdot\frac{1}{18}\right] = -\frac{1}{18};$$

$$\alpha_{14} = -(b_{12}\alpha_{24} + b_{13}\alpha_{34} + b_{14}\alpha_{44}) =$$

$$= -\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{18}\right) + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{13}{18}\right) + 0\cdot\frac{1}{18}\right] = \frac{8}{18};$$

III. $\alpha_{33} = \frac{1}{c_{33}}(1 - \alpha_{34}c_{43}) = \frac{1}{1/7}\left[1 - \left(-\frac{13}{18}\right)\cdot\left(-\frac{9}{7}\right)\right] = \frac{1}{2};$

$$\alpha_{32} = -\frac{\alpha_{33}c_{32} + {}_{34}c_{42}}{c_{22}} = -\frac{(1/2)\cdot 1 + (-13/18)\cdot(8/3)}{7/3} = \frac{11}{18};$$

$$\alpha_{31} = -\frac{\alpha_{32}c_{21} + \alpha_{33}c_{31} + \alpha_{34}c_{41}}{c_{11}} =$$

$$= -\frac{(11/18)\cdot 2 + (1/2)\cdot 3 + (-13/18)\cdot 1}{3} = -\frac{12}{18}.$$

IV. $\alpha_{23} = -(b_{23}\alpha_{33} + b_{24}\alpha_{43}) =$

$$= -\left[\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{6}{7}\right)\cdot\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2};$$

$$\alpha_{13} = -(b_{12}\alpha_{23} + b_{13}\alpha_{33} + b_{14}\alpha_{43}) =$$

$$= -\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2}\right] = 0.$$

V. $\alpha_{22} = \frac{1}{c_{22}}[1 - (\alpha_{23}c_{32} + \alpha_{24}c_{42})] =$

$$= \frac{1 - \left[(1/2)\cdot 1 + \left(-\frac{1}{18}\right)\cdot(8/3)\right]}{7/3} = \frac{5}{18};$$

$$\alpha_{21} = -\frac{\alpha_{22}c_{21} + \alpha_{23}c_{31} + \alpha_{24}c_{41}}{c_{11}} =$$

$$= -\frac{(5/18)\cdot 2 + (1/2)\cdot 3 + (-1/18)\cdot 1}{3} = -\frac{12}{18}.$$

VI. $\alpha_{12} = -(b_{12}\alpha_{22} + b_{13}\alpha_{32} + b_{14}\alpha_{42}) =$

$$= -\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{5}{18} + \frac{2}{3}\cdot\frac{11}{18} + 0\cdot\left(-\frac{5}{18}\right)\right] = -\frac{4}{18}.$$

VII. $\alpha_{11} = \frac{1}{c_{11}}[1 - (\alpha_{12}c_{21} + \alpha_{13}c_{31} + \alpha_{14}c_{41})] =$

$$= \frac{1}{3}\left[1 + \left(-\frac{4}{18}\right)\cdot 2 + 0\cdot 3 + \frac{8}{18}\cdot 1\right] = \frac{1}{3}.$$

Respuesta: $A^{-1}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & 8 \\ -12 & 5 & 9 & -1 \\ -12 & 11 & 9 & -13 \\ -6 & -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$. ▲

§ 2.8. Matrices celulares y operaciones con ellas

Al ejecutar los cálculos con matrices de altos órdenes es conveniente partirlas previamente en células (bloques) con ayuda de los tabiques horizontales y verticales que van a lo largo y a través de toda la matriz. Ahora bien, cada matriz se divide en matrices de órdenes menores sobre las cuales las operaciones de cálculo se realizan mucho más sencillamente.

La matriz partida en células se llama *celular* (o *en bloques*).

Por ejemplo: 1) la matriz A está dividida en cuatro células:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right],$$

donde de células sirven las matrices cuadradas

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{12}=\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}, \quad A_{21}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

$$A_{22}=\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix};$$

2) La matriz de n-ésimo orden C está dividida en cuatro células;

$$C=\left[\begin{array}{c|c} C_{n-1} & \mathbf{u}_{n-1} \\ \hline \mathbf{v}_{n-1} & c_{nn} \end{array}\right],$$

donde C_{n-1} es la matriz cuadrada de orden $(n-1)$; $\mathbf{u}_{n-1}$, el vector columna de orden $(n-1)$; $\mathbf{v}_{n-1}$, el vector fila de orden $(n-1)$; c_{nn}, el número.

Tal partición se denomina *orladura* y las matrices, *orladas*.

Con matrices celulares pueden ejecutarse las operaciones de adición y de multiplicación, considerando las células de la matriz celular como elementos de una matriz usual

Sean

$$A=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \text{ y } B=\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

las matrices celulares del mismo orden y de la misma partición. Entonces

$$A+B=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ \hline A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{array}\right],$$

$$AB=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{array}\right].$$

Ejemplo 1. Las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

han de partirse en células cuadradas y calcular $A+B$ y AB.

△ 1) Vamos a partir las matrices A y B en células cuadradas del modo siguiente;

$$A=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ \hline 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{array}\right],$$

$$B=\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right].$$

Encontramos

$$A+B=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ \hline A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 9 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 7 & 2 & 5 \\ 10 & 9 & 0 & 7 \end{array}\right].$$

3) Tenemos

$$AB=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{array}\right].$$

Sucesivamente obtenemos

$$A_{11}B_{11}=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19 & 31 \\ 19 & 32 \end{bmatrix}.$$

$$A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -11 & -25 \\ -14 & -32 \end{bmatrix},$$

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix}8&6\\5&0\end{bmatrix};$$

$$A_{21}B_{11}=\begin{bmatrix}6&4\\8&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&24\\18&31\end{bmatrix},$$

$$A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix}-3&-2\\-6&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&-17\\-8&-22\end{bmatrix},$$

$$A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix}7&7\\10&9\end{bmatrix};$$

$$A_{11}B_{12}=\begin{bmatrix}5&7\\7&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43&55\\45&58\end{bmatrix},$$

$$A_{12}B_{22}=\begin{bmatrix}-3&-4\\-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&7\\6&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-39&-53\\-50&-68\end{bmatrix},$$

$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{bmatrix}4&2\\-5&-10\end{bmatrix};$$

$$A_{21}B_{12}=\begin{bmatrix}6&4\\8&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34&44\\44&57\end{bmatrix},\ A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}-3&-2\\-6&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&7\\8&8\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-27&-27\\-36&-50\end{bmatrix},\ A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}7&7\\8&7\end{bmatrix}.$$

Ahora bien,

$$AB=\left[\begin{array}{cc|cc}8&6&4&2\\5&0&-5&-10\\\hline 7&7&7&7\\10&9&8&7\end{array}\right].\ \blacktriangle$$

Sean

$$A=\left[\begin{array}{c|c}A_{n-1}&\mathbf{u}_{n-1}\\\hline \mathbf{v}_{n-1}&a_{nn}\end{array}\right]\ \text{ y }\ B=\left[\begin{array}{c|c}B_{n-1}&\mathbf{y}_{n-1}\\\hline \mathbf{x}_{n-1}&b_{nn}\end{array}\right]$$

las matrices orladas celulares de n-ésimo orden y de la misma partición. Entonces

$$A+B=\left[\begin{array}{c|c}A_{n-1}+B_{n-1}&\mathbf{u}_{n-1}+\mathbf{y}_{n-1}\\\hline \mathbf{v}_{n-1}+\mathbf{x}_{n-1}&a_{nn}+b_{nn}\end{array}\right],$$

donde $A_{n-1}+B_{n-1}$ es la matriz cuadrada de orden $n-1$; $\mathbf{u}_{n-1}+\mathbf{y}_{n-1}$, el vector columna de orden $n-1$; $\mathbf{v}_{n-1}+\mathbf{x}_{n-1}$, el vector fila de orden $n-1$; $a_{nn}+b_{nn}$, el número;

$$AB=\left[\begin{array}{c|c}A_{n-1}B_{n-1}+\mathbf{u}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}&A_{n-1}\mathbf{y}_{n-1}+\mathbf{u}_{n-1}b_{nn}\\\hline \mathbf{v}_{n-1}B_{n-1}+a_{nn}\mathbf{x}_{n-1}&\mathbf{v}_{n-1}\mathbf{y}_{n-1}+a_{nn}b_{nn}\end{array}\right],$$

donde $A_{n-1}B_{n-1}+\mathbf{u}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}$ es la matriz cuadrada de orden $n-1$; $A_{n-1}\mathbf{y}_{n-1}+\mathbf{u}_{n-1}b_{nn}$, el vector columna de orden $n-1$; $\mathbf{v}_{n-1}B_{n-1}+$ $+a_{nn}\mathbf{x}_{n-1}$, el vector fila de orden $n-1$; $\mathbf{v}_{n-1}\mathbf{y}_{n-1}+a_{nn}\ b_{nn}$, el número.

Ejemplo 2. Las matrices

$$A=\begin{bmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

han de partirse en células por orladura y se debe calcular $A+$ $+B$ y AB.

$\triangle$ 1) Vamos a partir las matrices A y B con ayuda de la orladura:

$$A=\left[\begin{array}{cc|c}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ \hline 4 & 7 & -3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}A_2 & \mathbf{u}_2\\ \hline \mathbf{v}_2 & a_{33}\end{array}\right],\quad B=\left[\begin{array}{cc|c}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ \hline 9 & 6 & 5\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}B_2 & \mathbf{y}_2\\ \hline \mathbf{x}_2 & b_{23}\end{array}\right]$$

2)Hallamos

$$A+B=\begin{bmatrix}A_2+B_2 & \mathbf{u}_2+\mathbf{y}_2\\ \mathbf{v}_2+\mathbf{x}_2 & a_{33}+b_{33}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}8 & 10 & 1\\ 10 & 8 & -2\\ \hline 13 & 13 & 2\end{array}\right]$$

3) Tenemos

$$AB=\begin{bmatrix}A_2B_2+\mathbf{u}_2\mathbf{x}_2 & A_2\mathbf{y}_2+\mathbf{u}_2b_{33}\\ \mathbf{v}_2B_2+a_{33}\mathbf{x}_2 & \mathbf{v}_2\mathbf{y}_2+a_{33}b_{33}\end{bmatrix}.$$

Sucesivamente obtenemos

$$A_2B_2=\begin{bmatrix}5 & 8\\ 6 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47 & 2\\ 54 & 3\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}-4\\ -5\end{bmatrix}[9\ \ 6]=\begin{bmatrix}-36 & -24\\ -45 & -30\end{bmatrix},$$

$$A_2B_2+\mathbf{u}_2\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}11 & -22\\ 9 & -27\end{bmatrix};$$

$$A_2\mathbf{y}_2=\begin{bmatrix}5 & 8\\ 6 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49\\ 57\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2b_{33}=\begin{bmatrix}-4\\ -5\end{bmatrix}5=\begin{bmatrix}-20\\ -25\end{bmatrix},\quad A_2\mathbf{y}_2+\mathbf{u}_2b_{33}=\begin{bmatrix}29\\ 32\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}_2B_2=[4\ \ 7]\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix}=[40\ \ 1],\quad a_{33}\mathbf{x}_2=(-3)\cdot[9\ \ 6]=[-27\ -18],$$

$$\mathbf{v}_2B_2+a_{33}\mathbf{x}_2=[13\ -17];$$

$$\mathbf{v}_2\mathbf{y}_2=|4\ \ 7|\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=41,\quad a_{33}b_{33}=(-3)\cdot 5=-15,\quad \mathbf{v}_2\mathbf{y}_2+a_{33}b_{33}=26.$$

Ahora bien,

$$\left[\begin{array}{cc|c}11 & -33 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ \hline 13 & -17 & 26\end{array}\right]. \ \blacktriangle$$

§ 2.9. Inversión de las matrices con ayuda de la partición en células

Para hallar la matriz inversa se puede utilizar el **método de partición en células.** Sea $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$ la matriz regular celular de n-ésimo orden en la cual A_{11} y A_{22} son las células cuadradas de órdenes p y q (donde $p+q=n$). Se necesita hallar la matriz inversa $A^{-1}=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$ en la cual B_{11} y B_{22} son las matrices cuadradas también de órdenes p y q.

Según la definición de la matriz inversa, $AA^{-1}=E_n$. En el caso dado la matriz unidad también se partirá en células del modo análogo, o sea, $E_n=\begin{bmatrix}E_p & 0\\ 0 & E_q\end{bmatrix}$, donde E_p y E_q son las matrices unidad de los órdenes p y q, respectivamente. Entonces

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_p & 0\\ 0 & E_q\end{bmatrix},$$

de donde después de la multiplicación obtenemos cuatro ecuaciones matriciales:

$$\left\{\begin{array}{l}B_{11}A_{11}+B_{12}A_{21}=E_p.\\ B_{11}A_{12}+B_{12}A_{22}=0.\\ B_{21}A_{11}+B_{22}A_{21}=0.\\ B_{21}A_{12}+B_{22}A_{22}=E_q.\end{array}\right. \tag{1}$$

Para hallar las células de la matriz A^{-1} es necesario resolver el sistema de ecuaciones matriciales (1). Con este fin utilicemos el método de eliminación de las incógnitas. Multipliquemos a la derecha la primera ecuación del sistema (1) por $A_{11}^{-1}A_{12}$ y sustrayamos del resultado de la multiplicación la segunda ecuación de este sistema; obtenemos

$$B_{12}(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}-A_{22})=A_{11}^{-1}A_{12}.$$

De aquí hallamos

$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1},$$
$$B_{11}=A_{11}^{-1}-B_{12}A_{21}A_{11}^{-1}.$$

Análogamente de las ecuaciones tres y cuatro del sistema (1).

$$B_{22}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1},$$
$$B_{21}=-B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}.$$

Esto es posible a condición de que las operaciones respectivas tengan sentido. Introduzcamos las designaciones siguientes:

$$X=A_{11}^{-1}A_{12};\quad Y=A_{21}A_{11}^{-1};\quad \Theta=A_{22}-A_{21}X=A_{22}-YA_{12}.$$

Entonces las fórmulas para las células de la matriz inversa A^{-1} pueden escribirse en la forma siguiente:

$$B_{11}=A_{11}^{-1}+X\Theta^{-1}Y;\quad B_{12}=-X\Theta^{-1};$$
$$B_{21}=-\Theta^{-1}Y;\quad B_{22}=\Theta^{-1}. \tag{2}$$

Las fórmulas (2) son válidas a condición de que A_{11}^{-1} y θ^{-1} existan.

Es cómodo disponer los cálculos en la forma del esquema siguiente:

	A_{21}	A_{22}
$X=A_{11}^{-1}A_{12}$	A_{11}^{-1}	A_{12}
θ^{-1}	$Y=A_{21}A_{11}^{-1}$	$\theta=A_{22}-YA_{12}$

La matriz inversa tiene la forma

$$A^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1}+X\Theta^{-1}Y & -X\Theta^{-1} \\ \hline -\Theta^{-1}Y & \Theta^{-1}\end{array}\right].$$

Ejemplo 1. Con ayuda de la partición en células invertir la matriz

$$A=\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

$\triangle$ Designemos

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2\end{bmatrix};\quad A_{12}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1\end{bmatrix};\quad A_{21}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix};\quad A_{22}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Realizamos los cálculos necesarios:

$$\det A_{11}=2;\quad A_{11}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1\end{bmatrix};$$

$$X=A_{11}^{-1}A_{12}=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1\end{array}\right]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3\end{bmatrix}.$$

$$Y = A_{21}A_{11}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\Theta = A_{22} - YA_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ -3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\det \Theta = -15; \quad \Theta^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Escribamos los datos iniciales y los resultados de los cálculos en el esquema:

	$A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$A_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$A_{11}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
$\theta^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\theta = \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

Luego tenemos

$$X\Theta^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix};$$

$$X\Theta^{-1}Y = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -30 & 10 \\ -30 & -10 \end{bmatrix};$$

$$\Theta^{-1}Y = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -6 & 6 \end{bmatrix};$$

$$X\Theta^{-1}Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -30 & 10 \\ -30 & -10 \end{bmatrix}.$$

Para el control hemos calculado el producto $X\Theta^{-1}Y$ por dos métodos: $X\Theta^{-1}Y = (X\Theta^{-1})Y$ y $X\Theta^{-1}Y = X(\Theta^{-1}Y)$. Definitivamente obtenemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + X\Theta^{-1}Y & -X\Theta^{-1} \\ -\Theta^{-1}Y & \Theta^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -15 & 5 \end{bmatrix} & \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} & \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 & -10 \\ -15 & 5 & 5 & 10 \\ 6 & 14 & 2 & -14 \\ 12 & -12 & 6 & 12 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

De caso particular del método expuesto de inversión de las matrices celulares sirve el **de orladura sucesiva**.

Supongamos que se da la matriz regular cuadrada de n-ésimo orden

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

para la cual se necesita hallar la matriz inversa A^{-1}.

Compongamos la sucesión de las matrices:

$$A_1=[a_{11}];$$

$$A_2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$A_3=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A_2}} & a_{13} \\ & & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right];$$

$$A_4=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c} & & & a_{14} \\ & A_3 & & a_{24} \\ & & & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right];$$

$$A_2^{-1}=B_2=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix};$$

$$A_3^{-1}=C_3=\left[\begin{array}{cc|c} & & c_{13} \\ & C_2 & c_{23} \\ \hline c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right];$$

$$A_4^{-1}=D_4=\left[\begin{array}{ccc|c} & & & d_{14} \\ & D_3 & & d_{24} \\ & & & d_{34} \\ \hline d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{array}\right],$$

etc. Cada matriz siguiente está obtenida de la precedente mediante la orladura.

La matriz inversa a la segunda de estas matrices $A_2^{-1} = B_2$ se halla inmediatamente:

$$A_2^{-1}=B_2=\begin{bmatrix} a_{22}/|A_2| & -a_{12}/|A_2| \\ -a_{21}/|A_2| & a_{11}/|A_2| \end{bmatrix},$$

donde

$$|A_2|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Con ayuda de la matriz A_2^{-1}, aplicando a A_3 el esquema de cálculo citado anteriormente, se puede obtener A_3^{-1}, luego con ayuda de A_3^{-1} obtener análogamente A_4^{-1}, etc, por fín hallar $A_n^{-1} = A^{-1}$.

