

Derivación e integración numéricas

§ 8.1. Planteamiento del problema y fórmulas elementales de la derivación numérica

Al resolver muchos problemas prácticos surge la necesidad de obtener los valores de las derivadas de diferentes órdenes de la función f , representada en forma de una tabla o de una expresión analítica compleja. En estos casos es imposible o difícil aplicar directamente los métodos de cálculo diferencial. Entonces se utilizan los métodos aproximados de derivación numérica.

Las expresiones elementales para las derivadas se obtienen como resultado de derivación de las fórmulas de interpolación.

Ahora bien, examinemos el problema siguiente. Sobre la red $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ en los nodos x_i se dan los valores f_i de la función f continuamente derivable $n + 1 + m$ veces. Se necesita calcular la derivada $f^{(m)}(x^*)$, $x^* \in [a, b]$ y estimar el error.

Uno de los métodos posibles de resolver este problema consiste en lo siguiente. Vamos a construir para la función f sobre los nodos x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) el polinomio interpolador con el término residual R_n , así que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \quad (1)$$

Derivemos los miembros primero y segundo de la relación (1) m veces y pongamos $x = x^*$:

$$f^{(m)}(x^*) = P_n^{(m)}(x^*) + R_n^{(m)}(x^*). \quad (2)$$

Para funciones bastante suaves, o sea, para funciones con derivadas restringidas, suficiente cantidad de nodos y suficiente exactitud de los cálculos la magnitud $R_n^{(m)}(x^*)$ es pequeña y $P_n^{(m)}(x^*)$ es una buena aproximación para $f^{(m)}(x^*)$, así que se puede poner

$$f^{(m)}(x^*) \approx P_n^{(m)}(x^*). \quad (3)$$

En los cálculos prácticos la derivación numérica resulta muy sensible a los errores en la información inicial, a la supresión de los términos de la serie y a otras operaciones semejantes. Además, una alta exactitud de interpolación [pequeñez de $R_n(x)$] no garantiza, en absoluto, una alta exactitud de la fórmula de interpolación para las derivadas [pequeñez de $R_n^{(m)}(x)$]. Por eso la derivación numérica ha de aplicarse con cuidado y, por lo general, para pequeños m .

Teniendo en cuenta lo dicho, así como el hecho de que el cálculo de derivadas superiores puede ser reducido al cálculo sucesivo de las

derivadas inferiores, consideremos con más detalles la obtención de las fórmulas de cálculo para f' y f'' en los nodos de una red uniforme. Para obtener las derivadas en los puntos nodales es conveniente utilizar el polinomio interpolador de Stirling y su término residual [véanse las fórmulas (5) y (6) del § 7.8]. Así, derivando el polinomio de Stirling y su término residual respecto a x y suponiendo $x^* = x_0$ ($t^* = 0$), obtenemos las siguientes expresiones para la derivada:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \mu f_0' \pm \frac{M_3}{6} h^2 \quad (k=1), \quad (4)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\mu f_0' - \frac{\mu^2 f_0''}{6} \right) \pm \frac{M_5}{30} h^4 \quad (k=2). \quad (5)$$

Derivando el polinomio de Stirling dos veces respecto a x y calculando el valor de la segunda derivada en el punto $x^* = x_0$, tenemos

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} f_0'' \pm \frac{M_4}{12} h^2 \quad (k=1), \quad (6)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(f_0'' - \frac{1}{12} f_0''' \right) \pm \frac{M_6}{90} h^4 \quad (k=2). \quad (7)$$

Para calcular la derivada exactamente en el centro entre los nodos $x^* = x_0 + \frac{h}{2}$ se emplea el polinomio de Bessel. En este caso las fórmulas correspondientes para la derivada tienen la forma

$$f' \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{h} f_{1/2}' \pm \frac{M_3}{24} h^2 \quad (k=1), \quad (8)$$

$$f' \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{h} \left(f_{1/2}' - \frac{1}{24} f_{1/2}'' \right) \pm \frac{3M_5}{640} h^4 \quad (k=2). \quad (9)$$

Representan interés práctico también las así llamadas fórmulas de derivación unilateral que permiten calcular $f'(x_0)$ por los nodos $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, k, \dots$ o bien $i = 0, -1, \dots, -k, \dots$). Es cómodo construir estas fórmulas con ayuda de los polinomios interpoladores primero y segundo de Newton.

Derivando el primer polinomio de Newton respecto a x y calculando el valor de la derivada en el punto $x = x_0$ ($t = 0$) para $k = 1$ y $k = 2$, obtenemos, respectivamente, las siguientes fórmulas

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \Delta f_0 \pm \frac{1}{2} M_2 h, \quad (10)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 \right) \pm \frac{1}{3} M_3 h^2. \quad (11)$$

Análogamente, derivando el segundo polinomio de Newton, para $k = -1$ y $k = -2$ tenemos, respectivamente,

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \nabla f_0 \pm \frac{1}{2} M_2 h, \quad (12)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\nabla f_0 + \frac{1}{2} \nabla^2 f_0 \right) \pm \frac{1}{3} M_3 h^2. \quad (13)$$

§ 8.2. Particularidades de la derivación numérica

Escribamos una vez más todas las fórmulas de segundo orden, expresando directamente por los valores de la función f_i las diferencias finitas que forman parte de ellas. De las relaciones (4), (6) y (8) del § 8.1 tenemos

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \pm \frac{M_3}{6} h^2, \quad (1)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \pm \frac{M_4}{12} h^2, \quad (2)$$

$$f'\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \frac{f_1 - f_0}{h} \pm \frac{M_3}{24} h^2. \quad (3)$$

Las relaciones (11) y (13) del § 8.1 dan, respectivamente,

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} (-3f_0 + 4f_1 - f_2) \pm \frac{M_3}{3} h^2, \quad (4)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} (3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}) \pm \frac{M_3}{3} h^2. \quad (5)$$

De las fórmulas anteriormente citadas se ve que con la disminución del paso de la red disminuye también el error del método. No obstante, si los valores de la función f_i se dan aproximadamente, por ejemplo con igual error absoluto ε , entonces al utilizar las fórmulas de derivación numérica el error total contendrá un sumando adicional, inversamente proporcional a h^m (m es el orden de la derivada). Por eso es racional disminuir h sólo en determinados límites.

Ilustrando lo dicho, consideremos el segundo miembro de la fórmula (3). Su error total constituye

$$\Delta = \frac{M_3}{24} h^2 + \frac{2\varepsilon}{h}. \quad (6)$$

Igualando $\Delta'(h)$ a cero, obtenemos el punto del extremo de la función $\Delta(h)$:

$$h_0 = 2 \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}} \approx 2,9 \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{M_3}}. \quad (7)$$

Puesto que $\Delta''(h) > 0$, entonces h_0 es el punto del mínimo $\Delta(h)$, con la particularidad de que

$$\Delta(h_0) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{3} M_3 \varepsilon^2} \approx \sqrt[3]{M_3 \varepsilon^2}. \quad (8)$$

Esta relación significa, en particular, que para ningún h se puede garantizar que el error del resultado sea la magnitud $o(\varepsilon^{2/3})$.

Análogamente, de la fórmula (2) para el paso óptimo obtenemos la expresión

$$h_0 = 2 \sqrt[4]{\frac{3\varepsilon}{M_4}} \approx 2,6 \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{M_4}} \quad (9)$$

y de las fórmulas (4) y (5), la expresión

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{6\varepsilon}{M_3}} \approx 1,8 \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{M_3}}. \quad (10)$$

Ahora bien, al calcular las derivadas es necesario determinar previamente el paso óptimo de la tabla inicial de valores f_i .

Ejemplo 1. Calcular $f'(1,6)$ y $f''(1,4)$ para la función $f = \ln x$ representada en forma de la tabla siguiente:

x	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
f	0,1823	0,2626	0,3364	0,4054	0,4700

que contiene los valores f_i con todas las cifras justas en un amplio sentido. Estimar el error del resultado.

Δ Para calcular las derivadas requeridas apliquemos las fórmulas (5) y (2), respectivamente. Entonces, utilizando las igualdades (10) y (9), así como los datos iniciales, obtenemos los valores siguientes para el paso óptimo:

$$h_{01} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 10^{-4}}{0,73}} \approx 0,1 \text{ al calcular } f'(1,6)$$

$$h_{02} = \sqrt[4]{\frac{48 \cdot 10^{-4}}{2,1}} \approx 0,22 \text{ al calcular } f''(1,4).$$

Puesto que los datos tabulares no permiten elegir en calidad de paso 0,22, tomamos por h_2 el número más próximo posible 0,2. Por consiguiente

$$f'(1,6) = \frac{1}{0,2} (3 \cdot 0,4700 - 4 \cdot 0,4054 + 0,3364) = 0,624,$$

con la particularidad de que el error total no supera

$$\Delta = \frac{0,73}{3} \cdot 0,1^2 + \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0,1} = 0,007$$

y

$$f''(1,4) = \frac{1}{0,2^2} (0,4700 - 2 \cdot 0,3364 + 0,1823) = -0,512,$$

con la particularidad de que el error total no supera

$$\Delta = \frac{2,9}{12} \cdot 0,2^2 + \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0,2^2} = 0,02.$$

Las estimaciones mencionadas del error, por ser, como regla, demasiado aumentadas, videntian, a pesar de lo dicho, que la operación de determinación de la segunda derivada es menos fiable que la de determinación de la primera. \blacktriangle

En algunos casos prácticos para determinar la derivada se representa sólo la tabla de valores de la función. Entonces no es posible, evidentemente, estimar el error. Los valores aproximados de las derivadas se calculan directamente con ayuda de una de las fórmulas (4)...(13) del § 8.1 sin tener en cuenta el error.

Ejemplo 2. Calcular $f'(1,3)$ y $f''(1,4)$ para la función $f(x)$ representada en forma de la tabla siguiente:

x	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$y = f(x)$	0,18	0,26	0,34	0,41	0,47

En virtud de las fórmulas (4) y (6) del § 8.1 obtenemos, respectivamente:

$$f'(1,3) = \frac{1}{0,1} \cdot \frac{1}{2} (0,34 - 0,26 + 0,26 - 0,18) = 0,8;$$

$$f''(1,4) = \frac{1}{0,1^2} (0,41 - 0,34 - 0,34 + 0,26) = -1. \quad \blacktriangle$$

§ 8.3. Planteamiento del problemas de integración numérica

Supongamos que se necesita calcular la integral

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Del curso de análisis matemático se sabe que para una función f , continua sobre el segmento $[a, b]$, la integral (1) existe y es igual a la diferencia entre los valores de la primitiva F para la función f en los puntos b y a :

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Sin embargo, en la mayoría aplastante de los problemas prácticos no se logra expresar la primitiva por las funciones elementales. Además, la función f se representa con frecuencia en forma de la tabla de sus valores para determinados valores del argumento. Todo esto da lugar a que se apliquen los métodos aproximados de cálculo de la integral (1), los cuales pueden ser subdivididos, convencionalmente, en analíticos y numéricos. Los primeros consisten, de hecho, en la construcción aproximada de la primitiva y utilización posterior de la fórmula (2). En cambio, los segundos permiten hallar inmediatamente el valor numérico de la integral, basándose en los valores conocidos de la función subintegral (y, a veces, de sus derivadas) en los puntos dados que se llaman *nodos*. En este capítulo examinaremos sólo los métodos numéricos de integración de las funciones. El mismo proceso de determinación numérica de la integral se denomina *cuadratura* y las fórmulas correspondientes, *fórmulas de integración numérica* (fórmulas de cuadratura).

Según sea el método de representación de la función subintegral examinaremos dos casos de integración numérica, diferentes en el sentido de su realización.

Problema I. Sobre el segmento $[a, b]$ en los nodos x_i se dan los valores f_i de cierta función f perteneciente a determinada clase de F . Se necesita calcular aproximadamente la integral (1) y estimar el error del valor obtenido.

Así suelen plantearse el problema de integración numérica en el caso en que la función subintegral esté representada en forma tabular.

Problema II. Sobre el segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ se da en forma de una expresión analítica. Se necesita calcular la integral (1) con el error máximo admisible prefijado ε .

Uno de los métodos posibles de resolver los problemas enunciados se funda en la utilización de diferentes fórmulas de integración numérica que tienen la forma

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \equiv I_n \quad (3)$$

con el término residual conocido $R_n [f] = I - I_n$ o con su estimación.

En el caso general, tanto los puntos nodales x_i como los factores de ponderación (pesos) A_i no se conocen de antemano y se someten a la determinación al deducir cada fórmula concreta de integración numérica (3), basándose en los requisitos que ésta debe reunir.

En realidad, el problema de integración numérica es equivalente a la estimación del valor medio de la función. Efectivamente, el valor medio de la función sobre el segmento $[a, b]$ se determina del modo siguiente:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Por eso

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \bar{f}.$$

A su vez, la determinación del valor medio de la función es un problema estadístico que comprende problemas de muestreo sucesivo y de planificación del experimento. Debido a la dificultad que presenta tal planteamiento de la cuestión, en este capítulo nos limitamos a examinar sólo los métodos clásicos de integración numérica basados en la previa determinación tanto de los puntos nodales, en los cuales debe darse la información sobre la función a integrar, como de la misma información mencionada.

Vamos a pasar ahora a los algoritmos de resolución de los problemas anteriormente enunciados.

Algoritmo de resolución del problema I.

1°. Se elige la fórmula concreta de integración numérica (3) y se calcula I_n . Si los valores de la función f_i se dan aproximada-

mente, se calcula de hecho sólo el valor aproximado de \bar{I}_n para I_n exacto.

2°. Se toma aproximadamente que $I \approx \bar{I}_n$.

3°. Haciendo uso de la expresión concreta para el término residual o de su estimación para la fórmula elegida de integración numérica, se calcula el error del método

$$\Delta_1 = |I - I_n| = |R_n|.$$

4°. Se determina el error de cálculo de I_n :

$$\Delta_2 = |I_n - \bar{I}_n|$$

utilizando los errores de los valores aproximados f_i .

5°. Se halla el error absoluto completo del valor aproximado I_n :

$$\Delta = |I - \bar{I}_n| \leq \Delta_1 + \Delta_2.$$

6°. Se obtiene la solución del problema en la forma

$$I = \bar{I}_n \pm \Delta.$$

Para las funciones bastante suaves, o sea, para las funciones con una variación restringida de las derivadas el error de las fórmulas de integración numérica (3) para grandes bastante n es, por lo general, pequeño. Por eso para una exactitud suficiente de los valores iniciales f_i y para una exactitud suficiente de cálculo de \bar{I}_n se puede esperar que \bar{I}_n será una buena aproximación de I . En estas consideraciones se basa precisamente el algoritmo siguiente.

Algoritmo de resolución del problema II.

1°. Se representa ε en forma de la suma de tres sumandos no negativos:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

donde ε_1 es el error máximo admisible del método; ε_2 , el error máximo admisible de cálculo de \bar{I}_n ; ε_3 , el error máximo admisible de redondeo del resultado.

2°. Se elige n en la fórmula de integración numérica de un modo tal que se cumpla la desigualdad

$$\Delta_1 = |I - I_n| = |R_n| \leq \varepsilon_1.$$

3°. Se calcula f_i con una exactitud tal que al calcular I_n con ayuda de la fórmula (3) se asegure el cumplimiento de la desigualdad

$$\Delta_2 = |I_n - \bar{I}_n| \leq \varepsilon_2.$$

Es evidente que para eso basta con calcular todos los f_i con un error absoluto igual a

$$\frac{\varepsilon}{(b-a) \sum_{i=1}^n |A_i|}.$$

4°. La magnitud \bar{I}_n hallada en el subp. 3° se redondea (si $\varepsilon_3 \neq 0$) con el error máximo admisible ε_3 hasta la magnitud $\bar{\bar{I}}_n$.

5°. Se obtiene la solución del problema en la forma

$$I = \bar{\bar{I}}_n \pm \varepsilon.$$

Según ya hemos dicho, las fórmulas de integración numérica, utilizadas en los algoritmos de ambos problemas, se construyen sobre la base de unos u otros criterios que determinan la posición de los puntos nodales y las magnitudes de los factores de ponderación. De tales criterios pueden servir: la representación de la integral en forma de la suma integral; la aproximación de la función subintegral (por ejemplo, por medio de un polinomio) y la integración sucesiva de la función aproximativa la exigencia de que la fórmula (3) sea absolutamente exacta para una clase determinada de las funciones, etc.

§ 8.4. Fórmulas elementales de integración numérica

Fórmulas de los rectángulos. Como se sabe, la integral definida es, en virtud de su construcción, el límite de las sumas integrales

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max h_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h_i f(\xi_i), \quad (1)$$

cada una de las cuales corresponde a cierta partición D_n : $x_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ del segmento $[a, b]$ y a la colección arbitraria de los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada partición; $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Limitándose por un número finito de sumandos en el segundo miembro de la igualdad (1) y tomando en calidad de colección de ξ_i unos u otros valores del argumento contenidos en los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ se puede obtener diferentes fórmulas de integración aproximada. Así, tomando por colección de ξ_i los valores de los extremos izquierdos o derechos de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, obtenemos, respectivamente, las fórmulas de los rectángulos izquierdos o derechos ($h_i = 1/n = \text{const}$):

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f_i \equiv I_{izq}, \quad (2)$$

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f_i \equiv I_d. \quad (3)$$

Las denominaciones de estas fórmulas proceden de su interpretación geométrica. Si en el plano xOy se construye una curva $y = f(x)$ y se divide el segmento $[a, b]$ en n partes por los puntos x_i de la red D_n , la fórmula de los rectángulos izquierdos dará como valor aproximado de la integral el área total de los rectángulos rayados

en la fig. 8.1, mientras que la fórmula de los rectángulos derechos dará el área total de los rectángulos rayados en la fig. 8.2

Ejemplo 1. Con ayuda de las fórmulas de los rectángulos izquierdos y derechos calcular $\int_1^9 \frac{dx}{x+2}$, suponiendo $n = 4$.

△ Conociendo los límites de integración $a = 1$ y $b = 9$, encontramos el paso $h = (b - a)/n = 2$; entonces de puntos de partición

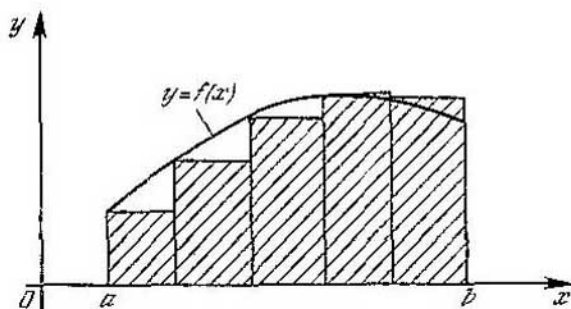


Fig. 8.1

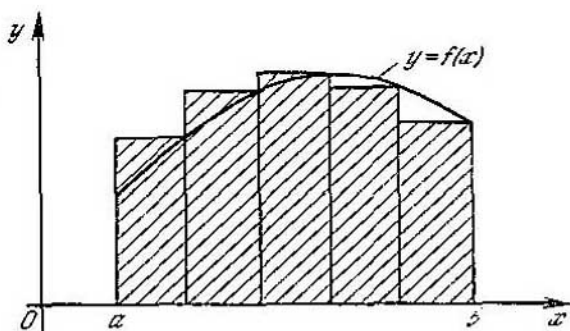


Fig. 8.2

sirven $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 9$ y los valores de la función subintegral $f(x) = 1/(x+2)$ en estos puntos son tales:

$$y_0 = f(x_0) = 1/3; \quad y_1 = f(x_1) = 1/5;$$

$$y_2 = f(x_2) = 1/7; \quad y_3 = f(x_3) = 1/9; \quad y_4 = f(x_4) = 1/11.$$

Luego vamos a determinar el valor numérico de la integral, haciendo uso de la fórmula (2):

$$J_{1201} = \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) \approx 1,6024.$$

En cambio, si el cálculo de la integral definida se realiza con ayuda de la fórmula (3), obtendremos

$$I_a = \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) \approx 1,1053. \blacktriangle$$

La fórmula de uso más frecuente basada en la idea de representación de la integral definida en forma de la suma integral es la de los *rectángulos* donde por ξ_i se toman los centros de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$. Para una red uniforme ($h_i = h$) esta fórmula tiene el aspecto siguiente:

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f_{i-1/2} \equiv I_n, \quad (4)$$

donde $f_{i-1/2} = f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$; $x_0 = a$, $x_n = b$.

Determinemos la expresión para el término residual de la fórmula aproximada (4). Con este fin representemos la integral que entra en el primer miembro de la relación (4) en forma de la suma:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \quad (5)$$

Suponiendo que la función $f(x)$ es dos veces derivable, o sea $f \in C^2[a, b]$, escribamos para la función $f(x)$ sobre cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ la fórmula de Taylor con el término residual en forma de Lagrange:

$$f(x) = f_{i-1/2} + \left(x - x_i + \frac{h}{2}\right) f'_{i-1/2} + \frac{\left(x - x_i + \frac{h}{2}\right)^2}{2} f''(\eta_i);$$

$$\eta_i \in (x_{i-1}, x_i). \quad (6)$$

Sustituyamos en el segundo miembro de la relación (5) en vez de la función f su representación (6) y ejecutemos la integración, utilizando el segundo teorema del valor medio de la función:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_{i-1/2} + \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n f''(\bar{\eta}_i);$$

$$\bar{\eta}_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

En virtud de la continuidad de la segunda derivada existe tal punto $\eta \in (a, b)$ que

$$\sum_{i=1}^n f''(\bar{\eta}_i) = n f''(\eta) = \frac{b-a}{h} f''(\eta).$$

Utilizando esta relación, tenemos definitivamente

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot f_{i-1/2} + \frac{b-a}{h} h^2 f''(\eta). \quad (7)$$

Comparando las fórmulas (4) y (7), obtenemos la expresión para el término residual de la fórmula de integración numérica (4):

$$R_n[f] = I - I_n = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\eta). \quad (8)$$

Así pues, la estimación del error de la fórmula de integración numérica (4) puede ser representada en la forma siguiente:

$$\Delta_1 = \left| \int_a^b f(x) dx - (b-a) \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f_{i-1/2} \right| \leq \frac{b-a}{24} h^2 M_2, \quad (9)$$

donde $M_2 = \max_{[a, b]} |f''(x)|$.

Las expresiones obtenidas para el término residual (8) y para el error (9) muestran que la fórmula (4) es exacta para toda función lineal, puesto que la segunda derivada de tal función es igual a cero y, por consiguiente, el término residual y el error también son iguales a cero.

Mostremos que la estimación obtenida no puede ser mejorada, o sea, que existe una función para la cual el error de cálculo de la integral con ayuda de la fórmula (4) es exactamente igual al segundo miembro de (9). Para esto en calidad de función integrable consideremos $f = x^2$ y apliquemos a ésta la fórmula (4):

$$I_n = (b-a) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{2i-1}{2} h \right)^2.$$

Abriendo paréntesis bajo el signo de la suma y realizando las sumaciones necesarias, obtenemos

$$I_n = \frac{b^3 - a^3}{3} - (b-a) \frac{h^2}{12}.$$

Por otro lado, la integración inmediata de la función x^2 da

$$I = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Planteando la diferencia entre el valor exacto de la integral y su valor aproximado, para el término residual obtenemos la expresión

$$I - I_n = (b-a) \frac{h^2}{12}.$$

Volviendo a la estimación del error (9) y notando que para la función x^2 la segunda derivada (y, por consiguiente, también M_2)

es igual a 2, obtenemos para el error el mismo valor

$$\Delta_1 = (b-a) \frac{h^2}{12},$$

o sea, la estimación del error (9) se alcanza sobre la parábola $y = x^2$. Este resultado puede ser extendido también a una parábola arbitraria en virtud de la linealidad de la operación de integración y en virtud del hecho de que para las funciones lineales la fórmula (4) es exacta.

Es evidente que la estimación (9) no tiene en cuenta los errores relacionados con el cálculo de I_n . El error Δ_1 refleja la diferencia entre la fórmula exacta de Newton — Leibniz y la fórmula aproximada (4), o sea, es el error del método.

Pasemos ahora a examinar la estimación del error del valor aproximado \bar{I}_n . Si los valores de la función, utilizables en la fórmula de integración numérica, han sido obtenidos aproximadamente o si por cualesquiera causas los cálculos no pueden ser realizados con exactitud absoluta, esto da lugar a que aparezca un error de cálculos y errores de redondeo. Supongamos, por ejemplo, que los valores $f_{i-1/2}$ en la fórmula (4) han sido calculados con igual error absoluto ε ; entonces el error total de cálculo \bar{I}_n valdrá

$$\Delta_2 = (b-a) \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \varepsilon = (b-a) \varepsilon. \quad (10)$$

Nótese una particularidad característica de este error: no depende del número de particiones del segmento de integración y es proporcional sólo a su longitud.

Ejemplo 2. Con ayuda de la fórmula de los rectángulos calcular la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, suponiendo $n=4$. Estimar el error del valor aproximado obtenido.

Δ Según los límites de integración y el número de particiones n determinemos el paso: $h = (1-0)/4 = 0,25$. Luego, en virtud de la fórmula (4), tenemos

$$I_4 = 0,25 \left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right].$$

Calculando los valores necesarios de la función con tres cifras justas en sentido estrecho ($\varepsilon = 0,0005$), obtenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,25 (0,889 + 0,727 + 0,615 + 0,533) = 0,691.$$

Estimemos el error del método con ayuda de la fórmula (9) para lo cual encontramos previamente el máximo del valor absoluto de la

segunda derivada de la función subintegral:

$$M_2 = \max_{[0, 1]} \left| \left(\frac{1}{1+x} \right)'' \right| = \max_{[0, 1]} \frac{2}{(1+x)^3} = 2.$$

Así pues, el error del método vale

$$\Delta_1 \leq (1/24) \cdot 0,25^2 \cdot 2 \approx 0,0053.$$

Haciendo uso de la fórmula (10), hallamos el error de cálculo

$$\Delta_2 \leq 1 \cdot 0,0005 = 0,0005.$$

Por lo tanto, como error total del valor aproximado de la integral se puede tomar $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 0,006$ y escribir la respuesta definitiva en la forma

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,691 \pm 0,006.$$

Para comparar citeamos algunas cifras del valor exacto de la integral calculada: $\ln 2 = 0,693147 \dots$ ▲

Ejemplo 3. Con ayuda de la fórmula de los rectángulos calcular la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ con exactitud de hasta 0,001.

△ Empleando el algoritmo de resolución del problema II dado en el § 8.3, representemos el error total en forma de la suma de tres sumandos: $0,001 = 0,0009 + 0,00005 + 0,00005$. Luego elegimos n a partir de la condición

$$\Delta_1 = \frac{b-a}{24} h^2 M_2 = \frac{b-a}{24} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 M_2 \leq 0,0009.$$

Resolviendo esta desigualdad respecto a n , para $b - a = 1$ y $M_2 = 2$ obtenemos $n \geq 10$.

Hagamos la tabla de valores de la función $1/(x + 1)$ con cuatro cifras justas en sentido estrecho:

0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
0,9254	0,8696	0,8000	0,7407	0,6897	0,6452	0,6061	0,5714	0,5405	0,5128

Utilizando la fórmula de los rectángulos (4), obtenemos

$$\bar{I}_{10} = 0,1 (0,9254 + 0,8696 + 0,8000 + 0,7407 + 0,6897 + 0,6452 + 0,6061 + 0,5714 + 0,5405 + 0,5128) = 0,69284.$$

Redondeando el resultado obtenido, tenemos $I = 0,6928 \pm \pm 0,001$. ▲

Fórmula de los trapecios. Vamos ahora a examinar otro método de construcción de las fórmulas de integración numérica, relacionado con la aproximación de la función subintegral por medio del polinomio interpolador. Consideremos el caso elemental de aproximación por el polinomio de primer grado con los nodos presentes en los

puntos a y b :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a} [f(b) - f(a)] + (x-a)(x-b) \frac{f''(\bar{\eta})}{2};$$

$$\bar{\eta} \in (a, b).$$

Integrando los miembros segundo y primero de esta igualdad y utilizando el segundo teorema del valor medio de la función al integrar el último sumando del segundo miembro, obtenemos

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta); \quad \eta \in (a, b).$$

Ahora bien, suponiendo que el segmento de integración es pequeño, obtenemos la fórmula de integración numérica llamada *fórmula de los trapecios*:

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \equiv I_2 \quad (11)$$

con el término residual

$$R_2[f] = I - I_2 = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta); \quad \eta \in (a, b). \quad (12)$$

Utilizando la expresión (12) para el término residual, la estimación del error de la fórmula de integración numérica (11) puede ser representada en la forma

$$\Delta_1 = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2, \quad (13)$$

$$\text{donde } M_2 = \max_{[a, b]} |f''(x)|.$$

Las expresiones obtenidas para el término residual (12) y para el error (13) muestran que la fórmula de integración numérica (11) es exacta para todas las funciones lineales, puesto que la segunda derivada de tales funciones es igual a cero y, por consiguiente, son iguales a cero el término residual y el error.

De un modo análogo a como se ha hecho para la estimación (9) podemos mostrar que la estimación (13) también es inmejorable, puesto que se alcanza sobre una parábola arbitraria.

Cuando el cálculo se hace con ayuda de la fórmula (11), la estimación del error de cálculo para el caso en que los valores de la función están determinados con igual exactitud ε tiene la forma

$$\Delta_2 \leq \frac{b-a}{2} (\varepsilon + \varepsilon) = (b-a) \varepsilon. \quad (14)$$

Nótese que los errores de cálculo de las fórmulas de integración numérica (11) y (4) son iguales.

Ejemplo 4. Con ayuda de la fórmula de los trapecios calcular la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Estimar el error del valor aproximado obtenido.

△ En virtud de la fórmula (11) tenemos

$$I_2 = 0,5 [f(0) + f(1)].$$

Calculando los valores necesarios de la función, obtenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,5 (1 + 0,5) = 0,75.$$

Estimemos el error del método con ayuda de la fórmula (13), utilizando el valor $M = 2$, obtenido en el ejemplo 2

$$\Delta_1 \leq \frac{1^3}{12} \cdot 2 \approx 0,17.$$

Es evidente que el error de cálculo es igual a cero, ya que los valores de la función e I_2 están determinados con exactitud absoluta.

Así pues, finalmente tenemos $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,75 + 0,17$. ▲

Nótese que en el ejemplo 4 hemos obtenido una solución menos exacta que en el ejemplo 2. Sin embargo, no se debe sacar conclusiones apresuradas, ya que la utilización de la fórmula de los trapecios en el ejemplo 4 tiene también algunas ventajas. En primer lugar, si la función subintegral está representada en forma de una tabla de los valores que ella tiene en los nodos x_i , para utilizar la fórmula de los rectángulos es necesario determinar los valores que esta función tiene, además, en los puntos $x_i \pm h/2$, lo que origina dificultades adicionales e introduce un error adicional. En segundo lugar, en el ejemplo 4 los valores de la función subintegral han sido calculados sólo en dos puntos, mientras que en el ejemplo 2 este cálculo ha sido realizado en cuatro puntos, lo que, desde luego, ha exigido un mayor tiempo.

Los razonamientos citados muestran que la validez de la fórmula de integración numérica se determina no sólo por la forma de su término residual (o del error) sino también por otros factores, por ejemplo por el tiempo de cálculo.

Otros tipos de fórmulas de integración numérica. Consideremos un método más de construir las fórmulas de integración numérica, por medio del cual la integral se representa como combinación lineal de los valores que la función subintegral y sus derivadas tienen en algunos nodos x_i , con la determinación sucesiva de los coeficientes desconocidos (de los factores de ponderación).

Supongamos, por ejemplo, que construimos la fórmula de integración numérica que tiene el aspecto siguiente:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) [A_1 f(a) + A_2 f(b) + A_3 f'(a) + A_4 f'(b)]. \quad (15)$$

Determinemos los factores de ponderación A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) de manera que la fórmula (15) sea exacta para polinomios arbitrarios de grado nulo, primero, segundo y tercero. Puesto que las operaciones de integración y derivación son lineales, esta condición será cumplida siempre que ella se cumpla para los polinomios $1, x, x^2, x^3$.

Sustituyendo estos polinomios en vez de $f(x)$ en la relación (15), a condición de que ésta se cumpla exactamente obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales respecto a A_i :

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ aA_1 + bA_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2}(a+b), \\ a^2A_1 + b^2A_2 + 2aA_3 + 2bA_4 = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2), \\ a^3A_1 + b^3A_2 + 3a^2A_3 + 3b^2A_4 = \frac{1}{4}(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3). \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, encontramos

$$A_1 = A_2 = 1/2; \quad A_3 = -A_4 = (b-a)/12.$$

Ahora bien, la fórmula buscada de integración numérica tiene el aspecto

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + (b-a) \frac{f'(a)-f'(b)}{12} \right] \equiv I_4. \quad (16)$$

Hallemos la expresión para el término residual de esta fórmula. Representemos la función integrable en forma de la suma del polinomio interpolador de Hermite de tercer grado con dos nodos dobles a y b y del término residual, y luego integremos los miembros segundo y primero de esta representación sobre el segmento $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b H_3(x) dx + \int_a^b \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4!} f^{IV}(\bar{\eta}) dx; \quad \bar{\eta} \in (a, b).$$

El primer sumando del segundo miembro da el segundo miembro de la fórmula de integración numérica (16) en virtud del hecho de que esta fórmula es exacta para todos los polinomios de tercer grado y, por consiguiente, también para el polinomio de Hermite $H_3(x)$. El segundo sumando del segundo miembro da la expresión para el término residual de la fórmula (16). Utilizando el segundo teorema

del valor medio de la función y cumpliendo la integración, obtenemos

$$R_4 |f| = I - I_4 = \frac{(b-a)^5}{720} f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (a, b). \quad (17)$$

La expresión obtenida para el término residual permite escribir la estimación del error de la fórmula de integración numérica (16) así:

$$\Delta_1 = |I - I_4| \leq \frac{(b-a)^5}{720} M_4, \quad (18)$$

$$\text{donde } M_4 = \max_{[a, b]} |f^{IV}(x)|.$$

La estimación (18) es inmejorable, ya que se alcanza con el polinomio arbitrario de cuarto grado lo que no es difícil demostrar de un modo análogo a como se ha hecho para la estimación (9).

