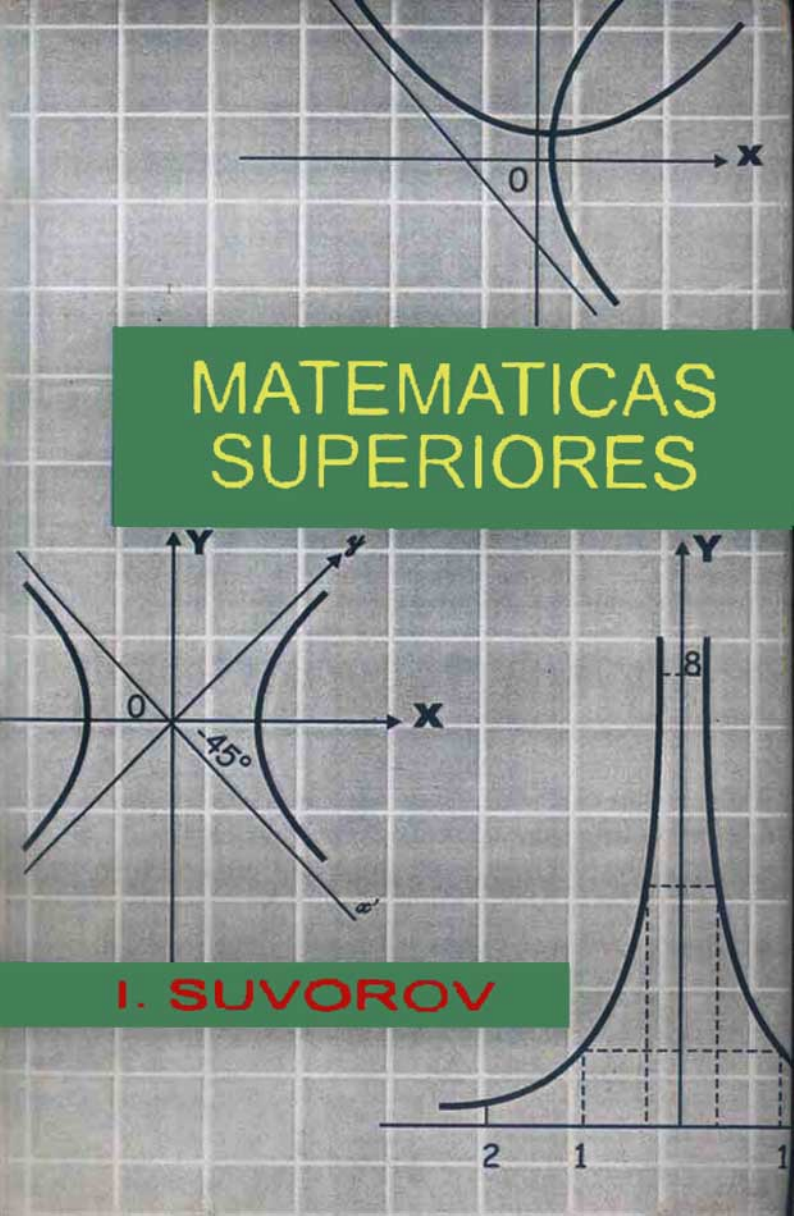
MATEMATICAS SUPERIORES

I. SUVOROV



ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

И. СУВОРОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Для техникумов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

На испанском языке

I. SUVOROV

CURSO DE MATEMATICAS SUPERIORES

CUARTA EDICION

EDITORIAL MIR • MOSCU

СДU 51(075.3) = 60

Traducido del ruso por
J. Vela Rodríguez y J. José Toloza

Impreso en la URSS, 1973

$\frac{0223-381}{041(01)-73}$

A. FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA ANALITICA PLANA

CAPITULO I

METODO DE COORDENADAS

§ 1. Coordenadas de un punto

1°. Se denomina *método de coordenadas* el procedimiento empleado para determinar con ayuda de números la posición de un punto con relación a los ejes de coordenadas.

El *eje de coordenadas* es una recta (en la figura 1, Ox), en la que se tiene:

1) un punto O, origen de coordenadas;

2) una direccíon positiva (en la figura 1, de izquierda a derecha);

3) una unidad de medida de los segmentos l, llamada también unidad de escala.

La distancia de cualquier punto M del eje al origen O (el segmento OM) puede ser medida con la unidad establecida l, es decir, quedará expresada por un número.

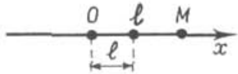


Fig. 1

A este número se le pone el signo "más", si la dirección desde el origen O hasta el punto M coincide con la dirección positiva del eje, y se le coloca el signo "menos", en el caso de que sea opuesta a la dirección positiva del eje. De este modo, a cada punto M del eje de coordenadas *le corresponde un número determinado. A este número se* le llama coordenada del punto M. Debe señalarse que la coordenada del origen O es igual a cero.

Recíprocamente: a cada número real le corresponde en el eje de coordenadas un punto cuya coordenada se expresa con este número, conforme a la unidad de medida dada.

2°. Dos ejes de coordenadas Ox y Oy, perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto O (fig. 2), forman un sistema de coordenadas rectangulares, o cartesianas *.

La dirección positiva de cada eje aparece indicada en la figura con una flecha.

Los ejes Ox y Oy dividen el plano en cuatro regiones, llamadas *cuadrantes*, y están numeradas como sigue: el 1er cuadrante es la parte del plano entre $+Ox$ y $+Oy$;

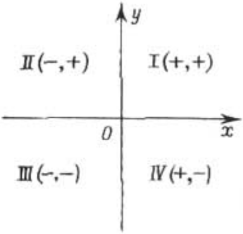


Fig. 2

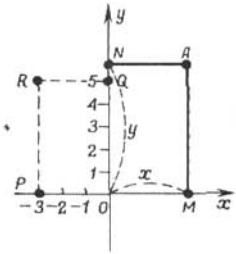


Fig. 3

el 2°, entre $+Oy$ y $-Ox$; el 3°, entre $-Ox$ y $-Oy$, y el 4°, entre $-Oy$ y $+Ox$.

Para determinar por medio de números la posición de un punto A en el plano respecto al sistema de coordenadas dado (fig. 3), se baja desde el punto A una perpendicular AM al eje Ox y otra perpendicular AN al eje Oy. Los puntos M y N de intersección de estas perpendiculares con los ejes Ox y Oy respectivamente, se denominan proyecciones del punto A sobre los ejes de coordenadas. Sea el número x la coordenada del punto M en el eje Ox, y el número y, la coordenada del punto N en el eje Oy.

D e f i n i c i ó n. *El número x, que es la coordenada de la proyección del punto A sobre el eje Ox, se llama abscisa del punto A. El número y, que es la coordenada de la proyección del punto A sobre el eje Oy, se llama ordenada del punto A.*

---

* El sistema de coordenadas rectangulares fue denominado cartesiano en honor al matemático francés René Descartes, que fue el primero que publicó (año 1637) un trabajo de geometría analítica, en el que exponía la idea fundamental de ésta, consistente en que una ecuación en la que figuran x e y determina una línea.

De acuerdo con esta definición, el eje Ox se llama eje de abscisas, y el eje Oy, eje de ordenadas.

Abreviando: si *el punto A tiene las coordenadas x e y*, se indica *punto A* (x, y), con la particularidad de que la abscisa se coloca en primer lugar, y la ordenada, en segundo.

En dependencia del cuadrante en que se encuentre el punto A, se determinan los signos de su abscisa y su ordenada. En la fig. 2 se indican los signos de la abscisa y de la ordenada para cada cuadrante, conviniendo en que el primer signo es el de la abscisa, y el segundo, el de la ordenada.

Si el punto A se encuentra en el eje Ox (Oy), su ordenada (abscisa) será igual a cero.

3°. Con arreglo al procedimiento indicado, para cada punto del plano pueden ser determinadas sus coordenadas. Viceversa: por medio de las coordenadas dadas puede ser encontrado el punto en el plano. Por ejemplo, $(-3;\ 5)$ son las coordenadas del punto R. Tomando desde el origen O tres unidades de escala, a la izquierda, por el eje Ox, y cinco unidades hacia arriba, por el eje Oy, obtenemos en el eje Ox el punto P, y en el eje Oy, el punto Q (fig. 3). Y trazando las rectas PR y QR, paralelas respectivamente a los ejes Oy y Ox, se obtiene en su intersección el punto buscado $R\ (-3;\ 5)$.

4°. Las coordenadas x e y del punto A en el plano son números iguales a las razones que forman respectivamente los segmentos OM y ON con la unidad de escala. Tomando para los dos ejes como unidad de escala la longitud del segmento l, tendremos:

$$x = \frac{OM}{l}, \quad y = \frac{ON}{l}. \tag{1}$$

Estas razones suelen abreviarse así:

$$x = OM, \quad y = ON,$$

donde en este caso OM u ON no representan el segmento orientado OM u ON, sino el número que lo mide, siendo $l = 1$, tomado con signo "más" o "menos" según la dirección del segmento. Tal notación, además de su simplicidad, es cómoda porque así las coordinadas x e y adquieren una representación gráfica.

§ 2. Suma de dos segmentos orientados

En la geometría analítica, los segmentos se caracterizan no sólo por su longitud, sino también por su dirección. Cuando en dos segmentos: 1) las rectas, determinadas por *sus segmentos, son paralelas o coinciden*, 2) *las direcciones* desde los orígenes de los segmentos a sus extremos son las mismas (o contrarias), se les llama igualmente (o contrariamente) orientados.

Al designar los segmentos orientados por medio de dos *letras, la primera indica el origen del segmento, y la segunda*, el extremo. Los segmentos AB y BA tienen igual longitud, pero dirección contraria:

$$AB = -BA.$$

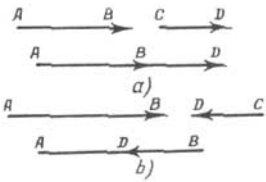


Fig. 4

En algunos casos la dirección de un segmento se señala con una flecha colocada al final de éste (fig. 4, *a* y *b*).

Para obtener la suma de dos segmentos igualmente o contrariamente orientados AB y CD (fig. 4, *a* y *b*), hay que colocarlos en una línea recta de tal modo que el origen del segundo segmento, el punto C, coincida con el extremo del primer segmento, el punto B. Entonces, el origen del primer segmento, el punto A, y el extremo del segundo, el punto D, constituirán el origen y el extremo del segmento, equivalente a la suma de AB y CD:

$$AB + CD = AD.$$

§ 3. La distancia entre dos puntos

1°. *Se denomina magnitud de un segmento*, situado en un eje de coordenadas, al valor de su longitud, tomado con signo "más", si la dirección del segmento coincide con la dirección positiva del eje, y con signo "menos" en caso de que sea opuesta a la dirección positiva del eje.

Teorema. *La magnitud de un segmento, situado en el eje de coordenadas, es igual a la diferencia de las coordenadas del extremo y del origen del mismo*, es decir, si el origen y el exteremo del segmento M_1M_2 tienen las coordenadas x_1 y x_2 (ó y_1 e y_2), se tiene:

$$\boxed{M_1M_2 = x_2 - x_1 \quad \text{ó} \quad (M_1M_2 = y_2 - y_1).} \tag{1}$$

D e m o s t r a c i ó n. Hay seis casos posibles de ubicación de los puntos M_1 y M_2 entre sí y respecto al origen O (fig. 5).

Según la regla de la adición de los segmentos orientados tendremos:

en los casos I y II,

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

de aquí que

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

Pero $OM_1 = x_1$ y $OM_2 = x_2$, por lo tanto en ambos casos resultará

$$M_1M_2 = x_2 - x_1;$$

en los casos III y IV,

$$M_1 + CM_2 = M_1M_2.$$

Pero $M_1O = -OM_1 = -x_1, OM_2 = x_2$ por lo que

$$M_1M_2 = x_2 - x_1;$$

en los casos V y VI,

$$M_1M_2 + M_2O = M_1O;$$

de donde resulta que

$$M_1M_2 = M_1O - M_2O,$$

ó

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

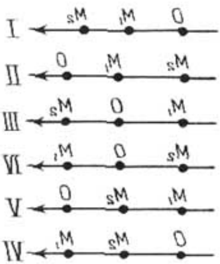


Fig. 5

puesto que $M_1O = -OM_1$ y $M_2O = -OM_2$. Pero como $OM_2 = x_2$ y $OM_1 = x_1$, se tiene

$$M_1M_2 = x_2 - x_1.$$

En el caso particular, cuando el origen del segmento coincide con el de coordenadas ($x_1 = 0$), la fórmula (1) muestra que la magnitud del segmento es la coordenada de su extremo.

2°. E j e m p l o s. 1. La magnitud del segmento que tiene como origen y extremo los puntos M_1 (3; 0) y M_2 (5; 0), es

$$M_1M_2 = 5 - 3 = 2.$$

2. Si los puntos $M_1(-3;\ 0)$ y $M_2(-5;\ 0)$, se tiene

$$M_1M_2 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2.$$

3. Si los puntos M_1 (0; -2) y M_2 (0; 3), se tiene que $M_1M_2 = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$.

3°. Corolario. *La magnitud del segmento AB* (fig. 6), *que es paralelo al eje de las abscisas* (*o de las ordenadas*) *es igual a la diferencia entre las abscisas* (*ordenadas*) *del extremo y del origen del segmento, es decir,*

$$\boxed{AB = x_2 - x_1, \quad \text{ó} \quad AB = y_2 - y_1} \qquad (1)$$

En efecto, si de los puntos dados bajamos las perpendiculares AM_1, y BM_2, al eje de abscisas (fig. 6, *a*) o al eje de ordenadas (fig. 6, *b*), vemos que el segmento AB

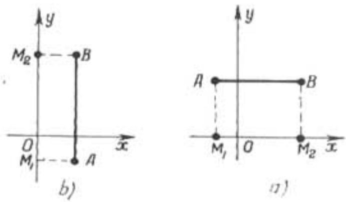


Fig. 6

tiene la misma longitud que el segmento M_1M_2 (como lados opuestos de un rectángulo) y que está igualmente orientado, es decir

$$AB = M_1M_2 = x_2 - x_1 \ (\text{ó } y_2 - y_1).$$

4°. Si nos interesa solamente la longitud del segmento AB, siéndonos indiferente su dirección, el número obtenido por medio de la fórmula (I) hay que tomarlo en su valor absoluto, o sea,

$$\boxed{\text{long. de } AB = |x_2 - x_1| \text{ ó long. de } AB = |y_2 - y_1|.} \qquad \text{(Ia)}$$

5°. Si el segmento AB no es paralelo a ninguno de los ejes de coordenadas, se entiende que su magnitud es igual a la longitud del mismo.

Problema. *Hállese la distancia entre los puntos* $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

Solución. De los puntos A y B (fig. 7) se bajan las perpendiculares AM_1 y BM_2 al eje Ox, y las perpendiculares AN_1 y BN_2 al eje Oy. Prolongando AN_1 hasta la intersección con BM_2, de acuerdo con el teorema de Pitágoras tendremos en el triángulo ACB:

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}.$$

Pero las longitudes de AC y CB son respectivamente iguales a $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$.

Colocando estos valores bajo el radical se obtendrá:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},} \qquad \text{(II)}$$

es decir, *la distancia entre dos puntos dados es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias entre las coordenadas homónimas de estos puntos.*

6°. Según la fórmula (II), la distancia del punto $A(x, y)$ al origen de coordenadas $O(0, 0)$ es $OA = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$, o lo que es lo mismo

$$\boxed{OA = \sqrt{x^2 + y^2},} \qquad \text{(III)}$$

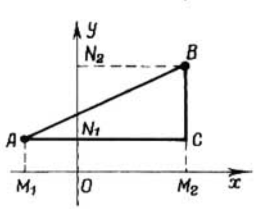


Fig. 7

es decir, *la distancia de un punto al origen de coordenadas es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las coordenadas de este punto.*

7°. E j e m p l o s. 1. Hállese la distancia entre los puntos A (—4; 3) y B (0; 6).

S o l u c i ó n. Según la fórmula (III)

$$AB = \sqrt{(0+4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

2. Determínese un punto equidistante de los puntos (0; 0), (7; —7) y (8; 0).

S o l u c i ó n. Sean x e y las coordenadas del punto que se busca. La distancia desde el punto (x, y) hasta el primer punto dado es igual a $\sqrt{x^2+y^2}$; hasta el segundo, $\sqrt{(x-7)^2+(y+7)^2}$; hasta el tercero, $\sqrt{(x-8)^2+y^2}$. Según lo convenido, todas estas distancias son iguales; el primer radical lo igualamos sucesivamente al segundo y al tercero:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y+7)^2},$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-8)^2+y^2}$$

Elevando estas ecuaciones al cuadrado y abriendo los paréntesis después de reducir los miembros semejantes, se obtiene el sistema de ecuaciones $x - y = 7$ y $x = 4$. Sustituyendo en la primera ecuación la x por 4, tendremos que $y = -3$. El punto buscado es (4; —3).

§ 4. División de un segmento proporcionalmente a una razón dada

1°. Problema. *Conociendo las coordenadas* x_1, y_1 *del punto* A (fig. 8) *y las coordenadas* x_2, y_2 *del punto* B, *hállense las coordenadas* x, y, *de un tercer punto* C, *que divide al segmento* AB *de tal modo que la razón* $\frac{AC}{CB}$ *es igual al número* λ.

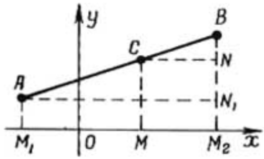


Fig. 8

Solución. Desde los puntos A, B, C se trazan las rectas AM_1, BM_2 y CM paralelas al eje Oy. Estas rectas cortan los segmentos AB y M_1M_2 en partes proporcionales:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{AC}{CB}. \tag{1}$$

Pero de acuerdo con la fórmula (I) $M_1M = x - x_1$, $MM_2 = x_2 - x$, y $\frac{AC}{CB} = \lambda$ (según lo convenido).

Sustituyendo estos valores en la proporción (I) tendremos:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

Despejando la x en esta ecuación, resultará:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}} \tag{IV}$$

Trazando desde los puntos A, B y C rectas paralelas al eje Ox, análogamente a lo expuesto, resultará:

$$\boxed{y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.} \tag{IV}$$

2°. Ejemplo. Hállense los puntos que dividen en tres partes iguales el segmento limitado por los puntos A (4; —3) y B (—5; 0).

S o l u c i ó n. Supongamos que C y D (fig. 9) son los puntos buscados en el segmento AB. Se tiene

$$\frac{AC}{CB}=\frac{1}{2}, \quad \text{y} \quad \frac{AD}{DB}=2.$$

Por lo tanto, al buscar las coordenadas de los puntos C y D por medio de las fórmulas (IV), hay que tomar a λ equivalente a $\frac{1}{2}$ para el punto C, e igual a 2 para el punto D. Sustituyendo $x_1 = 4$, $y_1 = -3$, $x_2 = -5$, $y_2 = 0$, $\lambda_C = \frac{1}{2}$, $\lambda_D = 2$, se tiene:

$$x_C=\frac{4+\frac{1}{2}\cdot(-5)}{1+\frac{1}{2}}=1; \quad y_C=\frac{-3+\frac{1}{2}\cdot 0}{1+\frac{1}{2}}=-2.$$

$$x_D=\frac{4+2\cdot(-5)}{1+2}=-2; \quad y_D=\frac{-3+2\cdot 0}{1+2}=-1.$$

Los puntos buscados son: $C\ (1;\ -2)$, $D\ (-2;\ -1)$.

3°. Si el punto C divide al segmento AB por la mitad, entonces $AC = CB$ y $\lambda = \frac{AC}{CB} = 1$, y las fórmulas (IV) toman la siguiente forma:

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.} \qquad \text{(V)}$$

F i g. 9

4°. N o t a. El punto de división C puede encontrarse en la recta AB y fuera del segmento AB; en este caso se dice que el punto C divide a la recta exteriormente; en este caso los segmentos AC y CB son de sentidos opuestos, λ es un número negativo y las fórmulas (IV), conservan su forma.

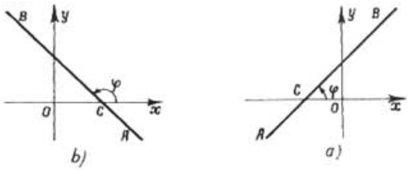
§ 5. Angulo formado por una recta y el eje

1°. D e f i n i c i ó n. *Se llama ángulo formado por la recta AB con el eje Ox* (fig. 10) *a aquel ángulo mínimo en el que hay que hacer girar la dirección positiva de eje Ox en sentido contrario al de las agujas del reloj, para que coincida con la recta AB, o sea paralela a ella.*

En las figuras 10 *a* y *b*, este ángulo es xCB.

2°. P r o b l e m a. *Hállese el ángulo formado con el eje Ox por la recta que pasa por los puntos $A\ (x_1, y_1)$ y $B\ (x_2, y_2)$.*

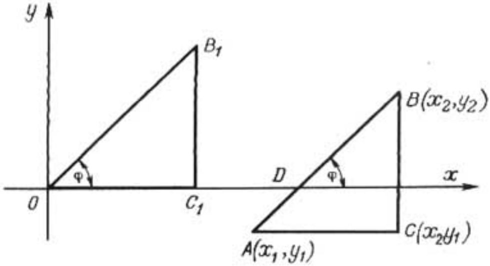
S o l u c i ó n. Supongamos que la recta AB forma con el eje Ox un ángulo xDB, igual a φ (figs. 11 y 12). Tracemos $AC \parallel Ox$ y $BC \parallel Oy$ hasta su intersección en el punto C.



F i g. 10

Las coordenadas del punto C son x_2 e y_1.

Traslademos el triángulo ABC hasta que su vértice A coincida con el origen de coordenadas O. Entonces el



F i g. 11

triángulo ocupará la posición OB_1C_1 (figs. 11 y 12)

$$\angle xOB_1 = \angle xOB = \varphi.$$

La tangente del ángulo xOB_1 es (por definición) la razón de la ordenada del punto B_1 a su abscisa, es decir,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{C_1B_1}{OC_1}.$$

Ya que

$$C_1B_1 = CB = y_2 - y_1,$$
$$OC_1 = AC = x_2 - x_1,$$

se obtiene

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.} \qquad \text{(VI)}$$

La fórmula (VI), en particular, es válida cuando los puntos A y B están situados en una recta paralela al eje de las abscisas, o en èl propio eje.

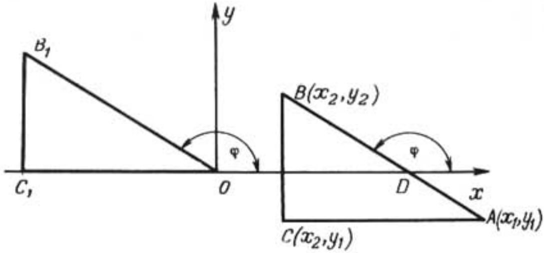


Fig. 12

En este caso,

$$y_2=y_1, \quad y_2-y_1=0,$$
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{0}{x_2-x_1}=0.$$

Si AB es paralela al eje de las ordenadas, entonces

$$x_2=x_1, \quad x_2-x_1=0,$$
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y_2-y_1}{0},$$

es decir, que tg φ no existe.

3°. Ejemplo. Hállese el ángulo que forma con el eje Ox la recta que une los puntos A $(-2; 1)$ y B $(2; -3)$.

Solución. Haciendo en la fórmula (VI) las sustituciones $x_1=-2$, $x_2=2$, $y_1=1$, $y_2=-3$, tendremos:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-3-1}{2-(-2)}=-1,$$
$$\varphi=135°.$$

§ 6. Condición de paralelismo y de perpendicularidad

En este párrafo se trata de las rectas que no son paralelas al eje Oy.

1°. Definición. *La tangente del ángulo que forma una recta con el eje Ox se llama coeficiente angular de la recta, o también inclinación de la recta respecto al eje Ox.*

2°. Si $AB \parallel CD$ (fig. 13), los ángulos φ y α, que forman las rectas AB y CD con el eje Ox, son iguales (por ser "correspondientes").

Por lo tanto

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha.} \tag{VII}$$

La condición de paralelismo de las rectas consiste en que los coeficientes angulares de estas rectas son iguales.

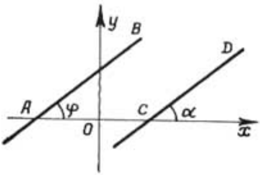


Fig. 13

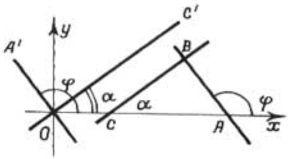


Fig. 14

3°. Supongamos que $AB \perp BC$ (fig. 14) y que la recta AB forma con el eje Ox un ángulo igual a φ y la recta BC, un ángulo igual a α.

Tracemos del origen de coordenadas O unas rectas OA' y OC', paralelas a AB y BC respectivamente. Entonces, φ es también el ángulo en el cual hay que hacer girar Ox, en el sentido contrario a las agujas del reloj, para que coincida con OA', y α es el ángulo en el que Ox tiene que girar del mismo modo para que coincida con OC'. Como $OA' \perp OC'$, la diferencia entre φ y α es 90°:

$$\varphi - \alpha = 90°.$$

De donde:

$$\varphi = 90° + \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Por consiguiente

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \qquad \text{(VIII)}$$

La condición de perpendicularidad de dos rectas consiste en que los coeficientes angulares son recíprocos en valor y de signo contrario.

Nota. Las igualdades (VII) y (VIII) son condiciones necesarias de paralelismo y de perpendicularidad de rectas. Se puede demostrar, aplicando la fórmula (XXV), que estas condiciones son también suficientes.

CAPITULO II

LA RECTA

§ 7. Concepto de la ecuación de la línea. Objeto de la geometría analítica en el plano

1°. Supongamos que la línea está definida en el plano por las propiedades de sus puntos *. Estudiaremos esta línea en el sistema de coordenadas cartesianas xOy. Por las propiedades de los puntos que definen a la línea dada, se puede hallar la relación entre las coordenadas x e y de sus puntos y expresar la línea por una ecuación que relacione las coordenadas x, y de sus puntos. Aclaremos esto con ejemplos.

E j e m p l o. 1. *Expresar por medio de una ecuación el lugar geométrico de los puntos en el plano, equidistantes de los puntos A (2; 8) y B (5; 3).*

S o l u c i ó n. La planimetría enseña que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos dados A y B (fig. 15) es la recta MN, perpendicular al segmento AB, que pasa por su punto medio C.

Tomemos en la recta MN un punto cualquiera Q, cuyas coordenadas sean (x, y). Las distancias del punto Q a los puntos dados A y B se determinan por medio de la fórmula (II):

$$AQ=\sqrt{(x-2)^2+(y-8)^2}, \quad BQ=\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2},$$

y como, según los datos del problema, estas distancias son iguales, es decir, $AQ=BQ$, se tiene

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-8)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}. \qquad (1)$$

* La línea como concepto matemático pertenece al grupo de los conceptos más difíciles de la matemática. Nosotros nos basamos aquí en aquella noción elemental de líneas dadas en la escuela media como lugar geométrico de puntos que poseen una determinada propiedad. Los interesados en el concepto de línea, pueden consultar el libro de A. S. Parjomenco "Qué es la línea". Edit. Gostejisdat, 1954.

Si el punto $Q(x, y)$ se desplaza por la recta MN, los valores de x e y varían, pero en una proporción tal que no se altera la igualdad dada (1). De este modo, la igualdad (1) representa una ecuación que es satisfecha por las coordenadas de todos los puntos de la recta MN sin excepción. Al mismo tiempo, a esta igualdad no satisfacen las coordenadas de ningún punto del plano que no esté situado en la recta MN. En efecto, si el punto Q se encontrara fuera de la recta MN, no estaría a la misma distancia de los puntos A y B, $AQ \neq BQ$, y se alteraría la igualdad (1).

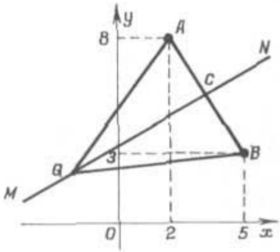


Fig. 15

Elevando al cuadrado ambas partes de la igualdad (1) y abriendo los paréntesis, tendremos:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 16y + 64 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9,$$

o

$$3x - 5y + 17 = 0. \tag{2}$$

Una ecuación respecto a x e y se llama ecuación de la línea dada si la satisfacen las coordenadas x, y de todos los puntos de la línea dada y sólo de éstos.

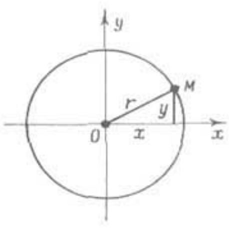


Fig. 16

La ecuación (2) se llama ecuación de la recta MN ya que la satisfacen las coordenadas de todos los puntos de la recta MN y sólo de éstos.

Ejemplo 2. Escribir la ecuación de una circunferencia de radio r, con centro en el origen de coordenadas (fig. 16).

Solución. Se fija en la circunferencia un punto arbitrario M y se designan sus coordenadas por x, y. Por la definición de la circunferencia, la distancia de todo punto de la circunferencia al origen es igual a r. La distancia del punto M

(x, y) al origen 0 es $\sqrt{x^2+y^2}$ (fórmula III). Por consiguiente,

$$\sqrt{x^2+y^2}=r, \quad \text{o} \quad x^2+y^2=r^2. \tag{3}$$

Las coordenadas de todos los puntos de la circunferencia dada, y sólo de éstos, satisfacen a la ecuación obtenida (3), (ya que para cualquier punto (x, y), que no pertenece a la circunferencia dada, $x^2+y^2 \neq r^2$).

La ecuación $x^2+y^2=r^2$ se llama *ecuación de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas.*

2°. Para la designación de una ecuación de dos variables x, y, se emplea el símbolo $F(x, y)=0$, (que se lee: "efe de x y de y es igual a cero").

En el sistema de coordenadas cartesianas xOy cada par de números reales x, y determina un punto en el plano, y la ecuación $F(x, y)=0$ en general determina el lugar geométrico de todos aquellos puntos, cuyas coordenadas x, y satisfacen a la ecuación $F(x, y)=0$.

La ecuación $F(x, y)=0$ se llama ecuación de la línea dada en el plano xOy, si la satisfacen las coordenadas x, y de todos los puntos de la línea y solamente de éstos.

3°. En el curso general de geometría analítica en el plano hay dos problemas fundamentales:

1) dada una línea, definida geométricamente por las propiedades de sus puntos, hallar su ecuación;

2) dada una ecuación $F(x, y)=0$, la tarea consiste en estudiar la ecuación, y determinar la forma de la línea, como lugar geométrico de todos aquellos puntos del plano xOy, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

En geometría analítica estos problemas se estudian para un grupo restringido de líneas, precisamente sólo para líneas, cuyas ecuaciones son de primero o segundo grado respecto a x, y:

$$Ax+By+C=0, \tag{4}$$

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{5}$$

La línea cuya ecuacion es algebraica se llama *línea algebraica*, y el grado de su ecuación se llama *orden de la línea* (se supone que la ecuación es reducida a la forma racional y entera con respecto a x, y).

La línea (4) es de primer orden, y la (5), de segundo orden.

El contenido básico del curso de geometría analítica en el plano es el estudio de las líneas algebraicas de primero y segundo orden aplicando el método de coordenadas y medios algebraicos.

§ 8. La ecuación de la recta en función del coeficiente angular

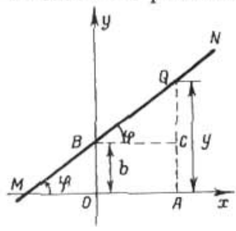
1°. T e o r e m a. *Toda recta se representa por una ecuación de primer grado, respecto a las coordenadas variables.*

D e m o s t r a c i ó n. 1$^{\text{er}}$ c a s o. La recta MN (fig. 17) no es paralela al eje Oy.

En este caso la recta MN corta el eje Oy formando con el eje Ox un ángulo $\varphi \neq 90°$. Sea la ordenada del punto de intersección de MN y Oy igual a b. Fijando en la recta MN un punto cualquiera $Q\ (x, y)$, y empleando la fórmula (VI) resulta $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y-b}{x}$, de donde $y = x \operatorname{tg} \varphi + b$.

Suponiendo que $\operatorname{tg} \varphi = k$ se tiene

$$\boxed{y = kx + b,} \qquad \text{(IX)}$$



F i g. 17

es decir, una ecuación de primer grado respecto a las coordenadas *variables* x e y.

A esta ecuación satisfacen también las coordenadas $(0, b)$ del punto B, que es el punto de intersección de la recta MN con el eje Oy. En efecto, sustituyendo en la ecuación (IX) x por cero y y por el número b, se obtiene la identidad:

$$b = b.$$

Pueden darse tres casos particulares.

1. Si la recta MN pasa por el origen de coordenadas O (fig. 18), la ordenada del punto de intersección de ésta con el eje Oy $b = 0$ y la ecuación (IX) toma la forma:

$$\boxed{y = kx.} \qquad \text{(X)}$$

Satisfacen a esta ecuación las coordenadas de todos los puntos de la recta MN, y entre ellas, las del origen (0; 0).

2. Si la recta MN es paralela al eje Ox (fig. 19), es decir, el ángulo $\varphi = 0$ y $k = \operatorname{tg} \varphi = 0$, la ecuación (IX) toma la forma:

$$\boxed{y = b.} \tag{XI}$$

En la igualdad (XI) no figura la x. Sin embargo, expresa la correlación entre x e y: a cada valor de x, es decir,

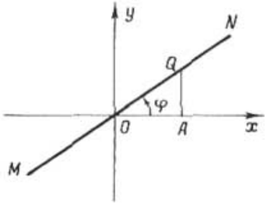


Fig. 18

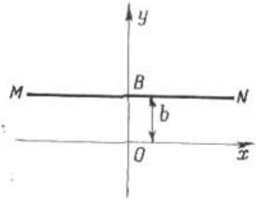


Fig. 19

a cada punto de la recta paralela a Ox, la ordenada es igual a b, y viceversa: cada punto del plano, cuya ordenada es igual a b, pertenece a esta recta.

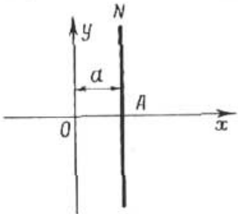


Fig. 20

3. Si la recta coincide con el eje Ox, sustituyendo en la ecuación (XI) $b = 0$, se obtiene la ecuación del eje de las abscisas:

$$\boxed{y = 0.} \tag{XII}$$

2° c a s o. La recta MN e s p a r a l e l a a l e j e Oy (fig. 20).

Supongamos que la abscisa del punto de intersección de ésta con el eje Ox es igual a a. La ecuación de tal recta es

$$\boxed{x = a,} \tag{XIII}$$

En efecto, la abscisa de cada punto de la recta paralela al eje Oy (es decir, para cada valor de y) es igual a a, y viceversa, cada punto del plano, cuya abscisa es igual a a, pertenece a esta recta.

Si la recta coincide con el eje Oy, en este caso $a = 0$, y de la ecuación (XIII) obtenemos la ecuación del eje Oy:

$$\boxed{x = 0.} \qquad \textbf{(XIV)}$$

De este modo, cualquier recta se expresa mediante una ecuación de primer grado respecto a las coordenadas variables.

2°. En la ecuación (IX) k es el *coeficiente angular* de la recta, e $y = kx + b$ se llama *ecuación de la recta en función del coeficiente angular*. El término independiente b de la ecuación se llama *ordenada inicial* u ordenada en el origen, porque si $x = 0$, de la ecuación (IX) resulta que $y = b$. El coeficiente angular k y la ordenada inicial b para la recta dada son números constantes y constituyen los *parámetros* de la ecuación de la recta. En general, se llama parámetros a los números constantes que caracterizan al objeto y lo distinguen entre otros objetos homogéneos. Las coordenadas x e y de un punto arbitrario de una recta se llaman *coordenadas corrientes.*

§ 9. Ecuación general de la recta y casos particulares

1. Teorema recíproco. *Toda ecuación de primer grado respecto a las coordenadas x, y, representa una recta.*

Demostración. La ecuación de primer grado respecto a x, y, tiene la forma:

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \qquad \text{(XV)}$$

Supongamos que $B \neq 0$. Resolviendo la ecuación (XV) respecto a y, se tiene:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Comparando esta ecuación con la (IX), resulta:

$$\boxed{\begin{array}{l} -\frac{A}{B} = k = \operatorname{tg}\varphi \\ \hline -\frac{C}{B} = b \end{array}}, \qquad \begin{array}{r} \text{(XVI)} \\ \text{(XVII)} \end{array}$$

es decir, la ecuación $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$, representa una recta con el coeficiente angular $k = -\frac{A}{B}$ y la ordenada inicial $b = -\frac{C}{B}$.

En particular, si:

1) $C = 0$. La ecuación (XV) tiene la forma:

$$\boxed{Ax + By = 0} \qquad \text{(XVIII)}$$

y representa una recta que pasa por el origen de los ejes de coordenadas, porque las coordenadas del origen (0, 0) *satisfacen a la ecuación (VVIII)*.

2) $A = 0$. La ecuación (XV) tiene la forma:

$$\boxed{By + C = 0} \qquad \text{(XIX)}$$

Despejando la y:

$$y = -\frac{C}{B}, \quad \text{o} \quad y = b,$$

llegamos a la conclusión (fórmula XI) de que representa una recta paralela al eje de abscisas.

3) $A = 0$ y $C = 0$. En este caso, la ecuación (XV) tiene la forma:

$$By = 0, \quad \text{ó} \quad y = 0$$

y representa el eje Ox (fórmula XII).

4) Si el coeficiente $B = 0$, la ecuación (XV) tiene la forma:

$$\boxed{Ax + C = 0} \qquad \text{(XX)}$$

Despejando la x:

$$x = -\frac{C}{A} = a,$$

llegamos a la conclusión (fórmula XIII) de que representa una recta paralela al eje de ordenadas.

Pero si en la ecuación (XX) $C = 0$, $A \neq 0$, tiene la forma:

$$Ax = 0, \quad \text{ó} \quad x = 0.$$

y representa el eje Oy (fórmula XIV).

De este modo, cualquier ecuación de primer grado respecto a las coordenadas x, y, representa una recta. En otras palabras, toda línea de primer grado es una recta.

2°. La ecuación (XV)

$$Ax + By + C = 0.$$

se llama *ecuación general de la recta*. Las ecuaciones (XVIII—XX) son casos particulares.

§ 10. Ecuación de una recta en función de los segmentos

La posición de una recta respecto a los ejes de coordenadas puede ser determinada por la magnitud de los segmentos $ON = a$ y $OM = b$ (fig. 21), que la recta dada MN corta respectivamente en el eje Ox y en el eje Oy.

Según la figura 21, por semejanza de los triángulos AQN y OMN, resulta:

$$\frac{AQ}{OM} = \frac{AN}{ON},$$

o

$$\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a}.$$

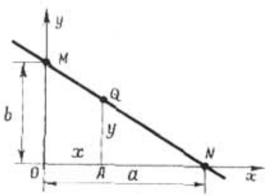


Fig. 21

Dividiendo cada miembro de $a - x$ por a, se tiene:

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a},$$

o

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad \text{(XXI)}$$

La ecuación (XXI) se llama *ecuación de la recta en función de los segmentos*.

§ 11. Ejemplos de resolución de problemas

1°. La ecuación de la recta que corta en el eje Oy un segmento igual a 3, y que forma con el eje Ox un ángulo $\varphi = 120°$.

Solución. Para obtener la ecuación de la recta dada hay que hallar los valores numéricos de los parámetros k y b e inscribirlos en la ecuación:

$$y = kx + b.$$

De la condición del problema, se deduce que

$$b=3,$$
$$k=\operatorname{tg} 120^{\circ}=\operatorname{tg}(180^{\circ}-60^{\circ})=-\operatorname{tg} 60^{\circ}=-\sqrt{3}.$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es:

$$y=-x\sqrt{3}+3.$$

2° Determinar el coeficiente angular y la ordenada inicial de la recta $2x-3y-6=0$.

Solución. 1er procedimiento. Despejando y en la ecuación dada, obtenemos la ecuación en función del coeficiente angular:

$$y=\frac{2}{3}x-2,$$

de la cual se deduce que el coeficiente angular $k=\frac{2}{3}$, y que la ordenada inicial $b=-2$.

2º procedimiento. Aplicando las fórmulas (XVI) y (XVII), siendo $A=2$, $B=-3$, $C=-6$, se tiene:

$$k=-\frac{A}{B}=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3},$$
$$b=-\frac{C}{B}=-\frac{-6}{-3}=-2.$$

3º. Averiguar si entre las rectas cuyas ecuaciones son: $3x-2y+1=0$, $6x-4y-5=0$ y $2x+3y-7=0$ hay paralelas y perpendiculares entre sí.

Solución. Los coeficientes angulares de las paralelas son iguales entre sí y los de las perpendiculares son recíprocos en valor y contrarios en signo (§ 6). Aplicando la fórmula (XVI) hallamos los coeficientes angulares: de la primera recta, $k_1=\frac{3}{2}$; de la segunda, $k_2=\frac{3}{2}$; y de la tercera, $k_3=-\frac{2}{3}$.

Las dos primeras rectas son paralelas porque $k_1=k_2$; la tercera es perpendicular a las dos primeras, puesto que

$$k_3=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{k^2}.$$

4º. Hallar la ecuación de la recta que intercepta en los ejes Ox y Oy segmentos iguales a -3 y $\frac{1}{2}$ respectivamente.

S o l u c i ó n. Según los datos del problema $a = -3$ y $b=\frac{1}{2}$. Sustituyendo estos valores de a y b en la ecuación (XXI) obtenemos la ecuación buscada:

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1, \text{ o } x=6y+3=0.$$

5°. ¿Cuál es la ecuación de la recta que corta en los ejes de coordenadas segmentos iguales y pasa por el punto $(-1; -3)$?

S o l u c i ó n. Según la condición, en la ecuación (XXI) $b = a$, y por eso la ecuación tiene la forma:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1, \quad \text{o} \quad x+y=a.$$

El punto $(-1; -3)$ pertenece a la recta $x + y = a$. Por ello, si sustituimos en la ecuación $x + y = a$ las coordenadas variables x, y, por las dadas -1, -3, no se altera la igualdad:

$$-1-3=a.$$

De aquí que $a=-4$, y que la ecuación buscada sea:

$$x+y=-4, \text{ o } x+y+4=0.$$

6°. Transformar la ecuación $3x - 4y + 2 = 0$ en una ecuación de la recta en función de los segmentos.

S o l u c i ó n. Pasemos el término independiente 2 al segundo miembro de la ecuación:

$$3x-4y=-2,$$

y dividamos la ecuación por -2:

$$-\frac{3x}{2}+2y=1.$$

De donde se obtiene la ecuación de la recta en función de los segmentos:

$$\frac{x}{-\frac{2}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$$

y los segmentos son

$$a=-\frac{2}{3}, \quad b=\frac{1}{2}.$$

§ 12. Trazado de una recta dada su ecuación

1°. Para trazar una recta es suficiente hallar dos puntos de ella por medio de las coordenadas. De la ecuación dada se determinan con más facilidad las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas. Haciendo $y = 0$, en la ecuación dada se halla la abscisa del punto de intersección de ésta con el eje Ox; haciendo $x = 0$, de la ecuación dada se halla la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Oy.

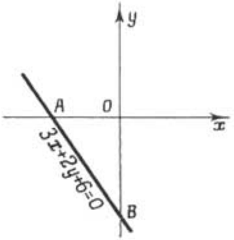


Fig. 22

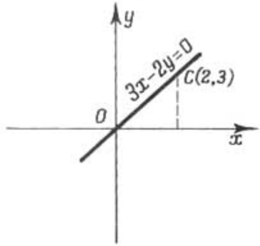


Fig. 23

Ejemplo. Trazar la recta cuya ecuación es

$$3x + 2y + 6 = 0.$$

Solución. Haciendo en esta ecuación:
1) $y = 0$, obtenemos $3x + 6 = 0$, $x = -2$;
2) $x = 0$, obtenemos $2y + 6 = 0$, $y = -3$.
Hallados los puntos A (—2; 0) y B (0; —3) (fig. 22), y valiéndonos de una regla, trazamos por ellos la recta buscada.

2°. Ejemplo. Trazar la recta cuya ecuación es:

$$3x - 2y = 0.$$

Solución. Esta ecuación de la recta no tiene término independiente, por lo cual la recta pasa por el origen de coordenadas. Dando a x un valor cualquiera diferente a cero, por ejemplo 2, y haciendo la sustitución correspondiente en la ecuación dada, se tiene:

$$3 \cdot 2 - 2y = 0; \; y = 3.$$

Hallado el punto C (2; 3) (fig. 23), trazamos con una regla una recta CO, que pase por este punto y por el origen de coordenadas O. Esta será la recta determinada por la ecuación

$$3x - 2y = 0.$$

3°. Si la ecuación de una recta es $y = b$ o $x = a$, la construcción de la recta se reduce a trazar por el punto dado $(0; b)$ o $(a; 0)$ una recta paralela al eje Ox o Oy respectivamente.

§ 13. Punto de intersección de dos rectas

1°. En el plano pueden darse tres casos distintos de posición relativa de las rectas

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

y

$$A'x + B'y + C' = 0: \tag{2}$$

1) las rectas tienen un punto común, es decir, se intersecan (fig. 24, 1),

2) las rectas no tienen ningún punto común (son paralelas) (fig. 24, 2),

3) las rectas tienen una infinidad de puntos comunes (coinciden) (fig. 24, 3).

Dadas las ecuaciones, hay que averiguar de qué caso se trata.

2°. *La ecuaciones (1) y (2) representan una misma recta si sus coeficientes son proporcionales.*

En efecto, si

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \lambda \neq 0,$$

se tiene

$$A = \lambda A', \ B = \lambda B', \ C = \lambda C'$$

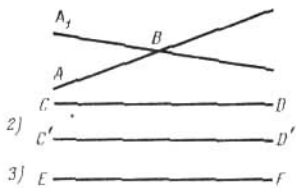


Fig. 24

y, multiplicando la ecuación (2) por $\lambda \neq 0$, se obtiene la ecuación (1). Por lo tanto las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes y por eso representan una misma recta.

3°. *Las ecuaciones (1) y (2) representan rectas paralelas siempre y solamente cuando los coeficientes de las coordenadas variables sean proporcionales.*

D e m o s t r a c i ó n. Uno de los términos independientes C o C' de las ecuaciones, por lo menos, debe ser diferente de cero, ya que las rectas $Ax + By = 0$ y $A'x +$

$+ B'y = 0$ coinciden, si sus coeficientes A, B, A', B', son proporcionales.

Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \lambda \neq 0$ entonces la ecuación (2), multiplicándola por λ, la expresaremos así:

$$\lambda A'x + \lambda B'y + \lambda C' = 0, \tag{3}$$

ó

$$Ax + By + \lambda C' = 0.$$

La diferencia de los primeros miembros de las ecuaciones (1) y (3) es diferente de cero, ya que $C \neq \lambda C'$. Por eso no existe ni un solo par de números (x, y) que satisfaga a ambas ecuaciones. Así pues, las rectas no tienen ningún punto común, por lo que son paralelas.

Recíprocamente, si las rectas son paralelas, sus coeficientes angulares son iguales:

$$k = -\frac{A}{B} \quad \text{y} \quad k' = -\frac{A'}{B'}$$

y, entonces, se tiene

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'},$$

es decir, los coeficientes de las coordenadas variables en las ecuaciones son proporcionales.