Ejemplo 2. Valiéndose del método de orladura sucesiva, invertir la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

△ Tenemos

$$A=\left[\begin{array}{rr|r|r} -3 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ \cline{1-2} 3 & -5 & -1 & 2 \\ \cline{1-3} 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

1) $A_2=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; $\det A_2 = -9+8 = -1$;

$$A_2^{-1} = B_2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

2) El esquema de cálculo de $A_3^{-1} = C_3$ tiene la forma siguiente:

	$[a_{31}a_{32}]$	a_{33}
X	A_2^{-1}	$\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$
Θ^{-1}	Y	Θ

Realizamos los cálculos:

$$X = A_2^{-1}\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix};$$

$$Y = [a_{31}\ \ a_{32}]\,A_2^{-1} = [3\ \ -5]\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = [-1\ \ 3];$$

$$\Theta = a_{33} - Y\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = -1 - [-1\ \ 3]\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = -1+2 = 1;$$

$$\Theta^{-1} = 1; \quad X\Theta^{-1}Y = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}\cdot 1\,[-1\ \ 3] = \begin{bmatrix} -11 & 33 \\ -7 & 21 \end{bmatrix}.$$

Llenamos el esquema:

	$3 \quad -5$	-1
$\begin{matrix}11\\7\end{matrix}$	$\begin{matrix}3 & -4\\2 & -3\end{matrix}$	$\begin{matrix}5\\1\end{matrix}$
1	$-1 \quad 3$	1

Obtenemos los elementos de la matriz inversa $A_3^{-1} = C$ después de las siguientes adiciones y multimplicaciones marticiales:

$$c_{33} = \Theta^{-1} = 1; \quad [c_{31} \ c_{32}] = -\Theta^{-1}Y = [1 \ -3];$$

$$\begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{bmatrix} = -X\Theta^{-1} = \begin{bmatrix} -11 \\ -7 \end{bmatrix};$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = A_2^{-1} + X\Theta^{-1}Y = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 33 \\ -7 & 21 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 29 \\ -5 & 18 \end{bmatrix}.$$

Así pues,

$$A_3^{-1} = C_3 = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Para calcular $A_4^{-1} = D_4 = A^{-1}$ hacemos el esquema:

	$[a_{41}a_{42}a_{43}]$	a_{44}
X	A_3^{-1}	$\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$
Θ^{-1}	Y	Θ

Realizamos los cálculos:

$$X = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$Y = [3 \ -1 \ 4] \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = [-15 \ 57 \ -22];$$

$$\Theta = 1 - [-15 \ 57 \ -22] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 - 13 = -12; \quad \Theta^{-1} = -1/12.$$

Llenamos el esquema:

	3	−1	4	1
7	−8	29	11	0
4	−5	18	−7	1
−1	1	−3	1	2
−1/12	−15	57	−22	−12

Luego tenemos:

$$d_{44}=-\frac{1}{12};\quad [d_{41}\ \ d_{42}\ \ d_{43}]=\frac{1}{12}[-15\ \ 57\ \ -22];$$

$$\begin{bmatrix} d_{14}\\ d_{24}\\ d_{34}\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 7\\ 4\\ -1\end{bmatrix};$$

$$D_3=A_3^{-1}+X\Theta^{-1}Y=$$

$$=\begin{bmatrix} -8 & 29 & 11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 7\\ 4\\ -1\end{bmatrix}[-15\ \ 57\ \ -22]=$$

$$=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -96 & 348 & -132\\ -60 & 216 & -84\\ 12 & -36 & 12\end{bmatrix}+\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 105 & -399 & 154\\ 60 & -228 & 88\\ -15 & 57 & -22\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 9 & -51 & 22\\ 0 & -12 & 4\\ -3 & 21 & 10\end{bmatrix}.$$

Así pues,

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 9 & -51 & 22 & 7\\ 0 & -12 & 4 & 4\\ -3 & 21 & -10 & -1\\ -15 & 57 & -22 & -1\end{bmatrix}. \ \blacktriangle$$

El método de orladura puede emplearse sólo en el caso en que todas las matrices intermedias $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ son regulares.

§ 2.10. Valor absoluto y norma de la matriz

Por *valor absoluto (módulo) de la matriz* $A=[a_{ij}]$ se entiende la matriz $|A|=[|a_{ij}|]$ donde todos los elementos $|a_{ij}|$ son los módulos de los elementos de la matriz A.

Sean A y B las matrices para las cuales las operaciones $A+B$ y AB tienen sentido. Entonces

1°) $|A+B| \leqslant |A| + |B|$;

2°) $|AB| \leqslant |A| \cdot |B|$;

3°) $|\alpha A| = |\alpha| \cdot |A|$, donde α es un número.

Por la *norma* de la matriz $A = [a_{ij}]$ se entiende un número real $\|A\|$ que satisface las condiciones siguientes:

1°) $\|A\| \geqslant 0$ (con la particularidad de que $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0$);

2°) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, donde α es un número (con la particularidad de que $\|-A\| = \|A\|$);

3°($\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$;

4°) $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$;

5°) $\|A-B\| \geqslant |\,\|B\| - \|A\|\,|$, donde A y B son las matrices para las cuales las operaciones correspondientes tienen sentido.

Para la matriz $A = [a_{ij}]$ de tamaño arbitrario consideremos las tres normas siguientes que se calculan fácilmente:

$\|A\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$, o sea, *la suma máxima de los módulos de los elementos de la matriz, tomados en filas*;

$\|A\|_2 = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$, o sea, *la suma máxima de los módulos de los elementos de la matriz, tomados en columnas*;

$\|A\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i,j} |a_{ij}|^2}$, o sea, *la raíz cuadrada extraída de la suma de los cuadrados de los módulos de todos los elementos de la matriz.*

Ejemplo 1. Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

calcular $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ y $\|A\|_3$.

△ Hallamos

$$\|A\|_1 = \max(2+1+4,\ 5+3+2,\ 6+7+3) = \max(7,\ 10,\ 16) = 16;$$

$$\|A\|_2 = \max(2+5+6,\ 1+3+7,\ 4+2+3) = \max(13,\ 11,\ 9) = 13;$$

$$\|A\|_3 = \sqrt{2^2+1^2+4^2+5^2+3^2+2^2+6^2+7^2+3^2} = \sqrt{153} = 12{,}2. \ \blacktriangle$$

Para el vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ estas normas se calculan por las fórmulas siguientes:

$\|\mathbf{x}\|_1 = \max |x_i|$ es *la máxima de las coordenadas del vector, tomada en módulo*;

$\|\mathbf{x}\|_2 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ es *la suma de los módulos de las coordenadas del vector:*

$\|x\|_3 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ es *la raíz cuadrada extraída de la suma de los cuadrados de los módulos de las coordenadas del vector.*

La norma $\|\mathbf{x}\|_3$ se llama *valor absoluto del vector.*

Ejemplo 2. Para el vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ calcular $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$ y $\|\mathbf{x}\|_3$.

△ Tenemos

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \text{máx } (1, 2, 3, 5) = 5; \ \|\mathbf{x}\|_2 = 1 + 2 + 3 + 5 = 11;$$
$$\|\mathbf{x}\|_3 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{39} = 6{,}2 \ \blacktriangle$$

§ 2.11. Rango de la matriz y métodos de su cálculo

Supongamos que se da la matriz rectangular

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Si en esta matriz se eligen de un modo arbitrario k filas y k columnas donde $k \leqslant$ mín (m, n), entonces los elementos que están en la intersección de estas filas y columnas forman una matriz cuadrada de orden k cuyo determinante se llama *menor* de k-ésimo orden de la matriz A.

Por ejemplo, en la intersección de las filas 1 y 2 con las columnas 1 y 2 de la matriz A se halla la matriz A de segundo orden $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ cuyo determinante es el menor de segundo orden de la matriz A. Designémoslo M_2:

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Se llama *rango* de la matriz A el orden máximo de un menor distinto del cero de estra matriz. De la definición del rango se deduce que si el rango de una matriz es igual a r, en la matriz hay al menos un menor de r-ésimo orden no igual a cero, mientras que todos los menores de orden $r + 1$ y de órdenes más altos son iguales a cero. Nótese que el rango de la matriz nula es igual a cero y el de una matriz fila (columna) no nula es igual a la unidad.

Para una matriz rectangular de tamaño $m \times n$ la diferencia entre el número menor de los números m y n y el rango de la matriz se denomina *defecto* de la matriz. Para una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ el defecto es igual a $n - r$. Si el defecto es igual a cero, el rango de la matriz es el mayor de los posibles para el tamaño dado.

Consideremos uno de los métodos de cálculo del rango de una matriz, fundado sobre la misma definición de este último. En este caso es necesario hallar el menor de orden máximo distinto del cero. Al calcular el rango de una matriz con ayuda de este método se pasa de los menores de órdenes menores (comenzando con los menores de primer orden, o sea, con los elementos de la matriz) a los de órdenes mayores, apoyándose en la regla siguiente: supongamos que hemos hallado el menor de r-ésimo orden M_r distinto del cero; entonces hace falta calcular solamente los menores de orden $r+1$ que orlan el menor dado M_r. Si todos estos menores son iguales a cero, el rango de la matriz es igual a r; en cambio, si al menos uno de ellos es distinto del cero, esta operación ha de aplicarse a este último, con la particularidad de que en este caso el rango de la matriz es a ciencia cierta mayor que r. Este método de cálculo lleva el nombre de **método de orladura.**

Ejemplo 1. Con ayuda del método de orladura hallar el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

△ 1) Elijamos el menor de primer orden no igual a cero: $M_1^1 = a_{22} = 4 \neq 0$ (el índice superior designa el número de orden durante el cálculo y el índice inferior, el orden del menor).

2) Hallemos el menor orlante de segundo orden no igual a cero:

$$M_2^1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

3) Consideremos todos los menores de tercer orden que orlan el menor M_2^1, para lo cual compongamos los menores M_3^1 y M_3^2 de las filas 2, 3 y 4:

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ya que en estos menores la tercera fila es igual a la suma de la primera fila y la segunda doblada.

Los menores orlantes de las filas 1, 2 y 3 también son iguales a cero, ya que las filas 1 y 2 son iguales. Si todos los menores de tercer orden son iguales a cero, entonces todos los menores de órdenes superiores (comenzando con $3+1=4$) asimismo son iguales a cero. Por consiguiente, el rango de la matriz es igual a 2 y el defecto $4-2=2$. ▲

Puesto que la cantidad de determinantes de diferentes órdenes generados por la matriz suede ser grande, el cálculo del rango por medio de la orladura cuesta mucho trabajo.

Estos cálculos pueden ser simplificados si el rango se halla con ayuda de las *transformaciones elementales de la matriz.*

Entre las transformaciones elementales figuran:

1) permutación de dos filas (columnas);

2) multiplicación de la fila (columna) por cierto número k ($k \neq 0$);

3) adición a una fila (columna) de la otra multiplicada por cualquier número k no igual a cero;

4) eliminación de la fila (columna) compuesta por cero a partir de la matriz;

5) eliminación de la fila (columna) que es una combinación lineal de otras filas (columnas) a partir de la matriz;

Las transformaciones elementales no cambian el rango de la matriz, o sea, como resultado de tales transformaciones se obtiene una nueva matriz que no es igual a la inicial sino es equivalente a ésta (los rangos de estas matrices son iguales). Para designar la equivalencia de las matrices se usa el signo $\sim$.

Las transformaciones de la matriz pueden realizarse en el orden siguiente:

1. Si el elemento situado en el ángulo superior izquierdo de la matriz $a_{11}=0$ y en la matriz hay elementos no nulos, entonces mediante la permutación de las filas o de las columnas coloquemos en su lugar un elemento no nulo y con ayuda de las transformaciones elementales anulemos todos los demás elementos de la primera fila y luego también los de la primera columna. A continuación la columna 1 y la fila 1 quedan sin variar (podemos sólo permutarlas). Si todos los demás elementos de la matriz transformada son iguales a cero, el rango es igual a la unidad, o sea, $r=1$.

2. En cambio, si en la matriz transformada $a_{22}=0$, pero hay elementos distintos del cero, entonces, colocando uno de ellos en el lugar de intersección de la segunda fila y de la segunda columna y aplicando las transformaciones elementales, anulemos primero todos los demás elementos de la segunda fila, luego los de la segunda columna y continuemos las transformaciones de un modo análogo.

En resumidas cuentas, se puede obtener una matriz de cuyos elementos sirven sólo las unidades que están el la diagonal principal, con la particularidad de que su número es igual al rango de la matriz, mientras que los demás elementos son iguales a cero.

Ejemplo 2. Aplicando las transformaciones elementales, determinar el rango de la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

△ Realicemos sucesivamente las siguientes transformaciones elementales de la matriz:

a) Primero adicionemos la primera columna a la cuarta y luego, multiplicándola sucesivamente por (—2) y por (—3), adicionémosla a las columnas 2 y 3, respectivamente.

b) eliminemos las columnas 2 y 3, ya que se obtienen de la cuarta columna multiplicándola por (—5).

Entonces obtenemos

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{a)}}{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & -5 & -5 & 1 \\ -3 & 10 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Es vidente que el rango de la última matriz es igual a 2. No puede ser mayor que 2, ya que si $r = 2$, el defecto es igual a cero ($n - r = 0$), ni puede ser menor que 2, puesto que en la matriz hay un menor $M_2 \neq 0$.

La matriz obtenida es equivalente a la A y, por lo tanto, $r(A) = 2$.

Llegaremos el mismo resultado si continuamos a transformar la matriz:

c) Primero adicionemos la primera fila a la segunda y luego, multiplicándola sucesivamente por (—3) y por (3), adicionemos a las filas 3 y 4, respectivamente

d) Primero adicionemos la tercera fila a la segunda y luego, multiplicándola por 2, adicionemos a la cuarta fila.

e) Eliminemos las filas nulas.

Tenemos:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \overset{c)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{d)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{e)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La última matriz no desempeña el papel de matriz unidad, está obtenida como resultado de transformaciones elementales y es equivalente a la matriz A. La cantidad de unidades presentes en la diagonal principal de la matriz obtenida es igual a 2. Por consiguiente, $r(A) = 2$. ▲

§ 2.12. Concepto de espacio lineal (vectorial). Dependencia lineal de los vectores

Se llama *espacio lineal* (*vectorial*) el conjunto U de los elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$, para el cual están definidas las operaciones de adición de los elementos y de su multiplicación por un número real, operaciones que no hacen salir fuera de los límites de U y satisfacen los siguientes axiomas:

1°) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;

2°) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;

3°) existe un elemento $\mathbf{0} \in U$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;

4°) para cada $\mathbf{x}$ existe el elemento contrario $-\mathbf{x} \in U$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$;

5°) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;

6°) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$;

7°) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$;

8°) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$,

donde $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in U$; α y β son los números reales.

Nótese que $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Ejemplo 1. El conjunto de todos los vectores n-dimensionales con operaciones ordinarias de adición de los vectores y de multiplicación del vector por un número real α forma un espacio lineal, ya que las operaciones indicadas satisfacen los axiomas 1°. . .8°.

De suma de dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ sirve también el vector $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$; el producto del vector $\mathbf{x}$ por el número α es el vector $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2 \ldots, \alpha x_n)$ (véase el § 2.1). En este caso de vector nulo sirve el vector $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$; de vector contrario a $\mathbf{x}$ sirve el vector $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$. Es evidente que se cumplen todos los axiomas del espacio lineal.

Ejemplo 2. El conjunto de los vectores de diferente dimensión no es un espacio lineal, ya que para ellos no está definida la operación de adición.

Ejemplo 3. Se puede mostrar que las matrices cuadradas de igual orden forman un espacio lineal, mientras que las matrices cuadradas de diferentes órdenes no forman un espacio lineal, ya que para estas matrices la suma no está definida.

En el espacio lineal (vectorial) tiene gran importancia el concepto de dependencia lineal de los vectores.

Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son los vectores del espacio U, entonces el vector $\mathbf{z} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}_i$ se llama *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{x}_i$.

Si el vector $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}_i = 0$, pero entre los números c_1, $c_2, \ldots, c_n$ hay, al menos, uno distinto del cero, los vectores $\mathbf{x}_i$ se denominan *linealmente dependientes*.

Los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ se llaman *linealmente independientes* en el caso en que su combinación lineal $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}_i$ es igual al vector nulo si y sólo si todos los vectores $c_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Sobre el plano existen no más de dos vectores linealmente independientes y en el espacio tridimensional, no más de tres.

Teorema. *Si los vectores* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *que pertenecen a un espacio lineal* U *son linealmente dependientes, entonces al menos uno de ellos es la combinación lineal de los demás.*

□ Puesto que los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente dependientes, entonces $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$, con la particularidad de que al menos uno de los números c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es distinto del cero. Sea $c_k \neq 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Entonces el vector $\mathbf{x}_k$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$:

$$\mathbf{x}_k = -\frac{c_1}{c_k}\mathbf{x}_1 - \frac{c_2}{c_k}\mathbf{x}_2 - \ldots$$

$$\ldots - \frac{c_{k-1}}{c_k}\mathbf{x}_{k-1} - \frac{c_{k+1}}{c_k}\mathbf{x}_{k+1} - \ldots - \frac{c_n}{c_k}\mathbf{x}_n. \ \blacksquare$$

Ejemplo 4. Se da un sistema de n vectores unitarios n-dimensionales:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

¿Es linealmente dependiente este sistema?

△ 1) Hagamos la composición lineal de estos vectores e igualémosla a cero:

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_n\mathbf{e}_n = 0.$$

2) Escribamos esta igualdad en las coordenadas:

$$\begin{cases} c_1\cdot 1 + c_2\cdot 0 + \ldots + c_n\cdot 0 = 0, \\ c_1\cdot 0 + c_2\cdot 1 + \ldots + c_n\cdot 0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1\cdot \quad + c_2\cdot 0 + \ldots + c_n\cdot 1 = 0. \end{cases}$$

De aquí $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0$. Esto quiere decir que el sistema de n vectores unitarios n-dimensionales es linealmente independiente. Es evidente que linealmente independiente es también toda parte de este sistema de vectores. ▲

Ejemplo 5. Se dan los vectores $\mathbf{x}_1 = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{x}_2 = (3, 6, 7)$. ¿Son linealmente dependientes estos vectores?

△ 1) Hagamos la combinación lineal de estos vectores e igualémosla a cero:

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = 0. \qquad (*)$$

2) La igualdad vectorial (*) es equivalente al sistema homogéneo de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 1\cdot c_1 + 3c_2 = 0, \\ 2c_1 + 6c_2 = 0, \\ 3c_1 + 7c_2 = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

3) Dividamos ambos miembros de la segunda ecuación del sistema (**) por 2:

$$\begin{cases} 1\cdot c_1 + 3c_2 = 0, \\ 1\cdot c_1 + 3c_2 = 0, \\ 3c_1 + 7c_2 = 0. \end{cases} \qquad (***)$$

En el sistema (***) hay dos ecuaciones iguales una de las cuales suprimimos.

4) Resolviendo ahora el sistema

$$\begin{cases} 1\cdot c_1 + 3c_2 = 0, \\ 3c_1 + 7c_2 = 0, \end{cases}$$

obtenemos $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Así pues, el sistema dado de los vectores es linealmente independiente. ▲

Ejemplo 6. Se dan los vectores: $\mathbf{x}_1 = (1, 3)$; $\mathbf{x}_2 = (0, 2)$, $\mathbf{x}_3 = (5, 7)$. Resolver la cuestión referente a la dependencia lineal del sistema dado de los vectores.

△ 1) Hagamos la composición lineal de estos vectores e igualémosla a cero:

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = 0. \qquad (*)$$

Escribemos la igualdad (*) en las coordenadas:

$$\begin{cases} 1\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + 5c_3 = 0, \\ 3c_1 + 2c_2 + 7c_3 = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Hemos obtenido el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas.

2) Resolvamos este sistema por el método de sustitución. Sustituyamos la expresión $c_1 = -5c_3$, obtenida de la primera ecuación, en la segunda ecuación: $-15c_3 + 2c_2 + 7c_3 = 0$. De aquí $c_2 = 4c_3$. Demos a c_3 un valor numérico arbitrario, no igual a cero, por ejemplo, $c_3 = 1$. Entonces $c_1 = -5$; $c_2 = 4$.

3) Sustituyamos estos valores en la igualdad (*):

$$-5\mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 0, \text{ o bien } \mathbf{x}_3 = 5\mathbf{x}_1 - 4\mathbf{x}_2,$$

o sea, el vector $\mathbf{x}_3$ es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ y esto quiere decir que los vectores $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ son linealmente dependientes. ▲

§ 2.13. Base de un espacio

El espacio lineal (vectorial) U se llama *n-dimensional* si en éste hay n vectores linealmente independientes y no existe una cantidad mayor de vectores linealmente independientes. El número n se denomina *dimensión del espacio*, y el mismo espacio se llama *espacio de dimensión finita*. (Se designa U_n).