Para estimar el error de cálculo del resultado obtenido con ayuda de la fórmula (16) supongamos que los valores de la función se dan con exactitud ε_1 y los valores de las derivadas, con exactitud ε_2 . Entonces el error de cálculo vale

$$\Delta_2 \leq (b-a) \varepsilon_1 + \frac{(b-a)^2}{6} \varepsilon_2. \quad (19)$$

Ejemplo 5. Con ayuda de la fórmula de integración numérica (16) calcular la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Estimar el error del valor aproximado obtenido.

Δ Calculando los valores necesarios de la función subintegral y de sus derivadas con ayuda de la fórmula (16), encontramos

$$I_4 = 1 \cdot \left(\frac{1+0,5}{2} \quad 1 \cdot \frac{-1+0,25}{12} \right) = 0,6875.$$

Haciendo uso de la fórmula (18) estimemos el error del método, para lo cual determinemos previamente el máximo del valor absoluto de la cuarta derivada de la función subintegral $M_4 = 24$:

$$\Delta_1 \leq \frac{1^5}{720} \cdot 24 \approx 0,034$$

El error de cálculo es, evidentemente, igual a cero, ya que los valores de la función y de las derivadas están calculados con exactitud absoluta.

Ahora bien, redondeando los valores aproximados de la integral y del error, finalmente obtenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,69 + 0,004 \quad \blacktriangle$$

Hasta ahora en todas las fórmula de integración numérica examinadas los nodos de cuadratura estaban fijados de antemano. Va-

mos a considerar ahora el caso cuando la posición de todos los nodos, así como todos los factores de ponderación se suponen parámetros libres. Para que los cálculos sucesivos no sean demasiado complicados, pero al mismo tiempo no completamente triviales, buscaremos el valor de la integral en la forma

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) [A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)]. \quad (20)$$

Con el fin de determinar los cuatro parámetros libres A_1 , A_2 , x_1 y x_2 exijamos que la fórmula (20) sea absolutamente exacta para todos los polinomios de grados nulo, primero, segundo y tercero. Puesto que la operación de integración y el segundo miembro de la relación (20) son lineales, con el fin de que la fórmula de integración numérica (20) sea exacta para todos los polinomios de tercer grado es necesario y suficiente que sea exacta para las funciones 1 , x , x^2 , x^3 . Por consiguiente, han de cumplirse las relaciones

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ x_1 A_1 + x_2 A_2 = \frac{1}{2}(a+b), \\ x_1^2 A_1 + x_2^2 A_2 = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2), \\ x_1^3 A_1 + x_2^3 A_2 = \frac{1}{4}(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3), \end{cases}$$

que son un sistema no lineal de ecuaciones respecto a los parámetros a determinar x_1 , x_2 , A_1 , A_2 .

La solución de este sistema es así:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = \frac{1}{2}, \\ x_1 = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Así pues, la fórmula de integración numérica (20) toma el aspecto siguiente:

$$\begin{aligned} I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \right. \\ \left. + f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] \equiv I_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Las fórmulas de tal tipo, cuando no sólo los factores de ponderación sino también los nodos no se fijan de antemano, se llaman *fórmulas gaussianas*.

Determinemos la expresión para el término residual de la fórmula (22). Para esto representemos la función integrable en forma de la su-

ma del polinomio interpolador de Hermite de tercer grado con dos nodos dobles x_1 y x_2 , que se determinan por las relaciones (21), y del término residual. Integrando los miembros segundo y primero de esta representación sobre el segmento $[a, b]$, obtenemos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b H_3(x) dx + \int_a^b \frac{(x-x_1)^2 (x-x_2)^2}{4!} f(\bar{\eta}) dx; \quad \bar{\eta} \in (a, b)$$

El primer sumando del segundo miembro dará el segundo miembro de la fórmula de integración numérica (22), puesto que esta fórmula es exacta para todos los polinomios de tercer grado y, por consiguiente, también para $H_3(x)$. El segundo sumando del segundo miembro dará el término residual de la fórmula (22). Utilizando el segundo teorema del valor medio de la función y ejecutando la integración, tenemos

$$R_2[f] = I - I_2 = \frac{(b-a)^6}{4320} f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (a, b). \quad (23)$$

Por lo tanto, la estimación del error se expresa por la relación

$$\Delta_1 = |I - I_2| \leq \frac{(b-a)^6}{4320} M_4, \quad (24)$$

$$\text{donde } M_4 = \max_{[a, b]} |f^{IV}(x)|.$$

La estimación obtenida es inmejorable, ya que se alcanza sobre un polinomio arbitrario de segundo grado, lo que no es difícil mostrar por los cálculos directos como lo hemos hecho para la estimación (9).

Si en la fórmula (22) los valores de los nodos están determinados con exactitud práctica y los valores de la función, con el error absoluto ε , entonces para el error de cálculo al utilizar la fórmula (2) obtendremos la misma expresión que para el error de cálculo al utilizar las fórmulas (4) y (11).

$$\Delta_2 \leq (b-a) \varepsilon. \quad (25)$$

Ejemplo 6. Con ayuda de la fórmula de integración numérica (22) calcular la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Estimar el error del valor aproximado obtenido.

Δ Ante todo determinemos los nodos de la fórmula de integración numérica:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1,2113249 \dots;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0,7886751 \dots$$

Ahora, calculados los valores necesarios de la función integrable con exactitud hasta tres cifras justas en sentido estrecho, hagamos uso de la fórmula (22):

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{2} (0,826 + 0,559) = 0,6925.$$

Vamos a estimar el error del método con ayuda de la fórmula (24), para lo cual utilizamos el valor máximo absoluto de la derivada cuarta $M_4 = 24$, valor hallado en el ejemplo 3:

$$\Delta_1 \leq \frac{1^5}{4320} \cdot 24 \approx 0,0056.$$

El error de cálculo puede ser hallado con ayuda de la fórmula (24), teniendo en cuenta que la exactitud de cálculo de los valores de la función integrable es igual a 0,0005.

Ahora bien, el error total es $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 0,0061$.

Por último, redondeando el valor aproximado de la integral, finalmente tenemos $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,692 \pm 0,007$. ▲

El objetivo principal del presente párrafo consiste en mostrar, citando ejemplos sencillos, cómo se deducen las diferentes fórmulas de integración numérica. Claro está que hemos considerado no todos los métodos de construcción de las fórmulas. Al mismo tiempo los ejemplos citados son característicos, así que, utilizándolos, se puede construir una fórmula concreta de integración numérica que sea la que más corresponde al problema práctico dado.

§ 8.5. Fórmulas de integración numérica de Newton—Cotes

En este párrafo vamos a considerar las fórmulas de integración numérica que tienen una estructura más complicada. Los métodos de integración numérica examinados hasta ahora eran los de interpolación, incluyendo, en cierto sentido, también las fórmulas de los rectángulos. Esto quiere decir que la función subintegral se aproximaba por medio del polinomio interpolador. Si la función integrable es bastante suave y el segmento de integración es finito, se pueden obtener resultados buenos. Por otro lado, es difícil suponer que se alcance una buena aproximación de la función integrable si la misma función o sus derivadas de bajos órdenes tienen particularidades. En tales casos es conveniente representar la función subintegral como producto de dos factores: $\rho(x)f(x)$ que deben poseer las tres propiedades siguientes. En primer lugar, el factor ponderal $\rho(x)$ debe reflejar todas las peculiaridades de la función integrable. En segundo lugar, los momentos

$$m_k = \int_a^b \rho(x) x^k dx \quad (k=0, 1, \dots), \quad (1)$$

donde $[a, b]$ es el segmento de integración, deben calcularse analíticamente. En tercer lugar, el error de aproximación de la función $f(x)$ por medio del polinomio debe ser pequeño.

Pasemos ahora a construir las propias fórmulas de integración numérica. Vamos a construirlas en la misma forma que antes:

$$I \equiv \int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \equiv I_n. \quad (2)$$

Como ya hemos mencionado, en el caso general la fórmula (2) tiene $2n$ parámetros libres, que son los nodos de la cuadratura x_i y los factores ponderales A_i . Supondremos fijo el número n . La elección de los parámetros libres se determina por los requisitos que debe reunir la fórmula de integración numérica según las condiciones del problema práctico. Tales requisitos pueden ser, por ejemplo, la exactitud máxima posible, de error de cálculo mínimo, la fijación de algunos (y posiblemente de todos) factores ponderales o de los nodos de cuadratura.

Comencemos con un caso relativamente simple cuando los nodos están determinados de antemano y se puede variar sólo con la elección de los factores ponderales A_i . La idea de las cuadraturas de interpolación consiste en lo siguiente. Aproximemos la función f por medio del polinomio interpolador en la forma de Lagrange de grado $n-1$ respecto de n nodos diferentes x_i :

$$f(x) = L_{n-1}(x) + R_{n-1}(x).$$

Integremos los miembros segundo y primero de esta igualdad sobre el segmento $[a, b]$, multiplicándolos previamente por la función ponderante $\rho(x)$:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) L_{n-1}(x) dx + \int_a^b \rho(x) R_{n-1}(x) dx. \quad (3)$$

Transformemos el primer sumando del segundo miembro de esta relación. Para esto sustituyamos en vez de L_{n-1} su expresión explícita y cambiamos de lugar las operaciones de integración y de sumación:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b \rho(x) \frac{\omega_{n-1}(x)}{(x-x_i) \omega'_{n-1}(x_i)} dx \right) f_i. \quad (4)$$

Aquí $\omega_{n-1}(x) = \prod_{h=1}^n (x - x_h)$. El primero de los factores que entran bajo el signo de suma es el coeficiente numérico que es proporcional a la longitud del segmento de integración y depende sólo de la disposición de los nodos y de las propiedades de la función $\rho(x)$ (pero no de la función f).

Suponiendo ahora que el segundo sumando del segundo miembro de la relación (3) es pequeño, obtenemos la fórmula aproximada de integración numérica (2) con los nodos x_i dados y con los coeficientes A_i que se determinan del modo siguiente:

$$A_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_{n-1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n-1}(x_i)} dx \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

La fórmula de integración numérica (2) construida de este modo se llama *fórmula de interpolación*.

Pasemos a estimar el error de la fórmula (2) con los coeficientes (5). Para esto vamos a integrar el término residual de la fórmula de interpolación $R_{n-1}(x) = \frac{\omega_{n-1}(x)}{n!} f^{(n)}(\bar{\eta})$. Sustituyendo la expresión dada para $R_{n-1}(x)$ en el segundo sumando de la igualdad (3), obtenemos

$$R_{n-1}[f] = I - I_n = \frac{1}{n!} \int_a^b \rho(x) \omega_{n-1}(x) f^{(n)}(\bar{\eta}) dx; \quad \bar{\eta} \in (a, b).$$

Si la función f tiene la derivada continua de orden n sobre el segmento de integración y el producto $\rho(x) \omega_n(x)$ conserva sobre el mismo segmento el propio signo, para el término residual se puede obtener la expresión siguiente:

$$R_{n-1}[f] = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!} \int_a^b \rho(x) \omega_{n-1}(x) dx; \quad \eta \in (a, b). \quad (6)$$

Por consiguiente, la estimación del error de la cuadratura toma la forma:

$$\Delta_1 \leq \frac{M_n}{n!} \left| \int_a^b \rho(x) \omega_{n-1}(x) dx \right|, \quad (7)$$

donde $M_n = \max_{[a, b]} |f^{(n)}(x)|$. Para las condiciones anteriormente indicadas la estimación obtenida es inmejorable.

En cambio, si el producto $\rho(x) \omega_{n-1}(x)$ no conserva el signo sobre el segmento de integración, en este caso se obtiene sólo una estimación muy aproximada del error

$$\Delta_1 \leq \frac{M_n}{n!} \int_a^b |\rho(x) \omega_{n-1}(x)| dx$$

la cual puede estar lejos de la óptima. Por eso en los casos semejantes se utilizan otras consideraciones al construir una expresión explícita

para el término residual y para el error. Examinemos más abajo uno de tales procedimientos al estudiar la fórmula de Simpson.

Ejemplo 1. Construir la fórmula de integración numérica (2) para el segmento $[-1, 1]$ con los nodos $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ y con la función ponderante $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$.

△ En realidad, es necesario determinar los coeficientes A_i ($i = 1, 2, 3$) de la fórmula (2). Utilizando la expresión (5) para los coeficientes buscados, tenemos

$$2A_1 = \int_{-1}^1 \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4};$$

$$2A_2 = \int_{-1}^1 \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2};$$

$$2A_3 = \int_{-1}^1 \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Ahora bien, la fórmula buscada tiene el aspecto

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{4} [f(-1) + 2f(0) + f(1)]. \blacktriangle$$

Ejemplo 2. Construir la fórmula de integración numérica (2) para el segmento $[0, 1]$ con los nodos $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = 1$ y con la función ponderante $\rho(x) = \ln x$.

△ Al igual que en el ejemplo precedente, haciendo uso de la fórmula (5), determinemos los coeficientes:

$$A_1 = \int_0^1 \ln x \frac{(x-0,5)(x-1)}{(0-0,5)(0-1)} dx = -\frac{17}{36};$$

$$A_2 = \int_0^1 \ln x \frac{(x-0)(x-1)}{(0,5-0)(0,5-1)} dx = -\frac{20}{36};$$

$$A_3 = \int_0^1 \ln x \frac{(x-0)(x-0,5)}{(1-0)(1-0,5)} dx = \frac{1}{36}.$$

Así pues,

$$\int_0^1 \ln x f(x) dx \approx -\frac{1}{36} [17f(0) + 20f(0,5) - f(1)]. \blacktriangle$$

Nótese las particularidades características de los ejemplos considerados. En el ejemplo 1 los nodos dispuestos simétricamente y la paridad de la función ponderante respecto al centro del segmento han

conducido a la simetría de los coeficientes de integración numérica. En el ejemplo 2, a pesar de la simetría de los nodos, la simetría de los coeficientes está alterada lo que es consecuencia de la falta de simetría (de paridad) en la función ponderante.

- En los cálculos prácticos representa especial interés el caso cuando los nodos de la fórmula de integración numérica se dan en forma de puntos equidistantes del segmento $[a, b]$: $x_i = a + (i - 1)h$ ($i = 1, 2, \dots, n$) y la función ponderante $\rho(x)$ es idénticamente igual a la unidad. Con tales suposiciones la fórmula (2) puede transformarse así:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^n H_i f_i. \quad (8)$$

Para diferentes n obtenemos diferentes fórmulas de integración numérica de Newton-Cotes. Los coeficientes H_i , llamados *coeficientes de Cotes*, se determinan por la relación (5):

$$H_i = A_i = \frac{(-1)^{n-i}}{(n-1)(i-1)!(n-i)!} \int_1^n \frac{(t-1) \dots (t-n)}{t-i} dt; \quad (9)$$

$$n > 1; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad 0! = 1.$$

Estos coeficientes poseen las siguientes propiedades, útiles para calcularlos.

1°. Los coeficientes simétricos (primero y n -ésimo, segundo y $n-1$, ...) son iguales entre sí:

$$H_i = H_{n+1-i}.$$

□ Reemplacemos en la expresión (9) i por $n+1-i$:

$$H_{n+1-i} = \frac{(-1)^{i-1}}{(n-1)(n-i)!(i-1)!} \int_1^n \frac{(t-1) \dots (t-n)}{i-n-1+i} dt.$$

Pasando bajo el signo integral a una nueva variable $q = n+1-t$ y realizando transformaciones poco complicadas, obtenemos

$$H_{n+1-i} = \frac{(-1)^{n-i}}{(n-1)(n-i)!(i-1)!} \int_1^n \frac{(q-n) \dots (q-1)}{q-i} dq$$

lo que coincide con la expresión (9) para los coeficientes H_i . ■

2°. La suma de todos los coeficientes es igual a la unidad:

$$\sum_{i=1}^n H_i = 1.$$

□ La validez de esta propiedad se deduce inmediatamente de la fórmula (8), si se pone $f(x) = 1$, puesto que el término residual de

esta fórmula, determinado por la expresión (6), es igual a cero cuando $f(x) = 1$. ■

En la tabla 8.1 se dan los valores de los coeficientes de Cotes para $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Tabla 8.1

$n \backslash i$	1	2	3	4	5	6
2	1/2	1/2				
3	1/6	4/6	1/6			
4	1/8	3/8	3/8	1/8		
5	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90	
6	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288

Examinemos con más detalles un importante caso particular de la fórmula de integración numérica (8), el cual se obtiene para $n = 3$. Con el fin de construir esta fórmula se podría utilizar los datos de la tabla 8.1. No obstante, en calidad de ejemplo realicemos los cálculos correspondientes. Aplicando la fórmula (9), obtenemos

$$H_1 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \int_1^3 (t-2)(t-3) dt = \frac{1}{6}.$$

Luego, utilizando las igualdades (10), encontramos

$$H_3 = H_1 = 1/6, H_2 = 1 - (H_1 + H_3) = 2/3.$$

Ahora bien, la fórmula buscada de integración numérica, llamada *fórmula de Simpson*, tiene el aspecto

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \equiv I_3. \quad (11)$$

Esta fórmula en virtud de su construcción (en virtud de la aproximación de la función subintegral (por medio del polinomio de segundo grado) es exacta para todos los polinomios de grados nulo, primero y segundo. Se podría probar a obtener la expresión para el término residual utilizando inmediatamente la relación (6). Sin embargo, la fórmula de Simpson posee la así llamada **propiedad de exactitud elevada** que consiste en que es exacta no sólo para los polinomios de segundo grado sino también para los de tercer grado. En virtud de la linealidad de la operación de integración para demostrar esta afirmación es suficiente establecer la igualdad exacta de los miembros primero y segundo de la fórmula (11) para el polinomio elemental de tercer grado x^3 . En efecto, calculando el primer miembro de la fór-

mula (11) para $f = x^3$, tenemos

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Por otro lado, calculando el segundo miembro de la fórmula (11), obtenemos

$$\frac{b-a}{6} \left[a^3 + 4 \left(\frac{b+a}{2} \right)^3 + b^3 \right] = \frac{b^4 - a^4}{4},$$

lo que se trataba de demostrar.

Hagamos uso de la afirmación demostrada para construir el término residual de la fórmula de Simpson. Representemos la función f como suma del polinomio interpolador de Hermite, con nodos simples a y b y con un nodo doble $(a+b)/2$, y del término residual:

$$f(x) = H_3(x) + (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) (x-b) \frac{f^{IV}(\bar{\eta})}{4!}; \quad \bar{\eta} \in (a, b).$$

Vamos a integrar los miembros segundo y primero de esta igualdad sobre el segmento $[a, b]$. En virtud de lo recién demostrado la integral del polinomio de Hermite dará el segundo miembro de la fórmula (11) y la integral del segundo sumando, el término residual de esta fórmula

$$R_3|f| = I - I_3 = \frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (a, b). \quad (12)$$

Por consiguiente, la estimación del error puede ser escrita en la forma

$$\Delta_1 \leq |I - I_3| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot M_4, \quad (13)$$

donde $M_4 = \max_{[a, b]} |f^{IV}(x)|$. Esta estimación es inmejorable, puesto que se alcanza, por ejemplo, en la función $f = x^4$.

Ejemplo 3. Con ayuda de la fórmula de Simpson calcular la

integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Estimar el error del valor aproximado obtenido.

Δ Calculando los valores necesarios de la función subintegral en los puntos $x_1 = 0$, $x_2 = 0,5$ y $x_3 = 1$, los sustituimos en la fórmula (11):

$$I_3 = \frac{1}{6} (1 + 4 \cdot 0,667 + 0,5) = 0,6947.$$

Teniendo en cuenta que $M_4 = \max_{[0, 1]} \left| \left(\frac{1}{1+x} \right)^{IV} \right| = 24$ y utilizando la fórmula (13), para el error del método obtenemos $\Delta_1 \leq 0,0084$.

Hallamos el error de cálculo

$$\Delta_2 \leq \frac{1}{6} \cdot (0 + 4 \cdot 0,0005 + 0) = 0,00034.$$

Sumando los errores y redondeando el resultado, finalmente

obtenemos $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,695 \pm 0,01. \blacktriangle$

La propiedad de exactitud elevada, descrita anteriormente, la poseen todas las fórmulas de integración numérica del tipo (8) construidas con un número impar de nodos. Esta propiedad es consecuencia directa de la «simetría» de la cuadratura, o sea, de la igualdad de los coeficientes simétricos $H_i = H_{n+1-i}$ y consecuencia directa de la linealidad de las operaciones de cálculo de los valores de la función y de las de integración. Para obtener una estimación precisada del término residual de tal fórmula es necesario aproximar la función subintegral por el polinomio interpolador de Hermite con doble nodo central.

Retornando a la fórmula de integración numérica (2), se puede afirmar que para los coeficientes simétricos ($A_i = A_{n+1-i}$) y para la función ponderante par esta cuadratura construida sobre $2k + 1$ nodos es exacta para todos los polinomios de grado $2k + 1$, puesto que es exacta para toda función f que sea impar respecto al centro del segmento de integración. En efecto, por un lado, para tales funciones

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = 0 \text{ y por el otro, } \sum_{i=1}^{2k+1} A_i f_i = 0 \text{ en virtud de la simetría de } A_i \text{ y de la imparidad de } f.$$

Ejemplo 4. Utilizando la fórmula de integración numérica construida en el ejemplo 1, calcular la integral $\int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ y estimar el error.

Δ Calculamos los valores necesarios de la función $f = \cos x$: $\cos(-1) = 0,540$; $\cos 0 = 1$; $\cos 1 = 0,540$. Sustituyendo estos valores en la fórmula de integración numérica, tenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{4} (0,540 + 2 \cdot 1 + 0,540) = 2,419.$$

Ahora encontramos la expresión para el término residual de la fórmula de integración numérica escrita en el ejemplo 1. Puesto que la función ponderante es par y los nodos son de disposición simétrica y su número es impar, esta fórmula posee la propiedad de exactitud elevada, o sea, es exacta para todos los polinomios de tercer grado. Por eso de un modo análogo a cómo lo hemos hecho para la fórmula de Simpson, utilizando el polinomio interpolador de Hermite con el nodo central doble $x_2 = 0$, obtenemos la siguiente expresión para el

término residual:

$$R_3[f] = \frac{f^{IV}(\eta)}{4!} \int_{-1}^1 \frac{(x+1)x^2(x-1)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{192} f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (-1, 1).$$

Por lo tanto, el error del método vale

$$\Delta_1 \leq \frac{\pi}{192} \max_{[-1, 1]} |\cos x| = 0,017.$$

Luego, puesto que los valores primero y tercero del coseno están calculados con un error de 0,0005 y el segundo, con una exactitud absoluta, para el error de cálculo obtenemos

$$\Delta_2 \leq \frac{\pi}{4} (0,0005 + 2 \cdot 0 + 0,0005) = 0,0008.$$

Sumando los errores y realizando los redondeos necesarios, finalmente tenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2,42 \pm 0,02. \quad \blacktriangle$$

Para concluir examinemos un procedimiento más de determinar los coeficientes A_i de la fórmula de integración numérica (2) con los nodos dados. Exijamos que la fórmula (2) sea exacta para las funciones $1, x, x^2, \dots$ hasta un grado lo más alto posible. En este caso para hallar los coeficientes A_i obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$m_k = (b-a) \sum_{i=1}^n x_i^k A_i \quad (k=0, 1, \dots, N). \quad (14)$$

Si los nodos x_i son no coincidentes y $N = n - 1$, el determinante del sistema (14) es el determinante de Vandermond y la solución de este sistema (la colección de los coeficientes A_i) existe y es única.

Mostremos que tal método de determinar los coeficientes de integración numérica es equivalente al descrito anteriormente, o sea, que las fórmulas (5) dan los mismos valores para A_i que el sistema (14). Con el fin de demostrar esto sustituyamos las expresiones (5) para los coeficientes A_i en los segundos miembros de las ecuaciones (14) y cambiemos de lugar las operaciones de sumación y de integración:

$$m_k = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{i=1}^n \frac{\omega_{n-1}(x)}{(x-x_i)\omega_{n-1}(x_i)} x_i^k \right] dx.$$

La expresión puesta entre paréntesis es un polinomio interpolador de Lagrange de grado no superior a $n - 1$ para la función x^k ($k < n$). El término residual de tal polinomio es, evidentemente,

igual a cero $\left(\frac{d^n}{dx^n} (x^k) = 0 \text{ para } k < n\right)$; por eso

$$m_k = \int_a^b \rho(x) x^k dx \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

De las identidades obtenidas y de la unicidad de la solución del sistema (14) se desprende la equivalencia de ambos métodos de construcción de las fórmulas de integración numérica (2).

A título de ejemplo vamos a construir la fórmula que tiene el aspecto

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[A_1 f'(a) + A_2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + A_3 f'(b) \right].$$

Con el fin de construir la fórmula buscada de integración numérica exijamos que ésta sea exacta para todos los polinomios de grados nulo, primero y segundo. Para esto, en virtud de la linealidad de las operaciones de integración, del cálculo de los valores de la función y de la derivación, es suficiente exigir que la fórmula de integración numérica sea exacta para 1, x , x^2 . Así pues, sea $f(x) = 1$; entonces $(b-a) = (b-a)(A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1 + A_3 \cdot 0)$, es decir, $A_2 = 1$. Sea ahora $f(x) = x$; entonces

$$\frac{b+a}{2} = A_1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{b+a}{2} + A_3 \cdot 1, \text{ es decir, } A_1 = -A_3.$$

Por último, suponiendo $f(x) = x^2$, obtenemos la ecuación

$$\frac{a^2+ab+b^2}{3} = A_1 \cdot 2a + 1 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - A_1 \cdot 2b;$$

al resolver esta ecuación, encontramos $A_1 = -\frac{b-a}{24}$.

Ahora bien, la fórmula buscada se escribe así:

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{24} \left[-(b-a) f'(a) + 24f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (b-a) f(b) \right] \equiv I_3.$$

Nótese que esta fórmula también tiene la propiedad de exactitud elevada, como, por ejemplo, la tiene la fórmula de Simpson. Citemos, sin deducir, la expresión para el término residual de la fórmula obtenida:

$$R_3[f] = I - I_3 = -\frac{7}{5760} (b-a)^5 f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (a, b).$$

Proponemos que en calidad de ejercicio el mismo lector demuestre la última relación.

§ 8.6. Fórmulas de integración numérica de grado algebraico superior de precisión

Volvamos a considerar la fórmula de integración numérica

$$I \equiv \int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \equiv I_n. \quad (1)$$

Según ya hemos mencionado, en el caso general no sólo los coeficientes A_i sino también los nodos x_i son parámetros arbitrarios que deben determinarse en dependencia de los requisitos que ha de reunir la relación (1). Puesto que el número total de parámetros libres es igual a $2n$, se puede esperar que superponiendo $2n$ condiciones a la relación (1), obtendremos un sistema de ecuaciones para determinar estos parámetros. Desde luego, en el caso general es imposible decir si tiene solución tal sistema y si la tiene, si es o no única. La respuesta a esta pregunta puede obtenerse sólo si se consideran los requisitos concretos a los que debe satisfacer la fórmula de integración numérica (1). Por lo visto, conviene relacionar estos requisitos con la magnitud del error de la fórmula (1), procurar elegir los nodos y coeficientes de un modo tal que se minimice, en cierto sentido, el valor absoluto del término residual. En el párrafo precedente hemos señalado que las estimaciones obtenidas del error de las fórmulas de integración numérica se alcanzan con los polinomios cuyo grado es en una unidad mayor que el grado máximo del polinomio, para el cual la cuadratura correspondiente es exacta. Por eso es natural que se pruebe a aumentar el grado del polinomio para el cual la fórmula (2) sería absolutamente exacta. Tal planteamiento de la cuestión origina el siguiente problema de optimización.

Construir una fórmula de integración numérica tipo (1), con n fijo, la cual sea exacta para un polinomio arbitrario de grado más alto posible r .

Mostremos que el problema enunciado es equivalente al de construir una fórmula de integración numérica (1) que sea exacta para todas las funciones x^k ($k = 0, 1, \dots, r$). En efecto, supongamos que se da un polinomio arbitrario $P_r(x) = \sum_{h=0}^r a_h x^h$. Entonces

$$\begin{aligned} R_n[P_r] &= I[P_r] - I_n[P_r] = \\ &= \sum_{h=0}^r a_h \left(\int_a^b \rho(x) x^h dx - \sum_{i=1}^n A_i x_i^h \right) = \sum_{h=0}^r a_h R_n[x^h]. \end{aligned} \quad (2)$$

De aquí en virtud de la arbitrariedad de a_h (el polinomio P_r es arbitrario) obtenemos que para $R_n[P_r] = 0$ es necesario $R_n[x^h] = 0$ ($k = 0, 1, \dots, r$). La suficiencia es consecuencia directa de la linealidad del término residual de la fórmula (1) respecto a la función f y es evidente en virtud de la misma relación (2).

Así pues, llegamos al sistema de $r + 1$ ecuaciones respecto a $2n$ parámetros desconocidos A_i y x_i :

$$m_k = \int_a^b \rho(x) x^k dx = (b-a) \sum_{i=1}^n A_i x_i^k \quad (k=0, 1, \dots, r). \quad (3)$$

Es natural probar a resolver este sistema, o sea, construir la fórmula de integración numérica para $r + 1 = 2n$ (el número de ecuaciones es igual al de incógnitas.) La racionalidad de tal prueba es confirmada por los teoremas que presentamos a continuación.

Primero enunciemos, sin demostrar, el teorema auxiliar que caracteriza la propiedad de los polinomios ortogonales.

Teorema 1. *Sea 1°) $\rho(x) > 0$ casi por doquier sobre $[a, b]$; 2°) $P_{n-1}(x)$, un polinomio arbitrario de grado no superior a $n - 1$. Entonces existe un polinomio y además único*

$$\Psi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (4)$$

ortogonal con el peso $\rho(x)$ a $P_{n-1}(x)$, o sea, tal que

$$\int_a^b \rho(x) \Psi(x) P_{n-1}(x) dx = 0, \quad (5)$$

con la particularidad de que todas las raíces x_1, x_2, \dots, x_n del polinomio $\Psi_n(x)$ son distintas y están dentro del segmento $[a, b]$.

Pasemos ahora a los teoremas que permiten determinar inmediatamente los nodos y coeficientes de la fórmula (1), exacta para todos los polinomios de grado $r = 2n - 1$.

Teorema 2. *Para que la fórmula (1) sea exacta para los polinomios de grado $2n - 1$ es necesario y suficiente que: 1°) los nodos x_i sean raíces del polinomio Ψ_n determinado por la relación (5); 2°) los factores de ponderación A_i se determinen por las relaciones (5) del § 8.5.*

□ Comencemos por examinar la necesidad de la condición 2°. Si la fórmula (1) es exacta para todos los polinomios de grado $2n - 1$, es asimismo exacta para los polinomios de todo grado inferior, incluyendo el grado $n - 1$; entonces esta fórmula es de interpolación y obtendremos la única colección de los coeficientes A_i definida por la fórmula (5) del § 8.5.

Consideremos ahora el polinomio $Q_{2n-1} = \omega_{n-1}(x)P_{n-1}(x)$. Utilizando el hecho de que para el polinomio Q_{2n-1} la fórmula (1) es exacta, obtenemos la condición 1°:

$$\int_a^b \rho(x) \omega_{n-1}(x) P_{n-1}(x) dx = (b-a) \sum_{i=1}^n A_i (Q_{2n-1}(x_i)) = 0;$$

la última relación se deduce del hecho de que $\omega_{n-1}(x_i) = 0$ para todos los $i = 1, 2, \dots, n$.

Vamos a comprobar la suficiencia de las condiciones 1° y 2°. Representemos un polinomio arbitrario $Q_{2n-1}(x)$ de grado $2n - 1$

en la forma

$$Q_{2n-1} = \Psi_n P_{n-1}(x) + S_{n-1}(x),$$

donde P_{n-1} y S_{n-1} son, respectivamente, el cociente y el resto de la división del polinomio Q_{2n-1} por el polinomio Ψ_n , con la particularidad de que P_{n-1} es el polinomio de grado $n-1$, y S_{n-1} es el polinomio de grado no superior a $n-1$. Luego tenemos

$$\int_a^b \rho(x) Q_{2n-1} dx = \int_a^b \rho(x) \Psi_n P_{n-1} dx + \int_a^b \rho(x) S_{n-1} dx.$$

El primer sumando del segundo miembro es igual a cero en virtud de la ortogonalidad de Ψ_n y P_{n-1} (condición 1°) y para el segundo sumando la fórmula (1) es exacta en virtud de la condición 2°. Por eso, teniendo en cuenta que $Q_{2n-1}(x_i) = S_{n-1}(x_i)$, ya que $\Psi_n(x_i) = 0$, finalmente tenemos

$$\int_a^b \rho(x) Q_{2n-1} dx - (b-a) \sum_{i=1}^n A_i Q_{2n-1}(x_i). \quad \blacksquare$$

Pongamos ahora la pregunta: ¿se puede construir una fórmula de integración numérica (1) que sea exacta para todos los polinomios de grado superior a $2n-1$? El siguiente teorema da la respuesta a esta pregunta.

