# C. ELEMENTOS DEL CALCULO INTEGRAL

## CAPITULO X

## INTEGRAL INDEFINIDA

### § 113. La integración como operación inversa a la derivación

1°. La derivación consiste en hallar la derivada de la función dada o diferencial. La integración resuelve el problema inverso a la derivación.

*La finalidad de la integración consiste en que dada una función $f(x)$ se buscan las funciones de las cuales es derivada dicha función.*

Ejemplo. Hállese la función cuya derivada es $x^2$.

Solución. Si designamos la función buscada por $F(x)$, de acuerdo con la condición tendremos $F'(x) = x^2$ y hallaremos fácilmente que

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \quad \text{porque} \quad F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2.$$

La función obtenida $\frac{x^3}{3}$ se llama función primitiva o integral de $x^2$.

Se observa que si a $\frac{x^3}{3}$ se la añade un número cualquiera: 1, $-2$, etc., las funciones $\frac{x^3}{3} + 1$; $\frac{x^3}{3} - 2$, etc. son también soluciones del problema propuesto, porque la derivada de cada una de ellas es igual a $x^2$:

$$\left(\frac{x^3}{3} + 1\right)' = x^2; \quad \left(\frac{x^3}{3} - 2\right)' = x^2.$$

De esto se deduce que la función primitiva para $x^2$ no es única, sino que existen infinidad de ellas, las cuales representan una misma función $\frac{x^3}{3}$, a la cual se ha añadido cierto número constante. Designemos un número constante arbitrario por medio de la letra $C$. Para $x^2$, las primitivas serán las funciones de la forma:

$$\frac{x^3}{3}+C.$$

2°. En problemas concretos, la pluralidad de soluciones es eliminada mediante alguna condición complementaria.

E j e m p l o. Hállese la función cuya derivada es $x^2$, y cuyo valor es igual a 5 al ser $x = 3$.

S o l u c i ó n. La condición complementaria consiste aquí en que el valor de la función primitiva, que como se sabe es $\frac{x^3}{3} + C$, es igual a 5 al ser $x = 3$. Sustituyendo en $\frac{x^3}{3} + C$ la $x$ por el número 3, se tiene:

$$\frac{3^3}{3}+C=5, \text{ de donde } C=-4.$$

Por lo tanto, la función buscada es única:

$$\frac{x^3}{3}-4.$$

3°. En la práctica a menudo es necesario encontrar magnitudes por medio de sus derivadas. Veamos algunos ejemplos.

E j e m p l o 1. La velocidad de un cuerpo es igual a $t^2$ *m/seg.* en cada instante de tiempo $t$. Determínese el espacio recorrido por el cuerpo durante $t$ segundos, desde el principio del movimiento, si hasta ese momento se encontraba el cuerpo en reposo.

S o l u c i ó n. La velocidad del movimiento en el instante dado $t$ es la derivada del espacio recorrido respecto al tiempo, $\frac{ds}{dt}$. En el caso examinado

$$\frac{ds}{dt}=t^2.$$

Y por lo tanto

$$s=\frac{t^3}{3}+C.$$

Para determinar el valor de $C$ se tiene en cuenta la condición inicial de que antes de empezar el movimiento en cuestión, el cuerpo se encontraba en reposo. Esto significa que si $t = 0$, será $s = 0$.

Así pues, $0 = \frac{0}{3} + C$, de donde $C = 0$.

Por lo tanto, el espacio recorrido es:

$$s = \frac{t^3}{3}.$$

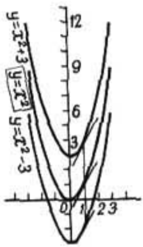
E j e m p l o 2. El coeficiente angular de la tangente en cada punto de una curva es igual a $2x$. Hállese la ecuación de esa curva sabiendo que pasa por el punto $(2; 7)$.

S o l u c i ó n. El coeficiente angular de la tangente es la tangente del ángulo formado por la tangente y el eje $Ox$, y es igual a la derivada de la función $y = F(x)$, cuya gráfica es la curva. En el caso dado

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Y hallamos fácilmente

$$y = x^2 + C.$$



F i g. 130

Esta ecuación determina una infinidad de parábolas (fig. 130). Cada una de ellas representa la parábola $y = x^2$, desplazada a lo largo del eje $Oy$ de tal modo que la ordenada de su vértice es igual a $C$ (si $x = 0$, será $y = C$). En la figura se ha trazado en el punto $x = 1$ una tangente a cada una de las parábolas, y además las tangentes son paralelas, porque según la condición tienen un mismo coeficiente angular: $k = 2x = 2\cdot 1 = 2$.

Según la hipótesis del problema, la curva buscada pasa por el punto $(2; 7)$, por lo tanto, las coordenadas $(2; 7)$ satisfacen a la ecuación $y = x^2 + C$. Sustituyendo en dicha ecuación las coordenadas $x$ e $y$ por los números 2 y 7, se tiene:

$$7 = 2^2 + C;\ C = 3.$$

La curva buscada tiene la ecuación: $y = x^2 + 3$.

## § 114. La integral indefinida como expresión del conjunto de las funciones primitivas de la función dada

1°. D e f i n i c i ó n. *Se llama primitiva, o integral, de una función a toda función cuya derivada es igual a la función dada.*

De este modo, $F(x)$ es la función primitiva, o integral, de la función $f(x)$ si

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Cabe preguntar: ¿Tiene función primitiva cualquier función?

En los cursos superiores de análisis se demuestra que toda función continua en el segmento $[a, b]$ tiene función primitiva.

Más adelante se supone que la función dada $f(x)$ es continua.

2°. T e o r e m a. *Una función que se diferencia de una función derivable en un número arbitrario, tiene la misma derivada que ésta.*

En efecto, si $\Phi(x) = F(x) + C$, en la que $C$ es un número arbitrario y $F(x)$ es una función derivable, se tiene

$$\Phi'(x) = F'(x) + C' = F'(x)$$

(porque $C' = 0$), que es lo que se trataba de demostrar.

3°. C o r o l a r i o. Si $F(x)$ es una función primitiva para la función dada $f(x)$, todas las funciones que se obtienen añadiendo a $F(x)$ una constante arbitraria $C$, es decir, todas las funciones de la forma $F(x) + C$, son asimismo funciones primitivas para la función dada $f(x)$, porque su derivada es también igual a $f(x)$.

*Así pues, para la función continua dada $f(x)$ no existe una sola función primitiva, sino infinidad de ellas.*

4°. T e o r e m a r e c í p r o c o. *La diferencia entre dos funciones primitivas cualesquiera, que tienen una misma derivada, es constante.*

D e m o s t r a c i ó n. Según la condición, las funciones $\Phi(x)$ y $F(x)$ tienen una misma derivada, $f(x)$:

$$\Phi'(x) = f(x) \text{ y } F'(x) = f(x).$$

$\Phi(x)$ y $F(x)$ son funciones derivables, y, por lo tanto, su diferencia $\Phi(x) - F(x)$ es también una función derivable. Designando esta diferencia por medio de la letra $y$:

$$y = \Phi(x) - F(x),$$

y tomando su derivada, tenemos

$$y' = [\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Por lo tanto (§ 96, 1°), la diferencia $\Phi(x) - F(x)$ es constante. Designaremos esta diferencia por medio de la letra $C$:

$$\Phi(x) - F(x) = C.$$

5°. Corolario. *Si se ha encontrado para la función dada $f(x)$ una función primitiva $F(x)$, se obtiene otra función primitiva cualquiera añadiendo a ésta cierta constante $C$, y tendrá la forma $F(x) + C$.*

Al ser la constante $C$ arbitraria, $F(x) + C$ es la expresión del conjunto de todas las funciones primitivas para la función dada $f(x)$.

6°. Definición. *El conjunto de todas las funciones, cuyas derivadas son iguales a $f(x)$ se designa por medio del símbolo $\int f(x)\,dx$ y se denomina integral indefinida de la función $f(x)$.*

El símbolo $\int f(x)\,dx$ se lee: "integral indefinida de $f(x)\,dx$".

Según la definición:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{2}$$

En la igualdad (2), el símbolo $\int$ se llama signo integral y $f(x)$ se denomina función subintegral. Asimismo, $f(x) \cdot dx$ es la expresión subintegral, $F(x)$ se llama parte funcional de la integral indefinida, y $C$ es la constante arbitraria de la integral indefinida.

7°. *Para hallar la integral indefinida de cualquier función es suficiente hallar una sola función primitiva de ella y añadir a ésta una constante arbitraria $C$.*

Ejemplos. 1) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$; 2) $\int 2x\,dx = x^2 + C$,

3) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$, puesto que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

## § 115. Propiedades de la integral indefinida

1°. De las igualdades $F'(x) = f(x)$ y $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ se deduce que:

a)
$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int dF(x),$$

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C,}$$

es decir, *la integral de la diferencial de una función es igual a esta función más una constante arbitraria.*

b)
$$\left[\int f(x)\,dx\right]' f(x);$$

o sea, *la derivada de la integral indefinida es igual a la función subintegral.*

c)
$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx;$$

es decir, *la diferencial de la integral indefinida es igual a la expresión subintegral.*

2°. *La integral indefinida de una suma algebraica de varias funciones es igual a la misma suma algebraica de las integrales indefinidas de los sumandos*, es decir, por ejemplo:

$$\int (z-u+v)\,dx = \int z\,dx - \int u\,dx + \int v\,dx,$$

puesto que

$$\left[\int (z-u+v)\,dx\right]' = z-u+v$$

y

$$\left[\int z\,dx - \int u\,dx + \int v\,dx\right]' = \left[\int z\,dx\right]' - \left[\int u\,dx\right]' + \left[\int v\,dx\right]' = z-u+v.$$

3°. *El factor constante de la función subintegral se puede sacar fuera del signo de la integral indefinida, es decir, si $A$ es una constante, se tiene*

$$\int A\cdot f(x)\,dx = A\cdot\int f(x)\,dx,$$

puesto que

$$\left[\int A\cdot f(x)\,dx\right]' = A\cdot f(x)$$

y

$$\left[A\cdot\int f(x)\,dx\right]' = A\cdot\left[\int f(x)\,dx\right]' = A\cdot f(x).$$

## § 116. Integración inmediata

1°. 1. Como $d(x+C) = dx$,

$$\boxed{\int dx = x + C.} \qquad (1)$$

2. Como $d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right) = x^n\,dx$,

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C.} \qquad (2)$$

La fórmula sirve para $n \neq -1$; si $n = -1$, la expresión $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ pierde el sentido numérico, ya que el denominador se transforma en cero, y la división por cero es imposible. Como $d(\ln|x|+C) = \frac{1}{x}\cdot dx = \frac{dx}{x}$, (§ 89, 5°),

$$\boxed{\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.} \qquad (3)$$

Como $d(e^x+C) = e^x\,dx$,

$$\boxed{\int e^x\,dx = e^x + C.} \qquad (4)$$

Como $d\left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right) = a^x\,dx$,

$$\boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C.} \qquad (5)$$

2°. Ejemplos. 1. Hállese $\int x^5\,dx$.

Solución. Según la fórmula (2):

$$\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C;$$

2. $$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{5}\,x\sqrt[3]{x^2} + C.$$

3. Hállese $\int (x+1)(x-2)\,dx$.

Solución. Abriendo los paréntesis en la expresión subintegral, se tiene:

$$\int (x^2 - x - 2)\,dx.$$

*Después de sustituir la integral de la suma por la suma de las integrales*, resulta

$$\int x^2\,dx - \int x\,dx - \int 2\,dx,$$

y en la tercera integral se saca fuera del signo de la integral el factor constante 2, con lo que se tiene:

$$\int x^2\,dx - \int x\,dx - 2\int dx.$$

Aplicando las fórmulas (2) y (1), resulta:

$$\int (x+1)(x-2)\,dx = \int x^2\,dx - \int x\,dx - 2\int dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C.$$

4. Hállese $\int \frac{x^2-2x+3}{x^3}\,dx$.

Solución. Dividiendo en el numerador cada término por $x^3$, se tiene:

$$\int \frac{x^2-2x+3}{x^3}\,dx = \int (x^{-1} - 2x^{-2} + 3x^{-3})\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - 2\int x^{-2}\,dx + 3\int x^{-3}\,dx = \ln|x| - 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1} +$$

$$+ 3\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + C.$$

3°. Se llama *método de integración por descomposición* al método por medio del cual la integral dada se representa en forma de una suma de integrales. Los ejemplos 3 y 4 han sido resueltos por el método de descomposición.

## § 117. Integración por sustitución

Para que la integral dada tenga la forma "tabular", es decir, la forma con que aparece en la tabla de fórmulas de integración, se emplea a veces *el método de cambio de variable*, llamado también método o *procedimiento de integración por sustitución.*

1°. Teorema. *Supongamos que $F(u)$ es una función primitiva para la función $f(u)$. Si el argumento $u$ se sustituye por una función del argumento $x$*

$$u = \varphi(x),$$

resulta

$$\int f(u)\, du = \int f[\varphi(x)]\, \varphi'(x)\, dx. \qquad (1)$$

Demostración. Sustituyendo $u$ por la función $\varphi(x)$, obtenemos una función compuesta:

$$f(u) = f[\varphi(x)].$$

La expresión subintegral $f(u)\, du$ es la diferencial de la función primitiva:

$$f(u)\, du = dF(u) = F'(u)\, du,$$

la fórmula de la diferencial también subsiste en el caso de que $u$ sea una función de otro argumento (§ 111, 3°),

$$f(u)\, du = F'(u)\, du = F'(u) \cdot \varphi'(x) \cdot dx,$$

puesto que

$$du = d\varphi(x) = \varphi'(x)\, dx.$$

Pero según la condición, $F'(u) = f(u) = f[\varphi(x)]$, por lo tanto

$$f(u)\, du = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \cdot dx,$$

y por consiguiente,

$$\int f(u)\, du = \int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \cdot dx.$$

2°. En la integración suele aplicarse la igualdad (1) expresada en orden contrario:

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\,du.$$

3°. Hállese $\int (2x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx.$

Solución. La función subintegral es una función compuesta. Se introduce una nueva variable, suponiendo:

$$\varphi(x)=2x-3=u,$$

$$\varphi'(x)\,dx=2\,dx=du;\quad dx=\frac{1}{2}\,du.$$

Aplicando estas expresiones en la integral, se tiene:

$$\int (2x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx=\int u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,du=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

4°. Hállese $\int\frac{dx}{3x+5}$.

Solución. Se introduce una nueva variable, suponiendo

$$\varphi(x)=3x+5=u;$$

$$\varphi'(x)\,dx=3\cdot dx=du;\quad dx=\frac{1}{3}\,du.$$

$$\int\frac{dx}{3x+5}=\int\frac{\frac{1}{3}\,du}{u}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{3}\ln|u|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln(3x+5)+C=\ln\sqrt[3]{3x+5}+C.$$

5°. Hállese $\int\frac{dx}{(2x-1)^2}$.

Solución. Se supone $2x-1=u$. Tomando las diferenciales, se tiene: $2\,dx=du$, $dx=\frac{1}{2}\,du$.

$$\int\frac{dx}{(2x-1)^2}=\int\frac{\frac{1}{2}\,du}{u^2}=\frac{1}{2}\int u^{-2}\,du=-\frac{1}{2u}+C=$$

$$=\frac{1}{2(1-2x)}+C.$$

6°. Hállese $\int e^{3x}\,dx$.

Solución. Con objeto de transformar la integral dada para aplicarle la fórmula (4), se supone $3x=u$, con lo que se tiene $dx=\frac{1}{3}\,du$:

$$\int e^{3x}\,dx=\int e^{u}\cdot\frac{1}{3}\,du=\frac{1}{3}\int e^{u}\,du=\frac{1}{3}\,e^{u}+C=\frac{1}{3}\,e^{3x}+C.$$

7°. Hállese $\int a^{nx}\,dx$.

Solución. Con objeto de transformar la integral dada para aplicarle la fórmula (5), se supone $nx=u$, con lo que se tiene $n\,dx=du$, $dx=\frac{1}{n}\,du$.

$$\int a^{nx}\,dx=\int a^{u}\cdot\frac{1}{n}\,du=\frac{1}{n}\int a^{u}\,du=\frac{1}{n}\cdot\frac{a^{u}}{\ln a}+C=\frac{a^{nx}}{n\ln a}+C.$$

8°. Hállese $\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

Solución. La función subintegral $\frac{2x}{x^2+1}$ es fraccionaria; se supone que el denominador $x^2+1=u$. Tomando de los dos miembros de la igualdad las diferenciales, se obtiene el numerador $2x\,dx=du$;

$$\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln(x^2+1)+C.$$

9°. En general, si la función subintegral es fraccionaria, su numerador representa la derivada del denominador.

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx,$$

se supone $f(x)=u$, con lo que se tiene $f'(x)\,dx=du$:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int\frac{du}{u}=\ln u+C=\ln|f(x)|+C.$$

10°. Hállese $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+5}}$.

Solución. En la función fraccionaria $\frac{x}{\sqrt{2x^2+5}}$ el numerador $x$ no es, claro está, la derivada del denominador $\sqrt{2x^2+5}$, por lo tanto no es necesario poner $\sqrt{2x^2+5}$ igual a $u$.

Observando que la derivada de $2x^2+5$ da $4x$, se supone que $2x^2+5=u$ y se toman las diferenciales de los dos miembros de la igualdad: $4x dx = du$. De aquí que $x dx = \frac{1}{4} du$.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+5}} = \int \frac{\frac{1}{4}\,du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{4} \int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2}\sqrt{u} +$$
$$+ C = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+5} + C.$$

11°. Hállese $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$.

Solución. La función subintegral está compuesta de dos funciones: una función de función $(\ln x)^3$ y una función simple $\frac{1}{x}$. Si se supone que $\ln x = u$, entonces $(\ln x)^3 = u^3$, y $\frac{dx}{x} = du$.

Por lo tanto,

$$\int \frac{(\ln x)^3\,dx}{x} = \int (\ln x)^3 \cdot \frac{dx}{x} = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C.$$

12°. Hállese $\int e^{x^4} \cdot x^3\,dx$.

Solución. Aquí, $e^{x^4}$ es una función de función, y $x^3$ es una función simple. Suponiendo que $x^4 = u$, se obtiene $e^{x^4} = e^u$, que es una función simple de la variable $u$, y diferenciando la igualdad $x^4 = u$, resulta $x^3 dx = \frac{1}{4}\,du$.

En ese caso $\int e^{x^4} \cdot x^3\,dx = \int e^u \cdot \frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}\int e^u\,du = \frac{1}{4}e^u + C = \frac{1}{4}e^{x^4} + C$.

13°. He aquí algunos ejemplos en los que se compaginan los métodos de integración por descomposición y por sustitución.

Cuando la función subintegral es una fracción algebraica, a veces se separa la parte entera de la función, dividiendo el numerador por el denominador de acuerdo con la regla de la división de polinomios.

Por ejemplo: $\int \frac{4x+2}{2x-1}\,dx = \int \left(2 + \frac{4}{2x-1}\right) dx = 2\int dx + 4\int \frac{dx}{2x-1}$. La primera integral es tabular, y la segunda se calcula por sustitución:

$$2x - 1 = u; \quad 2\,dx = du; \quad dx = \frac{1}{2}\,du.$$

$$2\int dx + 4\int \frac{dx}{2x-1} = 2x + 4\int \frac{\frac{1}{2}\,du}{u} = 2x + 2\int \frac{du}{u} =$$
$$= 2x + 2\ln|u| + C = 2x + 2\ln|2x-1| + C.$$

14°. Si la función subintegral es un producto, conviene a veces transformar uno de los factores sin cambiar su magnitud.

Por ejemplo: $\int x\sqrt{x+1}\,dx$. Para aplicar la integración por sustitución, se suma y resta al primer factor $x$ la unidad, con lo que se obtiene:

$$\int x\sqrt{x+1}\cdot dx=\int (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx=$$

$$=\int [(x+1)-1]\sqrt{x+1}\,dx=\int (x+1)\sqrt{x+1}\,dx-$$

$$-\int \sqrt{x+1}\,dx=\int (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx-\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Las dos integrales se calculan por sustitución:

$$x+1=u,\ dx=du.$$

$$\int (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx-\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\int u^{\frac{3}{2}}\,du-\int u^{\frac{1}{2}}\,du=$$

$$=\frac{2}{5}u^2\sqrt{u}-\frac{2}{3}u\sqrt{u}+C=\frac{2}{15}u\sqrt{u}\,(3u-5)+C=$$

$$=\frac{2}{15}(x+1)\sqrt{x+1}\,(3x+3-5)+C=$$

$$=\frac{2}{15}(x+1)(3x-2)\sqrt{x+1}+C.$$

## § 118. Fórmulas fundamentales de integración y ejemplos de su aplicación

1°. Al resolver los ejemplos del § 127 introdujimos una nueva variable $u$ como función de $x$ y después aplicamos las fórmulas de integración. Como tal procedimiento se emplea muy a menudo, es conveniente recordar las fórmulas para la variable $u$, considerando a $u$ como argumento o como función de otro argumento, y a $du$ como diferencial de $u$.

Tabla de las fórmulas fundamentales

I. $\int u^n\,du=\frac{n^{n+1}}{n+1}+C,\quad n\neq -1.$ II. $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C.$

III. $\int e^u\,du=e^u+C.$ IV. $\int a^u\,du=\frac{a^u}{\ln a}+C.$

V. $\int \operatorname{los} u\, du = \operatorname{sen} u + C.$ VI. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C.$

VII. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$ VIII. $\int \frac{du}{\operatorname{sen}^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

IX. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C.$ X. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sen} u + C.$

La validez de estas fórmulas se pone de manifiesto por medio de la derivación.

2°. Veamos algunos ejemplos de aplicación de las fórmulas (V) — — (VIII).

1) $\int \cos 5x \cdot dx.$

Solución. Cos $5x$ es una función de función. Para obtener una función simple y aplicar la fórmula (V), se supone $5x = u$, con lo que se tiene $\cos 5x = \cos u$, $dx = \frac{1}{5}\, du$.

$$\int \cos 5x\, dx = \int \frac{1}{5} \cos u\, du = \frac{1}{5} \operatorname{sen} u + C = \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x + C.$$

2) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x}$. Para aplicar la fórmula (VIII), se supone que $3x = u$, con lo que se tiene $dx = \frac{1}{3}\, du.$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sen}^2 3x} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\operatorname{sen}^2 u} = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} u + C = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C.$$

3) $\int x \cdot \operatorname{sen}(5x^2)\, dx.$ Se supone $5x^2 = u$, con lo que se tiene $x\, dx = \frac{1}{10}\, du.$

$$\int x \cdot \operatorname{sen}(5x^2)\, dx = \frac{1}{10} \int \operatorname{sen} u\, du = -\frac{1}{10} \cos u + C =$$
$$= \frac{1}{10} \cos(5x^2) + C.$$

4) $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x \cdot dx.$ Aquí, $\operatorname{sen}^3 x$ es una función de función, y $\cos x$ es una función simple. Suponiendo $\operatorname{sen} x = u$, se tiene $\operatorname{sen}^3 x = u^3$, que es una función simple de la variable $u$.

Derivando la igualdad $\operatorname{sen} x = u$, resulta que $\cos x\, dx = du$.

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 x + C.$$

5) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{3}\, dx}{2 + \cos \frac{x}{3}}$. Si se supone que $2 + \cos \frac{x}{3} = u$ y se toman de los dos miembros de la igualdad las diferenciales, se tiene:

$$-\frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{x}{3}\, dx = du, \qquad \operatorname{sen} \frac{x}{3}\, dx = -3\, du,$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{3}\, dx}{2 + \cos \frac{x}{3}} = -3 \int \frac{du}{u} = -3 \ln |u| + C =$$

$$= -3 \ln \left(2 + \cos \frac{x}{3}\right) + C.$$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$. Como $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador del quebrado por $\cos \frac{x}{2}$ y teniendo presente que $\dfrac{\cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, se tiene:

$$\int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2}\, dx}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Se supone que $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ y se toman de los dos miembros de la igualdad las diferenciales: $\dfrac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = du$. Por lo tanto:

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + C = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

Conviene recordar que

$$\boxed{\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.}$$

7) $\int \frac{dx}{\cos x}$. Esta integral se lleva a la anterior por medio de la fórmula $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Suponiendo que $\frac{\pi}{2} + x = u$, se tiene $\cos x = \operatorname{sen} u$; $dx = du$.

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Conviene recordar que

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.}$$

3°. Veamos algunos ejemplos de aplicación de las fórmulas fundamentales (IX) y (X).

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$ la reducimos a la tabular $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ por medio de la sustitución $16x^2 = 25u^2$.

De aquí que: $4x = 5u$, $dx = \frac{5}{4}\,du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}} = \frac{5}{4}\int \frac{du}{\sqrt{25-25u^2}} = \frac{5}{4}\int \frac{du}{5\sqrt{1-u^2}} =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen} u + C = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}x + C,$$

puesto que de la igualdad $4x = 5u$ se deduce que $u = \frac{4}{5}x$.

2) $\int \frac{dx}{5+3x^2}$ se reduce a la tabular $\int \frac{du}{1+u^2}$ por medio de la sustitución $3x^2 = 5u^2$.

De aquí que: $x\sqrt{3} = u\sqrt{5}$; $dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\,du$.

$$\int \frac{dx}{5+3x^2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{5+5u^2} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\int \frac{du}{1+u^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg} u + C = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{3}{5}}\,x + C,$$

puesto que de la igualdad $x\sqrt{3}=u\cdot\sqrt{5}$ se deduce que $u=$ $=\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot x$.

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$ se reduce a $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ por medio de la sustitución $5x^2=3u^2$.

De aquí que: $x\sqrt{5}=u\sqrt{3}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,du$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\int\frac{du}{\sqrt{3-3u^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\int\frac{du}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-u^2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{5}{3}}x+C,$$

puesto que de la igualdad $x\sqrt{5}=u\sqrt{3}$ se deduce que

$$u=\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot x.$$

4) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 x}}$ se reduce a la tabular $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ por medio de la sustitución $\operatorname{sen}^2 x=2u^2$.

De aquí que: $\operatorname{sen} x=u\sqrt{2}$, $\cos x\,dx=\sqrt{2}\cdot du$.

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 x}}=\sqrt{2}\int\frac{du}{\sqrt{2-2u^2}}=\sqrt{2}\int\frac{du}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-u^2}}=$$
$$=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\operatorname{arc\,sen} u+C=\operatorname{arc\,sen}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}+C,$$

puesto que de la igualdad $\operatorname{sen} x=u\sqrt{2}$ se deduce que $u=\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}$.

5) $\int\frac{dx}{x(4+\ln^2 x)}$ se presenta así: $\int\frac{1}{4+(\ln x)^2}\cdot\frac{dx}{x}$ y se reduce a la tabular $\int\frac{du}{1+u^2}$ por medio de la sustitución $(\ln x)^2=4u^2$.