Si en el espacio U existe toda cantidad de vectores linealmente independientes, éste se considera de *dimensión infinita*.

Todo conjunto de n vectores linealmente independientes de un espacio n-dimensional se llama *base* de este espacio.

En cada espacio hay un conjunto infinito de las bases. Una de ellas es el sistema de *vectores unitarios* (*versores*):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_n &= (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1). \end{aligned}$$

Teorema 1. *Cada vector del espacio n-dimensional U_n puede ser representado y, además, de un modo único, en forma de la combinación lineal de los vectores de la base.*

□ Sea $\mathbf{x} \in U_n$ y $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, la base del espacio U_n. Los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ son linealmente dependientes (su cantidad es igual a $n + 1$ y supera la dimensión del espacio), o sea,

$$c_0\mathbf{x} + c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_n\mathbf{e}_n = 0, \tag{1}$$

donde cierto coeficiente $c_j \neq 0$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$. En la igualdad (1) el coeficiente $c_0 \neq 0$, ya que en el caso contrario

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_n\mathbf{e}_n = 0,$$

donde $c_j \neq 0$ $(j \geqslant 1)$ lo que contradice la independencia lineal de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Por consiguiente, la igualdad (1) puede ser resuelta respecto a $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \gamma_n\mathbf{e}_n, \tag{2}$$

donde $\gamma_1 = -c_1/c_0,\ \gamma_2 = -c_2/c_0,\ \ldots,\ \gamma_n = -c_n/c_0$.

Ahora bien, todo vector $\mathbf{x}$ del espacio U_n es una combinación lineal de los vectores de la base.

Vamos a demostrar que el desarrollo (2) es único. Supongamos que hay un otro desarrollo

$$\mathbf{x} = \gamma_2'\mathbf{e}_1 + \gamma_2'\mathbf{e}_2 + \ldots + \gamma_n'\mathbf{e}_n \tag{2'}$$

distinto del primero. Sustrayendo de la igualdad (2) la (2′), obtenemos

$$0 = (\gamma_1 - \gamma_1')\,\mathbf{e}_1 + (\gamma_2 - \gamma_2')\,\mathbf{e}_2 - \ldots - (\gamma_n - \gamma_n')\,\mathbf{e}_n. \tag{3}$$

Puesto que los vectores básicos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ son linealmente independientes, deben cumplirse las igualdades

$$(\gamma_1 - \gamma_1') = 0, \quad (\gamma_2 - \gamma_2') = 0, \ldots, (\gamma_n - \gamma_n') = 0,$$

de donde se desprende que $\gamma_1 = \gamma_1', \gamma_2 = \gamma_2', \ldots, \gamma_n = \gamma_n'$, o sea, el desarrollo según la base dada es único. ■

En la igualdad (2) los números $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ se llaman *coordenadas del vector* $\mathbf{x}$ respecto a la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Supongamos que se da un sistema de m vectores en el espacio n-dimensional:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n,\\
\mathbf{x}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + n_{n2}\mathbf{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{x}_m &= a_{1m}\mathbf{e}_1 + a_{2m}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nm}\mathbf{e}_n.
\end{aligned}$$

Escribamos la matriz compuesta por las coordenadas de estos vectores de un modo tal que los elementos de la j-ésima columna sean iguales a las coordenadas del j-ésimo vector ($j = 1, 2, \ldots, m$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Supongamos que el rango de esta matriz es igual a r. Entonces el menor de r-ésimo orden, distinto del cero, se llama *menor básico* de la matriz A. Las filas y columnas en cuya intersección está el menor básico se denominan *filas básicas* y *columnas básicas.*

Teorema 2 (sobre el menor básico). *Las columnas (filas) básicas de la matriz A son linealmente independientes, y toda columna (fila) de esta matriz es una combinación lineal de sus columnas (filas) básicas.*

Ejemplo. Se da el sistema de los vectores: $\mathbf{x}_1 = (-2, 4, 3, 5)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 2, -1)$, $\mathbf{x}_3 = (-2, 7, 9, 2)$. Se necesita determinar la dependencia lineal del sistema dado de los vectores; determinar la base del sistema; representar los vectores del sistema en forma de una combinación lineal de los vectores de la base.

△ 1) Compongamos la matriz a partir de las coordenadas de los vectores:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinemos el rango de la matriz A, aplicando el método de orladura. Tomemos el menor $M_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$ y consideremos el menor que le orla

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}.$$

Para calcular este último sustrayamos la primera columna de la tercera; obtenemos

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

ya que hay dos columnas proporcionales.

El segundo menor orlante

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

puesto que después de una transformación análoga éste también contiene dos columnas proporcionales.

Así pues, todos los menores cuyo orden es superior al segundo son iguales a cero, por eso el rango de la matriz A es igual a 2 y el menor $M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ es básico. Por consiguiente, los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son linealmente independientes y forman la base del sistema, mientras que el vector x_3 es su combinación lineal. Ahora bien, el sistema dado de los vectores es linealmente dependiente.

2) Planteemos la igualdad

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = 0, \qquad (*)$$

de donde obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1(-2) + c_2 \cdot 0 + c_3(-2) = 0, \\ c_1 \cdot 4 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 7 = 0. \end{cases}$$

Expresemos de la primera ecuación $c_1 = -c_3$ y sustituyamos lo obtenido en la segunda ecuación:

$$-4c_3 + c_2 + 7c_3 = 0; \quad c_2 = -3c_3.$$

Pongamos $c_3 = 1$; entonces $c_1 = -1$; $c_2 = -3$. Sustituyendo los valores de c_1, c_2 y c_3 en la igualdad (*), tenemos

$$-\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 0 \text{ o bien } \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2.$$

Ahora bien, el vector $\mathbf{x}_3$ está representado en forma de una combinación lineal de los vectores de la base $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$. Este desarrollo es único. Los números (1, 3) son las coordenadas del vector $\mathbf{x}_3$ en la base $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. ▲

§ 2.14. Transformación de las coordenadas del vector al cambiar la base

Sean $\{e\} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ y $\{f\} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dos bases de un mismo espacio lineal U_n. Cada vector de la nueva base $\{f\}$ tiene en la vieja base $\{e\}$ las coordenadas $s_{1j}, s_{2j}, \ldots, s_{nj}$, con la particularidad de que al designar las coordenadas s_{ij} $(s = 1, 2, \ldots, n)$ en el primer lugar se indica el número del vector básico viejo respectivo y en el segundo lugar, el del nuevo vector básico. Por lo tanto,

$$f_j = s_{1j}e_1 + s_{2j}e_2 + \ldots s_{nj}e_n \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

o bien

$$\begin{cases} f_1 = s_{11}e_1 + s_{21}e_2 + \ldots + s_{n1}e_n, \\ f_2 = s_{12}e_1 + s_{22}e_2 + \ldots + s_{n2}e_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n = s_{1n}e_1 + s_{2n}e_2 + \ldots + s_{nn}e_n, \end{cases} \tag{2}$$

donde

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} & \ldots & s_{n1} \\ s_{12} & s_{22} & \ldots & s_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{1n} & s_{2n} & \ldots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

es una matriz regular, ya que $\det S \neq 0$ (en el caso contrario las filas de esta matriz y, por lo tanto, también los vectores $f_1, f_2, \ldots, f_n$ serían linealmente dependientes).

La matriz S se llama *matriz de paso* de la vieja base a la nueva.

Sea x el vector arbitrario del espacio lineal dado U_n. Designemos con x_i las coordenadas de este vector en la base vieja y con y_i, sus coordenadas en la nueva base. Es evidente que

$$x = y_1f_1 + y_2f_2 + \ldots + y_nf_n = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

o bien

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i = \sum_{j=1}^{n} y_jf_j.$$

Teniendo en cuenta las igualdades (2), tenemos $\sum_{j=1}^{n} f_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}e_i$, de donde, sustituyendo la expresión para f_j, obtenemos

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} s_{ij}e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i \sum_{j=1}^{n} s_{ij}y_j. \tag{3}$$

Por consiguiente, en virtud de la independencia lineal de los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ hallamos

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}y_j \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

o bien

$$\begin{cases} x_1 = s_{11}y_1 + s_{21}y_2 + \ldots + s_{n1}y_n, \\ x_2 = s_{12}y_1 + s_{22}y_2 + \ldots + s_{n2}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = s_{1n}y_1 + s_{2n}y_2 + \ldots + s_{nn}y_n. \end{cases} \tag{4}$$

En la forma matricial la relación (4) se escribirá así:

$$\mathbf{x} = S\mathbf{y}, \tag{5}$$

o sea, el vector en las viejas coordenadas (base) es igual a la matriz de paso S multiplicada por el vector en las nuevas coordenadas. Multipliquemos a la izquierda la igualdad (5) por la matriz inversa S^{-1}:

$$S^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ o bien } \mathbf{y} = S^{-1}\mathbf{x}. \tag{6}$$

La matriz S^{-1} tiene la forma

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} S_{11}/d & S_{12}/d & \ldots & S_{1n}/d \\ S_{21}/d & S_{22}/d & \ldots & S_{2n}/d \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1}/d & S_{n2}/d & \ldots & S_{nn}/d \end{bmatrix},$$

donde d es el determinante de la matriz S ($d \neq 0$, ya que S es una matriz regular) y s_{ij} son los complementos algebraicos de los elementos del determinante d. Entonces

$$\begin{cases} y_1 = \frac{S_{11}}{d} x_1 + \frac{S_{12}}{d} x_2 + \ldots + \frac{S_{1n}}{d} x_n, \\ y_2 = \frac{S_{21}}{d} x_1 + \frac{S_{22}}{d} x_2 + \ldots + \frac{S_{2n}}{d} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \frac{S_{n1}}{d} x_1 + \frac{S_{n2}}{d} x_2 + \ldots + \frac{S_{nn}}{d} x_n. \end{cases} \tag{7}$$

Las relaciones (7) son las fórmulas de paso de las coordenadas x_i del vector $\mathbf{x}$ en la vieja base a las coordenadas y_i en la nueva base ($s = 1, 2, \ldots, n$). El paso de las coordenadas x_i a las y_i se lleva a cabo con ayuda de la matriz S^{-1} que es inversa a la matriz de paso de la vieja base a la nueva.

Ejemplo. Hallar las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 1)$ en la base $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 0, 1)$; $\mathbf{e}_2 = (2, 1, 3, 1)$; $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 0, 0)$; $\mathbf{e}_4 = (0, 1, -1, -1)$.

△ 1) Compongamos la matriz de paso S de la vieja base a la nueva:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2) Hallamos la matriz inversa

$$S^{-1}=\frac{1}{\det S}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & S_{42} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{43} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix}.$$

Tenemos

$$\det S=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-2.$$

Hemos realizado las siguientes transformaciones del determinante S: primero, de la segunda fila hemos sustraído la primera; luego, hemos desarrollado el determinante obtenido según los elementos de la tercera columna; por último, hemos desarrollado el determinante obtenido según los elementos de la primera columna.

Calculamos los complementos algebraicos:

$$S_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2;\quad S_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1;$$

$$S_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-6;$$

$$S_{14}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3;$$

$$S_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2;$$

$$S_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1;$$

$$S_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=4;$$

$$S_{24}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 3 & 0\\1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3\\1 & 1\end{vmatrix}=-3;$$

$$S_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\end{vmatrix}=0$$ (la fila 1ª es igual a la suma de las filas 2 y 3)

$$S_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}=-1;$$

$$S_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 1 & 1\\2 & 2 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{vmatrix}=2;$$

$$S_{34}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}=-1;$$

$$S_{41}=-\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\3 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\4 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 1\end{vmatrix}=-2;$$

$$S_{42}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 0 & -1\end{vmatrix}=0$$ (hay dos columnas iguales);

$$S_{43}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 3 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 4 & 0\\0 & 3 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{vmatrix}=2;$$

$$S_{44}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\\0 & 3 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Por lo tanto,

$$S^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0 & -2\\1 & -1 & -1 & 0\\-6 & 4 & 2 & 2\\3 & -3 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

3) Con ayuda de la fórmula (6) hallamos las coordenadas del vector $\mathbf{x}$ en la nueva base:

$$\mathbf{y}=S^{-1}\mathbf{x}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \ \blacktriangle$$

Ejercicios

1. Calcular AB si

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Calcular $2(A+B)(2B-A)$ si:

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$;

b) $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Hallar el producto XY si:

a) $X=\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $Y=[1 \ \ 2 \ \ -2 \ \ 3]$; b) $X=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

$Y=[4 \ \ 5]$;

c) $X=[10 \ \ 17 \ \ 8 \ \ 5 \ \ 11]$, $Y=\begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$.

4. Hallar el producto AX si:

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -7 & -1 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$;

b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

5. Calcular los determinantes:

a) $d=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$; b) $d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & -3 \\ 5 & 6 & 8 & -4 \end{vmatrix}$;

c) $d=\begin{vmatrix} 1{,}6 & 5{,}4 & -7{,}7 & -3{,}1 \\ 8{,}2 & 1{,}4 & -2{,}3 & 0{,}2 \\ 5{,}3 & -5{,}9 & 2{,}7 & -7{,}9 \\ 0{,}7 & 1{,}9 & -8{,}5 & 4{,}8 \end{vmatrix}$.

6. Calcular A^{-1} para las matrices siguientes:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$; b) $A=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$;

c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Hallar AB, donde

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 6 \\ 7 & 10 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

por dos métodos: a) partiendo A y B en células cuadradas; b) partiendo A y B en células por medio de la orladura.

8. Calcular A^{-1} aplicando la partición en células cuadradas y la or adura, si:

$$\text{a) } A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. Desarrollar las matrices dadas en el ejercicio 8 en producto de dos matrices triangulares e invertirlas, aplicando el desarrollo de las matrices en producto de dos matrices triangulares.

10. Resolver las ecuaciones matriciales:

$$\text{a) } X\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -8 & 3 & 6 \\ 11 & 9 & 13 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -8 & 3 & 6 \\ 11 & 9 & 13 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} -3 & -10 & -4 \\ 21 & 14 & -10 \\ 48 & 2 & 30 \end{bmatrix}.$$

11. Calcular los rangos de las matrices siguientes:

$$\text{a) } A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

12. Determinar si son linealmente dependientes o linealmente independientes los siguientes sistemas de los vectores: a) $\mathbf{x}_1 = (5, 4, 3)$, $\mathbf{x}_2 = (3, 3, 2)$, $\mathbf{x}_3 = (8, 1, 3)$; b) $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$; $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$; $\mathbf{x}_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $\mathbf{x}_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

13. Para el sistema de los vectores $\mathbf{x}_1 = (5, 2, -3, 1)$; $\mathbf{x}_2 = (4, 1, -2, 3)$, $\mathbf{x}_3 = (1, 1, -1, -2)$; $\mathbf{x}_4 = (3, 4, -1, 2)$ hallar la base y expresar los demás vectores por los básicos.

14. Hallar las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (1, 2, 1, 1)$ en la base $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{e}_3 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{e}_4 = (1, -1, -1, 1)$.

CAPÍTULO III

Resolución de los sistemas de ecuaciones lineales

§ 3.1. Sistemas de ecuaciones lineales

En la forma general *un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* se escribe así:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + x_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Las ecuaciones del sistema se consideran numeradas: la primera, la segunda, . . ., la m-ésima. Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llaman *incógnitas* del sistema, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$, *coeficientes* de las incógnitas del sistema.

En la i-ésima ecuación el coeficiente de la incógnita x_{ij} se designa con a_{ij}, donde el primer índice i señala el número de la ecuación en la cual está el coeficiente dado y el segundo índice j señala el número de la incógnita junto a la cual se halla el coeficiente dado. Por ejemplo, el coeficiente a_{23} está en la segunda ecuación del sistema, adjunto a la incógnita x_3.

Los números $b_1, b_2, \ldots, b_m$ se denominan *términos independientes* del sistema.

Brevemente el sistema (1) puede ser escrito así:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (1')$$

Se llama *solución* del sistema de ecuaciones lineales (1) todo conjunto de los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ que, puestos en lugar de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en las ecuaciones del sistema dado convierten todas estas ecuaciones en identidades.

El sistema de ecuaciones lineales (1) se denomina *compatible* si tiene una solución. Si el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, se considera *incompatible* (o *contradictorio*).

Un sistema compatible de ecuaciones lineales puede tener una o varias soluciones y se llama *determinado* si tiene una sola solución e *indeterminado* si tiene más que una solución.

Dos sistemas de ecuaciones lineales con una misma cantidad de incógnitas se llaman *equivalentes* si son ambos incompatibles o son ambos compatibles y tienen unas mismas soluciones.

Se denominan *transformaciones elementales de un sistema de ecuaciones lineales* los siguientes tres tipos de transformaciones:

1) permutación de dos ecuaciones del sistema;

2) multiplicación de ambos miembros de la ecuación del sistema por todo número distinto del cero;

3) adición (sustracción) a ambos miembros de una ecuación de los miembros respectivos de otra ecuación, multiplicados por todo número.

Se puede demostrar que las transformaciones elementales hacen pasar el sistema dado de ecuaciones a un otro, equivalente. El cumplimiento de las transformaciones elementales es equivalente a la expresión de una incógnita por medio de otras.

El sistema en el cual los términos independientes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son iguales a cero se nombra *homogéneo*.

§ 3.2. Teorema de Kronecker—Capelli

Supongamos que se da un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{10}$$

Para determinar las condiciones de compatibilidad de este sistema es necesario introducir el concepto de matriz de un sistema y el de matriz ampliada de este último.

Se llama *matriz del sistema* (1) la matriz compuesta por los coeficientes de las incógnitas de este sistema:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Si la columna de los términos independientes se adjunta a la matriz A, se obtiene la matriz $\overline{A}$ que se denomina *matriz ampliada del sistema* (1):

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}b_m \end{bmatrix}.$$

De la definición de la matriz del sistema A y de la matriz ampliada $\overline{A}$ se pone claro que sus rangos $r(A)$ y $r(\overline{A})$ son iguales entre sí o el rango $r(\overline{A})$ es en una unidad mayor que el $r(A)$.

La cuestión referente a la compatibilidad del sistema (1) se resuelve con ayuda del **teorema de Kronecker—Capelli:** *un sistema de ecuaciones lineales* (1) *es compatible si y sólo si el rango de la matriz ampliada $\bar{A}$ es igual al de la matriz A, o sea, si $r(\bar{A}) = r(A)$.*

Ejemplo. Investigar si es compatible o no el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3, \\ 4x_1 + 9x_2 = 11. \end{cases}$$

△1) Compongamos la matriz del sistema dado y calculemos su rango:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}; \; r(A) = 2, \text{ puesto que } M_2^1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2) Compongamos la matriz ampliada del sistema

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $M_2^1 \neq 0$ y el menor que lo orla

$$M_3 = \det \bar{A} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

(la primera fila es igual a la suma de la segunda, multiplicada por 3, y de la tercera), entonces $r(\bar{A}) = 2$. Así pues, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, o sea, el sistema dado es compatible. ▲

Corolario 1. *Si el sistema* (1) *es compatible y el rango de la matriz del sistema $r(A) = r$ es igual a la cantidad de incógnitas n, entonces el sistema tiene una sola solución.*

Corolario 2. *Si el sistema* (1) *es compatible y el rango de la matriz del sistema $r(A) = r$ es menor que la cantidad de incógnitas n, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.*

§ 3.3. Resolución de los sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas valiéndose de las fórmulas de Cramer

Supongamos que se da un sistema de ecuaciones lineales en el cual la cantidad de ecuaciones es igual a la de incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

y

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

son la matriz del sistema, la columna de los términos independientes y la columna de las incógnitas, respectivamente. Supongamos que el determinante del sistema

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si ahora reemplazamos sucesivamente en el determinante d las columnas de los coeficientes de las incógnitas x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) por la columna de los términos independientes b_i, obtendremos, respectivamente, los determinantes

$$d_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$d_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1,\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d_{n-1}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$d_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,n-1} & b_2 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Teorema de Cramer. *Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas cuyo determinante se distingue del cero es siempre compatible y tiene una sola solución que se calcula por las fórmulas*

$$x_1 = d_1/d; \; x_2 = d_2/d; \; \dots \; ; x_{n-1} = d_{n-1}/d; \quad x_n = d_n/d. \tag{2}$$

las fórmulas (2) se llaman *fórmulas de Cramer*.