Teorema 3. Sea $\rho(x) > 0$ casi por doquier sobre $[a, b]$. Entonces no existe una fórmula de integración numérica (1) que sea exacta para todos los polinomios de grado $2n$.

■ Consideremos el polinomio $Q_{2n}(x) = (x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2 = \omega_{n-1}^2(x)$. Entonces el primer miembro de la igualdad (1) es

$\int_a^b \rho(x) \omega_{n-1}^2(x) dx > 0$, mientras que su segundo miembro

$\sum_{i=1}^n A_i \omega_{n-1}^2(x_i) = 0$ lo que se demuestra precisamente por el teorema ■.

Así pues, la fórmula de integración numérica (1) con los nodos x_i , definidos por las relaciones (5), y con los coeficientes A_i , definidos por las relaciones (5) del § 8.5, es exacta para todo polinomio de grado no superior a $2n-1$. Ella se llama *fórmula de integración numérica de grado algebraico superior de precisión* (o bien *fórmula de integración numérica de Gauss*).

La fórmula de Gauss posee una propiedad útil desde el punto de vista del error de cálculo: todos los coeficientes A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) para todo n son positivos.

Para demostrar esta afirmación consideremos la función $\left[\frac{\Psi_n(x)}{x-x_p} \right]^2$ que es un polinomio de grado $2n-2$ y se anula en

todos los nodos $x_i \neq x_p$. Para esta función la fórmula de integración numérica de Gauss es exacta y por eso

$$\int_a^b \rho(x) \frac{\Psi_n^2(x)}{(x-x_p)^2} dx = (b-a) A_p [\Psi'(x_p)]^2.$$

De aquí se deduce inmediatamente que $A_p > 0$. Es evidente que en virtud de la arbitrariedad de ρ todos los coeficientes de integración numérica $A_i > 0$.

Pasemos ahora a la estimación del error de la fórmula de integración numérica de Gauss.

Teorema 4. *Sea: 1°) $\rho(x) > 0$ casi por doquier sobre $[a, b]$; 2°) $f(x) \in C^{2n}[a, b]$; 3°) x_i y A_i ($i=1, 2, \dots, n$) son nodos y coeficientes de la fórmula de integración numérica de Gauss, respectivamente. Entonces existe un tal punto $\xi \in (a, b)$ que*

$$R_n[f] = I - I_n = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_{n-1}^2(x) dx. \quad (6)$$

□ Representemos la función a integrar en la forma

$$f(x) = H_{2n-1}(x) + \frac{f^{(2n)}(\bar{\eta})}{(2n)!} \omega_{n-1}^2(x); \quad \bar{\eta} \in (a, b),$$

donde $H_{2n-1}(x)$ es el polinomio interpolador de Hermite cuyo grado no supera a $2n-1$ con los nodos dobles x_i ($i=1, 2, \dots, n$). Es obvio que para $H_{2n-1}(x)$ la fórmula de Gauss es exacta. Por eso

$$I = I_n + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) f^{(2n)}(\bar{\eta}) \omega_{n-1}^2(x) dx.$$

Aplicando al segundo sumando del segundo miembro el segundo teorema del valor medio de la función y pasando I_n al primer miembro, obtenemos la relación requerida (6). ■

Prácticamente la cuadratura de Gauss se obtiene del modo siguiente. Primero se encuentran las raíces del polinomio $\Psi_n(x)$ ortogonal a todos los polinomios de grado inferior a n . Luego para los coeficientes A_i se construye un sistema de ecuaciones lineales, suponiendo que la fórmula de integración numérica es justa para las funciones $1, x, \dots, x^{n-1}$:

$$m_i \equiv \int_a^b \rho(x) x^i dx = \sum_{i=1}^n A_i x_i^i.$$

Resolviendo este sistema, se determina A_i .

De ilustración elemental de la cuadratura de Gauss sirve la fórmula (22) construida en el § 8.4.

§ 8.7. Fórmulas compuestas de integración numérica

Las fórmulas con un gran número de nodos equidistantes se emplean, relativamente, muy rara vez. Esto se explica por diferentes causas. En primer lugar, para las funciones que tienen la singularidad incluso no en el mismo segmento de integración sino en la proximidad de este último, el término residual de la fórmula de integración numérica de alto orden es, por lo general, grande. Además, hasta para ciertas funciones analíticas, al situarse uniformemente los puntos nodales, es posible que $R_n[f] = I - I_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. En segundo lugar, para $n \geq 10$ entre los coeficientes H_i los hay negativos, lo que aumenta considerablemente el error de cálculo esperado. En efecto, supongamos que todos los valores de la función f_i de la fórmula (8) dada en el § 8.5 se conocen con la misma exactitud ε . Entonces el error de cálculo total se puede estimar por la magnitud $\Delta_2 = (b - a) \varepsilon \sum_{i=1}^n |H_i|$. Puesto que la suma de todos los coeficientes de Cotes es igual a la unidad, el hecho de que entre ellos existen coeficientes negativos origina el aumento de Δ_2 . De la tabla 8.2 se ve cuán rápido es el crecimiento de Δ_2 .

Tabla 8.2

n	10	15	20
$\sum_{i=1}^n H_i $	≈ 3	≈ 8	≈ 560

Las fórmulas de tipo gaussiano poseen ciertas ventajas en comparación con las de Newton-Cotes, puesto que carecen de los inconvenientes anteriormente descritos. Sin embargo, las fórmulas de Gauss, siendo fórmulas de grado algebraico de precisión superior, para grandes n tienen un término residual proporcional a la derivada de la función integrable de orden superior. Esto es una desventaja esencial al integrar funciones que no posean derivadas continuas de órdenes superiores o bien al integrar dependencias funcionales construidas empíricamente. Además, incluso para los procesos de cuadratura convergentes, construidos con ayuda de las fórmulas de Gauss, de antemano se desconoce generalmente con cuán grande n la convergencia empieza a realizarse prácticamente, o sea, de antemano se desconoce cuál debe ser n para garantizar la exactitud deseada.

Las consideraciones recién expuestas determinan precisamente el hecho de que en la práctica suele darse preferencia a las así llamadas *fórmulas compuestas (o generalizadas)*. El sentido de estas fórmulas consiste en que el segmento de integración $[a, b]$ se divide en varias partes, se aplica una u otra fórmula de integración numérica con pequeño n a cada parte separada y luego se suman los resultados.

Lo racional de tal enfoque se funda en los razonamientos siguientes. Para muchas fórmulas de integración numérica (incluyendo todas las que se consideran en este capítulo) el término residual es proporcional a cierto grado de longitud del segmento de integración. Supongamos, por ejemplo, que la aplicación de la fórmula de integración numérica elegida al segmento $[a, b]$ da para el término residual la expresión siguiente:

$$R[f] = (b - a)^k \varphi(a, b), \quad (1)$$

donde $\varphi(a, b)$ es la función lentamente variable del segmento de integración.

Dividiendo el segmento inicial en m partes iguales y aplicando a cada una de ellas la misma fórmula de integración numérica, obtenemos que en cada parte separada el término residual es, aproximadamente, m^k veces menor que (1). Sumando luego los resultados de integración y los términos residuales, obtenemos que el error de la integral inicial es, aproximadamente, m^{k-1} veces menor que al aplicar la fórmula de integración numérica elegida a todo el segmento inicial.

Este método es bastante general y puede ser realizado para toda fórmula de integración numérica.

Como ejemplo elemental de la fórmula compuesta de integración numérica puede servir la de los rectángulos (4) con el término residual (8), examinada en el § 8.5.

En el presente párrafo vamos a considerar las fórmulas compuestas más frecuentes construidas sobre la base de las cuadraturas elementales antes citadas.

Fórmula compuesta de los trapecios. Supongamos que se necesita calcular la integral de la función f sobre el segmento $[a, b]$. Dividamos el segmento $[a, b]$ en m partes iguales con los puntos de frontera $a = x_0, x_1, \dots, x_m = b$ de un modo tal que la longitud de cada parte sea igual a $h = (b - a)/m$. Representemos la integral en forma de la suma:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x) dx.$$

Aplicaremos a cada sumando del segundo miembro de esta igualdad la fórmula de los trapecios con el término residual [véanse las relaciones (11) y (12) del § 8.5]. Reduciendo los términos semejantes, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{m} \left(\frac{f_0 + f_m}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f_i \right) - \\ &- \frac{(b-a)^3}{12m^3} \sum_{i=1}^m f''(\eta_i); \quad \eta_i \in (x_{i-1}, x_i). \end{aligned} \quad (2)$$

Suponiendo que la derivada segunda de la función integrable es continua sobre todo el segmento $[a, b]$, en virtud del teorema de Weierstrass tenemos

$$\sum_{i=1}^m f''(\eta_i) = m f''(\eta); \quad \eta \in (a, b).$$

Sustituyendo esta expresión para la suma en la relación (2), obtenemos la *fórmula compuesta de los trapecios*

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{m} \left(\frac{f_0 + f_m}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f_i \right) \equiv I_2^m \quad (3)$$

con el término residual

$$R_2^m [f] = -\frac{(b-a)^2}{12m^2} f''(\eta). \quad (4)$$

Por consiguiente, la estimación del error de la cuadratura (3) se puede representar en la forma

$$\Delta_1 = |I - I_2^m| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2, \quad (5)$$

donde $M_2 = \max_{[a, b]} |f''(x)|$. La estimación obtenida es inmejorable, puesto que se alcanza, por ejemplo, sobre la parábola $f = x^2$, lo que es fácil mostrar mediante una verificación inmediata. Nótese que los cálculos análogos han sido realizados al analizar la fórmula de cuadratura (4) del § 8.4. Mostremos cómo se hace esto para la fórmula compuesta (3).

Calculemos el miembro izquierdo de la fórmula de integración numérica (3) para $f = x^2$:

$$I = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Calculemos la suma

$$I_2^m = \frac{b-a}{m} \left[\frac{a^2 + b^2}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \left(a + i \frac{b-a}{m} \right)^2 \right].$$

Transformando la expresión puesta entre paréntesis y utilizando en este caso las siguientes fórmulas de sumación:

$$\sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(m-1)m}{2}; \quad \sum_{i=1}^{m-1} i^2 = \frac{(m-1)m(2m-1)}{6},$$

obtenemos la magnitud buscada

$$I_2^m = \frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{(b-a)^3}{6m^2}.$$

Así pues, el error de la fórmula de integración numérica (3) para la función $f = x^2$ es igual a

$$\Delta_1 = |I - I_2^m| = \frac{(b-a)^3}{6m^2}$$

lo que coincide exactamente con el segundo miembro de la estimación (5), puesto que $M_2 = 2$.

En virtud de la linealidad de las operaciones $I[f]$ e $I_2^m[f]$ y en virtud de que la fórmula (3) es exacta para toda función lineal, se puede afirmar que la estimación (5) se alcanza sobre una parábola arbitraria de segundo grado.

La expresión (5) para el error del método Δ_1 de la fórmula de integración numérica (3) muestra que $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_1 = 0$, o sea, aumentando m , podemos garantizar toda exactitud prefijada de antemano I_3^m desde el punto de vista del error del método (al faltar un error de cálculo). En tales casos se dice que el método es *convergente*. Nos queda aclarar la influencia que el error de los datos iniciales (de los valores de la función f_i) ejerce en el error del resultado. En virtud de la linealidad del segundo miembro de la fórmula de integración numérica (3) respecto a los valores de la función integrable, el error de cálculo total es proporcional al del cálculo de cada valor de la función (en caso de la igualdad de estos últimos). Por eso se puede esperar que en caso de una exactitud suficientemente alta de los datos iniciales el error de cálculo total será bastante pequeño.

Vamos a deducir las fórmulas concretas para el número de particiones m y para el error admisible de cada valor de la función f_i , que garantizan la exactitud requerida ε al utilizar la fórmula de integración numérica (3) con el error (5).

Ante todo, utilizando el algoritmo de resolución del problema II, citado en el § 8.3, representemos ε en forma de la suma: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ (si, por ejemplo, $\varepsilon = 10^{-h}$, entonces se supone de ordinario $\varepsilon_1 = 0,3 \cdot 10^{-h}$, $\varepsilon_2 = 0,2 \cdot 10^{-h}$, $\varepsilon_3 = 0,5 \cdot 10^{-h}$).

Escojamos luego el número de particiones m de un modo tal que se asegure el cumplimiento de la desigualdad $\Delta_1 \leq \varepsilon_1$. Para esto, en virtud de (5), es suficiente exigir que

$$\frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2 \leq \varepsilon_1.$$

Transformando esta desigualdad, obtenemos para el número de particiones la fórmula

$$m \geq (b-a) \sqrt{\frac{(b-a) M_2}{12\varepsilon_1}}. \quad (6)$$

Así pues, el error del método Δ_1 no superará ε_1 si el número de particiones m satisface la desigualdad (6).

Determinemos ahora cómo debe ser el error de los valores de la función integrable para que el error de cálculo total de I_2^m por la fórmula (3) no supere ε_2 . Supongamos que el error buscado es $\Delta[f_i]$;

entonces, utilizando la fórmula (3), tenemos

$$\Delta [I_2^m] \leq \frac{b-a}{m} (\Delta [f_i] + (m-1) \Delta [f_{i+1}]) = (b-a) \Delta [f_i].$$

Por lo tanto, para cumplir la desigualdad $\Delta [I_2^m] \leq \varepsilon_2$ basta exigir que

$$\Delta [f_i] \leq \varepsilon_2 / (b-a). \quad (7)$$

Ejemplo 1. Utilizando la fórmula compuesta de los trapecios, calcular la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ con exactitud hasta 0,01.

Δ Sea $\varepsilon_1 = 0,004$; $\varepsilon_2 = 0,001$; $\varepsilon_3 = 0,005$. Encontramos $M_2 = \max_{[0, 1]} \left| \left(\frac{1}{1+x} \right)'' \right| = 2$. Con ayuda de la desigualdad (6) determinemos el número necesario de particiones:

$$m \geq (1-0) \cdot \sqrt{\frac{(1-0) \cdot 2}{12 \cdot 0,004}} = 6,4.$$

Tomamos $m = 7$. Para el error admisible de los valores de la función subintegral la desigualdad (7) da el valor $\Delta [f_i] = 0,001$. Hacemos la tabla de los valores necesarios de la función integrable con tres cifras justas:

x	0	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	1
$(1+x)^{-1}$	1	0,875	0,778	0,700	0,636	0,583	0,538	0,500

Con ayuda de la fórmula (3) hallamos

$$I_2^7 = \frac{1-0}{7} \left(\frac{1+0,5}{2} + 0,875 + 0,778 + 0,700 + 0,636 + 0,583 + 0,538 \right) = 0,694.$$

Redondeando el resultado obtenido, finalmente tenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,69 \pm 0,01.$$

Compárese la solución obtenida con la del ejemplo 6 dado en el § 8.4 y con la del ejemplo 3 dado en el § 8.5. \blacktriangle

Fórmula compuesta de Simpson. En este caso dividamos el segmento de integración en un número par $2m$ de partes iguales con los puntos de frontera $a = x_0, x_1, \dots, x_{2m} = b$, así que la longitud de cada parte vale $h = (b-a)/(2m)$. Representemos la integral en forma de la suma:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x) dx.$$

Apliquemos la fórmula de Simpson con el término residual [véase las relaciones (11) y (12) del § 8.5] a cada sumando del segundo miembro de la igualdad dada. Reduciendo los términos semejantes, obtenemos

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6m} (f_0 + f_{2m} + 4\sigma_1 + 2\sigma_2) - \frac{(b-a)^5}{2880m^5} \sum_{i=1}^m f^{IV}(\eta_i); \quad (8)$$

$$\eta_i \in (x_{2i-2}, x_{2i});$$

$$\sigma_1 = f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1}; \quad \sigma_2 = f_2 + f_4 + \dots + f_{2m-2}.$$

Suponiendo que la cuarta derivada de la función integrable es continua sobre todo el segmento $[a, b]$, en virtud del teorema de Weierstrass tenemos

$$\sum_{i=1}^m f^{IV}(\eta_i) = m f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (a, b).$$

Sustituyendo la expresión obtenida para la suma de las derivadas en la relación (8), llegamos a la *fórmula compuesta de Simpson*

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} (f_0 + f_{2m} + 4\sigma_1 + 2\sigma_2) \equiv I_3^m; \quad (9)$$

$$\sigma_1 = f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1}; \quad \sigma_2 = f_2 + f_4 + \dots + f_{2m-2}$$

con el término residual

$$R_3^m[f] = -\frac{(b-a)^5}{2880m^4} f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (a, b). \quad (10)$$

Por consiguiente, la estimación del error de la fórmula de integración numérica (9) puede ser representada en la forma

$$\Delta_1 = |I - I_3^m| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4, \quad (11)$$

donde $M_4 = \max_{[a, b]} |f^{IV}(x)|$. La estimación obtenida es inmejorable, puesto que se alcanza, por ejemplo, en la función $f = x^4$.

Al igual que para la fórmula de los trapecios, obtenemos las fórmulas concretas para el número de particiones m y para el error admisible de cada valor f_i , que aseguran la exactitud deseada ε al utilizar la fórmula de integración numérica (9) con el error (11).

Sea $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Teniendo en cuenta la relación (11), para el cumplimiento de la desigualdad $\Delta_1 \leq \varepsilon_1$ exijamos que

$$\frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4 \leq \varepsilon_1.$$

De aquí hallamos la condición para el número de particiones $2m$ con el cual el error del método no superará ϵ_1 :

$$2m \geq (b-a) \sqrt[4]{\frac{(b-a)M_4}{180\epsilon_1}}. \quad (12)$$

Determinemos ahora cómo debe ser el error de los valores de la función subintegral para que el error total de cálculo de I_3^m por la fórmula (9) no supere ϵ_2 . Supongamos que el error buscado es $\Delta [f_i]$; entonces, utilizando la fórmula (9), tenemos

$$\Delta [I_3^m] \leq \frac{b-a}{6m} (2\Delta [f_i] + 4m\Delta [f_i] + 2(m-1)\Delta [f_i]) = (b-a)\Delta [f_i].$$

Por lo tanto, para el cumplimiento de la desigualdad $\Delta [I_3^m] \leq \epsilon_2$ basta exigir que

$$\Delta [f_i] \leq \epsilon_2 / (b-a). \quad (13)$$

Como era de esperar, hemos obtenido el mismo resultado que para la fórmula de los trapecios. Esto es consecuencia de que (3) y (9) son fórmulas del mismo tipo (3) del § 8.3, con la particularidad de que todos los coeficientes A_i son positivos y su suma es igual a la unidad.

Ejemplo 2. Utilizando la fórmula compuesta de Simpson, calcular la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ con exactitud de hasta 0,001.

Δ Sea $\epsilon_1 = 0,00045$; $\epsilon_2 = 0,00005$, $\epsilon_3 = 0,0005$. Encontramos $M_4 = \max_{[0, 1]} \left| \left(\frac{1}{1+x} \right)^{IV} \right| = 24$. Con ayuda de las desigualdades (12) determinemos el número necesario de particiones:

$$2m \geq (1-0) \cdot \sqrt[4]{\frac{(1-0) \cdot 24}{180 \cdot 0,00045}} = 4,1 \dots$$

Puesto que $2m$ es un número par, tomamos $2m = 6$. Para el error admisible de los valores de la función subintegral la desigualdad (13) da el valor $\Delta [f_i] = 0,00005$. Hacemos la tabla de los valores necesarios de la función integrable con cuatro cifras justas:

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
$(1+x)^{-1}$	1	0,8571	0,75	0,6667	0,6	0,5455	0,5

Por la fórmula (9) encontramos

$$I_3^3 = \frac{1-0}{18} [1 + 0,5 + 4 \cdot (0,8571 + 0,6667 + 0,5455) + 2 \cdot (0,75 + 0,6)] = 0,69317 \dots$$

Redondeando el resultado obtenido, finalmente tenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,693 \pm 0,001. \quad \blacktriangle$$

Analícemos el resultado obtenido en el ejemplo 2. Comparando el valor aproximado de $I_3^3 = 0,69317 \dots$ con la magnitud exacta de la integral $I = 0,69314 \dots$, notamos que la diferencia real entre los valores exacto y aproximado (cerca de 0,00003) es alrededor de 17 veces menor que el error admisible dado ($\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0,0005$). Es natural poner la pregunta ¿en qué consisten las causas de tal diferencia entre el error teóricamente predicho y el obtenido prácticamente?

Respondiendo a la pregunta puesta, nótese, ante todo, que tal divergencia entre el error verdadero y la estimación requerida se observa no siempre, ni mucho menos, y en los casos semejantes al examinado en el ejemplo 2 puede ser predicha de antemano y, más aún, ser reducida al mínimo al utilizar ciertas consideraciones adicionales y al construir más racionalmente el proceso de cálculo.

En efecto, en el ejemplo 2 debido a la desigualdad (12) el error del método, igual a 0,0004, corresponde al número de particiones $2m \geq 4,1 \dots$. El valor límite 4,1 ... no podía ser elegido en virtud del hecho de que $2m$ debe ser entero y par, y al valor mínimo admisible $2m = 6$, que hemos elegido, corresponde, desde luego, también un error menor del método que es igual, aproximadamente, a 0,0001. Esta es precisamente la primera causa de disminución del error práctico.

Luego, por ser inmejorables todas las estimaciones consideradas del error, ellas se obtenían con los polinomios en los cuales la derivada, que como multiplicador forma parte de la expresión para el término residual, era una magnitud constante. En cambio, si la derivada mencionada cambia considerablemente sobre el segmento de integración (lo que es natural cuando este segmento es grande), la estimación respectiva resulta, por lo general, distar mucho de la óptima. En este caso es conveniente determinar el número de particiones partiendo de la forma del término residual, representada en las relaciones (2) y (8). Por ejemplo, para la fórmula de Simpson se obtendría la siguiente desigualdad destinada a determinar $2m$:

$$\frac{(b-a)^5}{180(2m)^4} \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m M_4^i \leq \epsilon_1, \quad (14)$$

donde $M_4^i = \max_{[x_{2i-2}, x_{2i}]} |f^{IV}(x)|$. Es evidente que a grandes cambios

de la cuarta derivada sobre el segmento de integración, la desigualdad (14) es más ventajosa que la (12) desde el punto de vista

del número de particiones en $\sqrt[4]{\frac{M_4}{(1/m) \sum_{i=1}^m M_4^i}}$ veces. En rea-

lidad, debajo del signo de la raíz está la relación entre el valor absoluto máximo de la cuarta derivada sobre todo el segmento de integración y el valor medio calculado respecto de m intervalos $[x_{2i-2}, x_{2i}]$; $i = 1, 2, \dots, m$. Así, la utilización de la desigualdad (14)

en el ejemplo 2 para el número de particiones da el valor $2m = 4$ y para $2m = 6$ la estimación del error del método disminuye hasta 0,000045, que es sólo una vez y media más que el error verdadero. Esto es ya un buen resultado.

Ejercicios

1. Calcular la integral definida $\int_2^8 \sqrt{x+2} dx$, utilizando la

fórmula de los rectángulos izquierdos para $n=6$.

2. Haciendo uso de la fórmula de los rectángulos derechos para $n=8$, calcular $\int_1^9 \frac{dx}{1+x}$.

3. Haciendo uso de la fórmula de los trapecios para $n=8$, calcular $\int_0^8 \frac{dx}{1+x}$.

4. Con ayuda de la fórmula de los trapecios calcular $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$, suponiendo $n=5$.

5. Con ayuda de la fórmula de Simpson calcular $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+9}$, suponiendo $2m=10$.

6. Calcular $\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x} dx$ con ayuda de la fórmula de Simpson; poner $2m=10$.

7. Calcular la integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+3}$, haciendo uso de la fórmula de Gauss para $2m=6$.

8. La función se da en forma de una tabla

x	0,525	0,526	0,527	0,528
f	0,50121	0,50208	0,50294	0,50381

Haciendo uso del método de integración numérica, hallar la derivada primera en el punto $x^* = 0,525$.

9. Encontrar la derivada de primer orden en el punto $x^* = 50$ para la función dada en la forma tabular

x	50	55	60	65
f	1,6990	1,7404	1,7782	1,8129

10. Calcular la integral $\int_0^1 f(x) dx$ con exactitud de hasta ε .

- a) $f(x) = x^2 \cos x$, $\varepsilon = 0,001$; b) $f(x) = x^2 \sin x$, $\varepsilon = 0,001$;
c) $f(x) = xe^x$, $\varepsilon = 0,0001$; d) $f(x) = x\sqrt{xe^x}$, $\varepsilon = 0,0001$; e) $f(x) = e^{x^2}$, $\varepsilon = 0,0001$;
f) $f(x) = e^{x\sqrt{x}}$, $\varepsilon = 0,0001$; g) $f(x) = x^2 + 1$, $\varepsilon = 0,0001$; h) $f(x) = \sin x$, $\varepsilon = 0,001$; i) $f(x) = e^x$, $\varepsilon = 0,001$.

11. Calcular los valores de la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = x_1$, utilizando las tablas matemáticas de cuatro cifras decimales de las funciones trigonométricas con el paso igual a 1° . Determinar el valor absoluto del resultado:

- a) $f(x) = \sin x$; $x_1 = 41^\circ$; b) $f(x) = \cos x$, $x_1 = 27,5^\circ$;
c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_1 = 50^\circ$; d) $f(x) = \sin x$, $x_1 = 17^\circ 30'$; e) $f(x) = \cos x$, $x_1 = 63^\circ$; e) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $x_1 = 33,5^\circ$.

CAPÍTULO IX

Resolución aproximada de las ecuaciones diferenciales ordinarias

§ 9.1. Concepto de ecuación diferencial

La ecuación en la cual la función incógnita entra bajo el signo de derivada o de diferencial se llama *ecuación diferencial*.

Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dx} = 2(y-3); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = t+1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

$$y' = x^2; \quad x dy = y^3 dx.$$

Si la función incógnita que forma parte de la ecuación diferencial depende sólo de una variable independiente, la ecuación diferencial se llama *ordinaria*.

Tales son, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 2; \quad 2s dt = t ds.$$

En cambio, si la función incógnita que forma parte de la ecuación diferencial es función de dos o más variables independientes, la ecuación diferencial se denomina *ecuación en derivadas parciales*.

Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

es ecuación en derivadas parciales.

Se llama *orden* de una ecuación diferencial al orden superior de la derivada (o de la diferencial) que forma parte de la ecuación.

Así, por ejemplo, las ecuaciones

$$\frac{d^2s}{dt^2} = t-1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$$

son ecuaciones de segundo orden y las ecuaciones

$$\frac{ds}{dt} \cos t + \sin t = 1; \quad (x^2 - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy = 0,$$

ecuaciones de primer orden.

En este capítulo vamos a considerar sólo las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el caso más general una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden contiene una variable independiente, una función incógnita y sus derivadas o diferenciales hasta el n-ésimo orden, inclusiva-

mente, y tiene la forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

En esta ecuación x es la variable independiente; y , la función incógnita; $y', y'', \dots, y^{(n)}$ son las derivadas de esta función.

Si el primer miembro de la ecuación diferencial (1) es el polinomio respecto a la derivada de la función incógnita, el grado de este polinomio se llama *grado* de la ecuación diferencial.

Por ejemplo, la ecuación

$$(y'')^4 + (y')^2 - y^6 + x^7 = 0$$

es la ecuación de cuarto grado y de segundo orden, mientras que la ecuación

$$(y')^2 + x^4 y^5 - y^3 + x^{10} = 0$$

es la ecuación de segundo grado y de primer orden.

La ecuación diferencial de n -ésimo orden resuelta respecto a la derivada superior puede ser escrita en la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2)$$

Se llama *solución* (o *integral*) de la ecuación (2) a toda función derivable $y = \varphi(x)$ que satisfaga esta ecuación, o sea, a tal función que al ser sustituida en la ecuación (2), convierte a ésta en identidad.

El gráfico de solución de una ecuación diferencial se denomina *curva integral* de esta ecuación.

La solución de la ecuación diferencial que contiene una cantidad de constantes (parámetros) arbitrarias independientes igual a su orden se llama *solución general* (o *integral general*) de esta ecuación.

Geoméricamente la solución general de la ecuación diferencial es una familia de curvas integrales de esta ecuación.

Se llama *solución particular* de una ecuación diferencial a toda solución que pueda ser obtenida de la general para ciertos valores numéricos de las constantes arbitrarias que forman parte de la solución general.

Las constantes arbitrarias que entran en la solución general se determinan de las llamadas condiciones iniciales.

El problema con condiciones iniciales se plantea así: hallar la solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, que satisface las condiciones adicionales consistentes en que la solución $y = \varphi(x)$ debe tomar junto con sus derivadas hasta el orden $(n-1)$ los valores numéricos asignados $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ para el valor numérico asignado $x = x_0$ de la variable independiente x :

$$y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{para} \\ x = x_0. \quad (3)$$

Las condiciones (3) se denominan *condiciones iniciales*; los números $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ se llaman *datos iniciales* de la solución y el problema de determinación de la solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación

diferencial (2), que satisface las condiciones iniciales (3), *problema con condiciones iniciales* (o *problema de Cauchy*).

En caso de una ecuación de primer orden, ó sea, para $n = 1$ obtenemos el problema de Cauchy para la ecuación $y' = f(x, y)$ con la condición inicial $x = x_0, y = y_0$.

Geoméricamente el problema de Cauchy (para la ecuación de primer orden) consiste en que de todo el conjunto de las curvas integrales que representan la solución general se separa la curva integral que pasa por el punto M_0 con las coordenadas $x = x_0, y = y_0$.

Ejemplo. Para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$ con condición inicial $y_0 = 2$ cuando $x_0 = 1$ la solución general tiene la forma $y =$

$= x^2 + c$. Es una familia de parábolas. Si ahora en la solución general sustituimos los datos iniciales, obtenemos $2 = 1 + C$, o sea, $C = 1$. Por consiguiente, la solución particular que satisface la condición inicial es $y = x^2 + 1$. Geométricamente esto quiere decir que de todo el conjunto de las parábolas que representan la solución general de la ecuación diferencial se elige una que pasa por el punto $M_0(1; 2)$ (fig. 9.1).

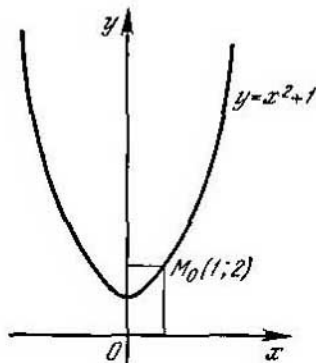


Fig. 9.1

El problema de Cauchy tiene una única solución que satisface

la condición $y(x_0) = y_0$ si la función $f(x, y)$ es continua en cierto dominio $R_{[a, b]} = \{ |x - x_0| < a, |y - y_0| < b \}$ y satisface en este dominio la *condición de Lipschitz*

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leq N |\bar{y} - y|,$$

donde N es la constante de Lipschitz que depende de a y b (a y b son las fronteras del dominio).

Los métodos de integración exacta de las ecuaciones diferenciales son útiles sólo para una parte relativamente pequeña de ecuaciones que se encuentran en la práctica.

Por eso adquieren gran importancia los métodos de resolución aproximada de las ecuaciones diferenciales, los cuales según la forma de representar la solución pueden ser divididos en dos grupos:

1) **métodos analíticos** que ofrecen una solución aproximada de la ecuación diferencial en forma de una expresión analítica;

2) **métodos numéricos** que ofrecen una solución aproximada en forma tabular.

En este capítulo para el primer grupo de métodos consideraremos el método de aproximaciones sucesivas (método de Picard) y el de integración de las ecuaciones diferenciales con ayuda de las series

de potencias; para el segundo grupo examinaremos el método de Euler y sus modificaciones, los métodos de Runge — Kutta y de Adams.

§ 9.2. Método de aproximaciones sucesivas (método de Picard)

Este método apareció debido a la demostración del teorema de existencia y de unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales. Lleva el nombre de **método de Picard**.

Supongamos que se da la ecuación

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

cuyo segundo miembro en el rectángulo $\{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ es continuo y tiene una derivada parcial continua respecto a y . Es necesario hallar la solución de la ecuación (1), que satisfaga la condición inicial

$$x = x_0, y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Integrando ambos miembros de la ecuación entre x_0 y x , obtenemos

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

o bien

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (3)$$

La ecuación (1) se reemplaza por la ecuación integral (3) en la cual la función incógnita y está bajo el signo integral. La ecuación integral (3) satisface la ecuación diferencial (1) y la condición inicial (2). En efecto,

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x, y) dx = y_0.$$

Reemplazando en la igualdad (3) la función y por el valor y_0 , obtenemos la primera aproximación

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx.$$

Luego en la ecuación (3) sustituimos y por el valor hallado y_1 y obtenemos la segunda aproximación

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx.$$

Continuando luego el proceso, encontramos sucesivamente

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2) dx.$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx.$$

Ahora bien, formamos la sucesión de las funciones

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x).$$

Es válido el siguiente teorema que citaremos sin demostración.

Teorema. *Supongamos que en el entorno del punto $(x_0; y_0)$ la función $f(x, y)$ es continua y tiene una derivada parcial acotada $f'_y(x, y)$. Entonces en cierto intervalo, que contiene el punto x_0 , la sucesión $\{y_i(x)\}$ converge hacia la función $y(x)$ que sirve de solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ y que satisface la condición $y(x_0) = y_0$.*

La estimación del error del método de Picard se determina por la fórmula

$$|y - y_n| \leq N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (4)$$

donde $M = \max |f(x, y)|$ para $(x, y) \in R_{[a, b]}$ y N es la constante de Lipschitz para el dominio $R_{[a, b]}$, igual a $N = \max |f'_y(x, y)|$. La magnitud h para determinar el entorno $[x_0 - h \leq x \leq x_0 + h]$ se calcula con ayuda de la fórmula

$$h = \min(a, b/M); \quad (5)$$

a y b son las fronteras del dominio R .