4°. *Las rectas*

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

$$A'x + B'y + C' = 0 \tag{2}$$

se cortan si

$$AB' - A'B \neq 0.$$

En efecto, multiplicando (1) por B' y (2) por B y restando del primer producto el segundo, resulta:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} AB'x + BB'y + CB' = 0; \\ A'Bx + BB'y + C'B = 0; \end{array} \\ \hline (AB' + A'B)\,x + (CB' - C'B) = 0. \end{array} \tag{4}$$

Multiplicando (1) por A' y (2) por B y restando del segundo producto el primero, resulta:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} AA'x = A'By + A'C = 0; \\ AA'x + AB'y + AC' = 0; \end{array} \\ \hline (AB' - A'B)\,y + (AC' - A'C) = 0. \end{array} \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) y (5) tienen determinadas soluciones solamente si el coeficiente de las incógnitas x e y

$$AB' - A'B \neq 0. \tag{6}$$

Estas soluciones determinan un punto común de ambas rectas, es decir, el punto de intersección de las rectas (1) y (2).

Las coordenadas del punto de intersección de las rectas (1) y (2) son:

$$\boxed{x = -\frac{CB' - C'B}{AB' - A'B}, \quad y = -\frac{AC' - A'C}{AB' - A'B}} \tag{XXII}$$

5°. En el caso de que $AB' - A'B = 0$, y los términos independientes de las ecuaciones (4) y (5) ($CB' - C'B$ y y $AC' - A'C$) sean diferentes de cero, resulta:

$$AB' = A'B \quad \text{o} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'},$$

es decir, las rectas (1) y (2) son paralelas, puesto que los coeficientes de las incógnitas x e y son proporcionales.

Si los coeficientes de las incógnitas, lo mismo que los términos independientes de las ecuaciones (4) y (5), son iguales a cero,

$$AB' - A'B = 0, \; CB' - C'B = 0, \; AC' - A'C = 0,$$

de estas igualdades se obtiene:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}; \; \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}; \; \frac{C}{C'} = \frac{A}{A'}. \text{ De donde } \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

es decir, las ecuaciones (1) y (2) representan una misma recta.

6°. Según lo expuesto, es evidente que *los diversos casos de posición relativa de dos rectas se manifiestan al resolver conjuntamente las ecuaciones de estas líneas.*

7°. Ejercicios numéricos. 1. Hállese el punto de intersección de las rectas

$$3x + 4y - 18 = 0 \quad \text{y} \quad 4x - 3y + 1 = 0.$$

Solución.

$$\begin{array}{l|c|c|l l}
3x + 4y - 18 = 0 & 3 & 4 & + \; 9x + 12y - 54 = 0; & - \; 12x + 16y - 72 = 0; \\
4x - 3y + 1 = 0 & 4 & 3 & \quad 16x - 12y + 4 = 0; & \quad 12x - 9y + 3 = 0; \\
\hline
 & & & \quad 25x - 50 = 0; & \quad 25y - 75 = 0; \\
 & & & \quad x = 2; & \quad y = 3.
\end{array}$$

R e s p u e s t a. El punto de intersección de las rectas dadas es (2; 3).

2. Hallar el punto de intersección de las rectas $2x-7y=3$ y $14x-4x=1$.

S o l u c i ó n:

$$\begin{array}{r|c|l} 2x-7y=3 & 2 & \;4x-14y=6 \\ 14y-4x=1 & 1 & +\;\underline{14y-\;\;4x=1} \\ & & \qquad\;\; 0=7. \end{array}$$

El sistema es incompatible. Los coeficientes de las coordenadas variables de las ecuaciones dadas son proporcionales, por lo que las rectas son paralelas.

3. Hallar el punto de intersección de las rectas:

$$x-3y+2=0 \quad y \quad 3x-9y+6=0.$$

S o l u c i ó n. Multiplicando la primera ecuación por 3 y restando del producto obtenido la segunda ecuación dada resulta:

$$0=0,$$

lo que indica que la solución es indeterminada. Las ecuaciones dadas son equivalentes y representan una misma recta, ya que sus coeficientes son proporcionales.

§ 14. Ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) en una dirección dada

1°. La recta pasa por el punto dado (x_1, y_1) y forma con el eje Ox el ángulo φ. Formemos su ecuación.

Según la condición, en la ecuación

$$y=kx+b \tag{1}$$

el parámetro $k=\operatorname{tg}\varphi$ es un número conocido. La recta (1) pasa por el punto (x_1, y_1), por lo tanto x_1, y_1 satisfacen a la ecuación (1), y sustituyendo las coordenadas variables x, y por las dadas x_1, y_1, obtenemos la igualdad

$$y_1=kx_1+b. \tag{2}$$

Puede hallarse el valor b y sustituirlo en la ecuación (1). Sin embargo, resulta más fácil eliminar la b de la ecuación (1) restando la igualdad 2) de la (1). La sustracción proporciona la ecuación de la recta que pasa por el punto dado (x_1, y_1) en la dirección dada:

$$\boxed{y-y_1=k(x-x_1)} \tag{XXIII}$$

2°. La ecuación (XXIII), en la que k puede tener una infinidad de valores, representa la *ecuación de un haz de rectas con el centro en el punto* (x_1, y_1).

3°. E j e m p l o. Por el punto de intersección de las rectas:

$$2x-3y+7=0 \quad \text{y} \quad 5x+y+9=0$$

trazar una recta perpendicular a la recta $2x-y+1=0$.

S o l u c i ó n. "Trazar una recta" significa "formar la ecuación de una recta". En primer lugar, hallemos las coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas, resolviendo el sistema de las ecuaciones dadas. El punto de intersección de las rectas tiene las coordenadas $(-2; 1)$.

Hallemos ahora el coeficiente angular k de la recta que pasa por el punto $(-2; 1)$ perpendicular a la recta $2x-y+1=0$. El coeficiente angular de la recta $2x-y+1=0$ es $k_1=2$, y el de la recta perpendicular a ésta, $k=-\frac{1}{2}$ (véase el § 6).

Haciendo en la ecuación (XXIII) las sustituciones $x_1=-2$, $y_1=1$ y $k=-\frac{1}{2}$, obtenemos la ecuación buscada:

$$y-1=-\frac{1}{2}(x+2) \quad \text{o} \quad x+2y=0.$$

§ 15. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

1°. La recta que pasa por los puntos dados (x_1, y_1) y (x_2, y_2), según la fórmula (VI) tiene el coeficiente angular igual a

$$\frac{y_2-y_1}{x^2-x_1}. \tag{1}$$

Tomemos la ecuación del haz de rectas con el centro en el punto (x_1, y_1):

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

y demos al coeficiente angular k el valor (1). En este caso, la ecuación:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \tag{2}$$

representa la línea del haz de rectas con el centro en el punto (x_1, y_1), que pasa por el punto (x_2, y_2). Dividiendo la ecuación (2) por y_2-y_1, representamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados (x_1, y_1) y (x_2, y_2), de la siguiente forma:

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.} \tag{XXIV}$$

2°. Formar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (1; 4) y B (—3; 2).

S o l u c i ó n. Haciendo en la ecuación (XXIV) las sustituciones: $x_1 = 1$, $y_1 = 4$, $x_2 = -3$, $y_2 = 2$, obtenemos la ecuación buscada:

$$\frac{y-4}{2-4}=\frac{x-1}{-3-1}$$

o, multiplicando por -4,

$$2(y-4)=x-1, \quad \text{o} \quad x-2y+7=0.$$

3°. Si la recta pasa por los puntos A(2; 3) y B(—2; 3), formando la ecuación por medio de la fórmula (XXIV), resulta:

$$\frac{y-3}{0}=\frac{x-2}{-4}.$$

Pero es imposible la división por cero. Obsérvese que diferentes puntos de la recta AB tienen una misma ordenada, $y = 3$, por lo que la recta AB es paralela el eje Ox, y su ecuación será:

$$y=3.$$

4°. Hallar la condición según la cual tres puntos dados se encuentran un una misma recta.

S o l u c i ó n. Supongamos que los puntos dados son (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). La ecuación de la recta que pasa por los dos primeros puntos es:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Para que en esta misma recta se encuentre situado también el tercer punto, (x_3, y_3), es suficiente que sus coordenadas satisfagan a la ecuación expuesta, es decir, que se tenga la siguiente identidad:

$$\boxed{\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}}$$

§ 16. Angulo entre dos rectas

1°. *Convengamos que la frase "el ángulo entre dos rectas AB y BC" debe ser entendida como "ángulo que forma la recta BC con la AB".*

D e f i n i c i ó n. *Se considera como ángulo que forma cierta recta BC con la recta AB (fig. 25) al ángulo mínimo en el que hay que hacer girar la recta AB en torno al punto B, en sentido contrario a las agujas del reloj, para que coincida con la recta BC.*

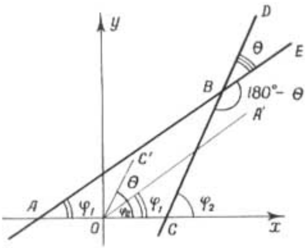
2°. Supongamos que las rectas AB y BC tienen las ecuaciones:

$$y=k_1x+b_1 \ (AB)$$

y

$$y = k_2x + b_2\,(BC).$$

Sea el ángulo formado por la recta AB y el eje Ox, igual a φ_1, y el formado por la recta BC y el mismo eje, igual a φ_2 (fig. 25). El ángulo formado por AB y BC lo



F i g. 25

designamos con Θ. Tracemos desde el origen de coordenadas O las rectas OA' y OC' paralelas respectivamente a AB y BC. Ellas forman con el eje Ox ángulos:

$$\angle xOA' = \varphi_1, \quad \angle xOC' = \varphi_2,$$

y entre sí un ángulo

$$\angle A'OC' = \angle EBD = \Theta.$$

El giro del eje Ox alrededor del origen O, en sentido contrario al de las agujas del reloj, hasta coincidir con OA', forma el ángulo φ_1, y desde OA' hasta OC', el ángulo Θ. El giro del eje Ox hasta su coincidencia con OC' forma el ángulo φ_2, o sea

$$\varphi_1 + \Theta = \varphi_2.$$

De aquí

$$\Theta = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Pero si son iguales los ángulos, también serán iguales las tangentes:

$$\operatorname{tg}\Theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

o sea (según la fórmula trigonométrica relativa a la tangente de la diferencia de dos ángulos)

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Pero $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, y por lo tanto

$$\boxed{\operatorname{tg}\Theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}} \qquad \text{(XXV)}$$

El angulo Θ es agudo si la $\operatorname{tg}\Theta$ es positiva, y obtuso, si la $\operatorname{tg}\Theta$ es negativa; $\Theta = 90°$ si $1 + k_1k_2 = 0$ y $\Theta = 0$ si $k_2 - k_1 = 0$ (§ 6).

Debe indicarse que el ángulo entre BC y AB ($\angle CBE$) es suplementario de Θ y por lo tanto es igual a $180° - \Theta$. Como $\operatorname{tg}(180° - \Theta) = -\operatorname{tg}\Theta$, se tiene

$$\operatorname{tg}(180° - \Theta) = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

En algunos casos es necesario determinar un ángulo *agudo* entre dos rectas. En este caso, el valor de la $\operatorname{tg}\Theta$ obtienido por medio de la fórmula (XXV) hay que tomarlo en su magnitud absoluta.

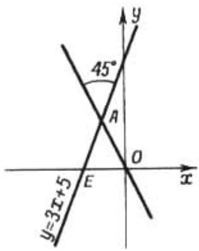


Fig. 26

3°. Ejemplos. 1. Hallar el ángulo entre las rectas: $y = 2x - 3$ e $y = 5x + 1$.

Solución. En las ecuaciones dadas se tiene

$$k_1 = 2, \ k_2 = 5.$$

Según la fórmula (XXV)

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{5-2}{1+5\cdot 2} = \frac{3}{11} = 0{,}2727.$$

$$\Theta = 15°15'.$$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y forma con la recta $y = 3x + 5$ un ángulo de 45°.

Solución. Según la condición (fig. 26) $\Theta = 45°$, el coeficiente angular de la recta dada es k_1, ya que para obtener un ángulo de 45° hay que hacer girar la recta *dada* en sentido contrario a las agujas de un reloj a fin de que coincida con la recta buscada: $\operatorname{tg}\Theta = \operatorname{tg} 45° = 1$; $k_1 = 3$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula (XXV) obtenemos k_2:

$$1 = \frac{k_2 - 3}{1 + 3k_2}; \ 1 + 3k_2 = k_2 - 3;$$

$$k_2 = -2.$$

La recta buscada pasa por el origen de coordenadas, por lo qu- su ecuación tiene la forma:

$$y = kx.$$

Sustituyendo k por el valor obtenido de k_2, se obtiene la ecuación buscada:

$$y = -2x$$

3. Conociendo los puntos $A(-7;\ -1)$, $B(2;\ -3)$ y $C(4;\ -1)$, determinar el ángulo formado por BC y AB (fig. 27).

Solución. Según la fórmula (VI), *el coeficiente angular de BC*

$$k_1 = \frac{-1+3}{4-2} = 1,$$

y el coeficiente angular de AB,

$$k_2 = \frac{-3+1}{2+7} = -\frac{2}{9}.$$

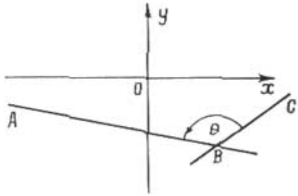


Fig. 27

Según la fórmula (XXV):

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{-\frac{2}{9}-1}{1+1\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)} = -\frac{11}{7} = -1,5714,$$

$$\Theta = 180^\circ - 57^\circ 32' = 122^\circ 28'.$$

CAPITULO III

CURVAS DE SEGUNDO ORDEN

§ 17. Ecuaciones de la circunferencia

1°. Definición. *Se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos de un plano alejados a la misma distancia (radio) de un punto dado (centro).*

2°. La longitud del radio determina la medida de la circunferencia; la posición del centro determina la situación de la propia circunferencia en el plano. De este modo, la circunferencia viene determinada por su medida y su posición en el plano, respecto al sistema dado de coordenadas, si se conocen:

1) la longitud del radio r,

2) las coordenadas del centro O' a y b.

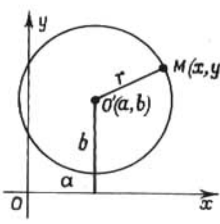


Fig. 28

De acuerdo con la definición, cualquier punto $M(x, y)$ de la circunferencia (fig. 28) se encuentra a la distancia $O'M$, igual a r, del centro O' (a, b):

$$O'M = r.$$

Expresando la distancia $O'M$ (según la fórmula II, § 3) por medio de las coordenadas de los puntos O' y M, obtendremos la ecuación:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r.$$

Haciendo desaparecer el radical en la ecuación (para esto hay que elevar los dos miembros de la ecuación al cuadrado), obtenemos la ecuación de la circunferencia:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2} \qquad \text{(XXVI)}$$

3°. Particularmente, cuando el centro O' de la circunferencia coincide con el origen de las coordenadas la ecua-

$$a = 0 \quad \text{y} \quad b = 0,$$

ción de la circunferencia (XXVI) toma la forma:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \qquad \text{(XXVII)}$$

§ 18. Ejemplos de solución de problemas

1°. Dados los valores de los parámetros a, b, y r, es suficiente sustituirlos en la ecuación (XXVI) para obtener la ecuación de la circunferencia.

Por ejemplo, la ecuación de la circunferencia de radio 5 y con el centro en el punto O' (2; —3), se expresa así:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25,$$

puesto que, según la condición, $a = 2$, $b = -3$ y $r = 5$.

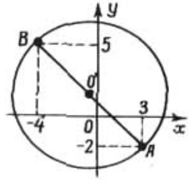


Fig. 29

2°. Formar la ecuación de una circunferencia en la que los puntos A (3; —2), B (—4; 5) (fig. 29) son los extremos de uno de sus diámetros.

Solución. El centro de la circunferencia O' es el punto medio del segmento AB. Las coordenadas del punto medio de AB (según la fórmula V, § 4) son:

$$a = \frac{3-4}{2} = -\frac{1}{2}; \quad b = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}.$$

La distancia AB es el diámetro de la circunferencia. Según la fórmula II, § 3:

$$(2r)^2 = AB^2 = (3+4)^2 + (-2-5)^2 = 98.$$

De donde:

$$r^2 = \frac{98}{4}.$$

Sustituyendo los valores a, b y r^2 en la fórmula (XXVI), obtenemos la ecuación buscada de la circunferencia:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{98}{4}.$$

Abriendo los paréntesis y llevando $\frac{98}{4}$ al primer miembro, tenemos:

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - 3y + \frac{9}{4} - \frac{98}{4} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + x - 3y - 22 = 0.$$

3°. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes de coordenadas y pasa por el punto $(-2;\ 1)$.

Solución. El punto $(-2;\ 1)$, por el que pasa la circunferencia, está en el segundo cuadrante, y como la circunferencia es tangente a los ejes de coordenadas, se encontrará por entero en el segundo cuadrante; la abscisa a del centro es negativa, y la ordenada b, positiva.

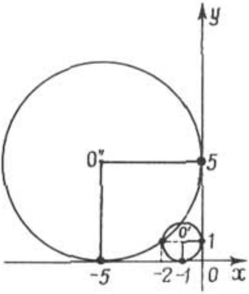


Fig. 30

Los radios trazados a los puntos de contacto (fig. 30) son perpendiculares a las tangentes (a los ejes Ox y Oy).

Por ello:

$$a = -r,\ b = r,\ (r > 0).$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la circunferencia (XXVI), tenemos:

$$(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2.$$

El valor de r se determina basándonos en la condición que la circunferencia pasa por el punto $(-2;\ 1)$ y sus coordenadas satisfacen a la ecuación expuesta. La sustitución de las coordenadas variables x, y, por las dadas -2 y 1 da lo siguiente:

$$(-2+r)^2 + (1-r)^2 = r^2,$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0,$$

$$r_1 = 1,\ r_2 = 5.$$

Por lo tanto, puede haber dos circunferencias que pasen por el punto $(-2;\ 1)$ y que sean tangentes a los ejes de coordenadas. En la primera de ellas:

$$a = -1,\ b = 1,\ r = 1;$$

en la segunda circunferencia:

$$a = -5,\ b = 5,\ r = 5.$$

La ecuación de la primera circunferencia será:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1, \text{ o } x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0.$$

La ecuación de la segunda circunferencia será:

$$(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25, \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 + 10x - 10y + 25 = 0.$$

4°. Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia:

$$3x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$

Solución. Reduzcamos la ecuación dada a la forma:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{1}$$

Para esto se divide la ecuación dada por el coeficiente 3 (de x^2 e y^2):

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+2y-4=0.$$

Uniendo en un grupo los términos que tienen la x y en otro grupo los que tienen la y, se tiene:

$$\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)+(y^2+2y)=4,$$

$$\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{2}{3}\right)+(y^2+2\cdot y\cdot 1)=4.$$

Completemos el primero y el segundo binomio hasta formar respectivamente el cuadrado completo de la diferencia y de la suma de dos números. Para eso se añade al primer binomio $\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, y al segundo $1=1^2$. A fin de que se mantenga la igualdad en la ecuación, adicionamos también $\frac{4}{9}$ y 1 al segundo miembro de la misma.

Tendremos:

$$\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)+(y^2+2\cdot y\cdot 1+1)=4+\frac{4}{9}+1,$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2=\frac{49}{9}.$$

Comparando esta ecuación con la (1) llegamos a la conclusión de que:

$$a=\frac{2}{3},\ b=-1,\ r=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$$

§ 19. La circunferencia es una línea de segundo orden

1°. El grado de la ecuación de una línea, cuando la ecuación está reducida a la forma entera y racional respecto a las coordenadas x, y, se llama *orden de la línea*. La recta es una línea de primer orden, porque viene expresada por una ecuación de primer grado. La circunferencia es una línea de segundo orden. En efecto, abriendo los paréntesis en la ecuación de la circunferencia

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

y colocando los términos en orden decreciente de los exponentes respecto a las coordenadas variables x, y se tiene:

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0. \tag{1}$$

Puede ocurrir que los parámetros a, b, r (todos o algunos) sean números quebrados. En ese caso, multiplicando (1) por el mínimo común múltiplo A, resulta:

$$Ax^2 + Ay^2 - 2aAx - 2bAy + A(a^2 + b^2 - r^2) = 0. \qquad (2)$$

Haciendo las notaciones $-2aA = D$, $-2bA = E$ y $A(a^2 + b^2 - r^2) = F$, se tiene la ecuación general de la circunferencia:

$$\boxed{Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0.} \qquad \text{(XXVIII)}$$

Esta es una ecuación de segundo grado respecto a las coordenadas x, y; por lo tanto, la circunferencia es una línea de segundo orden.

2°. Según enseña el álgebra, la ecuación general de *segundo grado con dos variables es la siguiente:*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (3)$$

La ecuación de segundo grado relativa a las coordenadas x, y, en la que los coeficientes de los cuadrados de x e y son iguales, y no tiene el término con el producto xy, representa una circunferencia.

Esta condición es necesaria. En efecto, en la ecuación general de la circunferencia (XXVIII), los coeficientes de los cuadrados de x e y son iguales y no contiene el término con el producto xy.

Esta condición es suficiente. En efecto, dividiendo la ecuación

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

por A:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

y expresando el cociente obtenido así:

$$\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + \left(y^2 + \frac{E}{A}y\right) = -\frac{F}{A},$$

se completan $x^2 + \frac{D}{A}x$ e $y^2 + \frac{E}{A}y$ hasta los cuadrados del binomio:

$$\left(x^2 + 2\frac{D}{2A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + \left(y^2 + 2\cdot\frac{E}{2A}y + \frac{E^2}{4A^2}\right) =$$
$$= \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A},$$

con lo que resulta:

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2},$$

es decir, se obtiene la ecuación de la circunferencia, en la que

$$\boxed{a=-\frac{D}{2A},\ b=-\frac{E}{2A},\ r^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}} \qquad \text{(XXIX)}$$

3°. Nos ocuparemos de unos casos especiales que pueden presentarse cuando los coeficientes A, D, E y F toman ciertos valores.

E j e m p l o. La ecuación

$$x^2+y^2-6x+4y+13=0$$

puede representarse en la forma:

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=0,$$

o

$$(x-3)^2+(y+2)^2=0.$$

Como ninguno de los cuadrados $(x+3)^2$ e $(y+2)^2$ puede ser negativo, para que su suma sea igual a cero es necesario que:

$$x-3=0 \quad \text{e} \quad y+2=0.$$

De donde:

$$x=3 \quad \text{e} \quad y=-2.$$

A la ecuación dada satisface un solo punto del plano (3; —2) y representa una circunferencia de radio nulo, $r=0$.

Si en esta misma ecuación, en lugar del término independiente 13, tomamos por ejemplo 15, es decir, consideramos la ecuación

$$x^2+y^2-6x+4y+15=0,$$

después de reducirla a la forma normal, tenaremos:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=-2.$$

A esta ecuación no satisface ni un solo par de valores reales de las coordenadas variables, es decir, ni un solo punto del plano. Sin embargo, para generalizar se considera que en este caso la ecuación representa también una circunferencia, una circunferencia *imaginaria*, cuyo radio es

$$r = \sqrt{-2}.$$

§ 20. La elipse

1°. Definición. *Se llama elipse al lugar geométrico de los puntos de un plano, cuya suma de distancias a dos puntos dados (focos), es constante.*

Según la definición, si F y F_1 (fig. 31) son los puntos dados en el plano, llamados focos de la elipse, y M es un punto cualquiera de la elipse, la suma de las distancias MF_1 y MF es constante y se toma igual al valor $2a$, es decir,

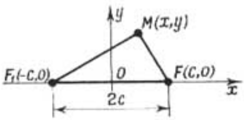


Fig. 31

$$MF_1 + MF = 2a, \ (a > 0).$$

MF_1 y MF se llaman *radios vectores* del punto M. F_1F se llama *distancia focal* y se toma igual a $2c$,

$$F_1F = 2c, \ (c > 0).$$

En el triángulo F_1FM se ve que $MF_1 + MF > F_1F$, es decir,

$$2a > 2c, \ \text{ o } \ a > c, \ (c > 0).$$

2°. Tomemos un hilo de longitud $2a$ y sujetemos sus extremos con alfileres a la distancia $2c$, entre uno y otro,

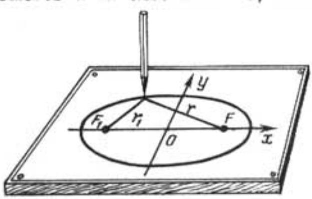


Fig. 32

en los puntos F y F_1. Estiremos el hilo con la punta de un lapicero como se indica en la figura 32, y tracemos con él una curva, manteniendo tirante el hilo mientras se mueve el lapicero sobre el papel. Por este procedimiento se describe la elipse en dos etapas: en la primera a una parte de la recta F_1F, y en la otra, a la parte opuesta.

§ 21. La ecuación de la elipse

Tomemos el punto medio de la distancia focal como origen de coordenadas O; la recta F_1F, como eje Ox, y la perpendicular a ésta, que pasa por el punto O, como eje Oy (fig. 31).

En este caso, los focos F_1 y F tienen las coordenadas $(-c;\ 0)$ y $(+c;\ 0)$.

Debido a que puede cambiar la posición del punto M en relación con los ejes de coordenadas, sus coordenadas serán las coordenadas variables $(x,\ y)$.

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (1)$$

Según la definición de la elipse

$$MF_1+MF=2a,$$

por lo que

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Eliminemos los radicales en la ecuación. Para esto se pasa uno de los radicales al segundo miembro:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

y se elevan al cuadrado los dos miembros de la igualdad obtenida.

Después de abrir los paréntesis, resulta:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+$$
$$+x^2-2cx+c^2+y^2.$$

Eliminando x^2, c^2, y^2 y pasando el radical al primer miembro, y $2cx$ al segundo, se tiene:

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx,$$

o dividiendo la ecuación por $4a$:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x. \qquad (2)$$

Elevando los dos miembros de la igualdad al cuadrado y abriendo después los paréntesis, resulta:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2} x^2.$$

Eliminando $-2cx$ y pasando $\frac{c^2}{a^2} x^2$ al primer miembro, y c^2 al segundo, se tiene:

$$x^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Y multiplicando por a^2, resulta:

$$(a^2 - c^2)\, x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2).$$

Como $a > c$, se puede hacer la notación

$$\boxed{a^2 - c^2 = b^2} \qquad \text{(XXX)}$$

y la ecuación anterior se escribirá así:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividiendo esta igualdad por a^2b^2 se obtiene la ecuación canónica de la elipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{(XXXI)}$$

§ 22. Investigación de la forma de la elipse por medio de su ecuación

1°. Resolvamos la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ respecto a y,

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

y examinemos a y como función de x. Para que los valores de y sean números reales, el radicando a^2-x^2 tiene que ser positivo o igual a cero. Será así en el caso de que

$$|x| \leqslant a,$$

es decir,

$$-a \leqslant x \leqslant +a,$$

donde $a > 0$ (fig. 33).

Si $x = \pm a$, tendremos $a^2 - x^2 = 0$ e $y = 0$.

Los puntos A $(a; 0)$ y A_1 $(-a; 0)$ son los puntos de intersección de la elipse con el eje de las abscisas, y se llaman *vértices* de la elipse; la cuerda $A_1A = 2a$ se llama *eje mayor* de la elipse. Para $x = 0$, tendremos $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2} = \pm b$. Los puntos B $(0; b)$ y B_1 $(0; -b)$ son los puntos de intersección de la elipse con el eje de las ordenadas y se llaman también *vértices* de la elipse; la cuerda $B_1B = 2b$ se llama *eje menor* de la elipse.

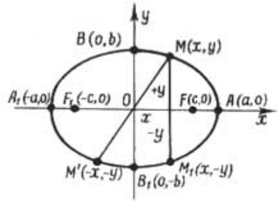


Fig. 33

A cada valor de x en el intervalo $-a < x < a$ corresponden dos puntos de la elipse, situados a uno y otro lado del eje Ox, a una distancia de éste equivalente al valor absoluto de y, porque a cada valor de x corresponden dos valores de y, iguales en valor absoluto y de signo contrario. Así pues, la elipse está situada simétricamente al eje Ox.

Al crecer la x desde $-a$ hasta cero, el valor absoluto de y crece desde cero hasta b, y al crecer x desde cero hasta a, el valor absoluto de y disminuye desde b hasta cero.

Puede resolverse la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ relativa a la x en lugar de hacerlo con respecto a la y,

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

y pueden hacerse de nuevo análogas investigaciones. En este caso llegaremos a las siguientes conclusiones: x toma valores reales únicamente al oscilar la y en el intervalo $-b \leqslant y \leqslant +b$; al aumentar la y desde $-b$ hasta cero, el valor absoluto de x crece desde cero hasta a, y al aumentar la y desde cero hasta b, el valor absoluto de x disminuye desde a hasta cero. A cada valor de y en el intervalo $-b < y < b$ corresponden dos valores de x de igual valor absoluto y signo contrario y la elipse está situada simétricamente al eje Oy.

2°. Las coordenadas variables x, y en la ecuación de la elipse están elevadas únicamente al cuadrado. Por lo tanto, si el punto (x, y) pertenece a la elipse, a ésta también le pertenecerá el punto $(-x, -y)$, porque $(-x)^2 = x^2$ y $(-y)^2 = y^2$. La cuerda que une los puntos de la elipse (x, y) y $(-x, -y)$, tiene como punto medio el origen de coordenadas O, ya que (según la fórmula V, § 4):

$$\frac{x+(-x)}{2}=0 \quad \text{e} \quad \frac{y+(-y)}{2}=0.$$

El punto que divide por la mitad a todas las cuerdas de la curva que pasan por él se llama centro de la curva. El origen de coordenadas O es el centro de la elipse.

§ 23. Construcción de la elipse

1°. Construcción por puntos (fig. 34). Se dan: $2a$ y $2c$. En una recta se señala el segmento $F_1F = 2c$, dividimos F_1F por la mitad, y del centro 0, obtenido de tal modo, marcamos en la recta F_1F, a la izquierda y a la derecha, los segmentos OA_1 y OA, iguales a a, con lo que se obtiene el eje mayor A_1A. Por el centro O trazamos una recta B_1B, perpendicular a A_1A. Desde el foco F, como si fuera el centro, trazamos un arco de radio a. Dicho arco cortará la recta B_1B en los puntos B_1 y B. El segmento $B_1B = 2b$ es el eje menor de la elipse, puesto que en el triángulo OFB resulta que $OB^2 = FB^2 - OF^2 = a^2 - c^2 = b^2$ (fórmula XXX). De este modo hemos encontrado cuatro puntos, que son los vértices de la elipse: A_1, A, B_1 y B.

Fig. 34

Para hallar los demás puntos de la elipse se toma en el segmento F_1F, a la izquierda del centro (o a la derecha de éste), un punto cualquiera C_1 y se trazan desde los focos F y F_1, como si fueran centros, arcos pequeños (cada vez, uno de ellos más arriba de la recta A_1A, y otro más abajo de ésta), al principio con un radio igual a A_1C_1, y luego, con un radio igual a C_1A.

La intersección de estos arcos nos da cuatro puntos (en la figura todos ellos están señalados con la cifra 1).

Los puntos 1 pertenecen a la elipse porque la suma de las distancias de cada uno de éstos hasta los focos, es igual a $2a$:

$$1F_1 + 1F = A_1C_1 + C_1A = A_1A = 2a.$$

Tomando en el segmento OF_1 (u OF) otros puntos C_2, C_3 ... y repitiendo las operaciones hechas en el caso del punto C_1, cada vez se obtienen cuatro puntos de la elipse (en la figura están señalados con las cifras 2, 3, etc.).

Después de determinar por tal procedimiento un número suficiente de puntos, trazamos — siguiendo estos puntos a mano o por medio de una plantilla — una curva continua, es decir, una elipse.

Al construir la elipse es necesario tomar más puntos en el segmento F_1O cerca del foco F_1 que del centro O, y concentrar los puntos C_1, C_2, C_3 ... en la medida en que se van acercando a F_1.

2°. Si se dan los semiejes a y b, hay que empezar por encontrar c. Para esto es suficiente trazar un triángulo rectángulo con la hipotenusa igual al semieje mayor a y con un cateto igual al semieje menor b; el otro cateto será igual a c (fórmula XXX).

§ 24. Interrelación de la elipse y la circunferencia

1°. Si en la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hacemos $b = a$, se obtendrá:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ o } x^2 + y^2 = a^2,$$

es decir, la ecuación de una circunferencia de radio a. Así pues la circunferencia es una elipse con semijes iguales.

2°. Tracemos (fig. 35) del centro O de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ una circunferencia de radio igual al semieje mayor a; su ecuación será: $x^2 + y^2 = a^2$. Resolviendo las ecuaciones de la elipse y de la circunferencia respecto a y, y distinguiendo las ordenadas de los puntos de la elipse y de la circunferencia, que tienen la misma abscisa x, se señala la ordenada del punto de la elipse por medio de y_e, y la de la circunferencia, por medio de y_c. Se tiene:

$$y_e = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$
$$y_c = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Dividiendo la primera ecuación por la segunda, resulta:

$$\frac{y_e}{y_c} = \frac{b}{a},$$

es decir, *si tomando el eje mayor de la elipse como diámetro, se traza una circunferencia, tendremos que para cada valor de la abscisa x, la razón de las ordenadas de los puntos correspondientes de la elipse y de la circunferencia será constante e igual a la razón del semieje menor de la elipse respecto a su semieje mayor.*

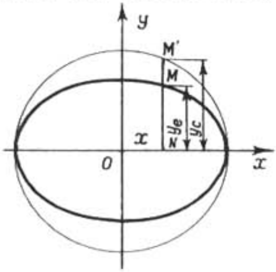


Fig. 35

De aquí se deduce que la elipse se obtiene por medio de la "compresión uniforme" de una circunferencia de radio a, es decir, al diminuir todas las semicuerdas perpendiculares a su diámetro, en la razón constante $\frac{b}{a}$. La razón $\frac{b}{a}$, se llama coeficiente de compresión.

3°. Supongamos que el plano Q de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ forma con el plano P (fig. 36) el ángulo φ. Bajando de cada punto M de la circunferencia dada una perpendicular al plano P, se obtiene la proyección ortogonal de la circunferencia en el plano P. De la figura 36 se deduce que si $MM' \perp P$ y $MN \perp Ox$, será $\angle M'NM = \varphi$. Del triángulo rectángulo $M'NM$ tenemos:

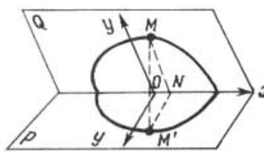


Fig. 36

$$\frac{M'N}{MN} = \cos\varphi,$$

es decir, todas las semicuerdas de la circunferencia, perpendiculares al diámetro Ox, aparecen en el plano P reducidas a una misma proporción, igual a $\cos\varphi$. En consecuencia, *la proyección ortogonal de una circunferencia en el plano P, es una elipse.*

§ 25. Excentricidad de la elipse

1°. La magnitud de la razón de la distancia focal respecto a la longitud del eje mayor de la elipse se llama *excentricidad de la elipse* y se indica con la letra e:

$$\boxed{e=\frac{c}{a}} \qquad \text{(XXXII)}$$

Como $c<a$, se tiene que $e<1$,

Conociendo los semiejes a y b de la elipse, hallemos su excentricidad. De la fórmula (XXX)

$$c^2=a^2-b^2,\ c=\sqrt{a^2-b^2},\quad (c>0).$$

Sustituyendo el valor de c en la fórmula (XXXII), resulta:

$$\boxed{e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \quad \text{(XXXIII)} \quad \text{o} \quad \boxed{e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}.} \quad \text{(XXXIIIa)}$$

De esta fórmula se deduce: si $b=a$, es decir, si la elipse representa una circunferencia, la excentricidad $e=0$; si a es invariable y b disminuye desde a hasta 0, la excentricidad de la elipse aumenta desde cero hasta la unidad; la excentricidad es igual a la unidad cuando la elipse se transforma en un segmento de la recta A_1A.

2°. En el proceso de obtención de la ecuación de la elipse (§ 21) se ha establecido la igualdad (2):

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

En ella, $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=MF$ (igualdad (1), § 21), es decir, es el radio vector del punto M. Lo indicaremos con r. Como $\frac{c}{a}=e$, se tiene

$$\boxed{r=a-ex}$$

Indicando el segundo radio vector del punto M con r_1 $MF_1=r_1$, se obtiene:

$$\boxed{r_1=a+ex,}$$

puesto que $r+r_1=2a$.

§ 26. Hipérbola

D e f i n i c i ó n. *Se llama hipérbola el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos dados (focos), es constante.*

Según la definición, si F_1 y F (fig. 37) son los puntos dados en el plano, llamados focos de la hipérbola, y M es cualquier punto de la hipérbola, la diferencia de las distancias MF_1 y MF (siendo $MF_1 > MF$, o bien $MF_1 < MF$) es constante y se le asigna el valor $2a$,

$$|MF_1 - MF| = 2a, \qquad (a > 0).$$

MF_1 y MF se llaman *radios focales vectores* del punto M. F_1F se llama *distancia focal* y se toma igual a $2c$.

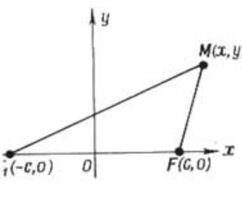
$$F_1F = 2c.$$

Del triángulo F_1MF se deduce que:

$$|MF_1 - MF| < F_1F, \text{ es decir, } 2a < 2c, \text{ o } a < c.$$

§ 27. Ecuación de la hipérbola

Tomemos el punto medio de la distancia focal (fig. 37) como origen de coordenadas O; la recta F_1F como eje Ox y la perpendicular a éste, que pasa por el punto O, como eje Oy. Los focos F_1 y F tienen las coordenadas $(-c, 0)$ y $(+c, 0)$. El punto M tiene las coordenadas variables (x, y).



F i g. 37

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$
$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \qquad \textbf{(1)}$$

Según la defición de la hipérbola

$$|MF_1 - MF| = 2a,$$

por ello

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

De aquí que:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado y simplificando, se obtiene:

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Dividiendo cada término por $4a$, resulta:

$$\frac{c}{a}x - a = \pm\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \qquad (2)$$

Elevando los dos miembros de la ecuación (2) al cuadrado y simplificando, se tiene:

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2).$$

Como $c > a$, puede suponerse que:

$$\boxed{c^2 - a^2 = b^2} \qquad \text{(XXXIV)}$$

y la ecuación anterior se expresa así:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividiendo esta igualdad por a^2b^2 se obtiene la ecuación canónica de la hipérbola:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{(XXXV)}$$

§ 28. Investigación de la forma de la hipérbola según su ecuación

1°. Resolvamos la ecuación de la hipérbola (XXXV) referida a y.

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (1)$$

Los valores de y son números reales, si $x^2 - a^2 \geqslant 0$ o sea, si $|x| \geqslant a$.

Si $-a < x < +a$, a los valores de x corresponden valores imaginarios de y; por ello, si trazamos las rectas $x = -a$ y $x = a$ (fig. 38), en la franja infinita comprendida entre estas rectas no hay puntos de la hipérbola. Así pues, la hipérbola no se corta con el eje Oy.

Si $x = \pm a$, tendremos $x^2 - a^2 = 0$ e $y = 0$. Los puntos $A\,(a,\,0)$ y $A_1(-a,\,0)$ son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje de las abscisas y se llaman *vértices* de la hipérbola. La cuerda $A_1A = 2a$ se llama *eje real* de la hipérbola.

A cada valor de x en los intervalos $-\infty < x < -a$ y $+a < x < \infty$ corresponden dos puntos de la hipérbola situados a uno y otro lado del eje Ox. a una distancia de éste igual al valor absoluto de y, porque a cada valor de x, en estos intervalos, corresponden dos valores de y, de igual valor absoluto y signo contrario. La hipérbola es una curva, simétrica respecto al eje Ox.

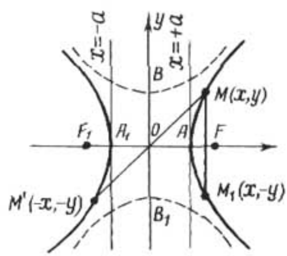


Fig. 38

Al crecer x desde a hasta $+\infty$, el valor absoluto de y crece de 0 hasta el infinito. Al disminuir x desde $-a$ hasta $-\infty$, el valor absoluto de y crece también, y al mismo tiempo toma sucesivamente los mismos valores que al aumentar x desde a hasta $+\infty$, puesto que en la ecuación (1) x está elevada solamente al cuadrado y debido a esto, $\sqrt{(-x)^2-a^2} = \sqrt{(+x)^2-a^2}$, $(|x| \geqslant a)$. Así pues la hipérbola está formada por dos ramas de igual forma, simétricas respecto a los ejes Ox y Oy, situadas una a la derecha de la recta $x = a$, y la otra a la izquierda de la recta $x = -a$, y ambas se prolongan indefinidamente.

Hacia arriba y hacia abajo del origen O marcamos en el eje Oy segmentos de magnitud b. Por la fórmula (XXXIV) se ve que el segmento de longitud b es un cateto del triángulo rectángulo, en el cual la hipotenusa es igual a c, y el otro cateto es igual a a. El segmento $B_1B = 2b$ se llama *eje imaginario* de la hipérbola. Los puntos B_1 y B se llaman *vértices imaginarios* de la hipérbola.

2°. Puesto que en la ecuación de la hipérbola (XXXV) las coordenadas variables x, y figuran elevadas solamente al cuadrado, si el punto (x, y) pertenece a la hipérbola, a ésta también le pertenece el punto $(-x, -y)$, que es simétrico respecto al origen de coordenadas O. Por ello, *el origen de coordenadas O, es el centro de la hipérbola.*

3°. Si se toma como eje real el segmento $B_1B = 2b$, y como eje imaginario el segmento $A_1A = 2a$, la ecuación de la hipérbola adopta la forma:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ o } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

y la propia hipérbola toma la forma representada en la figura 38 en líneas de trazos.

Las dos hipérbolas cuyas ecuaciones son:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ y } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

se llaman conjugadas.

§ 29. Construcción de la hipérbola

1°. Por medio de un movimiento continuo (fig. 39). Se dan $2a$ y $2c$. Se toma una regla y en su extremo se fija un hilo. El otro extremo de la regla y el del hilo los sujetamos con cierta holgura para que puedan girar (con alfileres, por ejemplo) en los focos F_1 y F respectivamente. El hilo debe ser tan largo que la diferencia entre la longitud de la regla (F_1N) y la del hilo (FMN) sea igual a $2a$. Con la punta de un lapicero se estira el hilo de tal modo que la regla coincida con la recta F_1F; entonces, la punta del lapicero se hallará en el vértice A de la hipérbola. Después trazamos una curva, manteniendo el hilo tirante mientras se mueve el lapicero sobre el papel. Por este procedimiento se traza una rama de la hipérbola en dos etapas: al principio a un lado de la recta F_1F, y después, al otro.

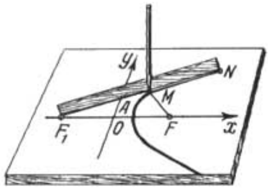


Fig. 39

Para trazar la otra rama de la hipérbola hace falta pasar el centro de rotación de la regla, del foco F_1 al foco F, y el extremo libre del hilo se ajusta en el foco F_1.

2°. Construcción por puntos (fig. 40). Se dan $2a$ y $2c$. En una recta se marca el segmento $F_1F = 2c$ y se divide por la mitad. A la izquierda y a la derecha del centro O, obtenido de este modo, marcamos en la recta F_1F dos segmentos OA_1 y OA, iguales a a. Estos formarán el eje real A_1A de la hipérbola.

En la prolongación del eje real tomamos a la derecha del foco F (o a la izquierda del foco F_1) una serie de puntos C_1, C_2, C_3, ... Se traza desde los focos F y F_1, como si fueran centros, arcos pequeños (cada vez, uno de ellos más arriba de la recta A_1A, y otro más abajo de ésta) al principio con un radio igual a A_1C_1 y después con un radio igual a C_1A. La intersección de estos arcos nos da cuatro puntos de la hipérbola (en la figura todos ellos están señalados con la cifra 1).

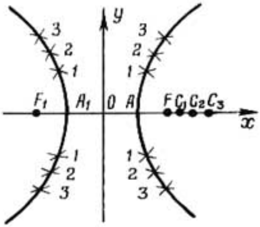


Fig. 40

Los puntos 1 pertenecen a la hipérbola porque la diferencia de los radios vectores de cada uno de éstos es igual a $2a$:

$$|1F_1 - 1F| = |A_1C_1 - C_1A| = \\ = A_1A = 2a.$$

Repitiendo para los puntos C_2, C_3, ... respectivamente las mismas operaciones que en el caso del punto C_1, cada vez se obtendrán cuatro puntos de la hipérbola (en la figura están señalados con las cifras 2, 3, ...).

Después de determinar por medio de tal procedimiento el número suficiente de puntos de la hipérbola, se traza siguiendo estos puntos, a mano o con una plantilla, una curva continua.

3°. Si se dan los semiejes de la hipérbola a y b, hay que empezar por encontrar c. Para esto es suficiente construir un triángulo rectángulo, cuyos catetos sean iguales a los semiejes a y b; la hipotenusa de este triángulo será igual a c, porque en la fórmula (XXXIV) resulta que $a^2 + b^2 = c^2$.

§ 30. Asíntotas de la hipérbola

Estudiemos la posición recíproca de la recta (fig. 41)

$$y = \frac{b}{a} x \tag{1}$$

y de la rama derecha de la hipérbola en el primer cuadrante. Representemos la ecuación de la hipérbola (XXXV) del siguiente modo:

$$y = +\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{2}$$

Se entiende por x una abscisa elegida arbitrariamente en el intervalo $a < x < +\infty$. Sustituyendo este número x en la ecuación de la recta (1) y en la ecuación de la rama de la hipérbola (2), encontramos el valor de la ordenada del punto, cuya abscisa es igual a x, situado en la recta (1) y en la hipérbola (2). Indiquemos a éstas con y_a e y_h respectivamente, es decir,

$$y_a = \frac{b}{a} x,$$

$$y_h = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

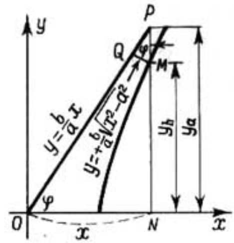


Fig. 41

Como $a^2 > 0$, $x > \sqrt{x^2 - a^2}$ e $y_a > y_h$.

La diferencia de las ordenadas es

$$y_a - y_h = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

o

$$y_a - y_h = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{a}.$$

Racionalizando el numerador del quebrado, se tiene:

$$y_a - y_h = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} =$$

$$= \frac{b(x^2 - x^2 + a^2)}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

El numerador ab del quebrado obtenido es un número constante; la magnitud del denominador $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ depende del valor de x, y aumenta al crecer x. En consecuencia, la diferencia $y_a - y_h$ disminuye al crecer el valor de x. Al aumentar indefinidamente el valor de x, la diferencia $y_a - y_h$ tiende a cero.