Ejemplo 1. Resolver con ayuda de las fórmulas de Cramer el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$$

△ 1) Calculamos el determinante del sistema

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2(-2+4+2+4-4-1)=6.$$

2) Calculamos los determinantes compuestos por los coeficientes de las incógnitas x_1, x_2, x_3:

$$d_1=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2(2-2-4-2+1+8)=6;$$

$$d_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$$
$$=4(-4-2-2+8+2+1)=12;$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(2-16-2-4+4+4)=-12.$$

3) Utilizando las fórmulas de Cramer (2), hallamos la solución del sistema: $x_1=d_1/d=6/6=1$; $x_2=d_2/d=12/6=2$; $x_3=-12/6=-2$. ▲

Ejemplo 2. Resolver con ayuda de las fórmulas de Cramer el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+3x_4=-1, \\ x_1+x_2-x_3-4x_4=6, \\ 3x_1-x_2+x_3+x_4=4, \\ x_1-3x_2+3x_4=-5. \end{cases}$$

△ Hallamos los determinantes d, d_1, d_2, d_3 y d_4, desarrollándolos en menores según los elementos de la última fila y luego aplicando la regla de los triángulos:

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}+$$
$$+3\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 0-3\cdot 5+3\cdot 0=-15$$

(los determinantes primero y tercero son iguales a cero, ya que tienen las columnas proporcionales);

$$d_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 6 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 3\cdot 5 + 3\cdot 0 = -15;$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot 5 - 5\cdot 5 + 3\cdot 10 = 0;$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (1-)\cdot 5 - 3\cdot 15 + 5\cdot(-5) +$$

$$+ 3\cdot 10 = -45;$$

$$d_4 - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} -$$

$$- 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 0 - 3(-10) - 5\cdot 0 = 30.$$

Ahora con ayuda de las fórmulas de Cramer (2) obtenemos la solución del sistema:

$$x_1 = d_1/d = (-15)/(-15) = 1;\ x_2 = d_2/d = 0/(-15) = 0;$$
$$x_3 = d_3/d = (-45)/(-15) = 3;\quad x_4 = d_4/d = 30/(-15) = -2. \blacktriangle$$

Nótese que la resolución de un sistema de ecuaciones lineales con ayuda de las fórmulas de Cramer cuesta mucho trabajo. En la práctica tales sistemas suelen resolverse por otros métodos.

§ 3.4. Resolución de los sistemas arbitrarios de ecuaciones lineales

Sea

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

un sistema arbitrario de ecuaciones lineales donde el número m de ecuaciones del sistema no es igual al número n de incógnitas $(m \neq n)$.

Supongamos que el sistema (1) es compatible, o sea, $r(A) = r(\bar{A}) = r$ y $r \leqslant \text{mín}\{m, n\}$. Entonces en las matrices A y $\bar{A}$ del sistema dado hay r filas linealmente independientes y las demás $m - r$ filas resultan sus combinaciones lineales. Permutando las ecuaciones, se puede alcanzar que estas r filas linealmente independientes ocupen los primeros r lugares.

De aquí se desprende que toda de las últimas $m - r$ ecuaciones del sistema (1) puede representarse como suma de las primeras r ecuaciones (que se llaman *linealmente independientes* o *básicas*) tomadas con ciertos coeficientes. Entonces el sistema (1) es equivalente al siguiente sistema de r ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{2}$$

Supongamos que el menor de r-ésimo orden compuesto por los coeficientes de las primeras r incógnitas es distinto del cero:

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

o sea, es un menor básico (véase el § 2.13). En este caso las incógnitas cuyos coeficientes constituyen el menor básico se nombran *incógnitas básicas* y las demás $n - r$ incógnitas se llaman *independientes*.

En cada una de las ecuaciones del sistema (2) transpongamos al segundo miembro todos los términos con incógnitas independientes

$x_{r+1}, {}_{r+2}, \ldots, x_n$. Entonces obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \\ \qquad\qquad - a_{1,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \\ \qquad\qquad - a_{2,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \\ \qquad\qquad - a_{r,r+1}x_{r+2} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \tag{3}$$

el cual contiene r ecuaciones con r incógnitas básicas. Puesto que el determinante del sistema (3) es el menor básico $M_r \neq 0$, entonces el sistema (3) tiene una sola solución respecto a las incógnitas básicas $x_1, x_2, \ldots, x_r$ la cual puede ser hallada con ayuda de las fórmulas de Cramer. Asignado a las incógnitas independientes $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ los valores numéricos arbitrarios $x_{r+1} = c_1$, $x_{r+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-r}$, obtenemos la solución general del sistema inicial (1).

Ejemplo. Resolver el sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases} \tag{*}$$

△ Investiguemos si es compatible o no el sistema. Compongamos las matrices A y $\bar{A}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determinemos rangos de estas matrices, aplicando las transformaciones elementales:

a) las columnas 1 y 2 son proporcionales, suprimimos una de ellas (la segunda);

b) multipliquemos la primera columna por 1/3;

c) multipliquemos la primera columna sucesivamente por (—5) y por (—4) y adicionemos lo obtenido a las columnas 2 y 3, respectivamente;

d) en la matriz obtenida dos columnas (2 y 3) son proporcionales; eliminemos una de ellas (la tercera) y multipliquemos la segunda por —1/6;

e) multipliquemos la primera fila sucesivamente por (—2) y por (—3) y adicionemos el resultado a las filas 2 y 3, respectivamente;

f) multipliquemos la segunda fila por (—2), adicionemos el resultado a la tercera y eliminemos la fila nula obtenida.

Tenemos

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 5 & 4\\ 6 & -4 & 4 & 3\\ 9 & -6 & 3 & 2\end{bmatrix}\underset{\sim}{a)}\begin{bmatrix}3 & 5 & 4\\ 6 & 4 & 3\\ 9 & 3 & 2\end{bmatrix}\underset{\sim}{b)}\begin{bmatrix}1 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{c)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -6 & -5\\ 3 & -12 & -10\end{bmatrix}\underset{\sim}{d)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\underset{\sim}{e)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\underset{\sim}{f)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Es evidente que el rango de la última matriz es igual a 2: $r(A) = 2$.

Transformemos de un modo análogo la matriz $\bar{A}$:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}3 & -2 & 5 & 4 & 2\\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3\\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3 & 5 & 4 & 2\\ 6 & 4 & 3 & 3\\ 9 & 3 & 2 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 5 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 2 & 4\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -6 & -5 & -1\\ 3 & -12 & -10 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $r(\bar{A}) = 2$.

Ahora bien, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, o sea, el sistema dado es compatible.

Puesto que el rango del sistema es igual a 2, el orden máximo del menor distinto del cero es igual a 2 y el sistema tiene dos incógnitas básicas. Determinemos cualquier menor de segundo orden distinto del cero. Tal, por ejemplo, es el menor $M_2=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}\neq 0$ formado por los coeficientes de las incógnitas x_3 y x_4. Por consiguiente, las incógnitas x_3 y x_4 pueden considerarse básicas, y las incógnitas x_1 y x_2, independientes.

El sistema (*) es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2,\\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3.\end{cases}\qquad (**)$$

Transponemos las incógnitas independientes al segundo miembro:

$$\begin{cases}5x_3+4x_4=2-3x_1+2x_2,\\ 4x_3+3x_4=3-6x_1+4x_2.\end{cases}\qquad (***)$$

Resolvemos el sistema (3) con ayuda de las fórmulas de Cramer:

$$d=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}=15-16=-1;$$

$$d_3=\begin{vmatrix}2-3x_1+2x_2 & 4\\ 3-6x_1+4x_2 & 3\end{vmatrix}=3(2-3x_1+2x_2)-4(3-6x_1+4x_2)=$$

$$=-6+15x_1-10x_2;$$

$$d_4=\begin{vmatrix}5 & 2-3x_1+2x_2\\ 4 & 3-6x_1+4x_2\end{vmatrix}=5(3-6x_1+4x_2)-$$

$$-4(2-3x_1+2x_2)=7-18x_1+12x_2;$$

$$x_3=d_3/d=6-15x_1+10x_2,\quad x_4=d_4/d=-7+18x_1-12x_2.$$

La solución obtenida en la cual las incógnitas básicas x_3 y x_4 están expresadas por medio de las x_1 y x_2 independientes es la solución general del sistema (*). Sustituyendo en ésta los valores arbitrarios para las incógnitas independientes, obtenemos distintas soluciones particulares. Por ejemplo, si $x_1=0$, $x_2=0$, entonces $x_3=6$, $x_4=-7$; si $x_1=1$, $x_2=2$, entonces $x_3=11$, $x_4=13$, etc. Las colecciones de los números (0, 0, 6, —7), (1, 2, 11, 13), etc. son soluciones particulares del sistema (*). ▲

§ 3.5. Sistema homogéneo de ecuaciones lineales

Supongamos que se dé un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}$$

Puesto que la adición de la columna de ceros no cambia el rango de la matriz del sistema, entonces, en virtud del teorema de Kronecker—Capelli, este sistema es siempre compatible y tiene, por lo menos, la solución nula ($x_1=x_2=\ldots=x_n=0$). Si el determinante del sistema (1) es distinto del cero y la cantidad de ecuaciones del sistema es igual a la cantidad de incógnitas, entonces según el teorema de Cramer la solución nula es la única.

En el caso en que el rango de la matriz del sistema (1) es menor que el número de incógnitas, o sea, $r(A)<n$, el sistema dado tendrá, además de la solución nula, también soluciones no nulas. Para encontrar estas soluciones en el sistema (1) separamos r ecuaciones linealmente independientes y suprimimos las demás. En el primer miembro de las ecuaciones separadas dejamos r incógnitas básicas y transponemos las demás $n-r$ incógnitas independientes al segundo miem-

bro. Entonces llegamos al sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = \\ \qquad = -a_{1,r+1}x_{r+1} - a_{1,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = \\ \qquad = -a_{2,r+1}x_{r+1} - a_{2,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots a_{2r}x_r = \\ \qquad = -a_{r,r+1}x_{r+1} - a_{r,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{rn}x_n, \end{cases} \tag{2}$$

resolviendo el cual, expresamos según las formulas de Cramer, r incógnitas básicas $x_1, x_2, \ldots, x_r$ por medio de $n - r$ incógnitas independientes $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$.

El sistema (1) tiene un conjunto infinito de soluciones. Entre este conjunto hay soluciones que son linealmente independientes entre sí.

Se llama *sitema fundamental de soluciones* a $n - r$ soluciones linealmente independientes de un sistema homogéneo de ecuaciones.

Ejemplo. Se da un sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Hallar su solución general y el sistema fundamental de soluciones.

$\triangle$ 1) Aquí la cantidad de incógnitas $n = 4$, la cantidad de ecuaciones $m = 3$. Calculemos el rango de la matriz del sistema, utilizando las transformaciones lineales:

a) suprimimos la segunda columna, ya que es proporcional a la primera;

b) multipliquemos primero la tercera columna por (—2) y adicionemos lo obtenido a la segunda; luego multipliquemos la tercera columna por (—3) y sumemos el resultado con la primera multiplicada por 2;

c) suprimimos la primera columna, ya que es proporcional a la segunda;

d) multipliquemos por 3 la primera columna y adicionémosla a la segunda;

e) multipliquemos la primera fila por 5 y adicionémosla a la cuarta;

f) suprimimos la tercera fila y dividimos la primera fila por (—1) y la segunda por 2.

Tenemos

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix} \underset{\sim}{a)} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 17 & 11 \end{bmatrix} \underset{\sim}{b)} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -25 & -5 & 11 \end{bmatrix} \underset{\sim}{c)} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -5 & 11 \end{bmatrix} \underset{\sim}{d)} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{e)} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{f)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $r(A) = 2$, o sea, $r \leqslant \text{mín}\{m, n\}$, el sistema dado tiene el sistema fundamental de soluciones cuya cantidad es $n - 2 = 4 - 2 = 2$.

2) Vamos a buscar la solución general del sistema. Determinemos el menor básico, o sea, el menor de segundo orden distinto del cero. De tal menor sirve, por ejemplo, el menor compuesto por los coeficientes de las x_3 y x_4 en las ecuaciones primera y segunda del sistema: $M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Dejando las incógnitas básicas x_3 y x_4 en el primer miembro y transponiendo las incógnitas independientes x_1 y x_2 al segundo miembro, llegamos al sistema

$$\begin{cases} 5x_3 + 3x_4 = -2x_1 + 4x_2, \\ 4x_3 + 2x_4 = -3x_1 + 6x_2. \end{cases}$$

Su solución, hallada con ayuda de las fórmulas de Cramer, tiene la forma

$$x_3 = -2{,}5x_1 + 5x_2,$$
$$x_4 = 3{,}5x_1 - 7x_2.$$

3) Para obtener el sistema fundamental de soluciones hace falta hallar cualesquiera dos soluciones linealmente independientes del sistema dado (ya que $n - r = 2$). Suponiendo primero $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, tenemos $x_3 = -2{,}5$, $x_4 = 3{,}5$; suponiendo luego $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, obtenemos $x_3 = 5$, $x_4 = -7$. Ahora bien, el sistema fundamental de soluciones tiene la forma

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}; \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

y la solución general $R = c_1R_1 + c_2R_2$, donde c_1 y c_2 son los números arbitrarios.

Asignando a c_1 y c_2 distintos valores, se puede obtener toda solución del sistema dado.

Sea, por ejemplo, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, entonces $x_3 = -2{,}5\cdot 1 + 5\cdot 2 = 7{,}5$, $x_4 = 3{,}5\cdot 1 - 7\cdot 2 = -10{,}5$. La solución particular obtenida

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7{,}5 \\ -10{,}5 \end{pmatrix}$$

es una combinación lineal de soluciones que forman el sistema fundamental para $c_1 = 1$, $c_2 = 2$; $R = R_1 + 2R_2$.▲

§ 3.6. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales con ayuda del método de eliminación sucesiva de las incógnitas (por el método de Gauss)

El método más difundido de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales es el de **eliminación sucesiva de las incógnitas (método de Gauss).**

Consideremos este método citando un ejemplo del sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Supongamos que se da el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=a_{15}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=a_{25}, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=a_{35}, \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=a_{45}, \end{cases} \tag{1}$$

Vamos a eliminar la incógnita x_1 de todas las ecuaciones del sistema (1), menos de la primera. Llamemos x_1 *incógnita guía* y coeficiente a_{11} *el coeficiente guía*. Dividiendo la primera ecuación por a_{11} (esto es posible si $a_{11} \neq 0$), obtenemos

$$x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3+\frac{a_{14}}{a_{11}}x_4=\frac{a_{15}}{a_{11}}.$$

Designemos $a_{12}/a_{11} = b_{12}$, $a_{13}/a_{11} = b_{13}$, $a_{14}/a_{11} = b_{14}$, $a_{15}/a_{11} = b_{15}$ y en general $b_{1j} = a_{1j}/a_{11}$ $(j > 1)$. Entonces la ecuación en cuestión tendrá la forma

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15} \tag{2}$$

o bien

$$x_1 = b_{15} - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{14}x_4.$$

Para eliminar la incógnita x_1 de las ecuaciones del sistema (1) realicemos las transformaciones siguientes.

1) De la segunda ecuación del sistema (1) sustrayamos la ecuación (2) multiplicada por a_{21}:

$$\begin{array}{r} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ -a_{21}x_1 - a_{21}b_{12}x_2 - a_{21}b_{13}x_3 - a_{21}b_{14}x_4 = -a_{21}b_{15} \\ \hline (a_{22}-a_{21}b_{12})\,x_2+(a_{23}-a_{21}b_{13})\,x_3+(a_{24}-a_{21}b_{14})\,x_4=(a_{25}-a_{21}b_{15}) \end{array}.$$

Designemos

$$a_{22}-a_{21}b_{12}=a_{22}^{(1)};\ a_{23}-a_{21}b_{13}=a_{23}^{(1)},$$
$$a_{24}-a_{21}b_{14}=a_{24}^{(1)};\ a_{25}-a_{21}b_{15}=a_{25}^{(1)}$$

y reescribiremos la ecuación obtenida en la forma

$$a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+a_{24}^{(1)}x_4=a_{25}^{(1)}.$$

2) De la tercera ecuación del sistema (1) sustrayamos la ecuación (2) multiplicada por a_{31}:

$$\begin{array}{r} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ -a_{31}x_1 - a_{31}b_{12}x_2 - a_{31}b_{13}x_3 - a_{31}b_{14}x_4 = -a_{31}b_{15} \\ \hline (a_{32}-a_{31}b_{12})\,x_2+(a_{33}-a_{31}b_{13})\,x_3+(a_{34}-a_{31}b_{14})\,x_4=a_{35}-a_{31}b_{15} \end{array}.$$

Designando $a_{32} - a_{31}b_{12} = a_{32}^{(1)}$; $a_{33} - a_{31}b_{13} = a_{33}^{(1)}$, etc., escribamos la ecuación obtenida en la forma

$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}.$$

3) De la cuarta ecuación del sistema (1) sustrayamos la ecuación (2) multiplicada por a_{41}. Utilizando las designaciones análogas, obtenemos la ecuación siguiente:

$$a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}.$$

Como resultado de las transformaciones elementales realizadas tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\left\{\begin{array}{l} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}, \end{array}\right. \qquad (1')$$

donde los coeficientes a_{ij} $(i, j \geqslant 2)$ se calculan por la fórmula $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}$ (por ejemplo, $a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{12}$).