Ejemplo. Haciendo uso del método de Picard, resolver la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$ que satisface la condición inicial $x_0 = 0, y(x_0) = y_0 = 0$.

△ Pasemos a la ecuación integral

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x (x^2 + y^2) dx$$

o bien, teniendo en cuenta las condiciones iniciales,

$$y = \int_0^x (x^2 + y^2) dx.$$

Otenemos las aproximaciones sucesivas:

$$y_1 = \int_0^x (x^2 + y_0^2) dx = \int_0^x (x^2 + 0) dx = \frac{x^3}{3};$$

$$y_2 = \int_0^x (x^2 + y_1^2) dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63};$$

$$y_3 = \int_0^x (x^2 + y_2^2) dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Vamos a estimar el error de la tercera aproximación con ayuda de la fórmula (4):

$$|y - y_n| \leq N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Puesto que la función $y' = x^2 + y^2$ está definida y es continua en todo el plano, en calidad de a y b se pueden tomar todos números. Con el fin de precisar elijamos el rectángulo

$$R\{ |x - x_0| \leq 0,5, |y - y_0| \leq 1\},$$

o sea, $R\{-0,5 \leq x \leq 0,5, -1 \leq y \leq 1\}$

Entonces

$$M = \max |f(x, y)| = \max (x^2 + y^2) = 1,25,$$

$$N = \max |f'_y(x, y)| = \max |2y| = 2.$$

Puesto que $a = 0,5$ y $b/M = 0,8$, según la fórmula (5) tenemos

$$h = \min(a, b/M) = 0,5.$$

La solución y se dará para $-0,5 \leq x \leq 0,5$. Si $n = 3$, encontramos

$$|y - y_3| \leq 1,25 \cdot 2^3 \cdot 0,5^4 / 4! = 5/192.$$

La estimación obtenida del error es muy aproximada, de hecho el error es mucho más pequeño. ▲

§ 9.3. Integración de las ecuaciones diferenciales con ayuda de las series de potencias

Método de derivación sucesiva. Supongamos que se da la ecuación diferencial de n -ésimo orden:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

con las condiciones iniciales

$$x = x_0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

El segundo miembro de esta ecuación es una función analítica en el punto inicial $M_0(x_0; y_0; y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$. Representemos la solución $y = y(x)$ de la ecuación (1) en el entorno del punto x_0 como serie de

Taylor

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + \dots, \quad (3)$$

donde $|x - x_0| < h$ y h es una magnitud bastante pequeña. Para encontrar los coeficientes de la serie (3) la ecuación (1) se deriva respecto a x un número necesario de veces, utilizando las condiciones (2).

En la práctica la magnitud $|x - x_0|$ se toma tan pequeña que en caso de un grado requerido de precisión el resto de la serie puede ser despreciado.

Si $x_0 = 0$, se obtiene la serie de Taylor respecto a las potencias de x

$$y = y_0 + y'_0 x + \frac{y''_0}{2!} x^2 + \dots + \frac{y_0^{(n)}}{n!} x^n + \dots \quad (4)$$

Ejemplo 1. Halla la solución de la ecuación diferencial $y = y - 4x + 3$ que satisface la condición inicial $x_0 = 0, y_0 = 3$.

△ Sustituyendo en el desarrollo (4) $y_0 = 3$, obtenemos

$$y = 3 + \frac{y'_0}{1} x + \frac{y''_0}{2!} x^2 + \frac{y'''_0}{3!} x^3 + \dots + \frac{y_0^{(n)}}{n!} x^n + \dots \quad (*)$$

Derivando sucesivamente la ecuación dada, tenemos

$$y'' = y' - 4 = y - 4x - 1, \quad y''' = y'' = y - 4x - 1,$$

$$y^{IV} = y^{III}, \text{ etc.}$$

Utilizando la condición inicial, encontramos

$$y'_0 = y_0 - 4x_0 + 3 = 3 + 3 = 6; \quad y''_0 = y_0 - 4x_0 - 1 = 3 - 1 = 2;$$

$$y'''_0 = 2; \quad y_0^{IV} = 2; \dots; \quad y_0^{(n)} = 2.$$

Sustituyamos y'_0, y''_0, y'''_0 en el segundo miembro de la relación (*); entonces obtenemos

$$y = 3 + 6x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \dots$$

La solución exacta de la ecuación dada es una función

$$y = 2e^x + 4x + 1.$$

Si se pone $h = 0,1$, se puede hacer la tabla de los valores de la solución de la ecuación diferencial dada. ▲

Ejemplo 2. Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' - x^2 y = 0$, que satisface la condición inicial $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 0$.

△ Al igual que en el ejemplo 1, buscaremos la solución de la ecuación dada en forma de la serie (4) respecto a las potencias de x .

x_i	0	0,1	0,2	0,3
Valores obtenidos de la resolución analítica	3	3,6021	4,2428	4,8996
Solución aproximada obtenida con ayuda de la serie de potencias	3	3,6103	4,2427	4,8999

Puesto que $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$, la serie (4) tiene la forma

$$y = 1 + \frac{y''_0}{2!} x^2 + \frac{y'''_0}{3!} x^3 + \dots + \frac{y^{(n)}_0}{n!} x^n + \dots \quad (*)$$

Escribamos la ecuación diferencial dada en la forma $y'' = x^2 y$. Derivando sucesivamente esta igualdad, tenemos

$$y''' = 2xy' + x^2 y'',$$

$$y^{IV} = 2y' + 2xy'' + 2xy' + x^2 y''' = 2y' + 4xy' + x^2 y''',$$

$$y^{V} = 2y'' + 4y'' + 4xy''' + 2xy'' + x^2 y^{IV} = 6y'' + 6xy'' + x^2 y^{IV},$$

$$y^{VI} = 12y''' + 8xy'' + x^2 y^{IV},$$

$$y^{VII} = 20y^{IV} + 10xy^{IV} + x^2 y^{V},$$

$$y^{VIII} = 30y^{IV} + 12xy^{V} + x^2 y^{VI}.$$

Sustituyendo sucesivamente en cada una de las desigualdades obtenidas las condiciones iniciales $x_0 = 0$; $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$, encontramos $y''(0) = 0$; $y'''(0) = 0$; $y^{IV}(0) = 2$; $y^V = y^{VI} = y^{VII} = 0$; $y^{VIII} = 30 \cdot 2 = 60$.

Por último, sustituyendo y'' , y''' , y^{IV} ... en el segundo miembro de la relación (*), obtenemos la solución buscada

$$y = 1 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{672} x^8 + \dots \blacktriangle$$

El método de desarrollo en serie de la solución se puede utilizar también para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo 3. Hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cos t - y \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = x \sin t + y \cos t, \end{cases}$$

que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Δ Pongamos

$$x = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2} t^2 + \frac{x'''(0)}{3!} t^3 + \dots;$$

$$y = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2} t^2 + \frac{y'''(0)}{3!} t^3 + \dots$$

Derivando las ecuaciones del sistema, tenemos

$$\begin{aligned}x'' &= x' \cos t - x \operatorname{sen} t - y' \operatorname{sen} t - y \cos t, \\y'' &= x' \operatorname{sen} t + x \cos t + y' \cos t - y \operatorname{sen} t, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Sustituyendo sucesivamente en cada una de las igualdades obtenidas las condiciones obtenidas, hallamos $x'(0) = \cos t|_{t=0} = 1$, $y'(0) = 0$, $x''(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $x'''(0) = 0$, $y'''(0) = 3$, etc.

La solución buscada tiene la forma

$$x = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots, \quad y = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + \dots \quad \blacktriangle$$

Método de coeficientes indeterminados. Supongamos que se da la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y) \quad (5)$$

con la condición inicial $y(x_0) = y_0$. El método de coeficientes indeterminados consiste en que la solución de la ecuación (5) se busca en forma de una serie con coeficientes desconocidos

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots, \quad (6)$$

que se determinan con ayuda de la sustitución de la serie (6) en la ecuación (5), luego se igualan los coeficientes de x de iguales grados y se utiliza la condición inicial. Los valores hallados de los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ se sustituyen en la serie (6).

Ejemplo 4. Con ayuda del método de coeficientes indeterminados hallar la solución de la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$, que satisface la condición inicial $x_0 = 0$, $y(x_0) = 1$.

△ Puesto que $x_0 = 0$, la serie (6) tomará la forma

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \quad (*)$$

Sustituyendo en la relación (*) $x = x_0$ e $y(x_0) = 1$, obtenemos $a_0 = 1$.

En adelante es cómodo desarrollar el segundo miembro de la ecuación $y' = x^2 + y^2$ respecto a las potencias de $(y - 1)$:

$$y' = x^2 + [(y - 1) + 1]^2 = x^2 + 1 + 2(y - 1) + (y - 1)^2. \quad (**)$$

Derivando la serie (*), tenemos

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots \quad (***)$$

Vamos a sustituir ahora en la igualdad (**) la expresión para y' de la igualdad (***), para y de la igualdad (*) y $a_0 = 1$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned}a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots &= 1 + x^2 + 2(a_1x + \\ &+ a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots) + (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)^2.\end{aligned}$$

Abramos paréntesis en el segundo miembro de la última igualdad, reduzcamos los términos semejantes e igualem los coeficientes de

x de iguales potencias. Como resultado obtenemos

$$a_1 = 1, \quad 2a_2 = 2a_1, \quad 3a_3 = 1 + 2a_2 + a_1^2, \quad 4a_4 = 2a_3 + 2a_1a_2,$$

de donde $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 4/3, a_4 = 7/6$.

Sustituyendo los valores hallados de los coeficientes en la serie (*), finalmente tenemos

$$y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \dots \blacktriangle$$

Ejemplo 5. Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' - x^2y = 0$, que satisface las condiciones iniciales $x_0 = 0, y(x_0) = 1, y'(x_0) = 0$.

△ Puesto que $x_0 = 0$, buscaremos la solución en forma de la serie

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (*)$$

Derivando dos veces la igualdad (*), tenemos

$$y' = a_1 + 2a_2x + 2a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + na_nx^{n-1}, \quad (**)$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots + a_n n(n-1)x^{n-2}. \quad (***)$$

Utilizando las condiciones iniciales, de las igualdades (*) y (**) obtenemos $a_0 = 1, a_1 = 0$.

Sustituyendo los valores hallados de los coeficientes en la serie (*), tenemos

$$y = 1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n. \quad (****)$$

Con el fin de determinar los demás coeficientes de la serie (****), sustituyamos en la ecuación diferencial dada la expresión para y'' de la igualdad (***) y para y de la igualdad (****)

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \dots + n(n-1) \times \\ & \times a_nx^{n-2} - x^2(1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n + \dots) = \\ & = 0 \end{aligned}$$

Agrupemos los términos de potencias iguales:

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 6a_3x + (12a_4 - 1)x^2 + (20a_5)x^3 + (30a_6 - a_2)x^4 + \\ & + (42a_7 - a_3)x^5 + \dots = 0. \end{aligned}$$

La igualdad obtenida es una identidad. Puesto que buscamos la solución para $x \neq 0$, nos queda poner iguales a cero todos los coeficientes de x de distintas potencias, o sea,

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad 12a_4 - 1 = 0, \quad \text{de donde } a_4 = 1/12,$$

$$a_5 = 0, \quad 30a_6 - a_2 = 0, \quad \text{de donde } a_6 = 0, \text{ etc.}$$

La solución buscada tiene la forma

$$y = 1 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{672}x^8 + \dots \blacktriangle$$

§ 9.4. Integración numérica de las ecuaciones diferenciales. Método de Euler

Resolver la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ por el método numérico, quiere decir que para la sucesión dada de los argumentos x_0, x_1, \dots, x_n y el número y_0 , sin determinar la función $y = F(x)$, han de encontrarse tales valores y_1, y_2, \dots, y_n que $y_i = F(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) y $F(x_0) = y_0$.

Ahora bien, los métodos numéricos permiten, en vez de hallar la función $y = F(x)$, obtener una tabla de valores de esta función para la sucesión dada de argumentos. La magnitud $h = x_k - x_{k-1}$ se llama *paso de integración*.

Consideremos algunos de los métodos numéricos.

Método de Euler. Este método es comparativamente muy aproximado y se emplea, en lo fundamental, para los cálculos preliminares. Sin embargo, las ideas en que se basa el método de Euler son de partida para varios otros métodos.

Supongamos que se da la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

con la condición inicial

$$x = x_0, y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Se necesita hallar la solución de la ecuación (1) en el segmento $[a, b]$.

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales; en este caso obtenemos la sucesión $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, donde $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) y $h = (b - a)/n$ es el paso de integración.

Elijamos el k -ésimo tramo $[x_k, x_{k+1}]$ e integremos la ecuación (1):

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = y(x) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k,$$

o sea,

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx. \quad (3)$$

Si en la última integral a función subintegral se toma constante sobre el tramo $[x_k, x_{k+1}]$ e igual a su valor inicial en el punto $x = x_k$, obtenemos

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = f(x_k, y_k) \cdot x \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k) (x_{k+1} - x_k) = y'_k h.$$

Entonces la fórmula (3) se escribe así:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h. \quad (3')$$

Designando $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, o sea, $y_k' h = \Delta y_k$, obtenemos

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k. \quad (4)$$

Continuando este proceso y tomando cada vez como constante la función subintegral en el trozo correspondiente e igual a su valor al comienzo del trozo, obtenemos la tabla de soluciones de la ecuación diferencial sobre el segmento dado $[a, b]$.

El sentido geométrico del método de Euler consiste en lo siguiente. En el intervalo (x_0, x_1) la curva integral se reemplaza por el seg-

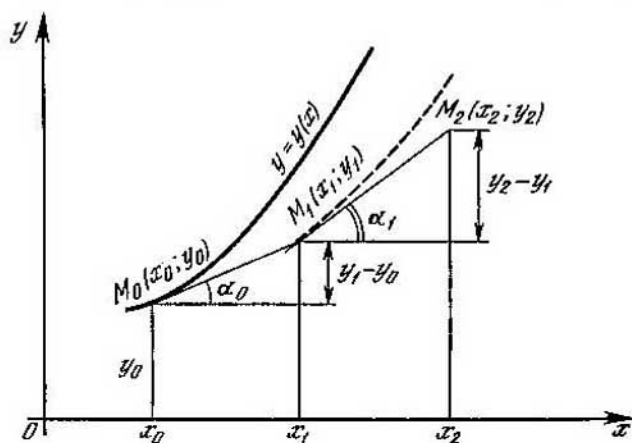


Fig. 9.2

mento de la tangente a ella, que pasa por el punto $M_0(x_0; y_0)$. Como se ve de la fig. 9.2, el coeficiente angular de esta tangente vale

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0) = f(x_0, y_0) = y'(x_0).$$

Luego del punto $M_1(x_1; y_1)$ se traza un nuevo segmento de la tangente a la curva integral, que pasa por este punto. El coeficiente angular de tal tangente es

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = f(x_1, y_1).$$

Continuando la construcción de tales segmentos, se obtiene la *quebrada de Euler*. La quebrada de Euler pasa por el punto dado $M_0(x_0, y_0)$ y aproxima la curva integral buscada.

Si la función $f(x, y)$ en cierto rectángulo

$$R \{ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$$

satisface la condición

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \leq N |y_1 - y_2| \quad (N = \text{const}) \quad (5)$$

y, además,

$$\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M \quad (M = \text{const}), \quad (6)$$

tiene lugar la siguiente estimación del error:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2N} [(1 + hN)^n - 1], \quad (7)$$

donde $y(x_n)$ es el valor de la solución exacta de la ecuación (1) para $x = x_n$ e y_n el valor aproximado, obtenido en el n -ésimo paso.

La fórmula (7) tiene, en lo principal, un empleo teórico. En la práctica se aplica, por regla general, un «cálculo doble». Primero el cálculo se realiza con paso h , luego el paso se divide y el cálculo repetido se ejecuta con paso $h/2$. El error de un valor más exacto y_n^* se estima por la fórmula

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx |y_n^* - y_n|. \quad (8)$$

Ejemplo 1. Haciendo uso del método de Euler, integrar en el segmento $[0; 1,5]$ la ecuación diferencial $y' = y - x$ que satisface la condición inicial $x_0 = 0, y_0 = 1,5$; el paso $h = 0,25$. Llevar a cabo los cálculos con cuatro cifras después de la coma.

△ Para la comodidad de los cálculos hagamos la tabla siguiente.

Tabla 9.2

i	x_i	y_i	$y'_i = y_i - x_i$	$\Delta y_i = h y'_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	1,5000	1,5000	0,3750
1	0,25	1,8750	1,6250	0,4062
2	0,50	2,2812	1,7812	0,4453
3	0,75	2,7265	1,9765	0,4941
4	1,00	3,2206	2,2206	0,5552
5	1,25	3,7758	2,5258	0,6314
6	1,50	4,4702		

Paso I. Haciendo uso de los datos iniciales, llenamos la primera fila en las columnas (2) y (3).

Paso II. De la ecuación $y'_i = y_i - x_i$ calculamos y'_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) en la columna (4).

Paso III. Multiplicamos el contenido de la columna (4) por h (calculamos $\Delta y_i = h y'_i$; $i = 0, 1, \dots, 5$) y escribimos el resultado en la columna (5) de esta misma fila.

Paso IV. Al contenido de la columna 3 adicionamos el contenido de la columna (5) de esta misma fila (calculamos $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$; $i = 0, 1, \dots, 5$) y escribimos el resultado en la columna (3) de la siguiente fila. Determinamos $x_{i+1} = x_i + h$ y luego repetimos los pasos II, III, IV hasta que quede recorrido todo el segmento $[0; 1,5]$. ▲

El método de Euler puede ser aplicado a la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones diferenciales de órdenes superiores. Sin embargo, en el último caso las ecuaciones

diferenciales han de ser reducidas a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Supongamos que se da el sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \quad (9)$$

con las condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0. \quad (10)$$

Los valores aproximados de $y(x_i) \approx y_i$ y de $z(x_i) \approx z_i$ se determinan por las fórmulas

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, z_{i+1} = z_i + \Delta z_i, \quad (11)$$

donde

$$\Delta y_i = hf_1(x_i, y_i, z_i), \Delta z_i = hf_2(x_i, y_i, z_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Ejemplo 2. Aplicando el método de Euler, resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{cases} y' = (z - y)x \\ z' = (z + y)x \end{cases}$ para las condiciones iniciales $y(0) = 1,0000$, $z(0) = 1,0000$ en el segmento $[0; 0,6]$; el paso $h = 0,1$. Realizar el cálculo con una cifra de reserva.

Tabla 9.3

i	x_i	y_i	$y'_i = (z_i - y_i)x_i$	$\Delta y_i = y'_i h$	z_i	$z'_i = (z_i + y_i)x_i$	$\Delta z_i = z'_i h$
0	0	1,0000	0	0	1,0000	0	0
1	0,1	1,0000	0	0	1,0000	0,2000	0,0200
2	0,2	1,0000	0,0040	0,0004	1,0200	0,4040	0,0404
3	0,3	1,0004	0,0180	0,0018	1,0604	0,6182	0,0618
4	0,4	1,0022	0,0480	0,0048	1,1222	0,8498	0,0850
5	0,5	1,0070	0,1001	0,0100	1,2072	1,1071	0,1107
6	0,6	1,0170			1,3179		

Para realizar los cálculos utilicemos la tabla 9.3. La sucesión de operaciones se ve claramente de la tabla. ▲

Ejemplo 3. Aplicando el método de Euler, construir en el segmento $[1; 1,5]$ la tabla de soluciones de la ecuación diferencial $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$ para las condiciones iniciales $y(1) = 0,77$, $y'(1) = -0,44$; el paso $h = 0,1$.

△ Con ayuda de la sustitución $y' = z$, $y'' = z'$ reemplacemos la ecuación dada por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -\frac{z}{x} - y \end{cases}$$

Tabla 9.4

i	x_i	y_i	$y'_i = z_i$	$\Delta y_i = h y'_i$	z_i	$z'_i = -\frac{z_i}{x_i} - y_i$	$\Delta z_i = z'_i h$
0	1,0	0,77	-0,44	-0,044	-0,44	-0,33	-0,033
1	1,1	0,726	-0,473	-0,047	-0,473	-0,296	-0,030
2	1,2	0,679	-0,503	-0,050	-0,503	-0,260	-0,026
3	1,3	0,629	-0,529	-0,053	-0,529	-0,222	-0,022
4	1,4	0,576	-0,551	-0,055	-0,551	-0,183	-0,018
5	1,5	0,521			-0,569		

para las condiciones iniciales $y(1) = 0,77$, $z(1) = -0,44$. Ejecutemos los cálculos con una cifra de reserva. Para realizar los cálculos utilizamos la tabla 9.4. ▲

§ 9.5. Modificaciones del método de Euler

Método perfeccionado de Euler. Consideremos la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

con la condición inicial

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Se necesita hallar la solución de la ecuación (1) en el segmento $[a, b]$.

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales por medio de los puntos $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), donde $h = (b - a)/n$ es el paso de integración. La esencia del método perfeccionado de Euler consiste en lo siguiente: primero se calculan los valores auxiliares de la función buscada $y_{i+1/2}$ en los puntos $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$ con ayuda de la fórmula

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} y'_i, \quad (3)$$

luego se halla el valor el segundo miembro de la ecuación (1) en el punto medio $y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ y se determina

$$y'_{i+1} = y_i + h y'_{i+1/2}. \quad (4)$$

Observación. La estimación del error en el punto x_i puede ser obtenida con ayuda del «cálculo doble»; el cálculo se repite con paso $h/2$ y el error de un valor más exacto y_i^* (para el paso $h/2$) se estima aproximadamente del modo siguiente:

$$|y_i^* - y(x_i)| \approx \frac{1}{3} |y_i^* - y_i|, \quad (5)$$

donde $y(x)$ es la solución exacta de la ecuación diferencial. El método perfeccionado de Euler es más exacto en comparación con el examinado en el § 9.4.

Ejemplo 1. Integrar por el método perfeccionado de Euler la ecuación diferencial $y' = y - x$ para las condiciones iniciales $x_0 = 0$, $y_0 = 1,5$ en el segmento $[0, 1]$, tomando $h = 0,25$. Realizar los cálculos con cuatro cifras después de la coma.

△ Los resultados de cálculos se citan en la tabla 9.5. Esta tabla se llena del modo siguiente.

Tabla 9.5

i	x_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$\frac{h}{2} \cdot y'_i$	$x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$	$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} y'_i$	$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$	$h y'_{i+1/2}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0	1,5000	1,5000	0,1875	0,125	1,6875	1,5625	0,3906
1	0,25	1,8906	1,6406	0,2051	0,3750	2,0957	1,7207	0,4302
2	0,50	2,3208	1,8208	0,2276	0,6750	2,5484	1,8734	0,4684
3	0,75	2,7892	2,0392	0,2549	0,8750	3,0441	2,1691	0,5423
4	1,00	3,3315	2,3315	0,2914	1,1250	3,6229	2,4974	0,6243
5	1,25	3,9558	2,7058	0,3382	1,3750	4,2940	2,9190	0,7298
6	1,50	4,6856						

Paso I. Según los datos iniciales llenamos la primera fila en las columnas (2) y (3).

Paso II. De la ecuación $y'_i = f(x_i, y_i) = y_i - x_i$ calculamos y'_i para la columna (4) ($i = 0, 1, \dots, 5$).

Paso III. Multiplicamos el contenido de la columna (4) por $h/2$ y de este modo determinamos $(h/2) \cdot y'_i$; escribimos el resultado en la columna (5).

Paso IV. Obtenemos el contenido de la columna (6) mediante la adición del valor corriente x_i y $h/2$.

Paso V. Al contenido de la columna (3) adicionamos el de la columna (5) y escribimos el resultado en la columna (7).

Paso VI. Sustituimos respectivamente los valores hallados $x_{i+1/2}$, $y_{i+1/2}$ [columnas (6) y (7)] en el segundo miembro de la ecuación diferencial dada, determinamos $y'_{i+1/2}$ y lo escribimos en la columna (8).

Paso VII. Multiplicamos el contenido de la columna (8) por el paso de integración h determinamos $h y'_{i+1/2}$ [columna (9)].

Paso VIII. Adicionamos el contenido de la columna (3) al de la columna (9) y escribimos el resultado obtenido $y_{i+1} = y_i + h y'_{i+1/2}$ ($i = 0, 1, \dots, 5$) en la columna (3) de la fila siguiente.

Luego repetimos todo el proceso de los cálculos, comenzando por el paso II. ▲

Método perfeccionado de Euler — Cauchy. La esencia del método de Euler — Cauchy consiste en lo siguiente. Primero se determina una magnitud auxiliar

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h y'_i, \quad (6)$$

luego se calcula $\tilde{y}'_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$ y por la fórmula

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{y'_i + \tilde{y}'_{i+1}}{2} \quad (7)$$

se halla la solución respectiva.

La estimación del error puede ser realizada por la fórmula (5) después de llevar a cabo el cálculo repetido con paso $h/2$.

Ejemplo 2. Valiéndonos del método perfeccionado de Euler—Cauchy, integrar la ecuación diferencial dada en el ejemplo 1.

△ Los resultados de los cálculos se dan en la tabla 9.6.

Tabla 9.6

i	x_i	y_i	$y'_i = y_i - x_i$	$h y'_i$	x_{i+1}	$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h y'_i$	$\tilde{y}'_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$	$\tilde{y}'_{i+1} + 1$	$\Delta y_i = \frac{h y'_i + h \tilde{y}'_{i+1}}{2}$
(1)	(2)	(2)	(3)	(4)	(5)	(7)	(8)	(9)	(10)
0	0	1,5000	1,5000	0,3750	0,25	1,8750	1,625	0,4062	0,3906
1	0,25	1,8906	1,6406	0,4102	0,50	2,3008	1,8008	0,4502	0,4302
2	0,50	2,3208	1,8208	0,4552	0,75	2,7760	2,0260	0,5065	0,4808
3	0,75	2,8016	2,0516	0,5129	1,00	3,3145	2,3145	0,5786	0,5458
4	1,00	3,3474	2,3474	0,5868	1,25	3,9342	2,6842	0,6710	0,6289
5	1,25	3,9763	2,7263	0,6816	1,50	4,6579	3,1579	0,7895	0,7355
6	1,50	4,7118							

La tabla se llena del modo siguiente.

Paso I. Según los datos iniciales llenamos la primera fila en las columnas (2) y (3).

Paso II. Determinamos el valor $y'_i = f(x_i, y_i) = y_i - x_i$ ($i = 0, 1, \dots, 5$) para la columna (4).

Paso III. El valor hallado y_i de la columna (4) lo multiplicamos por el paso de integración h y escribimos el resultado en la columna (5).

Paso IV. Determinamos $x_{i+1} = x_i + h$ ($i = 0, 1, \dots, 5$) para la columna (6).

Paso V. Adicionamos al contenido de la columna (3) el de la columna (5) y apuntamos el resultado en la columna (7), o sea, determinamos $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hy'_i$.

Paso VI. Sustituimos los valores hallados x_{i+1} e y_{i+1} en el segundo miembro de la ecuación diferencial dada y determinamos \tilde{y}'_{i+1} para la columna (8).

Paso VII. Multiplicamos el resultado de la columna (8) por el paso de integración h y determinamos $h\tilde{y}'_{i+1}$ [columna (9)].

Paso VIII. Encontramos Δy_i [columna (10)] para lo cual determinamos la semisuma de las magnitudes escritas en las columnas (5) y (9).

Paso IX. Adicionamos al contenido de la columna (3) el contenido de la columna (10) y apuntamos el resultado en la columna (3) de la fila siguiente, o sea, determinamos $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Luego repetimos todo el proceso de los cálculos, comenzando por el paso II. ▲

Método perfeccionado de Euler—Cauchy con tratamiento iterativo sucesivo. El método de Euler—Cauchy con tratamiento iterativo es más exacto que el de Euler—Cauchy anteriormente considerado. Su esencia consiste en que se realiza el tratamiento iterativo de cada valor hallado y_i . Primero se elige la aproximación no exacta

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad (8)$$

luego se construye el proceso iterativo:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})]. \quad (9)$$

La iteración se continúa hasta que dos aproximaciones sucesivas $y_{i+1}^{(k)}$ y $y_{i+1}^{(k+1)}$ no coincidan en los signos que interesan al calculador. Luego se toma $y_{i+1} \approx y_{i+1}^{k+1}$. Si, realizadas tres o cuatro iteraciones con el valor elegido de h , no llega la coincidencia de los signos necesarios, hace falta disminuir el paso de cálculo h .

Ejemplo 3. Aplicando el método de tratamiento iterativo, hallar con una exactitud de hasta cuatro cifras decimales coincidentes la solución de la ecuación $y' = y - x$ para las condiciones iniciales $y(0) = 1$. La solución ha de obtenerse sobre el segmento $[0, 1,5]$, al elegir $h = 0,25$.

△ Según la fórmula (8) encontramos

$$y_1^{(0)} = y_0 + h(y_0 - x_0) = 1,5000 + 0,375 = 1,8750$$

Luego, aplicando el proceso iterativo (9), determinamos sucesivamente

$$\begin{aligned}
 y_1^{(1)} &= y_0 + \frac{h}{2} [(y_0 - x_0) - (y_1^{(0)} - x_1)] = \\
 &= 1,5000 + 0,125 (1,5000 + 1,875 - 0,25) = 1,89062; \\
 y_1^{(2)} &= y_0 + \frac{h}{2} [(y_0 - x_0) + (y_1^{(1)} - x_1)] = \\
 &= 1,5000 + 0,125 (1,5000 + 1,89062 - 0,25) = 1,89258; \\
 y_1^{(3)} &= y_0 + \frac{h}{2} [(y_0 - x_0) + (y_1^{(2)} - x_1)] = \\
 &= 1,5000 + 0,125 (1,5000 + 1,89258 - 0,25) = 1,89282; \\
 y_1^{(4)} &= y_0 + \frac{h}{2} [(y_0 - x_0) + (y_1^{(3)} - x_1)] = \\
 &= 1,5000 + 0,125 (1,5000 + 1,89282 - 0,25) = 1,89285.
 \end{aligned}$$

En las dos últimas aproximaciones coinciden cuatro cifras. Por eso después del redondeo se puede tomar $y_1 \approx 1,8929$.

Volviendo a hacer uso de la fórmula (8) para $i = 1$ encontramos

$$\begin{aligned}
 y_2^{(0)} &= y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(y_1 - x_1) = \\
 &= 1,8929 + 0,25(1,8929 - 0,25) = 2,3036.
 \end{aligned}$$

Por la fórmula (9) determinamos las aproximaciones sucesivas:

$$\begin{aligned}
 y_2^{(1)} &= 1,8929 + 0,125 [1,6429 + (2,3036 - 0,50)] = 2,3237; \\
 y_2^{(2)} &= 1,8929 + 0,125 [1,6429 + (2,3237 - 0,50)] = 2,32622; \\
 y_2^{(3)} &= 1,8929 + 0,125 [1,6429 + (2,32622 - 0,50)] = 2,32654; \\
 y_2^{(4)} &= 1,8929 + 0,125 [1,6429 + (2,32654 - 0,50)] = 2,32658.
 \end{aligned}$$

Se pueden cesar las iteraciones y tomar $y_2 \approx 2,3266$. Aplicando luego las fórmulas (8) y (9), obtenemos la solución de la ecuación dada. Los resultados de los cálculos se dan en la tabla 9.7. ▲

Tabla 9.7

i	x_i	y_i	$y_{i+1}^{(0)}$	$y_{i+1}^{(1)}$	$y_{i+1}^{(2)}$	$y_{i+1}^{(3)}$	$y_{i+1}^{(4)}$	y_{i+1}
0	0	1,5000	1,875	1,89062	1,89258	1,89282	1,89285	1,8929
1	0,25	1,8929	2,3036	2,3237	2,32622	2,32654	2,32658	2,3266
2	0,50	2,3266	2,78325	2,80908	2,81231	2,81271	2,81276	2,8128
3	0,75	2,8128	3,3285	3,36171	3,36586	3,3664	3,36645	3,3664
4	1,00	3,3664	3,9580	4,0007	4,00603	4,0067	4,00679	4,0068
5	1,25	4,0068	4,6960	4,7509	4,75776	4,75870	4,75872	4,7587
6	1,50	4,7587						

§ 9.6. Método de Runge—Kutta

El método de Runge—Kutta es uno de los métodos de precisión elevada. Tiene mucho de común con el de Euler.

Supongamos que sobre el segmento $[a, b]$ se necesita hallar la solución numérica de la ecuación

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

con la condición inicial

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales por los puntos $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), donde $h = (b - a)/n$ es el paso de integración. Al igual que en el método de Euler, en el de Runge—Kutta los valores sucesivos y_i de la función buscada y se determinan con ayuda de la fórmula

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i. \quad (3)$$

Si desarrollamos la función y en serie de Taylor y nos limitamos a los términos hasta h^4 inclusivamente, el incremento de la función Δy puede ser representado en la forma

$$\begin{aligned} \Delta y = y(x+h) - y(x) &= hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \\ &+ \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x), \end{aligned} \quad (4)$$

donde las derivadas $y''(x)$, $y'''(x)$, $y^{IV}(x)$ se obtienen de la ecuación (1) mediante la derivación sucesiva.