Supongamos que al valor elegido de x corresponde en la recta el punto P, y en la hipérbola, el punto M. La diferencia $y_a - y_h = MP$. Bajemos del punto M una perpendicular MQ, a la recta OP. En el triángulo rectángulo MQP $\angle PMQ = \angle xOP = \varphi$,

$$MQ = MP \cdot \cos \varphi.$$

Como $\cos \varphi$ es un número constante y $MP = y_a - y_h$ tiende a cero cuando x crece indefinidamente, también MQ tiende a cero al aumentar x ilimitadamente.

Se llama *asíntota de la curva* a la recta que posee la propiedad de que la longitud de la perpendicular, bajada a la recta desde un punto de la curva, tiende a cero cuando el punto se aleja indefinidamente por la rama infinita de la curva. Por lo tanto, la recta $y = \frac{b}{a}x$ es la asíntota de la rama derecha de la hipérbola. Esta es asimismo la asíntota de la rama izquierda de la hipérbola.

La recta $y = -\frac{b}{a}x$ es también asíntota, tanto de la rama derecha como de la rama izquierda de la hipérbola. Esto se debe a la simetría de la hipérbola respecto a los ejes de coordenadas.

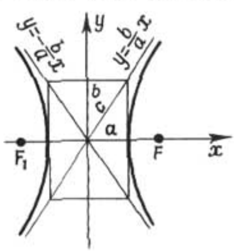


Fig. 42

Por lo tanto, la hipérbola tiene dos asíntotas:

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}x} \qquad \text{(XXXVI)}$$

Para trazar las asíntotas de una hipérbola es suficiente construir un rectángulo, cuyos ejes de simetría sean los ejes de la hipérbola, y trazar sus diagonales (fig. 42). Como las ecuaciones de estas diagonales son $y = \pm\frac{b}{a}x$, prolongándolas indefinidamente obtenemos las asíntotas de la hipérbola.

La rama derecha y la izquierda de la hipérbola se encuentran dentro de los ángulos que forman las asíntotas $y = +\frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ en su intersección, y prolongadas indefinidamente se acercan a dichas asíntotas.

La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, que es conjugada a la dada, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, tiene las mismas asíntotas que ella.

§ 31. Excentricidad de la hipérbola

1°. El valor de la razón de la distancia focal $2c$ respecto al eje real $2a$ de la hipérbola se llama su excentricidad y se señala con la letra e,

$$e = \frac{c}{a},$$

Puesto que $c > a$, $e > 1$.

De la fórmula (XXXIV) resulta que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sustituyendo este valor de c en la fórmula de la excentricidad, se tiene:

$$\boxed{e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}} \text{ (XXXVII) ó } \boxed{e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}} \text{ (XXXVIIa)}$$

Según esta fórmula resulta que manteniendo invariable la longitud del eje real $2a$ y disminuyendo la longitud del eje imaginario $2b$, la excentricidad de la hipérbola se aproximará a 1. Por otro lado, cuanto menor sea b, tanto menor será el ángulo formado por las asíntotas (la razón $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ y tanto más aplastada estará la hipérbola en dirección vertical (fig. 43).

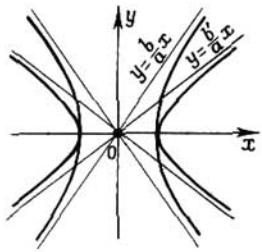


Fig. 43

2°. Al obtener la ecuación de la hipérbola (§ 27) se ha encontrado la igualdad (2):

$$\frac{c}{a}x - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

En ésta, $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = MF$, es decir, representa al radio vector del punto M de la hipérbola. Designémoslo con la letra r; la razón $\frac{c}{a} = e$.

La igualdad se puede escribir así:

$$\boxed{r = ex - a}$$

Designando el segundo radio vector con r_1, $MF_1 = r_1$, se tiene:

$$\boxed{r_1 = ex + a}$$

Los valores de r y r_1 obtenidos por medio de estas fórmulas serán positivos si los valores de x son positivos, y negativos, si los valores de x son también negativos. Como r y r_1 representan las *longitudes* de los radios vectores, las expresiones numéricas de éstos tienen que ser positivas. Por lo tanto, al determinar las r y r_1 de los puntos de una hipérbola, con abscisas negativas, hay que tomar el segundo miembro de las fórmulas de r y r_1 en su valor absoluto.

§ 32. La hipérbola equilátera

La hipérbola se llama e q u i l á t e r a si tiene iguales sus semiejes, es decir, si $b = a$.

Sustituyendo en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ b por a, se obtiene la ecuación de la hipérbola equilátera:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2} \qquad \text{(XXXVIII)}$$

Poniendo $b = a$ en las ecuaciones de las asíntotas (XXXVI), se hallan las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola equilátera:

$$y = x \text{ e } y = -x.$$

Las asíntotas de la hipérbola equilátera son las bisectrices de los ángulos del sistema de coordenadas y, por lo tanto, son perpendiculares entre sí, porque si $\operatorname{tg}\varphi = \pm 1$, se tiene $\varphi = 45°$ y $135°$. La excentricidad de cualquier hipérbola equilátera es un número constante,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}.$$

§ 33. Fórmulas de transformación de las coordenadas

1°. C a s o d e t r a s l a d o p a r a l e l o d e l o s e j e s d e c o o r d e n a d a s.

Se tienen dos sistemas de coordenadas xOy y $x'O'y'$ (fig. 44), y el origen del segundo sistema O' tiene, respecto a los ejes del primer sistema, las coordenadas (a, b), y las direcciones de los ejes de ambos sistemas son iguales, es decir, el eje $O'x'$ es paralelo al eje Ox y el eje $O'y'$ es paralelo al eje Oy, y las direcciones positivas de los ejes semejantes son iguales. Conociendo las coordenadas del punto M respecto a un sistema se pueden encontrar las coordenadas de este punto respecto al otro sistema.

En efecto, si (x', y') son las coordenadas del punto M respecto al sistema $x'O'y'$ y (x, y) respecto al sistema xOy, tendremos que según la figura 44 y en virtud de la regla del § 3, 3°:

$$\boxed{x' = x - a; \quad y' = y - b} \qquad \text{(XXXIX)}$$

2°. **Caso de rotación de los ejes de coordenadas.**

Supongamos que el punto M (fig. 45) en el sistema de coordenadas xOy tiene la abscisa $x = ON$ y la ordenada $y = NM$. Hagamos girar el sistema de coordenadas xOy alrededor del origen O de tal manera que la nueva direc- *ción del eje de las abscisas Ox' forme con la dirección*

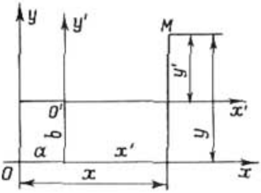


Fig. 44

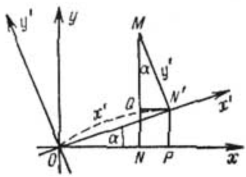


Fig. 45

anterior de Ox el ángulo α. El ángulo α se llama ángulo de rotación; su valor es positivo si la rotación del eje Ox *se efectúa en dirección* contraria a la de las aguajas de un reloj, y es negativo si la rotación del eje Ox se efectúa en la misma dirección de las agujas del reloj.

Indiquemos por medio de x' e y' las coordenadas del punto M respecto a los nuevos ejes ($x' = ON'$, $y' = N'M$) y expresemos las coordenadas primitivas x, y mediante las nuevas x', y', del siguiente modo:

según la figura 45

$$x = ON = OP - NP = OP - QN',$$

en el triángulo OPN'

$$OP = x' \cdot \cos\alpha,$$

en el triángulo $QN'M$

$$QN' = y' \cdot \operatorname{sen}\alpha,$$

de donde

$$y = NM = NQ + QM = PN' + QM;$$

$$PN' = x' \cdot \operatorname{sen}\alpha;$$

$$QM = y' \cdot \cos\alpha;$$

$$\boxed{x = x'\cos\alpha - y' \cdot \operatorname{sen}\alpha; \quad y = x'\operatorname{sen}\alpha + y' \cdot \cos\alpha} \quad \text{(XL)}$$

§ 34. Ecuación de una hipérbola equilátera referida a las asíntotas

La ecuación de la hipérbola equilátera en el sistema xOy (fig. 46) es:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Hacemos girar el sistema de coordenadas xOy alrededor del origen O, como centro, en un ángulo $\alpha = -45°$. Entonces, los nuevos ejes de coordenadas Ox' y Oy' serán respectivamente la asíntota $y = -x$ y la asíntota $y = +x$. Según la fórmula (XL), para cada punto de la hipérbola equilátera dada, tenemos:

$$x = x' \cdot \cos(-45°) - y' \cdot \operatorname{sen}(-45°) =$$
$$= x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$
$$y = x' \cdot \operatorname{sen}(-45°) + y' \cdot \cos(-45°) =$$
$$= -x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y' - x'}{\sqrt{2}},$$

donde x', y' son las coordenadas del punto (x, y) de la hipérbola respecto a los nuevos ejes. Sustituyendo estos valores de x e y en la ecuación $x^2 - y^2 = a^2$, tenemos:

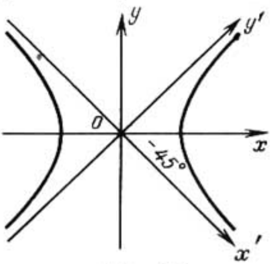


Fig. 46

$$\frac{(x' + y')^2}{2} - \frac{(y' - x')^2}{2} = a^2.$$

De aquí se obtiene:

$$4x'y' = 2a^2,$$

$$\boxed{x'y' = \frac{a^2}{2}} \qquad \text{(XLI)}$$

Esta es la ecuación de la hipérbola equilátera cuando las asíntotas hacen de ejes de coordenadas.

Representando $\frac{a^2}{2}$ por medio de k y omitiendo los rasgos de las coordenadas variables x', y', a la ecuación obtenida se da la forma:

$$xy = k.$$

Se ve pues que la hipérbola equilátera, cuya ecuación está referida a las asíntotas, representa la gráfica de la función inversamente proporcional.

§ 35. Ejemplos de resolución de problemas sobre la elipse y la hipérbola

1°. Formar la ecuación de la elipse, siendo el eje mayor igual a 10 y la excentricidad $e = 0{,}8$.

Solución. Para formar la ecuación de la elipse hace falta tener los valores de los semiejes a y b. Se sabe que:

$$2a = 10 \text{ y } e = \frac{c}{a} = 0{,}8.$$

De donde $a = 5$, $c = 0{,}8 \cdot a = 4$.
Por la fórmula $b^2 = a^2 - c^2$ encontramos b^2

$$b^2 = 5^2 - 4^2 = 9.$$

Sustituyendo en la ecuación (XXXI) a^2 y b^2 por los números 25 y 9, obtenemos la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \text{ o } 9x^2 + 25y^2 = 225.$$

2°. Formar la ecuación de la hipérbola que tiene como asíntotas las rectas $y = \pm\frac{3}{5}x$ y pasa por el punto $(-5;\ 2)$.

Solución. Comparando las ecuaciones dadas de las asíntotas con $y = \pm\frac{b}{a}x$, deducimos que la razón $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$.

La hipérbola pasa por el punto $(-5;\ 2)$, por ello, sustituyendo en la ecuación de la hipérbola (XXXV) las coordenadas variables por las dadas, obtenemos la igualdad $\frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$. Resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{5} \text{ y } \frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1.$$

Resolvemos este sistema respecto a a y b del siguiente modo: de la primera ecuación hallamos que $\frac{1}{a} = \frac{3}{5b}$, y, sustituyendo en la segunda, obtenemos: $\frac{9}{b^2} - \frac{4}{b^2} = 1$. De donde $b^2 = 5$. Sustituyendo en la segunda ecuación b^2 por el número 5, $\frac{25}{a^2} - \frac{4}{5} = 1$, hallamos que $a^2 = \frac{125}{9}$. Los valores obtenidos de a^2 y b^2 los sustituimos en (XXXV) y resulta la ecuación buscada de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{\frac{125}{9}}-\frac{y^2}{5}=1, \text{ o sea } 9x^2-25y^2=125.$$

3°. Hallar por medio de la ecuación de la elipse $5x^2+9y^2=180$ sus ejes y su excentricidad.

Solución. Reduzcamos la ecuación dada a la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Para eso la dividimos por 180:

$$\frac{5x^2}{180}+\frac{9y^2}{180}=1, \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$$

De donde:

$$a=6, \quad b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

La excentricidad:

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{36-20}}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Resultado: Los ejes: 12 y $4\sqrt{5}$, la excentricidad: $\frac{2}{3}$.

4°. Escribir la ecuación de una hipérbola equilátera, sabiendo que sus asíntotas son respectivamente paralelas a los ejes de coordenadas; dicha hipérbola pasa por el punto (2; 3), y su centro se encuentra en el punto (1; —1).

Solución. Designemos el sistema de coordenadas en que son dados los puntos (2; 3) y (1; —1), por xOy. Realicemos una translación del eje xOy, al nuevo origen de coordenadas (1; —1), que es centro de la hipérbola y también el punto de intersección de las asíntotas, y designemos al nuevo sistema por $x'O'y'$. En el sistema $x'O'y'$ la ecuación de la hipérbola equilátera será

$$x'y'=k. \qquad (*)$$

De acuerdo con las fórmulas (XXXIX) tenemos:

$$x'=x-1, \qquad y'=y+1.$$

Insertando estos valores x' e y' en la ecuación (*), resulta la ecuación de la hipérbola dada en el sistema xOy:

$$(x-1)(y+1)=k. \qquad (**)$$

Ya que el punto (2; 3) pertenece a la hipérbola, sustituyendo los valores de sus coordenadas en la ecuación (**), resulta la igualdad

$$(2-1)\cdot(3+1)=k.$$

De aquí $k=4$ y la ecuación buscada de la hipérbola es

$$(x-1)(x+1)=4,$$

$$y+1=\frac{4}{x-1}, \quad \text{o} \quad y=\frac{5-x}{x-1}.$$

5°. Demostrar que la gráfica de la función lineal general $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde $c \neq 0$, es una hipérbola equilátera.

S o l u c i ó n. Separemos la parte entera de la fracción, dividiendo $ax + b$ entre $cx + d$, por la regla de división de polinomios, y entonces obtenemos como cociente $\frac{a}{c}$, y como resto $b - \frac{ad}{c} = \frac{bc-ad}{c}$. Después de esto escribiremos la ecuación en la forma

$$y=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}:(cx+d),$$

$$y-\frac{a}{c}=\frac{bc-ad}{c}:(cx+d)=\frac{bc-ad}{c^2}:\left(x+\frac{d}{c}\right),$$

$$\left(x+\frac{d}{c}\right)\cdot\left(y-\frac{a}{c}\right)=\frac{bc-ad}{c^2}.$$

Si suponemos que

$$x+\frac{d}{c}=x', \quad y-\frac{a}{c}=y' \quad \text{y} \quad \frac{bc-ad}{c^2}=k,$$

resulta la ecuación de la hipérbola equilátera:

$$x'y'=k$$

en el nuevo sistema de coordenadas $x'O'y'$ que se obtiene por la traslación del sistema xOy al nuevo origen $O'\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

§ 36. Parábola

D e f i n i c i ó n. *Se llama parábola el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto dado (foco) y de una recta dada (directriz).*

Según la definición, si F es el punto dado, llamado foco de la parábola (fig. 47), KL es la recta dada, denominada directriz de la parábola, M es cualquier punto de la parábola y MN, la perpendicular bajada del punto M a la recta KL, se tiene que

$$MF=MN.$$

§ 37. Ecuación de la parábola

1°. Admitamos como eje Ox (fig. 47) la recta que pasa por el foco F, perpendicular a la directriz KL, y como origen de coordenadas, el punto O, es decir, el punto medio de la distancia, AF del foco F a la directriz KL.

Supongamos que la dirección de A a F coincide con la dirección positiva del eje Ox. Tomemos

$$AF = p, \quad p > 0.$$

Al elegir estos ejes, el foco F tendrá las coordenadas $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, el punto $M(x, y)$ y el punto $N\left(-\frac{p}{2}, y\right)$.

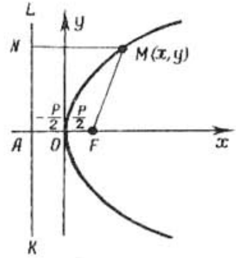


Fig. 47

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Puesto que $MF = MN$:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

De donde:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Eliminando x^2 y $\frac{p^2}{4}$ y pasando $-px$ al segundo miembro de la igualdad, obtenemos la ecuación canónica de la parábola:

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad \text{(XLII)}$$

El número p se llama *parámetro de la parábola.*

2°. La distancia desde el punto M al foco F se llama *radio vector* del punto M. Indicando el radio vector del punto M con r, se obtiene:

$$r = x + \frac{p}{2},$$

ya que $r = MF$, y $MF = MN = x + \frac{p}{2}$.

§ 38. Investigación de la forma de la parábola por medio de su ecuación

1°. De la fórmula de la parábola (XLII) se tiene que:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Puesto que se ha tomado por p un número positivo, los valores de y pueden ser reales solamente si $x \geqslant 0$. Si $x = 0$, se tiene $y = \pm\sqrt{2p\cdot 0} = 0$. El origen de coordenadas O (0, 0) pertenece a la parábola y se llama *vértice* de la misma. $y^2 = 2px$ es la *ecuación de la parábola referida al vértice.*

A cada valor de x en el intervalo $0 < x < +\infty$ corresponden dos puntos de la parábola, situados a ambos lados del eje Ox, alejados de ésta a una distancia igual al valor absoluto de y, puesto que a cada valor de x en este intervalo corresponden dos valores de y, de igual valor absoluto y de signo contrario. La parábola es una línea curva, simétrica al eje Ox. El eje Ox se llama *eje de la parábola.*

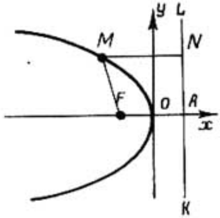


Fig. 48

Al aumentar x desde 0 hasta $+\infty$, los valores de y crecen en valor absoluto desde 0 hasta ∞. La parábola es una curva abierta e ilimitada. La parábola tiene la forma representada en la figura 47.

2°. La distancia desde el vértice de la parábola O hasta su foco F se llama *distancia focal de la parábola*. La distancia focal de la parábola $OF = \frac{p}{2}$.

La directriz de la parábola es perpendicular a su eje; la ecuación de la directriz de la parábola es: $x = -\frac{p}{2}$.

3°. Si la dirección de A a F (fig. 48) es contraria a la dirección positiva del eje Ox,

$$AF = p, \text{ y, además, } p < 0,$$

la expresión algebraica de las coordenadas de los puntos F, M y N será la misma que en el primer caso (1°), y, por eso, la ecuación de la parábola conservará la forma

$$y^2 = 2px.$$

4°. Si en la ecuación de la parábola permutamos las coordenadas variables x e y, resulta:

$$\boxed{x^2 = 2py} \qquad \text{(XLIII)}$$

El eje Oy sirve de eje de simetría de esta parábola. Si $p > 0$, la parábola está situada encima del eje Ox (fig. 49), y si $p < 0$, se encuentra debajo del eje Ox (fig. 50).

Es conveniente tener presente que sirve de eje de la parábola el eje de coordenadas *homónimo* de la coordenada variable, que figura en la ecuación de la parábola con potencia de primer grado.

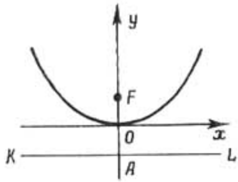


Fig. 49

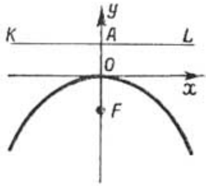


Fig. 50

5°. De la ecuación $x^2 = 2py$ se deduce que:

$$y = \frac{1}{2p} x^2.$$

Haciendo $\frac{1}{2p} = a$, se tiene: $y = ax^2$, la ecuación de la parábola, conocida ya del álgebra.

6°. Advertamos que la parábola no tiene centro.

§ 39. Construcción de la parábola

1°. Con un movimiento continuo (fig. 51). Se da p, el parámetro de la parábola. Se trazan dos rectas KL y Ox, perpendiculares entre sí, y se toma una de ellas (KL) como directriz, y la otra (Ox), como eje de la parábola. Se indica el foco F, marcando con un compás en el eje Ox, a partir de la directriz KL, la distancia AF, igual a p. Se coloca una regla a lo largo de la directriz; luego se pone el cateto menor de una escuadra a lo largo de la regla. En el vértice del ángulo agudo B, opuesto al cateto menor de la escuadra, se sujeta un hilo, y el otro extremo del hilo se sujeta en el foco F; la longitud del hilo BF tiene que ser en este caso igual al cateto mayor de la escuadra. Estirando el hilo con la punta de un lapicero, como se indica en la figura 51, se traza una curva, manteniendo el hilo estirado mientras se mueve el lapicero sobre el papel, la punta del lapicero junto a la escuadra, y ésta en contacto con la regla. Cada punto M de esta curva pertenece a la parábola, porque $MN = MF$.

2°. Construcción por puntos (fig. 52). Partiendo de que la distancia de cualquier punto de la parábola a la directriz es igual al radio vector r, y de que

$$r = x + \frac{p}{2},$$

se deduce el procedimiento de determinación de los puntos de la parábola. Al encontrar, como en el caso anterior, la directriz, el eje, el foco y el vértice de la parábola, trazamos la recta P_1Q_1, paralela a la directriz, de tal modo

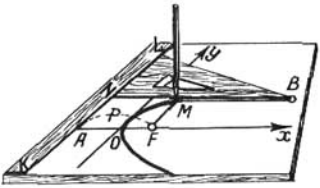


Fig. 51

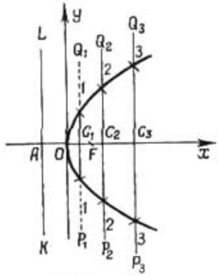


Fig. 52

que corte al eje de la parábola en el punto C_1. Después, con un radio igual a la distancia AC_1 de la paralela P_1Q_1, a partir de la directriz KL trazamos desde el foco F, como centro, arcos pequeños, uno más arriba del eje Ox y otro más abajo de él, de tal manera que corten a la paralela P_1Q_1. Los puntos de intersección (en la figura 52 están señalados con la cifra 1) pertenecen a la parábola, porque para cada uno de ellos

$$r = AC_1 = \frac{p}{2} + x.$$

Trazando algunas otras rectas, P_2Q_2, P_3Q_3, etc., paralelas a la directriz KL, y repitiendo para cada una de ellas las mismas operaciones de determinación de los puntos que en el caso de la recta P_1Q_1, cada vez se obtendrán dos puntos de la parábola (en la figura están señalados respectivamente con las cifras 2, 3, ...).

Observemos que al construir la parábola se deben acercar los puntos C_1, C_2, C_3... al aproximarse éstos al vértice O, y alejarlos a medida que se apartan a la derecha del vértice a lo largo del eje Ox.

Cuando se ha señalado el número suficiente de puntos, trazamos, siguiendo dichos puntos, bien a mano o con una plantilla, una curva continua poco cerrada, que es la parábola.

§ 40. Ecuación de la parábola en el caso de traslación paralela de los ejes de coordenadas

1°. Supongamos que el vértice de la parábola está situado en el puto O' (a, b) y que el eje de la parábola es paralelo al eje Oy (fig. 53). Figurémonos un sistema de coordenadas $x'O'y'$, cuyo origen es el vértice de la parábola O' (a, b), el eje $O'y' \parallel Oy$ es el eje de la parábola, el eje $O'x' \parallel Ox$. En el sistema de coordenadas $x'O'y'$, la ecuación de la parábola es:

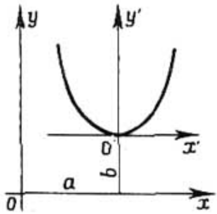


Fig. 53

$$x'^2 = 2py',$$

y en el sistema xOy:

$$\boxed{(x-a)^2 = 2p(y-b),} \qquad \text{(XLIV)}$$

porque para cada punto M de la parábola, según la fórmula (XXXIX), tenemos:

$$x' = x - a, \quad y' = y - b.$$

Si el vértice de la parábola es O' (a, b) y el eje de la parábola $O'x'$ es paralelo al eje Ox, la ecuación de la parábola será la siguiente:

$$\boxed{(y-b)^2 = 2p(x-a)} \qquad \text{(XLV)}$$

2°. Resolvamos la ecuación (XLIV) respecto a y:

$$y = \frac{1}{2p}(x-a)^2 + b,$$

o

$$y = \frac{1}{2p} x^2 - \frac{a}{p} x + \frac{a^2}{2p} + b.$$

Indicando $\frac{1}{2p} = A$, $-\frac{a}{p} = B$, $\frac{a^2}{2p} + b = C$, se tiene:

$$\boxed{y = Ax^2 + Bx + C,} \qquad \text{(XLVI)}$$

es decir, la parábola $(x - a)^2 = 2p(y - b)$ es la gráfica de la función cuadrada $y = Ax^2 + Bx + C$.

3°. Si *en la ecuación de segundo grado con relación a las coordenadas* x, y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

faltan el segundo y tercer (o el segundo y primer) términos, representa una parábola con el eje paralelo al eje Oy (o paralelo al eje Ox).

Esta condición es necesaria. En efecto, la parábola, cuyo eje es paralelo a Oy, se expresa mediante la ecuación (XLVI):

$$y = Ax^2 + Bx + C = 0, \text{ o } Ax^2 + Bx - y + C = 0,$$

o sea, por medio de la ecuación general de segundo grado con relación a las coordenadas x, y, en la cual faltan el segundo y tercer términos.

Esta condición es suficiente. En efecto, dividiendo la ecuación

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

por A:

$$x^2 + \frac{D}{A} x + \frac{E}{A} y + \frac{F}{A} = 0,$$

y pasando los dos últimos términos al segundo miembro, se tiene:

$$x^2 + \frac{D}{A} x = -\frac{E}{A} y - \frac{F}{A},$$

completamos $x^2 + \frac{D}{A} x$ hasta el cuadrado de un binomio,

$$x^2 + 2x\frac{D}{2A} + \frac{D^2}{4A^2} = -\frac{E}{A} y - \frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2},$$

después de fransformar obtenemos una ecuación que representa una parábola, con el eje paralelo a Oy:

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A} y + \frac{D^2 - 4AF}{4A^2},$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}\left(y - \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right),$$

y cuyo vértice tiene las coordenadas

$$a = -\frac{D}{2A}, \quad b = \frac{D^2 - 4AF}{4AE},$$

y el parámetro:

$$p = -\frac{E}{2A}.$$

§ 41. Ejemplos de resolución de problemas

1°. Formar la ecuación de la parábola con el vértice en el origen de coordenadas, conociendo las coordenadas del foco $(-2;\ 0)$.

Solución. Según la condición, el foco de la parábola está situado en el eje Ox y el vértice se encuentra en el origen de coordenadas, por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$$y^2 = 2px.$$

La distancia focal de la parábola $OF = \frac{p}{2} = -2$. Por lo tanto $2p = -8$, y la ecuación buscada de la parábola es:

$$y^2 = -8x.$$

2°. Formar la ecuación de la parábola, conociendo la ecuación de su directriz $y = -3$, y las coordenadas del foco $(4;\ 1)$.

Solución. Según la condición, la directriz es paralela al eje Ox, por lo tanto, el eje de la parábola es paralelo al eje Oy y su ecuación es $x = 4$. El punto de intersección de la directriz con el eje de la parábola es $A\ (4;\ -3)$. El parámetro p es la distancia desde el punto $A\ (4;\ -3)$ hasta $F\ (4;\ 1)$ y se determina según la fórmula I, § 3:

$$p = 1 - (-3) = 4.$$

El vértice $O\,(a,\ b)$ es el punto medio del segmento AF. Según la fórmula V, § 4:

$$a = \frac{4+4}{2} = 4, \quad b = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

La ecuación de la parábola dada tiene la forma:

$$(x-a)^2 = 2p\,(y-b).$$

Sustituyendo en ella a b, p por los valores obtenidos, resulta:

$$(x-4)^2 = 8\,(y+1), \quad \text{o} \quad x^2 - 8x - 8y + 8 = 0.$$

3°. Determinar las coordenadas del vértice y el valor del parámetro de la parábola cuya ecuación es:

$$y^2 + 5x - 6y + 14 = 0.$$

Hállense también las coordenadas de su foco y la ecuación de la directriz.

S o l u c i ó n. Primer método. Trasladamos el origen de coordenadas al vértice de la parábola O' (a, b), sin alterar la dirección de los ejes, y representamos el sistema obtenido por medio de $x'O'y'$. Según la fórmula (XXXIX) se obtiene:

$$\boxed{x = x' + a, \quad y = y' + b} \qquad \text{(XXXIXa)}$$

Sustituyendo en la ecuación dada los valores de x, y por x', y' resulta la ecuación de la parábola relativa al vértice:

$$(y' + b)^2 + 5(x' + a) - 6(y' + b) + 14 = 0,$$

o

$$y'^2 + 2by' + b^2 + 5x' + 5a - 6y' - 6b + 14 = 0,$$

o

$$y'^2 + 5x' + (2b - 6)y' + (5a - 6b + b^2 + 14) = 0. \qquad (1)$$

Pero la ecuación de la parábola referida al vértice O' tiene la forma:

$$y'^2 = 2px', \text{ o } y'^2 - 2px' = 0. \qquad (2)$$

Para que las ecuaciones (1) y (2) sean idénticas, es necesario que:

$$1)\ 2b - 6 = 0, \quad 2)\ 5a - 6b + b^2 + 14 = 0 \ \text{ y } \ 3)\ 5 = -2p.$$

De la primera condición tenemos que $b = 3$. Sustituyendo $b = 3$ en la segunda condición, resulta:

$$5a - 6 \cdot 3 + 3^2 + 14 = 0, \ a = -1.$$

De la tercera igualdad se deduce que $p = -\frac{5}{2}$.

Por lo tanto, la parábola dada tiene el vértice O' $(-1; 3)$ y el parámetro $p = -\frac{5}{2}$. El signo negativo del parámetro indica que el eje de la parábola, siendo paralelo al eje Ox, tiene la dirección contraria a la dirección positiva del eje Ox.

El foco de la parábola respecto al sistema de ejes $x'O'y'$ con origen en el vértice de la misma, tiene las coordenadas $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, y el vértice O' tiene, respecto a los ejes dados xOy, las coordenadas (a, b). Las coordenadas del foco relativas al sistema dado de coordenadas xOy se obtienen aplicando la fórmula (XXXIXa):

$$x_{\text{foco}} = \frac{p}{2} + a = -\frac{5}{4} - 1 = -2\frac{1}{4}, \quad y_{\text{foco}} = 0 + b = 3.$$

Por consiguiente, la parábola dada tiene el foco $F\left(-2\frac{1}{4}; 3\right)$. La ecuación de la directriz referida al sistema de ejes que tiene como origen el vértice O' (a, b) es la siguiente: $x' = -\frac{p}{2}$. Aplicando la fórmula (XXXIXa), obtenemos la ecuación de la directriz:

$$x = -\frac{p}{2} + a = -\left(-\frac{5}{4}\right) - 1 = \frac{1}{4}.$$

El procedimiento expuesto de transformación de la ecuación dada en ecuación canónica, puede aplicarse para determinar los parámetros de la ecuación de cualquier curva de segundo orden, solamente si la ecuación no tiene término con el producto xy.

S e g u n d o m é t o d o. Reducir la ecuación

$$y^2 + 5x - 6y + 14 = 0$$

a la forma

$$(y+b)^2 = 2p\,(x+a). \qquad (1)$$

Para esto se pasan $5x$ y 14 al segundo miembro de la igualdad:

$$y^2 - 6y = -5x - 14,$$

y completamos el primer miembro hasta el cuadrado de un binomio, sumando 9. Se obiene:

$$(y-3)^2 = -5\,(x+1). \qquad (2)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2) llegamos a la conclusión que $a = -1$, $b = 3$; $2p = -5$, es decir, la parábola tiene el vértice O' $(-1;\ 3)$ y el parámetro $p = -\frac{5}{2}$.

La solución ulterior es análoga a la del primer método.

§ 42. Las curvas de segundo orden como secciones

1°. Si una recta infinita SA (fig. 54) se traslada en el espacio de tal modo que pase constantemente por un punto S y se deslice por cierta curva $ACBD$, la superficie que engendra la recta SA en este caso se llama *cónica* o simplemente *cono*. La curva $ACBD$ se llama en tal caso *directriz*; la recta SA se llama *generatriz* del cono, y el punto S, *vértice* del cono. Si la directriz del cono tiene como centro O, la recta SO, que une el vértice con el centro, se llama *eje* del cono. La superficie cónica está compuesta de dos partes, que se extienden indefinidamente desde el vértice S a ambos lados.

Ocupémonos del *cono circular recto*. Se obtiene este cono si hace de directriz $ABCD$ una circunferencia, y si el vértice S se encuentra en la perpendicular al plano del círculo $ACBD$, trazado por su centro; en este caso la perpendicular OS sirve de eje del cono. La sección del cono a través del plano que pasa por el eje SO se llama ***sección axial del*** *cono*, y el ángulo ASB del vértice S situado en la sección axial del cono, se llama *ángulo de la sección axial.*

2°. Tomemos en la superficie cónica un punto arbitrario Q (fig. 54), que no coincida con el vértice S; tracemos por él la sección axial $ASQB$ y los planos PQ, P_1Q, P_2Q, P_3Q, perpendiculares al plano de la sección axial $ASQB$. Pueden presentarse los siguientes casos:

1) el plano secante PQ es perpendicular al eje SO del cono; la linea de intersección de éste con la superficie cónica es una circunferencia;

2) el plano P_1Q se corta con cada una de las generatrices en una parte del cono a una distancia finita de su vértice S (esto ocurre mientras el ángulo P_1QB sea mayor que el ángulo ASB); la línea de intersección es en este caso una curva cerrada, una elipse;

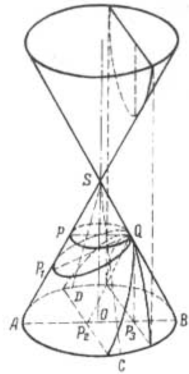


Fig. 54

3) el plano P_2Q es paralelo a una generatiz, por ejemplo a SA, ($\angle P_2QB = \angle ASB$), y se corta con las demás generatrices en una parte del vértice S; la línea de intersección del plano secante con la superficie cónica es en este caso una curva abierta que tiene un punto alejado indefinidamente (una parábola);

4) el plano P_3Q es paralelo a dos generatrices del cono (en la fig. 54, SC y SD); en este caso corta a las dos partes del cono ($\angle P_3QB < \angle ASB$), y al cortarse con cada parte se forma una curva abierta, que son las ramas de una hipérbola.

De este modo, la intersección de un plano con la superficie cónica se efectúa por una de las curvas de segundo orden. Por eso, las curvas de segundo orden se llaman también secciones cónicas.

Demostremos que una sección cónica es una elipse si el plano secante PQ (fig. 55) se corta con cada generatriz del cono a un lado de su vértice S.

D e m o s t r a c i ó n. Inscribamos en el cono, a uno y otro lado del plano secante PQ, esfera, de tal modo que el plano PQ sea tangente a esas esferas. Señalamos los puntos de contacto mediante F y F_1.

Como las tangentes trazadas de cualquier punto dado a la esfera son iguales entre sí, resulta:

a) todos los puntos de contacto con el cono de cada esfera inscrita están situados en un plano, perpendicular al eje del cono precisamente en el plano $A_1B_1C_1$ para la esfera superior, y en el plano ABC para la esfera inferior;

b) los segmentos de las generatrices del cono, situados entre estos planos, son iguales entre sí, es decir,

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \ldots = \text{const.} \tag{1}$$

En la línea de corte del cono con el plano PQ tomamos un punto arbitrario M, que unimos con los puntos F y F_1. Los segmentos MF y MF_1 son tangentes respectivamente de una y otra esfera.

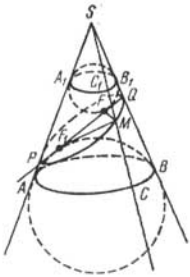


Fig. 55

Tracemos por el punto M la generatriz SM, que es tangente de una esfera en el punto C y de la otra en el punto C_1.

De este modo, desde el punto M se han trazado a la esfera inferior y a la superior dos tangentes a cada una de ellas. A la inferior MF_1 y MC, siendo

$$MF_1 = MC, \tag{2}$$

y a la superior MF y MC_1, siendo

$$MF = MC_1. \tag{3}$$

Sumando las igualdades (2) y (3), se tiene:

$$MF + MF_1 = MC + MC_1 = CC_1.$$

No varía la longitud del segmento CC_1, según la igualdad (1), al desplazarse el punto M por la línea de corte del cono por el plano PQ. Por eso, la línea en que corta al cono el plano PQ posee la propiedad de que la suma de las distancias de cualesquiera de sus puntos M hasta los puntos F y F_1 es constante. Por lo tanto, esta línea es una elipse con los focos en los puntos F y F_1.

Del mismo modo se puede demostrar también que la parábola y la hipérbola son secciones cónicas.

B. ELEMENTOS DEL CALCULO DIFERENCIAL

CAPITULO IV

TEORIA DE LOS LIMITES

§ 43. La magnitud absoluta y sus propiedades

Convengamos en que, aquí y en adelante, al expresar la palabra "número" tenemos en cuenta un "número real".

1°. Definiciones. *Se llama magnitud absoluta de un número positivo al propio número positivo, y se llama magnitud absoluta de un número negativo al número positivo contrario a éste. Se admite como magnitud absoluta de cero al propio cero.*

La magnitud absoluta de un número se señala colocando dicho número entre dos rayitas verticales.

Según esto: $|7| = 7$; $|-3| = 3$; $|0| = 0$. Si el número a es positivo, $|a| = a$, y si a es negativo, $|a| = -a$.

2°. Propiedades. 1. *La magnitud absoluta de la suma de varios números no es mayor que la suma de las magnitudes absolutas de sus sumandos, es decir,*

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

En efecto, si los números a y b son positivos o los dos son negativos, para obtener su suma se suman sus magnitudes absolutas y se les pone el signo común. La magnitud absoluta de la suma, por consiguiente, es igual a la suma de las magnitudes absolutas de los sumandos. Por ejemplo: $a = -3$, $b = -7$:

$$(-3) + (-7)| = |-10| = 10 \text{ y } |-3| + |-7| = 3 + 7 = 10;$$

$$|(-3) + (-7)| = |-3| + |-7|.$$

Si a y b tienen signos diferentes, al sumarlos se resta de la magnitud absoluta mayor la menor y se pone el signo del sumando que tiene mayor magnitud absoluta. Por eso, la magnitud absoluta de la suma es menor que la suma de las magnitudes absolutas de los sumandos.

Por ejemplo, la magnitud absoluta de la suma de los números $|(-7)+(+3)| = |-4| = 4$, y la suma de las magnitudes absolutas de estos mismos números $|-7| + |+3| = 7 + 3 = 10$; es decir,

$$|(-7)+(+3)|<|-7|+|+3|.$$

La propiedad demostrada puede hacerse extensiva a cualquier número constante de sumandos, o sea,

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|b_2|+\ldots+|a_n|.$$

2. *La magnitud absoluta de la diferencia de dos números es mayor o igual que la diferencia de las magnitudes absolutas de estos números, es decir,*

$$|a-b|\geqslant|a|-|b| \quad \text{o} \quad |a-b|\geqslant|b|-|a|$$

En efecto, supongamos que

$$a-b=c.$$

De donde:

$$a=b+c.$$

Según lo anterior

$$|a|\leqslant|b|+|c|.$$

Despejando la c en la desigualdad, se tiene:

$$|c|\geqslant|a|-|b|,$$

o

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

Al cambiar el signo de un número no se altera su magnitud absoluta. Por eso

$$|a-b|=|b-a|.$$

Pero, según lo demostrado

$$|b-a|\geqslant|b|-|a|.$$

Por ello también es cierta la desigualdad:

$$|a-b|\geqslant|b|-|a|.$$

Observemos que la diferencia $|a|-|b|$ o $|b|-|a|$ puede ser negativa.

3. *La magnitud absoluta del producto es igual al producto de las magnitudes absolutas de los factores, es decir,*

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

4. *La magnitud absoluta del cociente es igual al cociente obtenido al dividir la magnitud absoluta del dividendo por la del divisor, es decir,*

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

5. *La magnitud obsoluta de la potencia con exponente entero positivo es igual a la misma potencia de la magnitud absoluta de su base, es decir,*

$$|a^n| = |a|^n.$$

Las propiedades 3, 4 y 5 se desprenden de las propiedades de la multiplicación y de la división.

§ 44. Magnitud infinitésima

1°. Definición. *Una magnitud variable se llama infinitamente pequeña (infinitésima), si a partir de un momento de su variación, la magnitud absoluta de su valor se hace menor que cualquier número positivo* ε *dado y permanece siendo menor que él.*

2°. Ejemplos. 1. El lado de un polígono regular inscrito es una magnitud infinitésima al duplicar indefinidamente el número de sus lados, porque en tal caso, el lado puede hacerse todo lo pequeño que se quiera, es decir, menor que cualquier número positivo ε por pequeño que sea.

2. Al crecer indefinidamente la magnitud absoluta de x $\left(\text{por ejemplo, } \frac{1}{x} = \frac{1}{10};\ \frac{1}{100};\ \frac{1}{1000};\ \ldots \text{ o } \frac{1}{x} = \frac{1}{-10};\ \frac{1}{-100};\ \frac{1}{-1000};\ \ldots\right)$, el quebrado $\frac{1}{x}$ es una magnitud infinitésima. En efecto, por pequeño que sea el número positivo dado ε, al crecer $|x|$ indefinidamente, llegará un momento a partir del cual $|x|$ será mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$: y la magnitud inversa $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$:

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ y } \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

3. El quebrado $\frac{p}{x}$, en el que p es constante y $|x|$ crece indefinidamente, es infinitésimo, porque siempre se puede

conseguir que $\left|\frac{p}{x}\right| < \varepsilon$ para lo cual es suficiente tomar $|x| > \frac{|p|}{\varepsilon}$.

3°. Indicaremos los infinitésimos con las primeras letras del alfabeto griego: α, β, γ...

Según la definición, α es una magnitud infinitésima si

$$|\alpha| < \varepsilon,$$

donde ε es un número cualquiera dado, positivo y pequeño.

4°. No debe confundirse una magnitud infinitésima con un número pequeño. Cualquier número pequeño $c \neq 0$ es invariable y siempre se puede hallar otro número positivo ε tal que $|c|$ no sea menor que ε.

Por lo tanto, *cualquier número pequeño* c, *distinto a cero, no es una magnitud infinitésima.*

§ 45. Magnitudes variables acotadas y sin cotas

1°. Definición. *La variable x se llama magnitud acotada si a partir de cierto momento su magnitud absoluta se hace no mayor que un cierto número positivo m,*

$$|x| \leqslant m, \tag{1}$$

y continúa siéndolo.

En caso contrario la variable x se llama *magnitud sin cotas* (no acotada).

Para una magnitud sin cotas no se puede indicar un número m, para el cual, a partir de cierto momento, se cumple la desigualdad (1). Por el contrario, para una magnitud sin cotas variable existen tales valores para los cuales se cumple la desigualdad $|x| > m$, cualquiera que sea m.

2°. Cualquier número dado puede considerarse como una magnitud acotada.

3°. Cualquier magnitud infinitésima α es una magnitud acotada, porque la magnitud absoluta de α, a partir de cierto momento, no sólo se hace menor que cierto número positivo determinado m, sino menor que *cualquier* número pequeño positivo ε dado $|\alpha| < \varepsilon$.

§ 46. Propiedades principales de los infinitésimos

1°. *Al cambiar el signo de una magnitud infinitésima por el contrario, la magnitud permanece siendo infinitésima.*

2°. Teorema. *Si α y β son infinitésimos, su suma y su diferencia son magnitudes infinitésimas.*

D e m o s t r a c i ó n. En todo caso, por diferentes que sean los cambios de los valores de α y β en el proceso de aproximación de α y β a cero, por definición, llegará un momento a partir del cual la magnitud absoluta de los valores de cada una de ellas permanecerá siendo menor que $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |\beta| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y su suma, por lo tanto, permanecerá siendo menor que ε,

$$|\alpha| + |\beta| < \varepsilon.$$

Pero $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$ (§ 43, 2°). De donde:

$$|\alpha + \beta| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la suma $\alpha + \beta$ es una magnitud infinitésima.

Como la magnitud infinitésima β al cambiar de signo sigue siendo infinitésima, la diferencia $\alpha - \beta$ que es igual a la suma de las infinitésimas α y $-\beta$.

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta),$$

es también una magnitud infinitésima.

3°. *La suma algebraica de varios infinitésimos es una magnitud infinitésima.*

Por ejemplo, $\alpha + \beta - \gamma + \delta + \xi$ es un infinitésimo, porque el resultado de cada adición o substracción de dos infinitésimos es una magnitud infinitésima.

4°. *El producto de una magnitud acotada x por un infinitésimo α es una magnitud infinitésima.*

D e m o s t r a c i ó n. En el proceso de variación de x y α (según la definición) forzosamente llegará un momento a partir del cual se mantendrán inalterables las desigualdades:

$$|x| < m, \tag{1}$$

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{m}, \tag{2}$$

siendo m cierto número positivo determinado y para su producto se conservará la desigualdad

$$|x| \cdot |\alpha| < \varepsilon.$$

Pero $|x| \cdot |\alpha| = |x \cdot \alpha|$ (§ 43, 3). De donde: $|x \cdot \alpha| < \varepsilon$.

Por lo tanto, el producto $x\alpha$ es una magnitud infinitésima.

5°. Cualquier número y todo infinitésimo pueden considerarse como magnitudes acotadas; por lo tanto, en particular:

1. *El producto de una constante por un infinitésimo es una magnitud infinitésima.*

2. *El producto de varios infinitésimos es una magnitud infinitésima.*

(Si el producto $\alpha \cdot \beta$ es una magnitud infinitésima, el producto $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$, en el que γ es el tercer infinitésimo, resultando una magnitud infinitésima, etc.)

3. *La potencia entera y positiva de un infinitésimo es una magnitud infinitésima*, porque

$$\alpha^n = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \ldots \alpha}^{n \text{ veces}}.$$

6°. O b s e r v a c i ó n. El cociente de dos magnitudes infinitésimas puede no ser una magnitud infinitésima. Por ejemplo, si

$$\alpha = 2\beta, \text{ entonces } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\beta}{\beta} = 2.$$

A continuación se demostrará que el cociente de dos magnitudes infinitésimas puede ser una magnitud acotada no infinitésima o también una magnitud infinitésima, o una magnitud infinitamente grande (§ 47).

§ 47. La magnitud infinitamente grande

El término "magnitud infinitamente grande", como el término "magnitud infinitamente pequeña", no determina la medida de la magnitud, sino el carácter de variación de su valor numérico.

1°. D e f i n i c i ó n. *La variable x se llama infinitamente grande (infinita) si a partir de cierto momento de variación de x, la magnitud absoluta de su valor se hace mayor que cualquier número positivo N y permanece siendo mayor que él*, es decir, si a partir de cierto valor de x se tiene la desigualdad:

$$|x| > N,$$

por grande que sea el número positivo N.