Dividiendo luego los coeficientes de la primera ecuación del sistema (1′) por el coeficiente guía $a_{22}^{(1)} \neq 0$, obtenemos la primera ecuación en la forma

$$x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\, x_3 + \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\, x_4 = \frac{a_{25}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Designemos

$$a_{23}^{(1)}/a_{22}^{(1)} = b_{23}^{(1)};\ a_{24}^{(1)}/a_{22}^{(1)} = b_{24}^{(1)};\ a_{25}^{(1)}/a_{22}^{(1)} = b_{25}^{(1)}$$

y en general $a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)} = b_{2j}^{(1)}$ $(j > 2)$. Entonces la primera ecuación del sistema (1′) tendrá la forma

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)} \qquad (2')$$

o bien

$$x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{23}^{(1)}x_3 - b_{24}^{(1)}x_4.$$

Eliminando ahora x_2 de todas las ecuaciones del sistema (1′), salvo la primera, haciendo uso del mismo método que hemos utilizado para eliminar x_1, llegamos al siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}, \end{array}\right. \qquad (1'')$$

donde $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}\, b_{2j}^{(1)}$ $(i, j \geqslant 3)$. Por ejemplo, $a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - a_{32}^{(1)}b_{24}^{(1)}$. Dividiendo los coeficientes de la primera ecuación del sistema (1″) por el coeficiente guía $a_{33}^{(2)} \neq 0$, obtenemos

$$x_3 + b_{34}^{(1)}x_4 = b_{35}^{(2)}, \qquad (2'')$$

donde $b_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)}/a_{33}^{(2)}$ $(j > 3)$, o sea,

$$x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4.$$

Eliminando ahora x_3 del sistema (1″), al utilizar el método análogo, hallamos

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)}, \tag{1‴}$$

donde $a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i3}^{(2)}b_{3j}^{(2)}$ $(i, j \geqslant 4)$. De aquí

$$x_4 = a_{45}^{(3)}/a_{44}^{(3)}. \tag{2‴}$$

Las demás incógnitas del sistema se obtienen sucesivamente de las ecuaciones (2″), (2′) y (2):

$$x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4,$$
$$x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)}x_4 - b_{23}^{(1)}x_3,$$
$$x_1 = b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2.$$

Ahora bien, el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con ayuda del método de Gauss se reduce a la construcción de un sistema equivalente de ecuaciones (2), (2′), (2″), (2‴). El método de Gauss es aplicable a condición de que todos los coeficientes guía sean distintos del cero.

Para la comodidad los cálculos se llevan a cabo según el esquema llamado **esquema de división única**. El cálculo de los elementos b_{ij} se llama *paso directo*, y el cálculo de los valores de las incógnitas se denomina *paso invertido*, ya que primeramente se determina el valor de la última incógnita.

El esquema de división única (esquema de Gauss) se hace del modo siguiente.

En la parte I del esquema (véase la tabla 3.1) se escriben los coeficientes de las incógnitas (en las columnas de las incógnitas respectivas), los términos independientes y para cada fila «las sumas de control» (columna Σ_2) iguales a la suma de los elementos a_{ij} en la fila dada (aquí $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$); la última fila de la parte I, compuesta por 1 y por los elementos b_{ij}, se obtiene dividiendo la primera fila de la parte por el coeficiente guía a_{11}.

Los elementos de la parte II del esquema son iguales a los elementos correspondientes de la parte 1 menos el producto $a_{i1}b_{1j}$ $(i, j \geqslant 2)$; por ejemplo, $a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{13}$. La última fila de la parte II, compuesta por 1 y por los elementos $b_{2j}^{(1)}$, se obtiene dividiendo la primera fila de la parte por el coeficiente guía $a_{22}^{(1)}$.

Análogamente se calculan los elementos de las partes III y IV del esquema. Las partes I, II, III y IV, que se terminan con el cálculo de los elementos $b_{ij}^{(i-1)}$ $(i = 1, 2, 3, 4;$ $j = 2, 3, 4, 5)$, constituyen el **paso directo** de los cálculos del esquema.

El paso invertido comienza con el cálculo de la última incógnita del sistema de ecuaciones lineales x_4 y termina con el cálculo de la primera incógnita x_1. Durante el paso invertido se utilizan sólo las filas del paso directo que contienen las unidades y los elementos correspondientes b_{ij} (llamemos estas filas «marcadas»).

El elemento $b_{45}^{(3)}$ de la última fila «marcada» y de la columna de los términos independientes da el valor x_4. Luego, las demás incóg-

x_1	x_2	x_3	x_4	Términos independientes
$\boxed{a_{11}}$ a_{21} a_{31} a_{41}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42}	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45}
$1=\frac{a_{11}}{a_{11}}$	$b_{12}=\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$b_{13}=\frac{a_{13}}{a_{11}}$	$b_{14}=\frac{a_{14}}{a_{11}}$	$b_{15}=\frac{a_{15}}{a_{11}}$
	$\boxed{a_{22}^{(1)}}$ $a_{32}^{(1)}$ $a_{42}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$ $a_{43}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$ $a_{44}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}=a_{25}-a_{21}b_{15}$ $a_{35}^{(1)}=a_{35}-a_{31}b_{15}$ $a_{45}^{(1)}=a_{45}-a_{41}b_{15}$
	$1=\frac{a_{22}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{23}^{(1)}=\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{24}^{(1)}=\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{25}^{(1)}=\frac{a_{25}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$
		$\boxed{a_{33}^{(2)}}$ $a_{43}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$ $a_{44}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}=a_{35}^{(1)}-a_{32}^{(1)}b_{25}^{(1)}$ $a_{45}^{(2)}=a_{45}^{(1)}-a_{42}^{(1)}b_{25}^{(1)}$
		$1=\frac{a_{33}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$b_{34}^{(2)}=\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$b_{35}^{(2)}=\frac{a_{35}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$
			$\boxed{a_{44}^{(3)}}$	$a_{45}^{(3)}=a_{45}^{(2)}-a_{43}^{(2)}b_{35}^{(2)}$
			$1=\frac{a_{44}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}$	$b_{45}^{(3)}=\frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}$
1	1	1	1	$x_4=b_{45}^{(3)}$ $x_3=b_{35}^{(2)}-b_{34}^{(2)}x_4$ $x_2=b_{25}^{(1)}-b_{24}^{(1)}x_4-b_{23}^{(1)}x_3$ $x_1=b_{15}-b_{14}x_4-b_{13}x_3-$ $-b_{12}x_2$

Tabla 3.1

Σ_1	Σ_2	Partes del esquema	
	$a_{16}=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}$ $a_{26}=a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{25}$ $a_{36}=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}+a_{35}$ $a_{46}=a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}+a_{45}$	I	Paso directo
$b_{16}=\dfrac{a_{16}}{a_{11}}$	$b_{16}=1+b_{12}+b_{13}+b_{14}+b_{15}$		
$a_{26}^{(1)}=a_{26}-a_{21}b_{16}$ $a_{36}^{(1)}=a_{36}-a_{31}b_{16}$ $a_{46}^{(1)}=a_{46}-a_{41}b_{16}$	$a_{26}^{(1)}=a_{22}^{(1)}+a_{23}^{(1)}+a_{24}^{(1)}+a_{25}^{(1)}$ $a_{36}^{(1)}=a_{32}^{(1)}+a_{33}^{(1)}+a_{34}^{(1)}+a_{35}^{(1)}$ $a_{46}^{(1)}=a_{42}^{(1)}+a_{43}^{(1)}+a_{44}^{(1)}+a_{45}^{(1)}$	II	
$b_{26}^{(1)}=\dfrac{a_{26}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{26}^{(1)}=1+b_{23}^{(1)}+b_{24}^{(1)}+b_{25}^{(1)}$		
$a_{36}^{(2)}=a_{36}^{(1)}-a_{32}^{(1)}b_{26}^{(1)}$ $a_{46}^{(2)}=a_{46}^{(1)}-a_{42}^{(1)}b_{26}^{(1)}$	$a_{36}^{(2)}=a_{33}^{(2)}+a_{34}^{(2)}+a_{35}^{(2)}$ $a_{46}^{(2)}=a_{43}^{(2)}+a_{44}^{(2)}+a_{45}^{(2)}$	III	
$b_{36}^{(2)}=\dfrac{a_{36}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$b_{36}^{(2)}=1+b_{34}^{(2)}+b_{35}^{(2)}$		
$a_{46}^{(3)}=a_{46}^{(2)}-a_{43}^{(2)}b_{36}^{(2)}$	$a_{46}^{(3)}=a_{44}^{(3)}+a_{45}^{(3)}$	IV	
$b_{46}^{(3)}=\dfrac{a_{46}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}$	$b_{46}^{(3)}=1+b_{45}^{(3)}$		
$\bar{x}_4=b_{46}^{(3)}$ $\bar{x}_3=b_{36}^{(2)}-b_{34}^{(2)}\bar{x}_4$ $\bar{x}_2=b_{26}^{(1)}-b_{24}^{(1)}\bar{x}_4-b_{23}^{(1)}\bar{x}_3$ $\bar{x}_1=b_{16}-b_{14}\bar{x}_4-b_{13}\bar{x}_3-$ $-b_{12}\bar{x}_2$	$\bar{x}_4=1+x_4$ $\bar{x}_3=1+x_3$ $\bar{x}_2=1+x_2$ $\bar{x}_1=1+x_1$	V	Paso directo

nitas x_3, x_2 y x_1 se hallan sustrayendo del término independiente de la fila «marcada» la suma de los productos de sus coeficientes por los valores correspondientes de las incógnitas antes encontradas; por ejemplo, $x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)} x_4$.

Los valores de las incógnitas se ponen sucesivamente en la parte V. Las unidades allí colocadas ayudan a encontrar para x_j los coeficientes respectivos en las filas «marcadas».

Para controlar los cálculos se utilizan las así llamadas sumas de control:

$$a_{i6} = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

y

$$b_{i6} = \sum_{j=1}^{5} b_{ij} + 1 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

colocadas en la columna Σ_2.

En la columna Σ_1 de las partes II, III, y IV en cada fila se hacen con las sumas de control las mismas operaciones que con los demás elementos de esta fila. Si no hay errores en los cálculos los elementos de las columnas Σ_1 y Σ_2 son iguales. Ahora bien, se controla el paso directo del esquema.

Para controlar el paso invertido $\bar{x}_4$ se halla en la última fila «marcada» de la columna Σ_1, o sea, $\bar{x}_4 = b_{46}^{(3)}$ y las demás incógnitas de esta columna $\bar{x}_j$ ($j = 3, 2, 1$) se calculan en las mismas filas y con ayuda de las mismas fórmulas que las incógnitas x_j, con una sola particularidad de que en las fórmulas se sustituyen las $\bar{x}_j$ correspondientes. En resumidas cuentas los números $\bar{x}_j$ deben coincidir con los números $x_j + 1$ de la columna Σ_2.

Ejemplo 1. Con ayuda del esquema de división única resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

△ En la parte I de la tabla 3.2 escribimos la matriz del sistema, sus términos independientes y las sumas de control. Luego calculamos la fila «marcada» de esta parte dividiendo la primera fila por $a_{11} = 2$. Por ejemplo, $b_{12} = a_{12}/a_{11} = 2/2 = 1$.

Calculamos los elementos de la parte II con ayuda de la regla siguiente: cada elemento de esta parte es igual al elemento correspondiente de la parte I menos el producto del primer elemento de su fila por el elemento de la fila «marcada» en su columna. Escribimos el resultado obtenido en el lugar respectivo de la parte II. Por ejemplo:

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{13} = -1 - 4\,(-0{,}5) = 1,$$
$$a_{33}^{(1)} = a_{33} - a_{31}b_{13} = -3 - 8\,(-0{,}5) = 1.$$

Tabla 3.2

x_1	x_2	x_3	x_4	Términos independientes	Σ_1	Σ_2	Partes del esquema
$\boxed{2}$	2	−1	1	4	8		I
4	3	−1	2	6	14		
8	5	−3	4	12	26		
3	3	−2	2	6	12		
1	1	−0,5	0,5	2	4	4	
	$\boxed{-1}$	1	0	−2	−2	−2	II
	−3	1	0	−4	−6	−6	
	0	−0,5	0,5	0	0	0	
	1	−1	0	2	2	2	
		$\boxed{-2}$	0	2	0	0	III
		−0,5	0,5	0	0	0	
		1	0	−1	0	0	
			$\boxed{0,5}$	−0,5	0	0	IV
			1	−1	0	0	
			1	$x_4=-1$	$\bar{x}_4=0$	0	V
		1		$x_3=-1$	$\bar{x}_3=0$	0	
	1			$x_2=1$	$\bar{x}_2=2$	2	
1				$x_1=1$	$\bar{x}_1=2$	2	

Obtenemos los elementos de la fila «marcada» de la parte II dividiendo su primera fila por el coeficiente guía $a_{22}^{(1)} = -1$. Por ejemplo,

$$b_{23}^{(1)} = a_{23}^{(1)}/a_{22}^{(1)} = 1/(-1) = -1.$$

Análogamente se calculan los elementos de las partes III y IV. Por ejemplo:

$$a_{44}^{(2)} = a_{44}^{(1)} - a_{42}^{(1)} b_{24}^{(1)} = 2 - 3\cdot 0,5 = 0,5,$$
$$a_{46}^{(3)} = a_{45}^{(2)} - a_{43}^{(2)} b_{35}^{(2)} = 0 - (-0,5\,(-1) = -0,5.$$

Para calcular los elementos de la parte V, o sea, para hallar las incógnitas utilizamos las filas «marcadas» comenzando con la última.

La incógnita x_4 no es sino el término independiente de la última fila «marcada»: $x_4 = b_{45}^{(3)} = 1$ y las demás incógnitas x_3, x_2 y x_1 se obtienen sucesivamente sustrayendo de los términos independientes de las filas «marcadas» la suma de los productos de los coeficientes correspondientes $b_{ij}^{(i-1)}$ por los valores antes hallados de las incógnitas.

El control se lleva a cabo con ayuda de las columnas Σ_1 y Σ_2. Con la columna Σ_1 se realizan las mismas operaciones que con las demás columnas (véanse las tablas 3.1 y 3.2) y en resumen la suma de los elementos de cada fila del esquema (sin la columna Σ_1) debe ser igual al elemento de esta fila tomado de la columna Σ_2. Los números $\bar{x}_j$ de la columna Σ_1 han de ser iguales a los números $1 + x_j$ de la columna Σ_2.

Como resultado obtenemos $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$. ▲

Ejemplo 2. Con ayuda del esquema de división única resolver el siguiente sistema con precisión hasta 0,0001:

$$\begin{cases} 0{,}63x_1 + 1{,}00x_2 + 0{,}71x_3 + 0{,}34x_4 = 2{,}08, \\ 1{,}17x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}65x_3 + 0{,}71x_4 = 0{,}17, \\ 2{,}71x_1 - 0{,}75x_2 + 1{,}17x_3 - 2{,}35x_4 = 1{,}28, \\ 3{,}58x_1 + 0{,}28x_2 - 3{,}45x_3 - 1{,}18x_4 = 0{,}05. \end{cases}$$

△ La resolución del sistema se da en la tabla 3.3. La respuesta final: $x_1 = 0{,}4026$, $x_2 = 1{,}5016$, $x_3 = 0{,}5862$, $x_4 = -0{,}2678$. ▲

Si los valores aproximados de las incógnitas, obtenidos con ayuda del esquema de Gauss, son suficientemente exactos, o sea, sus correcciones son pequeñas en valor absoluto, se puede no realizar una precisión.

En caso de necesidad de precisar los valores aproximados de las incógnitas se procede del modo siguiente:

1) para cada ecuación del sistema se calculan las *discrepancias*, o sea, las diferencias entre los miembros segundo y primero del sistema las cuales se obtienen después de sustituir en las ecuaciones los valores aproximados de las incógnitas; si los valores aproximados de las incógnitas se designan con $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, las discrepancias con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ y los términos independientes con $b_1, b_2, \ldots, b_n$, entonces

$$\varepsilon_1 = b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j^{(0)},$$
$$\varepsilon_2 = b_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j^{(0)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n = b_n - \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j^{(0)};$$

2) se escriben las discrepancias ε_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ en una columna especial del esquema de Gauss (ε) y se realizan con ellas las mismas operaciones que con otras columnas del esquema;

3) considerando la columna ε como columna de los términos independientes, se obtienen las correcciones δ_i de las incógnitas;

Tabla 3.3

x_1	x_2	x_3	x_4	Términos independientes	Σ_1	Σ_2
$\boxed{0,63}$	1,00	0,71	0,34	2,08	4,76	
1,17	0,18	−0,65	0,71	0,17	1,58	
2,71	−0,75	1,17	−2,35	1,28	2,06	
3,58	0,21	−3,45	−1,18	0,05	−0,79	
1	1,587	1,127	0,539	3,302	7,555	
	$\boxed{-1,6768}$	−1,9686	0,0794	−3,6933	−7,2593	−7,2593
	−5,0508	−1,8842	−3,8107	−7,6684	−18,4141	−18,4141
	−5,4715	−7,4847	−3,1096	−11,7712	−27,8370	−27,8370
	1	1,17402	−0,04735	2,20259	4,32926	4,32926
		$\boxed{4,04554}$	−4,04986	3,45644	3,45212	3,45212
		−1,06105	−3,36868	0,28027	−4,14946	−4,14946
		1	−1,00106	0,85438	0,85332	0,85332
			$\boxed{-4,43085}$	1,18681	−3,24404	−3,24404
			1	−0,26785	0,73215	0,73215
			1	$x_4=-0,26785$	$\bar{x}_4=0,73215$	0,73215
		1		$x_3=0,58625$	$\bar{x}_3=1,58625$	1,58625
	1			$x_2=1,50164$	$\bar{x}_2=2,50164$	2,50164
1				$x_1=0,40257$	$\bar{x}_1=1,40257$	1,40257

4) se hallan los valores precisados de las incógnitas, adicionando a los valores aproximados de las incógnitas $x_i^{(0)}$ las correcciones correspondientes δ_i:

$$x_i = x_1^{(0)} + \delta_1;\ x_2 = x_2^{(0)} + \delta_2;\ \ldots;\ x_n = x_n^{(0)} + \delta_n.$$

Ejemplo 3. Haciendo uso del método de Gauss, resolver con tres cifras decimales el sistema

$$\begin{cases} 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = -4,75, \\ 0,43x_1 + 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05, \\ 3,21x_1 - 4,25x_2 + 2,13x_3 = 5,06 \end{cases}$$

y precisar los valores aproximados obtenidos de las incógnitas hasta 10^{-4}.

△ Con ayuda del esquema de Gauss calculamos $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ y $x_3^{(0)}$ con tres cifras significativas (tabla 3.4).

Tabla 3.4

x_1	x_2	x_3	Términos independientes	Σ	ε
$\boxed{7,09}$	1,17	−2,23	−4,75	1,28	0,00097
0,43	1,4	−0,62	−1,05	0,16	0,00087
3,21	−4,25	2,13	5,06	6,15	−0,00295
1	0,1650	−0,3145	−0,6700	0,1805	0,00014
	$\boxed{1,3290}$	−0,4847	−0,7619	0,0824	0,00081
	−4,7796	3,1395	7,2107	5,5706	−0,00340
	1	−0,3647	−0,5733	0,0620	0,00061
		$\boxed{1,3964}$	4,4705	5,8669	−0,00048
		1	3,2015	4,2015	−0,00035
		1	3,2015	4,2015	−0,00035
	1		0,5943	1,5943	0,00048
1			0,2388	1,2388	−0,0005

Ahora bien, $x_1^{(0)} = 0{,}239$, $x_2^{(0)} = 0{,}594$, $x_3^{(0)} = 3{,}202$.

Para hallar la corrección $\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$, es necesario resolver el sistema dado con la misma matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7{,}09 & 1{,}17 & -2{,}23 \\ 0{,}43 & 1{,}4 & -0{,}62 \\ 3{,}21 & -4{,}25 & 2{,}13 \end{bmatrix}$$

y con nuevos términos independientes ε_i (discrepancias) que se calculan del modo siguiente.