En vez de los cálculos inmediatos con ayuda de la fórmula (4) en el método de Runge—Kutta se determinan cuatro números:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y), \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x+h, y+k_3). \end{aligned} \quad (5)$$

Se puede mostrar que si a los números k_1, k_2, k_3 , y k_4 se les asigna el peso de $1/6; 1/3; 1/3; 1/6$, respectivamente, la media ponderada de estos números, o sea,

$$\frac{1}{6} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{1}{3} k_3 + \frac{1}{6} k_4 \quad (6)$$

con exactitud de hasta los cuartos grados, es igual al valor de Δy calculado por medio de la fórmula (4):

$$\Delta y = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (7)$$

Ahora bien, para cada par de valores corrientes x_i e y_i con ayuda de las fórmulas (5) se determinan los valores

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \end{aligned} \quad (8)$$

y por la fórmula (7) se halla

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$$

y luego

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Los números k_1 , k_2 , k_3 y k_4 tienen un sentido geométrico simple. Supongamos que la curva M_0CM_1 (fig. 9.3) es la solución de la ecuación

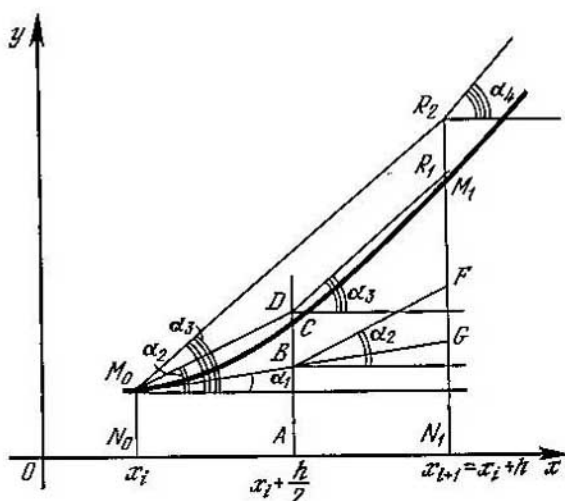


Fig. 9.3

diferencial (1) con la condición inicial (2). El punto C de esta curva se halla en la recta que es paralela al eje Oy y biseca el segmento $|x_i, x_{i+1}|$; B y G son los puntos de intersección de la tangente trazada a la curva en el punto M_0 con las ordenadas AC y N_1M_1 . Entonces el número k_1 , con exactitud de hasta el multiplicador h (donde $h = x_{i+1} - x_i$), es el coeficiente angular de la tangente en el punto M_0 a la curva integral M_0CM_1 , o sea, $k_1 = hy'_i = hf(x_i, y_i)$.

El punto B tiene las coordenadas $x = x_i + \frac{h}{2}$, $y = y_i + \frac{k_1}{2}$. Por consiguiente, el número k_2 , con exactitud de hasta el multiplicador h , es el coeficiente angular de la tangente trazada a la curva integral en el punto B (BF es el segmento de esta tangente).

Tracemos por el punto M_0 la recta paralela al segmento BF . Entonces la curva D tiene las coordenadas $x = x_i + \frac{h}{2}$, $y = y_i + \frac{k_2}{2}$ y k_3 , con exactitud de hasta el multiplicador h , que es el coeficiente angular de la tangente trazada a la curva integral en el punto D (DR_1 es el segmento de esta tangente). Por último, por el punto M_0 tracemos la recta, paralela a DR_1 , que cortará la prolongación M_1N_1 en el punto R_2 ($x_i + h$; $y_i + k_3$). Entonces k_4 , con la exactitud de hasta el multiplicador h , es el coeficiente angular de la tangente trazada a la curva integral en el punto R_2 .

Los cálculos según el método de Runge-Kutta es cómodo disponerlos de acuerdo con el esquema indicado en la tabla 9.8. Esta tabla se llena del modo siguiente.

Paso I. En las columnas (2) y (3) de la fila correspondiente se apuntan los valores necesarios de x e y . (Si la fila es la primera, se apuntan los datos iniciales x_0 e y_0).

Paso II. Los valores de x e y de la fila correspondiente se sustituyen en el segundo miembro de la ecuación diferencial (1), se determina $f(x, y)$ y se escribe en la columna (4) de esta misma fila.

Paso III. El valor obtenido de $f(x, y)$ en la columna (4) se multiplica por el paso de integración h , se calcula $k = hf(x, y)$ y se apunta en la columna (5) de esta misma fila.

Paso IV. Los valores hallados de k se multiplican por el coeficiente correspondiente (por 1 si éste es k_1 o k_4 , o bien por 2 si éste es k_2 o k_3), el resultado se escribe en la columna (6) de la fila respectiva.

Los pasos I, II, III, IV se repiten para determinar cada k en la i -ésima solución.

Los resultados de la sexta fila se suman, se dividen por 6 y se determina $\Delta y_i = \frac{1}{6} \Sigma$ e $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Luego se repiten todos los cálculos, comenzando por el paso I, hasta que no se recorra todo el segmento $[a, b]$.

El método de Runge-Kutta tiene el orden de precisión igual a h^4 sobre todo el segmento $[a, b]$. Es muy difícil estimar la exactitud de este método. Una estimación aproximada del error puede ser obtenida con ayuda del «cálculo doble», haciendo uso de la fórmula

$$|y_i^* - y(x_i)| \approx \frac{y_i^* - y_i}{15}, \quad (9)$$

donde $y(x_i)$ es el valor de la solución exacta de la ecuación (1) en el punto x_i ; mientras que y_i^* e y_i son los valores aproximados, obtenidos con el paso $h/2$ y h .

Tabla 9.8

i	x	y	$y' = f(x, y)$	$h = hf \times$ $\times (x, y)$	Δy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right)$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right)$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$f(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)})$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
					$\frac{1}{6} \Sigma = \Delta y_0$
1	x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$f(x_1, y_1)$	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}$	$f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}\right)$	$k_2^{(1)}$	$2k_2^{(1)}$
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}$	$f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}\right)$	$k_3^{(1)}$	$2k_3^{(1)}$
	$x_1 + h$	$y_1 + k_3^{(1)}$	$f(x_1 + h, y_1 + k_3^{(1)})$	$k_4^{(1)}$	$k_4^{(1)}$
					$\frac{1}{6} \Sigma = \Delta y_1$
2	x_2	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$			

Si ε es la exactitud prefijada de la solución, el número n (número de divisiones) para determinar el paso de integración $h = (b - a)/n$ se elige de modo que

$$h^4 < \varepsilon \quad (10)$$

No obstante, el paso de cálculo se puede cambiar al pasar de un punto a otro.

Para estimar lo correcto de la elección del paso h se utiliza la igualdad

$$q = \left| \frac{k_2^{(i)} - k_3^{(i)}}{k_1^{(i)} - k_2^{(i)}} \right|, \quad (11)$$

donde q debe ser igual a algunas centésimas, en el caso contrario el paso h ha de disminuirse.

Ejemplo 1. Se da la ecuación diferencial $y' = y - x$ que satisface la condición inicial $y(0) = 1,5$. Calcular con exactitud de hasta 0,01 la solución de esta ecuación para $x = 1,5$. Realizar el cálculo, haciendo uso del método de Runge—Kutta, con dos cifras de reserva.

△ Elegimos el paso inicial de los cálculos de h partiendo de la condición $h^4 < 0,001$. Entonces $h < 0,3$. Para comodidad de los cálculos tomemos $h = 0,25$. Todo el segmento de integración $[0, 1,5]$ se dividirá en seis partes iguales por los puntos $x_0 = 0$; $x_1 = 0,25$; $x_2 = 0,50$; $x_3 = 0,75$; $x_4 = 1,00$; $x_5 = 1,25$; $x_6 = 1,50$. De las condiciones iniciales tenemos $x_0 = 0$; $y_0 = 1,5$. Determinemos la primera aproximación $y_1 + \Delta y_0$, donde

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}).$$

Utilizando las fórmulas (8), obtenemos

$$k_1^{(0)} = (y_0 - x_0)h = 1,5000 \cdot 0,25 = 0,3750.$$

$$k_2^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2} \right) - \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \right] h = [(1,5000 + 0,1875) - 0,125] \cdot 0,25 = 0,3906,$$

$$k_3^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2} \right) - \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \right] h = [(1,5000 + 0,1953) - 0,125] \cdot 0,25 = 0,3926.$$

$$k_4^{(0)} = [(y_0 + k_3^{(0)}) - (x_0 + h)]h = [(1,5000 + 0,3926) - 0,125] \cdot 0,25 = 0,4106.$$

Por lo tanto,

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (0,3750 + 2 \cdot 0,3906 + 2 \cdot 0,3926 + 0,4106) = 0,3920;$$

$$y_1 = 1,5000 + 0,3920 = 1,8920.$$

La ulterior resolución de la ecuación se representa en la tabla 9.9 (véanse las págs. 404). Ahora bien, finalmente tenemos $y(1,5) = 4,74$. ▲

El método de Runge—Kutta puede ser aplicado también para la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Supongamos que se da el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z) \end{cases} \quad (12)$$

con las condiciones iniciales

$$x = x_0, y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0. \quad (13)$$

Tabla 9.9

i	x	y	$y' = f(x, y)$	$h = hf(x, y)$	Δy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	0	1,5000	1,5000	0,3750	0,3750
	0,125	1,6875	1,5625	0,3906	0,7812
	0,125	1,6953	1,5703	0,3926	0,7852
	0,25	1,8926	1,6426	0,4106	0,4106
					0,3920
1	0,25	1,8920	1,6420	0,4105	0,4105
	0,375	2,0973	1,7223	0,4306	0,8612
	0,375	2,1073	1,7323	0,4331	0,8662
	0,50	2,3251	1,8251	0,4562	0,4562
					0,4323
2	0,50	2,2343	1,8243	0,4561	0,4561
	0,625	2,5523	1,9273	0,4818	0,9636
	0,625	2,5652	1,9402	0,4850	0,9700
	0,75	2,8093	2,0593	0,5148	0,5148
					0,4841
3	0,75	2,8084	2,0584	0,5146	0,5146
	0,875	3,0657	2,1907	0,5477	1,0954
	0,875	3,0823	2,2073	0,5518	1,1036
	1,00	3,3602	2,3602	0,5900	0,5900
					0,5506
4	1,00	3,3590	2,3590	0,5898	0,5898
	1,125	3,6539	2,5289	0,6322	1,2641
	1,125	3,6751	2,5501	0,6375	1,2750
	1,25	3,9965	2,7465	0,6686	0,6686
					0,6360
5	1,25	3,9950	2,7450	0,6862	0,6862
	1,375	4,3381	2,9631	0,7408	1,4816
	1,375	4,3654	2,9904	0,7476	1,4952
	1,50	4,7426	3,2426	0,8106	0,8106
					9,7456
6	1,50	4,7406			

En este caso paralelamente se determinan los números Δy_i y Δz_i :

$$\begin{aligned}\Delta y_i &= \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \\ \Delta z_i &= \frac{1}{6} (l_1^{(i)} + 2l_2^{(i)} + 2l_3^{(i)} + l_4^{(i)}),\end{aligned}\tag{14}$$

donde

$$\begin{aligned}k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i, z_i); \\ l_1^{(i)} &= hg(x_i, y_i, z_i); \\ k_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right); \\ l_2^{(i)} &= hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right); \\ k_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right); \\ l_3^{(i)} &= hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right); \\ k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}); \\ l_4^{(i)} &= hg(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}).\end{aligned}$$

Entonces obtenemos la solución del sistema

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$$

Ejemplo 2. Se da el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y' = \frac{2y-x}{z} \\ z' = \frac{2y}{z+x} \end{cases}$$

para las condiciones iniciales $x_0 = 0,5$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$. Hallar la solución del sistema para $x = 0,6$. Los cálculos se realizarán con cinco cifras después de la coma.

△ Elegimos el paso $h = 0,1$ y hallamos los números $k_1, l_1, k_2, l_2, k_3, l_3, k_4, l_4$.

$$k_1 = h \cdot \frac{2y_0 - x_0}{z_0} = 0,1 \cdot \frac{2 - 0,5}{1} = 0,15000;$$

$$l_1 = h \cdot \frac{2y_0}{z_0 + x_0} = 0,1 \cdot \frac{2}{1,5} = 0,13333;$$

$$k_2 = h \left[\frac{2\left(y_0 + \frac{k_1}{2}\right) - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{z_0 + \frac{l_1}{2}} \right] = 0,1 \frac{2 \cdot 1,075 - 0,55}{1,06667} = 0,14100;$$

$$l_2 = h \left[\frac{2 \left(y_0 + \frac{k_1}{2} \right)}{\left(z_0 + \frac{l_1}{2} \right) + \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)} \right] = 0,1 \frac{2 \cdot 1,075}{1,06667 + 0,55} = 0,13299;$$

$$k_3 = h \left[\frac{2 \left(y_0 + \frac{k_2}{2} \right) - \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)}{z_0 + \frac{l_2}{2}} \right] = 0,1 \cdot \frac{2 \cdot 1,07050 - 0,55}{1,06650} = 0,14918;$$

$$l_3 = h \left[\frac{2 \left(y_0 + \frac{k_2}{2} \right)}{\left(z_0 + \frac{l_2}{2} \right) + \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)} \right] = 0,1 \cdot \frac{2 \cdot 1,07050}{1,06650 + 0,55} = 0,13245;$$

$$k_4 = h \left[\frac{2 \left(y_0 + k_3 \right) - \left(x_0 + h \right)}{z_0 + l_3} \right] = 0,1 \cdot \frac{2 \cdot 1,14918 - 0,16}{1,13245} = 0,14998;$$

$$l_4 = h \left[\frac{2 \left(y_0 + k_3 \right)}{\left(z_0 + l_3 \right) + \left(x_0 + h \right)} \right] = 0,1 \cdot \frac{2 \cdot 1,14918}{1,13245 + 0,6} = 0,13266;$$

Por consiguiente,

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (0,15 + 2 \cdot 0,14100 + 2 \cdot 0,14918 + 0,14998) = 0,14672;$$

$$\Delta z_0 = \frac{1}{6} (0,13333 + 2 \cdot 0,13299 + 2 \cdot 0,13245 + 0,13266) = 0,13281$$

y finalmente obtenemos el valor de las funciones buscadas en el punto $x=0,6$:

$$y_1 = 1 + 0,14672 = 1,14672; \quad z_1 = 1 + 0,13281 = 1,13281. \quad \blacktriangle$$

§ 9.7. Método de extrapolación de Adams

Al resolver una ecuación diferencial por el método de Runge-Kutta es necesario realizar muchos cálculos para hallar cada y_i . En el caso cuando el segundo miembro de la ecuación tiene una expresión analítica complicada, la resolución de la misma con ayuda del método de Runge-Kutta es acompañada de grandes dificultades. Por eso en la práctica se aplica el *método de Adams* que no requiere hacer un cálculo múltiple del segundo miembro de la ecuación.

Supongamos que se da la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

con la condición inicial

$$x = x_0, y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Se necesita hallar la solución de esta ecuación en el segmento $[a, b]$.

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales por los puntos $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Elijamos el trozo $[x_i, x_{i+1}]$ e

integremos la ecuación diferencial (1); entonces obtenemos

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx,$$

o bien

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx. \quad (3)$$

Para hallar la derivada hagamos uso de la segunda fórmula de interpolación de Newton (limitándonos en este caso por las diferencias de tercer orden);

$$y' = y'_i + t \Delta y'_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y'_{i-3}, \quad (4)$$

donde $t = (x - x_i)/h$ o bien

$$y' = y'_i + t \Delta y'_{i-1} + \frac{t^2+t}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t^3+3t^2+2}{6} \Delta^3 y'_{i-3}. \quad (4')$$

Sustituyendo la expresión para y' de la fórmula (4') en la relación (3) y teniendo en cuenta que $dx = h dt$, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= h \int_0^1 \left(y'_i + t \Delta y'_{i-1} + \frac{t^2+t}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t^3+3t^2+2t}{6} \Delta^3 y'_{i-3} \right) dt = \\ &= h y'_i + \frac{1}{2} \Delta (h y'_{i-1}) + \frac{5}{12} \Delta^2 (h y'_{i-2}) + \frac{3}{8} \Delta^3 (h y'_{i-3}). \end{aligned} \quad (5)$$

Designemos a continuación

$$q_i = y'_i h = f(x_i, y_i) \cdot h \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Entonces para toda diferencia tenemos $\Delta^m q_i = \Delta^m (y'_i h)$ y

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2} \Delta q_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{i-3}. \quad (6)$$

Con ayuda de la fórmula $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ obtenemos la solución de la ecuación. La fórmula (6) lleva el nombre de *fórmula de extrapola-ción de Adams*.

Para el comienzo del proceso se necesitan cuatro valores iniciales y_0, y_1, y_2 e y_3 , o sea, el llamado *segmento inicial* que puede ser hallado partiendo de la condición inicial (2) con la utilización de uno de los métodos conocidos. Por lo general, el segmento inicial de la solución se encuentra con ayuda del método de Runge—Kutta. Conociendo y_0, y_1, y_2, y_3 , se puede determinar

$$\begin{aligned} q_0 &= h y'_0 = h f(x_0, y_0); \quad q_1 = h y'_1 = h f(x_1, y_1); \\ q_2 &= h y'_2 = h f(x_2, y_2); \quad q_3 = h y'_3 = h f(x_3, y_3). \end{aligned} \quad (7)$$

Luego se hace la tabla de diferencias de la magnitud q . (tabla 9.10).

Tabla 9.10

i	x_i	y_i	Δy_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$q = h y'_i$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	x_0	y_0		$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	x_1	y_1		$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	
2	x_2	y_2		$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2		
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3			
4	x_4	y_4						
5	x_5							
6	x_6							

El método de Adams consiste en la prolongación de la tabla diagonal de diferencias con ayuda de la fórmula (6). Utilizando los números $q_3, \Delta q_2, \Delta^2 q_1, \Delta^3 q_0$ que se disponen en la tabla en diagonal, con ayuda de la fórmula (6), suponiendo en ésta $n = 3$ (el último valor conocido de y es y_3), se obtiene:

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2} \Delta q_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 q_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 q_0.$$

El valor obtenido Δy_3 se apunta en la tabla y se halla $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Luego, utilizando x_4 y el valor hallado y_4 , se encuentra $f(x_4, y_4), q_4, \Delta q_3, \Delta^2 q_2, \Delta^3 q_1$, o sea, se obtiene una nueva diagonal. Basándose en estos datos, se halla

$$\Delta y_4 = q_4 + \frac{1}{2} \Delta q_3 + \frac{5}{12} \Delta^2 q_2 + \frac{3}{8} \Delta^3 q_1; y_5 = y_4 + \Delta y_4.$$

Ahora bien, se prolonga la tabla de solución, calculando el segundo miembro de la ecuación diferencial (1) en cada etapa sólo una vez.

Para la estimación aproximada del error se aplica el principio de Runge que consiste en lo siguiente:

1) se encuentra la solución de la ecuación diferencial para el paso h ;

2) el valor del paso h se duplica y se halla la solución con el paso $H = 2h$;

3) se calcula el error del método, haciendo uso de la fórmula

$$\varepsilon = \frac{|\tilde{y}_n - \tilde{y}_{2n}|}{2^m - 1}, \quad (8)$$

donde \tilde{y}_n es el valor del cálculo aproximado con el paso doble $H = 2h$, e \tilde{y}_{2n} , el valor del cálculo aproximado con el paso h .

Observación. Al hacer el cálculo con el paso h se supone que en cada paso se comete un error proporcional a h^{m+1} y con el paso $2h$, un error proporcional a $(2h)^{m+1}$ si el orden de precisión del método está determinado y es igual a h^m .

Nótese que en la fórmula de extrapolación de Adams (6) las diferencias finitas terceras $\Delta^3 q_i$ se consideran constantes. Por eso la magnitud h del paso inicial se puede obtener de la desigualdad $h^4 < \varepsilon$, donde ε es la exactitud prefijada de la solución.

En la práctica se controla el proceso de diferencias finitas terceras, eligiendo h tal que las diferencias vecinas $\Delta^3 q_i$ y $\Delta^3 q_{i+1}$ se distingan entre sí no más que en una-dos unidades del orden prefijado (sin contar las cifras de reserva).

Ejemplo 1. Calcular para $x = 1,5$ con exactitud de hasta 0,01, valiéndose del método de Adams, el valor de la solución de la ecuación diferencial $y' = y - x$ si $x_0 = 0$ e $y_0 = 1,5$. Es cómodo hacer todos los cálculos con dos cifras de reserva.

△ Al igual que antes elegimos h de la relación $h^4 < 0,01$, o sea, $h = 0,25$. Tomemos el segmento inicial y_0, y_1, y_2, y_3 de la solución del ejemplo 1 dado en el § 9.6. Para resolver esta ecuación hacemos dos tablas: la principal (tabla 9.11) y la auxiliar (tabla 9.12). Su finalidad es clara de las mismas tablas.

Tabla 9.11

i	x_i	y_i	Δy_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$q_i = h y'_i$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0	1,5000		1,5000	0,3750	0,0355	0,0101	0,0028
1	0,25	1,8920		1,6420	0,4105	0,0456	0,0129	0,0037
2	0,50	2,3243		1,8243	0,4561	0,0585	0,0166	0,0047
3	0,75	2,8084	0,5504	2,0584	0,5146	0,0751	0,0213	
4	1,00	3,3588	0,6356	2,3588	0,5897	0,0964		
5	1,25	3,9944	0,7450	2,7444	0,6861			
6	1,50	4,7394						

Definitivamente tenemos $y(1,5) = 4,74$. ▲

El método de Adams se emplea también para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales y las ecuaciones diferenciales de n -ésimo orden.

Tabla 9.12

t	q_t	$\frac{1}{2} \Delta q_{t-1}$	$\frac{5}{12} \Delta^2 q_{t-2}$	$\frac{3}{8} \Delta^3 q_{t-3}$	Δy_t
3	0,5146	0,0293	0,0054	0,0011	0,5504
4	0,5897	0,0376	0,0069	0,0014	0,6356
5	0,6861	0,0482	0,0089	0,0018	0,7450

Tabla 9.13

i	x_i	y_i	Δy_i	p_i	Δp_i	$\Delta^2 p_i$	$\Delta^3 p_i$
0	0	1,0000		0,0000	0,0000	0,0004	0,0006
1	0,1	1,0000		0,0000	0,0004	0,0010	0,0010
2	0,2	1,0000		0,0004	0,0014	0,0020	0,0004
3	0,3	1,0004	0,0032	0,0018	0,0034	0,0024	
4	0,4	1,0036	0,0081	0,0052	0,0058		
5	0,5	1,0117	0,0150	0,0110			
6	0,6	1,0267					

i	x_i	z_i	Δz_i	g_i	Δg_i	$\Delta^2 g_i$	$\Delta^3 g_i$
0	0	1,0000		0,0000	0,0200	0,0004	0,0006
1	0,1	1,0000		0,0200	0,0204	0,0010	0,0013
2	0,2	1,0200		0,0404	0,0214	0,0023	0,0007
2	0,3	1,0604	0,0732	0,0618	0,0237	0,0030	
4	0,4	1,1336	0,0984	0,0855	0,0267		
5	0,5	1,2323	0,1271	0,1122			
6	0,6	1,3594					

Supongamos que se da el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z). \end{cases} \quad (9)$$

Entonces para este sistema las fórmulas de extrapolación de Adams se escriben así:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= p_i + \frac{1}{2} \Delta p_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 p_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 p_{i-3}, \\ \Delta z_i &= g_i + \frac{1}{2} \Delta g_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 g_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 g_{i-3}, \end{aligned} \quad (10)$$

donde

$$p_i = h y'_i = h f_1(x_i, y_i, z_i), \quad g_i = h z'_i = h f_2(x_i, y_i, z_i)$$

y

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i.$$

Ejemplo 2. Aplicando el método de Adams, resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x \end{cases}$$

para las condiciones iniciales $y(0) = 1,000$; $z(0) = 1,000$ en el segmento $[0; 0,6]$; el paso $h = 0,1$.

△ Tomemos el segmento inicial de la solución de la tabla 9.3 (antes hemos resuelto este sistema con ayuda del método de Euler). Buscaremos los valores de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ para $x_4 = 0,4$; $x_5 = 0,5$ y $x_6 = 0,6$, haciendo uso de las fórmulas (10) y designando $f_1(x, y, z) = y' = (x - y)x$ y $f_2(x, y, z) = z' = (z + y)x$. Los cálculos se dan en las tablas 9.13, 9.14 y 9.15 (las tablas 9.14 y 9.15 son auxiliares).

La tabla 9.14 se destina a determinar los segundos miembros del sistema dado y hallar p_i y g_i ; la tabla 9.15 sirve para determinar Δy_i y Δz_i con ayuda de las diferencias de las magnitudes p y g , obtenidas en la tabla 9.13. ▲

Tabla 9.14

i	x_i	y_i	z_i	y'_i	p_i	z'_i	g_i
0	0,0	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,1	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,2000	0,0200
2	0,2	1,0000	1,0200	0,0040	0,0004	0,4040	0,0404
3	0,3	1,0004	1,0604	0,0180	0,0018	0,6182	0,0618
4	0,4	1,0036	1,1336	0,0520	0,0052	0,8549	0,0855
5	0,5	1,0117	1,2323	0,1103	0,0110	1,1220	0,1122

Tabla 9.15

i	p_i	$\frac{1}{2} \Delta p_{i-1}$	$\frac{5}{12} \Delta^2 p_{i-2}$	$\frac{3}{8} \Delta^3 p_{i-3}$	Δy_i
3	0,0018	0,0007	0,000425	0,000225	0,0032
4	0,0052	0,0017	0,000850	0,000375	0,0081
5	0,0110	0,0029	0,0010	0,00045	0,0150
i	g_i	$\frac{1}{2} \Delta g_{i-1}$	$\frac{5}{12} \Delta^2 g_{i-2}$	$\frac{3}{8} \Delta^3 g_{i-3}$	Δz_i
3	0,0618	0,0407	0,000425	0,000225	0,0732
4	0,0855	0,0418	0,000958	0,000488	0,0987
5	0,1122	0,0134	0,00125	0,00026	1,1271

§ 9.8. Método de Milne

Al igual que el método de Runge—Kutta, el de Milne es un método de exactitud elevada.

Supongamos que en el segmento $[a, b]$ se necesita hallar la solución numérica de la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

con la condición inicial

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales por los puntos $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), donde $h = (b - a)/n$ es el paso de integración.

Utilizando los datos iniciales, encontramos por un método cualquiera los valores sucesivos $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$, $y_3 = y(x_3)$ de la función buscada $y(x)$. Así pues, llegan a ser conocidas y_i ($i = 0, 1, 2, 3$).

Las aproximaciones \bar{y}_i e $\bar{\bar{y}}_i$ para los siguientes valores y_i ($i = 4, 5, \dots, n$) se determinan sucesivamente con ayuda de las fórmulas de Milne:

$$\bar{y}_i = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2y'_{i-3} - y'_{i-2} + 2y'_{i-1}), \quad (3)$$

$$\bar{\bar{y}}_i = y_{i-2} + \frac{h}{3}(\bar{y}'_i + 4y'_{i-1} + y'_{i-2}), \quad (4)$$

donde $y'_i = f(x_i, \bar{y}_i)$.

Se puede mostrar que el error absoluto del valor $\bar{\bar{y}}_i$ es, aproximadamente, igual a

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29} |\bar{\bar{y}}_i - \bar{y}_i|. \quad (5)$$

Por eso, si $\varepsilon_i \leq \varepsilon$, donde ε es el error límite prefijado de la solución, se puede poner $y_i \approx \bar{y}_i$, e $y'_i = f(x_i, \bar{y}_i)$. Esto tiene lugar si \bar{y}_i e $\bar{\bar{y}}_i$ coinciden en las cifras decimales que nos interesan. Si la condición (5) se cumple, pasamos a calcular el siguiente valor y_{i+1} , repitiendo el proceso. En el caso contrario el paso h , comenzando con el lugar conocido, se disminuye y el segmento inicial respectivo se recalcula. Al igual que en el método de Runge—Kutta, la magnitud del paso inicial se obtiene de la desigualdad $h^4 < \varepsilon$.

Con el fin de deducir las fórmulas de Milne (3) y (4) utilicemos la primera fórmula de interpolación de Newton para la derivada y' en cierto punto escogido x_h . En este caso nos limitamos por las diferencias de tercer orden; esto es equivalente al hecho de que la integral $y = y(x)$ de la ecuación diferencial (1) se aproxima por un polinomio

de cuarto grado. Tenemos

$$y' = y'_h + q\Delta y'_h + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y'_h + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y'_h. \quad (6)$$

Abriendo paréntesis, encontramos

$$y' = y'_h + q\Delta y'_h + \frac{1}{2} (q^2 - q) \Delta^2 y'_h + \frac{1}{6} (q^3 - 3q^2 + 2q) \Delta^3 y'_h, \quad (7)$$

donde $q = (x - x_h)/h$.

Suponiendo en la relación (7) $k = i - 4$, obtenemos

$$y' = y'_{i-4} + q\Delta y'_{i-4} + \frac{1}{2} (q^2 - q) \Delta^2 y'_{i-4} + \frac{1}{6} (q^3 - 3q^2 + 2q) \Delta^3 y'_{i-4}. \quad (8)$$

Vamos a integrar la igualdad (8) respecto a x entre x_{i-4} y x_i :

$$\int_{x_{i-4}}^{x_i} y' dx = \int_{x_{i-4}}^{x_i} \left[y'_{i-4} + q\Delta y'_{i-4} + \frac{q^2 - q}{2} \Delta^2 y'_{i-4} + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y'_{i-4} \right] dx.$$

Teniendo en cuenta que $q = (x - x_{i-4})/h$ y $dx = h dq$, tenemos

$$\begin{aligned} y_i - y_{i-4} &= h \left\{ y'_{i-4} \int_0^4 dq + \Delta y'_{i-4} \int_0^4 q dq + \right. \\ &+ \Delta^2 y'_{i-4} \int_0^4 \frac{q^2 - q}{2} dq + \Delta^3 y'_{i-4} \int_0^4 \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6} dq \left. \right\} = \\ &= h \left(4y'_{i-4} + 8\Delta y'_{i-4} + \frac{20}{3} \Delta^2 y'_{i-4} + \frac{8}{3} \Delta^3 y'_{i-4} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Puesto que

$$\Delta y'_{i-4} = y'_{i-3} - y'_{i-4},$$

$$\Delta^2 y'_{i-4} = y'_{i-2} - 2y'_{i-3} + y'_{i-4},$$

$$\Delta^3 y'_{i-4} = y'_{i-1} - 3y'_{i-2} + 3y'_{i-3} - y'_{i-4},$$

entonces, sustituyendo estas expresiones en la igualdad (9), obtenemos la primera fórmula de Milne (3):

$$\bar{y}_i = y_{i-4} + \frac{4h}{3} (2y'_{i-3} - y'_{i-2} + 2y'_{i-1}).$$

Para deducir la segunda fórmula de Milne (4) pongamos en la relación (7) $k = i - 2$:

$$y' = y'_{i-2} + q\Delta y'_{i-2} + \frac{1}{2}q^2 - q \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{1}{6}(q^3 - 3q^2 + 2q) \Delta^3 y'_{i-2}, \quad (10)$$

donde $q = (x - x_{i-2})/h$ y $dx = h dq$.

Vamos a integrar la igualdad (10) respecto a x entre x_{i-2} y x_i :

$$\int_{x_{i-2}}^{x_i} y' dx = h \int_0^2 \left[y'_{i-2} + q\Delta y'_{i-2} + \frac{1}{2}(q^2 - q) \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{1}{6}(q^3 - 3q^2 + 2q) \Delta^3 y'_{i-2} \right] dq.$$

De aquí tenemos

$$y_i - y_{i-2} = h \left(2y'_{i-2} + 2\Delta y'_{i-2} + \frac{1}{3} \Delta^2 y'_{i-2} \right). \quad (11)$$

Tomando en consideración que $\Delta y'_{i-2} = y'_{i-1} - y'_{i-2}$ y $\Delta^2 y'_{i-2} = y''_i - 2y''_{i-1} + y''_{i-2}$, obtenemos la segunda fórmula de Milne (4):

$$\bar{y}_i = y_{i-2} + \frac{h}{3} (y'_i \pm 4y'_{i-1} + y'_{i-2}).$$

Ejemplo 1. Se da la ecuación diferencial $y' = y - x$ que satisface la condición inicial $x_0 = 0$, $y(x_0) = 1,5$. Calcular con exactitud de hasta 0,01 el valor de la solución de esta ecuación para $x = 1,5$. El cálculo ha de realizarse por el método combinado de Runge-Kutta y de Milne con dos cifras de reserva.

△ Vamos a elegir el paso inicial del cálculo. De la condición de $h^4 < 0,01$ obtenemos $h = 0,25$. Entonces todo el segmento de integración se divide en seis partes iguales por los puntos $x_0 = 0$; $x_1 = 0,25$; $x_2 = 0,50$; $x_3 = 0,75$; $x_4 = 1,00$; $x_5 = 1,25$; $x_6 = 1,50$. Tomemos el segmento inicial y_0, y_1, y_2, y_3 de la solución del ejemplo 1 dado en el § 9.6. Para resolver esta ecuación hagamos la tabla 9.16.

Así pues, obtenemos la respuesta: $y = (1,5) = 4,74$. ▲

Al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = \varphi(x, y, z) \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$; $z(x_0) = z_0$ las fórmulas de Milne se escriben por separado para las funciones $y(x)$ y $z(x)$. El orden de los cálculos queda el de antes.