De aquí que: $\ln x=2u$, $\frac{dx}{x}=2\,du$.

$$\int\frac{1}{4+(\ln x)^2}\cdot\frac{dx}{x}=2\int\frac{du}{4+4u^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} u+C=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\ln x}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\ln\sqrt{x}+C.$$

puesto que de la igualdad $\ln x=2u$ se deduce que $u=\frac{\ln x}{2}$.

4°. Es útil conocer las dos fórmulas siguientes:

$$\int \frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C. \tag{XI}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm 1}}=\ln|u+\sqrt{u^2\pm 1}|+C. \tag{XII}$$

Examinemos algunos ejemplos para la aplicación de estas fórmulas.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}$ se reduce a la tabular $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$ por medio de la sustitución $4x^2=3u^2$.

De aquí que: $2x=u\sqrt{3}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\,du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{\sqrt{3u^2-3}}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-1}|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{4x^2}{3}-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{|2x+\sqrt{4x^2-3}|}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-3}|+$$

$$+C-\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-3}|+C,$$

puesto que $\ln\sqrt{3}$, por ser constante, puede incorporarse a $C$.

2) $\int \frac{x+4}{4x^2-5}\,dx$ se presenta en forma de suma de integrales, dividiendo cada término del numerador por el denominador:

$$\int \frac{x+4}{4x^2-5}\,dx=\int \frac{x\,dx}{4x^2+5}+4\int \frac{dx}{4x^2-5}=\int \frac{x\,dx}{4x^2-5}-4\int \frac{dx}{5-4x^2}.$$

La primera integral se calcula por medio de la sustitución

$$4x^2-5=u,\quad 8x\,dx=du,\quad x\,dx=\frac{1}{8}\,du.$$

$$\int \frac{x\,dx}{4x^2-5}=\frac{1}{8}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{8}\ln|u|+C=\frac{1}{8}\ln|4x^2-5|+C.$$

La segunda integral se reduce a la integral $\int \frac{du}{1-u^2}$ por medio de la sustitución $4x^2=5t^2$.

De aquí que: $2x = t\sqrt{5}$, $dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\,dt$.

$$\int \frac{dx}{5-4x^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int \frac{dt}{5-5t^2} = \frac{\sqrt{5}}{5\cdot 2}\int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}x}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}x}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2x}{\sqrt{5}-2x}\right| + C,$$

puesto que $t = \frac{2}{\sqrt{5}}x$.

Finalmente: $\int \frac{x+4}{4x^2-5}\,dx = \frac{1}{8}\ln|4x^2-5| - \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+2x}{\sqrt{5}-2x} + C.$

## § 119. Integración de potencias de sen $x$, cos $x$, tg $x$ y ctg $x$

En este parágrafo los exponentes se consideran enteros y positivos.

1°. $\int \operatorname{sen}^m x\,dx$ y $\int \cos^m x\,dx$, siendo $m$ un número impar.

Por ejemplo, hállese $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

Solución. En primer lugar se transforma la función subintegral:

$$\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{sen} x = (1-\cos^2 x)\cdot\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x - \cos^2 x\cdot\operatorname{sen} x,$$

con lo que $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx - \int \cos^2 x\cdot\operatorname{sen} x\cdot dx.$

La primera integral es tabular y la segunda se calcula por sustitución:

$$\cos x = u,\quad \cos^2 x = u^2,\quad \operatorname{sen} x\,dx = -du.$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx - \int \cos^2 x\operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} -$$

$$-\cos x + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

2°. $\int \operatorname{sen}^m x\,dx$ y $\int \cos^m x\,dx$, siendo $m$ un número par, se calculan por medio de las fórmulas trigonométricas ya conocidas:

$$1-\cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\ \text{ y }\ 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

que se toman así:

$$\text{(XIII)} \quad \boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};} \qquad \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}} \quad \text{(XIV)}$$

**Estas fórmulas rebajan el grado de la potencia de la función.**

Ejemplo 1. Hállese $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

Solución. Se aplica la fórmula (XIII):

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx.$$

La primera integral es tabular y la segunda se calcula por medio de la sustitución $2x=u$, $dx=\frac{1}{2}du$.

Efectuando la sustitución, resulta: $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}$

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + C =$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

Ejemplo 2. Calcúlese $\int \cos^4 x\, dx$.

Solución. Se empieza transformando la función $\cos^4 x$ por medio de la fórmula (XIV):

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x + \cos^2 2x).$$

A $\cos^2 2x$ se le vuelve a aplicar la fórmula (XIV), con lo que se tiene:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\,\frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x =$$
$$= \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Así pues, $\int \cos^4 x\, dx = \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx.$

Suponiendo $2x=u$, $dx=\frac{1}{2}du$, $4x=t$, $dx=\frac{1}{4}dt$, se tiene:

$$\frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos u\, du + \frac{1}{32}\int \cos t\, dt = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} u +$$
$$+ \frac{1}{32}\operatorname{sen} t + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C.$$

3°. $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ y $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$ se calculan mediante la aplicación sucesiva de las fórmulas trigonométricas *:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1} \quad \text{(XV)} \quad \text{y} \quad \boxed{\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1.} \quad \text{(XVI)}$$

*La transformación persigue la finalidad de obtener integrales* de la forma:

$$\int \operatorname{tg}^n x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ y } \int \operatorname{ctg}^n x \cdot \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x},$$

que se calculan respectivamente por las sustituciones:

$$\operatorname{tg} x = u, \; \frac{dx}{\cos^2 x} = du,$$
$$\operatorname{ctg} x = u, \quad \frac{dx}{\operatorname{Sen}^2 x} = -du.$$

Ejemplo. Hállese $\int \operatorname{tg}^3 x \cdot dx$.

Solución. Transformemos $\operatorname{tg}^3 x$ según la fórmula (XV):

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x =$$
$$= \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Así pues,

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x}.$$

Suponiendo $\operatorname{tg} x = u$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = du$; $\cos x = t$, $\operatorname{sen} x\,dx = -dt$, se tiene:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int u\,du + \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} u^2 - \ln|t| + C =$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C.$$

---

* Estas fórmulas resultan de las igualdades:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \; \operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

## § 120. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Calculemos $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. Suponiendo $x = a \cdot \operatorname{sen} \varphi$, se tiene:

$$x^2 = a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi, \quad dx = a \cdot \cos \varphi\, d\varphi,$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot a \cdot \cos \varphi\, d\varphi =$$

$$= a^2 \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot \cos \varphi\, d\varphi = a^2 \int \cos^2 \varphi \cdot d\varphi =$$

$$= a^2 \cdot \int \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int d\varphi + \frac{1}{2} a^2 \int \cos 2\varphi \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \varphi + \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sen} 2\varphi + C.$$

$\int \cos 2\varphi \cdot d\varphi$ ha sido calculada por medio de las sustituciones $2\varphi = t$, $d\varphi = \frac{1}{2}\, dt$.

Hallemos los valores de $\varphi$ y $\operatorname{sen} 2\varphi$.

Como $x = a \cdot \operatorname{sen} \varphi$, $\operatorname{sen} \varphi = \frac{x}{a}$, y $\varphi = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$.

$$\operatorname{sen} 2\varphi = 2 \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi = 2 \operatorname{sen} \varphi \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Los valores hallados $\varphi = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$ y $\operatorname{sen} 2\varphi = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$ se colocan dentro del signo de la integral:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \varphi + \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sen} 2\varphi + C =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} + C,$$

de aquí que

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C}$$

(XVII)

Para recordar esta fórmula se representan geométricamente sus términos: el primer término de la fórmula $\frac{1}{2}\ a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ a^2\varphi$ es el área del sector $AOB$ (fig. 131) de radio $a$ y arco $\varphi$; el segundo término $\frac{1}{2}\ x\ \sqrt{a^2-x^2}$ es el área de un triángulo cuya hipotenusa es igual a $a$, y el cateto opuesto al ángulo $\varphi$ es igual a $x$.

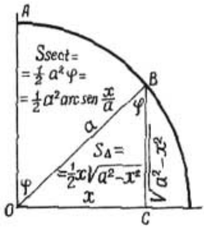



Fig. 131

## § 121. Integración por partes

1°. El diferencial del producto de dos funciones $u(x)$. $v(x)$; abreviado, $uv$. Apliquemos la fórmula (III) del capítulo IX:

$$d(uv) = (uv)'\ dx = (vu' + uv')\ dx = vu'\ dx + uv'\ dx.$$

Ya que

$$u'\ dx = u'(x)\ dx = du \text{ y } v'\ dx = v'(x)\ dx = dv,$$

entonces

$$\boxed{d(uv) = v\,du + u\,dv.}$$

2°. Fórmula de integración por partes. Tomemos la integral del diferencial del producto:

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv,$$

ó

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv.$$

De aquí hallamos que

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.} \qquad \text{(XVIII)}$$

La fórmula obtenida (XVIII) se llama *fórmula de integración por partes.*

3°. E j e m p l o s: 1. Hallar $\int \ln x\, dx$.

S o l u c i ó n. Apliquemos la fórmula de integración por partes. Supongamos que: $u=\ln x$, $dv=dx$; entonces $du=\frac{dx}{x}$; $v=x$. En realidad, $\int dv=x+c$, pero, para hallar la integral (indeterminada) indefinida $\int \ln x\, dx$, es suficiente hallar una función primitiva cualquiera, cuya derivada sea igual a $\ln x$ (§ 114, 7°). Por eso $\int dv$ se puede considerar igual a $v$.

De este modo, según la fórmula (XVIII):

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

2. Hallar $\int x\cdot \operatorname{sen} x\, dx$.

S o l u c i ó n. Supongamos: $u=x$, $dv=\operatorname{sen} x\, dx$. De aquí

$$du=dx,\ v=-\cos x;$$

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\, dx = -x\cos x +$$

$$+\int \cos x\, dx = -x\cos x \operatorname{sen} x + C.$$

3. Hallar $\int \operatorname{arc\,cos} x\, dx$.

S o l u c i ó n. Se suponga que: $u=\operatorname{arc\,cos} x$, $dv=dx$. Entonces

$$du=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad v=x;$$

$$\int \operatorname{arc\,cos} x\, dx = x\operatorname{arc\,cos} x + \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La segunda integral se halla, por medio de la sustitución

$$1-x^2=t,\ -2x\, dx=dt,\ x\, dx=-\frac{1}{2}\, dt.$$

Se obtiene:

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\, dt = -t^{\frac{1}{2}}+C = -\sqrt{1-x^2}+C;$$

$$\int \operatorname{arc\,cos} x\, dx = x\operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2}+C.$$

4°. Ejemplos, en los que se debe integrar por partes varias veces.

4) Hallar $\int x^2 \cos x\, dx$.

Solución. Se supone que: $u=x^2$, $dv=\cos x\, dx$. Entonces

$$du=2x\, dx, \quad v=\operatorname{sen} x;$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\, dx.$$

$\int x \operatorname{sen} x\, dx$ se halla por medio de la integración por partes (véase el ejemplo 2) y es igual a $-x\cos x+\operatorname{sen} x+C$.

Por lo tanto,

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2(x \cos x - \operatorname{sen} x) + C.$$

5) Hallar $\int x^3 e^x\, dx$.

Solución. Supongamos que: $u=x^3$, $dv=e^x\, dx$. Entonces

$$du=3x^2\, dx, \ v=e^x;$$

$$\int x^3 e^x\, dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x\, dx.$$

Ahora se supone que: $u_1=x^2$, $dv=e^x\, dx$, y se obtiene:

$$du_1=2x\, dx, \quad v=e^x;$$

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx.$$

Y si $u_2=x$, $dv=e^x\, dx$, resulta:

$$du_2=dx, \quad v=e^x;$$

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + C.$$

Por eso,

$$\int x^3 e^x\, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\, e^x + C.$$

5°. Ejemplos, en los cuales la integración por partes conduce a la igualación respecto a la integral dada.

6) Hallar $\int \cos^2 x\, dx$.

Solución. La integral dada puede hallarse disminuyendo la potencia de $\cos x$ por medio de la aplicación de la formula

$\cos^2 x + \frac{1+\cos 2x}{2}$, pero la hallaremos por integración por partes. Supongamos que: $u = \cos x$, $dv = \cos x\, dx$. Entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, $v = \operatorname{sen} x$;

$$\int \cos^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x\, dx.$$

Sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, resulta:

$$\int \cos^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\, dx = \operatorname{sen} x \cos x + x -$$

$$- \int \cos^2 x\, dx.$$

Obtenemos una ecuación respecto a $\int \cos^2 x dx$ y allamos de ella que

$$2 \int \cos^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos x + x + C \text{ y}$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x \cos x + x) + C = \frac{1}{4} (\operatorname{sen} 2x + 2x) + C.$$

7) Hallar $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Solución. Supongamos que: $u = \sqrt{a^2 + x^2}$, $dv = dx$. Entonces

$$du = -\frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad v = x;$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

En el numerador de la segunda integral a $x^2$ se le añade $\pm a^2$ y se obtiene:

$$\frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Obtengamos una ecuación respecto a la integral dada. Hallamos que

$$2 \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

La última integral se reduce a una tabular por medio de la sustitución

$$x^2 = a^2t^2, \quad a^2 - x^2 = a^2 - a^2t^2 = a^2(1 - t^2),$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - t^2}, \quad dx = a\,dt;$$

$$a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \int \frac{a\,dt}{a\sqrt{1 - t^2}} = a^2 \operatorname{arc\,sen} t + C = a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C.$$

6°. Observación. Al integrar por partes surge el problema: qué tomar en la expresión subintegral como $u$ y qué sustituir por $dv$. Sin duda, es necesario sustituir por $dv$ aquella diferencial para la cual es conocida la integral, o ésta puede hallarse.

Pero a veces, se pueden tomar como $dv$ ambas funciones de la expresión subintegral. En ambos casos $v$ se puede hallar. Por ejemplo, en $\int x^2 \cos x\,dx$, si $dv = x^2\,dx$, entonces $v = \frac{x^3}{3}$, y si $dv = \cos x dx$, $v = \operatorname{sen} x$. ¿Qué consideración es necesario tener en cuenta?

La diferenciación, en una serie de casos, simplifica la expresión, es decir, las derivadas de algunas funciones trascendentes (la logarítmica, las circulares inversas) son algebraicas. Por lo tanto, en las integrales:

$$\int M(x) \ln x\,dx, \quad \int M(x) \operatorname{arc\,sen} x\,dx, \quad \int M(x) \operatorname{arc\,tg} x,$$

donde $M(x)$ es un polinomio respecto a $x$, es necesario sustituir por $u$ la función trascendente, y $M(x)\,dx$ por $dv$. En las integrales, por ejemplo:

$$\int M(x)\,e^x\,dx, \quad \int M(x) \operatorname{sen} x\,dx, \quad \int M(x) \cos x\,dx,$$

hay que tomar $M(x)$ por $u$ y $e^x\,dx$, $\operatorname{sen} x\,dx$, $\cos x dx$ por $dv$.

## § 122. Observación

Al terminar el capítulo acerca de la integral indefinida, volvemos a señalar que *una de las finalidades del cálculo* integral consiste en hallar la función primitiva por medio de la derivada dada $f(x)$, y que si la función dada $f(x)$

es continua en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, existe para ella función primitiva. Pero si cada función continua $f(x)$ tiene función primitiva, ¿puede hallarse esta función primitiva?

El análisis contesta así a esta pregunta: no todas las integrales indefinidas pueden expresarse por medio de funciones algebraicas, trigonométricas, circulares inversas, logarítmicas y exponenciales como resultado de las operaciones elementales realizadas con ellas.

Por ejemplo, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int e^{x^2}\,dx$, $\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx$, $\int \cos(x^2)\,dx$, $\int \frac{e^x}{x}\,dx$, $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ no pueden ser calculadas como resultado de las operaciones matemáticas elementales. Los valores de estas integrales pueden ser hallados con la aproximación que se desee por medio de métodos especiales.

El cálculo integral enseña el procedimiento para calcular integrales de algunas funciones, aunque, en realidad, éstas son bastante numerosas.

De los métodos de integración existentes, hemos examinado únicamente los más sencillos, aplicándolos, además, a funciones muy elementales.

CAPITULO XI

# LA INTEGRAL DEFINIDA Y SU APLICACION

## § 123. La integral definida como valor de la magnitud de variación de la función primitiva

Examinemos la manera de hallar la magnitud de la variación de una función $f(x)$ por medio de su derivada $f(x)$ al variar el valor del argumento $x$ desde $x = a$ hasta $x = b$. Supongamos que la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, siendo $a < b$.

1°. Teorema. *Al variar el argumento $x$ desde $x = a$ hasta $x = b$, cada una de las funciones primitivas de la función $f(x)$ tiene un mismo incremento.*

Demostración. De las numerosas funciones primitivas tomamos dos funciones primitivas cualesquiera cuya derivada sea $f(x)$ y las designamos por $F(x)$ y $\Phi(x)$. La diferencia entre sus valores es cierto número $C$.

$$F(x) - \Phi(x) = C,$$

y por lo tanto,

$$F(x) = \Phi(x) + C.$$

Determinemos los valores de estas dos funciones primitivas, para $x = b$ y $x = a$.

Si $x = b$ $F(b) = \Phi(b) + C$,
si $x = a$ $F(a) = \Phi(a) + C$.

Restando de la primera igualdad la segunda, se tiene:

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

que era lo que se trataba de demostrar.

2°. Definición. *La diferencia $F(b) - F(a)$, que es el valor del incremento de cualquier función primitiva de la función dada $f(x)$ al variar el argumento $x$ desde $a$ hasta $b$, se llama integral definida de la función $f(x)$ entre los límites* *a y b y se indica por medio de:*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Los números $a$ y $b$ se llaman respectivamente límite inferior y superior de la integral definida. Es evidente que los números $a$ y $b$ no son "límites" de ninguna clase, según el concepto que tenemos del término "límite"; tales números son los límites del campo de variación de $x$ que examinamos.

La notación $\int_a^b f(x)\,dx$ se lee: "integral definida desde $a$ hasta $b$ de $f(x)\,dx$". Según la definición:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).} \qquad \text{(XIX)}$$

Esta fórmula se denomina fórmula de Leibniz — Newton (regla de Barrow).

3°. Regla. *Para calcular una integral definida es suficiente:*

1) *calcular la integral indefinida de la función dada;*

2) *tomar la parte funcional de la integral indefinida y sustituir en ella la $x$ en primer lugar por el límite superior $b$, y luego, por el límite inferior $a$, y del primer resultado de la sustitución, restar el segundo.*

La segunda operación se expresa por medio del símbolo

$$[F(x)]_a^b, \text{ o } F(x)\Big|_a^b \text{ o } \Big|_a^b F(x).$$

En todos los casos se lee: "el valor $F(x)$ en la sustitución desde $a$ hasta $b$". Nos serviremos del símbolo $\Big|_a^b F(x)$.

La regla del cálculo de la integral definida se escribe simbólicamente así:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)} \qquad \text{(XIXa)}$$

Hay que tener presente que en esta fórmula la función $f(x)$ se encuentra dentro del signo de la integral $\left(\int\limits_a^b\right)$ y que la función primitiva $F(x)$, que es la parte funcional de la integral indefinida, se encuentra dentro del signo de la sustitución $\left(\Big|_a^b\right)$.

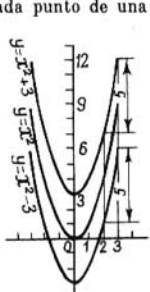
E j e m p l o. Para calcular $\int\limits_1^2 x^3\,dx$:

1) hallamos la integral indefinida $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$,

2) la parte funcional es $\frac{x^4}{4}$, el valor de $\frac{x^4}{4}$ en la sustitución desde 1 hasta 2:

$$\Big|_2^1 \frac{x^4}{4} = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4} = 3\,\frac{3}{4}\,.$$

4°. E j e m p l o s: 1. El coeficiente angular de la tangente en cada punto de una curva es igual a $2x$. Véase en cuánto cambia la ordenada de un punto de esta curva al variar la abscisa desde 2 hasta 3.




F i g. 132

S o l u c i ó n. Según la condición:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Por lo tanto, la ordenada $y$ es una función primitiva para $2x$:

$$y = \int 2x\,dx,$$

o

$$y = x^2 + C.$$

En la figura 132 están representadas estas curvas para los diferentes valores de $C$: $-3$, $0$, $+3$.

Al variar $x$ desde 2 hasta 3, la ordenada $y$ varía en una magnitud igual a $\int\limits_2^2 2x\,dx$.

$$\int\limits_2^3 2x\,dx = \Big|_2^3 x^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

En la figura 132, este incremento de la ordenada, igual a 5, está señalado en las diversas curvas: $y = x^2 - 3$, $y = x^2$, $y = x^2 + 3$.

2. Determínese el espacio recorrido por un punto material durante el tiempo desde $t = 3$ minutos hasta $t = 9$ minutos, si la velocidad del movimiento del punto en cada instante $t$ es $t^2$ $m/min$.

S o l u c i ó n. La velocidad del movimiento en cada instante es la derivada del espacio recorrido respecto al tiempo $\frac{ds}{dt}$. Según la condición:

$$\frac{ds}{dt} = t^2.$$

Supongamos que $s$ es una función primitiva para $t^2$. El valor del espacio $s$ recorrido desde $t = 3$ minutos hasta $t = 9$ minutos es una magnitud en la cual varía la función primitiva de $t^2$ al variar el argumento $t$ desde 3 hasta 9, y es igual a $\int_3^9 t^2\,dt$. Calculemos $\int_3^9 t^2\,dt$.

$$1)\quad \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C;$$

$$2)\quad \int_3^9 t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_3^9 = \frac{9^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 243 - 9 = 234.$$

Por lo tanto, $s = 234$ metros.

3. La capacidad calorífica de 1 kilogramo de agua varía según la temperatura $t$ de acuerdo con la ley: $f(t) = 1 + 0{,}00004t + 0{,}0000009t^2$. Determínese la cantidad de calor que se consume para elevar la temperatura de $1 m^3$ de agua desde 10° hasta 60°.

S o l u c i ó n. Para $1 m^3$ de agua, la capacidad calorífica

$$f(t) = 1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2.$$

La capacidad calorífica es la derivada de la cantidad de calor respecto a la temperatura $\frac{dQ}{dt}$:

$$\frac{dQ}{dt} = 1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2.$$

Para la función dada $f(t)$, la cantidad de calor $Q$ es una función primitiva. En el problema es necesario saber en cuánto varía ésta al variar $t$ desde 10° hasta 60°, es decir, se trata de calcular la integral definida

$$\int_{10}^{60} (1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2)\,dt.$$

Calculemos la integral indefinida:

$$\int (1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2)\,dt = 1000t + 0{,}02t^2 + 0{,}0003t^3 + C$$

y su valor en la sustitución desde 10 hasta 60:

$$\Big|_{10}^{60} (1000t + 0{,}02t^2 + 0{,}0003t^3) = (60000 + 72 + 64{,}8) -$$

$$- (10000 + 2 + 0{,}3) = 50134{,}5.$$

Así pues, para calentar $1m^3$ de agua desde 10° hasta 60° se consumen 50 134,5 calorías-kilogramo.

## § 124. La integral definida como función

1°. En la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, *los límites $a$ y $b$ son en realidad ciertos valores determinados* de $x$, además son tales que la función dada $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$. Manteniendo invariable el límite inferior $a$, consideramos variable el superior $b$, designándolo por medio de la letra $x$.

En este caso, la integral definida toma la forma:

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Como a cada valor de $x$ corresponde cierto número determinado, el valor de la diferencia $F(x) - F(a)$, *la integral definida* $\int_a^x f(x)\,dx$ *es una función de su límite superior.*

2°. De las muchísimas funciones primitivas $F(x) + C$, cuya derivada es $f(x)$, buscamos aquella que es igual a cero al ser $x = a$.

Sustituyendo en $F(x) + C$ la $x$ por el número $a$, obtenemos:

$$F(a) + C = 0,$$
$$C = -F(a).$$

De aquí se deduce que la función primitiva buscada es $F(x) - F(a)$. Pero

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Por lo tanto, *la integral definida* $\int_a^x f(x)\,dx$ *es la función primitiva particular de* $f(x)$, *que se anula para* $x = a$.

3°. Correlación entre las integrales definida e indefinida. Como $\int_a^x f(x)\,dx$ es una función primitiva particular de $f(x)$, precisamente la que se anula para $x=a$, cualquier otra función primitiva se diferencia de ella en una constante $C$. Es decir, la integral indefinida se diferencia de la definida en una constante arbitraria $C$.

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + C$$

## § 125. Significado geométrico de la integral definida

1°. En la figura 133 está representada gráficamente una función continua positiva $y = f(x)$. Tomemos en esta curva $y = f(x)$ dos puntos $A$ y $M$ y supongamos que $A$ está inmóvil, y que el punto $M$ es móvil. De acuerdo con esto, las coordenadas del punto $A$ son constantes $[a, f(a)]$, y las del punto $M$ son variables $(x, y)$. A cada valor determinado de $x$ corresponde un área determinada $S$ del trapecio curvilíneo $A_1AMM_1$ limitado por el arco $AM$, el eje $Ox$ y por las ordenadas $A_1A$ y $M_1M$ de los puntos $A$ y $M$. Por eso, el área $S$ es función de $x$, función positiva, porque todos los valores de $S$ son positivos.

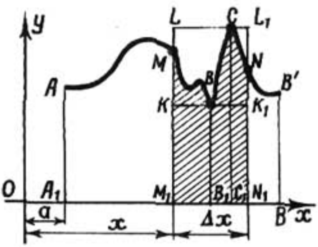


Fig. 133

*Mostremos que* $S$ *es función, primitiva para la función dada* $f(x)$. Para eso se halla la derivada de $S$ respecto a $x$. Fijemos el valor de $x$ e incrementémosle en $\Delta x$. En este caso, el área $S$ experimentará un incremento $\Delta S$, igual al área de la figura $M_1MNN_1$.

Supongamos que la función $y = f(x)$ crece unas veces y decrece otras. En el intervalo $M_1N_1$ de variación de $\Delta x$

existirán la ordenada menor $B_1B$ y la mayor $C_1C$ (§ 105); tomémoslas como alturas de los rectángulos. $M_1KK_1N_1$ y $M_1LL_1N_1$ con la base $\Delta x$. Resulta:

$$\text{el área } M_1KK_1N_1 < \Delta S < \text{área } M_1LL_1N_1,$$

porque la primera figura es parte de la segunda, y la segunda es parte de la tercera.