1. Calculemos las discrepancias para lo cual sustituimos en las ecuaciones del sistema dado los valores de $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$

$$7{,}09 \cdot 0{,}239 + 1{,}17 \cdot 0{,}594 - 2{,}23 \cdot 3{,}202 = -4{,}75097;$$
$$0{,}43 \cdot 0{,}239 + 1{,}4 \cdot 0{,}594 - 0{,}62 \cdot 3{,}202 = -1{,}05087;$$
$$3{,}21 \cdot 0{,}239 - 4{,}25 \cdot 0{,}594 - 2{,}13 \cdot 3{,}202 = 5{,}06295.$$

Las discrepancias son, respectivamente, iguales a

$$\varepsilon_1 = -4{,}75 - (-4{,}75097) = 0{,}00097;$$
$$\varepsilon_2 = -1{,}05 - (-1{,}05087) = 0{,}00087;$$
$$\varepsilon_3 = 5{,}06 - 5{,}06295 = -0{,}00295.$$

2. Resolvemos el sistema dado, haciendo uso del esquema de Gauss, con términos independientes $\varepsilon_1 = 0{,}00097$, $\varepsilon_2 = 0{,}00087$, $\varepsilon_3 = 0{,}00295$. Con exactitud hasta 10^{-4} obtenemos los valores respectivos de las correcciones $\delta_1 = -0{,}0004$; $\delta_2 = 0{,}0005$; $\sigma_3 = -0{,}0001$. Ahora precisemos las incógnitas:

$$x_1 = x_1^{(0)} + \delta_1 = 0{,}239 - 0{,}0004 = 0{,}2386;$$
$$x_2 = x_2^{(0)} + \delta_2 = 0{,}594 + 0{,}0005 = 0{,}5945;$$
$$x_3 = x_3^{(0)} + \delta_3 = 3{,}202 - 0{,}0001 = 3{,}2019. \blacktriangle$$

§ 3.7. Cálculo de los determinantes con ayuda del esquema de Gauss

El método de Gauss puede ser utilizado al calcular los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)},$$

donde $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ son los elementos guía del esquema de división única.

Tabla 3.5

Columnas				Σ_1	Σ_2
1	2	3	4		
$\boxed{1}$	1	2	3	7	
3	−1	−1	−2	−1	
2	3	−1	−1	3	
1	2	3	−1	5	
1	1	2	3	7	7
	$\boxed{-4}$	−7	−11	−22	−22
	1	−5	−7	−11	−11
	1	1	−4	−2	−2
	1	7/4	11/4	22/4	22/4
		$\boxed{-27/4}$	−39/4	−66/4	−66/4
		−3/4	−27/4	−30/4	−30/4
		1	13/9	22/9	22/9
			$\boxed{-17/3}$	−17,3	−17/3

Ejemplo 1. Con ayuda del esquema de división única calcular el determinante

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

△ La resolución se da en la tabla 3.5. Ahora bien, $d = 1\cdot(-4)\times\times(-27/4)\cdot(-17/3) = -153$. ▲

Ejemplo 2. Con ayuda del esquema de división única calcular el determinante, con exactitud hasta 0,001,

$$d = \begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{vmatrix}.$$

△ La solución se da en la tabla 3.6. Finalmente tenemos $d = 1\cdot 0{,}8236\cdot 0{,}6978\cdot 0{,}4979 = 0{,}286$. ▲

Tabla 3.6

Columnas				Σ_1	Σ_2
1	2	3	4		
$\boxed{1}$	0,42	0,54	0,66	2,62	
0,42	1,00	0,32	0,44	2,18	
0,54	0,32	1,00	0,22	2,08	
0,66	0,44	0,22	1,00	2,32	
1	0,42	0,54	0,66	2,62	
	$\boxed{0{,}8236}$	0,0932	0,1628	1,0796	1,0796
	0,0932	0,7084	0,1364	0,6652	0,6652
	0,1628	−0,1364	0,5644	0,5908	0,5908
	1	0,1135	0,1973	1,3108	1,3108
		$\boxed{0{,}6978}$	−0,1548	0,5430	0,5430
		−0,1549	0,5323	0,3774	0,3774
		1	−0,2219	0,7782	0,7781
			$\boxed{0{,}4979}$	0,4979	0,4979

§ 3.8. Inversión de una matriz con ayuda del esquema de Gauss

Supongamos que se da la matriz regular $A = [a_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Para hallar la matriz inversa $A^{-1} = [x_{ij}]$ se utiliza la relación fundamental $AA^{-1} = E$, donde E es la matriz unidad de n-ésimo orden.

Así, para la matriz de cuarto orden, multiplicando

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtenemos 4 sistemas de ecuaciones respecto a 16 incógnitas x_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$.

En el caso general tienen lugar las relaciones

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j, \\ 0 & \text{para } i \neq j; \end{cases}$$

δ_{ij} se llama *símbolo de Kronecker*.

Los n sistemas obtenidos de ecuaciones lineales para $j = 1, 2, \ldots, n$ tienen una misma matriz A y distintos términos independientes que forman la matriz unidad. Por eso estos sistemas pueden ser resueltos con ayuda del esquema de Gauss.

Las soluciones de x_{ij} halladas con ayuda del esquema de división única serán precisamente los elementos de la matriz inversa A^{-1}.

Ejemplo 1. Invertir con ayuda del esquema de Gauss la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

△ La resolución se da en la tabla 3.7.

Ahora bien,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/5 & 7/15 & 1/15 & -7/15 \\ 2/5 & -1/5 & -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 2. Invertir la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}47 & -0{,}11 & 0{,}55 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}35 & 0{,}17 \\ -0{,}25 & 0{,}67 & 1{,}00 & 0{,}36 \\ 0{,}54 & -0{,}32 & -0{,}74 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Tabla 3.7

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ_1	Σ_2
$\boxed{1}$	0	1	2	1	0	0	0	5	
−1	2	3	1	0	1	0	0	0	
4	0	−2	1	0	0	1	0	4	
0	2	1	2	0	0	0	1	6	
1	0	1	2	1	0	0	0	5	5
	$\boxed{2}$	4	3	1	1	0	0	11	11
	0	−6	−7	−4	0	1	0	−16	−16
	2	1	2	0	0	0	1	6	6
	1	2	3/2	1/2	1/2	0	0	11/2	11/2
		$\boxed{-6}$	−7	−4	0	1	0	−16	−16
		3	−7	−1	−1	0	1	−5	−5
		1	7/6	4/6	0	−1/6	0	16/6	16/6
			$\boxed{5/2}$	1	−1	−1/2	1	3	3
			1	2/5	−2/5	−1/5	2/5	6/5	6/5
			1	2/5	−2/5	−1/5	2/5	6/5	6/5
		1		1/5	7/15	1/15	−7/15	19/15	19/15
	1			−1/2	1/6	1/6	1/3	7/6	7/6
1				0	1/3	1/3	−1/3	4/3	4/3

con ayuda del esquema de Gauss; llevar a cabo todos los cálculos con cuatro cifras decimales. Redondear la respuesta hasta cifras decimales

△ La resolución se da en la tabla 3.8.

Por consiguiente,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1{,}9759 & -1{,}2017 & -0{,}0120 & -0{,}8781 \\ -1{,}2883 & 2{,}1003 & -0{,}4869 & 0{,}5268 \\ 1{,}4921 & -1{,}7239 & 1{,}0873 & -0{,}9189 \\ -0{,}3750 & 0{,}0453 & 0{,}6553 & 0{,}9626 \end{bmatrix}\approx$$

$$\approx\begin{bmatrix} 1{,}976 & -1{,}202 & -0{,}012 & -0{,}878 \\ -1{,}288 & 2{,}100 & -0{,}487 & 0{,}527 \\ 1{,}492 & -1{,}724 & 1{,}087 & -0{,}919 \\ -0{,}375 & 0{,}045 & 0{,}655 & 0{,}963 \end{bmatrix}\quad\blacktriangle$$

Tabla 3.8

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j=1$
$\boxed{1,00}$	0,47	−0,11	0,55	1
0,42	1,00	0,35	0,17	0
−0,25	0,67	1,00	0,36	0
0,54	−0,32	−0,74	1,00	0
1	0,47	−0,11	0,55	1
	$\boxed{0,8026}$	0,3962	−0,0610	−0,4200
	0,7875	0,9725	0,4975	0,2500
	−0,5738	−0,6806	0,7030	−0,5400
	1	0,4936	−0,0760	−0,5233
		$\boxed{0,5838}$	0,5573	0,6624
		−0,3974	0,6594	−0,8403
		1	0,9546	1,1341
			$\boxed{1,0388}$	−0,3896
			1	−0,3750
			1	$x_{41}=-0,3750$
		1		$x_{31}=1,4921$
	1			$x_{21}=-1,2883$
1				$x_{11}=1,9759$
0	0	0	2,91	
1	0	0	2,94	
0	1	0	2,78	
0	0	1	1,48	
0	0	0	2,91	2,91
1	0	0	1,7178	1,7178
0	1	0	3,5075	3,5075
0	0	1	−0,0914	−0,0914
1,2460	0	0	2,1403	2,1403
−0,9812	1	0	1,8220	1,8220
0,7150	0	1	1,1367	1,1367

$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ_1	Σ_2
$-1,6807$	$1,7129$	0	$3,1209$	$3,1209$
$0,0471$	$0,6807$	1	$2,3770$	$2,3770$
$0,0453$	$0,6553$	$0,9626$	$2,2882$	$2,2882$
$x_{42}=\ 0,0453$ $x_{32}=-1,7239$ $x_{22}=\ 2,1003$ $x_{12}=-1,2017$	$x_{43}=\ 0,6553$ $x_{33}=\ 1,0873$ $x_{23}=-0,4869$ $x_{13}=-0,0120$	$x_{44}=\ 0,9626$ $x_{34}=-0,9189$ $x_{24}=\ 0,5268$ $x_{14}=-0,8781$	$2,2882$ $0,9366$ $1,8519$ $0,8841$	$2,2882$ $0,9366$ $1,8519$ $0,8841$

§ 3.9. Método de elementos principales

Supongamos que se da un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q + \ldots\ a_{pn}x_n = a_{p,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nq}x_q + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Compongamos la matriz ampliada del sistema (1):

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1q} \ldots a_{1n}a_{1,n+1} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \ldots a_{2q} \ldots a_{2n}a_{2,n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}a_{p2}a_{p3} \ldots \boxed{a_{pq}} \ldots a_{pn}a_{p,n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3} \ldots a_{nq} \ldots a_{nn}a_{n,n+1} \end{bmatrix}.$$

Elijamos un elemento no nulo a_{pq} de la matriz $\bar{A}$ el cual sea máximo en módulo y no forme parte de la columna de los términos independientes. Este elemento se llama *principal*. Luego calculemos los factores $m_i = -a_{iq}/a_{pq}$ para todas las filas con números $i \neq p$ (la p-ésima fila que contiene el elemento principal se denomina *principal*).

Luego adicionemos a cada i-ésima fila no principal la fila principal multiplicada por el factor m_i correspondiente para esta fila.

Por ejemplo:

$$b_{11}^{(1)}=a_{11}-a_{p1}\frac{a_{1q}}{a_{pq}};$$

$$b_{n2}^{(1)}=a_{n2}-a_{p2}\frac{a_{nq}}{a_{pq}}, \text{ etc.}$$

Como resultado obtenemos una nueva matriz en la cual todos los elementos de la q-ésima columna, salvo a_{pq}, se componen de ceros:

$$a_{1q}-a_{pq}\frac{a_{1q}}{a_{pq}}=0,$$
$$a_{2q}-a_{pq}\frac{a_{2q}}{a_{pq}}=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{nq}-a_{pq}\frac{a_{nq}}{a_{pq}}=0.$$

Suprimiendo esta columna y la p-ésima fila principal, obtenemos una nueva matriz $B^{(1)}$ en la cual el número de filas y columnas es en una unidad menor. Repetimos las mismas operaciones con la matriz $B^{(1)}$ después de lo cual obtenemos la matriz $B^{(2)}$, etc.

Ahora bien, vamos a construir la sucesión de las matrices $\bar{A}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, . . ., $B^{(n-1)}$ la última de las cuales es una matriz fila (fila principal) de dos términos. Para determinar las incógnitas x_i reunimos en el sistema todas las filas principales comenzando con la última.

El método expuesto de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas se denomina **método de elementos principales**. La condición indispensable de su aplicación consiste en que $\det A \neq 0$.

Ejemplo 1. Haciendo uso del método de elementos principales resolver el sistema

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\ 2x_1+5x_2+x_3=-3,\\ 2x_1+x_2+3x_3=11.\end{cases}$$

$\triangle$ 1) Componemos la matriz ampliada $\bar{A}$ del sistema dado, hallamos el elemento principal y calculamos el factor m_i:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 2 & \boxed{5} & 1 & -3\\ 2 & 1 & 3 & 11\end{bmatrix};$$

$a_{22}=5$ es elemento principal; $m_1=-2/5$; $m_3=-1/5$.

2) Escribimos la matriz $B^{(1)}$. Tenemos

$$b_{11}^{(1)}=3-2\cdot\frac{2}{5}=\frac{11}{5};$$

$$b_{12}^{(1)}=1-1\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{5};$$

$$b_{13}^{(1)}=5+3\cdot\frac{2}{5}=\frac{31}{5};$$

$$b_{21}^{(1)}=2-2\cdot\frac{1}{5}=\frac{8}{5};\quad b_{22}^{(1)}=3-1\cdot\frac{1}{5}=\frac{14}{5};$$

$$b_{23}^{(1)}=11+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{58}{5};$$

$$B^{(1)}=\begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 & 31/5 \\ 8/5 & \boxed{14/5} & 58/5 \end{bmatrix}.$$

Aquí $b_{22}^{(1)}=14/5$ es el elemento principal; $m_1=-1/14$.

3) Hallamos $B^{(2)}$. Tenemos

$$b_{11}^{(2)}=\frac{11}{5}-\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{14}=\frac{13}{7};\quad b_{12}^{(2)}=\frac{31}{5}-\frac{58}{5}\cdot\frac{3}{14}=\frac{26}{7};$$

$$B^{(2)}=[13/7\ \ 26/7].$$

4) Utilizando las filas principales, llegamos al sistema

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3=-3 \\ (8/5)\,x_1+(14/5)\,x_3=58/5, \quad \text{o bien} \\ (13/7)\,x_1=26/7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3=-3, \\ 4x_1+7x_3=29, \\ 13x_1=26. \end{cases}$$

Con ayuda del paso invertido obtenemos $x_1=2$, $x_3=3$, $x_2=-2$. ▲

El método de Gauss es un caso particular del método de elementos principales si en calidad de elemento principal se elige el elemento superior izquierdo, distinto del cero, de la matriz correspondiente del sistema.

Para resolver los sistemas de ecuaciones lineales con ayuda del método de elementos principales se puede utilizar el esquema dado en la tabla 3.9 (en este esquema los elementos principales, elegidos arbitrariamente para el ejemplo, están encuadrados y las filas principales están numeradas con cifras romanas I a IV).

Ejemplo 2. Haciendo uso del método de elementos principales, resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5. \end{cases}$$

Tabla 3.9

m_i	Columnas de la matriz del sistema				Términos independientes	$\sum$	Filas principales	Matrices
	x_1	x_2	x_3	x_4				
m_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	Σa_{1j}		
	a_{21}	a_{22}	$\boxed{a_{23}}$	a_{24}	a_{25}	Σa_{2j}	II	$\overline{A}$
m_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	Σa_{3j}		
m_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	Σa_{4j}		
$m_3^{(1)}$	$b_{11}^{(1)}$	$\boxed{b_{12}^{(1)}}$		$b_{14}^{(1)}$	$b_{15}^{(1)}$	$\Sigma b_{1j}^{(1)}$		
$m_4^{(1)}$	$b_{31}^{(1)}$	$b_{32}^{(1)}$		$b_{34}^{(1)}$	$b_{35}^{(1)}$	$\Sigma b_{3j}^{(1)}$	I	$B^{(1)}$
	$b_{41}^{(1)}$	$b_{42}^{(1)}$		$b_{44}^{(1)}$	$b_{45}^{(1)}$	$\Sigma b_{4j}^{(1)}$		
$m_4^{(2)}$	$\boxed{b_{31}^{(2)}}$			$b_{34}^{(2)}$	$b_{35}^{(2)}$	$\Sigma b_{3j}^{(2)}$	III	$B^{(2)}$
	$b_{41}^{(2)}$			$b_{44}^{(2)}$	$b_{45}^{(2)}$	$b_{4j}^{(2)}$		
				$\boxed{b_{44}^{(3)}}$	$b_{45}^{(3)}$	$b_{4j}^{(3)}$	IV	$B^{(3)}$

Tabla 3.10

m_i	Columnas de la matriz del sistema				Términos independientes	Σ	Filas principales	Matrices
	x_1	x_2	x_3	x_4				
	1	2	3	$\boxed{4}$	5	15		
−3/4	2	1	2	3	1	9	I	$\overline{A}$
−1/2	3	2	1	2	1	9		
−1/4	4	3	2	1	−5	5		
−1/3	5/4	−1/2	−1/4		−11/4	−9/4		
−2/3	5/2	1	−1/2		−3/2	1	III	$B^{(1)}$
	$\boxed{15/4}$	5/2	5/4		−25/4	5/4		
		$\boxed{-4/3}$	−2/3		−2/3	−8/3		
−1/2		−2/3	−4/3		8/3	2/3	I	$B^{(2)}$
			−1		3	2	IV	$B^{(3)}$

△ La resolución se da en la tabla 3.10.
Así pues, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad -x_3 \qquad = \quad 3, \\ \qquad -(4/3)\,x_2-(2/3)\,x_3 \qquad = -\ 2/3, \\ (15/4)\,x_1+(5/2)\,x_2+(5/4)\,x_3 \qquad = -25/4, \\ \qquad x_1+\quad 2x_2+\quad 3x_3+4x_4= \quad 5, \end{cases}$$

de donde determinamos $x_3 = -3$, $x_2 = 2$, $x_1 = -2$, $x_4 = 3$. ▲

§ 3.10. Esquema de Jaletski

Supongamos que un sistema de ecuaciones lineales se da en la forma matricial

$$Ax = b, \tag{1}$$

donde $A=[a_{ij}]$ es la matriz cuadrada de orden n, y $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} a_{1,\,n+1} \\ a_{2,\,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,\,n+1} \end{bmatrix}$ son los vectores columnas.

Representemos la matriz A en forma del producto de la matriz triangular inferior $C = [c_{ij}]$ y de la matriz triangular superior $B= = [b_{ij}]$ con la diagonal unitaria, o sea

$$A = CB, \tag{2}$$

donde

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

con la particularidad de que los elementos c_{ij} y b_{ij} se determinan con ayuda de las fórmulas (17) y (18) del § 2.6:

$$c_{i1}=c_{i1}, \quad c_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} c_{ik}b_{kj} \text{ para } 1<j\leqslant i, \tag{3}$$

$$b_{ij}=\frac{a_{1j}}{c_{11}}, \quad b_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} c_{ik}b_{kj}}{c_{ii}} \text{ para } 1<i<i. \tag{4}$$

La ecuación (1) puede ser escrita en la forma siguiente:

$$C B\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{5}$$

El producto $B\mathbf{x}$ de la matriz B por el vector columna $\mathbf{x}$ es un vector columna que designemos con $\mathbf{y}$:

$$B\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{6}$$

Entonces escribamos la ecuación (5) en la forma

$$C\mathbf{y} = \mathbf{b} \tag{7}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,\,n+1} \\ a_{2,\,n+1} \\ a_{3,\,n+1} \\ \cdots \\ a_{n,\,n+1} \end{bmatrix}. \tag{7'}$$

Aquí los elementos c_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ están conocidos, ya que la matriz A del sistema (1) se considera ya desarrollada en producto de dos matrices triangulares C y B [fórmulas (3) y (4)].