Ejemplo 2. Se da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y' = \cos(y + 1,1z) + 1, \\ z' = \frac{1}{x + 2,1y^2} + x + 1 \end{cases}$$

Tabla 9.16

i	x_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i) = y_i - x_i$	\bar{y}_i	$\bar{y}'_i = f(x_i, \bar{y}_i) = \bar{y}_i - x_i$	$\bar{\bar{y}}_i$	e_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i) = y_i - x_i$	Revisión del paso de cálculo según los resultados de la fórmula (5)
0	0	1,5000	1,5000							
1	0,25	1,8920	1,6420							
2	0,50	2,3243	1,8243							
3	0,75	2,8084	2,0584							
4	1,00			3,3588	2,3588	3,3590	$7 \cdot 10^{-8}$	3,3590	2,3590	No se necesita
5	1,25			3,9947	2,7447	3,9950	10^{-8}	3,9950	2,7450	"
9	1,50			4,7402	3,2402	4,7406	$1,4 \cdot 10^{-8}$	4,7406		"

para las condiciones iniciales $y(0) = 3,14159$, $z(0) = 0$. Haciendo uso del método de Milne, con exactitud de hasta $\varepsilon = 0,0001$ hallar la solución de este sistema en el segmento $[0, 0,5]$, tomando el paso $h = 0,1$ y considerando conocidos los valores de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ para $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,2$; $x_3 = 0,3$. Estos valores son tales: $y(0,1) = 3,14184$; $y(0,2) = 3,14364$; $y(0,3) = 3,14903$; $z(0,1) = 0,10981$; $z(0,2) = 0,22960$; $z(0,3) = 0,35934$.

Δ Buscaremos los valores de las funciones $y(0,4)$, $y(0,5)$ y $z(0,4)$, $z(0,5)$ con ayuda de las fórmulas (3) a (5). Realicemos los cálculos utilizando dos tablas: una principal (tabla 9.17) y otra auxiliar (tabla 9.18).

Tabla 9.17

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
i	x_i	$\bar{Y}_i = (y_i, z_i)$		\bar{Y}'_i	
		\bar{y}_i	\bar{z}_i	\bar{y}'_i	\bar{z}'_i
0	0,0				
1	0,1				
2	0,2				
3	0,3				
4	0,4	3,16057	0,49906	0,15698	1,44678
5	0,5	3,18164	0,64870	0,27079	1,54596

(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
$\bar{Y}_i = Y_i$		$\bar{Y}'_i = Y'_i$		v_i	
\bar{y}_i	\bar{z}_i	$\bar{v}'_i = v'_i$	$\bar{z}'_i = z'_i$	$v_{i, 1}$	$v_{i, 2}$
3,14159	0,00000	0,00000	1,04824		
3,14184	0,10981	0,00732	1,14801		
3,14364	0,22960	0,03224	1,24773		
3,14903	0,35934	0,08001	1,34734		
3,16052	0,49905	0,15701	1,44678	$1,7 \cdot 10^{-6}$	0
3,18166	0,64869			$7 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$

Tabla 9.18

	4		5	
	v_i	z_i	v_i	z_i
$2Y'_{i-3}$	0,01464	2,29602	0,06448	2,49546
$-Y'_{i-2}$	-0,30224	-1,24773	-0,08001	-1,34734
$2Y'_{i-1}$	0,16002	2,69468	0,31402	2,89356
$\Sigma_i^{(1)}$	0,14242	3,74297	0,29849	4,04168
$\frac{4}{3} h \Sigma_i^{(1)}$	0,01898	0,49906	0,03980	0,53889
Y_{i-4}	3,14159	0,00000	0,14184	0,10981
\bar{Y}_i	3,16057	0,49906	3,18164	0,64870
Y'_{i-2}	0,03224	1,24773	0,08001	1,34734
$4Y'_{i-1}$	0,32004	5,38936	0,62804	5,7871
Y'_i	0,15698	1,44678	0,27079	1,54596
$\Sigma_i^{(2)}$	0,50926	8,08387	0,97884	8,68042
$\frac{h}{3} \Sigma_i^{(2)}$	0,01698	0,26945	0,03263	0,28935
Y_{i-1}	3,14364	0,22960	3,14903	0,35934
\bar{Y}_i	3,16062	0,49905	3,18166	0,64869

Apuntamos el segmento inicial de la solución en las columnas (7) y (8) de la tabla 9.17 y encontramos los valores y'_i y z'_i [columnas (9) y (10)]. Luego, utilizando los datos obtenidos y la fórmula (3), hallamos \bar{y}_4 y \bar{z}_4 (tabla 9.18).

Transponemos los valores \bar{y}_4 y \bar{z}_4 a la tabla principal [columnas (3) y (4)]. Determinamos \bar{y}'_4 y \bar{z}'_4 [columnas (5) y (6) y la tabla 9.17] y luego, volviendo a utilizar la tabla auxiliar, encontramos ya \bar{y}_4 y \bar{z}_4 . Sus valores los pasamos a las columnas (7) y (8) de la tabla 9.17. Hallamos

$$\varepsilon_{4.1} = \frac{1}{29} (\bar{y}_4 - \bar{y}_4), \quad \varepsilon_{4.2} = \frac{1}{29} (\bar{z}_4 - \bar{z}_4)$$

[las columnas (11) y (12) de la tabla 9.17]. Para el error admisible prefijado $\varepsilon = 0,0001$ vemos que no se necesita volver a calcular el segmento inicial y por y_4 se puede tomar \bar{y}_4 . Para encontrar $y(0,5)$ y $z(0,5)$ repetimos todo el proceso de cálculos.

Finalmente obtenemos: $y(0,4) = 3,16062$, $z(0,4) = 0,49905$, $y(0,5) = 3,18166$, $z(0,5) = 0,64869$. ▲

§ 9.9. Concepto de problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias

Consideremos la resolución de un problema de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias, citando como ejemplo una ecuación de segundo orden

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (1)$$

Un problema de contorno elemental de dos puntos para la ecuación (1) se plantea del modo siguiente: se necesita hallar una función $y = y(x)$ que dentro del segmento $[a, b]$ satisfaga la ecuación (1) y en los extremos del segmento, las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \varphi_1[y(a), y'(a)] &= 0, \\ \varphi_2[y(b), y'(b)] &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Examinemos algunos tipos de un problema de contorno de dos puntos para la ecuación (1).

Supongamos, por ejemplo, que se da la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y') \quad (3)$$

con las condiciones de contorno $y(a) = A$, $y(b) = B$ ($a < b$) o sea, se conocen los valores de la función buscada $y = y(x)$ en los puntos de frontera $x = a$ y $x = b$. Entonces la solución de la ecuación (3) representa geoméricamente la curva integral $y = y(x)$ que pasa por los puntos dados $M(a; A)$ y $N(b; B)$ (fig. 9.4).

Supongamos ahora que para la ecuación (3) se conocen los valores de las derivadas de la función buscada a en los puntos de frontera, o sea, $y'(a) = A_1$, $y'(b) = B_1$. Entonces la solución de la ecuación (3) significa geoméricamente que es necesario hallar tal curva integral $y = y(x)$ de esta ecuación que corte a las rectas $x = a$ y $x = b$ bajo los ángulos $\alpha = \arctg A_1$ y $\beta = \arctg B_1$, respectivamente, (fig. 9.5).

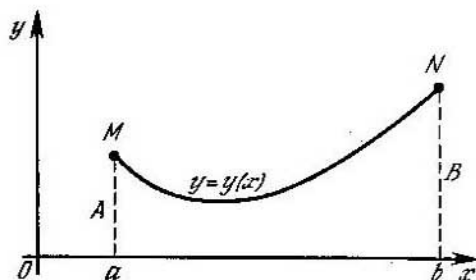


Fig. 9.4

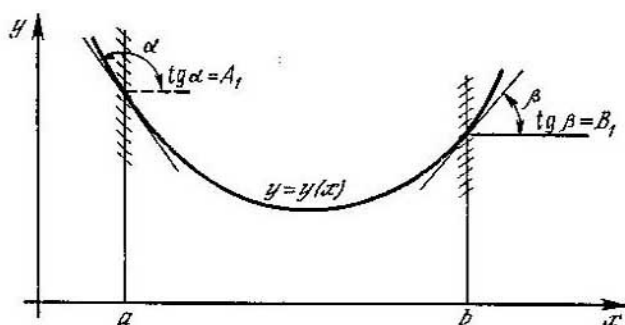


Fig. 9.5

Supongamos, por último, que para la ecuación (3) en un punto de frontera se conoce el valor de la función buscada $y(a) = A$ y en otro, el valor de la derivada de esta función $y'(b) = B_1$. Tal problema de contorno se llama *mixto*. La solución de la ecuación (3) significa geoméricamente que se necesita hallar una curva integral $y = y(x)$ de esta ecuación que pase por el punto $M(a; A)$ y corte la recta $x = b$ bajo el ángulo $\beta = \arctg B_1$ (fig. 9.6).

Si la ecuación diferencial y las condiciones de contorno son lineales, tal problema se dice *lineal*. En este caso la ecuación diferencial (1) y las condiciones de contorno (2) se escriben así:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad (4)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_1, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2. \end{cases} \quad (5)$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son las funciones continuas conocidas sobre el segmento $[a, b]$; $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2$, las constantes dadas con la particularidad de que $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Si $f(x) = 0$ para $a \leq x \leq b$, la ecuación se denomina *homogénea* y en el caso contrario, *heterogénea*.

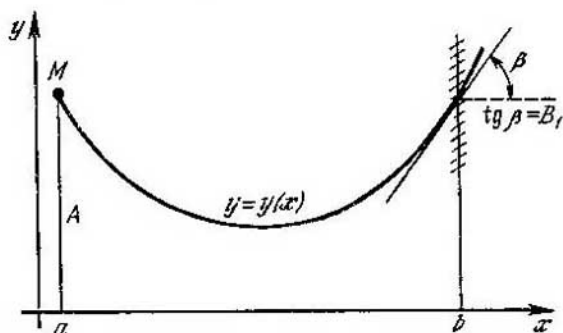


Fig. 9.6

Si $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_2 = 0$, la condición de contorno respectiva se llama *homogénea*. Si la ecuación diferencial y las condiciones de contorno son homogéneas, el problema de contorno se dice *homogéneo*.

§ 9.10. Método de diferencias finitas para las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Supongamos que se da la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

con las condiciones de contorno lineales de dos puntos

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \quad (2)$$

$$(|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0; |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0)$$

y $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son continuas sobre el segmento $[a, b]$. Luego, supongamos que $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = x_0 + ih$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) son los sistemas de nodos equidistantes con cierto paso $h = (b-a)/n$ y $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

Designemos los valores aproximados de la función buscada $y(x)$ y de sus derivadas $y'(x)$, $y''(x)$ en los puntos x_i , obtenidos como resultado del cálculo, por y_i , y'_i e y''_i , respectivamente. En cada nodo interior señalemos, aproximadamente, las derivadas $y'(x_i)$ e $y''(x_i)$ por las relaciones de diferencia finita

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} \quad (3)$$

y para los puntos extremos $x_0 = a$ y $x_n = b$ pongamos

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \quad (4)$$

Utilizando las fórmulas (3) y (4), reemplacemos aproximadamente la ecuación (1) las condiciones de contorno (2) por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A; \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \quad (5)$$

Así pues, llegamos al sistema algebraico de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas. Como resultado de la resolución de tal sistema obtenemos una tabla de valores aproximados de la función buscada.

Si se reemplazan $y'(x_i)$ e $y''(x_i)$ por las relaciones de diferencia central:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad (6)$$

se puede obtener fórmulas más exactas. Sin embargo, para las derivadas en los puntos extremos pueden ser utilizadas las fórmulas (5). Entonces obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A; \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases} \quad (7)$$

Ejemplo. Haciendo uso del método de diferencias finitas, con exactitud de hasta 0,001 hallar la solución del problema de contorno

$$\begin{cases} y'' - xy' + 2y = x + 1, \\ y(0,9) - 0,5y'(0,9) = 2, \\ y(1,2) = 1. \end{cases}$$

Δ Dividamos el segmento $[0,9; 1,2]$ en partes con un paso de $h = 0,1$. Entonces obtenemos cuatro puntos nodales con las abscisas $x_0 = 0,9$; $x_1 = 1,0$; $x_2 = 1,1$; $x_3 = 1,2$. En los puntos interiores $x_1 = 1,0$; $x_2 = 1,1$ reemplacemos la ecuación dada por la de diferencias finitas

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 2y_i = x_{i+1} \quad (i = 1, 2). \quad (*)$$

Utilizando las condiciones de contorno, escribamos las ecuaciones de diferencias finitas en los puntos finales

$$\begin{cases} y_0 - 0,5 \frac{y_1 - y_0}{h} = 2, \\ y_3 = 1. \end{cases} \quad (**)$$

Reduciendo los términos semejantes y teniendo en cuenta que $h = 0,1$, describimos las ecuaciones (*) y (**), respectivamente, en la forma

$$\begin{aligned} y_{i-1} (2 + 0,1x_i) - 4y_i (1 - 0,01) + y_{i+1} (2 - 0,1x_i) &= \\ &= 0,02 (x_i + 1), \\ 1,2y_0 - y_1 &= 0,4; \quad y_3 = 1. \end{aligned}$$

El problema dado se reduce a la resolución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1,2y_0 - y_1 = 0,4, \\ 2,1y_0 - 3,96y_1 + 1,9y_2 = 0,04, \\ 1,11y_1 - 3,96y_2 + 1,89y_3 = 0,042. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $y_0 = 1,406$; $y_1 = 1,287$; $y_2 = 1,149$; $y_3 = 1,000$. ▲

Ejercicios

1. Utilizando el método de Picard, hallar tres aproximaciones sucesivas de la solución de la ecuación diferencial:

a) $y' = 4y(1+x)$; la condición inicial $y(0) = 1$,

b) $y' = x - y$; la condición inicial $y(0) = 1$.

2. Encontrar los primeros siete términos del desarrollo en serie de potencias de la solución $y = y(x)$ de la ecuación $y'' + 0,1(y')^2 + (1 + 0,1x)y = 0$ para las condiciones iniciales $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

3. Hallar la solución de la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$, que satisfice la condición inicial $x_0 = 0$, $y(x_0) = 0$. Limitarse a los términos del desarrollo en serie de potencias que contienen x^7 .

4. Suponiendo $h = 0,1$, con ayuda del método de Euler resolver las ecuaciones diferenciales para las condiciones iniciales dadas en los segmentos indicados:

a) $y' = y + 3x$; $y(0) = -1$; $x \in [0, 0,5]$;

b) $y' = x - 2y$; $y(0) = 0$; $x \in [0, 1]$.

5. Aplicando el método perfeccionado de Euler, encontrar en el segmento $[0, 1]$ la tabla de solución de la ecuación diferencial $y' = y - \frac{2x}{y}$ para la condición inicial $y(0) = 1$; tomar $h = 0,2$.

6. Aplicando el método perfeccionado de Euler-Cauchy, resolver la ecuación diferencial dada en el ejercicio 5.

7. Con ayuda del método de Runge-Kutta, tomando $h = 0,1$, encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales para las condiciones iniciales dadas en los segmentos indicados:

a) $y' = x + y^2$; $y(1) = 0$; $x \in [1, 2]$;

b) $y' = x^2 - y$; $y(0) = 2$; $x \in [0, 1]$.

8. Aplicando el método de extrapolación de Adams, resolver la ecuación diferencial $y' = 2x - y$ para la condición inicial $y(0) = 1$ en el segmento $[0, 1]$. El segmento inicial de solución está dado: $y_0 = 1$, $y_1 = 0,9145$, $y_2 = 0,8562$, $y_3 = 0,8225$ (tomar $h = 0,1$).

Métodos aproximados de solución de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

§ 10.1. Clasificación de las ecuaciones diferenciales de segundo orden

Son muchos los problemas, prácticamente importantes, de hidrodinámica, transferencia de masa y de calor, conducción del calor, difusión, teoría de elasticidad y de otros campos del saber, que se describen por las ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales de segundo orden. Entre tales ecuaciones admiten una interpretación física más simple y clara las *ecuaciones con dos variables independientes* *):

$$a_1 u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = F, \quad (1)$$

donde $u(x, y)$ es la función incógnita a determinar; a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_1 , b_2 , c son las funciones dadas de las variables independientes x e y que se llaman *coeficientes* de la ecuación y F , la función dada de x e y , llamada *segundo miembro de la ecuación*. Si los coeficientes de la ecuación (1) son constantes, ésta se denomina *ecuación lineal de coeficientes constantes*. La ecuación (1) se dice homogénea si $F = 0$.

Se llama *solución* (o *integral*) de la ecuación (1) a toda función que, siendo sustituida en vez de u en la ecuación, la convierte en identidad.

Las condiciones necesarias para la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (1) dependen considerablemente de los coeficientes a_{11} , a_{12} , a_{22} . Vamos a suponer que al menos uno de estos coeficientes es distinto del cero idéntico (en el caso contrario tendríamos la ecuación de primer orden). Resulta que las propiedades de la solución de la ecuación (1) se determinan en gran medida por la magnitud (más exactamente, por el signo) del *discriminante* $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

Teniendo en cuenta la diferencia de las propiedades de la solución, y, por consiguiente, también la diferencia de los métodos de resolución ha sido adoptada la siguiente clasificación de las ecuaciones. Supongamos que en cierto dominio D el discriminante conserva el signo o por doquier es igual a cero.

*) Aquí y a continuación se utilizan las siguientes designaciones para las derivadas: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, etc.

La ecuación (1) se llama ecuación de *tipo elíptico* si $\Delta < 0$, ecuación de *tipo parabólico*, si $\Delta = 0$ y ecuación de *tipo hiperbólico* si $\Delta > 0$.

Si el signo del discriminante cambia al pasar de un punto del dominio D a otro, la ecuación se denomina *ecuación del tipo mixto*.

En su esencia la clasificación citada se debe al hecho de que las ecuaciones de los tipos elíptico, parabólico e hiperbólico describen problemas muy distintos por su sentido físico. Estos problemas se determinan por fenómenos físicos que son diferentes por su naturaleza. Así, las ecuaciones de conducción del calor y de difusión (de tipo parabólico) expresan las leyes de conservación de la energía y la materia. Estas ecuaciones se construyen basándose en las leyes de Fourier y de Nernst que son iguales desde el punto de vista de la formulación matemática.

Por otro lado, la ecuación de vibración de una cuerda (de tipo hiperbólico) representa la ley de conservación del impulso y se funda en la segunda ley de Newton.

Por último, la ecuación del tipo elíptico define la función de un género completamente distinto, o sea, la función que representa los procesos estacionarios que no varían en el tiempo.

Del curso de física matemática se sabe que para ciertas condiciones que se sobreponen a los coeficientes a_{11} , a_{12} , a_{22} (por ejemplo, si son derivables continuamente dos veces), existe la transformación de las variables

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (2)$$

que reducen la ecuación (1) a una de las formas canónicas siguientes:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = f \text{ (ecuación de tipo elíptico);} \quad (3)$$

$$u_{\xi\xi} = f \text{ (ecuación de tipo parabólico);} \quad (4)$$

$$u_{\xi\eta} = f \text{ o bien } u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = f \text{ (ecuación de tipo hiperbólico).} \quad (5)$$

Aquí $f = f(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})$ es la función de las variables independientes, de la función incógnita y de sus primeras derivadas. Nótese que la ecuación de tipo hiperbólico tiene dos formas canónicas equivalentes.

Para la ecuación (1) de coeficientes constantes la transformación de las variables (2) es lineal y tiene una forma simple. Citemos estas transformaciones para cada tipo de ecuaciones.

Para las ecuaciones de tipo elíptico:

$$\xi = y - \frac{a_{12}}{a_{11}} x; \quad \eta = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}} x. \quad (6)$$

Para las ecuaciones de tipo parabólico:

$$\xi = y - \frac{a_{12}}{a_{11}} x; \quad \eta = x. \quad (7)$$

Para las ecuaciones de tipo hiperbólico:

$$\xi = y - \frac{a_{12}}{a_{11}} x; \quad \eta = -\frac{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x. \quad (8)$$

Nótese que para las ecuaciones de tipo parabólico η , hablando en general, puede ser función arbitraria que no depende de ξ .

Ejemplo. Transformar la ecuación $u_{xx} + u_{xy} = F$, reduciéndola a la forma canónica.

Δ Aquí $a_{11} = 1$; $a_{12} = 0,5$; $a_{22} = 0$; por eso el discriminante $\Delta = 0,5^2 - 1 \cdot 0 = 0,25 > 0$. Por consiguiente, esta ecuación es de tipo hiperbólico. Utilizando la transformación correspondiente de las variables (8), encontramos

$$u_{xx} = \frac{1}{4}(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}), \quad u_{xy} = \frac{1}{2}(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}).$$

Ahora bien, la forma canónica de la ecuación inicial se escribe así:

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = -4\bar{F}(\xi, \eta),$$

donde

$$\bar{F}(\xi, \eta) = F(-2\eta, \xi - \eta).$$

Hemos obtenido la segunda forma canónica.

Se puede mostrar que la transformación de las variables $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$ lleva a la primera forma canónica; $u_{\alpha\beta} = -F(\beta - \alpha, \beta)$. \blacktriangle

A continuación consideraremos precisamente las formas canónicas (3) ... (5) de la ecuación (1).

§ 10.2. Clasificación de los problemas de contorno

En este párrafo consideraremos las ecuaciones canónicas elementales (3)...(5) del § 10.1. Según ya hemos mencionado en el § 10.1 distintos tipos de ecuaciones describen diferentes procesos físicos. Así, la ecuación *)

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), \quad (1)$$

llamada *ecuación de vibración de una cuerda* describe los procesos relacionados con las oscilaciones mecánicas, eléctricas, acústicas y otras.

La ecuación

$$u_t = u_{xx} = f(x, t), \quad (2)$$

que suele llamarse *ecuación de conducción del calor*, describe la propagación del calor, la difusión y otros procesos de transferencia.

La ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (3)$$

*) Aquí y a continuación para una mayor claridad física las variables x e y corresponden a las coordenadas espaciales y t , a la coordenada temporal.

denominada *ecuación de Poisson*, describe el campo calorífico estacionario, flujo potencial de un líquido y otros fenómenos físicos vinculados con la puesta en régimen estacionario.

Para describir por completo (unívocamente) uno u otro proceso físico es necesario, además de la misma ecuación de este proceso, asignar las condiciones iniciales (estado inicial del proceso) y el régimen de variación de la función a determinar en la frontera del dominio en que se desarrolla el proceso. Matemáticamente esto está relacionado con la no unicidad de la solución de la ecuación diferencial. Por eso para determinar unívocamente la solución conviene, además de la ecuación, asignar condiciones adicionales, llamadas *condiciones de contorno* que se subdividen en condiciones iniciales y condiciones de frontera. En consonancia con la clasificación citada se distinguen tres tipos de problemas de contorno.

Se llaman *condiciones iniciales* las condiciones que prefijan en cierto instante de tiempo, denominado generalmente inicial, el valor de la solución buscada (y, a veces, sus derivadas temporales) para todos los puntos del dominio en cuestión.

El primer tipo del problema de contorno es el *problema de Cauchy*. Así se llama el problema de resolución de la ecuación (1) ó (2) para el cual en calidad de condiciones adicionales se dan sólo las condiciones iniciales (estado inicial del proceso).

En el problema de Cauchy faltan las condiciones de frontera. Este problema se enuncia para las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas. La ausencia de las condiciones de frontera se determina por el hecho de que se considera un dominio indefinido o un pequeño intervalo inicial de tiempo, cuando la influencia de las fronteras es despreciablemente pequeña.

El segundo tipo del problema de contorno es el *problema sin condiciones iniciales* en el cual se asignan sólo las condiciones de frontera. A su vez, las condiciones de frontera suelen subdividirse en tres géneros.

Se llama *condición de frontera de primer género* la condición con la cual en la frontera del dominio en cuestión la función buscada toma los valores asignados.

Se llama *condición de frontera de segundo género* la condición con la cual en la frontera del dominio en cuestión la derivada normal de la función buscada debe tomar los valores asignados.

Se llama *condición de frontera de tercer género* la condición con la cual en la frontera del dominio en cuestión se asigna la combinación lineal de la función buscada y de su derivada normal.

Desde el punto de vista matemático las condiciones de frontera de los géneros I y II son casos particulares de la condición del género, III. Sin embargo, aquéllas se separan en forma independiente no sólo en virtud de las causas históricas sino también merced a su diferente interpretación física y cierta diferencia en los métodos de resolución de problemas de contorno correspondientes.

La ausencia de las condiciones iniciales en los problemas reales

puede determinarse por la consideración de los instantes de tiempo que están bastante alejados del inicial, cuando disminuye la influencia de las condiciones iniciales. Tales problemas se denominan, con frecuencia, *problemas de régimen estacionario*. Los problemas de este tipo pueden ser formulados para todos los tipos de ecuaciones (1) (3).

El tercer tipo de problemas de contorno es el *problema mixto*, en el cual se asignan las condiciones iniciales y de frontera. En cierto sentido este problema es la generalización de los problemas de los dos primeros tipos. El problema de Cauchy y el de contorno sin condiciones iniciales son dos casos límite contrarios del problema mixto. El primero se da para un lapso de tiempo bastante pequeño y el segundo, para un lapso de tiempo bastante grande. El problema mixto se formula para ecuaciones hiperbólicas y parabólicas.

§ 10.3. Planteamiento de los problemas de contorno más elementales

En este párrafo expondremos diferentes planteamientos de los problemas de contorno suponiendo que sus soluciones son suficientemente suaves. Aquí y a continuación por suavidad suficiente de una función entendremos la continuidad de la función y de número necesario de sus derivadas. En el planteamiento de los problemas de contorno la suavidad suficiente significa de ordinario la continuidad de las funciones y de las derivadas que forman parte de la ecuación diferencial y de las condiciones de contorno.

Se llama *solución clásica de un problema de contorno* a toda función que satisfaga la ecuación diferencial en cada punto dentro del dominio de representación de esta ecuación y que sea continua en el dominio en cuestión, incluyendo la frontera.

El planteamiento respectivo del problema de contorno se denomina *clásico*. Así pues, el planteamiento clásico impone automáticamente ciertas limitaciones para los datos de entrada del problema de contorno. Así, por ejemplo, se necesita la continuidad del segundo miembro de las ecuaciones (1)... (3) dadas en el § 10.2 y la suficiente suavidad de las funciones de frontera asignadas. Nótese que en los problemas prácticos más interesantes los segundos miembros, por ejemplo, tienen particularidades sustanciales, por eso el planteamiento clásico resulta ya insuficiente. En tales casos se introduce el concepto de solución generalizada que dejamos sin examinar limitándonos a la consideración de la solución clásica.

Problema de Cauchy para un dominio infinito. Vamos a formular este problema para la ecuación de vibración de la cuerda y para la ecuación de conducción del calor.

Consideremos el proceso de vibración de una cuerda delgada infinita (muy larga) sometida a la fuerza exterior continuamente distribuida con densidad l . Supongamos que la fuerza actúa en un plano (fig. 10.1) que es el plano de vibración de la cuerda (x, u), y ésta no es sino un hilo elástico flexible. Supongamos que la tensión produci-

da en la cuerda debido a su flexión se subordina a la ley de Hooke y que las mismas vibraciones son bastante pequeñas. Entonces la magnitud del desplazamiento $u(x, t)$ satisface la ecuación de vibración de la cuerda

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) \quad (t > 0, -\infty < x < \infty). \quad (1)$$

Para la univocidad del proceso es necesario asignar, además, el desplazamiento inicial y la distribución inicial de las velocidades. Matemáticamente, esto corresponde a la representación de las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_1(x, 0) = u_1(x). \quad (2)$$

Se necesita hallar la solución clásica de la ecuación (1), que satisface las condiciones iniciales (2).

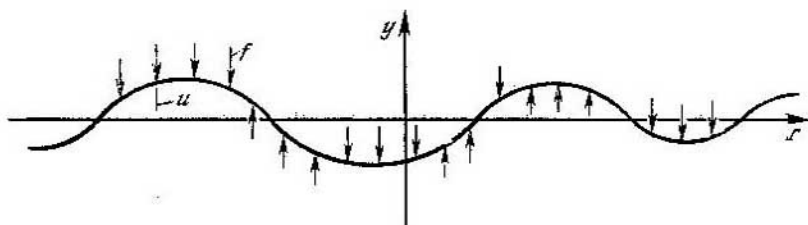


Fig. 10.1

El problema (1), (2) formulado de esta manera se llama *problema de Cauchy para la ecuación hiperbólica*.

Vamos a investigar ahora el proceso de distribución de la temperatura en una barra delgada infinita (muy pequeña). Se supone que el flujo calorífico se subordina a la ley de Fourier y que la variación de la temperatura del cuerpo es proporcional a la cantidad de calor comunicada a este último. Supongamos que dentro de la barra puede desprenderse y absorberse el calor que se caracteriza por la densidad de las fuentes térmicas f . Entonces la distribución de la temperatura en la barra se describe por la ecuación de conducción del calor:

$$u_t - u_{xx} = f(x, t) \quad (t > 0, -\infty < x < \infty). \quad (3)$$

Para la representación unívoca del proceso es necesario señalar la distribución inicial de la temperatura. Esto corresponde a la representación de la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (4)$$

Se necesita hallar la solución clásica de la ecuación (3), que satisface la condición inicial (4).

El problema formulado (3), (4) se llama *problema de Cauchy para la ecuación parabólica*.

Al plantear los problemas de contorno y, sobre todo, al resolverlos numéricamente es necesario responder a las tres siguientes cuestiones fundamentales correspondientes a los requisitos físicos naturales:

1. ¿Existe o no la solución del problema planteado? ¿No está ésta predeterminada por las condiciones de contorno?

2. Si la solución existe ¿es ésta única?

3. ¿Depende o no la solución continuamente de los datos iniciales del problema de contorno (f , u_0 , u_1 , etc.) o sea, cambia o no la solución al variar continuamente el segundo miembro de la ecuación y las condiciones de contorno? Esta propiedad se llama *estabilidad de la solución* respecto a los datos de entrada.

El problema de contorno se dice *correcto* si su solución existe, es única y estable.

El problema clásico de Cauchy, citado anteriormente, para la ecuación de vibración de la cuerda es correcta si las funciones f , u_0 y u_1 son suficientemente suaves.

Para que sea correcto el problema de Cauchy concerniente a la ecuación de conducción del calor se necesita, además de la suavidad de f y u_0 , el carácter limitado de la solución.

Problema estacionario (problema sin los datos iniciales).

Consideremos el régimen estacionario de distribución de la temperatura en una placa delgada limitada de forma arbitraria con una frontera suave. Supongamos que la función $u(x, y)$ expresa la temperatura de cada punto de la placa. Siempre que se trate de leyes coherentes de propagación del calor, descritas anteriormente al formular el problema de Cauchy para la ecuación de conducción del calor, la función $u(x, y)$ satisface la ecuación de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y); (x, y) \in D, \quad (5)$$

donde la función f asigna la densidad de las fuentes térmicas de la placa. En caso de no existir las fuentes ($f = 0$) la ecuación (5) se llama *ecuación de Laplace*:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (6)$$

Para describir unívocamente el proceso es necesario asignar el régimen térmico en la frontera de la placa. Esto puede hacerse asignando la distribución de la temperatura en la frontera o la distribución del flujo calorífico.

Es posible también el régimen de equilibrio térmico del cuerpo radiante con el medio ambiente. Según el régimen térmico en la frontera se obtienen tres condiciones de frontera para la función $u(x, y)$. Sea Γ la frontera del campo dado D de definición de la ecuación (6). La formulación matemática de las condiciones de frontera puede ser representada del modo siguiente:

condición de frontera de género I:

$$u|_{\Gamma} = \varphi_0(x, y); (x, y) \in \Gamma; \quad (7)$$

condición de frontera de género II:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \varphi_1(x, y); \quad (x, y) \in \Gamma; \quad (8)$$

condición de frontera de género III:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \lambda u \Big|_{\Gamma} = \varphi_2(x, y); \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (9)$$

La derivada se toma sobre la normal exterior a la curva Γ ; $\lambda > 0$ es el coeficiente de conducción del calor; $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ son los asignados sobre la función Γ , con la particularidad de que φ_2 es el producto del coeficiente de conductibilidad térmica por la temperatura del medio ambiente que tiene contacto con el cuerpo.

De este modo, el problema de contorno consiste en encontrar la solución clásica de la ecuación (5) ó (6), que satisfaga una de las condiciones de frontera (7) ... (9).

De acuerdo con el tipo de condiciones de frontera se distinguen: el primer problema de contorno (5), (7), o sea, el *problema de Dirichlet*; el segundo problema de contorno (5), (8), o sea, el *problema de Neumann* y el tercer problema de contorno (5), (9).

Para los datos de entrada suficientemente suaves los problemas de contorno primero y tercero concernientes a las ecuaciones de Poisson y de Laplace son correctos.

Para el problema de Neumann el teorema de unicidad consiste en que al ser iguales las condiciones de frontera dos soluciones cuyas pueden distinguirse en una magnitud constante.

En los problemas de física matemática ocupan importante lugar las funciones armónicas.

La función $u(x, y)$ se llama *armónica* en cierto dominio D si es continua junto con sus derivadas de segundo orden y satisface la ecuación (6) en este dominio.

Citemos algunas propiedades de las funciones armónicas.

1° (**principio del máximo**). Si la función $u(x, y)$ está definida y es continua en $\bar{D} = D \cup \Gamma$, y satisface la ecuación (6) en D , los valores máximo y mínimo se alcanzan en la frontera Γ , o sea,

$$\begin{aligned} \max_{(x, y) \in \bar{D}} u(x, y) &\leq \max_{(x, y) \in \Gamma} u(x, y), & \min_{(x, y) \in \bar{D}} u(x, y) &\geq \\ &\geq \min_{(x, y) \in \Gamma} u(x, y). \end{aligned}$$

2° (**corolario de la propiedad 1°**). Si las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas en \bar{D} y armónicas en D , $u \leq v$ para $(x, y) \in \Gamma$, entonces $u \leq v$ para $(x, y) \in D$.