Pero el área $M_1KK_1N_1 = \Delta x \cdot B_1B$, y el área $M_1LL_1N_1 = \Delta x \cdot C_1C$, por lo tanto

$$\Delta x \cdot B_1B < \Delta S < \Delta x \cdot C_1C.$$

Dividiendo estas desigualdades por $\Delta x$, se tiene:

$$B_1B < \frac{\Delta S}{\Delta x} < C_1C.$$

Hagamos que $\Delta x$ tienda a cero. Si $\Delta x \to 0$, las ordenadas variables $B_1B$ y $C_1C$, debido a la continuidad de la curva, tienen como límite la ordenada constante $M_1M = y$. Por eso (§ 58)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = M_1M = y,$$

ó

$$\frac{dS}{dx} = y,$$

es decir, *la derivada del área $S$ respecto a la abscisa $x$ es igual a la ordenada $y$ de la curva en el punto $x$.*

Pero como $y = f(x)$,

$$\frac{dS}{dx} = f(x).$$

De aquí se deduce que *el área $S$ es una función, primitiva para la función dada $f(x)$.*

El área $A_1AMM_1$ es la función primitiva de $f(x)$, que se anula para $x = a$. En efecto, si el punto móvil $M$ coincide con el punto constante $A$, es decir, resulta que $x = a$, el área $A_1AMM_1$ $S$ se transforma en cero. Por eso (§ 124).

$$S = \int_a^x f(x)\, dx.$$

Para obtener el valor del área $A_1AB'b$ (fig. 138), situada entre las ordenadas $x = a$ y $x = b$, es suficiente sustituir $x$ por su valor dado $b$, con lo que se tiene

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\, dx} \qquad \text{(XX)}$$

Hemos obtenido el siguiente *significado geométrico de la integral definida*: *la integral definida* $\int_a^b f(x)\, dx$ *de una función positiva continua* $f(x)$ *es igual al valor del área comprendida entre la línea* $y = f(x)$, *el eje* $Ox$ *y las dos ordenadas* $x = a$ *y* $x = b$.

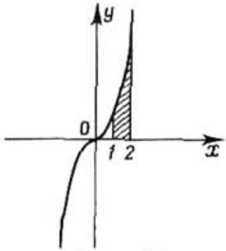


Fig. 134

2°. Ejemplo. Calcúlese el área limitada por la línea $y = x^3$, el eje $Ox$ y las ordenadas $x = 1$ y $x = 2$ (fig. 124).

Solución. Fórmula fundamental: el área

$$S = \int_a^b y \cdot dx.$$

Según la condición: $y = x^2$, $a = 1$, $b = 2$. Por eso

$$S = \int_1^2 x^3\, dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 3\,\frac{3}{4}\,.$$

## § 126. Suplementos

1°. En el párrafo anterior se ha demostrado que el área limitada por la línea $y = f(x)$, por las ordenadas de dos de sus puntos $a$ y $b$ y por el eje $Ox$ es una función, primitiva para $f(x)$, si en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ $f(x)$ es positiva, $f(x) > 0$, es decir, si la línea $y = f(x)$ se encuentra situada en el semiplano superior con respecto al eje $Ox$. Esto es también cierto en el caso de que $f(x)$ sea negativa en el segmento $[a, b]$, $f(x) < 0$, o sea, la línea $y = f(x)$ se encuentra situada en el semiplano inferior con respecto al eje $Ox$.

Si la función tiene valores negativos, para obtener la expresión de $S$ del área limitada por la línea $y = f(x)$, por el eje $Ox$ y por las ordenadas $x = a$ y $x = b$ (fig. 135), se pueden repetir los razonamientos anteriores, con la única particularidad de que al valor del área, situada debajo del eje $Ox$, es necesario ponerle el signo negativo, porque las

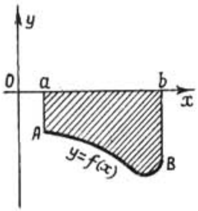



Fig. 135

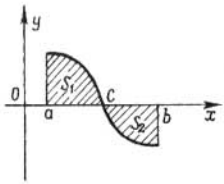



Fig. 136

ordenadas de los puntos de la curva son negativas, es decir,

$$\frac{ds}{dx} = y < 0$$

y el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ es negativo.

Si en el segmento $[a, b]$ la curva $y = f(x)$ corta al eje $Ox$ (fig. 136), $\int_a^b f(x)\,dx$ *es igual a la suma algebraica de las áreas $S_1$ y $S_2$; además, el área situada encima del eje $Ox$ se toma con signo más y la que se halla debajo del eje $Ox$, con signo menos.*

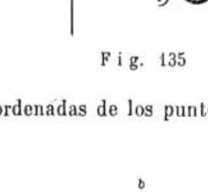



Fig. 137

Conociendo el significado geométrico de la integral definida, se puede calcular el área limitada entre la curva $y = f(x)$, el eje $Ox$ y las ordenadas $x = a$ y $x = b$. Pero hay que recordar que *el área es un número positivo, y para obtenerla, si una parte de la figura se encuentra situada debajo del eje $Ox$ y la otra parte encima, hay que hallar la suma de las magnitudes absolutas de las integrales $S_1$ y $S_2$* (fig. 136).

Ejemplo. Calcúlese el área limitada por una onda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ y el eje $Ox$ (fig. 137).

S o l u c i ó n. Una parte del área $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ se encuentra encima del eje $Ox$, y la otra $(\pi \leqslant x \leqslant 2\pi)$, debajo de dicho eje. Estas áreas se calculan por separado:

$$\text{la primera parte } S_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \Big|_0^{\pi} -\cos x = -\cos \pi + $$
$$+ \cos 0 = 1 + 1 = 2,$$
$$\text{la segunda parte } S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \Big|_{\pi}^{2\pi} -\cos x = $$
$$= -\cos 2\pi + \cos \pi = -1 - 1 = -2.$$

Toda el área $s = |s_1| + |s_2| = 2 + 2 = 4$.

Resultará un absurdo si por no prestar atención a la situación del área respecto al eje $Ox$ se calcula la integral en los límites desde 0 a $2\pi$.

En efecto, se obtiene:

$$S = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \Big|_0^{2\pi} -\cos x = -2\pi + \cos 0 = 0.$$

## § 127. La integral definida como límite de la suma

1°. En los cursos superiores de análisis se demuestra *el teorema de la existencia de la integral definida.* El contenido de este teorema consiste en lo siguiente.

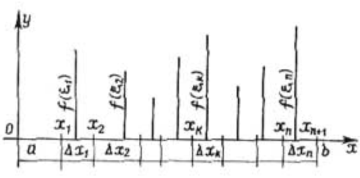



Fig. 138

1. La función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$. Dividamos el segmento $[a, b]$ por medio de puntos en $n$ segmentos (es indiferente que sean iguales o desiguales), designemos las abscisas de los puntos por (fig. 138): $x_1 = a,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_{n+1}$, siendo $x_1 < x_2 < < x_3 < \ldots < x_{n+1} = b$.

Designemos las longitudes de los segmentos obtenidos por medio de $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k, \ldots, \Delta x_n$, así pues,

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1,\ \Delta x_2 = x_3 - x_2,\ \ldots,\ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k,\ \ldots,$$
$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

2. En cada uno de los segmentos obtenidos $[x_k, x_{k+1}]$ se toma un punto arbitrario $\xi_k$, $x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}$ y se calcula el valor de la función en este punto $f(\xi_k)$.

3. Hallemos el producto de este valor de la función $f(\xi_k)$ por la longitud del segmento $\Delta x_k$:

$$f(\xi_k)\cdot\Delta x_k.$$

4. Se suman todos los productos obtenidos:

$$f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_k)\cdot\Delta x_k + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n =$$
$$= \sum_a^b f(\xi)\,\Delta x.$$

En el símbolo $\sum\limits_a^b f(\xi)\,\Delta x$ la letra $\Sigma$ significa la "suma" y $f(\xi)\,\Delta x$ indica que todos los sumandos son del mismo tipo: el producto de $f(\xi)$ por $\Delta x$, $a$ y $b$ *son el límite izquierdo* y derecho del segmento en el que se efectúan las operaciones de la suma. La suma formada de este modo $\sum\limits_a^b f(\xi)\,\Delta x$ se llama *suma integral*. Es evidente que se puede formar una suma integral mediante infinidad de procedimientos. Esto depende del procedimiento de división del segmento $[a, b]$ en $n$ segmentos y de cómo se tomen los puntos $\xi$.

5. Consideremos que el número de partes $n$ es variable y que se emplea tal procedimiento de división del segmento $[a, b]$, que para *cualquier número positivo dado* $\delta$, *comenzando* desde cierto valor $n$, se cumplen las desigualdades:

$$\Delta x_1 < \delta,\ \Delta x_2 < \delta,\ \ldots,\ \Delta x_k < \delta,\ \ldots,\ \Delta x_n < \delta.$$

Es decir, todas $\Delta x \to 0$. Además, el número de segmentos $n$ se hace mayor que cualquier número positivo $N = \dfrac{b-a}{\delta}$, o sea, $n \to \infty$. Cada producto $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ resulta en este caso una magnitud infinitamente pequeña, como producto de la magnitud acotada $f(\xi_k)$ por el infinitésimo $\Delta x_k$, y $\sum_a^b f(\xi)\,\Delta x$ se convierte en una suma cuyo número de sumandos infinitésimos crece indefinidamente. En el teorema de existencia de la integral definida se demuestra que esta suma tiene límite. Este límite es la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_a^b f(\xi)\,\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx.$$

2°. Ilustremos este teorema. $AB$ (fig. 139) es la gráfica de la función $y=f(x)$, que es continua, positiva y creciente en el segmento $[a, b]$. Dividamos el segmento $[a, b]$ en $n$

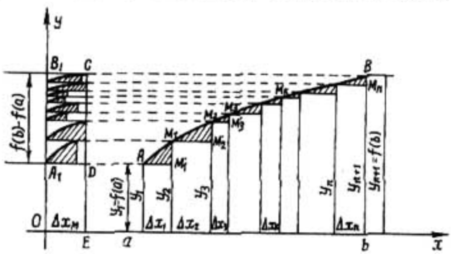



Fig. 139

partes (es indiferente que sean iguales o desiguales). Como punto $\xi_k$ se toma en cada uno de los $n$ segmentos su extremo izquierdo, es decir, $x_k$,

$$f(\xi_k)=f(x_k)=y_k,$$

y el producto

$$f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=f(x_k)\cdot\Delta x_k,$$

es igual al área del rectángulo, cuya base es el segmento $\Delta x_k$, y la altura es la ordenada $f(x_k)$ de su extremo izquierdo. La suma integral:

$$\sum_a^b f(\xi)\,\Delta x=\sum_a^b f(x)\,\Delta x,$$

representa el valor del área de la figura escalonada $aAM'_1M_1M'_2M_2 \ldots M_nb$, que se forma por medio de estos rectángulos, sobre el segmento $[a, b]$.

El área del trapecio curvilíneo $aABb$ es igual a la suma de las áreas de los rectángulos, $\sum_a^b f(x)\,\Delta x$, más la suma de las áreas de los triángulos curvilíneos. Las áreas de estos triángulos aparecen rasgueadas en la figura 139. Designemos la suma de las áreas de los triángulos curvilíneos por medio de la letra $\sigma$. Entonces

$$S = \sum_a^b f(x) \cdot \Delta x + \sigma.$$

La suma $\sum_a^b f(x)\,\Delta x$ de las áreas de los rectángulos, al tender $\Delta x$ a cero, es una magnitud variable, acotada, porque nunca se hará mayor que el área del rectángulo de base $ab$ y de altura igual a la ordenada mayor $bB$, y *no es una* magnitud infinitésima, porque no puede ser menor que el área del rectángulo de la misma base $ab$ y altura igual a $aA$.

*Veamos cómo la suma $\sigma$ de las áreas de los triángulos* curvilíneos, cuando $\Delta x \to 0$, es una magnitud infinitésima.

Ocupémonos de un número determinado de divisiones. *Los segmentos $\Delta x$ pueden ser de diferente longitud* (*algunos* pueden ser iguales) y entre ellos habrá, siquiera uno, que será el mayor (en la figura 139 hay dos $\Delta x$ mayores), que *designaremos con el símbolo $\Delta x_M$. Coloquemos en el eje* $Ox$, empezando desde el origen $O$, un segmento igual a $\Delta x_M$, y construyamos en él, empleándolo de base, el rectángulo $OB_1CE$, *cuya altura sea igual a $bB$. De los puntos $A$, $M_1$,* $M_2, \ldots B$ de la curva dada bajamos perpendiculares al eje $Oy$ y trasladamos, siguiendo estas perpendiculares, los *triángulos curvilíneos $AM'_1M_1$, $M_1M'_2M_2 \ldots$ de tal modo* que sus vértices $A$, $M_1$, $M_2 \ldots$ se encuentren en el eje $Oy$. En este caso, todos los triángulos curvilíneos se colocan sin *superponerse, dentro del rectángulo $A_1B_1CD$, cuya base* es $\Delta x_M$, y su altura es $f(b) - f(a)$.

Una parte de la superficie del rectángulo $A_1B_1CD$ queda *sin cubrir por las áreas de los triángulos curvilíneos. Por* eso, la suma $\sigma$ de las áreas de los triángulos curvilíneos es menor que el área del rectángulo $A_1B_1CD$, o sea,

$$\sigma < [f(h) - f(a)] \cdot \Delta x_M.$$

La desigualdad obtenida se cumple para cada valor de $n$ mientras se emplee el método de división de $[a, b]$ en segmentos, indicado en el teorema, y como en este caso todos los $\Delta x$ (incluido $\Delta x_M$) se hacen magnitudes infinitésimas, también el producto de la constante $f(b) - f(a)$ por la infinitésima $\Delta x_M$ resulta una magnitud infinitésima. Si $[f(b) - f(a)]\,\Delta x_M < \varepsilon$, entonces $\sigma < \varepsilon$, es decir, también $\sigma$ es una magnitud infinitésima, que era lo que se trataba de demostrar. La igualdad

$$s = \sum_a^b f(x) \cdot \Delta x + \sigma$$

significa que *la constante $S$ es igual a la variable* $\sum\limits_a^b f(x) \cdot \Delta x$ más la infinitésima $\sigma$. Por lo tanto (§ 51)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\, \Delta x = S.$$

Pero (§ 125, fórmula XX)

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

*En consecuencia*

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) \cdot dx} \qquad \text{(XXI)}$$

3°. Lo expuesto en el primer teorema es cierto para cualquier función continua $f(x)$, creciente o decreciente, o creciente en unos intervalos de variación del argumento y decreciente en otros, siendo indiferente si sus valores son positivos o son negativos.

### § 128. Propiedades de la integral definida

Considerando la integral definida $\sum\limits_a^b f(x)\, dx$ como el límite de una suma de sumandos infinitésimos $f(x) \cdot \Delta x$ $(\Delta x \to 0)$, siendo ilimitadamente creciente el número de ellos, demostremos las propiedades de la integral definida.

1. *La integral definida de la suma algebraica de varias funciones es igual a la misma suma algebraica de las integrales definidas de los sumandos.*

En efecto, por ejemplo:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b [f(x) + \varphi(x) -$$

$$- \psi(x)]\,\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \varphi(x)\,\Delta x -$$

$$- \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \psi(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

2. *El factor numérico de la función subintegral se puede sacar fuera del signo de la integral definida.*

Demostración.

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b c \cdot f(x)\,\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \sum_a^b f(x)\,\Delta x =$$

(porque $c$ es factor común para todos los sumandos de la suma)

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. *Al permutar los límites de integración, la integral definida cambia su signo por el contrario.*

Demostración. En el parágrafo anterior, al dividir el segmento $[a, b]$ en $n$ partes se suponía que $a < b$. Supongamos que $b < a$ y que la división se efectúa desde el extremo $a$ hacia $b$; en ese caso, todos los valores de $\Delta x$ son negativos. (Si se divide $b - a$ en $n$ partes iguales, por ejemplo, $\Delta x = \frac{b - a}{n} < 0$, puesto que $b - a < 0$).

Por eso, los sumandos $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ de las sumas $\sum_b^a f(\xi)\,\Delta x$ y $\sum_a^b f(\xi)\,\Delta x$, las propias sumas y sus límites $\int_b^a f(x)\,dx$

y $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ son de signo diferente, es decir

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

4. *La integral definida de la función $f(x)$ en el segmente $[a, b]$ es igual a la suma de las integrales definidas de esta función en todos los puntos del segmento.*

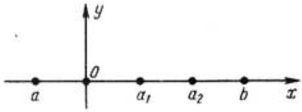


Fig. 140

D e m o n s t r a c i ó n. Supongamos, por ejemplo, que el segmento $[a, b]$ está dividido por los puntos $a_1$ y $a_2$ en tres segmentos $(a < a_1 < a_2 < b)$ (fig. 140). Entonces la suma integral en el segmento $[a, b]$ es igual a la suma de las integrales en los segmentos $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$, $[a_2, b]$:

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x = \sum_a^{a_1} f(x)\,\Delta x + \sum_{a_1}^{a_2} f(x)\,\Delta x + \sum_{a_2}^{b} f(x)\,\Delta x.$$

Según el teorema § 53, la misma relación que hay entre las sumas, existe entre sus límites, es decir,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \int\limits_{a_2}^{b} f(x)\,dx.$$

Esta propiedad se denomina *propiedad aditiva de la integral definida*.

5. T e o r e m a d e l v a l o r m e d i o. Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entre los valores de $x$ en este segmento existe uno, $x = \xi$, tal que

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)} \qquad \text{(XXII)}$$

La demostración de este teorema sale de los límites de este curso. Si $f(x) \geqslant 0$, el teorema es geométricamente evidente (fig. 141): para un trapecio curvilíneo, formado por la curva $y = f(x)$, por el eje $Ox$ y por las ordenadas $x = a$ y $x = b$, existe un rectángulo de igual superficie, cuya base es el segmento $ab$ (su longitud es igual a $b - a$), su altura es la ordenada $f(\xi)$, situada entre el valor máximo y el mínimo de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

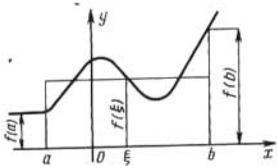


Fig. 141

$f(\xi)$ se llama *valor medio de la función $f(x)$ en el segmento* $[a, b]$. De la fórmula (XXII) resulta:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx. \qquad \text{(XXIIa)}$$

## § 129. Cálculo de la integral definida

1°. El cálculo de la integral definida $f(x)\, dx$ se realiza aplicando la fórmula de Leibniz — Newton (XX).

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Esta fórmula es cierta si la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, pero *para una función discontinua, la fórmula puede ser errónea.*

Ejemplo. Calcúlese $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Solución. Calculemos la integral indefinida por sustitución

$$x - 1 = u, \quad dx = du:$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{1-x} + c.$$

Calculemos la integral definida:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left| \frac{1}{1-x} \right|_0^2 = \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-0} = -1 - 1 = -2.$$

El cálculo da el número negativo $-2$. Sin embargo, es evidente que todas las ordenadas de la curva $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ son positivas, porque el cuadrado de la diferencia $x-1$ es positivo para cualquier valor de $x$. La curva se encuentra encima del eje $Ox$ y el área comprendida entre el eje $Ox$ y esta curva no puede ser expresada por un número negativo. Se ha incurrido en un error: no se debía haber empleado la fórmula $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$, porque en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2$ la función $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ es discontinua en el punto $x=1$ (fig. 142).

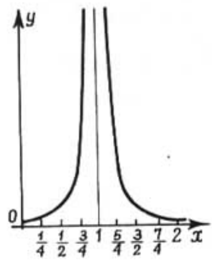


Fig. 142

2°. Sustitución de la variable. Al tomar la integral indefinida por la sustitución $\varphi(x)=u$, se obtiene una igualdad (§ 117)

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

siempre que $f(u)$ y $\varphi'(x)$ sean funciones continuas.

En el caso de la integral definida, se tiene la igualdad

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(u)\,du, \qquad \text{(XXII)}$$

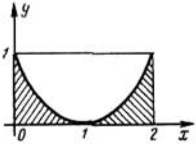
donde $\alpha$ y $\beta$ son los valores de la función $u=\varphi(x)$ para $x=a$ y $x=b$, que no salen del segmento de continuidad de la función $f(u)$.

A veces, en la práctica de la integración hay que sustituir $x$ por una función de $u$, $x=\varphi(u)$ (§ 120). La sustitución de $x=\varphi(u)$ no es posible si $\varphi(u)$ no puede ser igual a $a$ y $b$.

Observación. Es menester que la función, mediante la cual transforma la integral, $u=\varphi(x)$ ó $x=\varphi(u)$, posea una función inversa, es decir, *que $x$ y $u$ estén en correspondencia biunívoca*. En caso de que la correspondencia entre $x$ y $u$ no sea biunívoca, la respuesta puede ser errónea.

Ejemplo 1. Calcular $\int_0^2 (x-1)^2\,dx$.

S o l u c i ó n. Supongamos que $(x-1)^2=u$. Si $x=0$, se obtiene que $\alpha=(0-1)^2=1$, y si $x=2$, resulta que $\beta=(2-1)^2=1$, es decir, obtenemos que la integral tiene límites iguales, o sea, es igual a cero.



F i g. 143

Esta solución es muy pronta, pero errónea. En efecto, $\int_0^2 (x-1)^2\,dx$ es el área, formada por la parábola $y=(x-1)^2$, por el eje $Ox$ y por las ordenadas $x=0$ y $x=2$ (fig. 143), y que no es igual a cero. El error consiste en que no es posible aplicar la sustitución $(x-1)^2=u$, ya que por medio de esta igualdad $x$ no se determina univocamente: $x=1\pm\sqrt{u}$.

El cálculo de este integral no exige la sustitución de la variable:

$$\int_0^2 (x-1)^2\,dx=\int_0^2 (x^2-2x+1)\,dx=\Big|_0^2\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)=$$

$$=2\frac{2}{3}-4+2=\frac{2}{3}.$$

E j e m p l o 2. Calcular $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$.

S o l u c i ó n. Hagamos una sustitución de la variable, suponiendo que $2x-1=u$.

*De aquí* $x=\frac{u+1}{2}$, *la correspondencia entre* $x$ *y* $u$ *es biunívoca;* $dx=\frac{1}{2}\,du$.

Según los datos $a=1$, $b=5$, los límites de integración respecto a la nueva variable son:
el inferior: $\alpha=u(1)=2\cdot1-1=1$; el superior; $\beta=u(5)=2\cdot5-1=9$,

$$\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{2}\int_1^9 \frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int_1^9 u^{-\frac{1}{2}}\,du=\Big|_1^9 u^{\frac{1}{2}}=\Big|_1^9\sqrt{u}=$$

$$=\sqrt{9}-\sqrt{1}=2.$$

Ejemplo 3. Calcular $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$.

Solución. Como $\cos^2 x = \frac{1+\cos^2 x}{2}$, se tiene:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int\limits^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\, dx.$$

Hagamos la sustitución de la variable: $u = 2x$, $x = \frac{1}{2} u$, $dx = \frac{1}{2} du$. Los límites de integración respecto a u son: $\alpha = U(0) = 2\cdot 0 = 0$, $\qquad \beta = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$.

Esto significa que

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi} (1+\cos u)\, du = \frac{1}{4} \Big|_0^{\pi} (u+\operatorname{sen} u) =$$

$$= \frac{1}{4} [(\pi+\operatorname{sen}\pi)-(0+\operatorname{sen} 0)] = \frac{1}{4}\pi.$$

Ejemplo 4. Calcular $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2\, dx}$.

Solución. Hagamos la sustitución de la variable $x = \alpha \operatorname{sen} u$ $dx = \alpha \cos u\, du$.

Para sen $u$ existe la función inversa

$$u = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \qquad (*)$$

Los límites de integración respecto a la nueva variable $u$ se hallan aplicando la igualdad (*) y sustituyendo $x = 0$ y $x = a$. Obtenemos que:

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{o}{a} = \operatorname{arcsen} 0 = 0,$$

$$\beta = \operatorname{arcsen}\frac{a}{} = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto.

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\,\mathrm{sen}^2}\;\; ua \;\; \cos u\, du =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 u}\,\cos u\; du = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = \frac{\pi a^2}{4}$$

pues, según el ejemplo anterior $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = \frac{\pi}{4}$.

Este integral es el área del cuarto del círculo de radio a (fig. 144). De aquí, el área del círculo de radio $a$ es igual a $\frac{\pi a^2}{4}$.

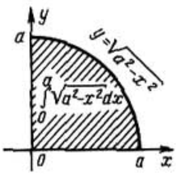



Fig. 144

3°. El cálculo por partes de la integral definida se hace aplicando la fórmula

$$\int_a^b u\,dv = \Big|_a^b\, uv - \int_a^b v\,du. \qquad \text{(XXIII)}$$

Esta puede obtenerse fácilmente. En efecto, haciendo

$$\int_b v\, du = \Phi_b(x) + C.$$

$$\int_a u\,dv = \Big|_a^b\, uv - \Phi(x) = \Big|_{a.}^b\, uv - \Big|_a^b\, \Phi(x) = \Big|_a\, uv - \int_a^b v\, du.$$

Ejemplo 5°. Calcular $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$.

Solución. Tomemos la integral por partes, suponiendo que $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. De aquí $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = \Big|_0^1\, x \operatorname{arctg} x - \int_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^2}\,.$$

La segunda integral se halla por la sustitución $t=1+x^2$, si notamos que $x\,dx=\frac{1}{2}\,dt$.

Según la integral dada $0\leqslant x\leqslant 1$. Sustituyendo en $t=1+x^2$, resulta:

$$\text{para}\quad x=0\qquad \alpha=t(0)=1+0=1,$$
$$\text{para}\quad x=1\qquad \beta=t(1)=1+1^2=2.$$

Indiquemos que, según la condición de unicidad, $x=+\sqrt{t-1}$. Así,

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx=\Big|_0^1\, x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t}=\Big|_0^1\, x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\Big|_1^2 \ln t=$$
$$=(1\cdot\operatorname{arctg}1-0)-\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

## § 130. Ejemplos de cálculo de áreas. Area del segmento de la parábola. Area de la elipse

1°. Calcúlese el área del segmento $OAB$ de la parábola $y^2=2px$ (fig. 145).

Solución. De la ecuación se obtiene:

$$y=\pm\sqrt{2px}\,.$$

Los valores positivos son los de los puntos de la curva situados encima del eje $Ox$, y negativos los que se encuentran debajo del eje $Ox$. Como la curva es simétrica respecto al eje $Ox$, es suficiente calcular el área correspondiente a la mitad del segmento y duplicar el resultado. Los límites de variación del argumento son desde 0 hasta $x$:

$$S_1=\int_0^x\sqrt{2px}\,dx=\sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx=$$
$$=\sqrt{2p}\,\Big|_0^x\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{2p}\cdot x\cdot\sqrt{x}=\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{2px}.$$

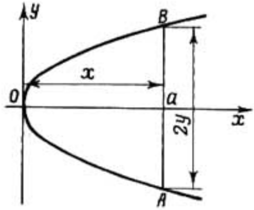


Fig. 145

Como según la condición $\sqrt{2px}=y$, se tiene $S_1=\frac{2}{3}x\cdot y$.