2°. E j e m p l o 1. Al crecer el arco α desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, la $\operatorname{tg}\alpha$ es positiva y crece indefinidamente; al disminuir el arco α desde 0 hasta $-\frac{\pi}{2}$, la $\operatorname{tg}\alpha$ es negativa y disminuye indefinidamente. En ambos casos, el valor absoluto de $\operatorname{tg}\alpha$ a partir de cierto valor del arco α, se hace mayor que cualquier número positivo N dado, por grande que sea éste, y permanece siendo mayor que él, es decir,

$$|\operatorname{tg}\alpha| > N.$$

Por eso, al crecer α desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$ o al disminuir α desde 0 hasta $-\frac{\pi}{2}$, la $\operatorname{tg}\alpha$ es una magnitud infinitamente grande.

E j e m p l o 2. $x = (-1)^n \cdot n$, donde n toma significación de la serie natural, es decir, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Los valores $x = -1, 2, -3, +4, \ldots$, es decir x unas veces crece y otras disminuye, pero $(x) = 1, 2, 3, 4, \ldots$ crece ilimitadamente; x es una magnitud infinitamente grande.

§ 48. Relación entre las infinitas y los infinitésimos

1°. *Si x es una magnitud infinitamente grande, su recíproca $\frac{1}{x}$ es un infinitésimo.*

En efecto, por pequeño que sea el número positivo ε, según la definición de la magnitud infinitamente grande, llega un momento tal que $|x|$ será mayor que $\frac{1}{\varepsilon} = N$, es decir,

$$|x| > N = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Pero entonces

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\frac{1}{x}$ es una magnitud infinitésima.

2°. *Si α es una magnitud infinitésima, que nunca llega a cero, su recíproca $\frac{1}{\alpha}$ es una magnitud infinitamente grande.*

En efecto, por grande que sea el número positivo N, para la magnitud infinitésima α llega un momento en el que $|\alpha|$ es menor que $\frac{1}{N} = \varepsilon$ es decir,

$$|\alpha| < \varepsilon = \frac{1}{N}.$$

Pero entonces

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right|>N.$$

Por lo tanto, $\frac{1}{\alpha}$ es una magnitud infinitamente grande.

3°. Nota. Al considerar las relaciones entre las magnitudes infinitésimas y las magnitudes infinitamente grandes (2°), se toma una magnitud infinitésima, *que nunca llega a cero.* Si la magnitud infinitésima α se convierte en cero, el quebrado $\frac{1}{\alpha}$ dejaría de ser un número, porque la división por cero es imposible.

Aclaremos el concepto *por que la división por cero es imposible.* Hallar el cociente de la división del número a por el número b significa encontrar un tercer número c, cuyo producto por el divisor b sea igual al dividendo a, es decir,

$$\text{si } \frac{a}{b}=c, \text{ se tiene } c\cdot b=a.$$

Si se toma el divisor $b=0$ y el dividendo $a\neq 0$, y se supone que

$$\frac{a}{0}=c,$$

el producto $0\cdot c$, sea cual fuere c, será igual a cero y no al número a, es decir,

$$0\cdot c\neq a.$$

Por eso *no se puede considerar el cociente* $\frac{a}{0}$ *como expresión de un número.* Indiquemos también que tampoco *se puede dividir cero por cero.* En efecto, si suponemos que el cociente $\frac{0}{0}$ es el número c,

$$\frac{0}{0}=c,$$

se tendría

$$c\cdot 0=0,$$

pero aquí c no es un número determinado, sino un número cualquiera, porque al multiplicar un número cualquiera por cero se obtiene cero, por lo que no se considera la división de cero por cero.

§ 49. Límite de la magnitud variable

1°. Definición. *El número a se llama límite de la variable x, si en el proceso de variación el valor de x se aproxima al número a de tal modo que el valor absoluto de la diferencia $x-a$, a partir de cierto momento, se hace tan pequeño como se quiera, es decir, más pequeño que cualquier número positivo ε y permanece más pequeño que él.*

$$|x-a|<\varepsilon$$

2°. Ejemplo 1. Supongamos que la variable x toma uno tras otro los siguientes valores:

$$x_1 = 1{,}95;\ x_2 = 1{,}995;\ x_3 = 1{,}9995;\ \ldots,\ x_n = \overbrace{1{,}99\ldots95}^{n\ \text{veces}};\ \ldots$$

El valor x se aproxima al número 2. Convengamos en que la aproximación de x al número 2 se efectúa indefinidamente, es decir, que el valor absoluto de la diferencia $x - a$ puede hacerse menor que cualquier número pequeño positivo dado.

Determinemos el valor absoluto de la diferencia entre los valores de x y el número 2:

$$|x_1 - 2| = |1{,}95 - 2| = |-0{,}05| = 0{,}05;$$

$$|x_2 - 2| = |1{,}995 - 2| = |-0{,}005| = 0{,}005, \text{ etc.}$$

$$|x_n - 2| = |1{,}\overbrace{99\ldots9}^{n}5 - 2| = |-0{,}\overbrace{00\ldots0}^{n}5| =$$

$$= 0{,}\overbrace{00\ldots0}^{n}5, \text{ etc.}$$

Tomemos arbitrariamente un número cualquiera pequeño positivo, por ejemplo *0,000001. El valor absoluto de la* diferencia entre el valor x_n de la variable x y el número 2, igual a $0{,}\overbrace{00\ldots0}^{n}5$ será menor que 0,000001 cuando $n \geqslant 6$. Supongamos que se trata de cualquiter número pequeño positivo ε y no sólo de 0,000001. Para que el número 2 sea el límite de x, es preciso que a partir de cierto número n se cumpla inalterablemente la desigualdad:

$$|x_n - 2| < \varepsilon,$$

ó

$$0{,}\overbrace{00\ldots0}^{n}5\ \frac{1}{2\cdot 10^n} < \varepsilon.$$

De aquí resulta:

$$2\cdot 10^n > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

$$10^n > \frac{1}{2\varepsilon}\,,$$

$$n > \lg\frac{1}{2\varepsilon}\,.$$

Por lo tanto, a partir del momento en que n se hace mayor que $\lg \frac{1}{2\varepsilon}$, para todos los valores de x se cumple inalterablemente la desigualdad:

$$|x_n - 2| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, el número 2, por definición, es el límite de la variable x.

3°. Elemplo 2. *Al tender el arco α a cero, el límite de senα es igual a cero.*

Demostración. La variable $x = \text{sen}\alpha$. Se entiende por valor de un arco el número α es decir, su medida expresada en radianes.

Tomemos el círculo unitario (fig. 56) consideremos la aproximación de α a cero a partir de cierto valor de ella positivo o negativo, por ejemplo, a partir de un valor de α cuya magnitud absoluta sea menor que $\frac{\pi}{2}$,

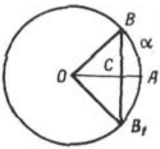


Fig. 56

$$|\alpha| < \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto, tendremos que

$$|\text{sen}\,\alpha| \leqslant |\alpha|,$$

porque la longitud de la mitad de la cuerda BB_1 es menor que la mitad del arco tendido en ella BAB_1.

Pero si

$$|\text{sen}\,\alpha| \leqslant |\alpha|,$$

se tiene

$$|\text{sen}\,\alpha - 0| \leqslant |\alpha|.$$

Tendiendo la magnitud del arco α a cero, obtenemos tal valor de α a partir del cual resultará

$$|\alpha| < \varepsilon,$$

por pequeño que sea el número positivo ε asignado.

De aquí se deduce que

$$|\text{sen}\,\alpha| < \varepsilon \text{ y } |\text{sen}\,\alpha - 0| < \varepsilon,$$

o que el límite de sen $\alpha = 0$, cuando α tiende a cero, 4°. E j e m p l o 3. Supongamos que la variable $x = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$. Demostremos que el límite de x es igual a cero cuando α es positivo y crece indefinidamente.

D e m o s t r a c i ó n. Para cualquier valor de α, $\operatorname{sen} \alpha$ no es mayor que la unidad.

Por eso, sustituyendo el valor del numerador del quebrado $\frac{\operatorname{sen} \pi}{\alpha}$ por la unidad, se obtiene:

$$\frac{|\operatorname{sen} \alpha|}{\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha}$$

(α es positivo).

Por pequeño que sea el número positivo ε dado, al crecer indefinidamente α llegará un momento en el que a partir de él, α será mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$.

$$\alpha > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{y} \quad \frac{1}{\alpha} < \varepsilon.$$

Por eso

$$\left|\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}\right| < \varepsilon \ \text{ y } \ \left|\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} - 0\right| < \varepsilon.$$

En consecuencia, el límite de x es igual a cero.

5°. Según la definición del límite si

$$|x - a| < \varepsilon \text{ tendremos, } \lim x = a.$$

Si $|x-a| < \varepsilon$ suele decirse; "La variable x se aproxima indefinidamente a a" o "tiende a a" y se escribe $x \to a$.

Por medio del símbolo lim, los límites de las varibales hallados en los ejemplos examinados se escriben como sigue:

$$1. \ \lim_{n \to \infty} \overbrace{1{,}99 \ldots 95}^{n} = 2;$$

$$2. \ \lim_{\alpha \to 0} \operatorname{sen} \alpha = 0;$$

$$3. \ \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 0.$$

6°. Si la variable α es una magnitud infinitamente pequeña, su magnitud absoluta se hace menor que cualquier número pequeño positivo ε,

$$|\alpha| < \varepsilon.$$

Pero entonces, la magnitud absoluta de la diferencia entre α y cero también es menor que ε.

$$|\alpha - 0| < \varepsilon.$$

De aquí se deduce que *el límite de una magnitud infinitamente pequeña* α *es igual a cero*,

$$\lim \alpha = 0.$$

En ocasiones, esta propiedad del infinitésimo determina el concepto de la magnitud infinitamente pequeña y la definición se expresa así: *se llama magnitud infinitamente pequeña a la variable cuyo límite es igual a cero.*

A base de esta definición de magnitud infinitamente pequeña se puede obtener su propiedad: $|\alpha| < \varepsilon$, y demostrar a continuación todas las demás propiedades de las magnitudes infinitamente pequeñas, como se ha hecho en el § 46.

§ 50. Representación geométrica del número, de la variable y del límite

1°. Cualquier número real a se representa en el eje numérico Ox por medio de un punto (fig. 57), cuya abscisa es igual a a. Partiendo de esto, en el análisis se señalan

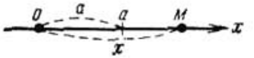


Fig. 57

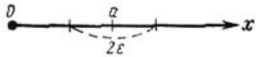


Fig. 58

con una misma letra minúscula el número, el punto que representa a este número y la abscisa de dicho punto. Al decir: "dado el punto a", se entiende también: "dado el número a" y viceversa.

2°. La magnitud variable x se representa también sobre el eje numérico por medio de un punto, que no es fijo, sino movible. Supongamos que el punto M (fig. 57) del eje Ox va cambiando de posición de tal modo que su abscisa equivale siempre al valor numérico de la variable x. Este punto movible M se toma como representación geométrica de la variable x.

3°. Tomemos en el eje numérico Ox un punto fijo a (fig. 58) y tracemos a su izquierda y a su derecha segmentos de longitud igual a ε, con lo que obtendremos un segmento de longitud 2ε cuyo punto medio será el punto a.

D e f i n i c i ó n. *El conjunto de todos los puntos situados en un segmento de longitud 2ε, cuyo punto medio es a, se llama entorno 2ε del punto a.*

El número ε se llama radio del entorno, y el punto a, su centro.

Es evidente que cualquier punto a del eje Ox puede tener infinidad de entornos.

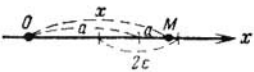


Fig. 59

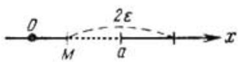


Fig. 60

E j e m p l o. El entorno del punto $a = 2$, de radio $\varepsilon = 0{,}1$ es el conjunto de los puntos del eje Ox cuyas abscisas satisfacen las desigualdades:

$$2-0{,}1 < x < 2+0{,}1, \quad \text{o} \quad 1{,}9 < x < 2{,}1.$$

De este modo, el entorno 2ε de un punto significa algebraicamente el conjunto de valores de x que satisfacen las desigualdades:

$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon.$$

4°. Supongamos que a es el límite de la variable x. Geométricamente, $|x-a|$ es la distancia Ma (fig. 59) entre el punto movible M y el punto fijo a. Si $|x-a| < \varepsilon$ el punto M pertenece al entorno 2ε del punto a.

De aquí se deduce que:

el número a es el límite de la variable x si por pequeño que sea el entorno 2ε del punto a, a partir de cierto momento, todos los valores (puntos) de x pertenecen a este entorno.

5°. Si x se aproxima a su límite a, siendo todo el tiempo menor (o mayor) que a, el punto M se aproximará a a por la izquierda (o la derecha), y los puntos correspondientes a x a partir de cierto momento se concentrarán solamente en el semientorno de la izquierda (o de la derecha) del punto a (figs. 60 y 61).

Si al aproximarse x a su límite a se hace a veces mayor y a veces menor que a, el punto M oscilará alrededor del punto a, y los puntos correspondientes a x, a partir de cierto momento se concentrarán en el entorno 2ε, tanto a la derecha como a la izquierda de a (fig. 62).

6°. La variable x, que tiene como límite a, es una magnitud acotada. En efecto, a partir de cierto momento, el punto M (fig. 63) queda en un segmento determinado Om, de longitud $|a| + \varepsilon$, por lo que se cumple la desigualdad:

$$|x| < |a| + \varepsilon.$$

La proposición recíproca es falsa. Por ejemplo: $x = \operatorname{sen} \alpha$ es una magnitud acotada, porque $|\operatorname{sen} \alpha| \leqslant 1$.

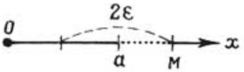


Fig. 61

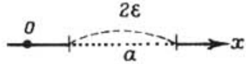


Fig. 62

Sin embargo, $\operatorname{sen} \alpha$ cuando $\alpha \to \infty$ no tiene límite (los valores de $\operatorname{sen} \alpha$ oscilan entre -1 y $+1$ y no pueden pertenecer constantemente a un entorno 2ε de un solo punto).

7°. *Una magnitud infinitamente grande no tiene límite.*

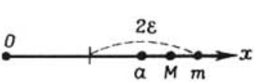


Fig. 63

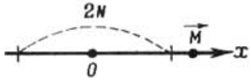


Fig. 64

Esto se puede presentar geométricamente de la siguiente manera. Tracemos en el eje Ox un entorno del cero de radio igual al número positivo N (fig. 64).

Por grande que sea el número N llegará un momento a partir del cual $|x| > N$, y el punto movible M, que representa la magnitud infinitamente grande x, saldrá del entorno $2N$ y en adelante se desplazará fuera de él.

Suele decirse: "el límite de x es igual a infinito", o "la magnitud infinitamente grande x tiene límite infinito", y se escribe $\lim x = \infty$. En el caso de que x sea una magnitud infinitamente grande, y sus valores a partir de cierto momento sean solamente números positivos (o solamente negativos), se escribirá:

$$\lim x = +\infty \text{ (o } \lim x = -\infty).$$

Con ∞ *(infinito) no se efectúa ninguna operación aritmética;* ∞ (infinito) no puede ser sumado, restado, multiplicado, ni dividido por él, ni por ningún otro número, porque ∞ no es un número.

§ 51. Dependencia entre la variable, su límite y una magnitud infinitamente pequeña

La diferencia entre la variable x y su límite a es una magnitud infinitamente pequeña, por ejemplo α,

$$x - a = \alpha,$$

puesto que

$$|x - \alpha| < \varepsilon.$$

De aquí que

$$\boxed{x = a + \alpha,} \tag{1}$$

es decir, *la variable x, cuyo límite es el número a, puede ser representada como la suma de su límite a y un infinitésimo* α.

Recíprocamente, *si a partir de cierto momento cada valor de la variable x representa una suma del número a y de un infinitésimo* α, *el límite x será igual a a*, es decir,

$$\boxed{\text{si } x = a + \alpha, \text{ tendremos } \lim x = a} \tag{2}$$

§ 52. La variable sólo puede tener un límite

T e o r e m a. *Una variable no puede tener más que un límite.*

D e m o s t r a c i ó n p o r r e d u c c i ó n a l o a b s u r d o. Supongamos que la variable x tiene dos límites diferentes: a y b.

Según lo expuesto anteriormente:

$$x = a + \alpha \tag{1}$$

y

$$x = b + \beta, \tag{2}$$

donde α y β son infinitésimos, Restando (2) de (1), se obtiene:

$$0=(a-b)+(\alpha-\beta);$$
$$a-b=\beta-\alpha,$$

lo cual es absurdo: el número $a-b$, que no es igual a cero es una magnitud infinitamente pequeña $\beta-\alpha$ (§ 44, 4°).

Consecuencia. *Si la variable tiene límite, éste será único.*

§ 53. El límite de la suma algebraica

Teorema. *El límite de la suma algebraica de unos cuantos sumandos será igual a la suma algebraica de los límites de estos sumandos, si dichos límites existen.*

Demostración. Demostremos el teorema para el caso, por ejemplo, de que la suma tenga tres sumandos. Suponemos que los límites de las variables x, y, z son los números a, b, c respectivamente.

Representemos cada variable como la suma de su límite y de un infinitésimo (§ 51):

$$x=a+\alpha,$$
$$y=b+\beta,$$
$$z=c+\gamma,$$

donde α, β y γ son infinitésimos.

Sumando las dos primeras igualdades y restando del resultado la tercera, obtendremos que la variable $(x+y-z)$ es igual al número $(a+b-c)$ más el infinitésimo $(\alpha+\beta-\gamma)$. *Por eso* (§ 51), *el número constante $a+b-c$ es el límite de la variable $x+y-z$,*

$$\lim(x+y-z)=a+b-c,$$

o

$$\lim(x+y-z)=\lim x+\lim y-\lim z,$$

que es lo que se trataba de demostrar.

§ 54. El límite del producto y de la potencia

1°. Teorema. *El límite del producto de unos cuantos factores será igual al producto de los límites de estos factores, si estos límites existen.*

D e m o s t r a c i ó n. Demostremos en primer lugar el teorema para el producto de dos factores variables x e y. Supongamos que x e y tienen como límite los números a y b respectivamente. Se tiene (según la fórmula 1, § 51)

$$x = a + \alpha,$$
$$y = b + \beta,$$

donde α y β son infinitésimos. Multiplicando estas igualdades hallaremos que la variable (xy) es igual al número (ab) más el infinitésimo $(\alpha b + a\beta + \alpha\beta)$, es decir, $xy = ab + (ab + a\beta + \alpha\beta)$. Por eso (§ 51), ab, es el límite de la variable xy.

$$\lim (x \cdot y) = a \cdot b$$

o

$$\lim (x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y,$$

que es lo que se trataba de demostrar.

Aplicando lo demostrado hallaremos el límite del producto de tres factores variables x, y y z, cada uno de los cuales tiene límite:

$$\lim (x \cdot y \cdot z) = \lim [(xy) \cdot z] = \lim (xy) \cdot \lim z = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z,$$

porque

$$\lim (xy) = \lim x \cdot \lim y.$$

2°. C o n s e c u e n c i a 1. *El factor constante se puede sacar fuera del signo del límite.*

En efecto, considerando al número constante c como una magnitud variable, cuyos valores son idénticos e iguales a c, se tiene:

$$\lim c = c,$$
$$\lim (c \cdot x) = \lim c \cdot \lim x = c \cdot \lim x.$$

3°. C o n s e c u e n c i a 2. *El límite de la potencia entera y positiva de la magnitud variable será igual a la misma potencia del límite de la magnitud variable, si este límite existe.*

Supongamos que el exponente n de la potencia x^n es un número entero y positivo. Se tendrá:

$$\lim (x^n) = \lim \overbrace{(x \cdot x \cdots x)}^{n \text{ veces}} = \overbrace{\lim x \cdot \lim x \cdots \lim x}^{n \text{ veces}} = (\lim x)^n$$

§ 55. El límite del cociente

1°. Lema. *Si la magnitud variable x tiene un límite a distinto de cero, $\frac{1}{x}$ es una magnitud acotada.*

Demostración. Según la condición $\lim x = a \neq \neq 0$. Por lo tanto (§ 50), si $a > 0$, entonces $0 < a - -\varepsilon < x < a + \varepsilon$, y si $a < 0$, $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon < 0$. Por lo tanto, siempre será

$$\frac{1}{a+\varepsilon} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a-\varepsilon},$$

lo que significa que $\frac{1}{x}$ es una magnitud acotada.

2°. Teorema. *Si el dividendo y el divisor variables tienen límites y el límite del divisor no es igual a cero, resultará que el límite del cociente es real y igual al cociente de los límites del dividendo y del divisor*, es decir, si

$$\lim x = a, \ \lim y = b, \text{ entonces } \lim \frac{y}{x} = \frac{b}{a}.$$

Demostración. Demostraremos que la diferencia $\frac{y}{x} - \frac{b}{a}$ es un infinitésimo. Esto significa que $\lim \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$. Supongamos que α y β son infinitésimos tales que (§ 51)

$$x = a + \alpha, \ y = b + \beta.$$

En este caso

$$\frac{y}{x} - \frac{b}{a} = \frac{b+\beta}{a+\alpha} - \frac{b}{a} = \frac{\beta a - \alpha b}{a(a+\alpha)} =$$
$$= (\beta a - \alpha b)\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a+\alpha} = (\beta a - \alpha b)\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Ya que $\beta a - \alpha b$ es un infinitésimo, $\frac{1}{a}$ es un número; $\frac{1}{x}$ una magnitud acotada; por eso el producto $(\beta a - \alpha b) \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x}$ es una magnitud infinitamente pequeña (§ 46, 4°).

3°. Consecuencia. *Si la variable x tiene un límite $a \neq 0$, entonces el límite $\frac{1}{x}$ existe y es igual a $\frac{1}{a}$.*

§ 56. El signo de la magnitud variable y de su límite

Teorema 1. *El límite de una variable positiva (si existe), o es positivo o es igual a cero.*

Demostración por reducción al absurdo. Supongamos que el límite de x es el número negativo a. Entre el número negativo a y cero se encuentra una infinidad de números negativos. Tomemos uno de estos, b, cercano a a, y tracemos en el eje Ox (fig. 65), un entorno del punto a de radio igual a la diferencia $b - a$. Cualquier número de este entorno es negativo. Como $\lim x = a$, a partir de cierto momento los valores de x pertenecerán a este entorno, es decir, serán negativos, lo que es absurdo según la condición.

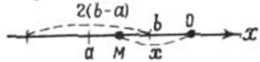


Fig. 65

Ahora bien, *si el límite de x no puede ser negativo*, pero existe, será positivo o igual a cero.

Teorema 2. *El límite de una variable negativa (si existe), o es negativo o es igual a cero.*

La demostración es análoga a la expuesta.

§ 57. Síntomas de existencia de límite de una magnitud variable

Teorema 1. *Si dos magnitudes variables tienen un límite común, la variable comprendida entre estas magnitudes, tiene el mismo límite.*

Demostración. Supongamos que

$$y \leqslant x \leqslant z,$$

y que $\lim y = \lim z = a$.

Tracemos en Ox (fig. 66) un entorno 2ε del punto a. A partir de cierto momento, los valores de y y z pertenecerán a este entorno y los valores de x pertenecerán al segmento NP, cuyos extremos son N (y) y P (z). Por ello, los valores de x pertenecerán también al entorno 2ε del punto a, y por consiguiente, $\lim x = a$.

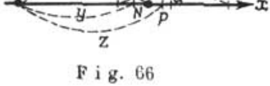


Fig. 66

Teorema 2. *Una magnitud variable tiene límite si es creciente, pero se mantiene menor que cierto número;*

una variable tiene también límite si es decreciente, pero se mantiene mayor que cierto número.

La demostración de este teorema rebasa los límites de nuestro curso.

§ 58. Acerca del cociente de magnitudes infinitamente pequeñas

1°. *El cociente $\frac{\alpha}{x}$, obtenido al dividir una magnitud infinitamente pequeña α por una variable x, que tiene límite a, distinto de cero, es una magnitud infinitamente pequeña,* puesto que el cociente $\frac{\alpha}{x}$ puede ser considerado como el producto

$$\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\alpha,$$

es decir, como el producto de una magnitud acotada $\frac{1}{x}$ (§ 46, 4°) por un infinitésimo α.

2°. *El cociente $\frac{x}{\alpha}$, obtenido al dividir la variable x, que tiene límite a, distinto de cero, por el infinitésimo α, es infinito.*

En efecto, el cociente $\frac{x}{\alpha}$ puede ser considerado como una magnitud recíproca a $\frac{\alpha}{x}$. Según lo anterior, $\frac{\alpha}{x}$ es un infinitésimo, y el recíproco, $\frac{x}{a}$, es una magnitud infinitamente grande.

3°. Si el dividendo α y el divisor β son magnitudes infinitamente pequeñas, no se puede aplicar el teorema acerca del límite del cociente, ya que tendríamos:

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lim\alpha}{\lim\beta}=\frac{0}{0},$$

sin embargo, no se puede dividir cero por cero.

Debe indicarse que el límite del cociente obtenido al dividir magnitudes infinitamente pequeñas puede no existir.

La solución de problemas técnicos muy importantes (como se verá en el capítulo VI) se reduce a encontrar el límite del cociente obtenido al dividir magnitudes infinitamente pequeñas, y el cálculo de este límite es uno de los problemas del análisis.

§ 59. Ejemplos de cálculo de límites

1°. Hallar el límite del quebrado $\frac{2-3x+x^2}{x^2-2x+3}$ si $x \to 2$.

Solución. Aplicando los teoremas del límite del cociente, luego, de la suma algebraica, de la constante, del producto y de la potencia se obtiene:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2+3x-x^2}{x^2-2x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(2+3x-x^2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+3)} =$$

$$= \frac{2+3\lim\limits_{x\to 2} x - (\lim\limits_{x\to 2} x)^2}{(\lim\limits_{x\to 2} x)^2 - 2\lim\limits_{x\to 2} x + 3} = \frac{2+3\cdot 2-2^2}{2^2-2\cdot 2+3} = \frac{0}{3} = 0.$$

Como se ve, el cálculo del límite del quebrado se redujo al cálculo e su valor para $x = 2$.

2°. Hallar el límite del quebrado $\frac{x^2+5x+6}{x^3+x}$ si $x \to 0$.

si $x \to 0$.

Solución. *Indiquemos que el límite del denominador*

$$\lim_{x\to 0}(x^3+x) = 0.$$

Por lo tanto, no podemos aplicar el teorema del límite del cociente. Para establecer qué magnitud variable representa el quebrado dado cuando $x \to 0$, hallemos el límite de su numerador:

$$\lim_{x\to 0}(x^2+5x+6) = 0+5\cdot 0+6 = 6.$$

El quebrado dado, si $x \to 0$, es el cociente de una variable, que tiene límite, igual a 6, por un infinitésimo (§ 49,6°) y por eso (§ 58,2°), el límite del quebrado dado es infinito.

Aclaremos si conserva el quebrado dado un mismo signo estando cerca del punto $x = 0$ (§ 50,7°). En un entorno del punto $x = 0$ de radio igual, por ejemplo, a uno,

$$\text{si } x > 0, \text{ entonces } \frac{x^2+5x+6}{x^3+x} > 0,$$

$$\text{y cuando } x < 0 \ \frac{x^2+5x+6}{x^3+x} < 0.$$

Por esto, si x tiende a cero en forma arbitraria, el quebrado dado no tiene límite finito, y tampoco infinito.

Si, en particular, la aproximación de x a cero es tal, que siempre $x > 0$, el quebrado tiene el límite infinito $+\infty$, y si siempre $x < 0$, el quebrado tiene el límite infinito $-\infty$.

3°. Hallar el límite del quebrado $\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$, si $x \to 2$.

Solución. El límite del denominador es $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-5x+2) = 2\cdot 2^2-5\cdot 2+2=0$, y el del nominador, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2) = 2^2 -$

$-3\cdot 2+2=0$. De este modo, el problema consiste en hallar el límite de la razón de infinitésimos.

Veamos si el quebrado dado es reducible o irreducible. Descomponiendo el trinomio cuadrático en factores $\left(\text{las raíces del numerador son } 2 \text{ y } 1\text{; las del denominador, } 2 \text{ y } \frac{1}{2}\right)$, se ve que *el quebrado es reducible*:

$$\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}=\frac{(x-2)(x-1)}{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{x-1}{2x-1}.$$

Se obtiene:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x+2}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{2x-1}=\frac{2-1}{2\cdot 2-1}=\frac{1}{3}.$$

4°. Hallar el límite del quebrado $\frac{x^2-5}{3x^2+8}$, si $x\to+\infty$

S o l u c i ó n. Si $x\to+\infty$, el numerador y el denominador son magnitudes infinitamente grandes. Por lo tanto, hay que hallar el límite de la razón de magnitudes infinitamente grandes.

Transformando *el quebrado dado, se puede evitar el análisis* de magnitudes infinitamente grandes. En efecto, dividamos el numerador y el denominador por x^2:

$$\frac{x^2-5}{3x+8}=\frac{1-\frac{5}{x^2}}{3+\frac{8}{x^2}}.$$

Si $x\to+\infty$, los quebrados $\frac{5}{x^2}$ y $\frac{8}{x^2}$ son infinitésimos, su límite es igual al cero. Por eso,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5}{3x^2+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x^2}}{3+\frac{8}{x^2}}=\frac{1-0}{3+0}=\frac{1}{3}.$$

5°. Hallar el límite de la suma $\frac{x-3a}{x^2-a^2}+\frac{1}{x-a}$, si $x\to a$.

S o l u c i ó n. Si $x\to a$, $\lim\limits_{x\to a}(x^2-a^2)=a^2-a^2=0$, $\lim\limits_{x\to a}(x-a)=a-a=0$. El teorema del límite del cociente no se puede aplicar.

Sumemos los quebrados:

$$\frac{x-3a}{x^2-a^2}+\frac{1}{x-a}=\frac{x-3a+x+a}{(x-a)(x+a)}=\frac{2(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{2}{x+a}.$$

Si $x\to a$, el teorema del límite del cociente puede aplicarse a $\frac{2}{x+a}$. Por lo tanto se obtiene:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x-3a}{x^2-a^2}+\frac{1}{x-a}\right)\lim_{x\to a}\frac{2}{x+a}=\frac{2}{a+a}=\frac{1}{a}.$$

CAPITULO V

LA FUNCION Y SU CONTINUIDAD

§ 60. El argumento y la función

1°. De las matemáticas elementales es sabido que *una magnitud es función de otra, a la cual se la llama su argumento, si a cada valor (admisible)* * *del argumento le corresponde un valor determinado único.*

Por ejemplo: la longitud del vástago metálico es una función de su temperatura, ya que a cada valor de la temperatura, a la que puede existir el vástago, le corresponde un valor determinado único de su longitud; el camino, recorrido por un cuerpo en movimiento, es una función del tiempo de movimiento del cuerpo, ya que a cada valor del tiempo de movimiento del cuerpo, le corresponde un valor determinado del camino recorrido por éste; el área del círculo es una función de su radio, ya que a cada valor del radio del círculo le corresponde un área determinada del círculo.

Designemos la función por la letra y y su argumento, por x. Ya que nos interesarán problemas que pueden aplicarse a diferentes magnitudes concretas, *supongamos que el sentido concreto de las magnitudes* x y y *nos será indiferente y haremos abstracción de él.* Precisamente así se estudian la función y y el argumento x, cuando en el álgebra se estudian la proporcionalidad directa e inversa $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$, la función lineal $y = kx + b$, la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, la función exponencial $y = a^x$, y otras. Es evidente, que en tal caso, las conclusiones de las soluciones de los problemas pueden luego aplicarse a diferentes magnitudes concretas.

De esta forma, la función y de x (función numérica), está definida por multitud de valores del argumento x y de

* Se llaman "admisibles" a los valores del argumento para los cuales los valores de la función son números reales.

la ley, en razón de la cual a cada valor de x corresponde un determinado y único valor de y. Se dice que *en el conjunto dado de valores de x está determinada la función y de x, si está dada una ley, en razón de la cual a cada número del conjunto dado de valores de x le corresponde un número único, llamado valor de y.*

Tengamos en cuenta, que como valores de la función y del argumento, se sobreentienden números reales, y nunca números complejos o imaginarios.

2°. El conjunto de valores del argumento, en el cual está determinada la función, se llama *campo de definición de la función.* En otras palabras, el campo de definición de la función es el conjunto de los números x para cada uno de los cuales existe uno y sólo un número real, que, es el valor de y.

Fig. 67

En particular, puede ser campo de definición de la función un *segmento*, o *intervalo*, o su *conjunto*.

Se llama segmento al conjunto de los números reales de x que satisfacen las condiciones:

$$a \leqslant x \leqslant b, \text{ donde } a < b.$$

El segmento $a \leqslant x \leqslant b$ se indica abreviadamente $[a, b]$. Geométricamente, el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ representa el conjunto de puntos que pertenecen al segmento ab del eje numérico Ox (fig. 67), incluyendo también los extremos a y b del segmento.

Se llama intervalo al conjunto de todos los números reales de x que satisfacen a las dos desigualdades:

$$a < x < b.$$

El intervalo $a < x < b$ se indica abreviadamente (a, b).

Geométricamente, el intervalo $a < x < b$ representa el conjunto de puntos del eje numérico (fig. 67), que se encuentran comprendidos entre los puntos $x = a$ y $x = b$, pero los puntos $x = a$ y $x = b$ en el intervalo (a, b) no se incluyen.

El conjunto de todos los números reales de x se expresa por medio de la desigualdad:

$$-\infty < x < +\infty.$$

3°. E j e m p l o s. 1. El campo de definición de la función $y = \text{arc sen } x$ es el segmento $-1 \leqslant x \leqslant +1$, ya que sólo para estos valores de x son posibles los valores de y.

2. El conjunto de todos los números enteros n del intervalo $2 < n < +\infty$ sirve de campo de definición de la función $P = 2Rn \text{ sen } \frac{180}{n}$, en la que P es el perímetro de un polígono regular de n vértices inscrito en un círculo.

3. El campo de definición de la función $y = \frac{x}{x^2-1}$ lo forman tres intervalos: $-\infty < x < -1$, $-1 < x < +1$ y $+1 < x < +\infty$. Asimismo, se dice que la función $y = \frac{x}{x^2-1}$ *está determinada en los intervalos:*

$$-\infty < x < -1, \quad -1 < x < +1 \quad y \; +1 < x < +\infty$$

Si $x = \pm 1$, el denominador $x^2 - 1$ se hace cero y la expresión $\frac{x}{x^2-1}$ pierde el sentido, ya que no se puede dividir por cero.

4. La expresión $y = \sqrt{-1-x^2}$ no determina a la función ya que al sustituir x por *cualquier número real, resulta* siempre un número imaginario.

4°. La definición de la función no exige que al variar el valor del argumento x varíe también el valor de y. Es *suficiente que para cada valor admisible de x exista un* valor completamente determinado de y.

E j e m p l o. Supongamos que y es la cantidad indicada por un contador de electricidad y x, el tiempo. La y es fun*ción de x, porque para cada instante de tiempo x, el contador* determina la cantidad gastada de energía eléctrica y. La función y permanece invariable en los intervalos de tiempo en los que no se gasta energía.

Es, *pues, natural imaginarse una función así:*

$$y = c,$$

que no experimenta cambio alguno; todos los valores de esta función son en realidad un mismo número c. La gráfica de esta función es una recta paralela al eje Ox, o que coincide con el eje Ox si $c = 0$.

5°. La definición de la función suele atribuirse a Dirichlet. Sin embargo, unos años antes de que lo hiciera Dirichlet, el genial matemático ruso N. Lobachevski definió la función en el artículo *Acerca de la desaparición de las líneas trigonométricas*, publicado en 1834.

§ 61. Notación general de la función

1°. El hecho de que el valor de y sea una función determinada de x se expresa por la igualdad:

$$y = f(x)$$

y se lee: "y es igual a f de x" o "y es función f de x". La letra f simboliza aquí la dependencia de y respecto a x, es decir, la ley en virtud de la cual a cada número del conjunto dado de valores de x le corresponde un número real que es el valor de y.

De acuerdo con la notación $y = f(x)$, el hecho de que la longitud de la varilla l sea función de la temperatura t se expresa:

$$l = f(t);$$

el hecho de que el área del círculo s es la función de su radio r, se expresa:

$$s = \varphi(r).$$

En el segundo caso, para expresar la dependencia de s respecto a r se ha empleado el símbolo φ en lugar del símbolo f, porque la ley de la dependencia de s respecto a r es distinta que la ley de la dependencia de l respecto a t:

$$f(t) = l_0(1 + \alpha t), \text{ y } \varphi(r) = \pi r^2.$$

Por lo tanto, los símbolos $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x)$ expresan distintas funciones de un mismo argumento x.

Los símbolos $f(x)$, $f(t)$, $f(z)$, expresan una misma función de diferentes argumentos.

E j e m p l o s:

$$1)\ f(x) = \frac{c}{x}; \quad f(t) = \frac{c}{t},$$

$$2)\ f(x) = \operatorname{sen} x; \ f(z) = \operatorname{sen} z.$$

2°. El valor numérico de la función $f(x)$ respecto al valor dado del argumento x se indica de la siguiente manera: en la notación $f(x)$ la x se sustituye por su valor numérico.

Por ejemplo, las notaciones $f(2)$ y $f(a)$ significan valores de la función $f(x)$ siendo $x = 2$ y $x = a$.

Si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = 2^2 = 4$, $f(a) = a^2$.

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

§ 62. Acerca de la representación tabular, gráfica y analítica de la función

1°. Al realizar experimentos, y, en general, al hacer observaciones, se hace uso de la tabulación de la función, o sea la representación en forma de tabla con sus correspondientes valores funcionales.

valor de x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
valor de y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

donde $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$.

Así se tabulizan las funciones numéricas, de valores que frecuentemente son utilizados en cómputos y cálculos. En los manuales técnicos se puede encontrar frecuentemente tablas de logaritmos, magnitudes trigonométricas naturales, de valores x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ $\frac{1}{x}$, $\frac{\pi x^2}{4}$ y otros. Estas tablas se llaman tablas *matemáticas*, a diferencia de las tablas dadas por los resultados de experiencias que se llaman tablas *empíricas*.

2°. Se sabe, que *la gráfica de la función implícita* $y = f(x)$ *se llama lugar geométrico de los puntos* $(x, f(x))$.

Cualquier línea trazada en el plano en el sistema cartesiano de coordenadas xOy, podrá ser considerada como gráfica de la función $y = f(x)$ si en una recta paralela al eje Oy, se encuentra no más que un punto de la línea.

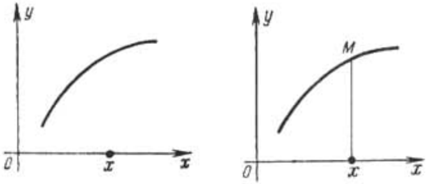
En la ciencia y en la técnica frecuentemente las funciones se determinan por gráficas, que trazan los aparatos registradores. La determinación del valor $f(x)$, que corresponde al valor de x se efectúa así:

1) en el eje Ox se señala el punto x (fig. 68, *a*);

2) por el punto x se traza una recta paralela a Oy, hasta el encuentro con la línea dada en el punto M (fig. 68, *b*);

3) desde el punto M se traza una recta paralela a Ox hasta el encuentro con el eje Oy en el punto $f(x)$ (fig. 68, *c*).

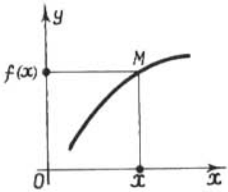
Al hacer estas tres operaciones se obtiene la *transformación* del punto x en el punto $f(x)$. Al número x se le pone



F i g. 68 a,б

en correspondencia el número $f(x)$, que es el valor de la función, y se determina éste como la ordenada del punto $f(x)$.

3°. Si la dependencia funcional está expresada por una fórmula, se dice que la función está definida analíticamente.



F i g. 68 *c*

Por ejemplo, en la fórmula del área de un círculo

$$s = \pi r^2,$$

el área s es función del radio r, definida analíticamente.

Para definir analíticamente una misma función, a veces es necesario emplear no una, sino varias fórmulas diferentes. Por ejemplo, la cantidad señalada por un contador de electricidad al empezar el día era 20 kW, y durante las 24 horas se ha gastado la siguiente energía: desde las 5 hasta las 8 de la mañana, 60 W para cada una de las 5 bombillas, y desde las 17 hasta las 24, otros 60 W para cada una de las 5 bombillas, y 100 W para un receptor de radio. Indicando la cantidad señalada por el contador por medio de y, y el tiempo por medio de x, se obtiene la ecuación de la dependencia de y respecto a x:

$$y = \begin{cases} 20, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 5; \\ 20 + 0{,}3(x-5), & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 8; \\ 20{,}9, & \text{si } 8 \leqslant x \leqslant 17; \\ 20{,}9 + 0{,}4(x-17), & \text{si } 17 \leqslant x \leqslant 24. \end{cases}$$

4°. La función se llama *explícita* si la fórmula que define la función señala las operaciones matemáticas que se efectúan con el argumento para determinar la función y; en caso contrario, se llama función *implícita*.

Ejemplos: 1) $y = ax^2$, $y = f(x)$ son funciones explícitas.

2) $y^2 - x = 0$, $F(x, y) = 0$ son funciones implícitas.

5°. Para la función explícita, representada en forma de ecuación, $y = f(x)$ generalmente se construye su gráfica. La gráfica da una representación ilustrativa acerca de las propiedades de la función. Lo fundamental para la construcción de la gráfica tiene que ser el estudio del proceso de variación de la función. Los métodos de análisis *de función serán expuestos más abajo* (cap. t. VIII). Ahora para la construcción de la gráfica de la función dada, vamos a operar con aquellas nociones que tenemos del curso escolar de matemáticas y de los capítulos anteriores de nuestro curso.

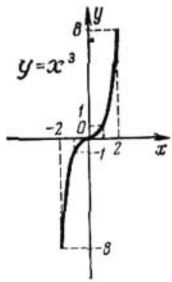


Fig. 69

Ejemplo. 1. Construir la gráfica de la función $y = x^3$

Solución. El campo de existencia de la función es $-\infty < x < +\infty$, por otra parte para los valores positivos de x, la función x^3 será positiva, y para valores negativos será negativa. Cuando crece x, la función x^3 es creciente, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Daremos unos valores a x y calcularemos por la fórmula $y = x^3$ los valores correspondientes de y. Tengamos por ejemplo la siguiente tabla de valores:

x	$-\infty\ldots$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$\ldots\ +\infty$
y	$-\infty\ldots$	-8	$-3\frac{3}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$3\frac{3}{8}$	8	$\ldots\ +\infty$

Construyendo los puntos con ayuda de esta tabla, trazaremos por ellos una línea contínua y densa, que puede descender y ascender sin límite (fig. 69). Se obtiene (aproximadamente) la gráfica de la función dada.

Ejemplo 2. Construir la gráfica de la función $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$.

Solución. Igualando el denominador $x^2+4=0$, hallamos:

$x=\pm\sqrt{-4}$, lo que significa que el campo de definición de la función es $-\infty < x < +\infty$.

Ya que x aparece en la fórmula solamente al cuadrado y $x^2 \geqslant 0$, entonces $\frac{x^2}{x^2+4}=y\geqslant 0$, y como $x^2 < x^2+4$, $\frac{x^2}{x^2+4}=y<1$. Lo que significa que $0 \leqslant y < 1$.

Ya que $(-x)^2=(+x)^2$, entonces a los valores $-x$ y $+x$ corresponde el mismo valor de y, por consiguiente, y la gráfica es

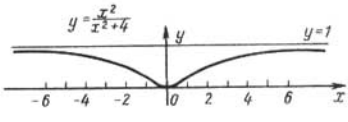


Fig. 70

una curva simétrica con respecto al eje Oy. Tenemos $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+4}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}}=1$. Esto significa que la recta $y=1$ es asíntota de las ramas izquierda y derecha de la curva.

Dando valores a x, hallaremos por la fórmula $y=\frac{x^2}{x^2+4}$ la abla de valores y. Por ejemplo se obtiene

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	...	$\to \pm\infty$
y	0	0,2	0,5	$\sim 0{,}69$	0,8	$\sim 0{,}86$	0,9	...	$\to 1$

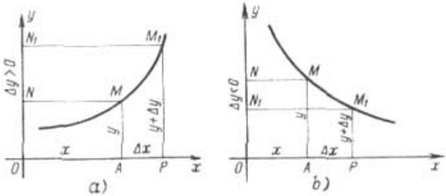
Construiremos de acuerdo con esta tabla los puntos y trazaremos a trávés de ellos una curva continua, que será (aproximadamente) la gráfica de la función dada (fig. 70).

§ 63. El incremento del argumento y de la función

1°. Tomemos arbitrariamente en el campo de definición de la función $y=f(x)$ dos valores del argumento. Al primero lo llamamos inicial, y al segundo, incrementado.

El valor inicial de x se considera constante durante todo el razonamiento, y el punto A (fig. 71), que le corresponde en el eje Ox, se considera fijo. El valor incrementado del argumento se designa por $x + \Delta x$; en la fig. 71 le corresponde el punto P.

Δx expresa la magnitud en la que varía el argumento al pasar del primer valor al segundo, y se le llama incremento del argumento.



F i g. 71

Δx es igual a la diferencia entre el segundo y el primer valor del argumento.

E j e m p l o s. 1. Se han tomado dos valores de x:

$$3{,}0 \text{ y } 3{,}1;\ \Delta x = 3{,}1 - 3{,}0 = 0{,}1.$$

2. Se han tomado dos valores de x:

$$5 \text{ y } 4{,}8;\ \Delta x = 4{,}8 - 5 = -0{,}2.$$

3. Se han tomado dos valores de x:

$$-1 \text{ y } -0{,}98;\ \Delta x = -0{,}98 - (-1) = 0{,}02.$$

2°. A los valores de x y $x + \Delta x$ del argumento corresponden determinados valores de la función: el inicial y y el incrementado $y + \Delta y$. *Δy es la magnitud en la que varía el valor de la función y al variar el argumento en la magnitud Δx, y se llama incremento de la función.*

Δy es igual a la diferencia entre el segundo y el primer valor de la función.

Hallemos los puntos $M(x, y)$ y $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 71). $\Delta y = NN_1 = ON_1 - ON$. *Geométricamente, el incremento de la función Δy es la diferencia de las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función que corresponden a los valores incrementado e inicial del argumento.*

El incremento de la función Δy puede ser positivo o negativo. Cuando Δy es positivo, el segmento $NN_1 = \Delta y$ está situado en el eje de ordenadas (fig. 71,*a*) más arriba del punto fijo N, cuando Δy es negativo, está situado más abajo de ese punto (fig. 71.*b*).

3°. Ejemplos. 1. ¿En cuánto variará el área y de un cuadrado, si la longitud de su lado x se incrementa en Δx?