3° (**corolario de la propiedad 1°**). Si las funciones u y v son continuas en \bar{D} y armónicas en D , con la particularidad de que $|u| \leq v$ para $(x, y) \in \Gamma$, entonces $|u| \leq v$ para $(x, y) \in D$.

Problema de contorno mixto. Consideremos el problema de propagación del calor en una barra delgada de longitud unitaria. Coloque-

mos uno de sus extremos en el punto $x = 0$ y otro en el punto $x = 1$. En tal barra la distribución de la temperatura durante cierto intervalo de tiempo $0 < t < T$ se describe por la ecuación

$$u_t - u_{xx} = f \quad (0 < x < 1, 0 < t \leq T) \quad (10)$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (11)$$

y, además, en este caso para la unicidad de la solución es necesario asignar el régimen de temperatura en los extremos de la barra. Esto se puede hacer con ayuda de las condiciones de frontera análogas a las que hemos formulado para las ecuaciones de Poisson y de Laplace.

Condición de frontera de género I (en el extremo de la barra $x = 0$ está asignada la temperatura):

$$u(0, t) = \varphi_0(t) \quad (0 < t \leq T). \quad (12)$$

Condición de frontera de género II (en el extremo de la barra $x = 0$ está asignado el flujo calorífico):

$$u_x(0, t) = \varphi_1(t) \quad (0 < t \leq T) \quad (13)$$

Condición de frontera de género III:

$$-u_x(0, t) + \lambda u(0, t) = \varphi_2(t) \quad (0 < t \leq T). \quad (14)$$

Para el otro extremo de la barra $x = 1$ los segundos miembros de las condiciones de frontera (12 ... (14) se reemplazan por $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$, respectivamente. Nótese que las condiciones inicial y de frontera deben satisfacer las así llamadas *condiciones de conjugación*, o sea para la condición (12) $u_0(0) = \varphi_0(0)$, para la condición (13) $u_{0x}(0) = \varphi_1(0)$ y para la condición (14) $-u_{0x}(0) + \lambda u_0(0) = \varphi_2(0)$. Las condiciones análogas de conjugación han de cumplirse también en el otro extremo de la barra $x = 1$.

Así, para el primer problema de contorno las condiciones de conjugación significan que

$$u_0(0) = \varphi_0(0); \quad u_0(1) = \psi_0(0). \quad (15)$$

En el caso general en diferentes extremos de la barra pueden existir diferentes condiciones, así que el número total de todas las combinaciones posibles es igual a 6.

Enunciemos uno de los posibles problemas de contorno. Hallar la solución clásica de la ecuación (10), que satisface la condición inicial (11) y las siguientes condiciones de frontera

$$u(0, t) = \varphi_0(t); \quad u(1, t) = \psi_0(t) \quad (0 < t \leq T). \quad (16)$$

Este problema (10), (11), (16) suele llamarse primer problema de contorno para la ecuación de conducción del calor. El problema de contorno (10), (11) con las condiciones de frontera (13) ó (14) en ambos extremos de la barra se llama segundo o tercer problema de contorno, respectivamente.

De un modo análogo se plantean también otros problemas de contorno con diferentes combinaciones de las condiciones de frontera (12) ... (14) en ambos extremos de la barra.

Los problemas de contorno de los géneros primero, segundo y tercero son correctos si se cumplen las condiciones correspondientes de suavidad y de conjugación para los datos de entrada.

Las soluciones de la ecuación de conducción del calor poseen la siguiente propiedad importante, análoga a la que hemos citado para la solución de la ecuación de Laplace.

Principio del máximo. Si la función $u(x, t)$ es continua en el dominio $\bar{D}_T \{0 \leq t \leq T; 0 \leq x \leq 1\}$ y satisface la ecuación (10), para $f = 0$ los valores máximo y mínimo de la función $u(x, t)$ se alcanzan en el instante inicial o en los puntos de la frontera $x = 0$ ó $x = 1$.

Consideremos ahora las vibraciones de una cuerda delgada de longitud unitaria. La magnitud del desplazamiento $u(x, t)$ se describe por la ecuación de tipo hiperbólico

$$u_{tt} - u_{xx} = f \quad (0 < x < 1, t > 0). \quad (17)$$

En este caso las condiciones iniciales tienen la forma

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (18)$$

Consideraremos las condiciones de frontera en la misma forma que para la ecuación de conducción del calor, o sea (12) ... (14). El problema (17) y (18) con iguales condiciones de frontera en ambos extremos de la forma (12) ... (14) se llama, respectivamente, problema de contorno primero, segundo y tercero para la ecuación hiperbólica. Todos estos problemas son correctos si se cumplen las condiciones correspondientes de suavidad y de conjugación para los datos de entrada.

A título de ejemplo enunciemos el primer problema de contorno para la ecuación de vibración de la cuerda.

Hallar la función $u(x, t)$ que satisface la ecuación (17), las condiciones iniciales (18) y las siguientes condiciones de contorno:

$$u(0, t) = \varphi_0(t); \quad u(1, t) = \psi_0(t) \quad (t > 0). \quad (19)$$

El sentido físico de las condiciones de frontera de género I consiste en que ambos extremos de la cuerda vibran en los regímenes dados según las leyes de las funciones dadas φ_0 y ψ_0 . Las condiciones de frontera de género II corresponden al hecho de que en el extremo está asignada la ley de acción de la fuerza. La condición de frontera III corresponde a la sujeción elástica del extremo de la cuerda.

§ 10.4. Método de diferencias finitas. Conceptos fundamentales

Para los problemas de contorno elementales, enunciados en el § 10.3, en diferentes cursos de física matemática se dan algunas soluciones exactas. Al mismo tiempo incluso las ecuaciones lineales que

describen los procesos reales en su mayoría son tales que no permiten construir una solución exacta con ayuda de funciones elementales. En semejantes casos se recurre a los métodos aproximados. De ordinario se consideran dos tipos de soluciones aproximadas: analíticas y numéricas. Examinemos los métodos numéricos fundados en la aproximación de diferencias de las derivadas. Tal enfoque se denomina **método de diferencias, método de diferencias finitas o método de rejillas.**

Para reducir los cálculos vamos a ilustrar este método citando las ecuaciones elementales (para las cuales, tal vez, se obtuvo también la solución exacta), teniendo presente que los principios fundamentales de construcción de los esquemas de diferencias se extienden a ecuaciones más generales.

Supongamos que se da una ecuación diferencial lineal escrita en la siguiente forma simbólica:

$$Lu(x, y) = f(x, y); (x, y) \in D. \quad (1)$$

Aquí u es la solución buscada de la ecuación; L , cierto operador diferencial que designa abreviadamente la operación diferencial correspondiente; f , el segundo miembro de la ecuación (función asignada).

Se sabe que para la unicidad de la solución de la ecuación (1) es necesario adjuntarle, además, también las condiciones de contorno (iniciales y de frontera). Escribamos estas condiciones también en la forma de una igualdad simbólica

$$lu(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

donde l es cierto operador que designa abreviadamente el primer miembro de la condición de contorno; φ , el segundo miembro de la condición de contorno (función asignada); Γ , la frontera del dominio D .

Vamos a ilustrar los conceptos fundamentales del método de diferencias finitas, citando a título de ejemplo la resolución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el cuadrado $D^0 \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ con la frontera $\Gamma^0 \{x = 0, x = 1, 0 \leq y \leq 1; y = 0, y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$:

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0; (x, y) \in D^0; \quad (3)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{4}xy(x+1)(y+1); (x, y) \in \Gamma^0. \quad (4)$$

Ahora bien, para el problema (3), (4) el operador L transforma la función u en expresión diferencial $u_{xx} + u_{yy}$. En semejantes casos se escribe que

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

el segundo miembro de la ecuación $f = 0$; el operador de condiciones de frontera es operador idéntico, o sea, transforma la función u en u : $lu \equiv u$; el segundo miembro de la condición de contorno tiene la

forma

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0; & x=0, 0 \leq y \leq 1; \\ 0; & 0 \leq x \leq 1, y=0; \\ \frac{1}{2}y(y+1); & x=1, 0 \leq y \leq 1; \\ \frac{1}{2}x(x+1); & 0 \leq x \leq 1, y=1. \end{cases}$$

El método de diferencias de resolución del problema (1), (2) puede ser representado en forma de dos etapas:

1) la construcción del esquema de diferencias que aproxima el problema continuo dado;

2) la obtención de la solución del problema de diferencias y la estimación del error de esta solución.

Examinemos con más detalles estas cuestiones.

Al construir el esquema de diferencias el primer paso consiste en reemplazar el dominio \bar{D} de variación continua de los argumentos por el dominio de su variación discreta, o sea, por el dominio reticular $\bar{\omega}_h$ (o simplemente por la red), es decir, por el conjunto de los puntos (x_n, y_m) llamados *nodos de la red*. Para el cuadrado \bar{D}^0 el dominio reticular puede ser construido del modo siguiente. Tracemos las rectas

$$x_n = nh, y_m = mh \quad (h = 1/N; n, m = 0, 1, \dots, N). \quad (5)$$

El conjunto de los puntos de intersección (x_n, y_m) de estas rectas es precisamente el dominio reticular $\bar{\omega}_h$ y los mismos puntos forman los nodos de la red. Toda función $v(x, y)$ definida sobre la red $\bar{\omega}_h$ se denomina *función de red* y designa con frecuencia v_h .

El segundo paso en la construcción del esquema de diferencias consiste en aproximar la expresión diferencial Lu por cierta expresión de diferencias, y la función del argumento continuo f , por la función de red, o sea, en construir cierto análogo de diferencias para la ecuación (1). Lo mismo se refiere también a las condiciones de contorno (2).

Tal aproximación conduce al sistema de ecuaciones algebraicas respecto a los valores de cierta función de red v_h . Este sistema de ecuaciones puede ser escrito en la forma siguiente:

$$L_h v_h = f_h; \quad (6)$$

$$l_h v_h = \varphi_h; \quad (7)$$

donde L_h y φ_h son los operadores de diferencias *) que aproximan L y l , respectivamente; v_h , la función de red buscada que aproxima la solución u ; f_h, φ_h son las funciones de red dadas que aproximan f y φ , respectivamente.

*) Nótese que al concepto «operador» le damos un único sentido, que es la forma simbólica abreviada de notación de las expresiones diferenciales y de diferencias.

El conjunto de las ecuaciones de diferencias (6), (7) que aproximan el problema inicial (1), (2) se llama *esquema de diferencias*. Nótese que el problema inicial puede ser aproximado, hablando en general, mediante distintos esquemas de diferencias, y un mismo esquema de diferencias puede aproximar distintos problemas continuos.

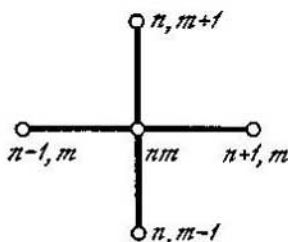


Fig. 10.2

A título de ejemplo vamos a construir el esquema de diferencias para el problema (3), (4).

Para resolver $u(x, y)$ construyamos la función de red u_h definida de la manera siguiente: $u_h(x_n, y_m) = u(x_n, y_m)$. A continuación por simplificar la forma de notación, allí donde esto no

dará lugar a equivocaciones, omitiremos el índice h en las funciones de red y , sobre todo, en sus valores. De este modo, $u_{nm} = u_h \times (x_n, y_m)$. Utilizando esta designación, aproximemos cada una de las derivadas (3) mediante la relación de diferencias:

$$\begin{aligned} u_{xx}(y_n, y_m) &\approx \frac{1}{h^2} (u_{n-1, m} - 2u_{nm} + u_{n+1, m}), \\ u_{yy}(x_n, y_m) &\approx \frac{1}{h^2} (u_{n, m-1} - 2u_{nm} + u_{n, m+1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Entonces la ecuación diferencial (3) se puede aproximar mediante las ecuaciones de diferencias:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} (v_{n-1, m} + v_{n, m-1} + v_{n+1, m} + v_{n, m+1} - 4v_{nm}) &= 0 \\ (n, m = 1, 2, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (9)$$

De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} v_{nm} &= \frac{1}{4} (v_{n-1, m} + v_{n+1, m} + v_{n, m-1} + v_{n, m+1}) \\ (n, m = 1, 2, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (10)$$

La condición de frontera (4) se aproxima del modo siguiente:

$$\begin{aligned} v_{0m} &= 0, \quad v_{n0} = 0; \\ v_{Nm} &= \frac{1}{2} \frac{m(m+N)}{N^2}, \quad v_{nN} = \frac{1}{2} \frac{n(n+N)}{N^2} \quad (n, m = 0, 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (11)$$

El sistema de ecuaciones (10), (11) se resuelve de ordinario por el método de iteración simple o por el método de Seydel.

Comparando las relaciones (6), (7) y (9), (11) es fácil comprender el sentido de los operadores de diferencias y de las funciones de red del sistema (6) y (7) y su relación con los operadores y funciones respectivas del problema (1), (2).

La expresión de diferencias $L_h v_h$ no es sino la combinación lineal de los valores de la función de red en ciertos nodos llamado *molde*. En particular, la expresión de diferencias (9) contiene cinco nodos (molde de cinco puntos). Este molde lleva el nombre de «cruz» (fig. 10.2).

Ahora bien, para $(N-1)^2$ valores desconocidos v_{nm} ($n, m = 1, 2, \dots, N-1$) de la función de red v_h obtenemos el sistema de $(N-1)^2$ ecuaciones (9) ó (10) en el cual las magnitudes v_{0m} , v_{n0} , v_{Nm} , v_{nN} están definidas por las condiciones de frontera (11). Las relaciones (9), (11) pueden considerarse juntas como sistema único de $(N+1)^2 - 4$ ecuaciones con $(N+1)^2 - 4$ incógnitas v_{nm} ($n, m = 0, 1, \dots, N$), a excepción de v_{00} , v_{0N} , v_{NN} , v_{N0} .

Intuitivamente está claro que cuanto más exactas son las aproximaciones de tipo (8) tanto más próxima es la función de v_h a u_h . Por eso en la etapa dada introduzcamos el concepto riguroso de aproximación.

La solución v_h del problema (6), (7) es una función de red y, por consiguiente, depende del parámetro h , o sea, del paso de la red. Surge una pregunta natural sobre la posibilidad de principio de aproximar la solución v_h a la solución $u(x, y)$ del problema (1), (2) mediante un número finito de operaciones con ayuda de la elección correspondiente del paso h .

Vamos a efectuar la comparación para dos funciones de red v_h y $u_h = u(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\omega}_h$. Para determinar la proximidad de dos funciones de red asignemos el concepto de norma sobre el conjunto de las funciones de red así:

$$\|v_h\| = \max_{(x, y) \in \bar{\omega}_h} |v(x, y)|. \quad (12)$$

En la definición (12) el máximo se toma en el dominio de definición de la función que está bajo el signo de norma.

Consideremos el error del esquema de diferencias (6), (7): $z_h = v_h - u_h$. Sustituyendo $v_h = z_h + u_h$ en (6), (7) obtenemos para z_h un problema análogo al problema para v_h :

$$L_h z_h = f_h - L_h u_h, \quad (13)$$

$$l_h z_h = \varphi_h - l_h u_h. \quad (14)$$

Los segundos miembros de las ecuaciones (13) y (14) se llaman *error de aproximación de la ecuación* (1) mediante la ecuación de diferencias (6) y *error de aproximación de la condición de contorno* (2) mediante la condición de diferencia (7) en la solución del problema inicial (1), (2).

Diremos que el esquema de diferencias (6), (7) *aproxima el problema* (1), (2) *con el orden* $k > 0$ *respecto a* h *en la solución* $u(x, y)$ si

$$\|f_h - L_h u_h\| \leq c_1 h^k; \quad \|\varphi_h - l_h u_h\| \leq c_2 h^k, \quad (15)$$

donde c_1 y c_2 son las constantes que no dependen de h .

Determinemos el orden de aproximación para el esquema (9), (11) o bien, que es lo mismo, para (10), (11). Puesto que las condiciones de frontera están dadas en la red exactamente, el primer miembro de la segunda de las igualdades (15) es igual a cero y el orden de aproximación se determinará por la primera de las desigualdades (15).

El segundo miembro de la ecuación (3) es igual a cero, por eso se estima sólo la norma $L_h u_h$.

Hagamos uso de la fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} u_{n\pm 1, m} &= u_{nm} \pm h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{nm} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{nm} \pm \\ &\pm \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{nm} + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{xy} \pm \\ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{xy} &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_n \pm \theta_1 h, y_m), \quad 0 < \theta_1 < 1; \\ u_{n, m\pm 1} &= u_{nm} \pm h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{nm} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{nm} \pm \\ &\pm \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{nm} + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{xy} \pm \\ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{xy} &= \frac{\partial^4}{\partial y^4} u(x_n, y_m \pm \theta_2 h), \quad 0 < \theta_2 < 1. \end{aligned}$$

Sumando todas estas cuatro relaciones, encontramos

$$\begin{aligned} u_{n+1, m} + u_{n-1, m} + u_{n, m+1} + u_{n, m-1} &= 4u_{nm} + h^2 [(u_{xx})_{nm} + (u_{yy})_{nm}] + \\ &+ \frac{h^4}{24} \left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{xy}^+ + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{xy}^- + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{xy}^+ + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{xy}^- \right]. \end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones de diferencias (6), obtenemos

$$\|L_h u_h\| \leq \frac{h^2}{6} M_4, \quad (16)$$

donde $M_4 = \max_{(x, y) \in \bar{D}} \left(\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right)$. Aquí se supone la existencia

de las derivadas correspondientes. Ahora bien, el esquema (9), (11) tiene el segundo orden de aproximación.

En esto terminamos el examen de la primera etapa, o sea, la construcción del esquema de diferencias y pasamos a la segunda etapa, o sea, a la resolución del problema de diferencias y a la estimación del error.

En esta etapa las cuestiones más importantes son la cuestión de resolubilidad del problema de diferencias, la de unicidad de su solución y la de dependencia continua de la solución de los datos de entrada. Por *datos de entrada* se entienden los segundos miembros de las ecuaciones de diferencias, o sea, las condiciones iniciales y de frontera del problema de diferencias. Análogamente al hecho de cómo se plantea la cuestión acerca de lo correcto de los problemas de la física matemática, se puede formular el concepto de carácter correcto del esquema de diferencias. Sea v_h la solución y f_h, φ_h los datos de

entrada de cierto problema de diferencias (6), (7). Es evidente que la solución y los datos de entrada dependen de h .

Diremos que el problema (esquema) de diferencias es correcto si para todos los $h < h_0$ ($h_0 > 0$) se cumplen las condiciones:

1°) la solución del problema de diferencias existe y es única;
 2°) la solución del problema de diferencias depende continuamente de los datos de entrada.

Para el problema de diferencias (6), (7) la condición 2° puede ser escrita de la manera siguiente:

$$\| \bar{v}_h - v_h \| \leq M_1 \| \bar{f}_h - f_h \| + M_2 \| \bar{\varphi}_h - \varphi_h \|, \quad (17)$$

donde los símbolos sin raya corresponden a un problema y con raya, a otro.

La condición señalada se llama *estabilidad del problema (esquema) de diferencias referente a los datos de entrada* o simplemente *estabilidad*.

En la teoría de esquemas de diferencias se demuestra que el esquema «cruz» construido para el problema de Dirichlet y para la ecuación de Laplace (hablando en general, también para la ecuación de Poisson) es correcto.

Una vez enunciado el concepto de aproximación y de estabilidad para los esquemas de diferencias, hemos llegado a la cuestión más importante, es decir, a la cuestión sobre la convergencia de la solución del problema de diferencias (6), (7), a la solución del problema continuo (1), (2).

Diremos que el esquema de diferencias (6), (7) *converge con la velocidad de orden $s > 0$ respecto a h* , si se cumple la condición

$$\| v_h - u_h \| \leq ch^s,$$

donde c es la constante que no depende de h .

Entre los conceptos de aproximación, de carácter correcto y de estabilidad existe una relación íntima que se determina por el teorema siguiente.

Teorema. *Supongamos que el problema de diferencias (6), (7) aproxima el problema (1), (2) en la solución $u(x, y)$ con orden $k > 0$ respecto a h y es correcto. Entonces este esquema converge con un orden igual al orden de aproximación k , o sea, se cumple la estimación*

$$\| v_h - u_h \| \leq ch^k. \quad (18)$$

□ Por definición de la aproximación tenemos

$$\| f_h - \mathcal{L}_h u_h \| \leq c_1 h^k; \quad \| \varphi_h - l_h u_h \| \leq c_2 h^k.$$

Utilizando las igualdades (13) y (14), obtenemos

$$\| L_h z_h \| \leq c_1 h^k; \quad \| l_h z_h \| \leq c_2 h^k.$$

Luego, en virtud de la suposición de que el esquema de diferencias es estable [relación (17)], tenemos

$$\| z_h \| \leq M_1 \| L_h z_h \| + M_2 \| l_h z_h \|,$$

de donde, utilizando las estimaciones que acabamos de obtener, encontramos

$$\|z_h\| = \|v_h - u_h\| \leq M_1 c_1 h^k + M_2 c_2 h^k = ch^k. \blacksquare$$

Ejemplo 1. Hallar la solución de los problemas (3) y (4):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; (x, y) \in D^0,$$

$$u(x, y) = \frac{1}{4}xy(x+1)(y+1); (x, y) \in \Gamma^0.$$

Aquí D^0 es el cuadrado $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ con la frontera $\Gamma^0 \{x=0, x=1, 0 \leq y \leq 1; y=0, y=1, 0 \leq x \leq 1\}$.

Δ Para este problema el sistema de ecuaciones de diferencias finitas ya está escrito en el caso general y tiene la forma:

$$v_{nm} = \frac{1}{2}(v_{n-1,m} + v_{n+1,m} + v_{n,m-1} + v_{n,m+1})$$

$$(n; m = 1, 2, \dots, N-1);$$

$$v_{0m} = v_{n0} = 0;$$

$$v_{Nm} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m(m+N)}{N^2}, \quad v_{nN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+N)}{N^2} \quad (n; m = 0, 1, \dots, N).$$

Tomando en calidad de paso de la red $h = 1/3$ ($N = 3$), construamos la tabla inicial de condiciones de frontera y de valores desconocidos:

Tabla 10.1

	0,222	0,556	
0	v_{12}	v_{22}	0,556
0	v_{11}	v_{21}	0,222
	0	0	

El sistema inicial de ecuaciones para los valores desconocidos tomará la forma siguiente:

$$v_{11} = \frac{1}{4}(0 + v_{21} + 0 + v_{12}),$$

$$v_{12} = \frac{1}{4}(0 + v_{22} + v_{11} + 0,222),$$

$$v_{21} = \frac{1}{4}(v_{11} + 0,222 + 0 + v_{22}),$$

$$v_{22} = \frac{1}{4}(v_{12} + 0,556 + v_{21} + 0,556).$$

Resolvamos este sistema por el método de iteración simple. Para esto es necesario obtener los valores iniciales para las incógnitas

Vamos a obtenerlos con ayuda de la interpolación lineal respecto a los valores de frontera: primero en filas y luego en columnas.

La interpolación lineal en filas se realiza por la fórmula

$$\bar{v}_{nm} = v_{0m} + (v_{Nm} - v_{0m}) \frac{m}{N}$$

lo que da ($n; m = 1, 2$)

$$\bar{v}_{12} = 0,185; \bar{v}_{22} = 0,371; \bar{v}_{11} = 0,074; \bar{v}_{21} = 0,148.$$

La interpolación lineal en columnas se realiza por la fórmula

$$\bar{v}_{nm} = v_{n0} + (v_{nN} - v_{n0}) \frac{n}{N}$$

lo que da ($n; m = 1, 2$).

$$\bar{v}_{12} = 0,148; \bar{v}_{11} = 0,074; \bar{v}_{22} = 0,371; \bar{v}_{21} = 0,185.$$

Por valores iniciales tomamos la semisuma de las magnitudes obtenidas:

$$v_{nm}^0 = \frac{1}{2} (\bar{v}_{nm} + \bar{v}_{nm}),$$

o sea, $v_{12}^0 = v_{21}^0 = 0,166$; $v_{22}^0 = 0,371$; $v_{11}^0 = 0,074$.

Ahora se puede realizar el proceso iterativo:

$$v_{11}^{k+1} = \frac{1}{2} v_{12}^k; \quad v_{12}^{k+1} = \frac{1}{4} (v_{11}^k + v_{22}^k + 0,222);$$

$$v_{22}^{k+1} = \frac{1}{2} (v_{12}^k + 0,556).$$

Hemos utilizado la simetría de los datos iniciales ($v_{12}^0 = v_{21}^0$) y del sistema de ecuaciones. Vamos a resolver este sistema hasta que dos iteraciones sucesivas coincidan con una exactitud de hasta 0,001. Representemos los resultados de los cálculos en forma de la tabla 10.2.

Tabla 10.2

	Número de iteración		
	0	1	2
v_{11}	0,074	0,083	0,084
$v_{12} = v_{21}$	0,166	0,167	0,166
v_{22}	0,371	0,361	0,362

Para obtener la solución resultó suficiente dos iteraciones. Esto es consecuencia de la sencillez del problema de diferencias debido a una red gruesa. ▲

Ejemplo 2. Hallar la solución de la ecuación de Laplace (3) en el cuadrado unitario para las siguientes condiciones de frontera:

$$u(x, y) = \begin{cases} 0; & 0 \leq x \leq 1, y = 0; \\ \frac{8}{3}y(64y^2 - 60y + 29); & x = 0, 0 \leq y \leq 1; \\ \frac{8}{3}(1-x)(64x^2 - 68x + 33); & 0 \leq x \leq 1, y = 1; \\ 0; & x = 1, 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

△ Pongamos $h = 0,25$ y construyamos el sistema (10), teniendo en cuenta los valores de frontera:

$$\begin{aligned} v_{11}^{h+1} &= \frac{1}{4}(12 + v_{21}^h + 0 + v_{12}^h); \\ v_{21}^{h+1} &= \frac{1}{4}(v_{11}^h + v_{31}^h + 0 + v_{22}^h); \\ v_{31}^{h+1} &= \frac{1}{4}(v_{21}^h + 0 + 0 + v_{32}^h) = \frac{1}{2}v_{21}^h; \\ v_{12}^{h+1} &= \frac{1}{4}(20 + v_{22}^h + v_{11}^h + v_{13}^h); \\ v_{22}^{h+1} &= \frac{1}{4}(v_{12}^h + v_{32}^h + v_{23}^h + v_{21}^h) = \frac{1}{2}(v_{12}^h + v_{21}^h); \\ v_{13}^{h+1} &= \frac{1}{4}(40 + v_{23}^h + v_{12}^h + 40) = 20 + \frac{1}{2}v_{12}^h. \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera y los valores desconocidos se dan en la tabla 10.3.

Tabla 10.3

	40	20	12	
40	v_{13}	v_{23}	v_{33}	0
20	v_{12}	v_{22}	v_{32}	0
12	v_{11}	v_{21}	v_{31}	0
	0	0	0	

Al construir este sistema hemos utilizado la propiedad de simetría: $v_{nm} = v_{N-m, N-n}$.

El cálculo de la aproximación inicial se realiza con ayuda de la interpolación lineal respecto a los valores de frontera en los nodos interiores. Utilizando para el cálculo de v_{n1}^0 la fórmula

$$v_{n1}^0 = 12 \left(1 - \frac{n}{4}\right),$$

obtenemos $v_{11}^0 = 9$, $v_{21}^0 = 6$, $v_{31}^0 = 3$. En virtud de la simetría suponemos $v_{32}^0 = v_{21}^0 = 6$, $v_{33}^0 = v_{11}^0 = 9$.

Utilizando para calcular v_{12}^0 y v_{22}^0 la fórmula

$$v_{n2}^0 = 20 \left(1 - \frac{7}{30} n \right),$$

tenemos $v_{12}^0 = 15$, 33 , $v_{22}^0 = 10$, 66 . En virtud de la simetría suponemos que $v_{23}^0 = v_{12}^0 = 15$, 33 .

El último valor v_{13}^0 se calcula con ayuda de la fórmula

$$v_{13}^0 = +40 - \frac{40 - 15,33}{2} \cdot 1 = 27,67.$$

Vamos a realizar la solución del sistema por dos métodos: por el de iteración simple (tabla 10.4) y por el de Seydel (tabla 10.5). Ejecuta-

Tabla 10.4

	40	20	12	
40	28,5	17,0	8,6	0
20	17,0	11,3	5,6	0
12	8,6	5,6	2,8	0
	0	0	0	

Tabla 10.5

	40	20	12	
40	28,6	17,0	8,6	0
20	17,0	11,4	5,7	0
12	8,6	5,7	2,8	0
	0	0	0	

remos el cálculo hasta que coincidan dos soluciones sucesivas para cada variable con exactitud hasta 0,1. El cálculo con ayuda del método de iteración simple necesitó cuatro iteraciones y con ayuda del método de Seydel, tres.

Las soluciones finales se dan en las tablas 10.4 y 10.5. ▲

§ 10.5. Esquemas de diferencias para resolver la ecuación de conducción del calor

Consideremos el primer problema de contorno para la ecuación de conducción del calor en el rectángulo $\bar{D} \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$.

Se necesita hallar la solución del problema, continua en \bar{D} :

$$Lu \equiv u_t - u_{xx} = f \quad (0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T); \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (0 \leq x \leq 1); \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi_0(t); \quad u(1, t) = \psi_0(t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (3)$$

De un modo análogo al utilizado en el § 10.4 para la ecuación de Poisson, construyamos con ayuda del método de diferencias la solución del problema (1) ... (3).

En el dominio \bar{D} introduzcamos una red uniforme rectangular $\bar{\omega}_{h\tau} \{x_n, t_k\}$ con un paso de $h = 1/N$ en la coordenada x y con un paso de $\tau = T/M$ en la coordenada t :

$$x_n = nh \quad (n = 0, 1, \dots, N), \quad t_k = k\tau \quad (k = 0, 1, \dots, M).$$

Vamos a aproximar las derivadas del primer miembro de la ecuación (1) mediante las siguientes expresiones de diferencias:

$$(u_t)_n^k \approx \frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\tau} \quad \text{o bien} \quad (u_t)_n^k \approx \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau}$$

$$(u_{xx})_n^k \approx \frac{u_{n-1}^k - 2u_n^k + u_{n+1}^k}{h^2}. \quad (4)$$

De acuerdo con la aproximación (4) construyamos dos análogos de diferencias (11) con la función de red desconocida $v_{h\tau}$:

$$L_h v_{h\tau} = \frac{v_n^{k+1} - v_n^k}{\tau} - \frac{v_{n-1}^k - 2v_n^k + v_{n+1}^k}{h^2} = f_n^k, \quad (5)$$

$$L_h v_{h\tau} = \frac{v_n^k - v_n^{k-1}}{\tau} - \frac{v_{n-1}^k - 2v_n^k + v_{n+1}^k}{h^2} = f_n^k. \quad (6)$$

Aquí f_n^k son los valores de cierta función de red $f_{h\tau}$ correspondiente al segundo miembro de la ecuación (1), por ejemplo $f_n^k = f(x_n, t_k)$.

Para el esquema (5) suele tomarse $f_n^k = f(x_n, t_k + \frac{\tau}{2})$ y para el es-

quema (6), $f_n^k = f(x_n, t_k - \frac{\tau}{2})$. Para el primer problema de contorno las condiciones inicial y de frontera se aproximan exactamente:

$$v_n^0 = u_0(nh) \quad (n = 0, 1, \dots, N); \quad (7)$$

$$v_0^k = \varphi_0(k\tau), \quad v_N^k = \psi_0(k\tau) \quad (k = 0, 1, \dots, M).$$

En caso de los problemas de contorno segundo y tercero las condiciones de frontera se aproximan basándose en las fórmulas análogas a las relaciones (4).

Los esquemas (5) y (6) se ilustran en moldes de cuatro puntos representados en la fig. 10.3.

El esquema (5) se dice *explícito* y el esquema (6), *implícito*.

Tal definición se debe al hecho de que el esquema (5) determina en forma explícita los valores de la función de red desconocida, sucesivos en el tiempo, en dependencia de los precedentes. En efecto, de la igualdad (5), suponiendo $r = \tau/h^2$, es fácil obtener que

$$v_n^{k+1} = r(v_{n-1}^k + v_{n+1}^k) + (1 - 2r)v_n^k + \tau f_n^k. \quad (8)$$

Ahora bien, utilizando las condiciones (7) y la forma explícita (8), se puede obtener sucesivamente todo valor de v_n^k . Por consiguiente, la solución del sistema (7), (8) existe y ésta es única. El asunto es otro con el esquema (6). Escribámoslo en la forma siguiente:

$$rv_{n-1}^k - (1 + 2r)v_n^k + rv_{n+1}^k = -(v_n^{k-1} + \tau f_n^k). \quad (9)$$

Este esquema da los valores de la función de red buscada en forma implícita, es decir, en forma de un sistema de ecuaciones. Se puede mos-

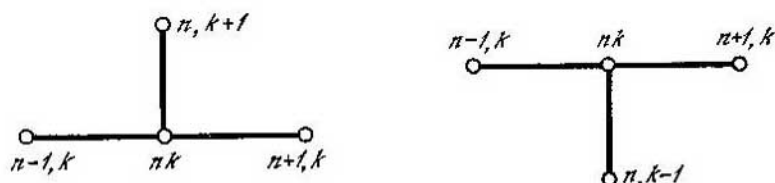


Fig. 10.3

trar que la solución del sistema (7), (9) existe y es única. Por lo general, se determina por el método de pasadas que aquí dejamos sin considerar.