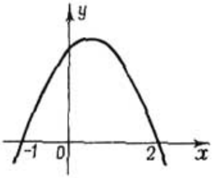
El área total del segmento $S=2S_1=2\cdot\frac{2}{3}x\cdot y$, $S=\frac{2}{3}x\cdot 2y$.

$2y$ es aquí la longitud de la cuerda del segmento, y $x$ es la flecha.

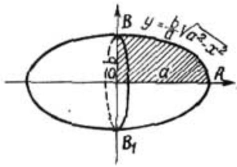
Por lo tanto, *el área del segmento de una parábola, cortado por una cuerda cualquiera, perpendicular a su eje, es igual a dos tercios del área del rectángulo construido en esta cuerda y en su flecha.*

2°. Calcúlese el área limitada por la curva $y = 2 + x - x^2$ y el eje $Ox$.

S o l u c i ó n. Un área puede estar limitada por dos líneas solamente si se cortan estas líneas. Al resolver conjuntamente la ecuación




F i g. 146




F i g. 147

de la curva, $y = 2 + x - x^2$, y del eje $Ox$, $y = 0$, obtenemos los puntos de intersección de éstas: $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$ (fig. 146).

Calculamos el área suponiendo en la fórmula (XX) que $a = -1$ y $b = 2$.

$$S = \int_{-1}^{2} (2+x-x^2)\,dx = \Big|_{-1}^{+2} \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) =$$

$$= \left(2 \cdot 2 + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 4\frac{1}{2}.$$

3°. Hállese el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

S o l u c i ó n. Como la elipse es simétrica respecto a los ejes $Ox$ y $Oy$, su área $S = 4$ áreas $OAB$ (fig. 147).

De la ecuación de la elipse hallamos:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Delante de la raíz se coloca solamente el signo positivo, porque se ha tomado el arco de la elipse situado en el primer cuadrante, en el que los valores de $y$ son positivos.

$$\text{El área } OAB = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

(véase la solución de ejemplo 4, § 129)

El área total de la elipse $S = 4 \cdot \frac{\pi ab}{4} = \pi ab$.

Debe señalarse que la fórmula del área del círculo $s = \pi r^2$ constituye un caso particular de la fórmula hallada del área de la elipse al ser $a = b = r$.

4°. Hállese el área limitada por las líneas $y = x^3$ e $y = 4x$.

S o l u c i ó n. Determinamos en primer lugar los límites del área, para lo cual resolvemos conjuntamente las ecuaciones dadas:

$$x^3 - 4x = 0, \quad x(x^2 - 4) = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 0 \quad \text{y} \quad x_3 = 2.$$

Tracemos la parábola siguiendo los puntos:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $+\frac{1}{2}$ | $+1$ | $+2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-8$ | $-1$ | $-\frac{1}{8}$ | $0$ | $+\frac{1}{8}$ | $+1$ | $+8$ |

y tracemos por los puntos $(-2; -8)$ y $(2; 8)$ una recta (Fig. 148).

Es necesario determinar el área rasgueada que se compone de dos partes iguales entre sí. Determinamos el área $OABD$ como la diferencia de las áreas del triángulo rectilíneo $OABC$ y del triángulo curvilíneo $ODBC$.

$$\text{El área } OABC = \int_0^2 4x\,dx = \Big|_0^2\, 2x^2 = 8.$$

$$\text{El área } ODBC = \int_0^2 x^3\,dx = \Big|_0^2\, \frac{x^4}{4} = 4.$$

El área $OABD = 8 - 4 = 4$; el área buscada: 8 unidades cuadradas.

5°. Calcular el área limitada por las líneas

$$y^2 = 2x + 1 \tag{1}$$

$$y = x - 1. \tag{2}$$

S o l u c i ó n. Hallamos los puntos de intersección de las líneas: para esto, sustituimos el valor de $y$ de la ecuación (2) en la ecuación (1) y obtenemos:

$$(x-1)^2 = 2x + 1; \quad x^2 - 4x = 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 4,$$

y poniendo estos valores de $x$ en la ecuación (2), obtenemos dos puntos de intersección: $A\ (0; -1)$ y $B\ (4; 3)$.

Transformando la ecuación (1) en la forma:

$$(y-0)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

determinamos el vértice de la parábola: $0\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Trazamos las líneas dadas en el segmento $\left[-\frac{1}{2}; 4\right]$ (fig. 149). El área buscada $S$ es la rayada.

$$S = \text{área } O'BC + \text{área } O'AC = \text{área } O'BD - \text{área } CBD + \\ + \text{área } O'AO + \text{área } AOC.$$

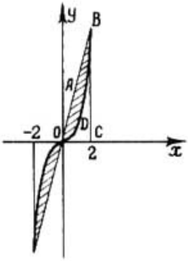



Fig. 148

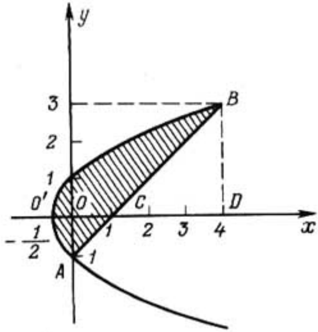



Fig. 149

Cada una de estas áreas se calcula por la fórmula

$$S = \int_a^b y\,dx.$$

Para las áreas $OBD$ y $O'AO$, $y$ se determina de la ecuación (1):

$$y = \pm\sqrt{2x+1},$$

al mismo tiempo se toma el signo $+$ para las ordenadas del arco $O'B$, que se encuentra situado encima del eje $OX$, y el $-$ para las del arco $O'A$, situado debajo del $OX$.

Para las áreas $CBD$ y $AOC$, $y$ se toma de la ecuación (2)

$$\text{área } O'BD = \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \sqrt[4]{2x+2}\,dx.$$

Suponiendo que $2x+1 = u$, tenemos $dx = \frac{1}{2}\,du$, $\alpha = u\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $\beta = u\,(4) = 9$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^9 \sqrt{4}\,du = \frac{1}{3}\Big|_0^9 \sqrt{4^3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3} - \sqrt{0}\right) = 9$$

$$\text{Area } CBD = \int_1^4 (x-1)\,dx = \Big|_1^4 \left(\frac{x^2}{2} - x\right) = 4 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{2}.$$

Las áreas $O'AO$ y $AOC$ están situadas debajo del eje $Ox$, por lo que sus integrales son números negativos. Hay que tomar su magnitud absoluta, para lo que es suficiente tomar las integrales con signo opuesto.

$$\text{Area } O'AO = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (-\sqrt{2x+1})\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sqrt{2x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\Big|_0^1 \sqrt{u^3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Area } AOC = -\int_0^1 (x-1)\,dx = -\Big|_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el área buscada

$$S = 9 - 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (unidades cuadradas).}$$

## § 131. Volumen de una pirámide

En calidad de ejemplo de aplicación de la integral definida, como límite de una suma, calculemos el volumen $v$ de una pirámide triangular (efectuando las operaciones indicadas en el punto 1° del § 127), siendo el área de la base igual a $S$ unidades cuadradas, y la altura, igual a $h$ unidades lineales.

Dividamos la altura de la pirámide $OM = h$ (fig. 150) en $n$ segmentos (es indiferente que sean iguales o desiguales): $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Por los puntos obtenidos se trazan planos paralelos a la base de la pirámide. Las áreas de los polígonos de la sección obtenida $s$ y de la base de la pirámide $S$ son proporcionales a los cuadrados de sus distancias desde el vértice de la pirámide.

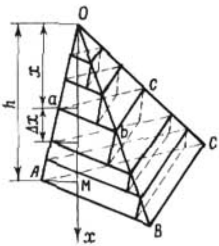



Fig. 150

Designando la distancia desde el vértice hasta la sección examinada $abc$ por medio de $x$, se tiene:

$$\frac{s}{S}=\frac{x^2}{h^2}; \quad s=\frac{S}{h^2}x^2.$$

Así pues, el área $s$ es una función continua de $x$, determinada en el segmento $[0, h]$:

$$s=f(x)=\frac{S}{h^2}x^2.$$

Construyamos en cada polígono de la sección un prisma cuya altura sea $\Delta x$, de tal modo que sus aristas laterales sean paralelas a la arista $OA$, y el polígono de la sección sea la base *superior* del prisma. El conjunto de estos prismas constituye un cuerpo escalonado, contenido enteramente en la pirámide.

El volumen de cada prisma es igual al producto del área de la sección $f(x)$ por la altura del prisma $\Delta x$:

$$f(x)\cdot\Delta x=\frac{S}{h^2}x^2\cdot\Delta x.$$

El volumen del cuerpo escalonado, que está formado por los prismas construidos, es una suma integral:

$$\sum_0^h f(x)\cdot\Delta x=\sum_0^h \frac{S}{h^2}\cdot x^2\Delta x.$$

El volumen de la pirámide es el límite de esta suma integral si $\Delta x\to 0$:

$$v=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_0^h \frac{S}{h^2}x^2\Delta x=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx=\frac{s}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=$$

$$=\frac{S}{h^2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}S\cdot h,$$

es decir, *el volumen de una pirámide (triangular) es igual a un tercio del producto del área de la base por su altura.*

## § 132. Volumen de un cuerpo de revolución

**1°. En la figura 151, la línea $aABb$ está formada por el arco $AB$ de una función continua $y=f(x)$, por las ordenadas de los puntos $A$ y $B$ y el segmento del eje $Ox$, limitado**

por estas ordenadas. Haciendo girar la línea $aABb$ alrededor del eje $Ox$, se obtiene la superficie de revolución $ABB_1A_1$; el cuerpo limitado por ella entre los círculos $AA_1$ y $BB_1$ se llama cuerpo de revolución. Hallemos su volumen. Se construye para el área $aABb$ un sistema de rectángulos (§ 127,

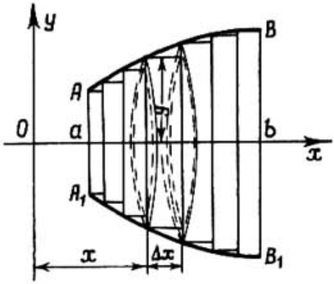



Fig. 151

2°). Al girar alrededor del eje $Ox$, los rectángulos forman cilindros. El conjunto de estos cilindros constituye un cuerpo escalonado. El volumen de cada cilindro es igual a $\pi y^2 \Delta x$, y el volumen de todo el cuerpo escalonado es:

$$\sum_a^b \pi y^2 \Delta x.$$

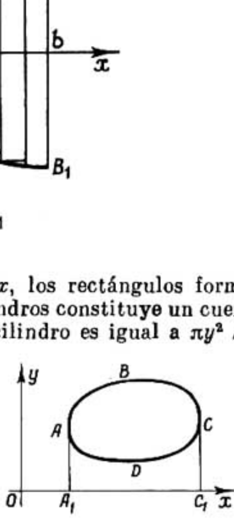



Fig. 152

Aquí, $\pi y^2$ es una función continua de $x$, porque según la condición, la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ (§ 71, 4°), y, por lo tanto la suma integral $\sum_a^b \pi y^2 \Delta x$ tiene límite para $\Delta x \to 0$ (§ 127, 1°). Este límite es el volumen del cuerpo de revolución $v$:

$$v = \lim \sum_a^b \pi y^2 \Delta x = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \pi \int_a^b y^2 \, dx.$$

Por lo tanto, el volumen de un cuerpo de revolución:

$$\boxed{v=\pi\int_a^b y^2\,dx \text{ o } v=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx} \qquad \text{(XXIV)}$$

2°. Si gira una curva cerrada (fig. 152), por ejemplo, $ABCD$, el volumen buscado es igual a la diferencia de los volúmenes obtenidos al girar los trapecios curvilíneos $A_1ABCC_1$ y $A_1ADCC_1$.

Designando por medio de $y_1$ la coordenada variable de la parte superior de la curva ($ABC$), y por $y_2$ la ordenada variable de su parte inferior ($ADC$), se obtiene:

$$\boxed{v=\pi\int_a^b (y_1^2-y_2^2)\,dx} \qquad \text{(XXV)}$$

## § 133. Ejemplos de cálculo de volúmenes *de cuerpos de revolución*

1°. Volumen de un cono circular recto. Se obtiene un cono circular recto, cuya altura sea $h$ y el radio $r$, al girar el triángulo rectangular $OAB$ (fig. 153), cuyos catetos son iguales a $h$ y $r$, alrededor del cateto $OA$, que es igual a $h$.

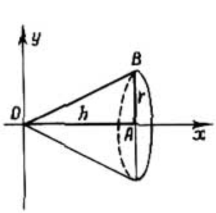



Fig. 153

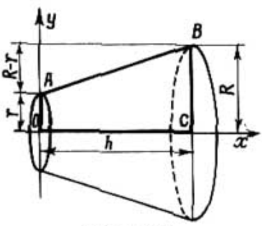



Fig. 154

Tomemos a $O$ por origen de las coordenadas, $OA$ por eje $Ox$. Entonces, la ecuación de la recta $OB$: $y=\frac{r}{h}x$.

El volumen del cono es (fórmula XXI):

$$v=\pi\int_0^h y^2\,dx=\pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\Big|_0^h\frac{x^3}{3}=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h.$$

Como $\pi r^2$ es el área de la base del cono, *el volumen de un cono es igual a un tercio del producto del área de la base por su altura.*

2°. Volumen de un cono truncado.

Se obtiene un cono truncado, cuya altura sea $h$ y los radios de las bases $r$ y $R$, al girar el trapecio rectangular $OABC$ (fig. 154) alrededor de $OC$ como si fuera su eje. Colocando los ejes de las coordenadas, según se indica en la figura 154, se forma la ecuación de la recta $AB$:

$$y=\frac{R-r}{h}x+r.$$

El volumen del cono truncado (fórmula XXIV)

$$v=\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2dx.$$

Suponiendo $\frac{R-r}{h}x+r=u$, se tiene: $\frac{h}{R-r}du$,

$$\text{para } x=0 \qquad \alpha=u(0)=r,$$
$$\text{para } x=h \qquad \beta=u(h)=R.$$

$$\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2dx=\frac{\pi h}{R-r}\int_r^R u^2\,du=\frac{\pi h}{R-r}\Big|_r^R\frac{u^3}{3}=$$
$$=\frac{1}{3}\frac{\pi h}{R-r}(R^3-r^3)=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2).$$

Abriendo los paréntesis, el volumen aparece así:

$$v=\frac{1}{3}\pi R^2h+\frac{1}{3}\pi r^2h+\frac{1}{3}\pi Rrh, \text{ es decir,}$$

*el volumen de un cono truncado es igual a la suma de los volúmenes de tres conos, con la misma altura que el cono truncado y cuyas bases son: para el primero, la base inferior de este cono; para el segundo, la base superior, y para el tercero, un círculo cuya área sea la media geométrica de las áreas de las bases superior e inferior.*

3°. Volumen de una esfera. Se obtiene una esfera de radio $r$ al girar el círculo $x^2+y^2=r^2$ alrededor del eje $Ox$ (fig. 155). Por lo tanto (fórmula XXIV):

$$v=\pi\int_{-r}^{+r}y^2\,dx=2\pi\int_0^{+r}(r^2-x^2)\,dx=2\pi\Big|_0^r\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)=$$
$$=2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^2.$$

Presentando $\frac{4}{3}\pi r^3$ en la forma $4\pi r^2\cdot\frac{1}{3}r$, se obtiene que: *el volumen de una esfera es igual al producto del cuádruplo del área de su círculo mayor por un tercio del radio.*

4°. Volumen de un segmento esférico.

La parte de la esfera $ACA_1$ (fig. 156), que separa de ella cierto plano $AA_1$, se llama segmento esférico. Es evidente que un segmento esférico puede ser considerado como un cuerpo de revolución resul-

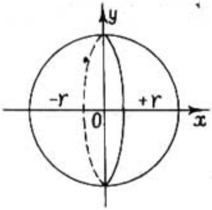



Fig. 155

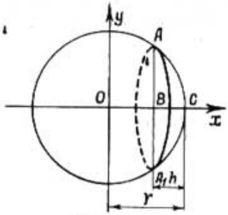



Fig. 156

tante de la rotación del segmento circular $ABA_1C$ alrededor de su altura $BC$. Supongamos que se conoce el radio del círculo $r$ y la altura del segmento $h$.

El volumen del segmento esférico:

$$v=\pi\int\limits_{r-h}^{r} y^2\,dx=\pi\int\limits_{r-h}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\Big|_{r-h}^{r}\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)=$$

$$=\pi\left\{\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left[r^2(r-h)-\frac{(r-h)^3}{3}\right]\right\}=\pi h^2\left(r-\frac{1}{3}h\right).$$

Se puede considerar $\pi h^2$ como el área del círculo de radio $h$, y $r-\frac{1}{3}h$ como la altura. Por lo tanto, *el volumen de un segmento esférico es igual al volumen de un cilindro, en el que la base es igual a la altura del segmento, y la altura es igual al radio de la esfera disminuido en un tercio de la altura del segmento.*

## § 134. Presión de un líquido

1°. En calidad de ejemplo de cálculo de valores de magnitudes como límite de la suma de infinitésimos, examinemos también la determinación de la presión de un líquido y el trabajo producido por una fuerza.

Es sabido que la fuerza de la presión de un líquido sobre una superficie de un plano horizontal de $S$ unidades cuadradas es igual al peso de la columna de líquido que tenga de base esta superficie, y de altura, la profundidad de inmersión a partir de la superficie del líquido. Designando el peso específico del líquido por medio de la letra $\gamma$, y la altura de la columna por medio de la letra $h$, se halla que la fuerza de presión del líquido sobre la superficie de $S$ unidades cuadradas es

$$P=\gamma \cdot h \cdot S.$$

Dada la superficie $S$, la fuerza de la presión del líquido es una función de la profundidad $h$. Supongamos que $aABb$ (fig. 157) es una parte de una pared vertical, por ejemplo de una piscina llena de líquido. Para determinar la fuerza de la presión sobre la superficie $aABb$, se divide $ab$ en $n$ partes, y se designa la longitud de los segmentos obtenidos con $\Delta h$. Se construye un rectángulo en cada segmento $\Delta h$, como si fuera su base. Se toma uno de los rectángulos $kKLl$, designando su superficie con $\Delta S$ y se considera que su límite superior $kK$ se encuentra a la profundidad $h$, a partir de la superficie del líquido. Supongamos que este rectángulo $kKLl$ está a la profundidad $h$ y que no es vertical, sino horizontal; en este caso soportará una presión igual a

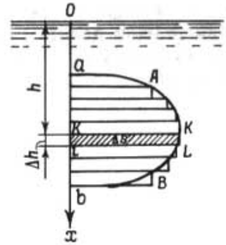



Fig. 157

$$\gamma h \Delta S.$$

Es sabido que la presión del líquido en cada uno de sus puntos es igual en todas las direcciones. Por lo tanto, si se vuelve a presentar el rectángulo $kKLl$ vertical, la presión ejercida sobre él será algo mayor que cuando se encontraba horizontalmente, porque la presión es algo mayor en su límite inferior $lL$ que en el límite superior $kK$.

Admitamos que la presión a lo largo de toda la altura $\Delta h$ es exactamente igual que en el límite $kK$, con lo que la fuerza de la presión sobre el rectángulo será igual a

$$\gamma \cdot h \Delta S.$$

El área del rectángulo $kKLl$ $\Delta S=kK \cdot \Delta h$. El valor de $kK$ cambia al variar la profundidad $h$ de inmersión de $kK$, es decir, $kK$ es función de $h$:

$$kK=f(h).$$

Es evidente que $kK$ es una función continua en el segmento $[a, b]$. En consecuencia, en el producto

$$\gamma \cdot h \cdot \Delta S = \gamma \cdot h \cdot f(h) \cdot \Delta h$$

la función $\gamma \cdot h \cdot f(h)$ es continua, y la suma integral

$$\sum_a^b \gamma h \Delta S$$

tiene límite cuando $\Delta h \to 0$. Este límite es el que representa la presión del líquido sobre toda la superficie $S$.

Por lo tanto, la presión sobre toda la superficie de la pared $aABb$:

$$\boxed{P = \lim_{\Delta h \to 0} \sum_a^b \gamma \cdot h \cdot \Delta S = \gamma \int_a^b h\, dS.} \qquad \text{(XXVI)}$$

*Aquí sirve de variable independiente la profundidad de inmersión $h$, por lo que antes de comenzar la integración es necesario expresar por medio de $h$ y $\Delta h$ el área del rectángulo $dS$; sirven de límites de integración los límites inferior y superior de la superficie en la que se determina la presión.*

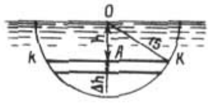


**Fig. 158**

**2°. Ejemplo.** Un tragaluz circular de 30 centímetros de diámetro, de la banda de una embarcación, está sumergido en el agua hasta la mitad. Hállese la presión que ejerce el agua en la parte sumergida (fig. 158).

**Solución.** Se determina la presión por medio de la fórmula la (XXVI):

$$P = \gamma \int_a^b h\, dS.$$

El área $dS = kK \cdot dh$.

Del triángulo $AOK$ hallamos que $kK = 2\sqrt{15^2 - h^2} = 2\sqrt{225 - h^2}$, y, en consecuencia, $dS = 2\sqrt{225 - h^2}\, dh$.

Para el agua $\gamma = 1$ gramo. Los límites de integración $a = 0$, $b = 15$. Por lo tanto, $P = 2\int_0^{15} h\sqrt{225 - h^2} \cdot dh$.

La integral indefinida $\int h \cdot \sqrt{225 - h^2}\, dh$ se calcula por medio de la sustitución $225 - h^2 = u^2$, $2h\, dh = 2u\, du$, $h\, dh = -u\, du$.

Por la condición de unicidad entre $h$ y $u$ $(0 \leqslant h \leqslant 15)$

$$u = \sqrt{225 - h^2}.$$

Los límites de integración respecto a $u$ son:

$$\alpha = u(0) = 15, \qquad \beta = u(15) = 0.$$

Se obtiene:

$$2\int_0^{15} h\sqrt{225-h^2}\,dh = -2\int_{15}^{0} u^2\,du = \frac{2}{3}\Big|_0^{15} u^3 = \frac{2}{3}\cdot 15^3 = 2\,250;$$

$$P = 2\,250g.$$

## § 135. Trabajo producido por una fuerza

1°. Si la fuerza es constante, su valor numérico es idéntico en todos los puntos de la trayectoria; pero si varía la fuerza, su valor numérico suele ser diferente en los diversos puntos de ella; es decir, a cada valor de distancia recorrida corresponde un valor determinado de la fuerza que actúa $F$. Por lo tanto, la fuerza $F$ puede considerarse como una función de la distancia recorrida $s$:

$$F = f(s).$$

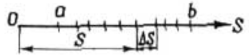



Fig. 159

Examinemos solamente la variación continua de la fuerza, es decir, admitamos a $f(s)$ como función continua de la distancia $s$ y consideremos que la dirección de la fuerza coincide con la dirección del movimiento.

Para determinar el trabajo producido por una fuerza variable $F$ en el segmento de la trayectoria rectilínea $ab$ (fig. 159), se divide $[a, b]$ en un gran número de partes $n$, y la longitud de cada uno de los segmentos obtenidos se designa por medio de $\Delta s$.

El valor de la fuerza en el origen de cada segmento de la trayectoria $\Delta s$ es igual a $f(s)$, donde $s$ es el valor de la distancia recorrida hasta el origen del segmento en cuestión.

Supongamos que el valor de la fuerza $f(s)$ varía solamente en el origen de cada uno de los segmentos obtenidos $\Delta s$ y que a todo lo largo de $\Delta s$ permanece invariable. En ese caso, el trabajo de la fuerza constante $f(s)$ a lo largo de la trayectoria $\Delta s$ se expresa por medio del producto $f(s)\cdot\Delta s$. Esto es conocido de la física. Es evidente que este producto (denominado generalmente trabajo elemental) se diferencia del valor real del trabajo en el segmento $\Delta s$, y la suma $\sum_{a}^{b} f(s)\cdot\Delta s$ se diferencia del trabajo real en el segmento $[a, b]$.

Como $f(s)$ es una función continua en el segmento $[a, b]$, la suma integral $\sum_{a}^{b} f(s)\cdot\Delta s$ tiene límite al tender $\Delta s$ a cero:

$$\lim_{\Delta s\to 0} \sum_{a}^{b} f(s)\cdot\Delta s,$$

igual al valor del trabajo $w$, producido por la fuerza $f(s)$ a lo largo de la trayectoria $ab$.

Por lo tanto,

$$\boxed{w=\lim_{\Delta s\to 0} \sum_{a}^{b} f(s)\cdot\Delta s=\int_{a}^{b} f(s)\,ds} \qquad \text{(XXVII)}$$

2°. Ejemplo. 1. Dos cargas eléctricas: $e_1 = +100$ unidades electrostáticas y $e_2 = +50$ unidades electrostáticas están inmóviles, a la distancia de 10 centímetros la una de la otra. ¿Cuál es el trabajo

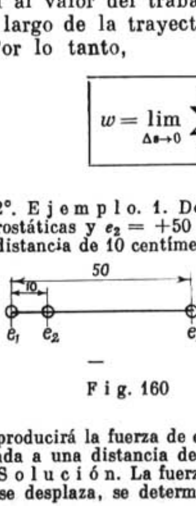



Fig. 160

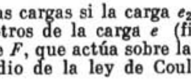



Fig. 161

que producirá la fuerza de empuje de las cargas si la carga $e_2$, es desplazada a una distancia de 50 centímetros de la carga $e$ (fig. 160)?

Solución. La fuerza de empuje $F$, que actúa sobre la carga $e_2$ que se desplaza, se determina por medio de la ley de Coulomb:

$$F=\frac{e_1\cdot e_2}{r^2}=\frac{100\cdot 50}{r^2}=\frac{5\,000}{r^2},$$

donde $r$ es la distancia entre las cargas, expresada en centímetros. La fuerza $F$ no permanece constante, sino que disminuye continuamente al alejarse la carga $e_2$, ès decir, en realidad es una función del espacio recorrido durante el movimiento, según hemos admitido en el caso general.

Los límites de la variación de la variable independiente $r$ son: la distancia inicial entre las cargas, 10 centímetros, y la final, 50 centímetros. Según la fórmula (XXVII), el trabajo producido por la fuerza de empuje:

$$w=\int_{10}^{50}\frac{5\,000}{r^2}\,dr=-5\,000\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{10}\right)=400\ \text{(ergios)}.$$

3°. E j e m p l o. 2. Se ha encerrado un gas en un cilindro con émbolo móvil, cuya superficie transversal es $a$ unidades cuadradas. Considerando que al aumentar el volumen del gas subsiste la ley de Boyle-Mariotte $p\cdot v = k$, calcúlese el trabajo producido por la fuerza de presión del gas al aumentar su volumen desde $v_0$ hasta $v_1$ (fig. 161).