Solución. El área del cuadrado es:

$$y=x^2.$$

Si la longitud del lado del cuadrado es $x+\Delta x$, su área será $y+\Delta y$, e

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2.$$

Restando el valor de la primera área del de la segunda, se tiene:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2.$$

Abriendo los paréntesis vemos que el área variará en:

$$\Delta y=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2.$$

Si, por ejemplo, el lado del cuadrado aumenta de 3 a 3,1 metros, el área del cuadrado aumentará en:

$$\Delta y=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2=2\cdot 3\cdot 0{,}1+0{,}1^2=0{,}61\ (m^2),$$

por que $x=3m$ y $\Delta x=0{,}1\ m$

2. Hallar el incremento Δy de la función $y=\frac{1}{x}$ que corresponde al incremento arbitrario Δx del argumento x.

Solución. Para el valor del argumento igual al número x, la función tiene el valor

$$y=\frac{1}{x},$$

y para el valor del argumento igual al número $x+\Delta x$, la función tiene el valor

$$y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}.$$

Restando la primera igualdad de la segunda, hallamos el incremento de la función:

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Al aumentar el argumento x, por ejemplo, de 4 a 4,5, la función recibe un incremento:

$$\Delta y=-\frac{0{,}5}{4\cdot 4{,}5}=-\frac{1}{36}$$

(porque $x=4$, $x+\Delta x=4{,}5$ y $\Delta x=0{,}5$), es decir, disminuirá en $\frac{1}{36}$.

4°. Hállese la expresión del incremento de la función $f(x)$, que está condicionado al cambio del valor del argumento x en la magnitud Δx.

El valor inicial de la función es

$$y = f(x),$$

y el valor incrementado de ésta

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Al restar, encontramos que el incremento de la función

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{I}$$

§ 64. Resumen de propiedades y de las gráficas de las funciones elementales básicas

1°. Las funciones estudiadas en la álgebra y trigonometría son:

1) $y = x^a$, donde a es un número dado;

2) exponencial, $y = a^x$, en la que $a > 0$, $a \neq 1$, $-\infty < x < +\infty$;

3) logarítmica, $y = \log_a x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$; $0 < x < +\infty$;

4) trigonométricas; sen x, cos x, tg x, cotg x;

5) trigonométricas inversas: arc sen x, arc cos x, arc tg x, arc cotg x, ... etc. y que se denominan *funciones elementales básicas*.

La función $y = x^a$, donde a es un número irracional, y otras enumeradas anteriormente: exponencial, logarítmica, trigonométricas y trigonométricas inversas se llaman *funciones trascedentales básicas* *.

Se llaman también funciones elementales todas las funciones formadas de las funciones básicas por medio de un cierto número de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y del empleo de los signos de las funciones elementales básicas.

Por ejemplo,

$$f(x) = \sqrt{\frac{\arccos x - \sqrt{\operatorname{sen} x}}{\lg(1 - 3^{\operatorname{tg} x})}}$$

es una función elemental.

* Estas funciones se llaman trascendentales porque no pueden ser expresadas por ecuaciones algebraicas.

Estudiaremos las propiedades y las gráficas de las funciones elementales más sencillas y básicas.

2°. Si la función y de x posee tal propiedad, que *la relación* $\frac{y}{x}$ *es constante e igual a* k,

$$\frac{y}{x}=k,$$

entonces la dependencia entre y *y* x *se llama dependencia directamente proporcional* y se expresa por la fórmula

$$y=kx,$$

el número k *se llama coeficiente de la proporcionalidad directa.*

La gráfica de la proporcionalidad directa $y=kx$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

3°. Si la función y de x posee la propiedad de que *el producto* xy *es una constante igual a* k, $xy=k$,

entonces esta dependencia entre y *y* x *se llama dependencia inversamente proporcional y el número* k, *coeficiente de la proporcionalidad inversa.*

La gráfica de la proporcionalidad inversa es una hipérbola equilátera $xy=k$, situada en el primer y tercer cuadrante para $k>0$, y en segundo y cuarto cuadrantes para $k<0$.

Se puede notar también que la proporcionalidad inversa entre y y x se caracteriza en que *al variar una de ellas en cierto valor, varía en un valor inverso la otra*, o sea, si, por ejemplo,

$$x_2=mx_1, \text{ entonces } y_2=\frac{y_1}{m}.$$

Y en efecto, solamente en tal caso el producto

$$x_2y_2=mx_1\cdot\frac{y_1}{m}=x_1y_1=k.$$

4°. *La función expresada por medio de la ecuación:*

$$y=kx+b,$$

se llama lineal y su gráfica es una línea recta.

Hallemos el incremento Δy de la función lineal condicionada por el incremento Δx del argumento:

$$\Delta y=k(x+\Delta x)+b-(kx+b), \text{ o}$$

$$\boxed{\Delta y=k\cdot\Delta x} \qquad (1)$$

Esta igualdad expresa la propiedad fundamental de la función lineal: *el incremento de la función lineal es directamente proporcional al incremento de su argumento* y no depende del valor inicial del argumento.

En particular, a iguales incrementos Δx, para diferentes valores iniciales de x, le corresponden iguales incrementos Δy (fig. 72)

Ninguna otra función posee esta propiedad.

Demostremos que *cualquier función $y = f(x)$, cuyo incremento Δy es directamente proporcional al incremento Δx de su argumento, es una función lineal.*

De (1) se deduce que:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = k,} \qquad (2)$$

es decir, *la razón del incremento de la función lineal $y=kx+b$ en cualquier punto x respecto al incremento del argumento x tiene un mismo valor, igual a k.*

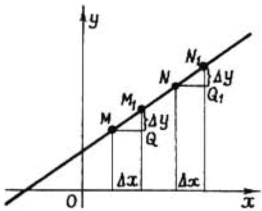


Fig. 72

Si para todos los valores de x, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiene un mismo valor, la variación de y se llama *uniforme* y la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se llama *velocidad* de variación de y.

La variación de la función lineal es uniforme, y la velocidad de esta variación es numéricamente igual al coeficiente angular k de la gráfica de la función dada.

5°. *La función y de x, expresada por la relación de los binomios $ax+b$ y $cx+d$, donde $c \neq 0$,*

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

se llama función linealmente racional.

Si $c = 0$, $y = \frac{ax+b}{0 \cdot x+d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ es función lineal.

Si $a = 0$ y $d = 0$, $y = \frac{b}{cx}$ ó $xy = \frac{b}{c}$, es decir, si $a = 0$ y $d = 0$, la función linealmente racional expresa la proporcionalidad inversa entre y y x. La función $y = \frac{k}{x}$ es una forma particular de la función linealmente racional.

La gráfica de la función linealmente racional es una hipérbola equilátera con centro en $O'\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, y con asíntotas paralelas a los ejes de coordenadas del sistema xOy (§ 35, 5°) (fig. 73).

6°. *La función de potencia $y = x^a$ es la potencia del argumento de x, el exponente de la cual a es número dado.*

Son posibles los siguientes casos: 1) cuando a es un número racional, 2) cuando a es un número irracional.

En el primer caso, la función de potencia es algebraica.

Notemos, que la función $y = f(x)$ se llama *algebraica*, si sus valores surgen como resultado de operaciones algebraicas efectuadas con los valores de x y de números dados, es decir, de adición, sustracción, multiplicación, división, elevación a potencia entera y positiva, y extración de raíces, con índice entero y positivo.

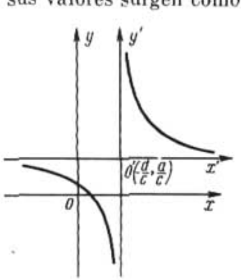


Fig. 73

Si el exponente a es un número entero y positivo ($y = x^2$, $y = x^3$ etc.), entonces $y = x^a$ es función entera y definida para todos los valores de x.

Si el exponente a es un número entero y negativo, entonces $y = x^a$, es función racional $\left(y = x^{-1} = \frac{1}{x},\ y = x^{-2} = \frac{1}{x^2},\ y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}, \ldots, \text{etc.}\right)$ y definida para todos los números positivos y negativos, y para $x = 0$ es indefinida.

Si el exponente a es un quebrado irreducible, $a = \frac{p}{q}$, donde p y q son números naturales, y además $q > 1$, entonces $y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ es una función irracional. Aquí es posible:

1) que q sea igual a un número impar; 2) que q sea igual a un número par. Para un valor impar de q la funcion $y = x^{\frac{p}{q}}$ está definida para todos los valores de x, pero para un valor par de q la función $y = x^{\frac{p}{q}}$ está definida solamente para

valores positivos de x, en este caso se entiende que la raíz $\sqrt[q]{x^p}$ es aritmética.

En la figura 74 se representan las gráficas de la función $y = x^a$ para $a = 3; 4; -2; -3; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{1}{3}$.

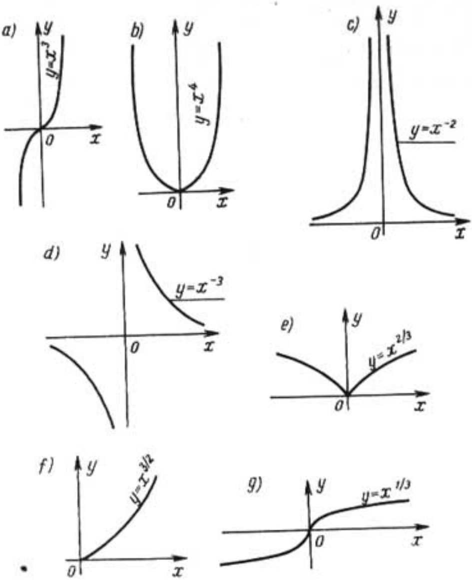


Fig. 74

En el segundo caso, cuando a es un número irracional, lo designaremos con la letra α. La función de potencia $y = x^\alpha$ (por ejemplo, $y = x^\pi$, $y = x^{\sqrt{2}}$) es función trascendental; esta función se estudia solamente en caso de valores positivos de x, y los de la función son números positivos, $x^\alpha > 0$.

7°. Funciones monótonas.

Definiciones. 1. *La función $f(x)$ se llama creciente si para dos valores diferentes cualesquiera del argumento x,* *al valor mayor del argumento x le corresponde un valor mayor de la función, es decir,*

$$para\ x_1 < x_2,\ se\ tiene\ f(x_1) < f(x_2).$$

2. *La función $f(x)$ se llama decreciente si para dos valores cualesquiera diferentes del argumento x, al valor mayor del argumento corresponde un valor menor de la función, es decir,*

$$para\ x_1 < x_2,\ se\ tiene\ f(x_1) > f(x_2).$$

3. *La función $f(x)$ se llama no decreciente si para cualesquiera x_1 y x_2, siendo $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.*

Análogamente, *la función $f(x)$ se llama no creciente si siendo $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.*

De esta suerte, una función no decreciente se distingue de una creciente en que para la función no decreciente es posible la igualdad de los valores de la función en dos valores diferentes del argumento, mientras que para la función creciente no es posible.

4. *Las funciones no decrecientes y no crecientes se llaman monótonas, y las funciones crecientes y decrecientes se llaman estrictamente monótonas.*

8°. Función inversa. Si la función $y = f(x)$ está definida en cierto intervalo, significa que a cada valor x de este intervalo, le corresponde un único valor de y igual a $f(x)$.

Supongamos, que a cada valor de y del conjunto de valores de la función $y = f(x)$, le corresponda un único valor de x, el mismo valor de x para el cual el valor de la función $f(x)$ es igual al valor dado y. Geométricamente significa que la gráfica de la función $y = f(x)$ corta a la recta paralela al eje de abscisas sólo en un punto.

La ecuación $y = f(x)$ determina en este caso dos funciones: 1) la función explícita $y = f(x)$ y 2) la función implícita x de y, que designaremos con el símbolo $\overline{f}(y)$. La segunda función $x = \overline{f}(y)$ se llama *función inversa* de la función $y = f(x)$.

Es evidente, que la función inversa $\overline{f}(y)$ existe, si para dos diferentes valores del argumento de la función $y = f(x)$ corresponden dos diferentes valores de la función, o sea para cualquier valor x_1 y x_2 del intervalo dado cuando $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$.

De esto se deduce que *cada función rigurosamente monótona tiene función inversa.*

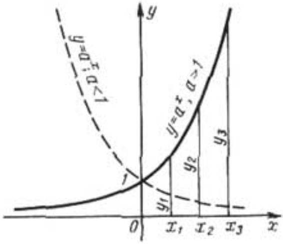
E j e m p l o s. 1) La función $y = x^3$ es creciente en el intervalo $-\infty < x < +\infty$ y tiene función inversa $x = \sqrt[3]{y}$.

2) La función $y = x^2$ es creciente en el intervalo $0 \leq x < +\infty$ y tiene en este intervalo la función inversa $x = -\sqrt{y}$.

G r á f i c a d e l a f u n c i ó n i n v e r s a. La abscisa del punto de la gráfica de toda función, es el valor del argumento, y la ordenada, el valor de la función. Para emplear dicha propiedad en la gráfica de la función inversa, debemos cambiar los lugares de y y x en la ecuación de la función inversa, es decir, obtener la función inversa en la forma $y = \overline{f}(x)$.

Como gráfica de la función inversa siempre se entiende la gráfica de la función $y = \overline{f}(x)$.

En la fig. 74, *a*, *g* se muestran la gráfica de la función $y = x^3$ y gráfica de su función inversa $y = \sqrt[3]{x}$ expuestas en el ejemplo 1.



F i g. 75

9°. *La función exponencial* $y = a^x$, *es la potencia de número positivo a diferente de la unidad, el exponente de la cual x es argumento, es decir, la magnitud variable.*

Se conoce del álgebra que:

1) $y = a^x$ es definida para el conjunto de valores reales $(-\infty < x < +\infty)$, y positiva, $y = a^x > 0$;

2) para $x = 0$, $a^x = 1$;

3) $y = a^x$ es la función rigurosamente monótona: si $a > 1$, es creciente, precisamente, cuando x aumenta en el intervalo $-\infty < x < +\infty$, la función crece en el intervalo $0 < a^x < +\infty$;

si $a < 1$ es la decreciente, precisamente, en caso del aumento de x en el intervalo $-\infty < x < +\infty$, la función decreciente en el intervalo $+\infty > a^x > 0$.

Estas propiedades pueden observarse en la gráfica (fig. 75).

En el proceso de la construcción de la gráfica de la función exponencial conviene utilizar las siguientes propiedades de ésta; hallados los valores de y e y_2 para valores x_1 y x_2. Entonces el valor de la función exponencial para el valor x_3. igual a la suma de $x_1 + x_2$, es igual al producto $y_1 \cdot y_2$.

En efecto, si

$$y_1 = a^{x_1}, \quad y_2 = a^{x_2},$$

entonces

$$y_3 = y_1 \cdot y_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

Así, a propósito, se explica el progreso impetuoso de la curva $y = a^x$ cuando crece el argumento x $(a > 1)$.

10°. L a f u n c i ó n l o g a r í t m i c a. Como la función exponencial $y = a^x$, en rigor es monótona, posee función inversal a logarítmica: $x = \log_a y$. Nosotros la estudiaremos dándole designaciones corrientes: y es función; x el argumento; o sea $y = \log_a x$.

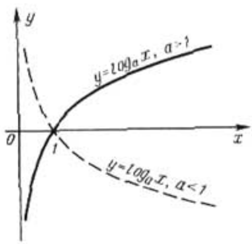


Fig. 76

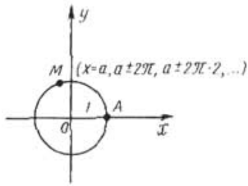


Fig. 77

La base a es el número positivo y diferente de la unidad.

Se conoce del álgebra, que:

1) la función $\log_a x$ es definida para el conjunto de números positivos $0 < x < +\infty$;

2) si $x = 1$, $\log_a x = 0$;

3) la función logarítmica es rigurosamente monótona:

para $a > 1$ es la creciente, cuando crece x en el intervalo $0 < x < +\infty$ la función crece en el intervalo $-\infty < < \log_a x < +\infty$,

además cuando $x < 1$ es negativa, y cuando $x > 1$, positiva;

si a <1 es la decreciente, cuando x crece en el intervalo $0 < x < +\infty$, decreciente en el intervalo $+\infty > \log_a x > > -\infty$, al mismo tiempo si $x < 1$, es positiva, y para $x > 1$, negativa.

Estas propiedades se ven en la gráfica de la función (fig. 76).

11°. **Correspondencia entre los valores y los puntos de una circunferencia.** Las funciones trigonométricas se estudian en la escuela media como funciones del ángulo (o del arco). Pero ya en el curso escolar de trigonometría se señala que pueden ser consideradas como funciones de argumento numérico. En el análisis matemático como función trigonométrica se entiende siempre función de argumento numérico.

Si en el plano xOy (fig. 77) tenemos una circunferencia O de radio igual a la unidad del sistema xOy, $R = 1$, la llamaremos la *circunferencia de radio 1*.

Considerando el punto arbitrario M de la circunferencia O como final de los arcos, trazados por la rotación del punto desde el origen A, en sentido contrario al de las agujas del reloj o simplemente en el sentido del movimiento, *con el punto arbitrario M de la circunferencia O de radio 1 se ponen en correspondencia los números*

$$X = a + 2\pi k,$$

donde el número $O \leqslant a < 2\pi$ es una medida en radianes* de un arco menor de los no negativos arcos AM, con origen en el punto A y final en M, si $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

Inversamente, a la serie de números reales

$$X = a + 2\pi k,$$

para $0 \leqslant a < 2\pi$ y $k = 0; \pm 1, \pm 2; \pm 3; \ldots$ se le pone en correspondencia, en la circunferencia de radio 1, el punto M que es el final del menor de los arcos no negativos $AM = X$ *rad*, con origen en el punto A y final en M.

La circunferencia de radio 1, considerada en el sistema xOy, se llama *circunferencia numérica*, y el número X, puesto en correspondencia con el punto M de la circunferencia, se llama *coordenada circular del punto M*.

A lo expuesto se le puede dar la siguiente ilustración.

Sea dada una circunferencia O de radio 1 y el eje numérico AX, tangente a la misma en el origen A de los arcos, con origen en el punto A, unidad de escala $1 = R$ y sentido positivo de abajo hacia arriba (fig. 78).

Supongamos que la circunferencia es rígida (no puede ser deformada), y el eje AX es un hilo flexible y no extensible sin espesor.

---

* La medida en radianes del arco se llama su longitud si el radio es igual a la unidad.

Superpongamos mentalmente sobre la circunferencia el semieje positivo AX, girándolo alrededor del punto A en el plano xOy en contra de las agujas del reloj. Al finalizar la primera vuelta completa de AX habrá una coincidencia total del semisegmento $0 \leqslant x < 2\pi$ del eje con la circunferencia *.

La "coincidencia total" debe ser entendida así: cada punto X del semisegmento $0 \leqslant x < 2\pi$ del eje coincide con un punto de la circunferencia, precisamente con aquel punto M que es el extremo del arco positivo AM, que tiene, con $R = 1$, la longitud X.

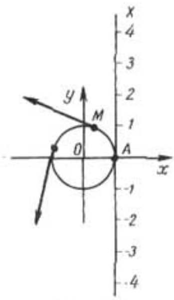


Fig. 78

Y viceversa, el punto M de la circunferencia, que es el extremo del arco positivo AM que tiene la longitud X ($0 \leqslant X < 2\pi$), para $R = 1$, coincide con un punto del semisegmento $0 \leqslant X < 2\pi$ del eje AX, precisamente, con aquel punto del eje, cuya coordenada es el número X.

En la segunda vuelta completa tiene lugar una coincidencia total con la circunferencia del semisegmento $2\pi \leqslant X \leqslant 4\pi$ del eje; en la tercera, del semisegmento $4\pi \leqslant X \leqslant 6\pi$, etc. De este modo, cualquier punto del semieje numérico positivo AX, que es la imagen geométrica del número X, llega a ser el punto M de la circunferencia, y por eso el punto M de la circunferencia se toma como la imagen geométrica del número X. Pero si al punto del eje numérico le corresponde un único número, entonces al punto de la circunferencia le corresponde una serie infinita de números. Hallemos la fórmula de esta correspondencia.

Sea $0 \leqslant a < 2\pi$	Representemos cualquier número X
del semisegmento $0 \leqslant X < 2\pi$	*como* $X = a + 2\pi \cdot 0$,
del semisegmento $2\pi \leqslant X < 4\pi$	como $X = a + 2\pi \cdot 1$,
del semisegmento $4\pi \leqslant X < 6\pi$	como $X = a + 2\pi \cdot 2$, etc.

Cualquier número no negativo X del eje AX

$$X = a + 2\pi \cdot k, \qquad (*)$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Supongamos que giramos mentalmente alrededor del punto A el semieje negativo del eje numérico AX (fig. 79) también en el plano xOy, pero a favor de las agujas del reloj. Entonces hay una completa coincidencia de la circunferencia con los semiintervalos del eje $-2\pi < X \leqslant 0$; $-4\pi < X \leqslant -2\pi$; $-6\pi < X \leqslant -4\pi$, etc.

Supongamos, como antes, que $0 \leqslant a < 2\pi$. Entonces cualquier número del semisegmento $-2\pi < X \leqslant 0$ puede ser representado así (fig. 79):

$$X = -(2\pi - a) = a - 2\pi = a + 2\pi(-1),$$

* La longitud de la circunferencia con $R = 1$ es igual a 2π.

y de los semiintervalos $-4\pi < X \leqslant 2\pi$; $6\pi < X \leqslant 4\pi$; ..., respectivamente:

$$X = a - 2\pi\,(\cdot 2);\ a - 2\pi\,(\cdot 3);\ \ldots$$

o como:

$$X = a + 2\pi\,(-2);\ a + 2\pi\,(-3);\ \ldots$$

En general, cualquier *número no positivo* X *del eje* AX

$$X = a + 2\pi\,(-k),\ \text{donde}\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Uniendo esta fórmula con la fórmula (*) obtenemos que *cualquier número real*

$$X = a + 2\pi k,$$

donde

$$0 < a \leqslant 2\pi,\ k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots$$

y a cualquier número X le corresponde en la circunferencia numérica el punto $M\,(X)$, que es el final del menor de los arcos no negativos con origen en el punto A y final en el punto M.

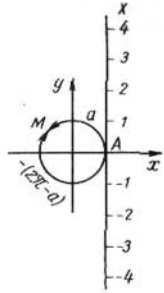


Fig. 79

12°. **Las funciones trigonométricas como funciones del argumento numérico. Definiciones:**

1. *Se llama seno de un número X a la ordenada del punto que le corresponde en la circunferencia numérica.*

2. *Se llama coseno de un número X a la abscisa del punto que le corresponde en la circunferencia numérica.*

Por definición, si al punto X le corresponde en la circunferencia numérica el punto $M\,(x, y)$ (fig. 80), entonces

$$\operatorname{sen} X = y,\ \cos X = x.$$

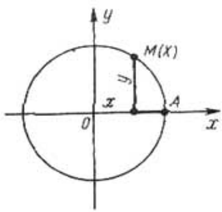


Fig. 80

3. *Se llama tangente de un número X a la relación* $\frac{\operatorname{sen} X}{\cos X}$ o sea, $\operatorname{tg} X$ es la relación de la ordenada a la abscisa del punto de la circunferencia numérica correspondiente a X.

4. *Se llama cotangente de un número X a la relación* $\frac{\cos X}{\operatorname{sen} X}$, o sea, $\operatorname{ctg} X$ es la relación de la abscisa a la ordenada del punto de la circunferencia numérica correspondiente a X.

Las funciones sen X y cos X expresan las leyes de variación de las coordenadas de un punto en su rotación circular, y tg X y ctg X, las leyes de variación de sus relaciones. Por eso, $\operatorname{sen} X$, $\cos X$, $\operatorname{tg} X$, y $\operatorname{ctg} X$ también se llaman *funciones circulares.*

Entre $\operatorname{sen} X$, $\cos X$, $\operatorname{tg} X$ y $\operatorname{ctg} X$ *existen tres relaciones independientes*:

$$1)\ \operatorname{sen}^2 X+\cos^2 X=1,\quad 2)\ \operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},\quad 3)\ \operatorname{tg} X\cdot\operatorname{ctg} X=1.$$

Campos de definición y de valores de las funciones circulares. Las funciones sen X y cos X están definidas en el conjunto de todos los números reales, o sea,

$$-\infty<X<+\infty.$$

Ya que las coordenadas x, y de los puntos de la circunferencia numérica son números de los segmentos

$$-1\leqslant x\leqslant 1,\quad -1\leqslant y\leqslant 1,$$

entonces

$$-1\leqslant\operatorname{sen} X\leqslant 1,\quad -1\leqslant\cos X\leqslant 1.$$

La función $\operatorname{tg} X$ no está definida para aquellos X, para los cuales $\cos X=0$, es decir, para $X=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k$, donde $k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$, y está definida en los intervalos entre estos puntos, o sea, en los siguientes intervalos

$$\ldots -\frac{3}{2}\pi<X<-\frac{\pi}{2};\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant X<\frac{\pi}{2};$$
$$\frac{\pi}{2}<X<\frac{3}{2}\pi;\ \ldots$$

La función ctg X no está definida para todos aquellos X, para los cuales $\operatorname{sen} X=0$, es decir, para $X=k\pi$, donde $k=0;\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, y está definida en los intervalos comprendidos entre estos puntos, o sea, en los intervalos

$$\ldots -2\pi<X<-\pi;\ -\pi<X<0;\ 0<\pi;\ \pi<X<2\pi;\ldots$$

13°. Funciones periódicas. Definición. *La función $f(x)$ se llama periódica, si existe un número positivo l, tal que para cualquier valor del argumento x los valores de la función en los puntos x, $x+l$ y $x-l$ son iguales, o sea,*

$$\boxed{f(x)=f(x+l)=f(x-l).}\qquad(*)$$

De la definición se deduce que si $f(x)=f(x+l)=$ $=f(x-l)$,
entonces

$$f(x)=f(x+kl),$$

donde

$$k=\pm 1 \pm 2; \ldots$$

Por eso es importante conocer el menor número positivo l, para el cual se cumplen las igualdades (*) para todo valor de x. Tal número positivo se llama *período de la función* $f(x)$.

14°. Teorema. *Las funciones circulares son funciones periódicas.*

En efecto, sea X un número fijo cualquiera, para el cual la función circular considerada está definida. Entonces a los números X, $X+2\pi$, $X-2\pi$ les corresponde en la circunferencia numérica un mismo punto, cuyas coordenadas cartesianas son x, y. Por esto

$$\operatorname{sen} X=\operatorname{sen}(X+2\pi)=\operatorname{sen}(X-2\pi)=y,$$
$$\cos X=\cos(X+2\pi)=\cos(X-2\pi)=x,$$
$$\operatorname{tg} X=\operatorname{tg}(X+2\pi)=\operatorname{tg}(X-2\pi)=\frac{y}{x},$$
$$\operatorname{ctg} X=\operatorname{ctg}(X+2\pi)=\operatorname{ctg}(X-2\pi)=\frac{x}{y}.$$

Para sen X y cos X el número 2π es el período, ya que no existe ningún número positivo menor que cumpla la condición de periodicidad (*), Pero para tg X y ctg X existe un número menor, que es π, el cual es período de tg$X$ y ctg X.

Efectivamente, tracemos en la circunferencia numérica un diámetro cualquiera (fig. 81). Si la coordenada numérica de uno de sus extremos es X, entonces la del segundo es $X+\pi$ o $X-\pi$, y si las coordenadas cartesianas de uno de los extremos del diámetro son (x, y), las del otro serán $(-x, -y)$. Por eso tenemos que:

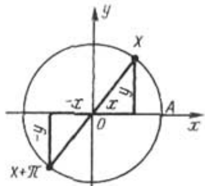


Fig. 81

$$\operatorname{tg} X=\frac{y}{x},\ \operatorname{tg}(X+\pi)=\operatorname{tg}(X-\pi)=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x},$$
$$\operatorname{ctg} X=\frac{x}{y},\ \operatorname{ctg}(X+\pi)=\operatorname{ctg}(X-\pi)=\frac{-x}{-y}=\frac{x}{y},$$

es decir,

$$\operatorname{tg} X = \operatorname{tg}(X \pm \pi), \quad \operatorname{ctg} X = \operatorname{ctg}(X \pm \pi).$$

Escribamos las fórmulas de periodicidad de las funciones circulares:

$$\operatorname{sen} X = \operatorname{sen}(X + 2\pi k),$$
$$\cos X = \cos(X + 2\pi k),$$
$$\operatorname{tg} X = \operatorname{tg}(X + \pi k),$$
$$\operatorname{ctg} X = \operatorname{ctg}(X + \pi k)$$

donde

$$k = \pm 1; \ \pm 2; \ \ldots$$

15°. Funciones pares e impares. Definiciones: 1. *La función $f(x)$ se llama par, si para cualquier valor x de su campo de definición, el número $-x$ también pertenece a su campo de definición, y $f(-x) = f(x)$*

2. *La función $f(x)$ se llama impar, si para cualquier valor x de su campo de definición, el número $-x$ también pertenece al mismo, y $f(-x) = -f(x)$.*

Ejemplos: 1) $f(x) = x^2$ para $-\infty < x < +\infty$ es una función par; 2) $f(x) = x^3$, si $-\infty < x < +\infty$ es una función impar; 3) $f(x) = x^2$ para $0 \leqslant x < +\infty$ no es ni par ni impar, ya que para el valor de $x > 0$ el valor opuesto de x no pertenece al campo de definición de la función:

4) $y = (x-1)^2$ no es ni par ni impar, ya que, por ejemplo, para $x = 2$ $y = (2-1)^2 = 1$, y para $x = -2$ $y = (-2-1)^2 = 9$.

Para una función par $f(-x) = f(x)$, los puntos $[x, f(x)]$ y $[-x, f(x)]$ están dispuestos simétricamente respecto al eje Oy, y por lo tanto, *la gráfica de una función par es una línea simétrica respecto al eje Oy.*

Para una función impar $f(-x) = -f(x)$ los puntos $(x, f(x)$ y $[-x, -f(x)]$ están dispuestos simétricamente respecto al origen de coordenadas O y por lo tanto, *la gráfica de una función impar es una línea asimétrica respecto al origen de coordenadas O.*

16°. Teorema. *La función $\cos X$ es par, y $\operatorname{sen} X$, $\operatorname{tg} X$ y $\operatorname{ctg} X$ son impares.*

En efecto, si en la circunferencia numérica O está el punto X, entonces en ella está también $-X$ simétrico respecto al origen A y al eje de abcisas Ox; además, si las coordenadas del punto X con (x, y), entonces las coordenadas del $-X$ son $(x, -y)$ (fig. 82). Por eso

$\cos X = x$, y $\cos(-X) = x$, es decir, $\cos(-X) = \cos X$;

$\operatorname{sen} X = y$, y $\operatorname{sen}(-X) = -y$, es decir, $\operatorname{sen}(-X) = -\operatorname{sen} X$;

$\operatorname{tg} X = \frac{y}{x}$, y $\operatorname{tg}(-X) = \frac{-y}{x}$, es decir, $\operatorname{tg}(-X) = -\operatorname{tg} X$,

$\operatorname{ctg} X = \frac{x}{y}$, y $\operatorname{ctg}(-X) = \frac{x}{-y}$, es decir, $\operatorname{ctg}(-X) = -\operatorname{ctg} X$.

17°. Intervalos de monotonía de las funciones circulares. De la condición $f(-x) = -f(x)$ de la función de ser impar, se sigue que *si en el intervalo (a, b) la función impar $f(x)$ es creciente (decreciente), entonces ella es creciente (decreciente) también en el intervalo simétrico $(-b, -a)$*. Asimismo, de la condición $f(-x) = f(x)$ de la función de ser par, se deduce que *si en el intervalo (a, b) la función par es creciente (decreciente), entonces en el intervalo simétrico $(-b, -a)$ la misma es decreciente (creciente).*

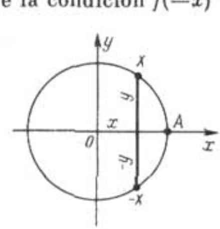


Fig. 82

Partiendo de esto, *para determinar los intervalos de monotonía de las funciones par e impar, es suficiente determinarlos sólo para los valores positivos de argumento.*

En el intervalo $0 < X < \frac{\pi}{2}$ (véase fig. 82) al crecer X, y crece de 0 a 1, y x decrece de 1 a 0. De aquí se deduce que en el intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$\operatorname{sen} X$ es creciente de 0 a 1,
$\operatorname{tg} X$ es creciente de 0 a $+\infty$.

Basándose en la observación hecha, y debido a que las funciones $\operatorname{sen} X$ y $\operatorname{tg} X$ son impares, en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < X < 0$ simétrico respecto a $0 < X < \frac{\pi}{2}$,

$\operatorname{sen} X$ es creciente de -1 a 0,
$\operatorname{tg} X$ es creciente de $-\infty$ a 0.

Por lo tanto, $\operatorname{sen} X$ y $\operatorname{tg} X$ *en el intervalo* $-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{2}$ *son funciones crecientes*, y además crecen en los intervalos

$$-1 < \operatorname{sen} X < 1 \text{ y } -\infty < \operatorname{tg} X < +\infty.$$

La función $\operatorname{sen} X$ es también creciente en los intervalos:

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k<X<\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

y decreciente en los intervalos:

$$-\frac{\pi}{2}+\pi(2k+1)<X<\frac{\pi}{2}+\pi(2k+1).$$

La función $\operatorname{tg} X$ es creciente en todos los intervalos en los que está difinida, o sea, en los intervalos

$$-\frac{\pi}{2}+\pi k<X<\frac{\pi}{2}+\pi k.$$

Cuando X crece en el intervalo $0<X<\frac{\pi}{2}$, x decrece, e y crece; por esto, $\frac{x}{y}$ decrece. En el intervalo $\frac{\pi}{2}<X<\pi$, x es negativo, $|x|$ crece, e y decrece; por eso $\left|\frac{x}{y}\right|$ crece, y $\frac{x}{y}$ decrece (fig. 82).

Así, pues, $\cos X$ y $\operatorname{ctg} X$ *en el intervalo* $0<x<\pi$ *son funciones decrecientes*, disminuyendo en los intervalos

$$1>\cos X>-1,\quad +\infty>\operatorname{ctg} X>-\infty,$$

el $\cos X$ también es decreciente en los intervalos:

$$2\pi k<X<\pi(2k+1),$$

y creciente en los intervalos:

$$\pi(2k+1)<X<\pi(2k+2),$$

la $\operatorname{ctg} X$ es una función decreciente en todos los intervalos en los cuales está definida, o sea, en los intervalos

$$k\pi<X<\pi(k+1).$$

Todas las propiedades consideradas de las funciones trigonométricas tienen su adecuada ilustración en las gráficas de las funciones: $Y=\operatorname{sen} X$, $Y=\cos X$. $Y=\operatorname{tg} X$, $Y=\operatorname{ctg} X$ (figs. 83 y 84).

18°. Funciones circulares inversas (trigonométricas).

Fue demostrado (en 8°) que en el intervalo de monotonía figurosa una función tiene su función inversa.

Las funciones $Y = \operatorname{sen} X$, $Y = \operatorname{tg} X$ son estrictamente monótonas (crecientes) en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{2}$ y en él tienen sus funciones inversas $x = \operatorname{arcsen} Y$, $X = \operatorname{arctg} Y$.

Las funciones $Y = \cos Y$, $Y = \operatorname{ctg} X$ son estrictamente monótonas (decrecientes) en el intervalo $0 < X < \pi$, y en

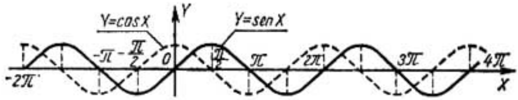


Fig. 83

éste tienen sus respectivas funciones inversas $X = \operatorname{arc} \cos Y$, $X = \operatorname{arcctg} Y$.

Estas funciones inversas se llaman *funciones circulares inversas*, o *funciones trigonométricas inversas*. Las estudia-

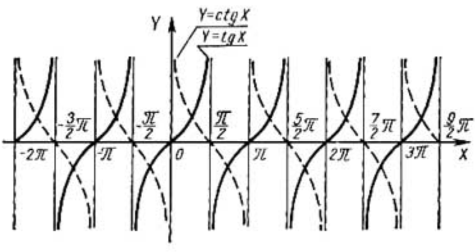


Fig. 84

remos introduciendo las notaciones comunes: designar la función por la letra Y, y su argumento por X.

Por definición,

$$Y = \operatorname{arcsen} X, \text{ si } \operatorname{sen} Y = X \text{ y} -\frac{\pi}{2} \leqslant Y \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$Y = \arccos X, \text{ si } \cos Y = X \text{ y } 0 \leqslant Y \leqslant \pi;$$

$$Y = \operatorname{arctg} X, \text{ si } \operatorname{tg} Y = X \text{ y} -\frac{\pi}{2} < Y < \frac{\pi}{2};$$

$$Y = \operatorname{arcctg} X, \text{ si } \operatorname{ctg} Y = X \text{ y } 0 < Y < \pi.$$

Las funciones arcsen X y arctg X son crecientes, y arccos X y arcctg X son decrecientes.

Al crecer X en el intervalo $-1 \leqslant X \leqslant 1$, la función arcsen X crece en el segmento $-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{arcsen}\, X < \frac{\pi}{2}$, y el arccos X decrece en el segmento $\pi \geqslant \arccos X \geqslant 0$.

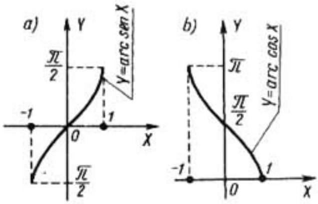


Fig. 85

Al crecer X en el intervalo $-\infty < X < +\infty$, la función arctg X crece en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < \text{arctg}\, X < \frac{\pi}{2}$ y arcctg X decrece en el intervalo $\pi > \text{arcctg}\, X > 0$.

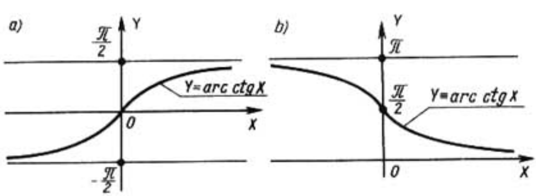


Fig. 86

Las gráficas de las funciones $Y = \text{arcsen}X$, y arccos X, $Y < \text{arctg}\, X$ e $Y = \text{arcctg}X$ están representadas en las figs. 85 y 86.

§ 65. El límite de una función en un punto c

1°. Cuando se dice sobre el límite de una función $f(x)$ en el punto c $(x \to c)$ se supone que existen valores del argumento x, arbitrariamente cercanos al número c, en otras palabras, que *el entorno de cualquier radio pequeño* δ *con centro en el* *punto c, contiene valores de x, no iguales a c, para los cuales la función $f(x)$ está definida. En el mismo punto c la función $f(x)$ puede no estar definida.*

2°. Ejemplo. Supongamos que $f(x) = x^2$ y $x \to 2$. Indiquemos que si x se aproxima al número 2, la función x^2 se aproxima a 4. Por ejemplo:

si $x =$	1,9	1,99	1,999	$\ldots \to 2$
entonces x^2	3,6	3,96	3,996	$\ldots \to 4$

si $x=$	2,1	2,01	2,001	$\ldots \to 2$
entonces x^2	4,5	4,05	4,005	$\ldots \to 4$

Para cada número positivo ε, arbitrariamente pequeño existe tal δ entorno del punto $x = 2$, que para todos los valores de x, pertenecientes a este δ entorno, la diferencia $x^2 - 4$ será en valor absoluto menor que ε, es decir,

$$|x^2-4| < \varepsilon. \tag{1}$$

Ya que

$$|x^2-4| = |x+2| \cdot |x-2|,$$

se puede escribir:

$$|x+2|\ |x-2| < \varepsilon.$$

Es claro, que para que se cumpla la desigualdad (1) es suficiente que sea cumplida la desigualdad

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|}. \tag{2}$$

El valor del denominador $|x+2|$ se puede elegir examinando la variación de x en un entorno determinado del punto $x=2$, por ejemplo, en el intervalo $1 < x < 3$; en este intervalo

$$3 < |x+2| < 5.$$

Sustituyendo en la desigualdad (2) $|x + 2|$ por el número 5, se obtiene: la desigualdad $|x^2 - 4| < \varepsilon$ se cumple por pequeño que sea el número positivo ε, si $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$.

En otras palabras, la desigualdad $|x^2 - 4| < \varepsilon$ se cumple para todos los valores de x pertenecientes al entorno del punto $x = 2$ de radio $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

El número 4 se llama límite de la función x^2 si $x \to 2$, o límite de la función en el punto $x = 2$.

3°. Definición. *El número A es el límite de la función $f(x)$ en el punto C si para cualquier número pequeño positivo dado existe un número positivo δ tal que la magnitud absoluta de la diferencia entre $f(x)$ y A es menor que ε, si la magnitud absoluta de la diferencia entre x y c es menor que δ, es decir,*

$$\boxed{|f(x)-A|<\varepsilon, \quad \text{si} \quad 0<|x-c|<\delta.} \qquad \text{(II)}$$

4°. Geométricamente, la verificación de la desigualdad

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

una vez cumplida la desigualdad

$$0<|x-c|<\delta$$

significa que si en el eje Oy se señala un entorno del punto A de un radio ε arbitrariamente pequeño (fig. 87), se puede encontrar tal δ-entorno del punto c en el eje Ox que todos los puntos del cual (con la posible excepción de su centro c) se reflejan en el ε-entorno del punto A, en el eje Oy.

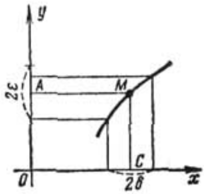


Fig. 87

5°. Puede ocurrir que para $x \to c$ la función sea una magnitud infinitamente grande. Por ejemplo la función $y = \frac{1}{x^2}$ (fig. 74), para $x \to 0$ es una magnitud infinitamente grande.

En este caso se deben aplicar las indicaciones de § 50. 7° y § 59, 2°.

§ 66. El límite de una función para $x \to \infty$

1°. Algunas funciones tienen límite finito A si el argumento x crece (o disminuye) indefinidamente.

Ejemplo 1. $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ tiene como límite el número 2, para $x \to \pm\infty$ (fig. 88). En efecto,

$$f(x) = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}.$$

De donde:

$$f(x) = -2 = \frac{1}{x}.$$

Dado un número positivo ε arbitrariamente pequeño, tenemos:

$$|f(x) - 2| < \varepsilon, \quad \text{para} \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to (\pm \infty)} f(x) = 2.$$

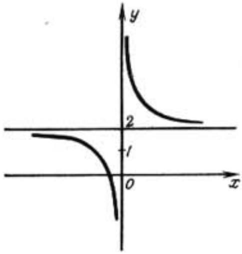


Fig. 88

Ejemplo 2. $\lim\limits_{x \to (-\infty)} 10^x = 0$. En efecto, como $10^x > 0$, para cualquier x determinada

$$10^x - 0 < \varepsilon, \quad \text{si} \quad x < \lg \varepsilon.$$

Ejemplo 3. $\lim\limits_{x \to (+\infty)} 10^x = +\infty$. En efecto, por grande que sea el número positivo N propuesto, se tiene que

$$10^x > N, \quad \text{para} \quad x > \lg N.$$

2°. Definición. *El número A es el límite de la función $f(x)$ para $x \to \infty$ cuando para cualquier número pequeño positivo ε dado existe un número positivo N tal que:*

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{para} \quad x > N \ (\text{o } x < -N).$$

§ 67. Observaciones

En ocasiones resulta que el límite de la función $f(x)$ en el punto c tiene diferente valor cuando x tiende a c por la izquierda, es decir, siendo menor que c, y cuando x tiende a c por la derecha, es decir, siendo mayor que c.

En el caso, cuando en el punto c los límites de la función "por la izquierda" y "por la derecha" no son iguales, la función en el punto c no posee límite ordinario.

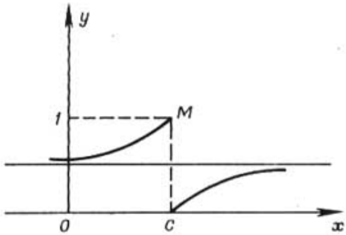
Ejemplo. Hallar el límite de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 10^{\frac{1}{x-c}}},$$

S o l u c i ó n. Indiquemos la magnitud del quebrado $\frac{1}{x-c}$ por medio de z,

$$z=\frac{1}{x-c}.$$

Si x se aproxima a c por la izquierda ($x<c$), la diferencia $x-c$ se aproxima a cero, permaneciendo negativa, y z en este caso



F i g. 89

tiende a $-\infty$. Como $\lim\limits_{z\to-(\infty)} 10^z=0$, se tiene

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x)=\frac{1}{1+0}=1.$$

Si x se aproxima a c por la derecha ($x>c$), la diferencia $x-c$ se aproxima a cero, siendo positiva, y la magnitud z en este caso tiende a $+\infty$. Como $\lim\limits_{x\to(+\infty)} 10^z=+\infty$, la magnitud del quebrado $\frac{1}{1+10^z}$ tiene como límite 0:

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x)=0.$$

Por consiguiente, la función dada posee límite "por la izquierda" igual a 1, límite "por la derecha" igual a 0, y no tiene límite ordinario, (fig. 89).

2°. Por la definición de límite, el número A es el límite de $f(x)$ en el punto $x=c$ para la condición $|f(x)-A|<\varepsilon$, si $|\,0<|x-c|<\delta$.

Estas desigualdades muestran, que los valores de la función existen y se estudian en el entorno del punto $x=c$; además, la desigualdad $0<|x-c|$ excluye el mismo punto

$x = c$, o sea, el valor de la función $f(x)$ en el punto $x = c$ no se estudia. *En el punto $x = c$ la función puede no ser definida y los valores de la función en el punto $x = c$ pueden no existir.*

La existencia o no existencia del límite de la función $f(x)$ en el punto $x = c$ se determina por los valores de la función para $x \neq c$.

Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x-c}}}$ no está definida para $x = c$, ya que para $x = c$, $x - c = 0$ y la división $\dfrac{1}{x-c} = \dfrac{1}{0}$ no es posible; pero esta circunstancia no juega ningún papel para el cálculo del límite $f(x)$ en el punto $x = c$.

No se excluye el caso, de que *en el punto $x = c$ existan el valor de la función, el número $f(c)$, y el límite de la función, el número A,* pero estos números no sean iguales entre sí, $f(c) \neq A$.

§ 68. Continuidad de la función en un punto

1°. Definiciones. 1. *La función $f(x)$ se llama continua en el punto $x = c$, si el límite de la función en el punto c es igual al valor de la función en este mismo punto, es decir, si*

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = f(c)} \tag{III}$$

2. *Todo punto en el que la función sea continua, se llama punto de continuidad de la función.*

3. *La función se llama continua en un segmento si es continua en cada punto del segmento.*

4. *El punto en el que no se cumple la condición de continuidad de la función se llama punto de discontinuidad o punto de interrupción de la función, y la propia función se llama discontinua en el punto.*

2°. El incumplimiento de la condición de continuidad (III) puede consistir, por ejemplo, en lo siguiente.

1. El límite de $f(x)$ en el punto c a la izquierda no es igual al límite por la derecha. Por ejemplo: a) la función $f(x) = \dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x-c}}}$, en la que $c > 0$ (fig. 89), en el punto $x = c$

tiene límite a la izquierda, igual a 1, y a la derecha, igual a 0 (§ 67); $x = c$ es el punto de discontinuidad; b) la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ (fig. 90) en el punto $x = 0$ tiene límite a la

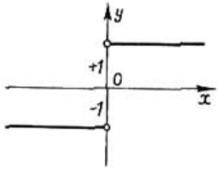


Fig. 90

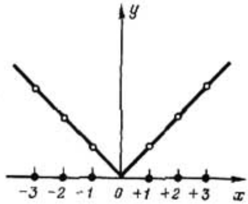


Fig. 91

izquierda, igual a -1, y a la derecha, igual a $+1$; $x = 0$ es el punto de discontinuidad de la función.