Multiplicando las matrices dadas en el primer miembro de la igualdad (7′), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} c_{11}y_1 &= a_{1,\,n+1}, \\ c_{2}y_1 + c_{22}y_2 &= a_{2,\,n+1}, \\ c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 &= a_{3,\,n+1}, \\ c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + c_{n3}y_3 + \ldots + c_{nn}y_n &= a_{n,\,n+1}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

de donde obtenemos las siguientes fórmulas para determinar las incógnitas:

$$y_1=\frac{a_{1,\,n+1}}{c_{11}}; \quad y_i=\frac{a_{i,\,n+1}-\sum\limits_{k=1}^{j-1} c_{ik}y_k}{c_{ii}}, \quad i>1. \tag{9}$$

Es cómodo calcular las incógnitas y_i junto con los elementos b_{ij}.

Determinados todos los elementos y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ con ayuda de las fórmulas (9), los sustituimos en la ecuación (6):

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Multiplicando, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n = y_1, \\ \qquad x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n = y_2, \\ \qquad\qquad x_3 + \ldots + b_{3n}x_n = y_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad\qquad\qquad x_n = y_n. \end{cases} \tag{10}$$

Puesto que los coeficientes b_{ij} están determinados [véase la fórmula (4)], calculamos los valores de las incógnitas, comenzando con la última, por las fórmulas siguientes:

$$x_n = y_n, \; x_i = y_i - \sum_{k=j+1}^{n} b_{ik}x_k, \quad i < n. \tag{11}$$

Este método ha recibido el nombre de **esquema de Jaletski.** En él se aplica el control ordinario con ayuda de las sumas.

Al resolver los sistemas con ayuda del esquema de Jaletski es cómodo hacer uso de la tabla 3.11 y determinar y_i junto con los coeficientes b_i.

Tabla 3.11

	x_1	x_2	x_3	x_4	Términos independientes	Σ	x_1	x_2	x_3	x_4	Términos independientes	Σ
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	1	2	−1	2	4	8
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	2	3	−1	4	6	14
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	4	5	−3	8	12	26
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	2	3	−2	3	6	12
II	c_{11} 1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	$y_1 = b_{15}$	b_{16}	1 1	2	−1	2	4	8
	c_{21}	c_{22} 1	b_{23}	b_{24}	$y_2 = b_{25}$	b_{26}	2	−1 1	−1	0	2	2
	c_{31}	c_{32}	c_{33} 1	b_{34}	$y_3 = b_{35}$	b_{36}	4	−3	−2 1	0	−1	0
	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44} 1	$y_4 = b_{45}$	b_{46}	2	−1	−1	−1 1	1	2
III	x_1	x_2	x_3	x_4			−1	1	−1	1		

Ejemplo. Utilizando el esquema de Jaletski, resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+\ x_4=\ \ 3, \\ 2x_1-3x_2+\ x_3+5x_4=-3, \\ \ x_1+2x_2\qquad\ \ -4x_4=-3, \\ \ x_1-\ x_2-4x_3+9x_4=\ 22. \end{cases}$$

△ La resolución se da en la tabla 3.11. En la parte I de la tabla escribamos la matriz de los coeficientes, los términos independientes de la misma y las sumas de control.

Luego llenamos la parte II según la regla indicada en el § 2.6, o sea, primero hallamos la primera fila de la matriz C, luego la segunda fila de la matriz B, la segunda columna de la matriz C, la segunda fila de la matriz B, etc.

En la parte III determinamos x_i.

El control corriente se lleva a cabo con ayuda de la columna Σ con la cual se realizan las mismas operaciones que con la columna de los términos independientes.

1) Los elementos de la primera columna de la matriz C los determinamos con ayuda de la fórmula

$$c_{i1}=a_{i1}\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Luego escribimos la primera columna de la parte I en la primera columna de la parte II:

$$c_{11}=a_{11}=1,\ c_{21}=a_{21}=2,\ c_{31}=a_{31}=4,\ \ c_{41}=a_{41}=2.$$

2) Determinamos los elementos de la primera fila de la matriz B con ayuda de la fórmula

$$b_{ij}=a_{1j}/c_{11}\ (j=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6),\ \text{o sea},$$
$$b_{12}=a_{12}/c_{11}=2;\ b_{13}=a_{13}/c_{11}=-1;$$
$$b_{14}=a_{14}/c_{11}=2;\ y_1=b_{15}=a_{15}/c_{11}=4;$$
$$b_{16}=a_{16}/c_{11}=8;\ b_{16}=1+b_{12}+b_{13}+b_{14}+b_{15}=$$
$$=1+2-1+2+4=8.$$

3) Obtenemos los elementos de la segunda columna de la matriz C con ayuda de la fórmula

$$c_{i2}=a_{i2}-c_{i1}b_{12}\ (i=2,\ 3,\ 4),\ \text{o sea},$$
$$c_{22}=a_{22}-c_{21}b_{12}=3-2\cdot 2=-1;$$
$$c_{32}=a_{32}-c_{31}b_{12}=5-4\cdot 2=-3;$$
$$c_{42}=a_{42}-c_{41}b_{12}=3-2\cdot 2=-1.$$

4) Hallamos los elementos de la segunda fila de la matriz B con ayuda de la fórmula

$$b_{2j}=\frac{a_{2j}-c_{21}-b_{1j}}{c_{22}}\ \ (j=3,\ 4,\ 5,\ 6),$$

o sea,

$$b_{23} = \frac{a_{23} - c_{21}b_{13}}{c_{22}} = \frac{-1-2\cdot(-1)}{-1} = -1;$$

$$b_{24} = \frac{a_{24} - c_{21}b_{14}}{c_{22}} = \frac{4-2\cdot 2}{-1} = 0;$$

$$y_2 = b_{25} = \frac{a_{25} - c_{21}b_{15}}{c_{22}} = \frac{6-2\cdot 4}{-1} = 2;$$

$$b_{26} = \frac{a_{26} - c_{21}b_{16}}{c_{22}} = \frac{14-2\cdot 8}{-1} = 2;$$

$$b_{26} = 1 + b_{23} + b_{24} + b_{25} = 1 - 1 + 0 + 2 = 2.$$

5) Encontramos los elementos de la tercera columna de la matriz C con ayuda de la fórmula

$$c_{i3} = a_{i3} - c_{i1}b_{13} = c_{i2}b_{23} \ (i = 3,\ 4),$$

o sea,

$$c_{33} = a_{33} - c_{31}b_{13} - c_{32}b_{23} = 3 - 4\cdot(-1) - (-3)\,(-1) = -2;$$

$$c_{43} = a_{43} - c_{41}b_{13} - c_{42}b_{23} = -2 - 2\cdot(-1) - (-1)\cdot(-1) = 1.$$

6) Determinamos los elementos de la tercera fila de la matriz B con ayuda de la fórmula

$$b_{3j} = \frac{a_{3j} - c_{31}b_{1j} - c_{32}b_{2j}}{c_{33}} \ (j = 4,\ 5,\ 6),$$

o sea,

$$b_{34} = \frac{a_{34} - c_{31}b_{14} - c_{32}b_{24}}{c_{33}} = \frac{8-4\cdot 2-(-3)\cdot 0}{-2} = 0;$$

$$y_3 = b_{35} = \frac{a_{35} - c_{31}b_{15} - c_{32}b_{25}}{c_{33}} = \frac{12-4\cdot 4-(-3)\cdot 2}{-2} = -1;$$

$$b_{36} = \frac{a_{36} - c_{31}b_{16} - c_{32}b_{26}}{c_{33}} = \frac{26-4\cdot 8-(-3)\cdot 2}{-2} = 0;$$

$$b_{36} = 1 + b_{34} + b_{35} = 1 + 0 - 1 = 0.$$

7) Encontramos los elementos de la cuarta columna de la matriz C con ayuda de la fórmula

$$c_{44} = a_{44} - c_{41}b_{14} - c_{42}b_{24} - c_{43}b_{34},$$

o sea,

$$c_{44} = 3 - 2\cdot 2 - (-1)\cdot 0 - 4\cdot 0 = -1.$$

8) Hallamos los elementos de la cuarta fila de la matriz B con ayuda de la fórmula

$$b_{4j} = \frac{a_{4j} - c_{41}b_{1j} - c_{42}b_{2j} - c_{43}b_{3j}}{c_{44}} \ (j = 5,\ 6),$$

o sea,

$$y_4 = b_{45} = \frac{a_{45} - c_{41}b_{15} - c_{42}b_{25} - c_{43}b_{35}}{c_{44}} =$$

$$= \frac{6-2\cdot4-(-1)\cdot2-(-1)(-1)}{-1} = 1;$$

$$b_{46} = \frac{a_{46} - c_{41}b_{16} - c_{42}b_{26} - c_{43}b_{36}}{c_{44}} = \frac{12-2\cdot8-(-1)\cdot2-4\cdot0}{-1} = 2;$$

$$b_{46} = 1 + b_{45} = 1 + 1 = 2.$$

9) Calculamos x_i con ayuda de la fórmula

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}x_k; \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

donde $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = -1$, $y_4 = 1$. Tenemos

$x_4 = y_4 = 1,$

$x_3 = y_3 - b_{34}x_4 = -1 - 0\cdot1 = -1;$

$x_2 = y_2 - b_{23}x_3 - b_{24}x_4 = 2 - (-1)(-1) - 0\cdot1 = 1;$

$x_1 = y_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{14}x_4 = 4 - 2\cdot1 - (-1)(-1) - 2\cdot1 = -1.$

Así pues,

$$x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1;\ x_4 = 1. \ \blacktriangle$$

§ 3.11. Método de iteraciones (método de aproximaciones sucesivas)

Los métodos aproximados de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales permiten obtener los valores de las raíces del sistema con exactitud asignada en forma del límite de la sucesión de ciertos vectores. El proceso de construcción de esta sucesión se denomina proceso *iterativo*.

La efectividad de aplicación de los métodos aproximados depende de la elección del vector inicial y de la rapidez de la convergencia del proceso.

En este párrafo vamos a considerar el **método de iteraciones (método de aproximaciones sucesivas)**. Sea dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Escribamos el sistema (1) en la forma matricial:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad (2)$$

donde

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Suponiendo que los elementos diagonales $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), expresemos x_1 por la primera ecuación del sistema, expresemos x_2 por la segunda ecuación, etc. Como resultado obtenemos un sistema equivalente al sistema (1):

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_{11}}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n; \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \dots - \frac{a_{n,\,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Designemos $b_i/a_{ii} = \beta_i$; $-a_{ij}/a_{ii} = \alpha_{ij}$, donde $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$. Entonces el sistema (3) se escribe del modo siguiente:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_n + \dots + \alpha_{n,\,n-1}x_{n-1}. \end{aligned}\right. \tag{3'}$$

El sistema (3′) se llama sistema reducido *a la forma normal*. Introduciendo las designaciones

$$\alpha=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \ \end{bmatrix},$$

vamos a escribir el sistema (3′) en la forma matricial:

$$\mathbf{x} = \beta + \alpha\mathbf{x},$$

o bien

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Vamos a resolver el sistema (4) con ayuda del método de sucesiones aproximadas. Por aproximación nula tomemos la columna de los términos independientes

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad \text{(la aproximación nula).}$$

Luego vamos a construir las matrices columna

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \quad \text{(la primera aproximación);}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{(la segunda aproximación),}$$

etc.

En general, toda $k+1$-ésima aproximación se calcula con ayuda de la fórmula

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha\mathbf{x}^{(k)} \quad (k = 0,\ 1,\ \dots,\ n). \tag{5}$$

Si la sucesión de aproximaciones $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}^{(1)}$, ..., $\mathbf{x}^{(k)}$ tiene el límite $\mathbf{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}$, este límite es solución del sistema (3), puesto que en virtud de la propiedad del límite

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}, \text{ o sea, } \mathbf{x} = \alpha + \beta\mathbf{x}.$$

Ejemplo 1. Haciendo uso del método de iteraciones, con exactitud hasta 10^{-1} resolver el sistema

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

$\triangle$ 1) Reduzcamos el sistema a la forma normal:

$$\begin{cases} x_1 = 3{,}25 - 0{,}125x_2 - 0{,}125x_3, \\ x_2 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_3, \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2; \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{bmatrix}.$$

2) Construimos las aproximaciones sucesivas. La aproximación nula es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}.$$

La primera aproximación:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{bmatrix}.$$

La segunda aproximación:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{bmatrix}$$

La tercera aproximación:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,99 \\ 1,01 \\ 1,01 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, $x_1 = 2,99$, $x_2 = 1,01$, $x_3 = 1,01$ y con exactitud hasta 10^{-1} obtenemos $x_1 = 3,0$, $x_2 = 1,0$, $x_3 = 1,0$. ▲

Ejemplo 2. Haciendo uso del método de iteraciones, con exactitud hasta 10^{-3} resolver el sistema

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9, \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7, \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4. \end{cases} \qquad (*)$$

△ 1) Reduzcamos el sistema a la forma normal:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1,9}{7,6} - \frac{0,5}{7,6}x_2 - \frac{2,4}{7,6}x_3, \\ x_2 = \frac{9,7}{9,1} - \frac{2,2}{9,1}x_1 - \frac{4,4}{9,1}x_3, \text{ o bien} \\ x_3 = \frac{-1,4}{5,8} + \frac{1,3}{5,8}x_1 - \frac{0,2}{5,8}x_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,25 - 0,065x_2 - 0,3158x_3, \\ x_2 = 1,0659 - 0,2418x_1 - 0,4847x_2, \\ x_3 = -0,2414 + 0,2241x_1 - 0,3448x_2; \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,065 & -0,3158 \\ -0,2418 & 0 & -0,4847 \\ 0,2241 & -0,3448 & 0 \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} 0,25 \\ -1,0659 \\ -0,2414 \end{bmatrix}.$$

Nótese que el sistema lineal puede ser reducido a la forma normal también del modo siguiente: escribir los coeficientes de las x_1, x_2 y x_3 de las ecuaciones correspondientes del sistema (*) en la forma kx, donde k es un número próximo al coeficiente de la incógnita respectiva y por el cual es fácil dividir los coeficientes de las incógnitas y de los términos independientes.

Por ejemplo:

$$10x_1 = 7,6x_1 + 2,4x_1 \text{ (en la primera ecuación)},$$
$$10x_2 = 9,1x_2 + 0,9x_2 \text{ (en la segunda ecuación)},$$
$$10x_3 = 5,8x_3 + 4,2x_3 \text{ (en la tercera ecuación)}.$$

Escribamos el sistema (*) así:

$$\begin{cases} 10x_1 = 1,9 + 2,4x_1 - 0,5x_2 - 2,4x_3, \\ 10x_2 = 9,7 - 2,2x_1 + 0,9x_2 - 4,4x_3, \\ 10x_3 = -1,4 + 1,3x_1 - 0,2x_2 + 4,2x_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,19 + 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3, \\ x_2 = 0,97 - 0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3, \\ x_3 = -0.14 + 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3. \end{cases}$$

La matriz α y el vector β toman la forma

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix}.$$

2) Sucesivamente hallamos

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2207 \\ 1,0771 \\ -0,1935 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2207 \\ 1,0771 \\ -0,1935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2359 \\ 1,1034 \\ -0,2141 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, con la exactitud hasta 10^{-3} obtenemos

$$x_1 = 0,236; \; x_2 = 1,103; \; x_3 = -0,214. \; \blacktriangle$$

§ 3.12. Condiciones de convergencia del proceso iterativo

Supongamos que se da un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{x} = \beta + \alpha\mathbf{x}$ reducido a la forma normal. La condición de convergencia del proceso iterativo consiste en lo siguiente: *si la suma de los módulos de los elementos de las filas o la suma de los módulos de los elementos de las columnas es menor que la unidad, para el sistema dado el proceso de iteración converge a la solución única independientemente de la elección del vector inicial.*

Por consiguiente, la condición de convergencia puede escribirse así:

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ o bien}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ejemplo. Para el sistema

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3, \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2 \end{cases}$$

el proceso iterativo converge, ya que

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$|\alpha_{11}|+|\alpha_{21}|+|\alpha_{31}|=0,2+0,2=0,4<1;$$
$$|\alpha_{12}|+|\alpha_{22}|+|\alpha_{32}|=0,125+0,2=0,325<1;$$
$$|\alpha_{13}|+|\alpha_{23}|+|\alpha_{33}|=0,125+0,2=0,325<1.$$

De un modo análogo se podría verificar el cumplimiento de la condición de convergencia, tomando las sumas de los módulos de los elementos de las filas.

El proceso de iteración converge a ciencia cierta si los elementos de la matriz α satisfacen la desigualdad $|\alpha_{ij}|<1/n$, donde n es la cantidad de incógnitas del sistema dado. En el ejemplo dado $n=3$ y todos los elementos $|\alpha_{ij}|<1/3$.

La convergencia del proceso iterativo está ligada con las normas de la matriz α por las relaciones siguientes. *Si se cumple una de las condiciones*

$$\|\alpha\|_1=\max_i \sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|<1$$

o

$$\|\alpha\|_2=\max_j \sum_{i=1}^{n}|\alpha_{ij}|<1$$

o bien

$$\|\alpha\|_3=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|^2}<1,$$

el proceso de iteración de un sistema lineal converge a la solución única.

Así, en el ejemplo anteriormente considerado

$$\|\alpha\|_2=\text{máx}\,(0,4;\ 0,325;\ 0,325)=0,4<1,$$

o sea, el proceso iterativo converge.

§ 3.13. Estimación del error del proceso aproximado del método de iteraciones

Si se da el error admisible de cálculos ε y $\mathbf{x}_i$ es el vector de los valores exactos de las incógnitas de un sistema lineal, siendo $\mathbf{x}_i^{(k)}$ la k-ésima aproximación de los valores de las incógnitas calculada con ayuda del método de iteración, entonces para estimar el error $\|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_i^{(k)}\|\leqslant\varepsilon$ del método se utiliza la fórmula

$$\|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_i^{(k)}\|\leqslant\frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|}\cdot\|\beta\| \qquad (1)$$

donde $\|\alpha\|$ es una de las tres normas de la matriz α; $\|\beta\|$ es la misma norma del vector β; k, la cantidad de iteraciones necesaria para alcanzar la exactitud deseada. En este caso se supone que las aproximaciones sucesivas $\mathbf{x}_i^{(j)}$ (donde $j=0, 1, \ldots; k$, $i=1, 2, \ldots, n$) se calculan exactamente y en ellas no hay errores de redondeo.

Ejemplo. Mostrar que para el sistema

$$\begin{cases} 9{,}9x_1-1{,}5x_2+2{,}6x_3=0, \\ 0{,}4x_1+13{,}6x_2-4{,}2x_3=8{,}2, \\ 0{,}7x_1+0{,}4x_2+7{,}1x_3=-1{,}3 \end{cases}$$

el proceso iterativo converge y determinar cuántas iteraciones han de cumplirse para hallar las incógnitas con exactitud hasta 10^{-4}.