S o l u c i ó n. Se designa con $v$ el volumen del gas en el cilindro, y con $p$ la presión que actúa sobre una unidad de superficie del émbolo. Como la superficie del émbolo es igual a $a$ unidades, la fuerza de presión del gas sobre ésta es igual a $p\cdot a$. Supongamos que al aumentar el volumen desde $v_0$ hasta $v_1$, el émbolo recorre el trayecto $s = s_1 - s_0$ con lo que el trabajo de la fuerza de presión del gas, según la fórmula (XXVII):

$$w=\int_{s_0}^{s_1} p\cdot a\cdot ds.$$

Debe tenerse en cuenta que la presión $p$ es aquí una magnitud variable y depende del valor del volumen $v$, precisamente $p=\frac{k}{v}$. Expresemos $ds$ como función de $v$. Supongamos que el émbolo se ha desplazado en $ds$, en tanto que el volumen del gas ha aumentado en $dv$. Entonces

$$dv=a\cdot ds \quad \text{y} \quad ds=\frac{dv}{a}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de $p$ y $ds$ en la integral y reemplazando dos límites de variación de $s$ por los correspondientes límites de variación de $v$, se tiene:

$$w=\int_{s_0}^{s_1} p\cdot a\cdot ds=\int_{v_0}^{v_1}\frac{k}{v}\,a\cdot\frac{dv}{a}=k\int_{v_0}^{v_1}\frac{dv}{v}=k\ln\frac{v_1}{v_0}.$$

CAPITULO XII

# ECUACIONES DIFERENCIALES

## § 136. Concepto de ecuaciones diferenciales y sus soluciones

1°. En una ecuación diferencial ordinaria, la incógnita es una función de un argumento.

Existen las siguientes d e f i n i c i o n e s:

1. *Se llama ecuación diferencial ordinaria de primer orden a una igualdad que relaciona la función desconocida con su argumento y su derivada.*

Su forma general se expresa por el símbolo

$$F(x, y, y) = 0,$$

donde $y$ es la función desconocida con argumento $x$.

En particular, la ecuación de primer orden puede ser representada en forma explícita respecto a la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

2. *Se llama ecuación diferencial ordinaria de segundo orden a una igualdad que relaciona la función desconocida con su argumento y sus derivadas de segundo y primero órdenes.*

Su forma general se denota con el símbolo $F(x, y, y', y'') = 0$, en particular: $\frac{d^2x}{dx^2} = f(x, y, y')$, donde $y$ es una función desconocida de $x$.

3. En general, *se llama ecuación diferencial ordinaria a una igualdad que relaciona la función desconocida con su argumento y con sus derivadas desde el primer orden hasta el orden $n$ (inclusive).*

4. *Se llama orden de la ecuación diferencial al orden de la derivada de mayor grado que figura en esta ecuación.*

E j e m p l o s. Son ecuaciones diferenciales ordinarias:

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$, de primer orden;

2) $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=x$, de segundo orden;

3) $\frac{d^3y}{dx^3}-xe^x=0$, de tercer orden.

La tercera ecuación no contiene $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, sin embargo, es de tercer orden, ya que su derivada de mayor grado es de tercer orden.

En el análisis se estudian, además de las ecuaciones ordinarias (es decir, las ecuaciones con una función incógnita de un argumento), las ecuaciones diferenciales de varios argumentos. Como se estudiarán sólo las ecuaciones diferenciales ordinarias, para abreviar la escritura se omitirá la palabra "ordinaria", es decir, diremos sencillamente ecuación diferencial.

2°. Definición 5. *Se llama solución de la ecuación diferencial a una función, cuya sustitución en la ecuación conduce a una identidad.* En otras palabras, *se llama solución de la ecuación diferencial a una función que satisface a esta ecuación.*

Por ejemplo, la función $y=\sqrt{x}$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x} \quad 1)$$

(ejemplo 1), ya que sustituyéndola en la ecuación se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad \frac{y}{2x}=\frac{\sqrt{x}}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad \frac{1}{2\sqrt{x}}\equiv\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

($\equiv$ significa que es idénticamente igual).

Indiquemos que cualquier función $y=\sqrt{Cx}$, donde $C$ es una constante arbitraria, es una función diferencial 1).

En efecto, sustituyendo $y$ por $\sqrt{Cx}$ en la ecuación 1), resulta: $\frac{dy}{dx}=\frac{d\sqrt{Cx}}{dx}=\frac{C}{2\sqrt{Cx}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{x}}=\frac{1}{2x}\sqrt{Cx}=\frac{1}{2x}y=$
$=\frac{y}{2x}$; $\frac{y}{2x}\equiv\frac{y}{2x}$.

Como se ve, la ecuación diferencial de primer orden tiene* un conjunto infinito de soluciones que depende de una constante arbitraria $C$.

* En general, bajo ciertas condiciones determinadas.

La ecuación de segundo orden tiene * un conjunto infinito de soluciones que depende de dos constantes independientes arbitrarias $C_1$ y $C_2$**. Aclaremos esto con un ejemplo.

E j e m p l o 4. Hallar la solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} = x$.

S o l u c i ó n. Supongamos que $\frac{dy}{dx} = z$. Entonces $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, y esta ecuación toma la forma siguiente: $\frac{dz}{dx} = x$. De aquí:

$$dz = x\,dx; \qquad z = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1,$$

o sea, para $z = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 + C_1.$$

Por lo tanto

$$dy = \frac{1}{2}x^2\,dx + C_1\,dx;$$

$$y = \frac{1}{2}\int x^2\,dx + C_1\int dx = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2;$$

$$y = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2.$$

De este modo, para la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} = x$ existe un conjunto infinito de soluciones que depende de dos constantes arbitrarias $C_1$ y $C_2$, independientes entre sí.

D e f i n i c i ó n 6. *La solución de la ecuación diferencial, que contiene una cantidad de constantes independientes arbitrarias igual al orden de la ecuación, se llama solución general de la ecuación diferencial.****

Según la definición, la solución general de la ecuación diferencial de primer orden $y = \varphi(x, C)$ es una familia de funciones de $x$, que depende de una constante arbitraria $C$;

* En general, bajo ciertas condiciones determinadas.

** «Independientes» significa que la introdución de nuevas constantes no puede disminuir su número.

*** Más adelante se tratará sobre la propiedad que determina la solución general.

la solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y = \varphi(x_1 C_1, C_2)$$

es una familia de funciones de $x$, dependiente de dos constantes arbitrarias independientes $C_1$ y $C_2$; etc.

D e f i n i c i ó n 7. *Toda solución obtenida de la solución general, sustituyendo las constantes arbitrarias por valores determinados, se llama solución particular de la ecuación diferencial.*

Para la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ la solución general es $y = \sqrt{Cx}$, y una solución particular, $y = \sqrt{x}$. La última se obtiene de la general, si $C = 1$.

Para la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} = x$ la solución general es $y = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2$. Si se hace en la solución general, por ejemplo, $C_1 = 1$, y $C_2 = -3$, se obtiene la solución particular: $y = \frac{1}{6}x^3 + x - 3$.

Algunas ecuaciones diferenciales tienen las soluciones singulares.

D e f i n i c i ó n 8. *Se llaman soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden a soluciones que no contienen constante arbitraria, y no pueden ser obtenidas de la solución general bajo ningún valor de la constante arbitraria.*

E j e m p l o 5. Hallar la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$.

S o l u c i ó n. Suponiendo que $1 - y^2 \neq 0$, dividimos la ecuación por $\sqrt{1 - y^2}$ y multiplicamos por $dx$:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx.$$

El primer miembro es la diferencial de arc sen $y$; por lo tanto se tiene: $d \operatorname{arc\,sen} y = dx$; $\int d \operatorname{arc\,sen} y = \int dx$, $\operatorname{arc\,sen} y = x + C$.

De aquí

$$y = \operatorname{sen}(x + C).$$

Esta es la solución general de la ecuación dada. En efecto, sustituyendo $y$ por $\operatorname{sen}(x+C)$ en la ecuación dada, resulta:

$$\frac{dy}{dx}=[\operatorname{sen}(x+C)]'=\cos(x+C)=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x+C)}\ .$$

Como $\operatorname{sen}^2(x+C)=y^2$,

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2};\quad \sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-y^2}.$$

Hemos hallado así la solución general de la ecuación, si $1-y^2\neq 0$.

Supongamos ahora que $1-y^2=0$. En este caso, $y=\pm 1$.

La sustitución de estas funciones en la ecuación dada conduce a la identidad

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\pm 1)}{dx}=0;\quad \sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-(\pm 1)^2}=0;\quad 0\equiv 0.$$

Por consiguiente, $y=1$ e $y=-1$ son soluciones de la ecuación diferencial dada. Sin embargo, éstas no se obtienen de la solución general $y=\operatorname{sen}(x+C)$ bajo ningún valor de la constante arbitraria $C$. Según la definición 8, $y=1$ e $y=-1$ son soluciones singulares de la ecuación dada.

## § 137. Ecuación $\frac{dy}{dx}f(x, y)$ y su solución; interpretación geométrica

1°. Noción sobre función de dos argumentos. Si a cada par de números, valores de las magnitudes $x$ e $y$, le corresponde un número único, que es el valor de la tercera magnitud $u$, esta tercera magnitud $u$ se llama *función de dos argumentos $x$ e $y$*.

El hecho de ser $u$ una función determinada de dos argumentos $x$ e $y$, se representa así:

$$u=f(x, y),$$

donde $f$ es una ley según la cual a cada par de números $x$ e $y$ le corresponde el número $u$.

Supongamos que $x_0$, $y_0$ son números dados. El símbolo $f(x_0, y_0)$ significa el valor de la función cuando $x=x_0$ e $y=y_0$.

2°. E c u a c i ó n $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Consideremos que la ecuación diferencial ordinaria de primer orden está expresada en la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x, y).} \tag{I}$$

Según esta ecuación *la derivada* $\frac{dy}{dx}$ *es una función dada de dos argumentos* $x$ *e* $y$.

Si $x$ e $y$ se consideran como abscisa y ordenada de un punto en el plano de coordenadas $xOy$, según esta ecuación *la derivada* $\frac{dy}{dx}$ *es una función dada del punto* $(x, y)$ *del plano* $xOy$.

3°. S o l u c i ó n d e l a e c u a c i ó n (I). La solución general de la ecuación (I)

$$y = \varphi(x, C)$$

posee la siguiente propiedad que la determina:

tomando los valores arbitrarios $x = x_0$ e $y = y_0$*, la ecuación $y_0 = \varphi(x_0, C)$ tiene una solución única $C = C_0$, para la cual $y = \varphi(x, C)$ da la función $y = \varphi(x, C_0)$ que satisface la condición $y = y_0$, si $x = x_0$, y la ecuación dada $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Esta función $y = \varphi(x, C_0)$ existe y es única en un entorno del punto $x = x_0$**.

Los números $x_0$, $y_0$ se llaman *valores iniciales* o *punto inicial de la solución de la ecuación*, y la función $y = \varphi(x, C_0)$ se denomina *solución de la ecuación* (1) *con el punto inicial* $(x_0, y_0)$.

E j e m p l o. La ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ tiene la solución general $y = \sqrt{Cx}$. Tomemos arbitrariamente valores de $x$ e $y$, por ejemplo, $x = -2$, $y = 3$. Sustituyendo estos valores en $y = \sqrt{Cx}$, se obtiene la ecuación respecto a $C$:

$$3 = \sqrt{-2C}.$$

* Estos valores, como se explica en los cursos superiores de análisis, deben pertenecer al dominio de continuidad de la función $f(x, y)$ y de su derivada (parcial) respecto a $y$.

** Esto se demuestra en los cursos superiores de análisis.

Resolviendo esta ecuación, obtenemos el valor único $C=C_0$:

$$9=-2C_0, \qquad C_0=-4{,}5,$$

y la función

$$y=\sqrt{-4{,}5x}$$

es la solución (particular) de la ecuación dada con el punto inicial $(-2;\ 3)$.

Para hallar la solución particular de la ecuación diferencial (1) puede ser dada la *condición inicial*: si $x=x_0$, entonces $y=y_0$. Esta condición se escribe en forma abreviada así:

$$y_{x=x_0}=y_0.$$

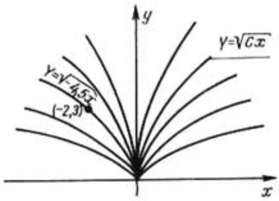



Fig. 162

La existencia de la condición inicial $y_{x=x_0}=y_0$ es equivalente a la existencia del punto inicial $(x_0,\ y_0)$.

4°. Interpretación geométrica de las soluciones. *La gráfica de una solución particular de una ecuación diferencial ordinaria se llama curva integral de esta ecuación.*

Geométricamente la solución general $y=\varphi(x,\ C)$ representa una familia de curvas integrales, dependientes de un parámetro*, que por cada punto $(x_0,\ y_0)$ del plano** pasa una curva única $y=\varphi(x,\ C_0)$, donde $C_0$ es la solución de la ecuación $y_0=\varphi(x_0,\ C)$.

En la figura 162 se representa la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$; está también representada la curva integral con el punto inicial $(-2;\ 3)$.

La figura 163 da una idea de la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$ (ejemplo 5 § 136), es decir, de una familia de sinusoides. En la figura están representadas también las curvas integrales particula-

* Una familia de curvas, dependiente de un parámetro variable, que es la constante arbitraria $C$.

** Con la misma restricción, que respecto a la arbitrariedad de $x_0$, $y_0$.

res: las rectas $y = 1$ u $y = -1$, que son paralelas al eje $Ox$. Estas son tangentes a cada una de las sinusoides.

5°. Interpretación geométrica de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Aquí la derivada $\frac{dy}{dx}$ es una

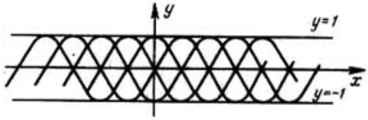



Fig. 163

función dada del punto $(x, y)$ del plano $xOy$. Esto significa que *para cada punto* $(x, y)$ *del plano*, la ecuación da un valor único determinado de la derivada $\frac{dy}{dx}$, es decir, *da el coeficiente angular de la tangente a la única curva integral que*

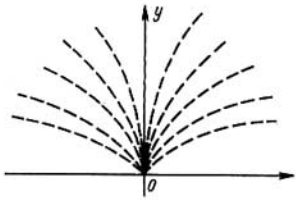



Fig. 164

*pasa por dicho punto*, la cual es la gráfica de la solución de la ecuación diferencial con el punto inicial $(x, y)$.

Por lo tanto, *la ecuación diferencial* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *determina la dirección de las tangentes en los puntos del plano* $xOy$; se dice brevemente, *que determina un campo direccional en el plano* $xOy$.

En la fig. 164 se representa el campo direccional de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$. Las direcciones se indican por pequeños segmentos rectilíneos.

6°. A veces, al hallar la solución general de la ecuacion (I) no se obtiene la solución general $y = \varphi(x, C)$, sino una igualdad que relaciona a $x$, $y$ y $C$:

$$F(x, y, C) = 0,$$

la cual determina implícitamente la solución general. Esta igualdad se llama *integral general de la ecuación diferencial dada*.

La ecuación $F(x, y, C_0) = 0$ se llama *integral particular de la ecuación diferencial para el punto inicial* $(x_0, y_0)$, o para la condición inicial $y_{x=x_0} = y_0$.

## § 138. Ecuación de primer orden de variables separables y separadas

1°. Si la ecuación diferencial dada de primer orden y de primer grado respecto a la derivada puede reducirse a la forma

$$\boxed{f_1(y)\,dy = f_2(x)\,dx,} \qquad \text{(II)}$$

entonces ésta se llama *ecuación de variables separables*, y la ecuación (II) obtenida, *ecuación de variables separadas*.

La resolución de una ecuación de variables separadas consiste en integrar el primer miembro respecto a $y$, y el segundo respecto a $x$. Las integrales obtenidas pueden diferenciarse sólo en una constante arbitraria $C$; esto se denota en la fórmula agregando $C$ a una de ellas:

$$\boxed{\int f_1(y)\,dy = \int f_2(x)\,dx + C.} \qquad \text{(III)}$$

A veces la ecuación (II) se toma en la forma

$$\boxed{f_1(y)\,dy + f_2(x)\,dx = 0.} \qquad \text{(IIa)}$$

Entonces la fórmula (III) toma la forma

$$\boxed{\int f_1(y)\,dy + \int f_2(x)\,dx = C.} \qquad \text{(IIIa)}$$

2°. Nota. La ecuación más sencilla de primer grado de variables separables es aquélla de la que se parte al introducir el concepto de integral indefinida (capítulo X):

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

De ella se obtuvo la ecuación de variables separadas:

$$dy = f(x)\, dx,$$

así como su solución general:

$$y = \int f(x)\, dx,$$

y si era dado el punto inicial (§ 113, 3°), se obtenía una solución particular.

3°. Ejemplo 1. Hallar la solución general de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$.

Solución. La ecuación dada es de variables separables. En efecto, dividiéndola entre $y$ (suponiendo que $y \neq 0$) y multiplicando por $dx$, se obtiene $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$, que es una ecuación de variables separadas. Aplicando la fórmula (III), se tiene:

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + C.$$

De aquí

$$\ln |y| = \frac{1}{2} (\ln |x| + \ln C).$$

Potenciando, se obtiene la solución general:

$$y = \sqrt{Cx}.$$

4°. Ejemplo 2. Integrar la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{x(1+y^2)}$.

Solución. Integrar una ecuación diferencial significa hallar sus soluciones, o integrales.

Multiplicando la ecuación dada por $(1 + y^2)\, dx$, se obtiene una ecuación de variables separadas:

$$(1+y^2)\, dy = \frac{1+x^2}{x}\, dx, \quad \text{o} \quad (1+y^2)\, dy = \left(\frac{1}{x} + x\right) dx.$$

Aplicando la fórmula (III), se obtiene:

$$\int (1+y^2)\, dy = \int \left(\frac{1}{x} + x\right) dx + C,$$

$$y + \frac{y^3}{3} = \ln |x| + \frac{x^2}{2} + C.$$

De aquí, la integral general de la ecuación dada es:

$$y+\frac{1}{3y^3}-\ln|x|-\frac{1}{2}x^2=C.$$

5°. Ejemplo 3. Resolver la ecuación $\operatorname{sen} x \cos y\, dx + \cos x \operatorname{sen} y\, dy = 0$.

Solución. Esta es una ecuación de variables separables, ya que al dividirla entre $\cos y \cos x$ (suponiendo que $\cos y \neq 0$ y $\cos x \neq 0$), se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx+\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}\,dy=0.$$

La aplicación de la fórmula (IIIa) da

$$\int\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x}+\int\frac{\operatorname{sen} y\,dy}{\cos y}=C;$$

$$-\ln|\cos x|-\ln|\cos y|=C, \quad \text{o} \quad \ln|\cos x|+\ln|\cos y|=-C.$$

Potenciando, se obtiene la integral general en la forma

$$\cos x\cos y=e^{-C}, \quad \text{donde} \quad \cos x\neq 0, \quad \cos y\neq 0 \ \text{ y } \ C\geqslant 0.$$

Al dividir entre $\cos x \cos y$, hemos despreciado las posibles soluciones

$$\cos x=0 \quad \text{y} \quad \cos y=0,$$

es decir,

$$x=\pm\frac{1}{2}\pi;\ \pm\frac{3}{2}\pi;\ \ldots;\ y=\pm\frac{1}{2}\pi;\ \pm\frac{3}{2}\pi;\ \ldots$$

Estas funciones satisfacen efectivamente a la ecuación diferencial dada (lo que puede verificarse) y, por tanto, son sus soluciones.

6°. Ejemplo 4. Hallar las curvas integrales de la ecuación diferencial $y \ln y\, dx + x\, dy = 0$, y aquélla que pasa por el punto: a) $(e;\ e)$, b) $(1,\ 1)$.

Solución. Dividamos la ecuación $y \ln y\, dx + x\, dy = 0$ entre $xy \ln y$, considerando que $x \neq 0$, $\ln y \neq 0$ y, por lo tanto, $y > 0$ e $y \neq 1$. Se obtiene

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y\ln y}=0,$$

y, en virtud de la fórmula (IIIa),

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dy}{y\ln y}=C. \qquad (*)$$

La primera integral es tabular; la segunda se halla por medio de la sustitución $\ln y=t$, $\frac{dy}{y}=dt$:

$$\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|\ln y|.$$

De este modo, se obtiene la integral general:

$$\ln|x|+\ln|\ln y|=C.$$

Hallaremos ahora la curva de esta familia de curvas integrales que pasa por el punto $(e;\ e)$. Sustituyendo las coordenadas de $(e;\ e)$ en la integral general, se obtiene:

$$\ln e+\ln \ln e=1+\ln 1=1+0=1;\ C=1,$$

y la ecuación de la curva integral que pasa por el punto $(e;\ e)$ es: $\ln |x| + \ln |\ln y| = 1$.

En la ecuación de la familia de curvas integrales es $y>0$ e $y \neq 1$; por esto, no es posible sustituir en ella las coordenadas del segundo *punto dado* $(1;\ 1)$.

Sin embargo, la función $y = 1$ satisface la ecuación diferencial dada. En efecto, si $y = 1$ para todo $x$, entonces $\ln y = 0$ y $dy = 0$ para todo $x$, y al sustituir estos valores en la ecuación dada, se obtiene: $0 \equiv 0$.

Esto significa que por el punto $(1;\ 1)$ pasa la recta integral $y = 1$.

7°. Sobre la verificación de las soluciones. La verificación de la solución de una ecuación diferencial se efectúa sustituyendo esta solución (o integral) en la ecuación dada. Al hacerlo, evidentemente, siempre hay que hallar la derivada de la función $y$ respecto a $x$.

Detengámonos en el caso en que se ha obtenido la integral general e $y$ es, de este modo, *una función implícita de $x$. La derivada de $y$ respecto a $x$ puede ser hallada sin resolver la ecuación obtenida respecto a $x$.*

Verifiquemos la solución del ejemplo 2. La integral general es

$$y+\frac{1}{3}\,y^3-\ln |x|-\frac{1}{2}\,x^2=C.$$

Derivémosla respecto a $x$, teniendo en cuenta que $y$ es función de $x$, que la derivada de $y$ respecto a $x$ es $y'=\frac{dy}{x}$, que $y^3$ es una función de la función $y$ de $x$, y que la derivada de $y^3$ se halla como la derivada de una función de función (fórmula XI, § 85): $(y^3)'=3y^2y'$. Obsérvese, además, que la derivada $\ln |x|=\frac{1}{x}$ (§ 89,5°). De este modo, derivando la integral general, se obtiene:

$$y'+\frac{1}{3}\cdot 3y^2y'-\frac{1}{x}-x=0.$$

De aquí

$$(1+y^2)\cdot y'-\frac{1+x^2}{x}=0.$$

De esto se obtiene

$$y'=\frac{1+x^2}{x(1+y^2)}.\ \text{De este modo,}\ \frac{1+x^2}{x(1+y^2)}\equiv\frac{1+x^2}{x(1+y^2)}.$$

Verifiquemos la solución del ejemplo 4. La integral general es:

$$\ln |x|+\ln |\ln y|=C.$$

Derivémosla respecto a $x$, considerando que $\ln |\ln y|$ es una función de la función $y$ de $x$, y que su derivada se halla según la fórmula $(X)$ del § 85 y el 5°, § 89:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln y}\cdot(\ln y)'=0;\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

Eliminando denominadores, se obtiene:

$$y\ln y\,dx+x\,dy=0;\quad 0\equiv 0.$$

## § 139. Ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden

1°. Definición. La función $f(x,\ y)$ se llama *función homogénea de dimensión n* (de grado $n$), si al multiplicar sus argumentos $x$ e $y$ por un cierto factor, ésta se multiplica por la potencia $n$ de dicho factor; es decir, si

$$f(tx,\ ty)=t^n f(x,\ y);$$

$f(x,\ y)$ es una *función homogénea de dimensión cero*, si

$$f(tx,\ ty)=f(x,\ y).$$

Ejemplos. 1) $f(x,\ y)=x^3-2xy^2$ es una función homogénea de dimensión tres, ya que al multiplicar $x$ e $y$ por $t$, se obtiene:

$$f(tx,\ ty)=(tx)^3-2(tx)(ty)^2=t^3x^3-2t^3xy^2=t^3(x^3-2xy^2)=t^3f(x,\ y).$$

2) $f(x,\ y)=\dfrac{x^2-xy}{y^2+xy}$ es una función homogénea de dimensión cero, ya que al multiplicar $x$ e $y$ por $t$, se obtiene:

$$f(tx,\ ty)=\frac{(tx)^2-(tx)(ty)}{(ty)^2+(tx)(ty)}=\frac{t^2(x^2-xy)}{t^2(y^2+xy)}=t^0\,\frac{x^2-xy}{y^2+xy}=$$
$$=t^0f(x,\ y)=f(x,\ y).$$

2°. *Una función homogénea $f(x,\ y)$ de dimensión cero es función del cociente de los argumentos $\dfrac{y}{x}$.*

En efecto, tomemos a $1/x$ como factor de los argumentos. Como $f(x,\ y)$ es una función homogénea de dimensión cero, se verifica la igualdad

$$f\left(\frac{1}{x}\cdot x,\ \frac{1}{x}\cdot y\right)=f(x,\ y).$$

De aquí

$$f(x,\ y)=f\left(1,\ \frac{x}{y}\right);$$

$f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ es una función del cociente de los argumentos $\frac{y}{x}$; la denotaremos por el símbolo $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Se tiene así que la función homogénea de dimensión cero es

$$\boxed{f(x, y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).} \tag{IV}$$

3°. Definición. *La ecuación de primer orden* $\frac{dy}{dx}= =f(x, y)$ *se llama homogénea, si* $f(x, y)$ *es una función homogénea de dimensión cero*, es decir, si

$$\boxed{f(tx, ty)=f(x, y).} \tag{V}$$

Esta relación tendrá lugar si la función dada $f(x, y)$ es un cociente de funciones homogéneas $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ de igual dimensión. Por eso *se llama ecuación diferencial homogénea de primer orden también a la ecuación*

$$\boxed{f_1(x, y)\,dx+f_2(x, y)\,dy=0,} \tag{VI}$$

*en la que* $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ *son funciones homogéneas de igual dimensión.*

4°. *La ecuación diferencial homogénea de primer orden se reduce a una de variables separables por medio de la sustitución* $\frac{y}{x}=u$ o $y=xu$.