2. El límite de $f(x)$ en el punto c no es igual al valor de la función, para $x = c$. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} |x|, \text{ si } x \text{ es cualquier número real, pero no entero,} \\ 0, \text{ si } x \text{ es número entero,} \end{cases}$$

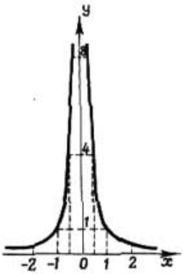


Fig. 92

en los puntos -3, -2, -1, 1, 2, 3 tiene un mismo límite, tanto a la derecha como a la izquierda, igual respectivamente a 3, 2, 1, 1, 2, 3, pero el límite no equivale al valor de la función en esos puntos, que es igual a cero. La gráfica de esta función (fig. 91) es una línea quebrada formada por las bisectrices de los angulos de coordenadas del segundo y primer cuadrantes, de las cuales se han "extraído" los puntos que tienen como abscisa un número entero, habiendo sido colocados estos puntos en el eje Ox.

Al ser $x = -3, -2, -1, 1, 2, 3$, etc., se produce la ruptura de la continuidad de la función.

3. El límite de la función $f(x)$ en el punto c es infinito. Por ejemplo, la función $y = \frac{1}{x^2}$ (fig. 92) tiene en el punto $x = 0$ límite infinito, $x = 0$ es punto de discontinuidad.

La función $y = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$ en el punto $x = 0$ tiene como límite a la izquierda $-\infty$, y a la derecha $+\infty$ (fig. 88); cuando $x = 0$ la función es discontinua.

Destaquemos que los ejemplos dados no abarcan todos los tipos de discontinuidades.

3°. Los casos señalados de discontinuidad de las funciones tienen lugar en la técnica. Por ejemplo, las vigas que se emplean en la construcción soportan a menudo la siguiente carga: a la izquierda de la sección dada, la carga está repartida uniformemente a lo largo de la viga y tiene una misma magnitud; a la derecha de la sección también está repartida uniformemente, pero tiene otra magnitud completamente diferente. Así pues, en la sección dada de la viga aparece un salto en el reparto de la carga a lo largo de la misma. La ley del reparto de la carga en este caso corresponde a una función discontinua, siendo el salto en el reparto de la carga a lo largo de la viga correspondiente al punto de discontinuidad de la función. La carga, concentrada en diferentes puntos de la viga, puede corresponder a los puntos aislados de la gráfica del reparto de la carga a lo largo de la viga.

4°. N o t a. La fórmula que determina la función $f(x)$ puede no definir el valor de la función en el punto c. Por ejemplo, si $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$, entonces la fórmula no determina los valores de la función en el punto $x = 0$, ya que dividir entre cero no es posible.

En el caso que la fórmula no determine el valor de la función en el punto $x = c$, es imprescindible hallar el límite de la función en el punto c. Por ejemplo, se halla que en el punto $x = 0$ la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ posee límite por la izquierda -1, y por la derecha 1; la función $f(x) = \frac{k}{x}$ posee límite por la izquierda $-\infty$, y por la derecha $+\infty$; la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ posee límite infinito; la función $f(x) = \operatorname{ctg} x$ posee límite por la izquierda $-\infty$, y por la derecha $+\infty$, o sea, *todas estas funciones no poseen límite en el punto $x = 0$ y por ello $x = 0$ es un punto de discontinuidad de estas funciones, para $x = 0$ no existen valores de estas funciones.*

Es posible otro caso, cuando la fórmula, por ejemplo, $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, no determina el valor de la función en el punto, $x = 0$, pero la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ posee límite en el punto $x = 0$;

más abajo (§ 86) se demostrará, que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Se puede en la misma forma demostrar, que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es continua en cada punto $x \neq 0$.

En tal caso, *si la fórmula $y = f(x)$ no determina el valor de la función $f(x)$ en el punto $x = c$, pero el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = c$ es cierto número A y la función $f(x)$ es continua en los puntos $x \neq c$, se considera*

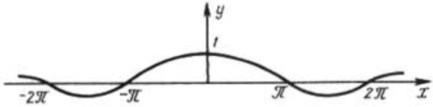


Fig. 93

a la función $f(x)$ continua en el punto $x = c$, y el límite A, el valor de la función para $x = c$, $f(c) = A$, y se denomina *valor de la función por continuidad.*

De esta forma, el número 1 es el valor de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x = 0$, el valor de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ por la continuidad (fig. 93).

§ 69. Otra expresión de la condición de continuidad de la función en el punto

De la condición de continuidad (III) se deduce que

$$\lim_{x \to c} (x - c) = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = 0. \tag{2}$$

Pero la diferencia $x - c$ expresa el incremento Δx del argumento en el punto c.

$$x - c = \Delta x,$$

siendo la diferencia $f(x) - f(c)$ expresa el correspondiente incremento Δy de la función

$$f(x) - f(c) = \Delta y.$$

La tendencia de x a c es equivalente a la tendencia de Δx a cero. Por eso, la igualdad (2) se puede representar así:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,} \tag{IV}$$

es decir, para una finción continua en un punto, el incremento de la función es una magnitud infinitamente pequeña si el incremento del argumento en este punto se hace infinitamente pequeño.

§ 70. Discusión de la continuidad de la función

Ejemplo. Demostremos que sen x es una funcón continua para cualquier valor de x. A este fin comprobaremos que para $y = \operatorname{sen} x$, en cualquier punto $x = c$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Si indicamos los valores del seno, cuando su arco es igual a c y $c + \Delta x$, por medio de y e $y + \Delta y$ respectivamente, se tiene:

$$y = \operatorname{sen} c \text{ e } y + \Delta y = \operatorname{sen}(c + \Delta x).$$

Restando la primera igualdad de la segunda, resulta:

$$\Delta y = \operatorname{sen}(c + \Delta x) - \operatorname{sen} c,$$

o, según la fórmula trigonométrica:

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\Delta y = 2 \cos \left(c + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}.$$

El valor absoluto:

$$|\Delta y| = 2 \cdot \left| \cos \left(c + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \right|.$$

$\left| \cos \left(c + \frac{\Delta x}{2} \right) \right|$ no puede ser mayor que 1; si $\left| \cos \left(c + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| = 1$.
$\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \Big| \leqslant \frac{|\Delta x|}{2}$ (§ 49, 3°).

Por eso $\Delta y \leqslant 2 \cdot 1 \cdot \frac{|\Delta x|}{2}$, es decir, $|\Delta y| \leqslant |\Delta x|$.

Puesto que según la condición $|\Delta x| < \varepsilon$, también $|\Delta y| < \varepsilon$ o $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, por lo tanto, sen x es una función continua para cualquier valor de x.

§ 71. Propiedades de las funciones continuas en un punto

1°. *El cálculo del límite de una función continua en un punto se puede sustituir por el cálculo del valor de la función en este punto ya que la función $f(x)$ continua en el punto c tiene*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Considerando c como el límite de x, si $x \to c$, esta propiedad puede expresarse así: *el símbolo de límite de una funcón continua se puede trasladar al argumento,*

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = f(\lim_{x\to c} x)} \qquad \text{(V)}$$

2°. *La función $f(x)$, constante en un entorno del punto c, es continua en el punto c.*

Demostración. Según la condición, $f(x)$ en el entorno del punto $x = c$ es constantemente igual, por ejemplo, a k, $f(x) = k$. Por eso

$$\lim_{x\to c} f(x) = k.$$

Pero como

$$f(c) = k,$$

se tiene

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

y, por tanto, $f(x)$ es continua, que era lo que se trataba de demostrar.

3°. *La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos funciones continuas en el punto $x = c$ es una función continua si el denominador del cociente no se convierte en cero.*

Demostración. Supongamos que $f(x)$ y $\varphi(x)$ son funciones continuas en el grupo $x = c$, es decir, $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ y $\lim_{x\to c} \varphi(x) = \varphi(c)$. Según los teoremas acerca de los límites (§ 53, 54 y 55), se tiene:

$$1)\ \lim_{x\to c} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} \varphi(x) = f(c) \pm \varphi(c);$$

$$2)\ \lim_{x\to c} [f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c} \varphi(x) = f(c)\cdot\varphi(c);$$

$$3)\ \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} \varphi(x)} = \frac{f(c)}{\varphi(c)}, \text{ si } \varphi(c) \neq 0.$$

4° Se puede demostrar (no damos la demostración) que *las funciones elementales básicas* (§ 64,1°) *son continuas en cualquier punto de sus campos de definición.*

Se puede demostrar también (no damos la demostración) que *la función continua de función continua en un punto dado, es una función continua en dicho punto.*

Por ejemplo, $\lg x$ *y* $\operatorname{sen} x$ *son funciones continuas;* de acuerdo al teorema tenemos: $\lg \operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen} \lg x$ son funciones continuas (se sobreentiende que en los puntos, para los cuales están definidas).

5° *Ejemplo.* $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x+\cos 2x}{\lg \operatorname{sen} x}$. *Hallar* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)$.

Solución. Las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos 2x$, $\lg \operatorname{sen} x$ son continuas en los puntos del contorno del punto $x=\dfrac{\pi}{6}$. La suma $\operatorname{sen} x+\cos 2x$, y el cociente $\dfrac{\operatorname{sen} x+\cos 2x}{\lg \operatorname{sen} x}$ son continuas en el punto $x=\dfrac{\pi}{6}$. Esto significa que el cálculo del límite $f(x)$ puede sustituirse por el cálculo del valor de $f(x)$ para $x=\dfrac{\pi}{6}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}}{\lg \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\lg\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\lg 2}=-\frac{1}{0,301}=-3,32.$$

6°. *De lo expuesto se deduce que el polinomio*

$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Px+Q$$

y el quebrado

$$\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Px+Q}{ax^m+bx^{m-1}+\ldots+kx+l}\quad \text{(quebrado irreducible)}$$

son funciones continuas, excluyendo aquellos valores del argumento que convierten en cero el denominador.

CAPITULO VI

FUNCION DERIVADA

§ 72. Problemas que conducen al concepto de derivada

1°. El espacio s recorrido durante el tiempo t por un cuerpo que cae libremente en el vacío se determina por medio de la fórmula:

$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

en la que g es la aceleración de la fuerza de gravedad aproximadamente igual a 9,8 m/seg^2.

Calculemos la velocidad de la caída libre de un cuerpo en el momento de tiempo $t = 2$ seg. Para ello determinamos la velocidad media en cualquier intervalo de tiempo que siga inmediatamente al momento $t = 2$ seg, por ejemplo, en el intervalo entre $t = 2$ seg y $t_1 = 2,1$ seg, igual a:

$$t_1 - t = 0,1 \text{ seg}.$$

Señalando el espacio recorrido en el tiempo t por medio de la letra s, y en el tiempo t_1 por medio de la letra s_1, el espacio recorrido en el intervalo de tiempo $t_1 - t$ será igual a:

$$s_1 - s = \frac{1}{2} g t_1^2 - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g (t_1 + t)(t_1 + t).$$

La velocidad media de la caída en este intervalo de tiempo es:

$$v_{med} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{1}{2} g (t_1 + t).$$

Y en forma numérica:

$$v_{med} = \frac{1}{2} g (2,1 + 2) = 2,05 \; g.$$

Dividamos cada vez por diez el intervalo de tiempo $t_1 - t$. Efectuando los cálculos obtenemos:

t	t_1	$t_1 + t$	$v_{med} = \frac{1}{2} g\,(t_1 + t)$	$v_{med} = A + \alpha$
2	2,1	4,1	2,05 g	$2g + \frac{g}{20}$
2	2,01	4,01	2,005 g	$2g + \frac{g}{200}$
2	2,001	4,001	2,0005 g	$2g + \frac{g}{2000}$
2	2,0001	4,0001	2,00005 g	$2g + \frac{g}{20\,000}$

En la *última columna*, la velocidad media aparece en forma de una suma de dos sumandos: la constante $A = 2g$ y la variable α, igual al quebrado, en el cual el numerador g es un número determinado y el denominador crece indefinidamente. Tal quebrado es una magnitud infinitamente pequeña.

Por lo tanto, la velocidad media variable es la suma de *la constante $2g$ y de la magnitud infinitamente pequeña α.* Por eso (§ 51), si $t_1 - t \to 0$ dicha velocidad tiene límite, igual a $2g$:

$$\lim_{t_1 - t \to 0} \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = 2g.$$

La velocidad media $2{,}05g$, $2{,}005g$, etc., calculada en los intervalos de tiempo igual a 0,1 seg, 0,01 seg, etc., es el valor aproximado de la velocidad en el momento de tiempo $t = 2$ seg., y este valor se aproxima tanto más al valor real cuanto menor sea el intervalo de tiempo tomado. *El límite de la velocidad media al tender a cero el intervalo de tiempo $t_1 - t$ es el valor de la velocidad v en el momento de tiempo t.*

Por lo tanto, en el momento $t = 2$ seg, la velocidad $v = 2\ g\ m/seg$.

Debe señalarse que han sido tomados momentos t_1 más tardíos que t. También se pueden tomar momentos anteriores: $t_1 = 1{,}9$; $t_1 = 1{,}99$; $t_1 = 1{,}999$, etc. En este caso, la velocidad media *resultará igual* a $1{,}95g$, $1{,}995g$, $1{,}9995g$, etc., y tendrá el mismo límite $2g$.

2°. Haremos ahora abstracción del movimiento concreto.

Supongamos que y es el espacio recorrido, x es el tiempo de movimiento, $f(x)$, la ley de dependencia entre el espacio recorrido y el tiempo de este movimiento,

$$y = f(x), \tag{1}$$

Para determinar la velocidad de movimiento en cualquier momento dado del tiempo de movimiento x, fijemos otro momento de tiempo $x + \Delta x$. Entonces el espacio recorrido durante el tiempo x, es

$$y = f(x), \tag{1}$$

y durante $x + \Delta x$,

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \tag{2}$$

El espacio recorrido durante el intervalo de tiempo Δx es la diferencia entre (2) y (1)

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Dividiendo el espacio Δy por el intervalo de tiempo Δx, obtenemos la velocidad media en el intervalo de tiempo Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{3}$$

para un valor dado de x, ella es una magnitud variable: varía al variar el valor de Δx.

Supongamos que $\Delta x \to 0$; entonces la razón (3) tiene límite.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se llama velocidad del movimiento en el momento de tiempo x.

De este modo, *la velocidad de movimiento en el momento dado de tiempo es el límite de la razón del incremento del espacio respecto al incremento del tiempo al tender el incremento del tiempo a cero.*

3°. El método aplicado al determinar la velocidad de movimiento, puede emplearse también para determinar diferentes magnitudes físicas. Examinemos una de ellas: la capacidad calorífica de una substancia a una temperatura dada.

Del curso de física es conocido que para elevar diferentes temperaturas t de la substancia dada en un mismo número de grados Δt hay que consumir cantidades desiguales de calor ΔQ; por eso la razón $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ para la substancia dada no es constante y la cantidad de calor Q consumido para elevar la temperatura es una función no lineal de la temperatura t.

Por ejemplo, al calentar un kilogramo de hierro desde 0 grados hasta $t = 200°$, la cantidad Q de calor consumido por éste se determina con bastante exactitud por medio de la fórmula:

$$Q = 0,1053t + 0,000071t^2.$$

Aplicando esta fórmula se averigua la capacidad calorífica del hierro a $t°$, donde $0° \leqslant t \leqslant 200°$. Para simplificar la expresión designemos 0,000071 por medio de a y 0,1053 por medio de b, resultando

$$Q = bt + at^2.$$

Supongamos que al calentar 1 kg de hierro desde 0° hasta $t°$, consume Q calorías, y al calentar desde 0° hasta $(t + \Delta t)°$, consume $Q + \Delta Q$ calorías, siendo:

$$Q = bt + at^2, \tag{1}$$

$$Q + \Delta Q = b\,(t + \Delta t) + a\,(t + \Delta t)^2. \tag{2}$$

Restando (1) de (2) encontramos la magnitud (ΔQ), en la que ha variado la cantidad de calor Q al variar la temperatura en $\Delta t°$:

$$\Delta Q = b \cdot \Delta t + 2at \cdot \Delta t + a \cdot \Delta t^2. \tag{3}$$

Dividiendo (3) por Δt, obtenemos la cantidad de calor Q (la capacidad calorífica media) en el intervalo $[t, t + \Delta t]$:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = b + 2at + a \cdot \Delta t. \tag{4}$$

Observemos que $b + 2at$ es una magnitud constante, para una temperatura fija t, es decir, $b + 2at = C$.

El sumando $a \cdot \Delta t$ es una magnitud variable y depende del valor Δt. Al tender Δt a cero, $a \cdot \Delta t$ se hace una magnitud infinitamente pequeña, y la constante C se convierte en el límite de la velocidad media $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = C.$$

Este constante C *es el límite de la razón del incremento de la cantidad de calor respecto al incremento de la temperatura, al tender el incremento de la temperatura a cero, y se llama capacidad calorífica de substancia dada a la temperatura dada.*

Siendo, por ejemplo, $t = 50°$, se tiene

$$C = 0{,}1053 + 2 \cdot 0{,}000071 \cdot 50 = 0{,}1124 \text{ kcal}.$$

4°. Hemos determinado dos magnitudes: una mecánica que es *la velocidad de movimiento en un momento dado* del tiempo; y una física, la capacidad calorífica de una substancia a una temperatura dada. Cada una de ellas es el límite de la razón del incremento de la función respecto al incremento del argumento al tender el incremento del argumento a cero.

§ 73. La función derivada

1°. Definición. *El límite de la razón del incremento de la función $y = f(x)$ con respecto al incremento del argumento en el punto x, al tender el incremento del argumento a cero,*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se llama derivada de la función $f(x)$ en el punto x.

Si la derivada existe para cada valor de x del campo de determinación de la función $y = f(x)$, entonces ella es una nueva función de x y se llama *función derivada respecto a x de la función dada $f(x)$.*

Desde el punto de vista físico la derivada de $f(x)$ en el punto x es la *velocidad del cambio de la función $f(x)$ con respecto a su argumento para un valor dado de x.*

Por ejemplo, la capacidad calorífica de una substancia a la temperatura t es la velocidad del cambio de la cantidad de calor $Q(t)$ a la temperatura dada t.

2°. La función derivada se indica así: 1) se le coloca un acento a la función dada en el lugar donde se suele poner el exponente de la potencia; o 2) delante de la función dada se coloca el símbolo $\frac{d}{dx}$.

Si la función dada está designada por la letra y, su derivada puede ser designada por:

1) y'; se lee: "derivada de la función y", o

2) $\frac{dy}{dx}$; se lee; "de y" respecto a "de x".

Si la función dada está representada por el símbolo $f(x)$, su derivada puede ser representada así: 1) $f'(x)$, o también 2) $\frac{df(x)}{dx}$.

3°. *El cálculo de la derivada de una función dada se llama derivación.*

La regla general de la derivación (cálculo de la derivada) es la siguiente:

1) se halla el incremento Δy de la función, es decir, se busca la diferencia de los valores de la función, siendo los valores del argumento $x + \Delta x$ y x;

2) se halla la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, para lo cual se divide por Δx la igualdad obtenida anteriormente;

3) se halla el límite de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ al tender Δx a cero.

Ejemplo. Hállese la derivada de la función $y = x^3 + 1$ en cualquier punto x.

Solución. 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^3 + 1 - (x^3 + 1)$.

Después de efectuar las operaciones:

$$\Delta y = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3;$$

$$2)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x . \Delta x + \Delta x^2;$$

$$3)\ \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0 = 3x^2.$$

4°. Indicaremos que la derivada de la función lineal $y = kx + b$ es una magnitud constante, igual a k.

En efecto, para la función lineal $y = kx + b$, se tiene:

$$\Delta y = k \cdot \Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k;$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = k.$$

5°. Las derivadas se emplean a menudo en la técnica y las ciencias naturales. Ejemplos de derivadas: 1) durante el movimiento de un cuerpo, el espacio recorrido s es función del tiempo t; la velocidad del movimiento en el momento de tiempo dado t es la derivada del espacio s respecto al tiempo t, es decir,

$$v=\frac{ds}{dt};$$

2) durante el movimiento de rotación de un cuerpo sólido (por ejemplo, de un volante) (fig. 94) alrededor del eje Ox, el ángulo de rotación de éste φ, es función del tiempo t:

$$\varphi=f(t);$$

la velocidad angular ω en el momento de tiempo dado t es la derivada del ángulo de rotación respecto al tiempo, es decir,

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt};$$

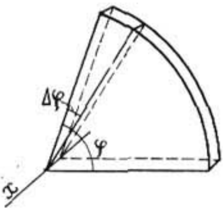


Fig. 94

3) al enfriarse un cuerpo, la temperatura T del mismo, es función del tiempo t,

$$T=f(t);$$

la velocidad de enfriamiento en el momento de tiempo t es la derivada de la temperatura T respecto al tiempo, es decir $\frac{dT}{dt}$;

4) la capacidad calorífica C para la temperatura dada t es la derivada de la cantidad de calor Q respecto a la temperatura t,

$$C=\frac{dQ}{dt};$$

5) al calentar una varilla, su dilatación Δl, como lo testimonian minuciosos ensayos, sólo se puede considerar de un modo aproximado, proporcional al cambio de temperatura Δt. Por eso, la función $l=f(t)$ no es lineal, y la razón $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ es solamente el coeficiente medio de dilatación lineal en el segmento $[t, t+\Delta t]$. El coeficiente de dilatación lineal α, siendo el valor de la temperatura dada t, es la derivada de la longitud l respecto a la temperatura t,

$$\alpha=\frac{dl}{dt}.$$

§ 74. La tangente a la curva. Interpretación geométrica de la derivada

1°. Tomemos en la recta AB (fig. 95) un punto C y tracemos por él una recta CM, que no coincida con AB. Supongamos que la recta CM gira alrededor del punto C de tal modo que el ángulo γ, formado por las rectas, tiende a cero. La recta inmóvil AB se llama en este caso *posición límite* de la recta móvil CM.

2°. Supongamos que en la curva AB (fig. 96), el punto M se aproxima indefinidamente al punto fijo C; en este caso,

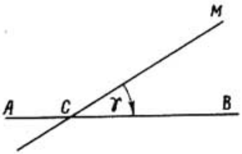


Fig. 95

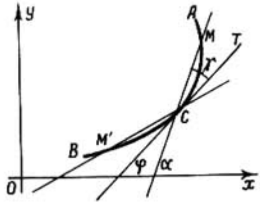


Fig. 96

la secante CM gira alrededor del punto C. Puede ocurrir que independientemente de la manera en que se aproxime el punto M a C en dirección de A a C o de B a C (en la figura 96 el punto M'), existe una misma recta CT que es la posición límite de la secante CM. *La recta CT, que es la posición límite de la secante CM, se llama tangente a la curva en el punto C.*

El punto C se llama *punto de contacto o de tangencia.*

Supongamos que el ángulo formado por la secante CM con el eje Ox es igual a α, y el ángulo formado por la tangente CT con el eje Ox es igual a φ; α es variable y φ, constante.

El ángulo γ formado por la tangente CT y la secante CM es igual a la diferencia $\alpha - \varphi$ (§ 16):

$$\alpha - \varphi = \gamma.$$

Según la definición de la tangente, el ángulo γ es una magnitud infinitamente pequeña, cuando $\cup MC \to 0$, por eso

$$\varphi = \lim_{\cup MC \to 0} \alpha \tag{1}$$

3°. T e o r e m a. *El coeficiente angular de la tangente a la curva* $y = f(x)$ *en el punto* x *es igual a la derivada* $f'(x)$ *en el punto* x.

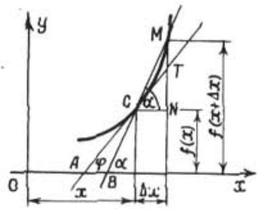
D e m o s t r a c i ó n. El coeficiente angular de la tangente:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\lim_{\cup MC\to 0}\alpha\right) = \lim_{\cup MC\to 0}\operatorname{tg}\alpha$$

según (1) y § 71, la fórmula (V).

Expresemos $\operatorname{tg}\alpha$ a través de las coordenadas de los puntos C y M (fig. 97). El punto de contacto C es fijo, sus coordenadas son números dados x y $f(x)$; el punto M es móvil, sus coordenadas son variables; los representaremos por

$$x + \Delta x \text{ y } f(x + \Delta x).$$



F i g. 97

Según la fórmula (VI) § 5:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Si el arco $CM \to 0$, entonces también $\Delta x \to 0$, ya que $|\Delta x| <$ la cuerda (del arco) $CM < \cup CM$.

Pasando al límite, para $\Delta x \to 0$ resulta:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = f'(x)} \qquad \text{(I)}$$

ya que $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\cup CM\to 0}\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi$,

lo que se quería demostrar.

4°. Tiene lugar el teorema recíproco, que expresa el significado geométrico de la derivada: *si la función* $y = f(x)$ *tiene derivada en un punto* x *en este punto la gráfica de la función tendrá tangente y el coeficiente angular de esta tangente será igual al valor de la derivada* $f'(x)$ *en el punto* x.

D e m o s t r a c i ó n. Según la condición, existe el límite de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Pero la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la tangente del ángulo formado por la secante CM con el eje Ox (fig. 97).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (1)$$

Por lo tanto, según la condición, existe el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha)$.

De la igualdad (1) se deduce:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Debido a la continuidad de arc tg, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arc\,tg} \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right).$$

Pero según la condición, existe $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, igual al número $f'(x)$

Por ello

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \operatorname{arc\,tg} f'(x).$$

Indicando $\operatorname{arc\,tg} f'(x) = \varphi$ se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \varphi.$$

Por lo tanto, existe el límite de α. Así pues, existe una recta que pasa por el punto C, cuyo ángulo con el eje Ox es igual a $\lim \alpha$. Tal recta es la tangente en el punto dado $C\,[x,\ f(x)]$ y su coeficiente angular $\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$.

5°. Observación. Si la tangente en el punto (x_1, y_1) de la curva $y = f(x)$ forma con Ox: a) un ángulo agudo φ, la derivada $f'(x_1) > 0$, puesto que $\operatorname{tg} \varphi > 0$ (fig. 98); b) un ángulo obtuso φ, la derivada $f'(x_1) < 0$, puesto que $\operatorname{tg} \varphi < 0$ (fig. 99). Si la tangente es paralela al eje Ox (fig. 110), el ángulo

$$\varphi = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad \text{y} \quad f'(x_1) = 0.$$

Si la tangente es perpendicular al eje Ox, la tendencia de α hacia $\frac{\pi}{2}$ puede conducir a un mismo límite infinito de la tangente, tanto "a la derecha" como "a la izquierda": $\operatorname{tg}\varphi = +\infty$ (fig. 101) o $\operatorname{tg} \varphi = -\infty$ (fig. 102), o dar "a la izquierda" y "a la derecha" límites infinitos de diferente signo (en la figura 103 en el punto C "a la izquierda" $\operatorname{tg}\varphi = +\infty$, y "a la derecha $\operatorname{tg} \varphi = -\infty$. En el primer caso se dice que la función $f(x)$, en los puntos A y B, tiene derivada infinita; en el segundo caso, en el punto C, no existe ni derivada finita ni infinita.

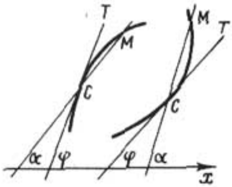


Fig. 98

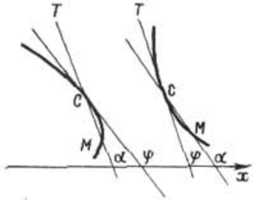


Fig. 99

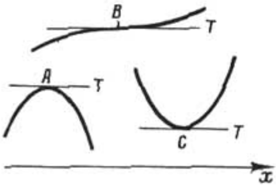


Fig. 100

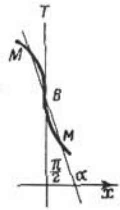


Fig. 101

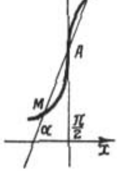


Fig. 102

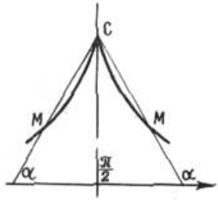


Fig. 103

Tengamos en cuenta que las derivadas infinitas se examinan solamente en los puntos de continuidad de la función $f(x)$ (fig. 101, 102).

6°. La ecuación de la tangente en el punto (x, y) a la curva $y = f(x)$, como ecuación de la recta que pasa por el punto dado (x, y), teniendo como coeficiente angular el valor de la derivada, en el punto x, $f'(x_1)$, es la siguiente:

$$\boxed{y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)} \tag{V}$$

7°. La recta que pasa por el punto de contacto perpendicular a la tangente se llama *normal* a la curva. Según la condición de perpendicularidad mutua de las rectas, el coeficiente angular de la normal es $-\frac{1}{f'(x_1)}$ y la ecuación de la normal,

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)} \cdot (x - x_1)} \tag{VI}$$

§ 75. Dependencia entre la derivabilidad y la continuidad de una función

1°. *Una función se llama derivable en el punto x si su derivada en este punto es finita.* La función $f(x)$ es derivable en el intervalo $a < x < b$, si su derivada $f'(x)$ es finita en cada punto del intervalo.

2°. Teorema. *Si la función $y = f(x)$ tiene derivada en un punto x, será continua en este punto.*

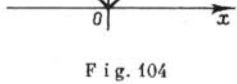


Fig. 104

Demostración. Escribamos la identidad:

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x,$$

(siempre consideramos que $\Delta x \neq 0$). Al tender Δx a cero, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiene un límite determinado (según la condición) y por lo tanto (§ 50,6°) es una magnitud acotada, y Δx es un infinitésimo. Por eso, el producto $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ es una magnitud infinitamente pequeña, y su límite es igual a cero, es decir,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Por lo tanto, la función dada $y = f(x)$ es continua (§ 69).

1°. El teorema recíproco es falso: *una función continua puede no tener derivada*. Por ejemplo, la función: $y = |x|$ (fig. 104) en el punto $x = 0$ es continua. Por otra parte, en el punto $x = 0$ no existe una tangente determinada; la función no es derivable.

4°. Consecuencia. *La función no tiene derivada en el punto de discontinuidad.*

El genial matemático ruso N. Lobachevski expuso por primera vez de una manera nítida la distinción entre el concepto de continuidad y el de derivabilidad de las funciones.

CAPITULO VII

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

§ 76. Observación previa

1°. Al examinar dos o más funciones, se supondrá que cada una de las funciones consideradas es derivabe, es decir, que tiene derivada en un punto x tomado arbitrariamente.

2°. Las fórmulas para hallar las derivadas se llaman también fórmulas de derivación.

§ 77. Derivada de una constante

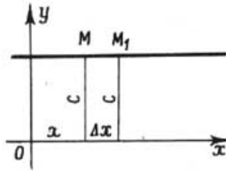


Fig. 105

T e o r e m a. *Una función constante tiene en cualquier punto x derivada, igual a cero.*

Hipótesis: $y = c$ (fig. 105). Tesis: $c' = 0$.

D e m o s t r a c i ó n. Para cualquier valor de x y para cualquier incremento Δx, el incremento Δy de la función es igual a cero; también es igual a cero la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Por eso $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, es decir,

$$\boxed{c' = 0.} \tag{1}$$

§ 78. Derivada de una potencia

1°. T e o r e m a. *La derivada de la potencia del argumento es igual al exponente multiplicado por el argumento elevado el exponente disminuido en una unidad*, es decir, si $y = x^n$, se tiene $y' = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que n es un número entero positivo. El incremento de la función

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n.$$

Aplicando la fórmula del binomio de Newton resulta:

$$\Delta y=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\Delta x^3+\ldots+\Delta x^n-x^n,$$

o sea,

$$\Delta y=n\cdot x^{n-1}\Delta x+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\Delta x^3+\ldots+\Delta x^n.$$

Dividiendo cada miembro de esta igualdad por Δx, resultará la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=n\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\cdot\Delta x^2+\ldots+\Delta x^{n-1}.$$

Pasando al límite, para $\Delta x\to 0$, se tiene:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=n\cdot x^{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{(x^n)'=n\cdot x^{n-1}} \qquad \text{(II)}$$

O b s e r v a c i ó n. Este teorema subsiste también cuando el exponente es negativo, fraccionario e irracional, lo que será demostrado más adelante. Apliquemos esta fórmula siendo el exponente un número constante cualquiera.

3°. E j e m p l o s. 1. Hállese la derivada de la función: $y=x^4$.
S o l u c i ó n. Según la fórmula (II), $y'=4\cdot x^3$.
2. Hállese la derivada de la función: $y=\sqrt[3]{x^2}$.
S o l u c i ó n. Representando la raíz en forma de una potencia de exponente fraccionario, se tiene

$$y=x^{\frac{2}{3}}.$$

Según la fórmula (II):

$$y' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}.$$

3. Hállese la derivada de la función: $y = \frac{1}{x^3}$.

Solución. Representando la fracción en forma de una potencia con exponente negativo, se tiene $y = x^{-3}$.

Aplicando la fórmula (II) $y' = -3 \cdot x^{-3-1} = -3 \cdot x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

4. Hállese la derivada de la función: $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Solución. $y = x^{-\frac{1}{2}}$. Aplicando la fórmula (II)

$$y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

4°. Consecuencia. *La derivada de x es igual a la unidad*, porque

$$x' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1.$$

§ 79. Derivada del producto de una magnitud constante *por una función*

1°. Teorema. *La derivada del producto de una magnitud constante por una función es igual al producto de esta constante por la derivada de la función*, es decir, si $y = c \cdot f(x)$, donde c es una constante, se tiene $y' = c \cdot f'(x)$.

Demostración. Hallemos Δy, es decir, la diferencia entre los valores de la función dada $c \cdot f(x)$, para los valores del *argumento* $x + \Delta x$ y x:

$$\Delta y = c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x),$$

o

$$\Delta y = c[f(x + \Delta x) - f(x)].$$

Dividiendo esta igualdad por Δx obtenemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Hallemos la derivada (aplicando el § 54, 2°):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x).$$

Por lo tanto

$$\boxed{[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x),} \qquad \text{(III)}$$

que era lo que se trataba de demostrar.

A veces, el enunciado del teorema demostrado se expresa así: *al derivar se puede sacar el factor numérico fuera del signo de la derivada.*

2°. Ejemplos. 1. Hállese la derivada de la función $y = 2 \cdot x^4$.

Solución. Según la fórmula (III) $y' = 2\,(x^4)'$, y aplicando la fórmula (II).

$$y' = 2 \cdot 4x^3 = 8x^3.$$

2. Hállese la derivada de la función: $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

Solución. Representemos el quebrado y la raíz en forma de potencia con exponente negativo y fraccionario: $y = 4 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$.

Aplicando la fórmula (III) $y' = 4 \cdot (x^{-\frac{1}{2}})' = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$.

§ 80. Derivada de una suma algebraica de funciones

1°. Teorema. *La derivada de la suma algebraica de unas cuantas funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de estas funciones.*

Demostrémeslo, por ejemplo, para la suma de tres funciones: $u(x) + v(x) - z(x)$. Para abreviar la escritura, indicaremos las funciones mediante u, v, z. Así, $y = u + v - z$.

Tomemos arbitrariamente un valor determinado de x y alteremos su valor en la magnitud Δx. Entonces, u, v y z alterarán cada una su magnitud respectivamente en Δu, Δv, y Δz y por consiguiente, la función y cambiará su magnitud en Δy.

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (z + \Delta z),$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (z + \Delta z) - (u + v - z).$$

Después de abrir paréntesis, se tiene:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta z.$$

Dividiendo cada miembro de la igualdad obtenida por Δx, tenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Hallamos la derivada:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x},$$

es decir,

$$\boxed{y'=[u(x)+v(x)-z(x)]'=u'(x)+v'(x)-z'(x),} \quad \text{(IV)}$$

que era lo que se trataba de demostrar.

2°. Ejemplo. Hállese la derivada de la función:

$$y=\frac{3}{x^2}-\sqrt{x}+7.$$

Solución. Valiéndonos de exponentes negativo y fraccionario, se tiene:

$$y=3x^{-2}-x^{\frac{1}{2}}+7,$$

y es la suma algebraica de tres funciones: $3x^{-2}=u$, $x^{\frac{1}{2}}=v$ y $7=z$. Aplicando la fórmula (IV)

$$y'=(3x^{-2})'-(x^{\frac{1}{2}})'+(7)'.$$

Aplicando las fórmulas (III), (II) y (I)

$$y'=-6x^{-3}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+0, \quad \text{o} \quad y'=-\left(\frac{6}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

§ 81. Derivada del producto de funciones

1°. Teorema 1. *La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función multiplicada por la segunda función, más la derivada de la segunda función multiplicada por la primera función.*

Demostración. Supongamos que $y=u\cdot v$, donde u y v son funciones de x. Tomemos un valor arbitrariamente determinado x y alteremos su valor en la magnitud Δx. En ese caso, las funciones u, v e y alterarán respectivamente sus valores en Δu, Δv y Δy:

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v),$$

y el incremento de la función y será

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-u\cdot v.$$

Abriendo los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, resulta:

$$\Delta y=v\cdot\Delta u+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v.$$

Dividiendo los miembros de la igualdad obtenida por Δx obtenemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Pasando al límite, cuando $\Delta x\rightarrow 0$, se tiene:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Debe indicarse que se entienden por u y v los valores numéricos de las funciones $u\,(x)$ y $v\,(x)$ para un valor de x determinado, es decir, u y v no dependen de Δx. Por eso

$$\lim_{\Delta x\to 0}v=v,\quad \lim_{\Delta x\to 0}u=u.$$

Según la condición (§ 76), las funciones u y v tienen derivada, por lo tanto son continuas (§ 75). Debido a la continuidad de u (§ 69), $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$.

Según la definición, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ y $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$.

Por lo tanto,

$$y'=v\cdot u'+u\cdot v', \text{ o sea, } \boxed{(u\cdot v)'=u'v+v'u,} \qquad \text{(V)}$$

que era lo que se trataba de demostrar.

2°. Ejemplo. Hállese la derivada de la función:

$$y=(2x^2+3x)\cdot(3-2x).$$

Solución. La función dada es el producto de dos funciones:

$$2x^2+3x=u \text{ y } 3-2x=v.$$

Aplicando la fórmula (V), se tiene:

$$y'=(2x^2+3x)'\cdot(3-2x)+(3-2x)'\cdot(2x^2+3x)=$$
$$=(4x+3)\cdot(3-2x)+(-2)\cdot(2x^2+3x).$$

Abriendo paréntesis y reduciendo, resulta: $y'=3(3-4x^2)$.

3°. Teorema 2. *La derivada del producto de n funciones es igual a la suma de n productos obtenidos al multiplicar la derivada de cada una de estas funciones por todos los demás factores*, es decir.

$$\boxed{\begin{aligned}(u_1\cdot u_2\ \ldots\ u_n)'=u_1'u_2\cdot\ \ldots\ u_n+\\ +u_2'u_1u_3\ \ldots\ u_n+\ldots+u_n'u_1u_2\ \ldots\ u_{n-1}\end{aligned}} \qquad \text{(VI)}$$

Demostración. Supongamos que se tiene el producto de tres funciones $u_1\cdot u_2\cdot u_3$. Tomando el producto $u_1\cdot u_2$ como una función, y derivando de acuerdo con la fórmula (V), resulta:

$$(u_1u_2u_3)'=[(u_1u_2)\cdot u_3]'=(u_1u_2)'u_3+u_3'(u_1u_2)=$$
$$=(u_1'u_2+u_2'u_1)\cdot u_3+u_3'u_1u_2=u_1'u_2u_3+u_2'u_1u_3+u_3'u_1u_2.$$

Tomando el producto de tres funciones, $u_1u_2u_3$, como una función y derivando se halla la derivada del producto de cuatro funciones, etc.

En general, sabiendo que la fórmula (VI) es cierta para el producto de m factores, se puede demostrar que también es cierta para el producto de $m+1$ factores.

Por lo tanto, el teorema es cierto para cualquier número n de factores.

§ 82. Derivada del quebrado

1°. Teorema. *La derivada del quebrado es igual a un quebrado cuyo numerador es la derivada del numerador multiplicada por el denominador, menos la derivada del denominador multiplicada por el numerador, y el denominador es el cuadrado del denominador dado.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que $y=\frac{u}{v}$, donde u y v son funciones de x. Tomemos un valor arbitrariamente determinado de x y supongamos además que el valor del denominador v no es igual a cero. Alteremos el valor x del argumento en la magnitud Δx. En este caso, las funciones u, v e y alterarán sus valores respectivamente en Δu, Δv y Δy: $y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$, y el incremento de la función y será

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}.$$

Reduciendo a un común denominador, después de restar resulta:

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Dividiendo el numerador $v\Delta u-u\cdot\Delta v$ por Δx, obtenemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Hallemos la derivada:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0} u\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} v\cdot(\lim\limits_{\Delta x\to 0} v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)}.$$

Según la observación hecha en el párrafo anterior:

$$\lim_{\Delta x\to 0} v=v;\quad \lim_{\Delta x\to 0} u=u;\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u';\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v';$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0.$$

Por lo tanto,

$$y'=\frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{v^2},$$

o sea

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2},}\qquad\text{(VII)}$$

que era lo que se trataba de demostrar.

2°. **E j e m p l o. Hállese la derivada de la función:**

$$y = \frac{x^2+7}{x^2-7}.$$

S o l u c i ó n. Aplicando la fórmula (VII) y haciendo $x^2+7=u$, $x^2-7=v$, resulta:

$$y' = \frac{(x^2+7)'\cdot(x^2-7)-(x^2-7)'\cdot(x^2+7)}{(x^2-7)^2},$$

o sea,

$$y' = \frac{2x(x^2-7)-2x(x^2+7)}{(x^2-7)^2} = \frac{2x(x^2-7-x^2-7)}{(x^2-7)^2} = -\frac{28x}{(x^2-7)^2}.$$

3°, C o n s e c u e n c i a s. **1.** Si el denominador del quebrado es un número c,

$$y = \frac{u(x)}{c} = \frac{1}{c}\cdot u(x),$$

y la derivada se halla como si se tratara de una función entera. En este caso

$$\boxed{\left[\frac{u(x)}{c}\right]' = \frac{u'(x)}{c},} \qquad \text{(VIII)}$$

es decir, *si el denominador de un quebrado es un número c, la derivada del quebrado será igual a la derivada del numerador dividida por el número c.*

2. Si el numerador de un quebrado es un número c, o sea,

$$y = \frac{c}{v(x)} = \frac{c}{v},$$

según la fórmula (VII):

$$y' = \left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{c'v-v'c}{v^2} = \frac{0\cdot v-v'\cdot c}{v^2} = \frac{c\cdot v'}{v^2},$$

o

$$\boxed{\left[\frac{c}{v(x)}\right]' = -\frac{c\cdot v'(x)}{v^2(x)},} \qquad \text{(IX)}$$

es decir, *si el numerador de un quebrado es el número c, la derivada es igual al producto de la derivada del denominador por el número c, tomado con signo contrario, y dividido por el cuadrado del denominador.*

4°. Ejemplo. Hállese la derivada de la función: $y=\frac{3x^4}{4a}-\frac{3a^2}{x^2}$.

Solución: $y'=\left(\frac{3x^4}{4a}\right)'-\left(\frac{3a^2}{x^2}\right)'$.

Las derivadas de los quebrados se hallan aplicando las fórmulas correspondientes (VIII) y (IX).

Se obtiene:

$$y'=\frac{(3x^4)'}{4a}-\frac{-3a^2(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{3\cdot 4x^3}{4a}+\frac{3a^2\cdot 2x}{x^4}=\frac{3x^3}{a}+\frac{6a^2}{x^3}.$$

§ 83. Observación

Se ha indicado ya que la función se llama derivable si tiene derivada. De los teoremas (fórmulas II—IX) se deduce que *la función obtenida mediante la adición substracción, multiplicación y división de funciones derivables es una función derivable.*

§ 84. Función de función

1°. Ejemplos. 1. Sea $y=\sqrt{2px}$. Si hacemos

$$2px=u,$$

se ve que u es función de x, por ejemplo, $u=\varphi(x)$.

En ese caso, la función dada $y=\sqrt{2px}=\sqrt{u}$ representa una función de u, que a su vez es función de x. Inscribiéndola con símbolos, si $y=f(u)$, y $u=\varphi(x)$, se tiene

$$y=f[\varphi(x)].$$

2. $y=\operatorname{sen} x^3$ es una función de función porque si hacemos $x^3=u$, se tiene $u=\varphi(x)$. En este caso, $y=\operatorname{sen} u=$ $=\operatorname{sen}\varphi(x)$ es una función de función.

3. A veces aparecen funciones de funciones más complicadas. Por ejemplo:

$$y=\lg(\operatorname{sen} x^3).$$

En este caso, sen x^3 es una función de función y, a su vez, se halla el logaritmo de la misma. Así pues, el logaritmo es una función de sen u; sen u es a su vez una función de u, y u es una función de x.

Por medio de símbolos, esta función puede inscribirse así:

$$y = F\{f[\varphi(x)]\}.$$

A la función de función se le llama función compuesta.

§ 85. Derivada de una función de función

1°. Teorema. *Si y es una función derivable de u, y u es una función derivable de x, se tiene la derivada de y respecto a x, es igual a la derivada de y respecto a u, multiplicada por la derivada de u respecto a x.*

Demostración. Supongamos que al valor de x corresponde un valor determinado de $u = \varphi(x)$, y al valor de u corresponde un valor determinado de $y = f(u)$. Demos a x un incremento arbitrario Δx. La alteración del valor del argumento x en la magnitud Δx origina la alteración del valor de la función u en la magnitud Δu, lo que origina a su vez una alteración del valor de la función y en la magnitud Δy. Supongamos que Δu, lo mismo que Δx, es siempre distinta de cero *, es decir,

$$\Delta u \neq 0 \text{ y } \Delta x \neq 0$$

Según la hipótesis del teorema, las razones $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ y $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tienen límites, iguales respectivamente al valor de la derivada $f'(u)$ y de la derivada $\varphi'(x)$, es decir,

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) \text{ y } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x). \tag{1}$$

Las funciones $f(u)$ y $\varphi(x)$ son continuas (§ 75); por eso, la tendencia a cero de Δx origina la tendencia a cero de Δu y Δy (§ 69). En consecuencia, en la igualdad (1) la tendencia a cero de Δu se puede sustituir por la tendencia a cero de Δx. Entonces, las igualdades (1) se inscribirán así:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) \text{ y } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x). \tag{2}$$

---

* Se puede demostrar que el teorema subsiste en el caso de que Δu se anule para ciertos valores de Δx arbitrariamente pequeños.

Multiplicando ambas igualdades, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot \varphi'(x). \tag{3}$$

Aplicando el teorema del límite de un producto (§ 54), en el miembro izquierdo de la igualdad resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo el primer miembro de la igualdad (3) por $\frac{dy}{dx}$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x),$$

que era lo que se trataba de demostrar.