△ 1) Reduzcamos el sistema a la forma normal

$$\begin{cases} 10x_1=0{,}1x_1+1{,}5x_2-2{,}6x_3, \\ 20x_2=-0{,}4x_1+6{,}4x_2+4{,}2x_3+8{,}2, \\ 10x_3=-0{,}7x_1-0{,}4x_2+2{,}9x_3-1{,}3 \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} x_1=0{,}01x_1+0{,}15x_2-0{,}26x_3 \\ x_2=-0{,}02x_1+0{,}32x_2+0{,}21x_3+0{,}41, \\ x_3=-0{,}07x_1-0{,}04x_2+0{,}29x_3-0{,}13. \end{cases}$$

2) La matriz del sistema

$$\alpha=\begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}15 & -0{,}26 \\ -0{,}02 & 0{,}32 & 0{,}21 \\ -0{,}07 & -0{,}04 & 0{,}29 \end{bmatrix}.$$

Utilizando la norma $\|\alpha\|_2$, obtenemos $\|\alpha\|_2=$ máx $(0{,}1;\ 0{,}51;\ 0{,}76)=0{,}76<1$. Por lo tanto, el proceso iterativo para el sistema dado converge.

3) Tenemos $\beta=\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}41 \\ -0{,}13 \end{bmatrix}$, $\quad \|\beta\|_2=0+0{,}41+0{,}13=0{,}54.$

4) Aplicando la fórmula (1) hallamos

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}\|\leqslant\frac{\|\alpha\|_2^{k+1}\cdot\|\beta\|_2}{1-\|\alpha\|_2}=\frac{0{,}76^{k+1}\cdot 0{,}54}{0{,}46}\leqslant 10^{-4};$$

$$0{,}76^{k+1}\cdot 0{,}54\leqslant 10^{-4}\cdot 0{,}46;\quad 0{,}76^{k+1}\leqslant\frac{10^{-4}\cdot 46}{54};$$

$$(k+1)\log 0{,}76\leqslant\log 46-\log 54-4;$$

$$-(k+1)\cdot 0{,}1192\leqslant 1{,}6628-1{,}7324-2=-4{,}0696;$$

$$(k+1)>\frac{4{,}0696}{0{,}1192}=32{,}9;\quad k>32{,}9;\quad k=33.$$

La estimación teórica de la cantidad de iteraciones necesarias para asegurar la exactitud prefijada resulta prácticamente elevada. ▲

§ 3.14. Método de Seydel. Condiciones de convergencia del proceso de Seydel

El método de Seydel es la modificación del método de aproximaciones sucesivas. Al calcular la $(k+1)$-ésima aproximación de la incógnita x_i $(i > 1)$ en el método de Seydel tienen en cuenta las $(k+1)$-ésimas aproximaciones antes halladas de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$.

Supongamos que se da un sistema lineal reducido a la forma normal:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \ldots + \alpha_{3n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n. \end{array}\right. \tag{1}$$

Elegimos arbitrariamente las aproximaciones lineales de las incógnitas $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ y las sustituimos en la primera ecuación del sistema (1):

$$x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{11}x_1^{(0)} + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \ldots \alpha_{1n}x_n^{(0)};$$

sustituimos la primera aproximación obtenida $x_1^{(1)}$ en la segunda ecuación del sistema (1):

$$x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{22}x_2^{(0)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(0)};$$

sustituimos las primeras aproximaciones obtenidas $x_1^{(1)}$ y $x_2^{(1)}$ en la tercera ecuación del sistema (1):

$$x_3^{(1)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(1)} + \alpha_{32}x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{3n}x_n^{(0)},$$

etc. Por último,

$$x_n^{(1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(1)} + \alpha_{n2}x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)} + \alpha_{nn}x_n^{(0)}.$$

De un modo análogo construimos las iteraciones dos, tres, etc.

Ahora bien, suponiendo que las k-ésimas aproximaciones $x_i^{(k)}$ están conocidas, con ayuda del método de Seydel construimos las $k+1$-ésimas aproximaciones al hacer uso de las fórmulas siguientes:

$$\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j}x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \sum\limits_{j=2}^{n} \alpha_{2j}x_j^{(k)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn}x_n^{(k)}, \end{array} \tag{2}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 1. Haciendo uso del método de Seydel, con precisión hasta 10^{-3}, resolver el sistema

$$\begin{cases} 7,6x_1+0,5x_2+2,4x_3=1,9, \\ 2,2x_1+9,1x_2+4,4x_3=9,7, \\ -1,3x_1+0,2x_2+5,8x_3=-1,4. \end{cases}$$

△ 1) Reduzcamos el sistema a la forma normal:

$$\begin{cases} 10x_1= \quad 1,9+2,4x_1-0,5x_2-2,4x_3, \\ 10x_2= \quad 9,7-2,2x_1+0,9x_2-4,4x_3, \\ 10x_3=-1,4+1,3x_1-0,2x_2+4,2x_3; \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} x_1= \quad 0,19+0,24x_1-0,05x_2-0,24x_3, \\ x_2= \quad 0,97-0,22x_1+0,09x_2-0,44x_3, \\ x_3=-0,14+0,13x_1-0,02x_2+0,42x_3. \end{cases}$$

2) Por aproximaciones nulas tomemos los valores correspondientes de los términos independientes: $x_0^{(1)}=0,19$; $x_2^{(0)}=0,97$; $x_3^{(0)}=$ $=-0,14$.

3) Construimos las iteraciones con ayuda del método de Seydel.

Las primeras aproximaciones:

$$x_1^{(1)}=0,19+0,24\cdot0,19-0,05\cdot0,97-0,24\cdot(-0,14)=0,2207,$$
$$x_2^{(1)}=0,97-0,22\cdot0,2207+0,09\cdot0,97-0,44\cdot(-0,14)=1,0703,$$
$$x_3^{(1)}=-0,14+0,13\cdot0,2207-0,02\cdot1,0703+0,42\cdot(-0,14)= \\ =-0,1915.$$

Las segundas aproximaciones:

$$x_1^{(2)}=0,19+0,24\cdot0,2207-0,05\cdot1,0703-0,24\cdot(-0,1915)= \\ =0,2354,$$
$$x_2^{(2)}=0,97-0,22\cdot0,2354+0,09\cdot1,0703-0,44\,(-0,1915)= \\ =1,0988,$$
$$x_3^{(2)}=-0,14+0,13\cdot0,2354-0,02\cdot1,0988+0,42\cdot(-0,1915)= \\ =-0,2118, \text{ etc.}$$

La resolución de este ejemplo se da en la tabla 3.12. La construcción de las iteraciones termina cuando, con el grado de

Tabla 3.12

Nº de la iteración	x_1	x_2	x_3	Nº de la iteración	x_1	x_2	x_3
0	0,19	0,97	−0,14	5	0,2467	1,1138	−0,2237
1	0,2207	1,0703	−0,1915	6	0,2472	1,1143	−0,2241
2	0,2354	1,0988	−0,2118	7	0,2474	1,1145	−0,2243
3	0,2424	1,1088	−0,2196	8	0,2475	1,1145	−0,2243
4	0,2454	1,1124	−0,2226				

exactitud prefijado, obtenemos iguales valores en dos iteraciones seguidas. En el ejemplo dado són las iteraciones 7 y 8.

La respuesta final: $x_1 \approx 0{,}248$; $x_2 \approx 1{,}114$; $x_3 \approx -0{,}224$. ▲

Para un sistema lineal $\mathbf{x} = \beta + \alpha\mathbf{x}$ el proceso de Seydel, al igual que el de aproximaciones sucesivas, *converge a la única solución en toda elección de la aproximación inicial si al menos una de las normas de la matriz α es menor que la unidad, o sea, si*

$$\|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$$

o

$$\|\alpha\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$$

o bien

$$\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2} < 1.$$

El proceso de Seydel converge a la única solución más rápidamente que el de simple iteración.

Ejemplo 2. Verificar si converge o no el proceso de Seydel para el sistema considerado en el ejemplo 1.

△ 1) Reducido el sistema a la forma normal (véase la pág. 144), obtenemos la matriz

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0{,}24 & -0{,}05 & -0{,}24 \\ -0{,}22 & 0{,}09 & -0{,}44 \\ 0{,}13 & -0{,}02 & 0{,}42 \end{bmatrix}.$$

2) Hallamos $\|\alpha\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_j |\alpha_{ij}| = \max(0{,}53;\ 0{,}75;\ 0{,}57) = 0{,}75 < 1$. Por lo tanto, para el sistema dado el proceso de iteración converge a la única solución, a pesar de que

$$\|\alpha\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| = \max(0{,}59;\ 0{,}16;\ 1{,}1) = 1{,}1 > 1. \ ▲$$

§ 3.15. Estimación del error del proceso de Seydel

Supongamos que se da un sistema lineal $\mathbf{x} = \beta + \alpha\mathbf{x}$. Si $\mathbf{x}_i$ es el valor exacto de las incógnitas del sistema lineal y $\mathbf{x}_i^{(k)}$ es la k-ésima aproximación, calculada con ayuda del método de Seydel, entonces para estimar el error de este método se aplica la fórmula

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_1 \leqslant \frac{\|\alpha\|_1^{(k)}}{1 - \|\alpha\|_1} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_1. \qquad (1)$$

Ejemplo. Calcular cuántas iteraciones han de cumplirse con ayuda del método de Seydel para que con exactitud hasta 10^{-4} se halle la solución del sistema

$$\begin{cases} 9,9x_1 - \ \ 1,5x_2 + 2,6x_3 = 0, \\ 0,4x_1 + 13,6x_2 - 4,2x_3 = 8,2, \\ 0,7x_1 + \ \ 0,4x_2 + 7,1x_3 = -1,3. \end{cases}$$

△ 1) Reduzcamos el sistema a la forma normal (véase la pág. 142):

$$\begin{cases} x_1 = 0,01x_1 + 0,15x_2 - 0,26x_3, \\ x_2 = 0,41 - 0,02x_1 + 0,32x_2 + 0,21x_3, \\ x_3 = -0,13 - 0,07x_1 - 0,04x_2 + 0,29x_3. \end{cases}$$

2) Tomemos por aproximaciones nulas la columna de los términos independientes $x_1^{(0)} = 0$; $x_2^{(0)} = 41$; $x_3^{(0)} = -0,13$ y calculemos las primeras aproximaciones:

$$x_1^{(1)} = 0,01 \cdot 0 + 0,15 \cdot 0,41 - 0,26 \cdot (-0,13) = 0,0953;$$

$$x_2^{(1)} = 0,41 - 0,02 \cdot 0,0953 + 0,32 \cdot 0,41 + 0,21 \cdot (-0,13) = \\ = 0,5120;$$

$$x_3^{(1)} = -0,13 - 0,07 \cdot 0,0953 - 0,04 \cdot 0,5120 + 0,29 \times \\ \times (-0,13) = -0,1948.$$

3) La matriz

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,15 & -0,26 \\ -0,02 & 0,32 & 0,21 \\ -0,07 & -0,04 & 0,29 \end{bmatrix}.$$

Así pues, $\|\alpha\|_1 = \text{máx}\,(0,42;\ 0,55;\ 0,40) = 0,55$. Puesto que

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,41 \\ -0,13 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,0953 \\ 0,5120 \\ -0,1948 \end{bmatrix},$$

tenemos

$$\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,0953 \\ 0,1120 \\ -0,0648 \end{bmatrix}, \text{ o sea, } \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| = 0,1120.$$

4) Con ayuda de la fórmula (1) determinamos k:

$$10^{-4} \leqslant \frac{0,55^k}{0,45} \cdot 0,1120;\ 10^{-4} \cdot 0,45 \leqslant 0,55^k \cdot 0,1120;$$

$$-4 \log 10 + \log 0,45 \leqslant k \log 0,55 + \log 0,1120;$$

$$-4 - 0,3468 \leqslant k(-0,2596 - 0,9508);\quad k \geqslant \frac{4,3468}{1,2104} = 3,59;\ k = 4.$$

De un modo análogo se puede estimar el método de Seydel por la norma $\|\alpha\|_2$. ▲

§ 3.16. Reducción de un sistema de ecuaciones lineales a la forma cómoda para iteraciones

Los procesos de aproximaciones sucesivas y de Seydel para un sistema lineal $\mathbf{x} = \beta + \alpha\mathbf{x}$ convergen a la única solución sin depender de la elección del vector inicial si

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ahora bien, para la convergencia de los procesos iterativos anteriormente mencionados es suficiente que los valores de los elementos α_{ij} de la matriz α, cuando $i \neq j$, sean pequeños en módulo. Esto es equivalente al hecho de que si para un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ los módulos de los coeficientes diagonales de cada ecuación del sistema son más que la suma de los módulos de todos los demás coeficientes (sin tenér en cuenta los términos independientes), los procesos iterativos para este sistema convergen, o sea, si se da un sistema $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, con la particularidad de que $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, para este sistema los procesos de aproximaciones sucesivas y de Seydel convergen.

Realizando las transformaciones lineales, el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede ser sustituido por un tal sistema equivalente $\mathbf{x} = \beta + \alpha\mathbf{x}$ para el cual las condiciones de convergencia estarán cumplidas.

Ejemplo. Reducir a una forma cómoda para iteraciones el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 0{,}9x_1 + 2{,}7x_2 - 3{,}8x_3 = 2{,}4, & \text{(A)} \\ 2{,}5x_1 + 5{,}8x_2 - 0{,}5x_3 = 3{,}5, & \text{(B)} \\ 4{,}5x_1 - 2{,}1x_2 + 3{,}2x_3 = -1{,}2. & \text{(C)} \end{cases}$$

△ 1) Del sistema dado separamos las ecuaciones con los coeficientes cuyos módulos son más que la suma de los módulos de los demás coeficientes del sistema. Cada ecuación separada la escribimos en tal fila del nuevo sistema que el coeficiente mayor en módulo resulte ser diagonal.

En la ecuación (B) el coeficiente de x_2 es mayor en módulo que la suma de los módulos de los demás coeficientes. Tomamos la ecuación (B) por segunda ecuación del sistema nuevo:

$$2{,}5x_1 + 5{,}8x_2 - 0{,}5x_3 = 3{,}5. \qquad \text{(II)}$$

2) De las ecuaciones quedadas no utilizadas del sistema hacemos combinaciones linealmente independientes entre sí. Así, por primera ecuación del nuevo sistema se puede tomar la combinación lineal

(2B) + (A), entonces tenemos

$$9{,}9x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}6x_3 = 0. \qquad \text{(I)}$$

Por tercera ecuación del nuevo sistema se puede tomar la combinación lineal (2A) . . . (B), es decir,

$$0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 + 7{,}1x_3 = -1{,}3. \qquad \text{(III)}$$

3) En resumen obtenemos un sistema transformado de las ecuaciones (I), (II), (III) que es equivalente al inicial y que satisface la condición de convergencia del proceso iterativo:

$$\begin{cases} 9{,}9x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}6x_3 = 0, \\ 2{,}5x_1 + 5{,}8x_2 - 0{,}5x_3 = 3{,}5, \\ 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 + 7{,}1x_3 = -1{,}3. \end{cases}$$

Reduciendo este sistema a la forma normal, tenemos

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}26x_3 \\ x_2 = 0{,}35x_1 - 0{,}21x_2 + 0{,}42x_3 + 0{,}05 \\ x_3 = -0{,}13x_1 - 0{,}07x_2 - 0{,}04x_3 + 0{,}29; \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}15 & -0{,}26 \\ 0{,}35 & -0{,}21 & 0{,}42 \\ -0{,}13 & -0{,}07 & -0{,}04 \end{bmatrix};$$

$$\| \alpha \|_2 = \text{máx}\ (0{,}58;\ 0{,}43;\ 0{,}72) = 0{,}72 < 1.$$

Nos queda por resolver el sistema haciendo uso de uno de los métodos iterativos. ▲

Ejercicios

1. Resolver los sistemas homogéneos de ecuaciones:

a) $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

2. Investigar la compatibilidad y hallar la solución general y una solución particular de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

3. Haciendo uso de las fórmulas de Cramer, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -14; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 11x + 3y - z = 15, \\ 2x + 5y + 5z = -11, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

4. Con ayuda del esquema de Gauss resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1-4x_2 \qquad - x_4=6, \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=-1, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1-x_3-2x_4=-8, \\ x_2+2x_3-x_4=-1, \\ x_1-x_2-x_4=-6, \\ -x_1+3x_2-2x_3=7. \end{cases}$

5. Haciendo uso del esquema de Gauss, resolver con exactitud hasta 0,001 los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 1,14x_1-2,15x_2-5,11x_3=2,05, \\ 0,42x_1-1,13x_2+7,05x_3=0,80, \\ -0,71x_1+0,81x_2-0,02x_3=-1,07; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0,61x+0,71y-0,05z=-0,16, \\ -1,03x-2,05y+0,87z=0,50, \\ 2,5x-3,12y+5,03z=0,95. \end{cases}$

6. Con ayuda del esquema de Gauss calcular los determinantes:

a) $d=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; b) $d=\begin{vmatrix} -1,6 & 5,4 & -7,7 & 3,1 \\ 8,2 & 1,4 & -2,3 & 0,2 \\ 5,3 & -5,9 & 2,7 & -7,9 \\ 0,7 & 1,9 & -8,5 & 4,8 \end{vmatrix}$.

7. Haciendo uso del esquema de Gauss, invertir las matrices siguientes:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

b) $A=\begin{bmatrix} 0,32 & 0,52 & -0,42 & 0,23 \\ 0,44 & -0,25 & 0,36 & -0,51 \\ -1,06 & 0,74 & -0,83 & 0,48 \\ 0,96 & 0,82 & 0,55 & 0,36 \end{bmatrix}$.

Llevar a cabo los cálculos con tres cifras decimales, redondear la respuesta hasta dos cifras decimales.

8. Determinada previamente la cantidad necesaria de iteraciones, por el método de aproximaciones sucesivas resolver con exacti-

tud hasta 0,01 los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{a)}\quad \begin{cases} 8{,}7x_1-3{,}1x_2+1{,}8x_3-2{,}2x_4=-9{,}7, \\ 2{,}1x_1+6{,}7x_2-2{,}2x_3 \qquad\qquad =13{,}1, \\ 3{,}2x_2-1{,}8x_2-9{,}5x_3-1{,}9x_4=6{,}9, \\ 1{,}2x_1+2{,}8x_2-1{,}4x_3-9{,}9x_4=25{,}1; \end{cases}$$

$$\text{b)}\quad \begin{cases} 6{,}1x+0{,}7y-0{,}05z=6{,}97, \\ -1{,}3x-2{,}05y+0{,}87z=0{,}10, \\ 2{,}5x-3{,}12y-5{,}03z=2{,}04. \end{cases}$$

9. Determinada previamente la cantidad necesaria de iteraciones, con ayuda del método de Seydel resolver los sistemas de ecuaciones lineales del ejercicio 8.

10. Para las matrices

$$\text{a)}\ A=\begin{bmatrix} -0{,}3 & 1{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 1{,}6 \\ -1{,}5 & -0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix};\quad \text{b)}\ A=\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}44 & 0{,}81 \\ 0{,}58 & -0{,}29 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}34 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

calcular las normas $\| A \|_1$, $\| A \|_2$ y $\| A \|_3$.

11. Haciendo uso del método de elementos principales, resolver los siguientes sistemas:

$$\text{a)}\quad \begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=-5, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=7, \\ x_1+2x_2 \qquad -4x_4=-1, \\ x_1-x_2-3x_3 \quad +9x_4=-4; \end{cases}$$

$$\text{b)}\quad \begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3-5x_4=7, \\ 7x_1-2x_2-3x_3-2x_4=6, \\ 3x_1-2x_2+5x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=-5. \end{cases}$$

12. Con ayuda del esquema de Jaletski resolver los sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{a)}\quad \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5; \end{cases} \qquad \text{b)}\quad \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+x_2+2x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=4. \end{cases}$$