En efecto, si la ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ es homogénea, e $\frac{y}{x}=u$, entonces

$$f(x, y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\varphi(u).$$

Derivando la igualdad $y=xu$ respecto a $x$ según la fórmula de la derivada de un producto, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=u+x\cdot\frac{du}{dx}.$$

De este modo, la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ toma la forma

$$u+x\cdot\frac{du}{dx}=\varphi(u),$$

y ésta es una ecuación de variables separables.

Obsérvese que en su solución general o en su integral general, $u$ debe sustituirse por $\frac{y}{x}$.

5°. Ejemplo. Resolver la ecuación $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$.
Solución. $x^2 + y^2$ y $xy$ son funciones homogéneas de una misma dimensión, igual a dos. Esto significa que la ecuación dada es homogénea, del tipo (VI), y se reduce a una de variables separables por medio de la sustitución

$$y = xu.$$

De aquí

$$dy = u\,dx + x\,du$$

Sustituyendo las expresiones de $y$ y $dy$ en la ecuación dada, se obtiene:

$$(x^2 + x^2u^2)\,dx - x\cdot xu\,(u\,dx + x\,du) = 0;$$

$$x^2\,(1 + u^2)\,dx - x^2\,(u^2\,dx + xu\,du) = 0.$$

Suponiendo que $x^2 \neq 0$, se divide la ecuación por $x^2$. Entonces, se obtiene:

$$dx + u^2\,dx - u^2\,dx - xu\,du = 0;\ \ dx - xu\,du = 0;$$

$$\frac{dx}{x} - u\,du = 0;\ \ \int \frac{dx}{x} - \int u\,du = C;\ \ \ln|x| - \frac{u^2}{2} = C,$$

o, como $u = \frac{y}{x}$,

$$\ln|x| - \frac{y^2}{2x^2} = C. \tag{1}$$

Esta integral general de la ecuación diferencial dada puede ser representada en otra forma. Escribiéndola de la siguiente manera:

$$\ln|x| = \frac{y^2}{2x^2} + \ln|C|,$$

se potencia esta expresión, y se obtiene la integral general en la forma siguiente (§ 85,5°):

$$x = C\cdot e^{\frac{y^2}{2x^2}}, \tag{2}$$

donde

$$-\infty < x < 0,\ \ 0 < x < +\infty.$$

Obsérvese que la función $x = 0$ también satisface la ecuación diferencial dada, lo que puede verificarse directamente.

6°. Nota. En los cursos detallados de análisis, se demuestra que las distintas expresiones de la integral general de una ecuación diferencial dada, están ligadas por una dependencia determinada, más precisamente, una de las integrales es una cierta función de la otra. En el ejemplo 5°, la integral (1) es el logaritmo natural de la (2).

7°. Verificación de la solución del ejemplo. Derivando la integral general (2) respecto a $x$, se obtiene la ecuación diferencial

$$1=Ce^{\frac{y^2}{2x^2}}\left(\frac{y^2}{2x^2}\right)'=Ce^{\frac{y^2}{2x^2}}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{2y\cdot y'\cdot x^2-2x\cdot y^2}{x^4}=$$

$$=Ce^{\frac{y^2}{2x^2}}\cdot\frac{xyy'-y^2}{x^3}. \qquad (3)$$

La constante arbitraria $C$ se excluye de la siguiente manera: se halla $C$ de (2), y se sustituye la expresión obtenida en (3):

$$C=\frac{x}{e^{\frac{y^2}{2x^2}}},\quad 1=\frac{x}{e^{\frac{y^2}{2x^2}}}\cdot e^{\frac{y^2}{2x^2}}\cdot\frac{xyy'-y^2}{x^3}.$$

Se obtiene:

$$1=\frac{xyy'-y^2}{x^2},$$

de donde

$$x^2+y^2-xy\frac{dy}{dx}=0,\ \text{o}\ (x^2+y^2)\,dx-xy\,dy=0;\ 0\equiv 0.$$

## § 140. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

1°. Definición. *Una ecuación deferencial se llama lineal, si es de primer grado respecto a la función incógnita $y$ a sus derivadas.*

Por definición, la ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x).} \qquad \text{(VII)}$$

2°. La solución de la ecuación lineal de primer orden puede hallarse por medio de la sustitución

$$y=uv,$$

donde $y$ y $v$ son funciones derivables de $x$. Si $y=uv$, entonces

$$\frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx},$$

y la ecuación dada (VII) toma la forma

$$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}+uvP(x)=Q(x).$$

De aquí

$$v\left[\frac{du}{dx}+uP(x)\right]+u\cdot\frac{dv}{dx}=Q(x). \qquad (1)$$

Supongamos que la función $u$ es tal, que

$$\frac{du}{dx}+uP(x)=0. \qquad (2)$$

De esta condición puede determinarse $u$, separando las variables:

$$\frac{du}{u}=-P(x)\,dx;$$

$$\ln|u|=-\int P(x)\,dx, \text{ o } u=e^{-\int P(x)\,dx} \qquad (3)$$

Con la condición (2), la ecuación (1) toma la forma

$$u\cdot\frac{dv}{dx}=Q(x). \qquad (4)$$

Las dos funciones de $x$ que figuran en esta ecuación son conocidas: $u$ está determinada por (3), $Q(x)$ es dada. Esta es una ecuación de variables separables; resolviéndola, se halla la función $v$:

$$dv=\frac{Q(x)}{u}\,dx;\ v=\int\frac{Q(x)}{u}\,dx+C. \qquad (5)$$

Conociendo ahora $u$ y $v$, se halla $y=uv$. Por lo tanto, *la ecuación diferencial lineal de primer orden*

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$$

*puede ser llevada, por medio de la sustitución $y=uv$, a dos ecuaciones de variables separables:*

$$\boxed{\frac{du}{dx}+uP(x)=0 \quad \text{y} \quad u\cdot\frac{dv}{dx}=Q(x),} \qquad \text{(VIII)}$$

*el producto de las soluciones de las cuales da $y$.*

2° **Ejemplo 1.** Resolver la ecuación $y'-y\operatorname{tg}x=2\operatorname{sen}x$.
**Solución.** Esta es una ecuación lineal de primer orden, donde

$$P(x)=-\operatorname{tg}x,\ Q(x)=2\operatorname{sen}x.$$

Introduciendo la sustitución $y=uv$, se hallan $u$ y $v$ de las ecuaciones (VIII):

$$\frac{du}{dx}-u\operatorname{tg}x=0 \quad \text{y} \quad u\cdot\frac{dv}{dx}=2\operatorname{sen}x$$

Se resuelve la primera de estas ecuaciones:

$$\frac{du}{u}=\operatorname{tg}x\cdot dx;\quad \int\frac{du}{u}=\int\operatorname{tg}x\,dx;\quad \ln|u|=-\ln|\cos x|;\quad u=\frac{1}{\cos x}.$$

La expresión hallada de $u$ se sustituye en la segunda ecuación:

$$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{dv}{dx}=2\operatorname{sen}x.$$

Se resuelve esta ecuación:

$$dv=2\operatorname{sen}x\cos x\,dx, \quad \text{o} \quad dv=\operatorname{sen}2x\,dx;$$

$$\int dv=\int\operatorname{sen}2x\,dx+C;\quad v=\frac{-1}{2}\cos 2x+C.$$

Multiplicando $u$ por $v$, se obtiene:

$$y=\frac{-\frac{1}{2}\cos 2x+C}{\cos x}, \quad \text{o} \quad y=\frac{C-\cos 2x}{2\cos x}.$$

3° Ejemplo 2. Resolver la ecuación $y+(1-2x)\,y=xe^{-x}$. Solución. La ecuación dada es lineal;

$$P(x)=1-2x,\ Q(x)=xe^{-x}.$$

Introduciendo la sustitución $y=uv$, se hallan $u$ y $v$ de las ecuaciones (VIII):

$$\frac{du}{dx}+u(1-2x)=0 \quad \text{y} \quad u\cdot\frac{dv}{dx}=xe^{-x}.$$

Se resuelve la primera ecuación:

$$\frac{du}{u}=(2x-1)\,dx;\quad \int\frac{du}{u}=\int(2x-1)\,dx;$$

$$\ln|u|=x^2-x;\ u=e^{x^2-x}.$$

La expresión hallada de $u$ se sustituye en la segunda ecuación:

$$e^{x^2-x}\,\frac{dv}{dx}=xe^{-x}.$$

De donde

$$\frac{dv}{dx}=xe^{-x}e^{x-x^2}=xe^{-x^2};$$

$$dv=xe^{-x^2}\,dx;\ v=\int xe^{-x^2}\,dx+C.$$

La integral se halla por medio de la sustitución $-x^2=t$, $x\,dx=$ $=-\frac{1}{2}\,dt$,

$$v=-\frac{1}{2}\,e^{-x^2}+C.$$

$$y=uv=e^{x^2-x}\left(-\frac{1}{2}\,e^{-x^2}+C\right)=-\frac{1}{2}\,e^{-x}+Ce^{x^2-x}.$$

De este modo, la solución general es:

$$y=-\frac{1}{2}\,e^{-x}+Ce^{x^2-x}.$$

Verificación. Se halla la derivada de $y$ respecto a $x$:

$$y'=\frac{1}{2}\,e^{x}+Ce^{x^2-x}\,(2x-1).$$

De la solución general se determina $C$:

$$C=\frac{y+\frac{1}{2}\,e^{-x}}{e^{x^2-x}}\,,$$

y se sustituye en la derivada hallada. Se obtiene así:

$$y'=\frac{1}{2}\,e^{-x}+\frac{y+\frac{1}{2}\,e^{-x}}{e^{x^2-x}}\cdot e^{x^2-x}\,(2x-1)=y\,(2x-1)+xe^{-x}.$$

Sustituyendo la expresión de $y'$ en la ecuación dada, se obtiene:

$$(2x-1)\,y+xe^{-x}+(1-2x)\,y=xe^{-x};\ xe^{-x}\equiv xe^{-x}.$$

## § 141. Problemas que se reducen a la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden

### Problemas geométricos

1°. Problema 1. Hallar la ecuación de una familia de curvas, conociendo que cada punto de la curva de la familia es medio del segmento de la tangente trazada a ella desde dicho punto, comprendido entre los ejes de coordenadas.

Solución. Sea $T\,(x,\ y)$ un punto de la curva de la familia, y supongamos que por él se traza una tangente, la cual corta a los ejes $Ox$ y $Oy$ en los puntos $A$ y $B$ (fig. 165). Por hipótesis, el punto $T\,(x,\ y)$ es medio del segmento $AB$. Partiendo de las fórmulas de las coordenadas del punto medio de un segmento, se halla que las coordenadas $A\,(2x;\,0)$ y $B\,(0;\,2y)$ (por hipótesis, $x\neq 0$ e $y\neq 0$).

El coeficiente angular de la tangente $AB$, en virtud de la fórmula (VI), § 5, es:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0-2y}{2x-0}=-\frac{y}{x}.$$

Se obtiene así la ecuación diferencial de la familia de curvas:

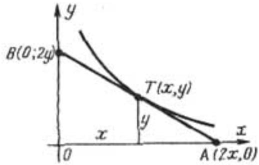
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

La ecuaclón se integra separando las variables:

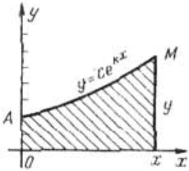
$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0;\ \int\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=\ln C;\ \ln y+\ln x=\ln C;\ xy=C$$

Esta es una familia de hipérbolas equiláteras, referida a sus asíntotas.

2°. P r o b l e m a 2. Hallar la ecuación de una familia de curvas, si en el segmento $[0;\ x>0]$ la ordenada de un




F i g. 165




F i g. 166

punto de la curva de la familia es proporcional a la superficie determinada por la curva, los ejes coordenados, y dicha ordenada.

S o l u c i ó n. La superficie del trapecio curvilíneo (fig. 166) comprendido bajo la curva en el segmento $[0;\ x]$, es (§ 125):

$$\int_0^x y\,dx.$$

Por hipótesis, la ordenada $y$, que delimita la superficie por la derecha, es proporcional a dicha superficie, es decir,

$$y=k\int_0^x y\,dx.$$

La derivada de una integral definida respecto a su límite superior es igual a la función sub-integral:

$$\frac{dy}{dx}=k\left(\int_0^x y\,dx\right)'=ky.$$

Se obtiene así la ecuación diferencial de la familia de curvas:

$$\frac{dy}{dx}=ky.$$

Esta se resuelve separando las variables:

$$\frac{dy}{y}=k\,dx;\quad \int\frac{dy}{y}=k\int dx+C;$$

$$\ln|y|=kx+\ln C.$$

Potenciando esta expresión, se obtiene la familia de curvas integrales, cuya superficie es proporcional a la ordenada que la delimita por la derecha:

$$y=Ce^{kx}.$$

## Problemas de la técnica y de las ciencias naturales

3°. Problema 3. En un recipiente se hallan $A$ litros de salmuera, que contiene $a$ kg, de sal diluida. Del recipiente sale uniformemente salmuera con una velocidad de $p$ litros por minuto; al mismo tiempo en el recipiente entra agua dulce con la misma velocidad, la cual se mezcla inmediatamente con la salmuera, por lo cual ésta se distribuye en forma homogénea en todo el recipiente. Tal proceso se llama empobrecimiento de la salmuera.

Formar la ecuación diferencial del empobrecimiento de la salmuera, y hallar cuánta sal habrá en ella luego de una hora, suponiendo que $A=100l$, $p=2l$ por minuto, $a=10$ kg.

Solución. Obsérvese que al comienzo del proceso la concentración de la solución era igual a $\frac{a}{A}\frac{\text{kg}}{\text{l}}$. Fijemos un momento de tiempo $t$, contando $t$ a partir del comienzo del proceso de empobrecimiento de la salmuera. Supongamos que en el momento $t$, en el recipiente quedaban $y$ kg de sal.

La concentración de la salmuera en el momento $t$ es igual a $\frac{y}{A}\frac{\text{kg}}{\text{l}}$.

Fijemos otro momento de tiempo $t + \Delta t$, mayor que $t$; supongamos que en este momento de tiempo en el recipiente quedan $y + \Delta y$ kg de sal. De este modo, en el intervalo $\Delta t$ la cantidad de sal en la salmuera disminuye en $-\Delta y$.

Puede calcularse $\Delta y$ aproximadamente, suponiendo que $\Delta t$ es pequeño, y que la concentración de la salmuera durante el intervalo $\Delta t$ queda igual a la del momento $t$, es decir, igual a $\frac{y}{A}\frac{\text{kg}}{\text{l}}$. Durante el intervalo de tiempo $\Delta t$ salen $p\ \Delta t$ litros de salmuera, cuya concentración es igual a $\frac{y}{A}\frac{\text{kg}}{\text{l}}$, por lo que en la salmuera que salió hay $\frac{y}{A}\cdot p\cdot\Delta t$ kg de sal.

Por lo tanto,

$$\Delta y \approx -\frac{p}{A}\cdot y\Delta t.$$

En esta igualdad el error de la aproximación disminuye al disminuír $\Delta t$, y $-\frac{p}{A}\cdot y\Delta t$ depende de $\Delta t$ en forma lineal; por lo tanto, $-\frac{p}{A}\cdot y\Delta t$ es la parte principal del incremento $\Delta y$, es decir, tiene lugar la igualdad exacta

$$dy = -\frac{p}{A}\cdot y\, dt,$$

de donde

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{p}{A}\cdot y.}$$

Esta es la ecuación deferencial del proceso de empobrecimiento de la salmuera.

Para resolver el segundo punto del problema, hallaremos la solución general de la ecuación diferencial, y de ésta, la solución particular con la condición inicial: si $t = 0$, entonces $y = a = 10$.

Separando variables, se halla que

$$\frac{dy}{y} = -\frac{p}{A}\cdot dt;\ \int\frac{dy}{y} = -\frac{p}{A}\int dt + \ln C;$$

$$\ln y = -\frac{p}{A}t + \ln C;\ \boxed{y = Ce^{-\frac{p}{A}t}}$$

Hallemos $C$, sustituyendo en la solución general $t=0$, $y=10$. Se obtiene:

$$10 \cdot Ce^0; \; C=10.$$

Por lo tanto, para $P=2$, $A=100$, $C=10$, se tiene que:

$$y=10e^{-0,02t}.$$

Para $t=60$

$$y=10e^{-1,2} \approx 2,8 \text{ (kg.)}.$$

4°. Problema 4. Agreguemos a las condiciones del tercer problema la siguiente: la salmuera que sale del recipiente, entra en un sagundo recipiente con la misma capacidad de $Al$, que originariamente está lleno da agua dulce; en él se mezcla de inmediato, y sale uniformemente del recipiente con la misma velocidad de $p$ litros por minuto.

Hallar la ecuación diferencial del proceso de variación de la salmuera en el segundo recipiente, y determinar cuánta sal habrá en él luego de 1 hora.

Dar la solución en forma numérica, suponiendo que $A=100l$, $a=10$ kg, $p=2l$ por minuto.

Solución. Fijemos un momento de tiempo $t$. Según la solución del tercer problema, en el momento $t$ en el primer recipiente habían $10e^{-0,02t}$ kg de sal y, por lo tanto, quedaba una salmuera de concentración igual a

$$\frac{10e^{-0,02t}}{100}=0,1e^{-0,02t}\left(\frac{kg}{l}\right).$$

Considerando que esta concentración de la salmuera no varía durante un intervalo pequeño de tiempo $\Delta t$, se halla que del primer recipiente pasan al segundo

$$0,1e^{-0,02t}2\Delta t=0,2e^{-0,02t}\Delta t \text{ (kg de sal)}. \qquad (1)$$

Sea $z$ la cantidad de sal en el segundo recipiente en el momento $t$. En el intervalo $\Delta t$, del segundo recipiente salen

$$-\frac{z}{100}\cdot 2\Delta t=-0,02z\Delta t \text{ (kg de sal)}. \qquad (2)$$

El incremento $\Delta z$ de la cantidad de sal $z$ en el segundo recipiente durante el intervalo de tiempo $\Delta t$, es la diferencia entre la cantidad de sal que entra (1) y la que sale (2), es decir,

$$\Delta z \approx 0\,2e^{-0,02t}\Delta t-0,02z\Delta t; \; \Delta z \approx (0,2e^{-0,02t}-0,02z)\,\Delta t.$$

Esta igualdad es aproximada; su segundo miembro es la parte lineal principal del incremento $\Delta z$, es decir, tiene lugar la igualdad exacta

$$dz = (0{,}2e^{-0{,}02t} - 0{,}02z)\,dt.$$

Esta es la ecuación diferencial del proceso de variación de la cantidad de sal en el segundo recipiente. Escribiéndola en la forma

$$\frac{dz}{dt} + 0{,}02z = 0{,}2e^{-0{,}02t}. \tag{3}$$

se ve que esta ecuación es lineal. La resolveremos introduciendo la sustitución

$z = u(t)v(t)$, o más brevemente:

$$z = uv;\quad \frac{dz}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3), se obtiene:

$$u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} + 0{,}02uv = 0{,}2e^{-0{,}02t};$$

$$v\left(\frac{du}{dt} + 0{,}02u\right) + u\frac{dv}{dt} = 0{,}2e^{-0{,}02t}.$$

Haciendo

$$\frac{du}{dt} + 0{,}02u = 0,$$

se halla que

$$\frac{du}{u} = -0{,}02dt;$$

$$\ln|u| = -0{,}02t$$

$$u = e^{-0{,}02t}$$

se obtiene entonces:

$$u\frac{dv}{dt} = 0{,}2e^{-0{,}02t}.$$

$$e^{-0{,}02t}\cdot\frac{dv}{dt} = 0{,}2e^{-0{,}02t};\quad \frac{dv}{dt} = 0{,}2;$$

$$dv = 0{,}2dt;\quad v = 0{,}2t + C.$$

$$z = uv;\quad z\,(0{,}2t + C)\,e^{-0{,}02t}.$$

Determinemos $C$ partiendo de los valores iniciales: en el segundo recipiente al comienzo del proceso es $t = 0$, y la cantidad de sal es $z = 0$. Sustituyendo estos valores en (4), se obtiene $C = 0$. Por lo tanto, la cantidad de sal en el segundo recipiente luego de $t$ minutos es

$$z = 0{,}\ 2te^{-0{,}02t}\ \text{(kg)}.$$

Para $t=60$ (al cabo de 1 hora), en el segundo recipiente habrán

$$z=0{,}2\cdot 60e^{-0{,}02\cdot 60}=12e^{-1{,}2}\approx 3{,}6 \text{ (kg)}$$

de sal.

5°. Problema 5. La ley de desintegración del radio consiste en que la velocidad de desintegración en cada momento de tiempo es proporcional a la cantidad de radio existente. Determinar la ley de desintegración del radio en función del tiempo, si al principio (para $t=0$) habían $R_0$ g de radio.

Solución. Supongamos que en los momentos de tiempo $t$ y $t+\Delta t$ la cantidad de radio era $R$ y $R+\Delta R$. El cociente $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ es la velocidad media de desintegración del radio durante el intervalo de tiempo $\Delta t$, y $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta t}=\frac{dR}{dt}$ es la velocidad de desintegración del radio en el momento de tiempo $t$. Por hipótesis, al crecer $t$, $R$ disminuye, por lo que la derivada $\frac{dR}{dt}$ es negativa; por hipótesis ésta es proporcional a $R$. Designando el coeficiente de proporcionalidad por $\lambda$ ($\lambda>0$), se tiene:

$$\boxed{\frac{dR}{dt}=-\lambda R,} \tag{1}$$

que es la ecuación diferencial de la desintegración del radio.

Integrando la ecuación (1), se obtiene:

$$\frac{dR}{R}=-\lambda\,dt;\ \ln R=-\lambda t+\ln C,$$

$$R=Ce^{-\lambda t}$$

Partiendo de los valores iniciales $t=0$ y $R=R_0$, se determina $C$:

$$R_0=Ce^{-\lambda 0};\ C=R_0$$

Sustituyendo este valor de $C$ en la ecuación (2), se obtiene:

$$\boxed{R=R_0e^{-\lambda t}.} \tag{3}$$

Tal es la ley de desintegración del radio en función del tiempo $t$.

El coeficiente $\lambda$ se determina experimentalmente. Supongamos, por ejemplo, que empíricamente se ha establecido que en $t_0$ años se desintegran $p\%$ de $R_0$ y, por lo tanto, la cantidad de radio al pasar $t_0$ años se hace igual a

$$R_0 - \frac{p}{100} \cdot R_0 = R_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

Pero en virtud de la ley (3), al pasar $t_0$ años ésta será igual a

$$R_0 e^{-\lambda t_0}.$$

Por lo tanto, se tiene la igualdad

$$R_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right) = R_0 e^{-\lambda t_0}$$

de la cual se halla $\lambda$:

$$e^{-\lambda t_0} = 1 - \frac{p}{100}; \quad -\lambda t_0 = \ln\left(1 - \frac{p}{100}\right),$$

$$\lambda = -\frac{1}{t_0} \ln\left(1 - \frac{p}{100}\right). \tag{4}$$

6°. Hallaremos la relación entre la constante $\lambda$ y el período de semidesintegración del radio (de este modo se llama el tiempo durante el cual se desintegra la mitad de la cantidad original de radio).

Denotemos por $\tau$ el período de semidesintegración. Según (4); se tiene

$$\lambda = -\frac{1}{\tau} \ln\left(1 - \frac{50}{100}\right) = -\frac{1}{\tau} \ln\frac{1}{2};$$

$$\boxed{\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}.}$$

Fue establecido empíricamente que, por ejemplo, para el isótopo del radio $^{226}$Ra, $\lambda \approx 0{,}000429$. El período de semidesintegración es, entonces,

$$\tau \approx \frac{\ln 2}{0{,}000429} = \frac{0{,}69315}{0{,}000429} \approx 1616 \text{ (años)}.$$

## § 142. Ecuaciones diferenciales de segundo orden que se reducen a ecuaciones de primer orden

1°. La ecuación diferencial de segundo orden del tipo

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = f(x),} \tag{IX}$$

donde $f(x)$ es una función continua de $x$, se resuelve del siguiente modo: haciendo $\frac{dy}{dx} = z$ se tiene $\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$. Por lo tanto, se obtiene la ecuación de primer orden:

$$\frac{dz}{dx} = f(x);\ \ dz = f(x)\,dx.$$

De aquí

$$z = \int f(x)\,dx = F(x) + C_1.$$

Sustituyendo $z$ por la derivada $\frac{dy}{dx}$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = F(x) + C_1;\ \ dy = F(x)\,dx + C_1\,dx;$$

$$y = \int F(x)\,dx + C_1 \int dx + C_2.$$

2° Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la curva $y = \varphi(x)$, si 1) $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^2$, 2) la curva pasa por el punto (1; 2), y tiene en dicho punto una dirección igual a 3 (se llama dirección de una curva en un punto a la dirección de su tangente en dicho punto).

Solución. Integremos la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^2$.

Haciendo $\frac{dy}{dx} = z$, se obtiene $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; $\frac{dz}{dx} = 6x^2$

$$dz = 6x^2\,dx;\ \ \int dz = 6\int x^2\,dx + C_1;\ \ z = 2x^3 + C_1,$$

o

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 + C_1. \tag{1}$$

Integrando esta ecuación, se halla que

$$y = \frac{1}{2}x^4 + C_1x + C_2. \tag{2}$$

Se obtiene así una familia de curvas integrales que depende de dos parámetros variables, los cuales son las constantes arbitrarias $C_1$ y $C_2$.

Por hipótesis, de esta familia debe hallarse una curva, para la cual $C_1$ y $C_2$ se determinan por las dos condiciones iniciales: 1) la curva pasa por el punto (1; 2), 2) la dirección en dicho punto, o sea, la derivada $\frac{dy}{dx}$, es igual a 3.

*Sustituyendo* $x=1$, $y=2$, $\frac{dy}{dx}=3$ *en* (1) *y* (2), *se obtiene:*

$$\begin{cases} 3=2+C_1; & C_1=1; \\ 2=\frac{1}{2}+C_1+C_2; & C_1+C_2=1\frac{1}{2};\ C_2=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

La ecuación buscada de la curva es: $y=\frac{1}{2}x^4+x+\frac{1}{2}$.

3°. Ecuaciones del tipo

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=f(y).} \qquad \text{(X)}$$

*Solución.* Se hace $\frac{dy}{dx}=z$. Entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot z,$$

puesto que $\frac{dy}{dx}=z$. Por lo tanto, se obtiene una ecuación de variables separables

$$\frac{dz}{dy}z=f(y).$$

De aquí se tiene

$$z\,dz=f(y)\,dy.$$

Integrando, se halla $z$, y luego, sustituyendo $z$ por $\frac{dy}{dx}$, se obtiene una ecuación de variables separables $y$ y $x$.