Para el empleo práctico es más cómoda otra forma de esta fórmula:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'_u(u) \cdot u'_x,} \tag{X}$$

que se obtiene sustituyendo $\varphi'(x)$ por u'_x.

2°. Por medio del procedimiento expuesto se puede demostrar que la fórmula (X) es aplicable también en el caso en que la función dada esté compuesta de mayor número de funciones intermedias. Se puede demostrar que si $y = f(u)$, siendo $u = \varphi(t)$ y $t = \psi(x)$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(t) \cdot \psi'(x).$$

3°. Ejemplo. Hállese la derivada de la función: $y = (ax + b)^n$.

Solución. Si hacemos $ax + b = u$, vemos que $y = u^n$ es una función de función. Por eso, derivando respecto a u como función potencial y aplicando simultáneamente la fórmula (X) obtenemos:

$$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'.$$

Sustituyendo u por $ax + b$, se tiene:

$$y' = n \cdot (ax + b)^{n-1} \cdot (ax + b)'$$

o, teniendo en cuenta que $(ax + b)' = a$,

$$y' = an\,(ax + b)^{n-1}.$$

4°.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } u = \varphi(x), \\ \text{resulta } (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \end{array}} \tag{XI}$$

es decir, *la derivada de la potencia de una función es igual al exponente multiplicado por la base elevada al exponente disminuido en una unidad, y multiplicado por la derivada de la base de la potencia.*

El conocimiento de la fórmula (X) tiene enorme importancia para dominar *la* técnica de *la diferenciación.*

5°. Ejemplo. Hállese la derivada de la función:

$$y=(5+3x^3)^{10}\cdot(3x^2+8)^5.$$

Solución. De acuerdo con la fórmula de la derivada de un producto (V):

$$y'=[(5+3x^3)^{10}]'\cdot(3x^2+8)^5+[(3x^2+8)^5]'\cdot(5+3x^3)^{10}.$$

Las derivadas $[(5+3x^3)^{10}]'$ y $[(3x^2+8)^5]'$ se hallan por la fórmula (*XI*):

$$y'=10\,(5+3x^3)^9\cdot 9x^2\cdot(3x^2+8)^5+5\,(3x^2+8)^4\cdot 6x\cdot(5+3x^3)^{10}.$$

Sacando fuera de paréntesis los factores comunes, resulta:

$$y'=30x\,(5+3x^3)^9\cdot(3x^2+8)^4\cdot[3x\,(3x^2+8)+(5+3x^3)].$$

Después de efectuar las operaciones contenidas en los paréntesis cuadrados, se tiene:

$$y'=30x\,(5+3x^3)^9\cdot(3x^2+8)^4\cdot(12x^3+24x+5).$$

6°. Ejemplo. Hallar la derivada de la función: $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{3-x^2}}$.

Solución. Derivamos la función de acuerdo con la fórmula (VII) de la derivada del quebrado:

$$y'=\frac{(2x-1)'\cdot(3-x^2)^{\frac{1}{2}}-[(3-x^2)^{\frac{1}{2}}]'\cdot(2x-1)}{[(3-x^2)^{\frac{1}{2}}]^2}.$$

La derivada de $(3-x^2)^{\frac{1}{2}}$ se halla aplicando la fórmula (XI):

$$y'=\frac{2\,(3-x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\,(3-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\,(2x-1)}{3-x^2}=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{3-x^2}+\dfrac{x\,(2x-1)}{\sqrt{3-x^2}}}{3-x^2}=\frac{\dfrac{2\,(3-x^2)+x\,(2x-1)}{\sqrt{3-x^2}}}{3-x^2}=$$

$$=\frac{6-2x^2+2x^2-x}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}=\frac{6-x}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}.$$

§ 86. Límite de la razon del seno respecto al arco

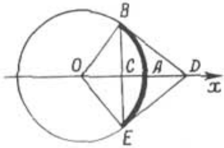
T e o r e m a. *El límite de la razón del sen z respecto a z cuando z tiende a cero, es igual a* 1, es decir,

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1.$$

D e m o s t r a c i ó n. Observemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(-z)}{-z} = \frac{-\operatorname{sen} z}{-z} = \frac{\operatorname{sen} z}{z}.$$

Por esto es suficiente analizar el caso en que $z > 0$. No es posible aplicar a la razón $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ el teorema del límite del cociente, ya que el denominador tiene el cero como límite. Analicemos el sentido geométrico de z y $\operatorname{sen} z$.



F i g. 106

Consideremos un arco BE (fig. 106), menor que la semicircunferencia, y tracemos la cuerda BE que le subtiende, el radio OA, perpendicular a la cuerda BE, y las tangentes BD y ED a la circunferencia en los puntos B y E. De la igualdad de los triángulos rectángulos OBD y OED se deduce que las tangentes tienen un punto común D y que $BD = DE$.

La longitud del arco BE de la circunferencia es mayor que la cuerda BE que le subtiende, pero, es menor que el perímetro de la quebrada BDE, circunscrita en torno a este arco con los extremos comunes a él.

Entonces,

$$2BC < 2 \cup AB < 2BD.$$

O sea:

$$BC < \cup AB < BD.$$

Designemos la medida en radianes del arco AB a través de z. Si $R = 1$, $BC = \operatorname{sen} z$ y $BD = \operatorname{tg} z$, de donde

$$\operatorname{sen} z < z < \operatorname{tg} z.$$

Dividiendo las desigualdades por sen z, se tiene:

$$1 < \frac{z}{\operatorname{sen} z} < \frac{1}{\cos z},$$

$$1 > \frac{\operatorname{sen} z}{z} > \cos z.$$

Cuando $z \to 0$, el límite de 1 y el límite de $\cos z$ son iguales a 1, y como la razón $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ se encuentra entre 1 y $\cos \alpha$, de acuerdo con (§ 57), su límite también es igual a 1.

Por lo tanto,

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1.$$

§ 87. Derivadas de las funciones trigonométricas

1°. *La derivada de sen x es igual a cos x.*

Demostración. Si $y = \operatorname{sen} x$, se tiene que $\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$. Aplicando la fórmula $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$, resulta:

$$\Delta y = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}.$$

Hallamos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (para lo cual es suficiente dividir por Δx solamente el factor $\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

La derivada será $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$.

Como el coseno es una función continua, segun (§ 71, 1°):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos \lim_{\Delta x \to 0} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x.$$

Para hallar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$, hacemos la substitución $\frac{\Delta x}{2} = z$. Entonces, $\Delta x = 2z$ y $z \to 0$, si $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{2z} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\frac{dy}{dx}=2\cdot\cos x\cdot\frac{1}{2}=\cos x$, que era lo que se trataba de demostrar.

2°. Si $u=\varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{(\operatorname{sen} u)'=\cos u\cdot u'} \qquad \text{(XII)}$$

Ejemplo. Hállese la derivada de la función: $y=\operatorname{sen}(2-3x)$.
Solución. Según la fórmula (XII):

$$y'=\cos(2-3x)\cdot(2-3x)'=-3\cdot\cos(2-3x).$$

3°. *La derivada de cos x es igual a —sen x.*

Demostración. Se sabe que $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. De aquí que

$$(\cos x)'=\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1)=-\operatorname{sen} x,$$

puesto que $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=-1$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen} x$, que era lo que se trataba de demostrar.

4°. Si $u=\varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{(\cos u)'=-\operatorname{sen} u\cdot u'} \qquad \text{(XIII)}$$

5°. *La derivada de tg x es igual a* $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Demostración. Como $\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, al aplicar la fórmula de la derivada de un quebrado (VII), se tiene:

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-(-\operatorname{sen} x)\cdot\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}=$$
$$\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

que era lo que se trataba de demostrar.

6°. Si $u=\varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'} \qquad \text{(XIV)}$$

7°. *La derivada de* $\operatorname{cotg} x$ *es igual a* $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Demostración. Como $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, al aplicar la fórmula (VII), se tiene:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$
$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

que era lo que se trataba de demostrar.

8°. Si $u = \varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u'} \qquad \text{(XV)}$$

9°. Ejemplos. 1. Hállese la derivada de la función:

$$y = \operatorname{ctg} \frac{2}{x}.$$

Solución. Aplicando la fórmula (XV), resulta:

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{2}{x}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{2}{x}}.$$

2. Hállese la derivada de la función: $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 2x$.

Solución. La función dada es potencial y se puede escribir así: $y' = \frac{1}{4} (\operatorname{sen} 2x)^4$. Por eso derivamos de acuerdo con la fórmula de una potencia (XI):

$$y' = \frac{1}{4} \cdot 4 (\operatorname{sen} 2x)^3 \cdot (\operatorname{sen} 2x)'.$$

Se halla la derivada de $\operatorname{sen} 2x$ por la fórmula (XII):

$y' = (\operatorname{sen} 2x)^3 \cdot \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \operatorname{sen}^3 2x \cdot \cos 2x = \operatorname{sen}^2 2x \cdot \operatorname{sen} 4x.$

3. Hállese la derivada de la función: $y = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

Solución. La función dada es potencial y la escribimos así:

$$y = [1 - (\operatorname{tg} x)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Según la fórmula (XI):

$$y' = \frac{1}{2}\,[1-(\operatorname{tg} x)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot [1-(\operatorname{tg} x)^2]' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}} \cdot (-2 \operatorname{tg} x) \cdot (\operatorname{tg} x)' =$$

$$= -\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x} \cdot \cos^2 x} = -\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x \sqrt{\cos 2x}} .$$

§ 88. Dos sistemas de logaritmos. El número e. Paso de un sistema de logaritmos a otro

1°. La función $y = \log_a x$ se llama logarítmica. A y se le llama logaritmo de x respecto a la base a. Se supone que la base $a > 0$, $a \neq 1$, y que el número $x > 0$. Si la base $a = 10$, el logaritmo se llama decimal y se designa por $\lg x$ sin indicar la base:

$$\log_{10} x = \lg x.$$

La sencillez de las propiedades de los logaritmos decimales los hace muy cómodos para su empleo en los cálculos. En las cuestiones teóricas tienen gran aplicación y resultan más convenientes los logaritmos cuya base es el límite de la expresión:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m,$$

cuando $|m| \to \infty$.

El académico Leonardo Euler (1707—1783) de Petersburgo, investigó la fórmula * siguiente para el cálculo de este límite:

$$\lim_{|m|\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots \qquad (1)$$

y lo designó por medio de la letra e:

$$\lim_{|m|\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

El número e es irracional, es decir, se expresa por medio de una fracción decimal infinita no periódica, y puede ser

* La fórmula fue descubierta por Daniel Bernoulli.

hallado aplicando la fórmula (1) con el grado de aproximación que se desee. En la suma:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\approx e.$$

el error no será mayor que $\frac{1}{k\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots k}$,

$$e=2{,}718281828459045\ldots$$

El número e juega un gran papel en la ciencia: e se toma como base de la función exponencial e^x y también como base de los logaritmos; muchos problemas de las matemáticas, la técnica y las ciencias naturales tienen su resolución en forma de expresiones que contienen la función e^{hx}.

Los logaritmos de los números, cuya base es el número e se llaman *logaritmos naturales*. Éstos se designan por el símbolo *ln* sin indicación de la base:

$$\log_e x=\ln x.$$

2°. Paso de un sistema de logaritmos a otro. Supongamos que se conocen los logaritmos de base e de unos números x, siendo necesario encontrar sus logaritmos de base a. Según la definición de logaritmo se tiene

$$x=a^{\log_a^x}\quad \text{y}\quad x=e^{\ln x},$$

de donde

$$a^{\log_a^x}=e^{\ln x}.$$

Logaritmemos esta igualdad según los logaritmos conocidos, es decir, con base e:

$$\log_a^x\cdot\ln a=\ln x\cdot\ln e=\ln x,$$

ya que $\ln e=1$. De aquí se obtiene

$$\boxed{\log_a^x=\ln x\cdot\frac{1}{\ln a},}\qquad\text{(A)}$$

o **sea**, *para obtener el logaritmo respecto a una nueva base, es suficiente multiplicar el logaritmo conocido por el* *número recíproco al logaritmo de la nueva base, respecto a la base antigua.*

El factor constante $\frac{1}{\ln a}$ se llama módulo de paso de la base e a la base a.

3°. Tomando en la fórmula (A) $x = N$ y suponiendo conocidos los logaritmos decimales, se obtiene la fórmula de paso de los logaritmos decimales a los naturales:

$$\boxed{\ln N = \lg N \cdot \frac{1}{\lg e}\,.} \tag{1}$$

Tomando $a = 10$ y $x = N$, se obtiene la fórmula de paso de los logaritmos naturales a los decimales:

$$\boxed{\lg N = \ln N \cdot \frac{1}{\ln 10}\,.} \tag{2}$$

Multiplicando las igualdades (1) y (2) se halla que

$$\lg e \cdot \ln 10 = 1,$$

es decir, $\lg e$ y $\ln 10$ son números mútuamente inversos

$$\lg e = 0{,}4342945, \qquad \ln 10 = 2{,}302585,$$
$$\frac{1}{\lg e} = 2{,}302585, \qquad \frac{1}{\ln 10} = 0{,}4342945.$$

Las fórmulas (1) y (2) se pueden escribir así:

$$\ln N = \ln N \cdot \ln 10$$
$$\lg N = \ln N \cdot \lg e.$$

4°. Mostremos cómo pasar de la base a de la potencia a^x a la base e.

Por definición del logaritmo, el número

$$a = e^{\ln a}.$$

Elevando a la potencia x ambos miembros de la igualdad, se obtiene:

$$a^x = e^{x \ln a}. \tag{B}$$

§ 89. Derivada del logaritmo

1°. *La derivada del* ln *es* $\frac{1}{x}$.

Demostración. Para $y = \ln x$, se tiene:

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x,$$

$$\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x},$$

es decir

$$\Delta y = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Para hallar la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, se multiplica el segundo miembro de la igualdad por $\frac{1}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Indicando $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{m}$, obtenemos $\frac{1}{\Delta x} = \frac{m}{x} = \frac{1}{x} \cdot m$, por lo tanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot m \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Como $m \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, se tiene que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

En el segundo miembro de la igualdad obtenida, la variable es m (x es invariable), y si $\Delta x \to 0$, se tiene $|m| = \left|\frac{x}{\Delta x}\right| \to \infty$.

Hallando el límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $\Delta x \to 0$ y $|m| \to \infty$, tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{|m| \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$$

y debido a la continuidad del logaritmo, según § 71, 1°, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \ln \lim_{|m| \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Pero

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = (\ln x)\ , \ \text{y} \lim_{|m| \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Por eso

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot \ln e,$$

y como $\ln e = \log_e e = 1$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, que era lo que se trataba de demostrar.

2°. Si $u = \varphi(x)$, se tiene

$$\boxed{(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'} \qquad \text{(XVI)}$$

3°. *La derivada del* $\log a^x$ *es igual a* $\frac{1}{x \ln a}$.

D e m o s t r a c i ó n. Según la regla de paso de un sistema de logaritmos a otro se tiene:

$$\log_a x = \ln x \cdot \frac{1}{\ln a}.$$

Como $\frac{1}{\ln a}$ es el factor constante, según la fórmula (III) y (XVI):

$$(\log_a x)' = (\ln x)' \cdot \frac{1}{\ln a},$$

y por lo tanto $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, que era lo que se trataba de demostrar.

4°. Si $u = \varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{y' = (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'.} \qquad \text{(XVII)}$$

5°. E j e m p l o s. 1. Hállese la derivada de la función:

$$y = \log_a (x^2 + 4).$$

S o l u c i ó n. Aplicando la fórmula (XVII) resulta:

$$y' = \frac{1}{(x^2+4) \cdot \ln a} \cdot (x^2+4)' = \frac{2x}{(x^2+4) \cdot \ln a}.$$

2. Hállese la derivada de la función: $y = \ln (x^2+4)^2$.

S o l u c i ó n. Al derivar una función logarítmica es conveniente, en primer lugar, tomar el logaritmo, en el caso de que esto sea posible, ya que facilita la determinación de la derivada. Una vez tomado el logaritmo de la potencia $(x^2+4)^2$, se tiene:

$$y = 2\cdot\ln (x^2+4).$$

Aplicando las fórmulas (III) y (XVI), resulta:

$$y' = 2\cdot\frac{1}{x^2+4}\cdot(x^2+4)' = \frac{4x}{x^2+4}.$$

3. Hállese la derivada de la función: $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$.

S o l u c i ó n. Una vez tomados los logaritmos de la raíz y del quebrado, se tiene:

$$y = \frac{1}{2}\cdot\ln (1+\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2}\ln (1-\operatorname{sen} x).$$

Derivando la diferencia y aplicando las fórmulas (III), (XVI) y (XII), hallamos:

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\cdot\cos x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\cdot(-\cos x) =$$

$$= \frac{\cos x}{2}\left(\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}+\frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\right) = \frac{\cos x}{2}\cdot\frac{2}{1-\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}.$$

El resultado es muy sencillo: $\dfrac{1}{\cos x}$. Examinando atentamente la función que se deriva, se ve que se la puede simplificar, transformándola según las fórmulas trigonométricas. En efecto,

$$\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} = \ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

Hallemos la derivada:

$$y' = \left[\ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right]' = \frac{1}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} \times$$

$$\times \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \frac{1}{\cos x}.$$

¿Se evita dedicar energías y tiempo al simplificar previamente la función derivada? Es evidente que no. La solución se ha hecho más larga y ha exigido la aplicación de varias fórmulas trigonométricas, mientras que en el primer caso, por el contrario, se ha empleado sólo una fórmula. Así pués, las simplificaciones previas de la función dada no siempre aceleran la solución, por lo que al derivar no suele recurrirse a ellas.

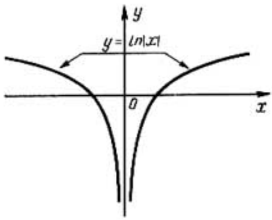


Fig. 107

5°. *La derivada de la función* $\ln |x|$ *es igual a* $\frac{1}{x}$.

Demostración. Ante todo anotemos que la función $z = \ln |x|$ está definida en el conjunto de todos los números positivos y negativos; para $x = 0$ no está definida (fig. 107). En otras palabras, la función $y = \ln |x|$ está definida en los intervalos $-\infty < x < 0$ y $0 < x < +\infty$.

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$, y $\ln |x| = \ln x$, $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, y $\ln |x| = \ln(-x)$,

$$(\ln |x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} (-x)' = \frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

De este modo, para cualquier valor $x \neq 0$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

§ 90. Derivada de la función inversa

Teorema. *Si la función $x = f(y)$ es estrictamente monótona tiene en el punto y derivada $f'(y)$, distinta de cero, la función inversa $y = \overline{f}(x)$ tiene derivada en el punto x, correspondiente al punto y, y además ella es igual a la magnitud inversa de la derivada de la función directa en el punto y,*

$$\boxed{y'_x = \frac{1}{x'_y}\ .} \qquad \text{(XVIII)}$$

Demostración. Hallemos la derivada de la función $x = f(y)$. Dando a y un incremento $\Delta y \neq 0$, la función $x = f(y)$ recibirá un incremento Δx, $x + \Delta x = f(y + \Delta y)$. Por ser la función $x = f(y)$ estrictamente monótona,

$$x + \Delta x \neq x, \text{ es decir, } \Delta x \neq 0.$$

Entonces

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}, \text{ y } y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

La tendencia a cero de Δx se puede sustituir por la tendencia a cero de Δy, ya que en caso de la continuidad de la función $x = f(y)$ $\Delta x \to 0$ si $\Delta y \to 0$, y gracias a que la correspondencia entre los valores de Δx y Δy es bimívoca, se tiene también: $\Delta y \to 0$ si $\Delta x \to 0$. Por lo tanto:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'_y}\ .$$

que es lo que se trataba de demostrar.

§ 91. Derivada de la función exponencial

1°. La función exponencial $y = a^x$, la consideramos como función inversa a la función logarítmica: $x = \log_a y$, y que satisface las condiciones del teorema § 90.

Según la fórmula (XVIII) se tiene:

$$(a^x)'_x = \frac{1}{(\log_a y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \cdot \ln a}} = y \cdot \ln a.$$

Sustituyendo y por a^x, se tiene:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a} \qquad \text{(XIXa)}$$

2°. Si la base $a=e$, es decir, si $y=e^x$, resulta:

$$\boxed{(e^x)'=e^x,} \qquad \text{(XXa)}$$

porque $\ln a=\ln e=1$.

3°. Si $u=\varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{y'=(a^u)'=a^u\cdot u'\cdot\ln a} \qquad \text{(XIX)}$$

$$\boxed{y'=(e^u)'=e^u\cdot u'} \qquad \text{(XX)}$$

§ 92. Derivada de la potencia con exponente arbitrario

1°. Demostremos la fórmula (II) de la derivada de una potencia de exponente fraccionario e irracional, que fue dada sin demostración. Examinaremos solamente el caso en que las bases sean positivas.

En la ecuación $y=x^n$ $x>0$, n es un número fraccionario o irracional. Tomando $y=x^n$, se tiene según el § 88,4°:

$$y=e^{n\ln x}.$$

Según la fórmula (XX):

$$y'=(e^{n\ln x})'=e^{n\ln x}\cdot n\cdot\frac{1}{x}=x^n\cdot n\cdot\frac{1}{x}=n\cdot x^{n-1}.$$

Por lo tanto, $(x^n)'=nx^{n-1}$, que era lo que se trataba de demostrar.

2°. *La función u^v, en la que la base u y el exponente v son funciones de x, se llama función exponencial compuesta.*

Suponiendo que $u>0$ y que las funciones u y v son derivables respecto a x, demostraremos que u^v tiene derivada.

Tomando $y=u^v$, se tiene (según el § 88,4°):

$$y=e^{v\ln u}, \text{ o } u^v=e^{v\ln u}.$$

Como $e^{v\cdot\ln u}$ tiene derivada, u^v también tendrá derivada, que se halla por medio de la fórmula (XX).

3°. Ejemplos. 1. Hállese la derivada de la función: $y=x^x$.

Solución. $x^x=e^{x\cdot\ln x}$. Según la fórmula (XX):

$$y'=(e^{x\cdot\ln x})'=e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)'=e^{x\cdot\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x\cdot(\ln x+1).$$

2. Hállese la derivada de la función: $y=(\cos x)^{\operatorname{sen} x}$.

Solución. $(\cos x)^{\operatorname{sen} x}=e^{\operatorname{sen} x\cdot\ln\cos x}$,

$$y'=(e^{\operatorname{sen} x\cdot\ln\cos x})'=e^{\operatorname{sen} x\cdot\ln\cos x}\cdot(\operatorname{sen} x\cdot\ln\cos x)'=$$

$$=e^{\operatorname{sen} x\cdot\ln\cos x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\operatorname{sen} x\right)=$$

$$=(\cos x)^{\operatorname{sen} x}\cdot(\cos x\cdot\ln\cos x-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{tg} x).$$

§ 93. Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

1°. $y=\operatorname{arc\,sen} x$, $y=\operatorname{arc\,cos} x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$ e $y=\operatorname{arc\,cotg} x$ son funciones inversas respectivamente a las funciones: $x=\operatorname{sen} y$, $x=\cos y$, $x=\operatorname{tg} y$ y $x=\operatorname{cotg} y$, las cuales satisfacen las condiciones del teorema del § 90. Por eso sus derivadas las hallamos según la fórmula (XVIII).

2°. $(\operatorname{arc\,sen} x)'_x=\dfrac{1}{(\operatorname{sen} y)'_y}=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}$ * .

Como $\operatorname{sen} y=x$, sustituyendo $\operatorname{sen}^2 y$ por x^2, resulta:

$$\boxed{(\operatorname{arc\,sen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\qquad\text{(XXIa)}$$

3°. $(\operatorname{arc\,cos} x)'_x=\dfrac{1}{(\cos y)'_y}=-\dfrac{1}{\operatorname{sen} y}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$ ** ,

o sea

$$\boxed{(\operatorname{arc\,cos} x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\qquad\text{(XXIIa)}$$

4°. $(\operatorname{arc\,tg} x)'_x=\dfrac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y}=\dfrac{1}{\cos^2 y}=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$.

Como $\operatorname{tg} y=x$, sustituyendo $\operatorname{tg}^2 y$ por x^2, resulta:

$$\boxed{(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}}\qquad\text{(XXIIIa)}$$

---

* Delante de la raíz se pone el signo más porque $\cos y<0$, puesto que $-\frac{\pi}{2}<y<+\frac{\pi}{2}$.

** $\operatorname{sen} y>0$, puesto que $0<y<\pi$.

5°. $(\operatorname{arc\,cotg} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{cotg} y)'_y} = \operatorname{sen}^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y}$,

o sea

$$\boxed{(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}} \qquad \text{(XXIVa)}$$

6°. Si $u=\varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{(\operatorname{arc\,sen} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'} \qquad \text{(XXI)}$$

$$(\operatorname{arc\,cos} u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u' \qquad \text{(XXII)}$$

$$(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u' \qquad \text{(XXIII)}$$

$$(\operatorname{arc\,cotg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u' \qquad \text{(XXIV)}$$

7°. Ejemplos. 1. Hállese la derivada de la función: $y = \operatorname{arc\,sen} ax$.

Solución. Según la fórmula (XXI):

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(ax)^2}}\cdot(ax)'\, \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}\,.$$

2. *Hállese la derivada de la función:* $y = \operatorname{arc\,tg}(2x^2-7)$.

Solución. Según la fórmula (XXIII):

$$y' = \frac{1}{1+(2x^2-7)^2}\cdot(2x^2-7)' = \frac{4x}{1+4x^4-28x^2+49} =$$

$$= \frac{2x}{2x^4-14x^2+25}\,.$$

§ 94. Derivadas de segundo orden y de órdenes superiores

La derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$ es una función del mismo argumento x. Puede ocurrir que la derivada sea una función derivable, por lo que se puede buscar su derivada.

Ejemplo. Si se considera la función $y = x^4$, la derivada será: $(x^4)' = 4x^3$; y la derivada de la función derivada será: $(4x^3)' = 12x^2$.

La derivada de la función dada se llama derivada primera o derivada de primer orden; la derivada de la primera derivada se llama derivada segunda o derivada de *segundo orden*, y se designa así: y'', $f''(x)$, o así $y^{(2)}$, $f^{(2)}(x)$, o así $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$. La derivada de la segunda derivada se llama derivada tercera o derivada de tercer orden, y se designa así: y''', $f'''(x)$, o así $y^{(3)}$, $f^{(3)}(x)$, o así $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$, etc.

El proceso para hallar las derivadas una tras otra se llama *derivación sucesiva*.

Ejemplos. 1. $y=x^4$; $y'=4x^3$; $y''=12x^2$; $y'''=24x$; $y^{IV}=24$;

$$y^{V}=0.$$

2. $y=\ln x$; $y'=\frac{1}{x}=x^{-1}$; $y''=-1x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$; $y'''=+1\cdot 2\cdot x^{-3}=\frac{1\cdot 2}{x^3}$; $y^{IV}=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$, etc.

§ 95. Sentido mecánico de la segunda derivada

Supongamos que un punto se mueve rectilíneamente y el espacio recorrido por él se determina por la ecuación $s=f(t)$, donde t es el tiempo. La velocidad v (§ 72) en el momento t es la derivada del espacio respecto al tiempo, es decir,

$$v=\frac{ds}{dt}.$$

La velocidad de variación de la velocidad, en el movimiento rectilíneo, en el momento de tiempo t es la aceleración a.

$$a=(v)'=\left(\frac{ds}{dt}\right)'=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

La segunda derivada del espacio recorrido respecto al tiempo es la aceleración del movimiento rectilíneo en el momento dado de tiempo.

Ejemplo. El movimiento rectilíneo de un punto se hace según la ley:

$$s=(t^3-2)\,m.$$

Determinar la aceleración en el momento $t=10$ seg.

Solución. La aceleración $a=\frac{d^2s}{dt^2}$

Derivando la función $s=t^3-2$, se obtiene $\frac{d^2s}{dt^2}=6t$.

Por lo tanto,

$$a=6t=6\cdot 10=60;\ a=60\ \text{m/seg}^2.$$

2°. Si el movimiento es irregular, entonces la fuerza F que realiza este movimiento no es constante; a cada momento de tiempo t le corresponde un valor determinado de la fuerza aplicada F; por esto la fuerza es una función del tiempo t, $F=f(t)$.

Según la ley de Newton, en cada momento de tiempo la fuerza aplicada F es igual al producto de la masa m por la aceleración a, es decir,

$$F=ma,\ \text{o}\ f(t)=ma.$$

En el movimiento rectilíneo $a=\frac{d^2s}{dt^2}$; por esto

$$f(t)=m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Conociendo la ecuación del movimiento rectilíneo, se puede, mediante la derivación, hallar el valor de la fuerza activa en cada intervalo de tiempo.

E j e m p l o. Determinar la fuerza, bajo la acción de la cual un punto material efectúa oscilaciones rectilíneas según la ley

$$s=A\cdot\text{sen}\,(\omega t+\omega_0).$$

S o l u c i ó n. $f(t)=m\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$, por lo tanto, hallemos la segunda derivada de la función:

$$s=A\cdot\text{sen}\,(\omega t+\omega_0),$$

$$\frac{ds}{dt}=A\cdot\cos\,(\omega t+\omega_0)\cdot\omega,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-A\cdot\text{sen}\,(\omega t+\omega_0)\cdot\omega^2=-s\cdot\omega^2=-\omega^2 s;$$

$$f(t)=-m\omega^2 s,$$

es decir, las oscilaciones analizadas se efectúan bajo la acción de una fuerza proporcional al desplazamiento s, y dirigida en sentido contrario.

CAPITULO VIII

APLICACION DE LAS DERIVADAS PARA EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES

§ 96. Criterios de la monotonía rigurosa de una función

Consideremos a la función $y = f(x)$ derivable en cada punto del intervalo (o del segmento) en el que se examina.

1°. Criterios de constancia de una función. En el § 77 fue demostrado que si $f(x)$ es constante, entonces en cada punto del segmento su derivada es igual a cero. En los cursos más completos de análisis se demuestra la suficiencia de esta condición: *si en cada punto del segmento la derivada $f'(x)$ es igual a cero, la función $f(x)$ es constante en este segmento.*

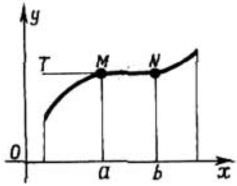
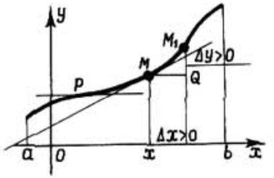


Fig. 108

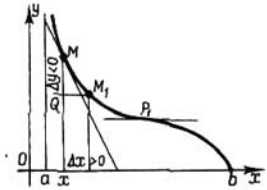
Esto es geométricamente evidente: si $f'(x) = 0$ en todos los puntos del segmento $[a, b]$, la tangente a a la gráfica de la función $y = f(x)$ en cada uno de los puntos x es paralela al eje Ox (§ 74) (fig. 108). Al pasar x de un valor a a sus valores sucesivos del segmento $a \leqslant x \leqslant b$ el punto de contacto M se desplaza a la derecha, pero permanece en la misma tangente trazada en el punto a, porque la tangente no cambia de su dirección. En consecuencia, el valor de la función, igual a $f(a)$, permanece invariable para todos los puntos del segmento $[a, b]$, y la tangente, en el punto a permanece la gráfica de la función en este segmento.

2°. Criterios de crecimiento y decrecimiento de una función. *La condición* (necesaria y suficiente) *del crecimiento* (*decricimiento*) *de una función en un intervalo consiste en que su derivada es positiva* (*o negativa*) *en cada punto del intervalo con la posible excepción de puntos aislados, en los cuales la derivada es igual* *a cero* (puntos aislados se entienden en el sentido de que ellos no constituyen ningún intervalo).

D e m o s t r e m o s l a n e c e s i d a d. La función $y = f(x)$ es creciente (fig. 109), (decreciente, fig. 110) en el intervalo $a < x < b$. Entonces en un entorno de cualquier punto x de este intervalo el incremento Δx en el punto x y el



F i g. 109



F i g. 110

incremento correspondiente de la función $\Delta y = f(x + \Delta x) - - f(x)$ tienen los mismos (opuestos) signos. Por esto la razón

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$$

y su límite, para $\Delta x \to 0$ $f'(x) \geqslant 0$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} < 0$$

y su límite, para $\Delta x \to 0$ $f'(x) \leqslant 0$.

Los puntos de la función creciente (o decreciente), en los que la derivada $f'(x) = 0$, son puntos aislados en el sentido de que sus abscisas no forman un segmento, porque si fuera $f'(x) = 0$ en el intervalo $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$ $(a < a_1 < b_1 < b)$, la función $f(x)$ tendría un mismo valor en este segmento, es decir, no sería creciente (o decreciente).

La demostración de la suficiencia de la condición ("*si* $f'(x)$ *es positiva (negativa) en el intervalo* (a, b) *con la posible excepción de puntos aislados, en los cuales* $f'(x) = 0$, *entonces* $f(x)$ *es función creciente (decreciente) en este intervalo*" y sale de los límites de este curso breve y se puede encontrar en los cursos superiores de análisis.

Supongamos que φ es ángulo formado por la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto x. En el intervalo de crecimiento de $f(x)$

$$f'(x)=\operatorname{tg}\varphi \geqslant 0 \text{ y } 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2},$$

y en el intervalo de decrecimiento

$$f'(x)=\operatorname{tg}\varphi \leqslant 0 \text{ y } \frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi,$$

es decir, la tangente, trazada a la gráfica de la función en el punto de crecimiento de la función, forma con el eje de abscisas un ángulo agudo o es paralela a este eje (fig. 109), y si está trazada en el punto de decrecimiento de la función, un ángulo obtuso, o es paralela a éste eje (fig. 110). En las figuras 109 y 110 la tangente es paralela al eje Ox en los puntos P y P_1.

3°. E j e m p l o. Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - x^2 - 8x + 2$.

S o l u c i ó n. Para aplicar los criterios de crecimiento y decrecimiento de la función hallaremos la derivada de la función dada y determinaremos los valores de x para los cuales es positiva o negativa:

$$y' = 3x^2 - 2x - 8.$$

Descomponemos el trinomio de segundo grado en factores, ya que es mucho más fácil determinar el signo del producto por los signos de los factores que el signo de la suma por los signos de los sumandos.

Las raíces del trinomio son:

$$x=\frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{3}=\frac{1 \pm 5}{3}; \quad \text{o sea,} \quad x_1=-\frac{4}{3}, \quad x_2=2,$$

y por lo tanto:

$$y'=3\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)\cdot(x-2).$$

El factor $x+\frac{4}{3}$ es negativo si $x<-\frac{4}{3}$ y positivo si $x>-\frac{4}{3}$. El factor $x-2$ es negativo si $x<2$ y positivo si $x>2$. El signo del producto dependerá de la posición del punto x en el eje Ox respecto *a los puntos* $-\frac{4}{3}$ *y 2. Los puntos* $-\frac{4}{3}$ *y 2 dividen todo el eje* en tres intervalos:

$$1)\ -\infty < x < -\frac{4}{3}, \quad 2)\ -\frac{4}{3} < x < 2, \quad 3)\ 2 < x < +\infty.$$

Para determinar el signo de la derivada en cada uno de los intervalos formamos la siguiente tabla:

Número del intervalo	Carácter del intervalo	Signo de $x+\frac{4}{3}$	Signo de $x-2$	Signo de $f'(x)$	La función dada
1	$-\infty < x < -\frac{4}{3}$	$-$	$-$	$+$	crece
2	$-\frac{4}{3} < x < 2$	$+$	$-$	$-$	decrece
3	$2 < x < +\infty$	$+$	$+$	$+$	crece

Por lo tanto, la función dada crece en los intervalos $-\infty < x < -\frac{4}{3}$ y $2 < x < +\infty$ y decrece en el intervalo $-\frac{4}{3} < x < 2$.

La gráfica de la función dada está representada en la figura 111.

4°. La función $y = x^3$ (fig. 69) tiene la derivada $y = 3x^2$, que es positiva para cualquier valor de x distinto de cero. Si $x = 0$, la derivada $y' = 0$. La función $y = x^3$ crece en el intervalo $-\infty < x < +\infty$; $x = 0$, *siendo el único punto separado* en el que la derivada es igual a cero; en dicho punto crece la función. En efecto, si $x = 0$, $x^3 = 0$; si $x < 0$, $x^3 < 0$, y si $x > 0$, $x^3 > 0$.

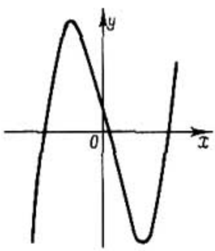


Fig. 111

§ 97. Problemas de determinación de los valores máximos y mínimos absolutos

1°. Se necesita cercar con una alambrada de 60 metros una parcela contigua a la pared de una casa (fig. 112). ¿De qué longitud y anchura debe ser la parcela para que el área sea la máxima?

S o l u c i ó n. Supongamos que la anchura de la parcela es x metros, y el área, y metros cuadrados:

$$y = (60 - 2x) \cdot x = 60x - 2x^2.$$

Los valores de x e y no pueden ser negativos, por eso, el factor $60 - 2x > 0$, y $0 < x < 30$.

El área y es función de x. Determinamos los intervalos de su crecimiento y decrecimiento. Hallamos la derivada:

$$y' = 60 - 4x.$$

De aquí vemos que $y' > 0$ para $x < 15$, y en este caso crece la función; por otra parte, $y' < 0$ para $x > 15$, y en este caso decrece la función.

He aquí una tabla de la función para ciertos valores de x:

Si la anchura $x =$	0	5	10	15	20	25	30
el área $y =$	0	250	400	450	400	250	0

La curva (fig. 113) se eleva desde el origen 0 hasta el punto M ($x = 15$), y después comienza a descender. La función tiene el valor máximo en el punto $x = 15$.

Por lo tanto, la parcela tendrá el área máxima si su anchura es $x = 15$ metros, y su longitud $60 - 2x = 60 - 30 = 30$ metros.

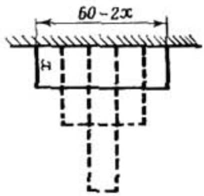


Fig. 112

2°. ¿Cuáles tienen que ser las medidas de una habitación rectangular de 36 metros cuadrados para que su perímetro sea el menor?

S o l u c i ó n Supongamos que la longitud es igual a x metros; la anchura del rectángulo será $\frac{36}{x}$ metros, y el perímetro:

$$y = 2\left(x + \frac{36}{x}\right) = 2x + \frac{72}{x}.$$

El perímetro y es función de la longitud x, definida para *todos los valores positivos de* x:

$$0 < x < +\infty.$$

Determinemos los intervalos de su crecimiento y decrecimiento:

$$y' = 2 - \frac{72}{x^2} = \frac{2(x^2 - 36)}{x^2} = \frac{2(x-6)(x+6)}{x^2}.$$

El signo de la derivada se determina por medio del signo de la diferencia $x - 6$. En el intervalo $0 < x < 6$ $y'(< 0$,

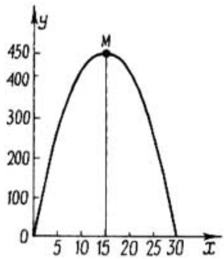


Fig. 113

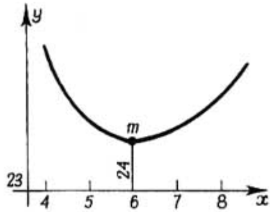


Fig. 114

y en el intervalo $6 < x < +\infty$ $y' > 0$. El perímetro decrece en el intervalo $0 < x < 6$ y crece en el intervalo $6 < x < +\infty$. La gráfica (fig. 114) se construye con ayuda de la siguiente tabla:

Si $x =$	$\to 0$	3	4	5	6	7	8	$\to \infty$
$y =$	$\to \infty$	30	26	24,4	24	24,3	25	$\to \infty$

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo tiene su valor mínimo si su longitud es de 6 metros, y su anchura de $\frac{36}{6} = 6$ metros, es decir, si es un cuadrado.

§ 98. Máximos y mínimos de la función

Los problemas cuya finalidad es hallar los valores máximos y mínimos de las magnitudes tienen gran aplicación en la técnica y se reducen, como se ve en los ejemplos, a hallar un máximo y un mínimo de la función.

D e f i n i c i o n e s. 1. *El valor de la función $f(x)$, si $x = c$, se llama un máximo de ésta en el punto c, si él es mayor que su valor $f(x)$ en cualquier punto x, tomado en un entorno del punto $x = c$.*

2°. *El valor de la función $f(x)$, si $x = c$, se llama un mínimo de ésta en el punto c, si él es menor que su valor en cualquier punto x, tomado en un entorno del punto $x = c$.*

A los términos "máximo" y "mínimo" se les da la denominación común de "extremos".

Al valor del argumento en el que la función alcanza el máximo (o el mínimo) lo llamaremos *punto de máximo (de mínimo) o punto de extremo.*

La función puede tener solamente un máximo, por ejemplo, la función $y = 60x - 2x^2$ (fig. 113), o solamente un mínimo, por ejemplo, la función $y = 2x + \frac{72}{x}$ (fig. 114), o tener un máximo y un mínimo, como por ejemplo, la función $y = x^3 - x^2 - 8x + 2$ (fig. 111). La función puede tener unos cuantos máximos y mínimos (fig. 115), alternándose en este caso los máximos y los mínimos. *La función puede no tener ni máximos ni mínimos.* Por ejemplo, las funciones $y = x^3$, $y = \operatorname{cotg} x$, $y = a^x$ no tienen ni máximo ni mínimo porque al crecer x desde $-\infty$ hasta $+\infty$, la primera y tercera funciones crecen, y la segunda decrece.

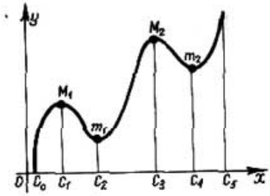


Fig. 115

El máximo (mínimo) de una función puede no ser el valor máximo (mínimo) absoluto de ésta. Así, la función de la figura 115 alcanza en el punto c_5 mayor valor que los máximos c_1M_1 y c_3M_2, y en el punto c_0 menor valor que los mínimos c_2m_1 y c_4m_2, y el mínimo c_4m_2 es mayor que el máximo c_1M_1. *El máximo (mínimo) de una función en el punto dado es el mayor (menor) valor de la función solamente respecto a sus valores en los puntos situados a la izquierda y a la derecha en una proximidad suficientemente estrecha del punto extremo.*

§ 99. Criterios de existencia de extremos

1°. Condición necesaria. *En el punto de extremo de la función derivable su primera derivada es igual a cero.*

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $x = c$ es un máximo de la función $f(x)$ en un δ-entorno del punto $x = c$ (fig. 116). Representemos los valores del argumento x del semientorno a la izquierda del punto c en la forma $c - \Delta x$, y a la derecha en la forma $c + \Delta x$, siendo $0 < \Delta x < \delta$. El valor de la función $f(x)$ en el punto c es $f(c)$, en el semientorno a la izquierda es $f(c - \Delta x)$, y a la derecha, $f(c + \Delta x)$.

Según la definición de máximo de una función:

$$f(c - \Delta x) < f(c) \text{ y } f(c + \Delta x) < f(c),$$

por lo tanto:

$$f(c - \Delta x) - f(c) < 0 \text{ y } f(c + \Delta x) - f(c) < 0.$$

Los primeros miembros de las desigualdades expresan el incremento de la función en el punto $x = c$ al variar el argumento respectivamente en $-\Delta x$ y $+\Delta x$. Al formar la razón del incremento de la función respecto al incremento del argumento, se tiene:

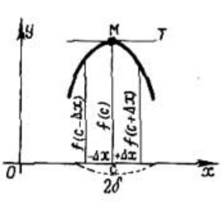


Fig. 116

$$\frac{f(c - \Delta x) - f(c)}{-\Delta x} > 0 \quad (1);$$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{+\Delta x} < 0. \quad (2)$$

Ambas razones (1) y (2) tienen un mismo límite para $\Delta x \to 0$, porque según la condición, la función $f(x)$ tiene derivada en el punto c:

$$\lim_{-\Delta x \to 0} \frac{f(c - \Delta x) - f(c)}{-\Delta x} = f'(c) \quad \text{y} \quad \lim_{+\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{+\Delta x} = f'(c).$$

De la desigualdad (1) se deduce (§ 56) que $f'(c)$ es positiva o es igual a cero, y la desigualdad (2) indica que $f'(c)$ no puede ser positiva. Por lo tanto,

$$f'(c) = 0,$$

que era lo que se trataba de demostrar.

2°. T e o r e m a (c r i t e r i o s u f i c i e n t e). *Si en un entorno de amplitud 2δ del punto $x = c$: la función $f(x)$ es continua, su derivada, $f'(x)$, a la izquierda del punto $x = c$ es positiva, y a la derecha, negativa, el valor $x = c$ es punto de máximo de la función.*

D e m o s t r a c i ó n. La función dada es continua en el δ-entorno del punto c, por eso los números $f(c)$, $f(c-\Delta x)$ y $f(c+\Delta x)$, si $0 < \Delta x < \delta$ existen y

$$\lim_{-\Delta x\to 0} f(c-\Delta x) = \lim_{-\Delta x\to 0} f(c+\Delta x) = f(c).$$

La función dada $f(x)$ en el semientorno a la izquierda de punto c es creciente porque su derivada a la izquierda del punto c es positiva, y en el semientorno a la derecha es decreciente, ya que su derivada a la derecha del punto c es negativa (fig. 116), y por eso, sus valores

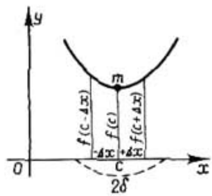
$$f(c-\Delta x) \text{ y } f(c+\Delta x)$$

crecen al tender Δx a cero *. De tal manera que para cada valor $\Delta x \neq 0$:

$$f(c-\Delta x) < f(c) \text{ y } f(c+\Delta x) < f(c).$$

Pero en este caso, $f(c)$ es máximo de la función $f(x)$.

3°. Del mismo modo se puede demostrar que *si en el entorno del punto $x = c$, la función $f(x)$ es continua, y la derivada $f'(x)$ a la izquierda del punto $x = c$ es negativa, y a la derecha es positiva, el valor $x = c$ es punto de mínimo de la función* (fig. 117).



F i g. 117

4°. Tanto en el punto de máximo como en el punto de mínimo, la derivada es igual a cero (1°). Lo recíproco es falso. *Una función puede no tener ni máximo ni mínimo en el punto en el que la derivada es igual a cero.*

Por ejemplo, la función $y = x^3$ tiene derivada igual a cero en el punto $x = 0$ (§ 96, 4°). Sin embargo, en el punto $x = 0$ no existe ni máximo ni mínimo, y la función crece, cualesquiera que sean los valores de x, incluso si $x = 0$.

De aquí que *la función $f(x)$ no tiene en el punto $x = c$ ni máximo ni mínimo si su derivada es igual a cero en este punto y tiene idéntico signo a la izquierda y a la derecha de él.*

* Según la definición de la función decreciente (§ 64,7°), a valor *menor* del argumento corresponde un valor *mayor* de la función, es decir, si $x_1 > x_2$, será $f(x_1) < f(x_2)$.

5°. D e f i n i c i ó n. *Los valores del argumento x, para los cuales la derivada $f'(x)$ es igual a cero, se llaman puntos estacionarios.*

La tangente en los puntos estacionarios es paralela al eje Ox.