El orden de aproximación para los esquemas (5) y (6) se determina basándose en las fórmulas respectivas de Taylor de un modo análogo al empleado para la ecuación de Poisson en el § 10.4. Como resultado obtenemos que los esquemas de diferencias (5), (7) y (6), (7) aproximan el problema (1) ... (3) con un error de $O(\tau + h^2)$, o sea,

$$\|L_h u_{h\tau} - f_{h\tau}\| \leq M(\tau + h^2). \quad (10)$$

En la teoría de esquemas de diferencias se demuestra la validez de las propiedades siguientes.

1°. El esquema explícito (5), (7) tiene para $r \leq 1/2$ la solución única y es estable y para $r > 1/2$ es inestable.

2°. El esquema implícito (6), (7) tiene la solución única y es estable para todo r .

Así pues, basándose en el teorema dado en el § 10.4, la relación (10) y las propiedades que acabamos de formular, se puede afirmar la convergencia del esquema explícito para $r \leq 1/2$ y del esquema implícito para todos h y τ con error $O(\tau + h^2)$.

Ejemplo. Resolver el problema (1) ... (3) para $f = 0$; $u_0 = x(1-x)$; $\varphi_0 = \psi_0 = 0$; $T = 0,1$.

△ En este caso la ecuación (1) y las condiciones (2), (3) toman la forma

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (0 < x < 1, 0 < t \leq 0,1);$$

$$u(x, 0) = x(1-x) \quad (0 \leq x \leq 1);$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 0,1).$$

En calidad de esquema de cálculo tomemos el esquema explícito (8). Pongamos $h = 0,25$; entonces $\tau \leq 0,03$. Puesto que $T = 0,1$, escojamos $\tau = 0,025$ para que M sea un número entero ($M = 4$). Calculemos $r = \tau/h^2 = 0,4$. La fórmula de cálculo se escribe así:

$$v_n^{k+1} = 0,4(v_{n-1}^k + v_{n+1}^k) + 0,2v_n^k \quad (n=1, 2, 3; k=0, 1, 2, 3);$$

$$v_n^0 = \frac{n(4-n)}{16}; \quad v_0^k = v_4^k = 0 \quad (n=1, 2, 3; k=1, 2, 3, 4).$$

Así pues, obtenemos las condiciones iniciales $v_1^0 = 0,1875$; $v_2^0 = 0,2500$; $v_3^0 = 0,1875$ y las condiciones de frontera $v_0^k = v_4^k = 0$. En el primer paso tenemos

$$v_1^1 = 0,4(v_0^0 + v_2^0) + 0,2v_1^0 = 0,1375;$$

$$v_2^1 = 0,4(v_1^0 + v_3^0) + 0,2v_2^0 = 0,2000.$$

En virtud de la simetría $v_3^1 = v_1^1 = 0,1375$. De un modo análogo se realizan los cálculos también en los pasos sucesivos.

Todos los cálculos se dan en la tabla 10.6. ▲

Tabla 10.

$k \backslash$	0	1	2	3	4
v_0^k	0	0	0	0	
v_1^k	0,1875	0,1375	0,1075	0,0815	0,0627
v_2^k	0,2500	0,2000	0,1500	0,1160	0,0884
v_3^k	0,1875	0,1375	0,1075	0,0815	0,0627
v_4^k	0	0	0	0	

§ 10.6. Esquemas de diferencias para resolver la ecuación de vibración de la cuerda

Consideremos el primer problema de contorno para la ecuación de la vibración de una cuerda en el rectángulo $\bar{D} \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq t \leq T\}$. Se necesita hallar la solución del problema, continua en \bar{D} :

$$Lu = u_{tt} - u_{xx} = f \quad (0 < x < 1, 0 < t \leq T); \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (0 \leq x \leq 1); \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi_0(t); \quad u(1, t) = \psi_0(t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (3)$$

La aplicación del método de diferencias finitas a la resolución del problema (1) ... (3) poco se distingue, en realidad, de su aplicación a la ecuación de conducción del calor *). El dominio \bar{D} se cubre por la red $\bar{\omega}_{h\tau}$. La distinción consiste en aproximar la derivada segunda respecto a la variable t :

$$(u_{tt})_n^h \approx \frac{u_n^{h-1} - 2u_n^h + u_n^{h+1}}{\tau^2}. \quad (4)$$

La aproximación de diferencias para la ecuación toma la forma

$$L_h v_{h\tau} \equiv \frac{v_n^{h-1} - 2v_n^h + v_n^{h+1}}{\tau^2} - \frac{v_{n-1}^h - 2v_n^h + v_{n+1}^h}{h^2} = f_n^h, \quad (5)$$

Las condiciones iniciales se aproximan de la manera siguiente:

$$v_n^0 = u_0(nh); \quad \frac{v_n^1 - v_n^0}{\tau} = u_1(nh), \quad (6)$$

$$(n = 0, 1, \dots, N).$$

Las condiciones de frontera se aproximan exactamente igual que para la ecuación de conducción del calor:

$$v_0^k = \varphi_0(k\tau); \quad v_N^k = \psi_0(k\tau) \quad (k = 0, 1, \dots, M). \quad (7)$$

El esquema (5) está determinado en el molde «cruz» de cinco puntos (véase la fig. 10.2).

El valor v_n^{-1} es una incógnita ficticia que se puede determinar de la relación (6) y sustituir en la ecuación (5). En este caso obtenemos un esquema explícito simple ($\gamma = \tau/h$):

$$v_n^{h+1} = -v_n^{h-1} + \gamma^2(v_{n-1}^h + v_{n+1}^h) + 2(1 - \gamma^2)v_n^h + \tau^2 f_n^h. \quad (8)$$

El orden de aproximación del esquema de diferencias (6) ... (8) se determina análogamente al indicado en el § 10.4 para la ecuación de Laplace. El análisis muestra que el error de aproximación del esquema (6) ... (8) es $O(\tau^2 + h^2)$ y, además, este esquema es estable cuando $\gamma^2 = (\tau/h)^2 \leq 1/(1 + \varepsilon)$; $\varepsilon > 0$. Ahora bien, éste converge con un error de orden $O(\tau^2 + h^2)$ para la condición mencionada.

Ejemplo. Resolver el problema (1) ... (3) para $f = 0$; $u_0 = x(1 - x)$, $u_1 = \varphi_0 = \psi_0 = 0$; $T = 0,6$.

Δ Pongamos $h = 0,25$, entonces $\tau < 0,25$. Puesto que $T = 0,6$, escojamos $\tau = 0,2$ para que M sea un número entero ($M = 3$). Calculemos $\gamma^2 = (\tau/h)^2 = 0,64$. La fórmula de cálculo se escribe así:

$$v_n^{h+1} = -v_n^{h-1} + 0,64(v_{n-1}^h + v_{n+1}^h) + 0,72v_n^h \quad (n = 1, 2, 3),$$

$$v_n^0 = \frac{n(4-n)}{16} \cdot \frac{v_n^1 - v_n^0}{0,2} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4).$$

$$v_0^k = v_4^k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Ahora bien, obtenemos las condiciones iniciales $v_1^0 = 0,188$; $v_2^0 = 0,250$; $v_3^0 = 0,188$; $v_n^{-1} = v_1^1$ y las condiciones de frontera $v_0^k = v_4^k = 0$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$).

*) En este párrafo hemos utilizado las designaciones y conceptos considerados en el § 10.4 y 10.5.

Para calcular v_1^1 al primer paso se necesitará el valor ficticio v_1^{-1} . Lo obtenemos de la condición inicial $v_1^{-1} = v_1^1$. Así pues, al primer paso se tiene

$$v_n^1 = -v_n^1 + 0,64(v_{n-1}^0 + v_{n+1}^0) + 0,72v_n^0.$$

De aquí

$$v_1 = 0,32(v_0^0 + v_2^0) + 0,36v_1^0 = 0,148;$$

$$v_2^1 = 0,32(v_1^0 + v_3^0) + 0,36v_2^0 = 0,210.$$

En virtud de la simetría del problema $v_3^1 = v_1^1 = 0,148$.

Al segundo paso obtenemos:

$$v_1^2 = -v_1^0 + 0,64(v_0^1 + v_2^1) + 0,72v_1^1 = 0,053;$$

$$v_2^2 = -v_2^0 + 0,64(v_1^1 + v_3^1) + 0,72v_2^1 = 0,091.$$

En virtud de la simetría del problema $v_3^2 = v_1^2 = 0,053$. De un modo análogo se realizan los cálculos también a los pasos sucesivos.

Todos los cálculos se dan en la tabla 10.7.▲

Tabla 10.7

k	0	1	2	3
v_0^k	0	0	0	0
v_1^k	0,188	0,148	0,053	-0,052
v_2^k	0,250	0,210	0,091	-0,077
v_3^k	0,188	0,148	0,053	-0,052
v_4^k	0	0	0	0

Ejercicios

1. Hallar la solución aproximada de la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ para el cuadrado al ser válidas las condiciones de contorno indicadas

a)				b)			
0,00 ●	18,18 ●	38,63 ●	50,00 ●	0,00 ●	17,98 ●	39,02 ●	50,00 ●
0,00 ●	○	○	● 30,10	0,00 ●	○	○	● 30,10
0,00 ●	○	○	● 12,38	0,00 ●	○	○	● 12,38
0,00 ●	●	●	● 4,31	0,00 ●	●	●	● 4,31
	28,15	29,34			29,05	29,63	

2. Hallar la solución aproximada de la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ con un paso de $h=1/6$ para el cuadrado siendo válidas las condiciones de contorno indicadas

		<i>9,81</i>	<i>19,78</i>	<i>29,12</i>	<i>40,16</i>	<i>42,31</i>		
<i>0,00</i>	×	×	×	×	×	×	×	<i>50,00</i>
<i>0,00</i>	×	○	○	○	○	○	×	<i>40,16</i>
<i>0,00</i>	×	○	○	○	○	○	×	<i>33,11</i>
<i>0,00</i>	×	○	○	○	○	○	×	<i>19,14</i>
<i>0,00</i>	×	○	○	○	○	○	×	<i>13,00</i>
<i>0,00</i>	×	○	○	○	○	○	×	<i>6,98</i>
<i>0,00</i>	×	×	×	×	×	×	×	<i>4,31</i>
		<i>17,28</i>	<i>31,96</i>	<i>40,00</i>	<i>30,50</i>	<i>17,28</i>		

3. Hallar la solución aproximada de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, que satisface las condiciones de contorno $u(x, 0) = g_0(x)$, $u(0, t) = f_0(t)$, $u(1, t) = f_1(t)$ para los valores $0 \leq t \leq T$, tomando en el argumento x el paso $h = 0,1$. Considerar dos variantes de las condiciones de contorno:

a) $g_0(x) = (1,1x^2 + 1,1) \sin \pi x$, $f_0(t) = f_1(t) = 0$; $T = 0,02$; $r = 1/2$;

b) $g_0(x) = (1,1x^2 + 2,3) e^{-x}$; $f_0(t) = 2,3$; $f_1(t) = 3,4 e^{-1}$; $T = 0,01$; $r = 1/6$.

Respuestas a los ejercicios

Capítulo I

1. a) 2,7546; 2,755; 2,75; 2,8; 3; b) 3,1416; 3,142; 3,14; 3,1; 3; c) 0,5645; 0,565; 0,56; 0,6; 1; d) 4,194; 4,19; 4,2; 4; e) 0,6065; 0,607; 0,61; 0,6; 1.
 2. a) 1,14; $\Delta_a=0,026$ $\delta_a=0,23\%$; b) 0,0102; $\Delta_a=0,00005$; $\delta_a=0,5\%$; c) 0,124; $\Delta_a=0,0005$; $\delta_a=0,41\%$; d) 922; $\Delta_a=0,45$; $\delta_a=0,049\%$; e) 0,00246; $\Delta_a=-0,000002$; $\delta_a=0,082\%$; 3. a) 0,018; b) 0,099; c) 0,047; d) 2,0; e) 0,00035.
 4. a) 3; b) 4; c) 3; d) 2; e) 3. 5. a) segunda; b) segunda; c) primera; d) segunda; e) segunda. 6. $a=47,5$. 7. 46,39. 8. 3,29. 9. a) $\Delta_a=0,0005$, $\delta_a=0,0075\%$; b) $\Delta_a=0,0005$; $\delta_a=0,003\%$. 10. a) $y=0,085$; $\Delta_y=0,0012$; $\delta_y=1,4\%$; b) $y=1,20$; $\Delta_y=0,056$; $\delta_y=4,7\%$; c) $y=0,0552$; $\Delta_y=0,00043$; $\delta_y=0,77\%$; d) $y=2,747$; $\Delta_y=0,0090$; $\delta_y=0,33$. 11. a) $s=0,594$; b) $s=0,687$.

Capítulo II

1. a) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 9 & 6 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$. 2. a) $\begin{bmatrix} 8 & -56 & 54 \\ -30 & -100 & 146 \\ 118 & -82 & 28 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -72 & -72 & 78 \\ 36 & 54 & -6 \\ 66 & 240 & 88 \end{bmatrix}$. 3. a) $\begin{bmatrix} 5 & 10 & -10 & 15 \\ 7 & 14 & -14 & 21 \\ -3 & -6 & 6 & -9 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$; c) 409.

4. a) $\begin{bmatrix} -9 \\ 20 \\ -18 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. 5. a) 22; b) -26; c) 4279. 6. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & -1 & 8 \\ 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$;

b) $A^{-1} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} -4 & 10 & -46 & 24 \\ 10 & -1 & 67 & -36 \\ -14 & -13 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -96 & 48 \end{bmatrix}$; c) $A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & 9 & 6 & 0 \\ -28 & -5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

7. $AB = \begin{bmatrix} 24 & 57 & 15 & 31 \\ -4 & 16 & 6 & 11 \\ 16 & 27 & 7 & 14 \\ 10 & 53 & 13 & 29 \end{bmatrix}$. 8. a) $A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $A^{-1} =$

$\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & 8 \\ -12 & 5 & 9 & 1 \\ -12 & 11 & 9 & -13 \\ -6 & -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$. 9. a) $A = T_1 T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 18/5 & 0 \\ 2 & -7 & 36/5 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 8/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1/5 & 2 \\ 0 & 1 & 8/5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & -1/5 & 0 & 0 \\ 7/18 & 4/18 & -5/18 & 0 \\ -2/18 & -3/18 & 2/18 & 1/18 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \times$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \text{ b) } A = R_1 R_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7/3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1/7 & 0 \\ 1 & 8/3 & -9/7 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & -6/7 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1} = R_2^{-1} R_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & -4/7 & 8 \\ 0 & 1 & 1/7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2/7 & 3/7 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 7 & 0 \\ -1/3 & -5/18 & 9/18 & 1/18 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & 8 \\ -12 & 5 & 9 & -1 \\ -12 & 11 & 9 & -13 \\ -6 & -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}. \text{ 10. a) } X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}; \text{ b) } X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. a) $r=2$; b) $r=2$. 12. a) Linealmente dependiente; b) linealmente independiente. 13. Forman la base, por ejemplo, los vectores x_1, x_2, x_4 ; $x_3 = x_1 - x_2$. 14. $y = (5/4, 1/4, -1/4, -1/4)$.

Capítulo III

1. a) $x_1 = -(11/7)x_3$, $x_2 = -(1/7)x_3$; b) $x_1 = (3x_3 - 13x_4)/17$, $x_2 = (19x_3 - 20x_4)/17$. 2. a) Solución general: $x_1 = (x_3 - 9x_4 - 2)/11$, $x_2 = (-5x_3 + x_4 + 10)/11$; solución particular: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$; b) solución general: $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$, $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$; solución particular: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 11$, $x_4 = -8$. 3. a) $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$; b) $x = 2$, $y = -2$, $z = 1$. 4. a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$. 5. a) $x_1 = 1,120$; $x_2 = -0,344$; $x_3 = -0,008$; b) $x = 0,008$; $y = -0,234$; $z = 0,042$. 6. a) $d = 88$; b) $d = 2111,97$. 7. a) $A^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} 10/3 & -7/6 & 1/2 & -1/6 \\ -5/3 & 5/6 & -1/2 & -7/6 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}; \text{ b) } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,49 & -0,31 & -0,82 & -0,12 \\ -0,47 & 1,57 & 1,23 & 0,70 \\ -1,75 & 0,11 & 0,30 & 0,87 \\ -0,12 & -2,92 & -1,09 & 0,17 \end{bmatrix}.$$

8. a) $x_1 = -0,72$; $x_2 = 1,88$; $x_3 = -0,92$; $x_4 = -1,94$; b) $x = 1,22$; $y = -0,67$; $z = 0,35$. 10. a) $\|A\|_1 = 1,9$, $\|A\|_2 = 1,9$, $\|A\|_3 = 2,55$; b) $\|A\|_1 = 1,45$, $\|A\|_2 = 1,07$, $\|A\|_3 = 1,20$. 11. a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$; b) $x_1 = 1/2$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = -1/2$, $x_4 = -2$. 12. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Capítulo IV

1. Resto $r = P_3(3) = 430$; cociente $P_4^{(1)} = x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 48x + 143$. 2. Sí. 3. a) 0,423; b) 0,940; c) 1,386; d) 1,224; e) 0,809; f) 0,309. 4. a) 3,464; b) 7,483; c) 6,481.

Capítulo V

1. a) -1,325; b) 1,180; c) -1,876; 0,578; d) 0,781, 2,401; e) 0,0; 0,399; 6,352; f) 0,310; 4,0. 2. a) 1,213; b) 0,706; c) 0,841; d) -0,438; 0,438; e) 0,0; 0,787; f) 1,897. 3. a) -4,071; 0,468; 0,993; b) -0,695; -3,067; 3,757; c) -3,523; -1,567; 1,086; d) 0,398; 4,862; e) 0,0; 2,753; f) 0,739. 4. a) 0,760; b) -2,258; c) -0,465; d) -0,567; -0,335; 0,0; e) 3,473; f) 1,422. 5. a) -0,532; 0,653; 2,879; b) -0,475; 1,395; c) -1,582; 0,402; 1,373; d) -1,453; 1,164. 6. a) 0,187; b) 0,755; c) 0,739; d) 0,607; e) 0,672.

Capítulo VI

1. a) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 66\lambda + 1$, b) $\lambda^4 - 4\lambda^3 - 6\lambda - 41$, c) $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 16\lambda^2 - 16$.
 2. a) $\lambda_1 = 7$; $x_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = -2$, $x_2 = c \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$; b) $\lambda_1 = -2$, $x_1 = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. 3. a) $\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda - 7$; b) $\lambda^4 + 8\lambda^3 + 6\lambda^2 + 6\lambda - 54$; c) $\lambda^4 + \lambda^3 - 6x^2 - 13\lambda$. 4. a) $\lambda^4 - 7\lambda^2 + 15\lambda^2 - 2\lambda - 34$; b) $\lambda^4 + \lambda^3 + 7\lambda^2 - 20\lambda - 54$. 6. $D(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $x^{(1)} = x^{(2)} = x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, si $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
 7. $\lambda_1 \approx 4,46$; $\lambda_2 = 1,59$.

Capítulo VII

1. 20.819. 2. 24.680. 3. $L_2(x) = -(1/15)x^3 - (3/20)x^2 + (241/60)x - 3,9$.
 4. $L_2(x) = 0,0735x^2 - 0,4530x + 0,7474$; $\Delta_1 = 0,23 \cdot 10^{-1}$. 7. 3,37215. 8. 4,379
 9. 1,43612. 10. 0,75487. 24. a) $0,6115 \pm 0,00013$; b) $0,9409 \pm 0,0007$, c) $0,9456 \pm 0,002$; d) $0,8007 \pm 0,0009$; e) $0,3156 \pm 0,00012$; f) $2,4505 \pm 0,0018$. 25. $Q_2(x) = 2 - 0,7 \cos 2x - 0,3 \sin 2x - 0,3 \cos 4x + b_2 \sin 4x$. 26. $Q_2(x) = -1 + (7/3) \cos 2\pi x - (2/\sqrt{3}) \sin 2\pi x - \cos 4\pi x$.

Capítulo VIII

1. 15,160. 2. 1,429. 3. 2,28. 4. 2,032. 5. 0,107250. 6. 0,67363. 7. 0,6931472;
 8. 0,007. 9. 0,0087. 10. a) 0,239; b) 0,223; c) 1,0000; d) 0,8349; e) 1,4627;
 f) 1,5625; g) 1,333; h) 0,460; i) 1,718. 11. a) $0,754 \pm 0,002$ (para $h_0 = 3^\circ$);
 b) $-0,471 \pm 0,002$ (para $h_0 = 7^\circ$); c) $2,421 \pm 0,07$ (para $h_0 = 1^\circ$); d) $0,953 \pm 0,002$ (para $h_0 = 6^\circ$); e) $-0,892 \pm 0,0015$ (para $h_0 = 3^\circ$); f) $1,438 \pm 0,003$ (para $h_0 = 3^\circ$)

Capítulo IX

1. a) $y_3 = 1 + 8x^2 + (56/3)x^3 + 18x^4 + 8x^5 + (4/3)x^6$; b) $y_3 = 1 - x + x^2 - (1/3)x^3 + (1/24)x^4$. 2. $y(x) = 1 + 2x - 0,7x^2 - 0,2567x^3 + 0,051x^4 + 0,00147x^5 - 0,00101x^6$. 3. $y = x^3/3 + x^7/63 + \dots$. 4. a) $y_1 = -1,1$; $y_2 = -1,18$; $y_3 = -1,238$; $y_4 = -1,2718$; $y_5 = -1,2790$; b) $y_1 = 0$, $y_2 = 0,01$, $y_3 = 0,0278$, $y_4 = 0,0524$, $y_5 = 0,08192$, $y_6 = 0,115536$, $y_7 = 0,152429$, $y_8 = 0,191943$, $y_9 = 0,233554$, $y_{10} = 0,276844$. 5. $y_0 = 1$, $y_1 = 1,1836$, $y_2 = 1,3426$, $y_3 = 1,4850$, $y_4 = 1,6152$, $y_5 = 1,7362$. 6. $y_0 = 1$, $y_1 = 1,1867$, $y_2 = 1,3484$, $y_3 = 1,4938$, $y_4 = 1,6272$, $y_5 = 1,7542$. 7. a) $y_0 = 0$, $y_1 = 0,10536$, $y_2 = 0,223136$, $y_3 = 0,356601$, $y_4 = 0,510424$, $y_5 = 0,691497$, $y_6 = 0,910454$, $y_7 = 1,184648$, $y_8 = 1,54449$, $y_9 = 2,048721$, $y_{10} = 2,827617$; b) $y_0 = 2,00$, $y_1 = 1,81$, $y_2 = 1,64$, $y_3 = 1,49$, $y_4 = 1,36$, $y_5 = 1,25$, $y_6 = 1,16$, $y_7 = 1,09$, $y_8 = 1,04$, $y_9 = 1,01$. 8. $y_4 = 0,8110$, $y_5 = 0,8196$, $y_6 = 0,8464$, $y_7 = 0,8898$, $y_8 = 0,9480$, $y_9 = 1,0197$, $y_{10} = 1,1037$.

Capítulo X

1. a)	0,00	16,18	38,63	50,00	b)	0,00	17,88	39,92	50,00
	0,00	14,12	26,09	30,10		0,00	15,18	36,39	30,10
	0,00	15,20	20,53	12,38		0,00	16,37	21,26	12,38
	0,00	20,15	29,34	4,31		0,00	29,05	29,63	4,31

	9,81	19,78	29,12	40,16	42,31	
0,00	8,97	17,58	25,36	32,18	36,11	40,16
0,00	8,68	16,00	22,29	26,86	29,69	33,14
2. 0,00	8,36	15,59	20,71	23,05	22,62	19,11
0,00	9,43	17,22	21,71	21,85	18,55	13,00
0,00	12,20	22,09	26,96	24,01	16,70	6,98
	17,28	31,96	40,00	30,50	17,28	

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a) 0,000	0,343	0,672	0,970	1,213	1,375	1,423	1,327	1,062	0,618
0,005	0,336	0,656	0,943	1,172	1,318	1,351	1,243	0,973	0,531
0,010	0,328	0,639	0,914	1,131	1,262	1,281	1,162	0,887	0,486
0,015	0,320	0,621	0,885	1,088	1,206	1,212	1,084	0,824	0,443
0,020	0,311	0,602	0,855	1,045	1,150	1,145	1,018	0,764	0,412
3.									
b) 0,000	2,091	1,919	1,777	1,660	1,562	1,480	1,410	1,350	1,297
0,017	2,097	1,924	1,781	1,663	1,564	1,482	1,411	1,351	1,298
0,033	2,102	1,929	1,785	1,666	1,567	1,484	1,413	1,352	1,299
0,050	2,106	1,934	1,789	1,670	1,570	1,486	1,415	1,354	1,300
0,067	2,110	1,939	1,794	1,673	1,572	1,488	1,416	1,355	1,301

Índice alfabético de materias

- Análisis armónico 319
- Base de un espacio 89
- Cantidad de justas cifras del cociente 29
- Carácter correcto del problema de diferencias 437
- Cifra dudosa 18
- significativa 17
 - justa 18
 - — en sentido lato 19
- Coficiente guía 111
- Coficientes de Cotes 360
- — Fourier 314
 - — la ecuación 163
 - — un sistema de ecuaciones 99
- Combinación lineal de los vectores 87
- Complemento algebraico 45
- Condición de Lipschitz 382
- Condiciones de conjugación 430
- — contorno 425
 - — frontera 425
 - — iniciales 381
- Coordenadas del vector 37, 90
- Cotas de las raíces reales de la ecuación algebraica 203
- Criterio de Chébyshév 261
- Cuadratura 341
- Curva integral 391
- Datos de entrada 436
- iniciales 381
- Defecto de la matriz 82
- Dependencia funcional 254
- lineal de los vectores 86
- Derivación numérica 337—340
- Desarrollo de la matriz en producto de dos matrices triangulares 60—62
- del determinante según los elementos de la fila (columna) 45
- Determinación más exacta de las incógnitas por el esquema de Gauss 118, 119
- — — — raíces 173
- Determinante 43
- característico 211
 - , cálculo con ayuda del esquema de Gauss 121
 - de segundo orden 43
 - de tercer orden 43
 - , propiedades 47—49
- Diagonal principal 37, 43
- secundaria 43
- Diferencia de las matrices 38
- Diferencias ascendentes 275, 276
- centrales 275, 277
 - descendentes 275
 - divididas 293—295
 - finitas 258, 275—280
- Dimensión del espacio 89
- Discrepancias 118
- Discriminante 422
- Dominio de convergencia de la serie funcional 312
- — existencia de la función 170
 - — valores admisibles de la ecuación 162
- Ecuación algebraica 163
- característica 211, 212
- Ecuación diferencial 380
- — en derivadas parciales 380
 - — — — de tipo elíptico 423
 - — — — — hiperbólico 423
 - — — — — parabólico 423
 - de conducción del calor 424
 - — Laplace 428
 - — Poisson 424, 425
 - — vibración de una cuerda 424
- Ecuaciones básicas 105
- matriciales 57—59
- Elemento principal 126
- Elementos de un vector 37
- Error 15
- absoluto 15
 - de aproximación 15
 - — — de la condición de contorno 435
- Error absoluto de la condición de ecuación 435
- — cálculo 13
 - — interpolación 263, 266
 - del método 13
 - de redondeos 13
 - inevitable 13
 - relativo 16
- Esquema de diferencias 433
- — división única 113
 - — Horner 153
 - — Jaletski 130—132
 - — Runge 326, 327

- separación de las raíces 169—172
- convergente 373
- combinado de las cuerdas y de las tangentes 185—187
- de Adams 406—410
- de Aitken 302—304
- — aproximaciones sucesivas (véanse método de iteraciones y método de Picard)
- — bisección 174
- — coeficientes indeterminados 388
- — cuadrados mínimos 262, 263
- — Danilevski 230—235, 241—249
- — derivación sucesiva 385
- — desarrollo inmediato del determinante característico 213—215
- — diferencias finitas 419, 420, 431—437
- — elementos principales 126—129
- — eliminación sucesiva de las incógnitas 111—116
- — Euler 390—392, 394
- — Euler — Cauchy 397
- — Gauss 111—116
- — Horner 205—207
- — iteraciones 135—144, 160, 161, 190—196, 248, 249
- — Krylov 217, 219, 224
- — Lagrange 204
- — las cuerdas 177—180
- — — tangentes 181—185
- — Le Verrier 225, 226
- de Le Verrier — Faddéev 226, 229
- — Milne 412—415
- — Newton para determinar la cota superior de las raíces positivas de una ecuación 204
- — — orladura 83
- — — sucesiva 77, 78
- — partición en células 74, 75
- — Picard 383, 384
- — precisar las raíces de una ecuación 181—184
- — pruebas 173—175
- — rejillas 432
- Método de resolución de las ecuaciones 160
- — Runge — Kutta 399—403
- — Seydel 143—146
- gráfico de representación de la función 255
- — de separación de las raíces 165, 169
- tabular de representación de las funciones 255
- Módulo de la matriz 80
- Molde 435
- Multiplicadores de Lagrange 271
- Nodo 262, 341, 433
- múltiplo 308
- Nodos equidistantes de interpolación 273
- Norma de la matriz 81
- del vector 81
- sobre el conjunto de las funciones de red 435
- Número aproximado 12
- característico 210
- de cifras justas del producto 26
- Orden de aproximación de un problema de contorno 435, 436
- — convergencia de un esquema de diferencias 437
- — exactitud de la tabla de diferencias finitas 281
- — la matriz cuadrada 37
- — una ecuación diferencial 380
- — un número 17
- Orladura 70
- Paso de integración 390
- — la tabla 256
- directo 113—116
- invertido 113—115
- Pérdida de exactitud 22
- Polinomio algebraico 151
- característico 211
- interpolador 262
- — de Bessel 287
- — — Lagrange 271, 273, 274
- — — Newton con diferencias divididas 208
- — — — primero 290
- — — — segundo 291
- — — — Stirling 285
- Polinomios de Chebyshev 304, 305
- Potencia de una matriz 41
- Principio del máximo 429, 431
- de Runge 408
- Problema con condiciones iniciales 382
- de Cauchy 382, 425
- — para la ecuación hiperbólica 427
- — — — — parabólica 427
- de contorno 417
- — — homogéneo 419
- — — lineal 418
- — — mixto 418
- — Dirichlet 429
- — Neumann 429
- sin condiciones iniciales 425
- Proceso iterativo 135
- Producto de una matriz por otra 39—41
- — — — un número 38
- del vector por un número 41
- Progresión aritmética 310
- geométrica 310

- Quebrada de Euler 391
- Raíz de la ecuación 162
 — del polinomio 152
 — de multiplicidad 152
 — simple 152
- Rango de la matriz 82
- Red 433
- Redondeo 13
- Regla de Descartes 200
 — — la cifra par 14
 — del anillo 203
 — de los triángulos 44
- Reglas de cómputo de las cifras 32, 33
 — — redondeo 14
- Segmento inicial 407
- Separación de las raíces 165
- Serie 311
 — convergente 312
 — de Fourier 314
 — — potencias 312
 — divergente 312
 — funcional 312
 — — uniformemente convergente 313
 — trigonométrica 312
- Símbolo de Kronecker 123
- Sistema contradictorio de ecuaciones 99
 — de ecuaciones 162
 — — — compatible 99
 — — — determinado 99
 — — — fundamental 109
 — — — homogéneo 100
 — — — incompatible 99
 — — — indeterminado 99
 — — — lineales, resolución por el método de elementos principales 126—128
 — — — — — — — Gauss 111—116
 — — — — — — — itera- ciones 135, 136
 — — — — — — — Seydel 143, 144
 — — — — — — — según el esquema de Jaletski 130—132
 — — m ecuaciones lineales con n incógnitas 99, 105, 106
 — — — — — — —, homogéneo 108, 109
 — — n ecuaciones lineales con n incógnitas 101
 — — Sturm 201
 — equivalentes de ecuaciones 100
- Solución clásica de un problema de contorno 426
 — de una ecuación 162
- — — — diferencial 381
 — — un sistema de ecuaciones 162
 — general de una ecuación diferencial 381
 — parcial de una ecuación diferen- cial 381
- Sucesión 309
 — convergente 310
 — divergente 310
 — funcional 310
- Suma de las matrices 38
 — — los vectores 41
 — — una serie 312
 — parcial de una serie 311
- Sumas de control 116
- Tamaño de una matriz 36
- Teorema de Bezout 154
 — — Cramer 102
 — — Dirichlet 315
 — — Kronecker — Capelli 101
 — — Sturm 201
 — fundamental del álgebra 199
 — sobre el desarrollo de un vector según la base dada 89
 — — — menor básico 90
 — — la convergencia del esquema de diferencias 437
 — — — dependencia lineal de los vectores 87
 — — — estimación del error del pro- ceso de iteración 266, 267
 — — — existencia y unicidad del polinomio interpolador 264
 — — — matriz inversa 51
- Teoremas sobre la convergencia del proceso iterativo 191, 192, 384
 — — las fórmulas de integración nu- mérica 367—369
 — — — funciones continuas 171, 172
 — — — los determinantes 45, 46
- Términos independientes de un sis- tema de ecuaciones 99
- Transformaciones elementales de la matriz 84
 — — del determinante 49
 — — de un sistema de ecuaciones 100
- Traza de la matriz 214
- Valor absoluto de la matriz 80
 — — del vector 82
 — aproximado de un número 14
 — posicional 14
 — propio 210
- Vector 36
 — columna 36
 — fila 36
 — unidad 89
- Versor 89

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.