4°. Ejemplo 2. Problema de la segunda velocidad cósmica: determinar la velocidad mínima con la que hay que arrojar un cuerpo de la Tierra verticalmente hacia arriba, para que éste no vuelva a ella. No tomar en cuenta la resistencia del aire.

Solución. Sea $M$ la masa de la Tierra, y $m$ la masa del cuerpo arrojado. Sobre un cuerpo arrojado verticalmente hacia arriba actúa la fuerza $F$ de la atracción de la Tierra. Según la ley de Newton, esta fuerza es una magnitud variable, y en cada momento de tiempo $t$ es

$$F=f\frac{Mm}{r^2},$$

donde $f$ es un coeficiente, llamado consante gravitacional *; $r$ es la distancia entre los centros de la Tierra y del cuerpo en el momento de tiempo $t$.

La fuerza $F$ imprime a la masa $m$ en el momento $t$ una aceleración negativa, igual a $-\frac{d^2r}{dt^2}$. En virtud a que la fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración, se tiene:

$$F=-m\cdot\frac{d^2r}{dt^2}.$$

Igualando las expresiones de $F$, se obtiene la ley diferencial del movimiento del cuerpo arrojado:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-fM\cdot\frac{1}{r^2}. \qquad (1)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden del tipo $(X)$. La resolvenemos según fue indicado en el 3° para $y=r$ y $x=t$. Haciendo $\frac{dr}{dt}\,v$, se tiene:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot v;$$

$$\frac{dv}{dr}\cdot v=-fM\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Separando las variables, se obtiene

$$v\,dv=-fM\frac{dr}{r^2};\quad \int v\,dv=-fM\int\frac{dr}{r^2}+C;$$

$$\frac{v^2}{2}=fM\cdot\frac{1}{r}+C. \qquad (2)$$

Para determinar el valor de $C$ se tiene la condición inicial: en el momento $t=0$ de arrojar el cuerpo de la superficie de la Tierra, $r=R$, que es el radio de la Tierra, y la velocidad $v$ es igual a la velocidad con que se arroja el cuerpo, $v=v_0$. Sustituyendo estos valores en (2), se halla $C$:

$$\frac{v_0^2}{2}=fM\cdot\frac{1}{R}+C;\quad C=\frac{v_0^2}{2}-fM\cdot\frac{1}{R}. \qquad (3)$$

En el momento $t=0$ de arrojar el cuerpo de la superficie de la Tierra, la fuerza $F$ es la fuerza de la gravedad, la cual es igual a mg,

$$f\cdot\frac{Mm}{R^2}=mg,\quad \text{de donde}\quad fM\cdot\frac{1}{R}=gR.$$

Sustituyendo en (3) el sustraendo por su magnitud igual $gR$, se obtiene

$$C=\frac{v_0^2}{2}-gR,$$

* La constante gravitacional es igual a $6{,}67\cdot10^{-8}$ cm³/g. seg.².

y (2), para este valor de $C$, da

$$\frac{v^2}{2}=fM\cdot\frac{1}{r}+\left(\frac{v_0^2}{2}-gR\right),$$

$$v=+\sqrt{2fM\cdot\frac{1}{r}+(v_0^2-2gR)}. \qquad (4)$$

Para que el cuerpo arrojado hacia arriba no vuelva a la Tierra, su velocidad $v$ debe ser positiva para todo $r$, lo que significa que la expresión subradical debe ser también positiva. El sumando $2fM\cdot\frac{1}{r}<0$, pero para $r$ suficientemente grande puede ser arbitrariamente pequeño. Por eso, es necesario que

$$v_0^2-2gR\geqslant 0;$$

$$v_0\geqslant\sqrt{2gR}. \qquad (5)$$

Es conocido que $g=9{,}81$ m/seg$^2$, $R=638\cdot 10^4$ m. Por lo tanto, debe ser:

$$v_0>\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 638\cdot 10^4}=112\cdot 10^2\ (\text{m/seg})=11{,}2\ (\text{km/seg}).$$

De este modo, el cuerpo no vuelve a la Tierra si se lo arroja verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0>11{,}2$ km/seg Esta velocidad se llama segunda velocidad cósmica.

## § 143. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

1°. Por definición (§ 140, 1°), la ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene la forma

$$y''+p(x)\,y'+Q(x)\,y=F(x).$$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son constantes, y $F(x)=0$, entonces la ecuación lineal de segundo orden se llama *homogénea con coeficientes constantes.*

De este modo, *la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes es una ecuación del tipo*

$$\boxed{y''+py'+qy=0,} \qquad (XI)$$

*donde $p$ y $q$ son números dados.*

2°. Sean $y_1$ e $y_2$ dos soluciones de la ecuación (XI).

Definición. Las soluciones $y_1$ e $y_2$ se llaman *linealmente dependientes* en el segmento $[a, b]$, si para cualquier valor $x$ de este segmento es $y_1=\lambda y_2$, donde $\lambda$ es un cierto número, y se llaman *soluciones linealmente independientes,* si no existe tal número $\lambda$, es decir, si el cociente $\frac{y_1}{y_2}$ no es constante en el segmento $[a, b]$.

3°. T e o r e m a 1. *Al producto de una solucion $y_1$ de la ecuación* (XI) *por un número constante $C$ arbitrario, es también solución de la ecuación* (XI).

D e m o s t r a c i ó n. Se sustituye $Cy_1$ en la ecuación (XI):

$$(Cy_1)'' + p(Cy_1)' + qCy_1 = C(y_1'' + py_1' + qy_1) = C \cdot 0 = 0;\ 0 \equiv 0.$$

Aquí $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$, como resultado de sustituír en la ecuación (XI) por $y$ su solución.

De este modo, $0 \equiv 0$, y $Cy_1$ es solución de la ecuación (XI).

T e o r e m a 2. *La suma de las soluciones $y_1$ e $y_2$ de la ecuación* (XI) *es también una solución de* (XI).

D e m o s t r a c i ó n. Sustituyendo la suma $y_1 + y_2$ en la ecuación (XI), se tiene:

$$(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) = y_1'' + y_2'' + py_1' +$$
$$+ py_2' + qy_1 + qy_2 = (y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2) =$$
$$= 0 + 0 = 0,$$

ya que en los paréntesis están los resultados de sustituír en la ecuación (XI) $y$ por sus soluciones $y_1$ e $y_2$.

De este modo, $0 \equiv 0$, e $y_1 + y_2$ es solución de la ecuación (XI), que es lo que se quería demostrar.

T e o r e m a 3. *Si $y_1$ e $y_2$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación* (XI), *y $C_1$ y $C_2$ son constantes arbitrarias, entonces*

$$\boxed{y = C_1y_1 + C_2y_2} \qquad \text{(XII)}$$

*es la solución general de la ecuación* (XI).

S o b r e l a d e m o s t r a c i o n. El hecho que la función

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

es solución de la ecuación (XI) para valores cualesquiera de $C_1$ y de $C_2$, se deduce de los teoremas 1 y 2.

Según el teorema 3, $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es la solución general. Esto significa que ésta posee la siguiente propiedad: para valores iniciales arbitrarios: $y = y_0$ e $y' = y_0'$ si $x = x_0$, la ecuación $y = C_1y_1 + C_2y_2$ da el siguiente sistema de ecuaciones respecto a las costantes arbitrarias $C_1$ y $C_2$:

$$y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20},$$
$$y'_0 = C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20},$$

donde

$$y_{10} = (y_1)_{x=x_0}, \qquad y_{20} = (y_2)_{x=x_0},$$
$$y'_{10} = (y'_1)_{x=x_0}, \qquad y'_{20} = (y'_2)_{x=x_0},$$

el cual tiene una solución única $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$.

Sustituyendo en (XII) $C_1$ por su valor $\overline{C}_1$ y $C_2$ por su valor $\overline{C}_2$, se obtiene la solución

$$y_1 = \overline{C}_1 y_1 + \overline{C}_2 y_2,$$

la que satisface las condiciones iniciales dadas.

La demostración de que el sistema (*) tiene siempre una solución $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ y sólo una, sale de los límites del presente curso.

4°. Según el tercer teorema, la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden se habrá hallado si se encuentran dos soluciones particulares de ésta linealmente independientes.

Pueden hallarse dos soluciones particulares, si se aplica la sustitución

$$y = e^{kx}, \quad y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

La ecuación (XI) toma entonces la forma

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0, \text{ o bien } e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Puesto que $e^{kx} \neq 0$, se tiene

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0.} \qquad \text{(XIII)}$$

La ecuación (XIII) se llama *ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.*

Son posibles los siguientes casos:

1) las raíces de la ecuación (XIII) son números reales diferentes: $k_1 \neq k_2$.

Entonces $y_1 = e^{k_1 x}$ u $y_2 = e^{k_2 x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (XI), y su solución general es

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};} \qquad \text{(XIV)}$$

2) Las raíces de la ecuación (XIII) son reales e iguales: $k_1 = k_2$.

En este caso una solución particular es $y_1 = e^{k_1 x}$. Como segunda solución particular puede tomarse $y_2 = xe^{k_1 x}$, lo cual se demuestra en los cursos detallados de análisis.

Las soluciones $y_1 = e^{k_1 x}$ e $y_2 = xe^{k_1 x}$ son linealmente independientes, puesto que $\frac{y_2}{y_1} = x \neq$ const. Por esto, la solución general de la ecuación (XI) es, según el teorema 3,

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_1 x}, \quad \text{o} \quad y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x); \qquad \text{(XV)}$$

3) las raíces de la ecuación (XIII) son complejas:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

En los cursos detallados de análisis se demuestra que la solución general de la ecuación (XI) es en este caso la siguiente:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x); \qquad \text{(XVI)}$$

4) las raíces de la ecuación (XIII) son imaginarias puras:

$$k_1 = \beta i, \quad k_2 = -\beta i$$

Esto sucede en el caso en que $p = 0$ y $q = -\beta^2 i^2 = \beta^2$. La solución general es, en este caso,

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x. \qquad \text{(XVII)}$$

5°. Ejemplos. 1) Resolver la ecuación $y'' + 2y' - 3y = 0$.
Solución. La ecuación característica de la ecuación dada es

$$k^2 + 2k - 3 = 0.$$

Sus raíces son: $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$; $k_1 = 1$. $k_2 = -3$, es decir, las raíces son números reales diferentes. La solución general es (XIV)

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

2) Resolver la ecuación $y'' - 6y' + 9y = 0$.
Solución. La ecuación característica es

$$k^2 - 6k + 9 = 0, \quad \text{o} \quad (x-3)^2 = 0, \; k_1 = k_2 = 3.$$

La solución general es (XV):

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

3) Resolver la ecuación $y'' + 4y' + 13 = 0$.
Solución. La ecuación característica es:

$$k^2 + 4k + 13 = 0, \text{ sus raíces son } k_{1,2} = -2 \pm 3i,$$

es decir, las raíces son complejas, y además $\alpha=-2$, $\beta=3$. La solución general es:

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\,\text{sen}\,3x).$$

4) Un punto material de masa $m$ está colgado de un resorte (fig. 167). Si se desplaza un poco el punto hacia abajo, y luego se le suelta, éste comenzará a efectuar oscilaciones rectilíneas. La fuerza bajo cuya acción se efectúan las oscilaciones es, como muestran los experimentos, proporcional al desplazamiento $s$ y está dirigida en sentido contrario a éste. Hallar la ley del movimiento (despreciar la resistencia del aire).

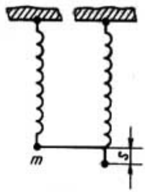


Fig. 167

Solución. Según la ley de Newton la fuerza, bajo cuya acción se efectúa el movimiento, es igual a $m\frac{d^2s}{dt^2}$. Por hipótesis, la fuerza es proporcional al desplazamiento $s$ y está dirigida en sentido contrario a éste, es decir, es igual a $-ks$, donde $k$ es el coeficiente de proporcionalidad. Por lo tanto, se tiene la siguiente ecuación diferencial del movimiento del punto material suspendido:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-ks, \quad \text{o bien} \quad \frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{k}{m}s.$$

Para destacar que $\frac{k}{m}>0$, hagamos $\frac{k}{m}=\omega^2$. Entonces, se tiene

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0,$$

que en una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden (donde $y=s$ y $x=t$). Su ecuación característica

$$k^2+\omega^2=0$$

tiene raíces imaginarias puras $k_{1,2}=\pm\omega i$. La solución general es

$$s=C_1\cos\omega t+C_2\,\text{sen}\,\omega t.$$

Introduzcamos otras constantes arbitrarias $A$ y $\omega_0$, haciendo

$$C_1=A\,\text{sen}\,\omega_0 \quad \text{y} \quad C_2=A\cos\omega_0.$$

Entonces

$$s=A\,\text{sen}\,\omega_0\cos\omega t+A\cos\omega_0\,\text{sen}\,\omega t=A(\text{sen}\,\omega t\cos\omega_0+\cos\omega t\,\text{sen}\,\omega_0),$$

$$s=A\,\text{sen}(\omega t+\omega_0), \quad \text{donde} \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Como se ve, el punto material efectúa oscilaciones armónicas con amplitud $A$ y fase inicial $\omega_0$ *.

* Para la verificación, véase el ejemplo 2 del § 95.

# D. SUPLEMENTOS

CAPITULO XIII

## DERIVACION DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

### § 144. Derivadas parciales y diferenciales parciales. La diferencial total y su aplicación

1°. Si una magnitud depende no sólo de una variable independiente $u$, sino de dos o más, se llama función de dos argumentos $x$ e $y$. Por ejemplo, el volumen de un gas es una función de dos variables: de la temperatura y de la presión; la cantidad de calor que se desprende de un conductor es una función de tres argumentos: de la intensidad de la corriente, de la resistencia del conductor y del tiempo.

Supongamos que $u$ es una función de varios argumentos, de tres, por ejemplo:

$$u = f(x, y, z).$$

Demos a una cualquiera de las variables independientes, por ejemplo a $x$, un incremento $\Delta x$, conservando constantes los demás argumentos, con lo que $u$ recibirá un nuevo valor:

$$u + \Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z).$$

Restando del segundo valor de la función el primero, obtendremos el incremento parcial de la función $u$ con respecto a $x$:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z).$$

El límite de la razón del incremento parcial de la función $u$ con respecto a $x$, relativa al incremento $\Delta x$ al tender éste a cero, se llama *derivada parcial de u con respecto a x* y se designa por $\frac{\partial u}{\partial x}$ o $u'_x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Análogamente, si consideramos a $y$ variable independiente, y a $x$ y $z$, constantes, *la derivada parcial de u con respecto a y es*:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y};$$

*la derivada parcial de u con respecto a z es*:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z = 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

2°. Las derivadas parciales se hallan por medio de las fórmulas y reglas de derivación de la función de un argumento (capítulo VII), porque al hallar la derivada parcial con respecto a $x$, $u$ se considera como función de un solo argumento $x$, y con respecto a $y$ se considera como función de un solo argumento $y$, etc.

Ejemplo. $u = x^2y^3z^4$, hállense las derivadas parciales con respecto a $x$, $y$ y $z$.

Solución. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3z^4$ ($x$ es variable; $y$ y $z$ son constantes);

$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^3z^4$ ($y$ es variable; $x$ y $z$ son constantes);

$\frac{\partial u}{\partial z} = 4x^2y^3z^4$ ($z$ es variable; $x$ e $y$ son constantes).

Tengamos en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial x}$ es un símbolo conjunto y no una razón

3°. El producto de la derivada parcial de una función con respecto a cierta variable, por ejemplo a $x$, por la diferencial de esta variable $dx$, se llama *diferencial parcial de la función* con respecto a esta variable.

La diferencial parcial de la función $u$ con respecto a la variable $x$ se designa por medio del símbolo $d_xu$. Según la definición:

$$d_xu = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx,$$

$$d_yu = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy; \text{ etc.}$$

4°. En los suplementos del análisis, a menudo es necesario determinar el incremento de una función, dependiente del incremento de todas sus variables independientes. El incremento de la función $u$ y la suma de los incrementos parciales con respecto a todos sus argumentos son diferentes. Por ejemplo, la función $u = xy$ tiene los incrementos parciales $\Delta_x u$ y $\Delta_y u$, rayados en la figura 168, y el incremento total $\Delta u$ se diferencia de la suma $\Delta_x u + \Delta_y u$ en la magnitud $\Delta x \cdot \Delta y$.

Para el cálculo aproximado del incremento de la función $u = f(x, y)$, se emplea la fórmula:

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy.$$

En los cursos superiores de análisis se demuestra que si la función $u = f(x, y)$ está definida para $a < x < b$, $c < y < d$, tiene derivadas paciales respecto a $x$ e $y$, y estas derivadas parciales son funciones continuas en el punto $(x, y)$*, el incremento $\Delta u$ se diferenciará de la suma $\frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy$ en una infinitésima de orden superior a $|\Delta x| + |\Delta y|$.

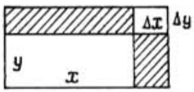


**Fig. 168**

En estas condiciones, la suma $\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ se llama *diferencial total de la función u* y se designa por medio de $du$.

Se ve, pues, que representa la suma de las diferenciales parciales de la función $u$, que posee las condiciones señaladas, tomadas con respecto a todas sus variables independientes:

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy} \qquad \text{(I)}$$

El concepto de la diferencial total puede hacerse extensivo también a una función que tenga más de dos variables independientes.

5°. Ejemplo. Hállase la diferencial total de la función

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}.$$

---

* La función $u = f(x, y)$ se llama continua en el punto $(x, y)$, si a los incrementos infinitesimales $\Delta x$ y $\Delta y$ de los argumentos $x$ e $y$ les corresponde el incremento infinitesimal de la función

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

S o l u c i ó n. Derivando con respecto a $x$, se tiene:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Derivando con respecto a $y$, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

La diferencial total:

$$du=\frac{y\,dx}{x^2+y^2}-\frac{x\,dy}{x^2+y^2}=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}.$$

6°. E j e m p l o. Hállense los incrementos exacto y aproximado del volumen de una cisterna cilíndrica al aumentar su radio desde 2 hasta 2,01 metros, y la altura desde 4 hasta 4,02 metros.

Si la cisterna se ha fabricada del acero en chapas del espesor de 1 cm, este problema puede formularse aun así; al conocer las dimensiones interiores de la cisterna $r = 2$m y $h = 4$m, determinar cantidad de chapas de acero que necesita para su fabricación.

S o l u c i ó n. Designemos el volumen de la cisterna por medio de $u$, el radio por medio de $x$ y la altura por medio de $y$. En ese caso, $u = \pi x^2 y$ es una función de dos variables, y la variación exacta del volumen:

$$\Delta u=\pi 2{,}01^2\cdot 4{,}02-\pi\cdot 2^2\cdot 4=\pi\,(16{,}241202-16)=0{,}241202\pi.$$

El valor aproximado de la magnitud de la variación del volumen:

$$du=2\pi xy\,dx+\pi x^2\,dy=\pi\,(2\cdot 2\cdot 4\cdot 0{,}01+2^2\cdot 0{,}02)=0{,}24\pi.$$

La diferencia $\Delta u - du = 0{,}001202$ es muy pequeña. De aquí que la diferencial total de una función se emplee a menudo en los cálculos aproximados de los valores de una función de varias variables.

7°. Supongamos que $x$, $y\ldots$ $z$ son valores aproximados de los argumentos obtenidos de una medición con errores $\Delta x$, $\Delta y$, ..., $\Delta z$, y que $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, ..., $z+\Delta z$ son sus valores reales. En ese caso $x$, $y$, ... $z$, determinan el valor aproximado de la función $u$, y $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, ..., $z+\Delta z$ determinan su valor real $u+\Delta u$.

El error absoluto de la función es $|\Delta u|$, y su error relativo, de acuerdo con la determinación señalada del valor de la función, es $\left|\frac{\Delta u}{u}\right|$.

Como en la mayoría de los casos, el cálculo de $\Delta u$ es una operación matemática difícil de resolver, y como $du$ puede hallarse sin grandes dificultades por medio de las fórmulas de la diferenciación, el error relativo se toma igual a $\left|\frac{du}{u}\right|$.

8°. E j e m p l o. Hállese el error resultante al calcular el volumen de un paralelepípedo rectangular si al medir sus aristas se han cometido pequeños errores.

S o l u c i ó n. Supongamos que al medir el paralelepípedo rectangular se han obtenido las longitudes de las aristas $x$, $y$, $z$, y se han *cometido los pequeños errores* $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$. *En consecuencia*, al calcular el volumen resulta un error igual a $\Delta u$.

Si los errores $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ son suficientemente pequeños, el error del cálculo de $\Delta u$ se puede considerar aproximadamente igual a $du$.

Como $u = x \cdot y \cdot z$,

$$du = y \cdot z \cdot dx + x \cdot z\, dy + x \cdot y \cdot dz.$$

*Dividiendo cada término por* $u = x \cdot y \cdot z$, *se tiene:*

$$\left|\frac{du}{u}\right| \leqslant \left|\frac{dx}{x}\right| + \left|\frac{dy}{y}\right| + \left|\frac{dz}{z}\right|.$$

Si el error de cada medición no pasa del 1%, por ejemplo, el error cometido al calcular el volumen del paralelepípedo no excederá del 3%.

## § 145. Derivación de la función implícita

1°. Si la dependencia de la función $y$ con respecto al argumento $x$ viene expresada por medio de la ecuación

$$F(x, y) = 0,$$

que no está resuelta respecto a $y$, se denomina a $y$ función *implícita* de $x$.

Veamos cómo se puede hallar la derivada de la función implícita $y$ sin resolver la ecuación, suponiendo que en el campo dado de los valores de $x$, $y$, exista derivada, lo que se expresa en que puede ser trazada una tangente en el punto $x$ a la curva $F(x, y) = 0$. Consideremos a $F(x, y)$ como una función $u = F(x, y)$, cuyos valores son todos iguales a cero. Hallemos la diferencial total de la función:

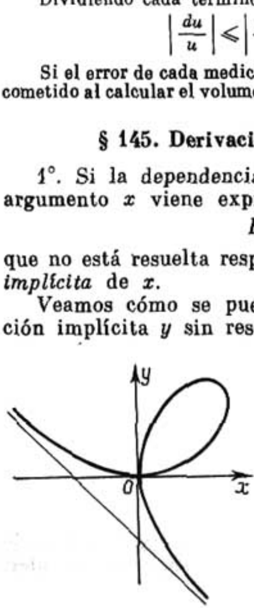



Fig. 169

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = 0,$$

que es igual a cero, porque todos los valores $u = 0$, por lo tanto, todos los valores $\Delta u = 0$. Dividiendo cada término de esta igualdad por $dx$, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

De aquí hallamos la derivada $\frac{dy}{dx}$:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}} \qquad \text{(II)}$$

2°. Ejemplo. Hállese la derivada de la función $y$, que se determina por medio de la ecuación:

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Esta ecuación determina la curva llamada hoja de Descartes (fig. 169). Según la fórmula (II), se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{3x^2-3ay}{3y^2-3ax}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

3°. Ejemplo. Hállese la ecuación de la tangente a la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ en el punto } (x_1;\ y_1).$$

Solución. La ecuación de la tangente es:

$$y-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1).$$

Hallemos $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ por medio de la fórmula (II), sin resolverla respecto a $y$:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}=-\frac{b^2x}{a^2y};\ \frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

Sustituyendo el valor de $\frac{dy_1}{dx_1}$ en la ecuación de la tangente se halla:

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),$$

o

$$a^2(yy_1-y_1^2)+b^2(xx_1-x_1^2)=0.$$

Dividiendo cada término por $a^2b^2$, resulta:

$$\frac{yy_1}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{xx_1}{a^2}-\frac{x_1^2}{a^2}=0,$$

de donde:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

y por consiguiente,

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Esta es la ecuación de la tangente a la elipse.

4°. *La fórmula obtenida* (II) *de la derivada de una* función implícita de una sola variable puede aplicarse para la determinación de las derivadas parciales de una función implícita de varias variables.

Supongamos, por ejemplo, que la dependencia de la función $z$ de dos argumentos $x$, $y$ viene expresada por la ecuación

$$F(x, y, z)=0,$$

que no está resuelta respecto a $z$. En este caso, la función $z$ es una función implícita de dos argumentos $x$ e $y$; supongamos que esta función tiene derivadas parciales en un campo dado de los valores de $x$ e $y$.

Suponiendo que $y$ es constante y que $x$ es la variable, según la fórmula (II) resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Suponiendo $x$ constante e $y$ variable, según la misma fórmula (II), resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

CAPITULO XIV

# DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

## § 146. Definiciones

1°. *Se llama serie a la expresión:*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

*en la cual* $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$*—llamadas respectivamente primero, segundo, tercero, etc. términos de la serie—son números formados de acuerdo con una regla determinada en dependencia del número del término.*

La magnitud del término $u_n$ es función de su número $n$. Una serie infinita está determinada si se da la fórmula o la regla para encontrar cualquier término de la serie en dependencia de su número. Por ejemplo, una progresión geométrica indefinidamente decreciente está determinada si se conoce su primer término $a$ y la razón $q$, porque cualquier término enésimo de ella puede averiguarse por medio de la fórmula $u_n = a \cdot q^{n-1}$.

2°. Si sumamos los $n$ primeros términos de la serie infinita $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$, la suma obtenida $s_n$ de los $n$ primeros términos de la serie,

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

se llama suma parcial* del número $n$. La magnitud de la suma parcial cambia en dependencia del valor de $n$. *Si al crecer indefinidamente el número de términos $n$, la suma parcial $s_n$ tiene como límite $s$,*

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

*se dice que $s$ es la suma de la serie infinita, y que la propia serie es convergente. Sin embargo, si $s_n$ no tiene límite, la serie se llama divergente.*

* O una suma particular del número $n$.

La serie $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$, siendo $|q|<1$, es convergente, su suma es $s=\frac{a}{1-q}$, y la llamaremos serie geométrica.

La serie $1+1+1+\ldots+1+\ldots$ es divergente, porque su suma parcial $s_n$, igual al número de términos $n$, crece indefinidamente.

La serie $1-1+1-1+1-1+\ldots$ es también divergente, porque $s_n$ es aquí igual a 1 o a 0, y al crecer $n$ indefinidamente, no tiende a un límite.

## § 147. Condición necesaria para la convergencia

1°. Para cualquier serie

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}+u_n,$$
$$s_{n-1}=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}.$$

Restando, se tiene: $s_n-s_{n+1}=u_n$.

Si una serie es convergente, al crecer $n$ indefinidamente $s_n$ y $s_{n-1}$ tienden a un mismo número determinado $s$, a su límite, por lo que su diferencia $u_n$ tiende a cero.

Por lo tanto, para *una serie convergente* se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$

Por eso, *si el término enésimo de la serie no tiende a cero, al crecer n indefinidamente, la serie es divergente.*

2°. Esta condición no es suficiente.