§ 100. Regla para hallar el extremo

1°. *Para hallar el extremo de una función es necesario:*

1) *hallar su derivada;*

2) *igualar la derivada a cero y resolver la ecuación obtenida; de las raíces que resultan se eligen las reales; si todas las raíces resultan imaginarias, la función no tiene extremo;*

3) *determinar el signo de la derivada en los intervalos del campo de determinación de la función limitados por las raíces reales; si la derivada es positiva en un intervalo situado a la izquierda del punto estacionario dado, y es negativa en un intervalo situado a la derecha de dicho punto, el punto dado es punto de máximo de la función; si la derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha del punto estacionario dado, este punto es punto de mínimo de la función; si la derivada tiene un mismo signo, tanto a la izquierda como a la derecha del punto estacionario, en este punto la función no tiene ni máximo ni mínimo;*

4) *sustituyendo el argumento en la expresión dada de la función por el valor que da el máximo o el mínimo de la función, se obtiene el correspondiente valor máximo o mínimo de la función.*

Si la función tiene puntos de discontinuidad, éstos deben ser incluidos en el número de puntos estacionarios que parten a Ox en intervalos, en los cuales se determina el signo de la derivada.

§ 101. Ejemplos de cálculo de extremo

1°. Para hallar el máximo y el mínimo de la función

$$y=2+3x^2-x^3,$$

1) hallamos la derivada:

$$y'=6x-3x^2,$$

2) igualamos la derivada a cero y resolvemos la ecuación obtenida:

$$6x-3x^2=0; \qquad 3x(2-x)=0; \qquad x_1=0, \ x_2=2;$$

Los puntos 0 y 2 dividen el eje Ox en tres intervalos:

$$1)\ -\infty < x < 0,\quad 2)\ 0 < x < 2 \text{ y } 3)\ 2 < x < +\infty;$$

3) descomponemos $6x-3x^2$ en factores:

$$y' = -3x(x-2),$$

y determinamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos:

N del intervalo	Carácter del intervalo	Signo de $-3x$	Signo de $x-2$	Signo de y'
1	$-\infty < x < 0$	+	−	−
2	$0 < x < 2$	−	−	+
3	$2 < x < +\infty$	−	+	−

La derivada es negativa en el intervalo situado a la izquierda del punto $x = 0$, y positiva en el intervalo situado a su derecha, por so, $x = 0$ es punto de mínimo de la función.

La derivada es positiva a la izquierda, y negativa a la derecha del punto $x = 2$, por eso, $x = 2$ es punto de máximo de la función;

4) en la ecuación dada $y = 2 + 3x^2 - x^3$ sustituimos x por los valores obtenidos 0 y 2, resultando:

$$y_{\text{mín}} = 2,\quad y_{\text{máx}} = 6.$$

2°. Hállense los puntos de máximo y de mínimo de la función:

$$y = \frac{3x^2+5x+25}{x+2}.$$

Solución. La función dada no tiene valor numérico si $x=-2$, y el valor -2 es punto de discontinuidad. Teniendo esto en cuenta,

1) hallamos la derivada:

$$y' = \frac{3(x^2+4x-5)}{(x+2)^2};$$

2) igualamos la derivada a cero. Pero un quebrado es igual a cero si el numerador es cero,

$$x^2+4x-5=0.$$

Resolviendo esta ecuación, se tiene:

$$x_1 = -5;\quad x_2 = +1\,^*.$$

---

* Puede ocurrir que el numerador del quebrado *sea un número* constante. Este caso se examina más adelante, en el § 104.

Incluimos el punto de discontinuidad $x = -2$ en el número de puntos que dividen a Ox en intervalos, en los cuales es necesario determinar el signo de la derivada;

3) el signo de la derivada en cualquier punto x, excluyendo los puntos de discontinuidad, se determina por el signo de $x^2 + 4x - 5$, ya que el coeficiente 3 del numerador de la derivada y el del denominador de la misma $(x+2)^2$ son positivos. Para mayor comodidad descomponemos el numerador en factores:

$$x^2+4x-5=(x+5)(x-1),$$

N del intervalo	Carácter del intervalo	Signo de $x+5$	Signo de $x-1$	Signo de y'
1	$-\infty < x < -5$	$-$	$-$	$+$
2	$-5 < x < -2$	$+$	$-$	$-$
3	$-2 < x < +1$	$+$	$-$	$-$
4	$+1 < x < +\infty$	$+$	$+$	$+$

En el punto $x = -5$, la función tiene máximo, y en el punto $x = 1$, tiene mínimo.

3°. Hállese el máximo y el mínimo de la función:

$$y=\cos x\cdot\operatorname{sen}^3 x.$$

Solución: 1) $y' = -\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen}^3 x+3\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x\cdot\cos x,$

o

$$y'=3\operatorname{sen}^4 x\left(\operatorname{cotg}^2 x-\frac{1}{3}\right)$$

o

$$y'=3\operatorname{sen}^4 x\left(\operatorname{cotg} x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\operatorname{cotg} x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right); \qquad (1)$$

2) igualando a cero cada factor por separado, se tiene:

$$\operatorname{sen}^4 x=0; \qquad \operatorname{sen} x=0; \qquad x=0;$$

$$\operatorname{cotg} x+\frac{1}{\sqrt{3}}=0; \qquad \operatorname{cotg} x=-\frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad x=-\frac{\pi}{3};$$

$$\operatorname{cotg} x-\frac{1}{\sqrt{3}}=0; \qquad \operatorname{cotg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad x=\frac{\pi}{3}.$$

Debe señalarse que al resolver ecuaciones trigonométricas se toman solamente los valores principales de los argumentos.

N del intervalo	Carácter del intervalo	Signo de $\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{3}}$	Signo de $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sqrt{3}}$	Signo de y'
1	$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3}$	+	−	−
2	$-\frac{\pi}{3} < x < 0$	−	−	+
3	$0 < x < \frac{\pi}{3}$	+	+	+
4	$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$	+	−	−

Por lo tanto, la función tiene mínimo en el punto $x = -\frac{\pi}{3}$, no tiene ni máximo ni mínimo en el punto $x = 0$; y tiene máximo en el punto $x = \frac{\pi}{3}$

§ 102. Determinación de extremos mediante la segunda derivada

1°. T e o r e m a. *Si en el punto $x = c$, la derivada primera de la función $f(x)$ es igual a cero, $f'(c) = 0$ y la derivada segunda es positiva, $f''(c) > 0$, la función $f(x)$ tiene mínimo en el punto $x = c$;*

si la segunda derivada es negtiva, $f''(c) < 0$, la función $f(x)$ tiene máximo en el punto $x = c$.

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que $f'(x) = 0$ y $f''(x) > 0$ *en el punto* $x = c$. *Tomemos el caso en que* $f''(x) > 0$ no sólo en el mismo punto $x = c$, sino también en un cierto entorno de él,* entonces en este entorno la primera derivada $f'(x)$ es continua y crece, y ya que si $x = c$, $f'(x) = 0$; entonces si $x < c$, $f'(x) < 0$; y si $x > c$, $f'(x) > 0$. Esto significa que en el punto $x = c$ la función dada $f(x)$ tiene un mínimo.

Del mismo modo se demuestra el teorema para el caso de que $f''(c) < 0$.

2°. El teorema demostrado determina el segundo procedimiento de determinación de extremo. Se diferencia del

* Esto tiene lugar siempre que $f''(x)$ es una función continua en el punto $x = c$.

primero (§ 100) en que la tercera operación del primer procedimiento es sustituida: a) por la determinación de la segunda derivada y su signo en los puntos estacionarios. El resultado de la investigación se puede expresar así:

Si el signo del número $f''(c)$ es	en el punto $x=c$ $f(x)$ tiene
positivo	mínimo
negativo	máximo

Si $f''(c)=0$, es necesario realizar la investigación de la función por medio del primer procedimiento.

3°. Ejemplo. 1. Hállense por medio del segundo procedimiento los máximos y los mínimos de la función:

$$y=5-x^2-x^3-\frac{1}{4}x^4.$$

Solución. 1. Hallamos la primera derivada:

$$y'=-2x-3x^2-x^3.$$

2. Igualamos la primera derivada a cero y resolvemos la ecuación obtenida:

$$-2x-3x^2-x^3=0, \text{ o } x(x^2+3x+2)=0,$$

de donde

$$x=0 \text{ o } x^2+3x+2=0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2+3x+2=0$, se tiene:

$$x=\frac{-3\pm 1}{2}.$$

Existen tres puntos estacionarios:

$$x_1=-2,\ x_2=-1 \text{ y } x_3=0.$$

3. Hallamos la segunda derivada:

$$y''=-2-6x-3x^2.$$

4. Determinamos el signo de la segunda derivada sustituyendo x por su valor, al principio en el primer punto estacionario, luego en el segundo, y después en el tercer punto:

si $x=-2$ $y''=-2-6\cdot(-2)-3\cdot(-2)^2=-2$,
si $x=-1$ $y''=-2-6\cdot(-1)-3\cdot(-1)^2=+1$,
si $x=0$ $y''=-2$.

Por lo tanto, la función dada tiene mínimo si $x = -1$, y máximo, si $x = -2$ y también si $x = 0$.

Ejemplo 2. Hállense los máximos y mínimos de la función: $y = x^4$.

Solución:

$$1)\ y' = 4x^3;$$
$$2)\ 4x^3 = 0;\ x = 0;$$
$$3)\ y'' = 12x^2;$$
$$\text{si } x = 0\ y'' = 0.$$

Como la segunda derivada es igual a cero, la investigación se realiza mediante el primer procedimiento: si $x < 0$, $y' = 4x^3 < 0$, y si $x > 0$, $y' = 4x^3 > 0$. Por lo tanto, la función $y = x^4$ tiene mínimo en el punto $x = 0$.

4°. El extremo de la función cuadrática $y = Ax^2 + Bx + C$. Igualando a cero la primera derivada $y' = 2Ax + B = 0$, se obtiene

$$x = \frac{B}{2A}.$$

La segunda derivada $y'' = 2A$ es negativa si $A < 0$ y positiva si $A > 0$. Por consiguiente, la función cuadrática tiene, en el punto $x = -\frac{B}{2A}$, el máximo para $A < 0$, y un mínimo para $A > 0$.

El punto $x = -\frac{B}{2A}$ es el vértice de la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$.

§ 103. Ejemplos de problemas de cálculo de máximos y mínimos

1°. La diferencia de dos números es a. ¿Cuáles serán esos números para que su producto resulte el menor?

Solución. Designemos el número menor con la letra x; el mayor será $x + a$, y el producto de ambos, $x(x + a)$, que es función de x, lo designamos con la letra y, $y = x^2 + ax$.

Hallamos el valor de x en el cual y alcanza el mínimo:

1) $y' = 2x + a$; 2) $2x + a = 0$; $x = -\frac{a}{2}$; 3) $y'' = 2$; 4) la función alcanza el mínimo cuando $x = -\frac{a}{2}$.

El producto de dos números, cuya diferencia es igual a a, es el menor cuando un factor es $-\frac{a}{2}$, y el otro, $\frac{a}{2}$.

2°. La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su anchura por el cuadrado de la altura. De un rollizo de diámetro d cm es necesario hacer una viga que tenga la resistencia máxima. ¿Qué dimensiones se deben dar en este caso a la viga?

S o l u c i ó n. Designemos el coeficiente de proporcionalidad por medio de la letra k (que depende de la calidad del material), y la resistencia de la viga por medio de la letra y. Según la condición del problema

$$y = k \cdot b \cdot h^2,$$

donde b (fig. 118) es la base, y h, la altura del rectángulo.

En la ecuación figuran dos variables b y h; expresamos h por medio de b. En el triángulo ABC, en el que $AB = d$, $AC = b$ y $BC = h$, se tiene: $h^2 = d^2 - b^2$. Por lo tanto $y = k \cdot b\,(d^2 - b^2)$, o sea, $y = d^2kb - kb^3$.

Hallamos el máximo de esta función mediante el segundo procedimiento:

1) hallamos la derivada respecto a la variable b:

$$\frac{dy}{db} = d^2k - 3kb^2;$$

2) $d^2k - 3kb^2 = 0$; $\quad b = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$; $\quad$ 3) $\dfrac{d^2y}{db^2} = -6kb$;

4) si $b = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ $y'' = -\dfrac{6kd}{\sqrt{3}} < 0$ (puesto que $k > 0$ y $d > 0$), la función tiene máximo.

Así, la resistencia de una viga alcanza su máximo si su anchura $b = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$.

Determinemos la altura:

$$h^2 = d^2 - b^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2d^2}{3},$$

y por lo tanto $h = \dfrac{d}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$.

Como $\dfrac{d}{\sqrt{3}} = b$, tenemos $h = b\sqrt{2}$.

Hemos hecho una importante deducción práctica: la resistencia de una viga de sección rectangular llega al máximo si su altura es igual a la base multiplicada por $\sqrt{2}$. Esta relación no depende de la calidad del material, puesto que carece del coeficiente k. Como $\sqrt{2} \approx 1{,}4 = \dfrac{7}{5}$, la proporción de los lados del rectángulo es aproximadamente $\dfrac{7}{5}$.

He aquí el procedimiento de construcción de un rectángulo de mayor resistencia.

Si dividimos el diámetro AB (fig. 118) en tres partes iguales por medio de los puntos D y E, levantamos desde estos puntos las perpendiculares DC y EF a AB y unimos los puntos C y F de intersección de estas perpendiculares con la circunferencia con los extremos del diámetro A y B, se obtiene el rectángulo $ACBF$ de mayor resistencia.

En efecto, el cateto AC es la media proporcional entre la hipotenusa AB y el segmento AD:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}; \quad AC=\sqrt{AB\cdot AD}=\sqrt{d\cdot\frac{d}{3}}=\frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Asimismo

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{BD}; \quad BC=\sqrt{AB\cdot BD}=\sqrt{d\cdot\frac{2}{3}d}=\frac{d}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, $BC=AC\cdot\sqrt{2}$.

3°. Se necesita construir una vasija cilíndrica de aluminio (sin tapadera), cuyo volumen sea v. ¿Qué dimensiones debe tener esa vasija para que se gaste en ella la menor cantidad de material?

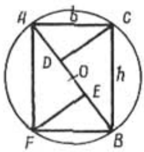


Fig. 118

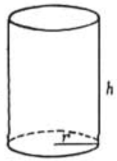


Fig. 119

Solución. La cantidad de aluminio necesario para construir el cilindro se determina por la superficie del cilindro. Por lo tanto, el problema se reduce a hallar dimensiones tales del cilindro que el área total sea la menor. Designemos el radio de la base del cilindro con la letra r, y la altura con la letra h (fig. 119). Aquí hay dos variables: r y h. Expresemos h por medio de r.

El volumen del cilindro $v=\pi r^2 h$, de donde $h=\frac{v}{\pi r^2}$. Designemos con y el área total de la vasija, que está formada por el área de la base, πr^2, y el área lateral $2\pi rh=2\pi r\cdot\frac{v}{\pi r^2}=\frac{2v}{r}$.

Luego: $y=\pi r^2+\frac{2v}{r}$.

Hallemos el mínimo de esta función teniendo en cuenta que π y v son constantes, y que r figura como variable independiente.

1) $\frac{dy}{dr}=2\pi r-\frac{2v}{r^2}=\frac{2(\pi r^3-v)}{r^2}$;

2) tras igualar el numerador de la derivada a cero y resolver la ecuación obtenida, resulta: $r=\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$;

3) se toma la derivada de $\frac{dy}{dr}=2\pi r-\frac{2v}{r^2}$

$$\frac{d^2y}{dr^2}=2\pi+\frac{4v}{r^3};$$

4) si $r=\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ $\frac{d^2y}{dr^2}=2\pi+\frac{4v}{\frac{v}{\pi}}=6\pi>0.$

Por lo tanto, si $r=\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, la función alcanza el mínimo.

Determinemos h con objeto de establecer la relación entre r y h.

$$h=\frac{v}{\pi r^2}=\frac{v}{\pi}\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{v}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{v^2}{\pi^2}}}=\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}},$$

es decir, $r=h$.

Así pues, para construir una vasija cilíndrica sin tapadera se emplea la menor cantidad de material si su altura es igual al radio de la base.

§ 104. El máximo y el mínimo de la función en los puntos en que no existen valores de la derivada

1°. La función $y=|x|$ (fig. 120) en el punto $x=0$ es continua y tiene mínimo. Sin embargo, en este punto no tiene derivada (§ 75). En cualquier punto, situado a la izquierda o a la derecha de $x=0$,

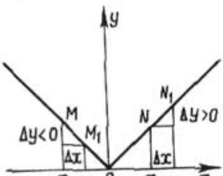


Fig. 120

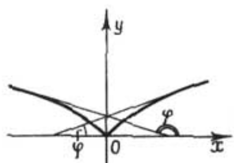


Fig. 121

la función dada tiene derivada. Hallémosla por medio de la regla general (§ 73), como $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Para el punto $x_1 \Delta x>0$, $\Delta y<0$ *y* $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$. *Para el punto* x_2, $\Delta x>0$, $\Delta y>0$ y $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+1$.

Por lo tanto, para la función $y = |x|$ se cumple en el punto $x = 0$ la condición suficiente de existencia del mínimo.

Por lo tanto, *la función puede tener extremo en el punto en el que no existe su derivada, pero en este caso es necesario que se cumpla la condición suficiente de existencia del extremo* (§ 90, 2° y 3°).

2°. La función $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (fig. 121) es continua y tiene mínimo en el punto $x = 0$. Sin embargo, la derivada

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

no se convierte en cero para ningún valor de x. En tal caso es necesario *estudiar también las raíces reales de la ecuación*

$$\frac{1}{f'(x)} = 0.$$

En el caso dado

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x = 0}$$

tiene la raíz $x = 0$. Para $x < 0$ es $f'(x) < 0$, y $x > 0$, $f'(x) > 0$. Esto significa que el punto $x = 0$ es un mínimo.

§ 105. Valores máximo y mínimo de la función en un segmento

1°. Una función $f(x)$ continua en el intervalo (a, b) puede no tener valores máximo y mínimo. Por ejemplo, la función $y = \frac{1}{x}$ es continua en el intervalo $0 < x < \infty$ y en todo punto de este intervalo tiene un valor determinado, pero entre ellos no hay valores que sean máximo y mínimo. En los cursos superiores de análisis se demuestra que *si la función es continua en un intervalo, entre sus valores, alcanzados en este segmento, existen el máximo y el mínimo.*

2°. Supongamos que la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ *. Sus valores máximo y mínimo pueden situarse tanto en los extremos del segmento $[a, b]$ como en los puntos del intervalo (a, b). En el último caso ellos son extremos de la función.

Por ejemplo, la función (fig. 122) tiene el valor máximo en el extremo a del segmento $[a, b]$ y su mínimo en el punto c del intervalo (a, b), $a < c < b$. La función, cuya gráfica está representada en la figura 123, tiene sus valores máximo

* Se supone que $f(x)$ es derivable en los puntos del segmento $[a, b]$ con la posible excepción de algunos puntos aislados, en los cuales la derivada $f'(x)$ no existe.

y mínimo en los puntos c_1 y c_2, situados en el interior del segmento $[a, b]$, es decir, $a < c_1 < b$ y $a < c_2 < b$.

Para hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ es necesario:

1) *calcular sus valores en los extremos del segmento, o sea, determinar $f(a)$ y $f(b)$;*

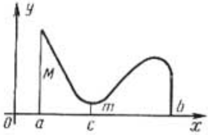


Fig. 122

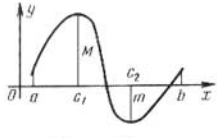


Fig. 123

2) *hallar los puntos de los extremos de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b) y calcular los valores de la función $f(x)$ en estos puntos.* Designemos estos valores por $extf(x)$.

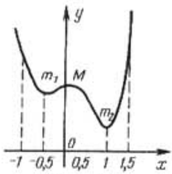


Fig. 124

El mayor de los números $f(a)$, $f(b)$ y $extf(x)$, es el valor máximo de la función en el segmento $[a, b]$, y el menor de ellos es el valor mínimo de esta función.

3°. Ejemplo. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $y = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 3$ en el segmento $[-1; 1]$.

Solución. Hallemos los valores de la función en los extremos del segmento:

$$f(-1) = 3 + 2 - 3 + 3 = 5, \quad f(1) = 3 - 2 - 3 + 3 = 1.$$

Hallemos los puntos de extremo en el intervalo $(-1; 1)$:

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 6x = 6x(2x^2 - x - 1) = 12x\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1).$$

De aquí se obtiene que los puntos estacionarios son: $x = -\frac{1}{2}$; 0; 1.

El tercer punto $(x = 1)$ no lo examinaremos, ya que él no pertenece al intervalo $(-1; 1)$.

Luego se obtiene:

$$f''(x) = 36x^2 - 12x - 6 = 6(6x^2 - 2x - 1);$$

$$f'' = \left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left[6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right] = 9 > 0;$$

$$f''(0) = 6(6 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1) = -6 < 0.$$

Por lo tanto, $x=-\frac{1}{2}$ es el punto del mínimo; $x=0$, el máximo;

$$\text{mín } f(x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\left(-\frac{1}{2}\right)^4-2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-$$
$$-3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3=2\frac{11}{16};$$
$$\text{máx } f(x)=f(0)=3\cdot 0-2\cdot 0-3\cdot 0+3=3.$$

Así, se tiene:

$$f(-1)=5, \quad f(1)=1, \quad \text{máx } f(x)=3; \quad \text{mín } f(x)=2\frac{11}{16};$$

el valor máximo de la función en el segmento ([-1; 1] es igual a 5; el mínimo es igual a 1.

La gráfica de la función dada está representada en la figura 124.

§ 106. Sentido de la concavidad de una curva

1°. Supongamos que dos puntos M_1 y M_2 tienen una misma abscisa. Si la ordenada del punto M_1 es *mayor* (menor) que la ordenada del punto M_2, se dice que el punto M_1 está situado más *arriba* (abajo) que el punto M_2. También se dice que en el intervalo $a < x < b$ la línea $y = f(x)$ está situada más *arriba* (abajo) que la línea $y = \varphi(x)$, en el caso de que en este intervalo cada punto de la primera línea esté más *arriba* (abajo) que el punto correspondiente a éste de la segunda línea, es decir, si

$$f(x) > \varphi(x) \ \ [\text{o } f(x) < \varphi(x)].$$

Definición. *En el intervalo $a < x < b$, la curva de la función $y = f(x)$ se llama cóncava hacia arriba (hacia abajo) si está situada más arriba (abajo) de la tangente en cualquier punto del intervalo dado* *.

La curva representada en la figura 125 es cóncava hacia arriba en el intervalo $a < x < b$, y cóncava hacia abajo en el intervalo $b < x < c$.

2°. En cursos superiores de análisis se demuestra que *si la derivada $f'(x)$ es una función creciente (decreciente) en el intervalo $a < x < b$, la curva $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba (hacia abajo) en este intervalo.*

---

* El arco cóncavo hacia arriba se llama a menudo cóncavo y el cóncavo hacia abajo, convexo.

Para aclarar este teorema se marca arbitrariamente una serie de puntos en el eje Ox (fig. 126) y desde cada uno de éstos se traza una recta de tal manera que el coeficiente angular de la recta crezca al crecer las abscisas de los puntos marcados; después, tomando estas rectas como tangentes a cierta curva [$\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$], trazamos dicha curva. Se ve cómo la línea está situada solamente encima de cada una de las tangentes trazadas.

3°. Criterio suficiente de concavidad hacia arriba (hacia abajo). *Si en el*

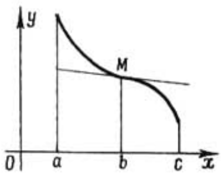


Fig. 125

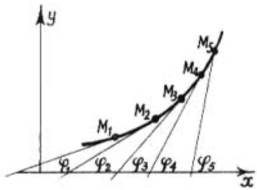


Fig. 126

intervalo $a < x < b$ *la derivada segunda* $f''(x)$ *es positiva (negativa), excepto en algunos puntos, en los cuales es igual a cero, la curva* $y = f(x)$ *es cóncava hacia arriba (hacia abajo) en este intervalo.*

En efecto, si la derivada segunda $f''(x)$ es, por ejemplo, positiva en el intervalo $a < x < b$, excepto algunos puntos en los que es igual a cero, la derivada primera $f'(x)$ es una función creciente, y la curva $y = f(x)$, según lo precedente, es cóncava hacia arriba.

Si $f''(x) = 0$ no sólo en algunos puntos, sino en un intervalo, entonces $f'(x)$ será una función constante en dicho intervalo, $f(x)$ será una función lineal y su gráfica será una línea recta, por lo que carece de sentido tratar de la concavidad.

§ 107. Puntos de inflexión

1°. Definición. *Si en un entorno del punto* $x = c$ *la gráfica de una función derivable* $y = f(x)$ *tiene a la izquierda y a la derecha del punto* $x = c$ *concavidad de sentido opuesto, el valor* $x = c$ *se llama punto de inflexión.*

El punto M de la curva (fig. 127), cuya abscisa es $x = c$, se llama también punto de inflexión, y separa el arco de la curva, cóncavo hacia arriba, del arco cóncavo hacia abajo. Solamente puede ser punto de inflexión el punto en el que existe una tangente a la curva. En la vecindad del punto de inflexión la curva está situada a los dos lados de la tangente, encima y debajo de ésta. Debe indicarse que la curva está situada también a los dos lados de la normal. Pero un punto tal como P (fig. 127), en el que no existe una sola tangente, no es punto de inflexión.

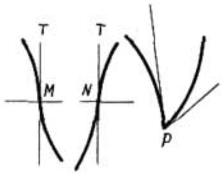


Fig. 127

2°. Como a la izquierda y a la derecha del punto de inflexión $x = c$, la concavidad de la curva $y = f(x)$ tiene diferente sentido, la derivada segunda $f''(x)$ tiene a la izquierda y a la derecha del punto $x = c$ diferentes signos o es igual a cero. Suponiendo la derivada segunda continua en un entorno del punto $x = c$, deducimos que en el punto de inflexión es igual a cero, es decir,

$$f''(c) = 0.$$

3°. De aquí se deduce la regla para hallar los puntos de inflexión:

1) *se halla la derivada segunda de la función dada;*

2) *se iguala a cero y se resuelve la ecuación obtenida* *; *de las raíces obtenidas se eligen las reales y se ordenan según su magnitud de menor a mayor;*

3) *se determina el signo de la derivada segunda en cada uno de los intervalos limitados por las raíces obtenidas;*

4) *si en dos intervalos limitados por el punto que se examina son diferentes los signos de la derivada segunda, existe punto de inflexión, y si resultan iguales, no existe punto de inflexión.*

4°. Ejemplos. Hállense los puntos de inflexión y determínense los intervalos de la concavidad hacia arriba y hacia abajo de las curvas:

$$1)\ y = \ln x.$$

Solución. Hallamos la segunda derivada:

$$y' = \frac{1}{x}\,;\ \ y'' = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Cualquiera que sea el valor de x $(0 < x < +\infty)$ y'' es negativa. Esto significa que la función logarítmica no tiene puntos de infle-

* O se hallan los valores de x en los que la derivada pierde el sentido numérico.

xión y la concavidad está dirigida hacia abajo.

2) $y = \operatorname{sen} x$.

Solución. Hallamos la segunda derivada:

$$y' = \cos x; \quad y'' = -\operatorname{sen} x.$$

Suponiendo que $-\operatorname{sen} x = 0$, resulta que $x = k\pi$ k es un número entero. Si $0 < x < \pi$, sen x es positivo e y'' es negativa; si $\pi < x < 2\pi$, sen x es negativo e y'' es positiva, etc. Esto significa que la sinusoide tiene los puntos de inflexión $0, \pi, 2\pi, \ldots$

En el primer intervalo $0 < x < \pi$ la concavidad está dirigida hacia abajo; en el segundo $\pi < x < 2\pi$, hacia arriba, etc.

§ 108. Construcción de las gráficas de funciones

1° . La gráfica de la función se construye a base de su investigación. Para ello es necesario:

1) determinar el campo de existencia de la función;

2) hallar los puntos de discontinuidad y determinar los límites de la función en estos puntos a la derecha y a la izquierda;

3) encontrar los puntos de máximo y de mínimo;

4) determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función;

5) hallar los puntos de inflexión;

6) determinar los intervalos de concavidad hacia arriba o hacia abajo de la curva.

2°. Construir la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Solución. Efectuamos la investigación de la función.

1. Los valores de y son números reales cualesquiera que sean los valores de x, es decir, el campo de existencia es $-\infty < x < +\infty$.

2. No existen puntos de discontinuidad, porque un polinomio con coeficientes constantes es una función continua.

3. Hallemos el extremo:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x-2).$$

Los puntos estacionarios son: $x = 0$ y $x = 2$.

Carácter del intervalo	Signo de $3x$	Signo de $x-2$	Signo de y'
$-\infty < x < 0$	$-$	$-$	$+$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$-$
$2 < x < +\infty$	$+$	$+$	$+$

La función tiene máximo si $x = 0$, y mínimo si $x = 2$; $y_{max.} = 4$, $y_{min} = 0$.

4. La función crece en los intervalos: $-\infty < x < 0$ y $2 < x < +\infty$ y decrece en el intervalo $0 < x < 2$.

5. Hallemos los puntos de inflexión. $y'' = 6x - 6$ se anula para $x = 1$. Si $x < 1$, $y'' < 0$, y si $x > 1$, $y'' > 0$. Es decir, a la izquierda y a la derecha del punto $x = 1$, la segunda derivada tiene signos diferentes, por lo tanto, $x = 1$ es un punto de inflexión.

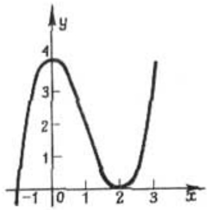


Fig. 128

6. La curva es cóncava hacia abajo en el intervalo $-\infty < x < +1$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $+1 < x < +\infty$.

Al inscribir en una tabla los valores x e y de las coordenadas halladas de los puntos de máximo, de mínimo y de inflexión, y algunos valores comprendidos entre ellos, resulta:

Si $x=$	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
$y=$	$-6\frac{1}{8}$	0	$3\frac{1}{8}$	4	$3\frac{3}{8}$	2	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{7}{8}$	4

La gráfica de la función está representada en la figura 128.

CAPITULO IX

DIFERENCIAL

§ 109. Comparación de cantidades infinitamente pequeñas

1°. *Formemos una razón con magnitudes infinitamente pequeñas, que se aproximen a cero de acuerdo con diversas leyes.* Por ejemplo, siendo los valores de $\alpha = 10; 1; 0,1; 0,001$; etc.; y los valores de $\beta = 1000; 1; 0,001; 0,000001$; etc. La razón $\frac{\beta}{\alpha} = 100; 1; 0,01; 0,0001$. Así pues, la razón de magnitudes infinitamente pequeñas es una magnitud variable y puede tener un límite finito (igual a cero, como en el ejemplo, o distinto de cero) o infinito; asimismo puede no existir límite.

2°. Definiciones: 1) β *se llama infinitésimo de orden superior a* α *si el límite de la razón* $\frac{\beta}{\alpha}$ *es igual a cero, es decir, si* $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$;

2) β *se llama infinitésimo de orden inferior a* α *si*

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty;$$

3) β *y* α *se llaman infinitésimos del mismo orden si el límite de su razón es un número* k, *diferente de cero, es decir, si*

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k, \text{ donde } k \neq 0 \text{ y } k \neq \infty;$$

4) β *y* α *se llaman infinitésimos incomparables si no existe límite de su razón.*

5) β y α se llaman infinitésimos equivalentes si

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

3°. Ejemplos. 1. En el ejemplo examinado más arriba, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, por lo tanto β es un infinitésimo de orden superior a α y $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, por lo que α es un infinitésimo de orden inferior a β.

2. $\alpha = 1 - x$ y $\beta = 1 - x^2$ son infinitésimos para $x \to 1$. La razón $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-x^2}{1-x} = 1 + x$.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \to 1} (1 + x) = 2.$$

Así pues, $1 - x$ y $1 - x^2$ son infinitésimos de igual orden para $x \to 1$.

3. Comparemos $1 - \cos x$ con x, para $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0 \ (\S\ 49,\ 3^\circ \text{ y } 86),$$

es decir, $1 - \cos x$, para $x \to 0$, es un infinitésimo de orden superior a x.

§ 110. La diferencial de la función

1°. Según la definición,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Si $\Delta x \to 0$, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una magnitud variable y como toda variable que tiene límite, difiere de su límite $f'(x)$ en un infinitésimo, por ejemplo, en α:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha.$$

De aquí se deduce que *a un incremento arbitrario* Δx *en el punto* x *le corresponde el incremento de la función*

$$\Delta y = f'(x)\, \Delta x + \alpha \Delta x.$$

El producto $f'(x)\, \Delta x$ es la parte principal del incremento de la función y tiene una denominación especial: diferencial de la función. La diferencial de la función $y = f(x)$ se designa por el símbolo dy o $df(x)$.

D e f i n i c i ó n. *Se llama diferencial de una función al producto de la derivada $f'(x)$ por el incremento arbitrario Δx del argumento*

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot \Delta x.} \qquad (1)$$

2°. Para obtener el valor de la diferencial de una función es necesario conocer dos números: el valor inicial del argumento x y su incremento Δx.

E j e m p l o. Calcular la diferencial de la función $y = x^2$ al variar el valor del argumento x desde 3 hasta 3,1.

S o l u c i ó n. $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Hallemos en primer lugar dy para valores arbitrarios de x y Δx. Como

$$f'(x) = (x^2)' = 2x,$$

tenemos

$$dy = 2x \cdot \Delta x.$$

El valor inicial del argumento es $x = 3$, y su incremento $\Delta x = 3{,}1 - 3 = 0{,}1$. Sustituyendo estos valores en la expresión de dy, resulta:

$$dy = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}6.$$

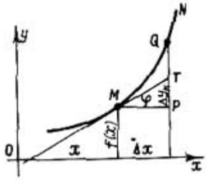


Fig. 129

3°. S e n t i d o g e o m é t r i c o d e l a d i f e r e n c i a l d e u n a f u n c i ó n. Fijemos un cierto valor x en el campo de definición de la función $f(x)$, y tracemos por el punto $(x, f(x))$ la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 129). Las coordenadas de otro punto cualquiera de esta tangente (por ejemplo, del punto T) las designaremos por $x + \Delta x$ y $f(x) + \Delta y_k$. Con tal notación la ecuación de la tangente (fórmula (II) § 74) se escribe así:

$$[f(x) + \Delta y_k] - f(x) = f'(x)\,[(x + \Delta x) - x],$$

de donde

$$\Delta y_k = f'(x)\,\Delta x.$$

Pero $f'(x)\,\Delta x$ es la diferencial de la función $f(x)$ en el punto x. Por consiguiente,

$$\boxed{dy = \Delta y_k,}$$

o sea, *la diferencial de la función* $f(x)$ *para un valor dado de* x *es geométricamente el incremento de la ordenada de la tangente a la gráfica de la función* $y = f(x)$ *en el punto* x, *que corresponde al incremento* Δx.

4°. La diferencial dy y el incremento Δy no suelen ser iguales entre sí. En la figura 129, $dy = PT$ es menor que $\Delta y = PQ$. Es evidente que dy puede ser mayor que Δy. Ocurrirá esto, por ejemplo, si la curva MN es ascendente y cóncava hacia abajo.

5°. E j e m p l o. Para la función $y = x^2$, al variar x desde 3 hasta 3,1, el incremento $\Delta y = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 = 0{,}61$. La diferencial $dy = 2x \cdot \Delta x = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}6$.

Tomando dy como valor aproximado de Δy, se tiene que: el error absoluto de la aproximación es igual a la diferencia $\Delta y - dy = 0{,}01$, y el error relativo de la aproximación es la razón:

$$\frac{\Delta y - dy}{dy} = \frac{0{,}01}{0{,}60} = \frac{1}{60} = 1{,}7\%.$$

Al variar x desde 3 hasta 3,01 el error relativo de la aproximación es igual a

$$\frac{\Delta y - dy}{dy} = \frac{0{,}0001}{0{,}06} = \frac{1}{600} = 0{,}17\%.$$

6°. *La diferencia entre el incremento y la diferencial de una función* $\Delta y - dy$, *es un infinitésimo de orden superior al incremento del argumento* Δx:

En efecto,

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \text{ o } \Delta y = \Delta y + \alpha \Delta x.$$

De aquí

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \alpha$$

y además en este caso $\alpha \to 0$, si $\Delta x \to 0$; por eso

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

7°. De lo expuesto se deduce que *la diferencial* dy *de la función* $y = f(x)$ *posee dos propiedades*:

1) dy *es proporcional a* Δx ($dy = k\Delta x$, *siendo* $k = y$);

2) *la razón* $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x}$ *tiende a cero al tender* Δx *a cero*.

8°. L a s d i m e n s i o n e s d e l a d i f e r e n c i a l d e l a f u n c i ó n. Si $f(x)$ es una función concreta, su diferencial tiene la misma dimensión que la función $f(x)$, pues la diferencial es la parte principal del incremento de la función $f(x)$.

Por ejemplo, si x es tiempo, en segundos; $f(x)$, espacio, en metros, recorrido por un punto en movimiento durante el tiempo x, la diferencial $df(x)$ es un número de metros (m).

La dimensión de la diferencial de una función no coincide con la dimensión de la función derivada. Así, en el ejemplo mostrado la diferencial es $df(x)\ m$ y la derivada $\frac{df(x)}{dx}\ m/seg$.

§ 111. La diferencial del argumento. Forma invariable de la diferencial. La derivada como razón de diferenciales

1°. *Se llama diferencial* (dx) *del argumento* x *a su incremento* Δx:

$$\boxed{dx = \Delta x,} \qquad \text{(II)}$$

ya que el incremento Δx tiene propiedades de la diferencial:

1) Δx es proporcional a Δx, pues $\Delta x = 1 \cdot \Delta x$,

2) la diferencia $\Delta x - \Delta x = 0$ y por eso $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - \Delta x}{\Delta x} = 0$.

2°. Sustituyendo en la fórmula (I) el valor Δx por dx, se tiene:

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx,} \qquad \text{(III)}$$

o sea, *la diferencial de la función es el producto de su derivada por la diferencial del argumento.*

3°. La fórmula (III) posee una excelente propiedad: *la fórmula $dy = f'(x)\,dx$ subsiste también en el caso de que el argumento x sea una función de otro argumento.*

En efecto, si x es función de u, $f(x)$ es función compuesta de u, y es preciso calcular dy por medio de la fórmula:

$$dy = f'_u(x) \cdot \Delta u.$$

Pero

$$f'_u(x) = f'_x(x) \cdot x'_u \ (\S\ 85).$$

Por lo que

$$dy = f'(x) \cdot x'_u \cdot \Delta u.$$

Pero como, según la definición,

$$x_u \cdot \Delta u = dx,$$

se tiene

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Esta propiedad de la fórmula (III) conservar su forma sea x argumento o función otro argumento, se llama *invariancia de la fórmula de la diferencial de una función.* Es precisamente invariante la forma de la diferencial. El contenido del símbolo dx en la fórmula (III) puede ser diferente: si x es el argumento, dx es Δx, el incremento del argumento; *si, en cambio, x es función del argumento u, dx es el producto* $x'_u \cdot \Delta u$, pero no es el incremento Δx, sino sólo su parte principal.

4°. Ejemplo. Hállese la diferencial de la función:

$$y = \sqrt{e^{2x} - 1}.$$

Solución. Según la fórmula (III)

$$dy = y' \cdot dx.$$

Buscamos y':

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}-1}} \cdot e^{2x} . 2 = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

Por lo tanto,

$$dy = \frac{e^{2x} . dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

5°. De la fórmula (III) se deduce:

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx},}$$

es decir, *la derivada de una función* $f(x)$ en el punto x es igual a la razón *de la diferencial de la función respecto a la diferencial del argumento en el punto x.*

§ 112. Aplicación del concepto de diferencial a los cálculos aproximados

1°. La *diferencia $\Delta y - dy$ es un infinitésimo de orden* superior respecto a Δx, por lo tanto, para valores de Δx suficientemente pequeños

$$\boxed{\Delta y \approx dy = f'(x)\,\Delta x} \qquad \text{(IV)}$$

Esto significa que *para pequeñas variaciones del argumento (a partir del valor inicial de x), la magnitud de la variación de la función $y = f(x)$ aproximadamente se puede considerar proporcional a la magnitud de la variación del argumento; el coeficiente de proporcionalidad es igual al valor de la derivada $f'(x)$; la curva $y = f(x)$ en este caso se puede sustituir aproximadamente por la tangente a ésta en el punto x.*

Como $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, sustituyendo en la fórmula (IV) Δy por su expresión, resulta:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x,$$

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x} \qquad \text{(V)}$$

2°. Las fórmulas (IV) y (V) dan origen a muchas aplicaciones del concepto de la diferencial. Examinaremos solamente la aplicación de la diferencial en los cálculos aproximados.

En la práctica, la medición ofrece un valor aproximado de la magnitud. Supongamos que x es el valor aproximado del argumento, obtenido al medirlo con un error Δx, y $x + \Delta x$ es su valor real. Entonces x determina el valor aproximado de la función $f(x)$, y $x + \Delta x$ determina su valor real $f(x + \Delta x)$.

La magnitud absoluta de la diferencia entre el valor real y el aproximado se llama *error absoluto*. El error absoluto del argumento es igual a $|\Delta x|$, y el error absoluto de la función es

$$|\Delta y| = |f(x+\Delta x) - f(x)|.$$

La magnitud absoluta de la razón del error absoluto respecto al valor de la magnitud se llama *error relativo*. Al determinar el valor de una función, el error relativo es igual a:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|^{*}.$$

La determinación de los errores en las mediciones es uno de los problemas transcendentales de la técnica. La solución de este problema tiene importancia al realizarse reiteradas mediciones, en las que se cometen a menudo errores que se deben a diversas causas, como sucede,

* Se representa por y el valor aproximado de la función, es decir, $f(x)$, tomado con defecto.

por ejemplo, en las mediciones geodésicas del terreno. Asimismo tiene gran importancia determinar el error en los cálculos, porque el error relativo del resultado de la operación (resta, multiplicación, etc.) se diferencia del error relativo de las magnitudes con que se opera.

Para hallar el error relativo de una función es necesario en primer lugar encontrar $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. El segundo miembro de la ecuación $y = f(x)$ suele ser una expresión matemática complicada, y por eso, para hallar Δy hay que realizar hábiles transformaciones en cada caso particular. Al mismo tiempo, el valor aproximado de Δy (la diferencial de la función dy) puede ser hallado sin gran dificultad por medio de las fórmulas examinadas, cualquiera que sea la forma de la función. Por lo tanto, el incremento Δy se suele sustituir por la diferencial, dy y el error relativo δ se toma igual a $\left|\frac{dy}{y}\right|$, es decir,

$$\delta = \left|\frac{dy}{y}\right|. \tag{VI}$$

3°. Ejemplos. 1. Mostremos lo fácil que es determinar la diferencia tabular de los logaritmos decimales de los números. La diferencia tabular Δy es el incremento del logaritmo decimal

$$y = \log_{10} x$$

al aumentar el número x en 1 es igual aproximadamente a su incremento lineal dy (fórmula IV):

$$\Delta y \approx dy = (\log_{10} x)' \cdot dx = \frac{dx}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10}.$$

Como

$$\frac{1}{\ln 10} = 0{,}43429 \text{ y } dx = \Delta x, \text{ tendremos}$$

$$\Delta y \approx 0{,}43429 \cdot \frac{\Delta x}{x}.$$

Suponiendo que $\Delta x = 1$, $x = N$, hallaremos que la diferencia tabular

$$\Delta y \approx \frac{0{,}43429}{N}.$$

2. Determinemos el logaritmo del número N_1, que no figura en las tablas y se halla entre dos números sucesivos, N y $N + 1$, que figuran en las tablas.

En la fórmula para el incremento del logaritmo

$$\Delta y \approx 0{,}43429 \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

hacemos: $x = N$, $\Delta x = N_1 - N < 1$. La corrección Δy al $\log N$ se determina por medio de la fórmula:

$$\Delta y \approx \frac{0,43429}{N} \cdot (N_1 - N).$$

Este incremento del logaritmo se encuentra en las columnas de las diferencias proporcionales.

El valor aproximado de $\log N_1$ es (fórmula V):

$$\log N_1 \approx \log N + \frac{0,43429}{N} \cdot (N_1 - N).$$

3. Determinemos el error relativo al hallar un número por medio de su logaritmo.

Supongamos que el logaritmo dado del número x ha sido tomado con el error Δy; por ello, al buscar por medio de él el número x, se admite el error Δx. Así pues, el error relativo del número x es:

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right|.$$

De la fórmula

$$\Delta y \approx 0,43429 \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

se tiene:

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right| \approx \frac{|\Delta y|}{0,43429},$$

es decir, al hallar un número por medio de su logaritmo, el error relativo es igual a

$$\frac{|\Delta y|}{0,43429}$$

y no depende del valor del número, sino del error con que ha sido tomado el logaritmo del número x.

Si el logaritmo del número es de *cinco cifras*, es decir, ha sido tomado con la precisión

$$|\Delta y| \leqslant \frac{1}{2} 0,0001,$$

el error relativo máximo es:

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right| \approx \frac{1}{0,43429 \cdot 2 \cdot 100000} = \frac{1}{86858}.$$

El error absoluto al hallar el número x será igual a:

$$|\Delta x| \approx \frac{1}{86858} \cdot |x|.$$

De esto se deduce que no se puede considerar exacta la quinta cifra del número si éste pasa de 86858 y ha sido hallado en tablas de cinco cifras; tampoco será exacta la cuarta cifra si el número pasa de

8686 y ha sido hallado en las tablas de cuatro cifras. Al buscar un número con las tablas de cinco cifras no se puede garantizar en ningún caso la exactitud de la sexta cifra, y al buscar un número con las tablas de cuatro cifras no se puede garantizar la exactitud de la quinta cifra del número, por lo tanto no tiene sentido buscar, por ejemplo, la sexta y la séptima cifras del número con las tablas de cinco cifras.

4. Teorema. *El error relativo de un producto no supera la suma de los errores relativos de sus factores.*

Demostración. Supongamos $y = u \cdot v$. Tomando logaritmos y hallando la diferencial, se tiene:

$$\ln y = \ln u + \ln v;$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v},$$

de donde:

$$\left|\frac{dy}{y}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|.$$

Como $\left|\frac{dy}{y}\right|$ es el error relativo del producto y $\left|\frac{du}{u}\right|$ y $\left|\frac{dv}{v}\right|$ son los errores relativos de los factores, queda demostrado el teorema.

5. Teorema. *El error relativo de un cociente no supera la suma de los errores relativos del dividendo y el divisor.*

Demostración. Supongamos que $y = \frac{u}{v}$. Tomando logaritmos y hallando la diferencial, resulta:

$$\ln y = \ln u - \ln v;$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v},$$

de donde:

$\left|\frac{dy}{y}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|$, que era lo que se trataba de demostrar.

Si se busca el error relativo máximo, el signo $\leqslant$ se puede sustituir por el signo de la igualdad.