Ejemplo. La serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ se llama armónica. Es evidente que de término enésimo de la serie armónica $\frac{1}{n}$ tiende a cero cuando $n$ crece indefinidamente.

Veamos, sin embargo, cómo esta serie es divergente; para eso la escribimos de nuevo del siguiente modo:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\\+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots \qquad (1)$$

y tomamos la siguiente serie:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\\+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots \qquad (2)$$

En la segunda serie, cada suma encerrada en paréntesis es igual a $\frac{1}{2}$ por eso, la segunda serie puede escribirse así:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots \tag{3}$$

Al crecer indefinidamente, el número de términos de la serie (3), su suma crece indefinidamente. Los términos correspondientes de la serie armónica son mayores que los términos de la serie (3) o son iguales a ellos, y por eso, la suma de los términos de la serie armónica crece con mayor razón indefinidamente, por lo que la serie armónica es divergente.

## § 148. Convergencia condicional y absoluta

1°. Tomemos la serie:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

Examinemos la suma de los $2n$ primeros términos de ella. Presentemos esta suma como sigue:

$$s_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) \tag{1}$$

y también así:

$$s_{2n}=1-\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2n}\right]. \tag{2}$$

Cada diferencia encerrada en paréntesis es positiva.

Por eso, de la (1) se deduce que la suma $s_{2n}$ es positiva y crece al aumentar $n$; de la (2) se deduce que no es mayor que el primer término, es decir, que 1.

Pero, si la suma parcial, al crecer el número de sus términos, crece y no es mayor que 1, entonces esta suma tiene un límite determinado (§ 57).

Examinemos la suma $s_{2n-1}$ de un número impar de $2_{n-1}$ términos. Decrece al crecer $n$. Efectivamente,

$$s_{2n+1}-s_{2n-1}=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}=-\frac{1}{12n\,(2n+)}<0,$$

Como

$$s_{2n} = s_{2n-1} - \frac{1}{2n}\text{, entonces } s_{2n-1} = s_{2n} + \frac{1}{2n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} + s + 0 = s.$$

De este modo, ambas sumas $s_{2n-1}$ y $s_{2n}$ tienen un mismo límite $s$ para $n \to \infty$; la primera suma tiende a $s$ decreciendo (de la derecha) y la segunda creciendo (de la izquierda). Esta serie es convergente.

Tomemos la serie formada por las magnitudes absolutas de la serie examinada:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} + \ldots$$

Esta serie es armónica y, como se sabe, es divergente. Esto significa que la serie dada es convergente, y la serie formada por las magnitudes absolutas de sus términos es divergente.

2°. D e f i n i c i ó n. *Una serie se llama condicionalmente convergente si es de por sí convergente, y la serie formada por las magnitudes absolutas de sus términos es divergente.* La serie examinada es condicionalmente convergente.

*Una serie se llama absolutamente convergente si es convergente la serie formada por las magnitudes absolutas de sus términos.*

La serie dada es convergente si es convergente la serie formada por las magnitudes absolutas de sus términos. En el § 149 se ofrece la demostración.

3°. La serie examinada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$, es de signos alternos. La serie de signos alternos (serie alternada) tiene la forma:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot u_n + \ldots,$$

en la que los números $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, son positivos.

C r i t e r i o d e L e i b n i t z. *Si la magnitud absoluta del término de la serie de signos alternos $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot u_n + \ldots$ al crecer su número disminuye de tal modo que el $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, se tiene que la serie es convergente, y la suma de la serie no es mayor que la magnitud del primer término, es decir, $s \leqslant u_1$.* La demostración es análoga a la expuesta en el 1°.

4°. Si despreciamos todos los términos, comenzando de $n+1$. de una serie de signos alternos y aceptamos como suma de la serie infinita la suma parcial $s_n$, el error absoluto cometido en este caso no supera a la magnitud absoluta de $u_{n+1}$.

En efecto, dotos los términos despreciados forman una serie infinita de signos alternos, cuyo primer término es $u_{n+1}$, por eso, la magnitud absoluta de su suma no supera a $|u_{n+1}|$.

## § 149. Principio de comparación y criterio de D'Alembert

1°. Principio de comparación. *Si los términos de la serie $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ no superan por su magnitud absoluta a los términos correspondientes de una serie convergente de términos positivos $v_1+v_2+\ldots+$ $+v_n+\ldots$, la serie dada es absolutamente convergente.*

Esto se deduce con toda evidencia de lo siguiente. Según la condición, todos los términos de la serie $v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+$ $+\ldots$ son positivos. Tomemos una serie formada por las magnitudes absolutas de los términos de la primera serie dada:

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

Todos sus términos son también positivos. Como $|u_n|\leqslant v_n$ cualquiera que sea $n$, la suma $s_n$ de las magnitudes absolutas de los primeros $n$ terminos de la serie $(u)$ no supera a la suma $\sigma_n$ de los primeros términos de la serie $(v)$,

$$s_n\leqslant\sigma_n.$$

Según la condición, la serie $(v)$ es convergente, y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma.$$

Al crecer indefinidamente $n$, la suma $s_n$ de las magnitudes absolutas de los términos de la serie $(u)$ crece sin cesar, pero permanece menor que el número positivo $\sigma$, por eso (§ 57, 2°) tiene límite,

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s, \text{ y además } s\leqslant\sigma,$$

esto significa que la serie $(u)$ es absolutamente convergente.

Ejemplo. Demostremos la convergencia de la serie

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$$

D e m o s t r a c i ó n. Cada término de la serie dada no es mayor que el término homónimo de la progresión geométrica indefinidamente decreciente:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

por eso, la serie dada es convergente, puesto que es convergente la serie geométrica.

2°. Demostremos que *la serie dada es convergente si es convergente la serie formada por las magnitudes absolutas de sus términos.*

Supongamos que la serie.

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \tag{1}$$

cuyos términos son positivos unos y negativos otros, es absolutamente convergente. Formemos dos series nuevas: una con los términos positivos de la serie dada,

$$u'_1+u'_2+u'_3+\ldots+u'_n+\ldots, \tag{2}$$

y la segunda con las magnitudes absolutas de los términos negativos de la serie dada

$$u''_1+u''_2+u''_3+\ldots+u''_n+\ldots \tag{3}$$

Cada una de estas dos series es convergente, porque sus términos no son mayores que los términos correspondientes de la serie convergente:

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots,$$

formada con las magnitudes absolutas de la serie dada (1).

La suma de la serie dada (1) es igual a la diferencia de las sumas de las series (2) y (3).

3°. *El criterio de D'Alembert consiste en lo siguiente**: *si* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$, *la serie es convergente, y además absolutamente convergente, y si* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$, *la serie es divergente.*

*Queda sin resolver la cuestión de la convergencia de una serie si* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$, *en este caso, la serie puede ser tanto convergente como divergente.*

E j e m p l o. La serie $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$ es convergente, porque $\lim\limits_{h\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{h\to\infty}\left|\frac{1}{n}\right|=0.$

4°. Hagamos constar que el principio de comparación y el criterio de D'Alembert son *condiciones suficientes para*

* Aquí se da el criterio sin demostración.

*que una serie sea absolutamente convergente*, es decir, si se cumplen esas condiciones se puede deducir que la serie es absolutamente convergente, pero no son condiciones necesarias, pero no son condiciones necesarias de la convergencia absoluta de una serie, y pueden existir series absolutamente convergentes para las cuales no se cumplen dichas condiciones.

## § 150. Serie de potencias y criterio de su convergencia

1°. Definición. *Se llama serie de potencias a la serie de la forma:*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

*en la que* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *son números constantes, llamados coeficientes de la serie.*

Se considera dada una serie de potencias si se conoce la sucesión de sus coeficientes.

2°. Para una serie de potencias pueden darse uno de los tres casos siguientes.

1. La serie de potencias es divergente para todos los valores de $x$ (menos $x = 0$) y es convergente cuando $x = 0$. Por ejemplo, la serie

$$1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2 \cdot x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^3 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n x^n + \ldots$$

es divergente para todos los valores de $x$, menos el valor $x = 0$, porque según el criterio de D'Alembert

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} |nx| = \infty.$$

Para el valor $x = 0$, todos los términos de la serie de potencias dada son iguales a cero, menos el primero $a_0$, y por lo tanto, la serie es convergente.

2. La serie de potencias es absolutamente convergente para todos los valores de $x$. Por ejemplo, la serie

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots$$

es absolutamente convergente para todos los valores de $x$ sin excepción, porque según el criterio de D'Alembert

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x}{n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| x \cdot \frac{1}{n} \right| = 0.$$

3. La serie de potencias es convergente para unos valores de $x$ y divergente para otros. Por ejemplo, la serie

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

si $|x|<1$ es convergente, y si $|x|\geqslant 1$ es divergente, porque en el primer caso constituye una progresión geométrica indefinidamente decreciente, y en el segundo caso, la suma de sus términos crece indefinidamente.

3°. Criterio de convergencia de una serie de potencias. *Si una serie de potencias es convergente para cierto valor $x = x_0 \neq 0$, entonces es absolutamente convergente para cualquier otro valor $x$, cuyo valor absoluto es menor que el valor absoluto de $x_0$,* o *sea,*

$$|x|<x_0|^*$$

4°. Tengamos presente que si existe un valor $x = x_0$, para el cual es divergente la serie, ésta es también divergente para cualquier valor de $x$ para el cual $|x|>|x_0|$. En efecto, si la serie fuera convergente para tal valor de $x$, según el principio de la convergencia tendría que ser también convergente para el valor $x_0$, que por su magnitud absoluta es menor que $x$.

## § 151. Derivación de una serie de potencias

Supongamos que la serie de potencias $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ es convergente para el valor $x=x_0$. Según lo expuesto anteriormente, es también convergente para cualquier otro valor de $x$, para el cual $|x|<|x_0|$ y en ese caso, a cada valor de $x$ en el intervalo $0\leqslant|x|<|x_0|$ así como para $x = x_0$, corresponde un valor determinado de la suma de la serie. Por eso, la suma de la serie es función de $x$, que designamos $f(x)$,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots a_nx^n+\ldots$$

En la teoría de las series se demuestra que *cualquier función $f(x)$, expresada por una serie de potencias*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

*tiene en el intervalo de convergencia derivadas de cualquier orden, que pueden obtenerse derivando cada término*

* Damos este criterio sin demostración.

*de la serie dada.*

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots;$$
$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots;$$
$$f''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+\ldots+(n-1)n\cdot a_nx^{n-2}+\ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(k)}(x)=1\cdot 2\ldots ka_k+2\cdot 3\ldots(k+1)a_{k+1}x+\ldots+$$
$$+(n-k+1)(n-k+2)\ldots na_nx^{n-k}+\ldots, \text{ etc.}$$

## § 152. Serie de Maclaurin

1°. Supongamos que la función $f(x)$ viene expresada por una serie de potencias $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$, es decir

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

Esta serie será determinada si se conocen sus coeficientes. Para determinar los coeficientes se deriva la serie dada:

$$f'(x)=1\cdot a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots;$$
$$f''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+\ldots+(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-2}+\ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(k)}(x)=1\cdot 2\ldots ka_k+2\cdot 3\ldots(k+1)a_{k+1}x+\ldots+$$
$$+(n-k+1)(n-k+2)\ldots na_nx^{n-k}+\ldots$$

Suponiendo en estas series que $x=0$, se tiene:

$$f(0)=a_0,$$
$$f'(0)=a_1,$$
$$f''(0)=1\cdot 2\cdot a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(k)}(0)=1\cdot 2\cdot 3\ldots k\cdot a_k, \text{ etc.}$$

De estas igualdades se deducen los coeficientes de la serie de potencias:

$$a_0=f(0),$$
$$a_1=\frac{f'(0)}{1},$$
$$a_2=\frac{f''(0)}{1\cdot 2},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Por lo tanto, si la función $f(x)$ viene expresada por una serie de potencias, esta serie es solamente una, precisamente la serie:

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{x}{1}\cdot f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0)+\ldots+ \\ +\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^{(n)}(0)+\ldots}$$

A esta serie se le llama serie de Maclaurin.

2°. Ejemplo. Fórmese la serie de Maclaurin para la unción $e^x$.

Solución. Suponiendo $f(x)=e^x$ y derivando, resulta

$$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=c^x,\ \ldots$$

Si $x=0$, se tiene:

$$f(0)=e^0=1 \text{ y también } f'(0)=f''(0)=\ldots= \\ =f^{(n)}(0)=\ldots=e^0=1.$$

La serie de Maclaurin se convierte en la serie:

$$1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}+\ldots$$

Como se ha indicado en el § 150, esta serie es convergente para todos los valores de $x$ sin excepción.

3°. No todas las funciones pueden ser desarrolladas en serie de Maclaurin. Tomemos, por ejemplo, la función $f(x)=\ln x$. Esta función puede ser derivada cuantas veces se quiera: $f'(x)=\frac{1}{x}$; $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$; $f'''(x)=\frac{2}{x^3}$, etc. Para todos los valores de $x$ diferentes de cero, la propia función y todas sus derivadas tienen valores numéricos determinados, pero cuando $x=0$ no existen valores numéricos determinados para los coeficientes de la serie, por lo que es imposible desarrollar $\ln x$ en serie de Maclaurin.

## § 153. Serie de Taylor

Muy a menudo no se desarrolla la función $f(x)$ en serie de potencias de $x$, sino en serie de potencias de la diferencia $x-a$, en la que $a$ es cierto número constante para el cual la misma función y todas sus derivadas son números determinados.

Designemos $x-a$ por medio de $h$:

$$x-a=h,$$

en ese caso:

$$x=a+h,$$
$$f(x)=f(a+h).$$

Como el número $a$ es invariable, $h$ es una variable nueva, y por ello, $f(x)$ es una función de $h$, que designamos por medio de $\varphi(h)$:

$$\varphi(h)=f(a+h).$$

Derivando esta igualdad, se halla:

$$\varphi'(h)=f'(a+h), \quad \varphi''(h)=f''(a+h), \ \ldots$$
$$\varphi^{(n)}(h)=f^{(n)}(a+h).$$

Para $h=0$ se tiene que

$$\varphi(0)=f(a),$$
$$\varphi'(0)=f'(a),$$
$$\varphi''(0)=f''(a),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^{(n)}(0)=f^{(n)}(a), \text{ etc.}$$

Escribamos la serie de Maclaurin para la función $\varphi(h)$:

$$\varphi(h)=\varphi(0)+\frac{h}{1}\cdot\varphi'(0)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\varphi''(0)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi'''(0)+\ldots+$$
$$+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\varphi^{(n)}(0)+\ldots$$

Pero

$$\varphi(h)=f(x), \ h=x-a, \ \varphi(0)=f(a), \ \varphi'(0)=f'(a), \ \ldots$$

Haciendo en la serie de Maclaurin la sustitución de acuerdo con estas igualdades, resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+ \\ +\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)+\ldots \end{aligned}}$$

Esta es la serie de Taylor. La serie de Maclaurin es una forma particular de esta serie para $a=0$.

## § 154. Convergencia de las series de Taylor y de Maclaurin

1°. Al desarrollar la función $f(x)$ en una serie es necesario saber si es convergente la serie dada a la función $f(x)$, es decir *si $f(x)$ es límite de la suma parcial $s_n$ de los $n$ primeros términos de la serie al crecer $n$ indefinidamente.*

Al designar la suma de todos los términos de la serie a partir del $n+1$ por medio de $R_n$, resulta que $f(x) = s_n + R_n$.

Suponiendo que $f(x) = s_n + R_n$, resulta

$$f(x) = \lim s_n, \text{ si } \lim R_n = 0, \text{ es decir,}$$

*si para los valores examinados de $x$, $R_n$ tiende a cero al crecer $n$ indefinidamente, $f(x)$ es la suma de la serie para estos valores de $x$.*

Si para los valores examinados de $x$, tiende $R_n$ a un límite distinto de cero, la serie es convergente, pero no a la función $f(x)$, y si $R_n$ no tiende a ningún límite o crece indefinidamente, la serie es divergente.

2°. Los matemáticos Langrange, Cauchy y otros hallaron la expresión para $R_n$ en dependencia de $n$.

Según Lagrange,

$$R_n = \frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}\cdot f^{(n)}(\xi), \text{ (para la serie de Maclaurin)}$$

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot f^{(n)}(\xi), \text{ (para la serie de Taylor),}$$

donde $\xi$ es cierto número intermedio entre 0 y el valor de $x$ para la serie de Maclaurin, y entre $a$ y el valor de $x$ para la serie de Taylor.

La fórmula no ofrece un valor determinado de $\xi$, circunstancia por la cual resulta difícil su empleo.

3°. En la práctica del desarrollo de las funciones en serie se aplica la siguiente regla: *si en el intervalo $|x| < |x_0|$ las derivadas de todos los órdenes de la función $f(x)$ son por su valor absoluto menores que cierto número positivo $M$, la serie de Maclaurin es en este intervalo convergente a la función dada.*

D e m o s t r a c i ó n. Según la condición,

$$|f^{(n)}(x)| < M.$$

Sustituyendo en la fórmula de $R_n$ la derivada por el número $M$, se tiene:

$$|R_n| < M \cdot \frac{|x^n|}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}.$$

Tomemos la serie cuyo término general es el segundo miembro de esta desigualdad:

$$M + M\frac{|x|}{1} + M\frac{|x^2|}{1 \cdot 2} + M\frac{|x^3|}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + M\frac{|x^n|}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots$$

Sacando el factor común fuera de paréntesis, se deduce (§ 150) que la serie es convergente, por lo que su término $n$—ésimo

$$M\frac{|x^n|}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

tiende a cero. De ahí $R_n \to y$ la serie es convergente a la función dada.

E j e m p l o. Para cualquier valor de $x =$ a la derivada de todos los límites de la función $e^x$ es igual a $e^x$, es decir, no es mayor que $e^a$. Por esto la serie de Maclaurin, formada para la función $e^x$,

$$1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots$$

es convergente para cualesquier valores de $x$. Por lo tanto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots$$

## § 155. Ejemplos de desarrollo de funciones en serie de potencias de $x$. Serie binómica

1°. D e s a r r o l l o de sen $x$.

Suponiendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, se tiene

$$f'(x) = \cos x,$$
$$f''(x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$f'''(x) = -\cos x,$$
$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x, \text{ etc.}$$

Si $x = 0$, se tiene: $f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$; $f'(0) = \cos 0 = 1$; $f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$; $f'''(0) = -\cos 0 = -1$; $f^{IV}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$, etc.

La serie de Maclaurin se escribirá así:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7} + \ldots + \\ + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)} + \ldots\end{aligned}} \qquad (1)$$

Como para todos los valores de $x$ las derivadas no son mayores que 1, la serie (1) es convergente a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ para todos los valores de $x$.

2°. Desarrollo de $\ln(1+x)$.

Suponiendo $f(x) = \ln(1+x)$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \ldots$$

$$\ldots f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{(1+x)^n}, \ldots$$

Para $x=0$, se tiene:

$$f(0) = \ln 1 = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,$$

$$f'''(0) = 1\cdot 2,\ f^{\mathrm{IV}}(0) = -1\cdot 2.3,\ \ldots,\ f^{(n)}(0) = $$

$$= (-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1), \ldots$$

La serie de Maclaurin se escribirá así:

$$\boxed{\begin{aligned}\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \\ + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots\end{aligned}} \qquad (2)$$

Para determinar el intervalo de convergencia de esta serie se le aplica el criterio de D'Alembert. Fijemos el valor arbitrario de $x$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x\cdot\frac{n}{n+1}\right| =$$

$$= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = |x|\cdot 1 = |x|.$$

Aquí $|x|$ está sacado fuera del signo límite pues $x$ es una magnitud constante, número fijo.

Así, para que la serie de Maclaurin sea convergente, es suficiente, según el criterio de D'Alembert, que sea cierta la desigualdad $|x| < 1$.

Tengamos presente que si $x = 1$, el desarrollo de $\ln(1 + x)$ se convierte en la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$, que es convergente (§ 148). Para $x = -1$, el desarrollo se convierte en la serie $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots$, que es divergente, porque constituye una serie armónica multiplicada por $-1$.

Así pues, la serie (2) es convergente en el intervalo $-1 < x \leqslant +1$. En este intervalo $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

3°. Serie binómica. Tenemos $f(x) = (1 + x)^m$. Derivando se tiene:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \text{ etc.}$$

Para $x=0$, hallamos: $f(0)=1$, $f'(0)=m$, $f''(0)= = m(m-1)$, $f'''(0)=m(m-1)(m-2)$, etc.

La serie de Maclaurin se escribirá así:

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots} \tag{3}$$

Esta serie se llama serie binómica. Será serie infinita solamente en el caso de que $m$ no sea un número natural ni cero, porque solamente en este caso ni uno solo de los factores $m$, $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-3)$ ... se convierte en cero.

Determinemos el intervalo de convergencia de la serie aplicando el criterio de D'Alembert.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3(n-1)n}\times\right.$$
$$\left.\times x^n : \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}x^{n-1}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}x\right| = |x|\cdot\left|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m+1}{n} - 1\right|\right| = |x|$$

$\Big($como al ser $m$ constante y $n \to \infty$ el límite de $\frac{m+1}{n}$ es igual a cero, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m+1}{n}-1\right|=1\Big).$$

Para que sea convergente la serie (3) es suficiente, según el criterio de D'Alembert, que será cierta la desigualdad $|x|<1$. Por lo tanto, la serie binómica es convergente para los valores de $x$, para los cuales $|x|<1$, y puede aplicarse para todos los valores de $x$ cuya magnitud absoluta no supere a 1. En este caso, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Examinemos los c a s o s p a r t i c u l a r e s de la serie binómica.

1. Suponiendo $m = -1$, se tiene

$$(1+x)^{-1}=1+(-1)x+\frac{(-1)\cdot(-2)}{1\cdot 2}x^2+$$
$$+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots,$$

o

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots$$

2. Suponiendo $m=\frac{1}{2}$, se tiene

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots,$$

o

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots$$

3. Aplicando el desarrollo expuesto al ser $m=-\frac{1}{2}$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\ldots$$

4. Si el exponente $m$ es un número natural, por ejemplo $m = 4$, se tendrá que $m - 4 = 0$, y por eso, todos los términos de la serie que contiene este factor serán nulos, y la serie resultará finita.

En efecto, si $m = 4$:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4.$$

Cada término sucesivo se convierte en cero, porque contiene el factor $m - 4 = 0$.

La serie obtenida es la fórmula del binomio de Newton, estudiada en el álgebra.

## § 156. Aplicación de las series a los cálculos

1°. Cálculo del número $e$. En el desarrollo de la función $e^x$ (§ 152)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} + \ldots$$

suponemos $x = 1$, con lo que

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} + \ldots$$

Esta es la fórmula para $e$ expuesta en el § 88. Aplicando esta serie se puede hallar el número $e$ con gran precisión tomando un número de términos relativamente pequeño.

Tomando, por ejemplo, los diez primeros términos de la serie, cometemos un error igual a la suma de la serie:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9\cdot 10} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 10\cdot 11} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 10\cdot 11\cdot 12} + \ldots$$

Sacando el primer término de esta serie fuera de paréntesis, se tiene:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9\cdot 10}\cdot\left(1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11\cdot 12} + \frac{1}{11\cdot 12\cdot 13} + \ldots\right).$$

Dentro de los paréntesis, cada factor de los denominadores es mayor que 10. Si lo sustituimos por 10, disminuirán los denominadores, aumentando el valor de los quebrados, y el error será menor que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9\cdot 10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right)$$

Dentro de los paréntesis se encuentra la suma de una progresión geométrica indefinidamente decreciente, que es igual a:

$$\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}.$$

Por lo tanto, el error es menor que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9\cdot 10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{9\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots 9}=\frac{1}{3\,269\,920}<0{,}000001.$$

2°. **Cálculo de** $\operatorname{sen} x$. Si en el desarrollo

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\ldots$$

nos limitamos a la suma de los $n$ primeros términos, el error cometido en este caso no será mayor por su magnitud absoluta que el término siguiente, el de orden $n+1$ (§ 148, 4°).

Calculemos sen 1° y sen 10° con una aproximación hasta de 0,00001. En el desarrollo de sen $x$ se supone que $x$ es el valor del arco expresado en radianes. Para el arco de 1°, $x=\frac{\pi}{180}=0{,}017453$. El segundo término del desarrollo $\frac{x^3}{6}<\frac{(0{,}2)^3}{6}=\frac{0{,}000008}{6}<0{,}000002$. Por eso, todos los términos, a partir del segundo, pueden ser despreciados y los cinco primeros signos de sen 1° se determinan solamente por el primer término de la serie: sen 1° $=0{,}01745$.

Para el arco de 10°, $x=\frac{\pi}{18}=0{,}174533$. En este caso, el segundo término $\frac{x^3}{6}>\frac{(0{,}1)^3}{6}>0{,}001$, y éste ya no se puede despreciar. Pero el tercer término $\frac{x^5}{120}<\frac{(0{,}2)^5}{120}=\frac{0{,}00032}{120}<$ $<0{,}000003$, y los siguientes pueden ser despreciados. De aquí que con una aproximación hasta de 0,00001

$$\operatorname{sen} 10°=x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}=0{,}174533-0{,}000886=0{,}17365.$$

Es evidente que para un arco mayor, a fin de conseguir la misma aproximación, sería necesario tomar un número mayor de términos.

Nos limitaremos a dos términos de la serie:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6}$$

y hallaremos para qué valores de $x$ es esto admisible, con una aproximación hasta de $\frac{1}{2}\cdot 0{,}00001$. El error cometido en este caso equivale a $\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{x^5}{120}$, que es, en efecto, menor que este término de la serie.

En este caso

$$\frac{x^5}{120} < 0{,}000005; \quad x^5 < 0{,}0006;$$

$$x < \sqrt[5]{0{,}0006} = 0{,}2268, \quad x \approx 13°.$$

En los cálculos no se emplean más de tres términos de la serie, siendo más conveniente aplicar las fórmulas trigonométricas que servirse de un número mayor de términos de la serie.

3°. Cálculo de logaritmos.

Teniendo (§ 155, 2°)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \qquad (1)$$

y dando a $x$ todos los valores numéricos posibles comprendidos entre 0 y 1, se pueden calcular los logaritmos de todos los números desde 1 hasta 2. Si $x = 1$

$$\ln(1+x) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

(Esta serie ha sido examinada en el § 148). De este modo, $\ln 2$ puede ser calculado con cualquier aproximación.

Los logaritmos naturales de otros números enteros pueden ser calculados, por ejemplo, del siguiente modo: suponiendo en la fórmula (1)

$$x = \frac{1}{p},$$

obtenemos en el primer miembro de la fórmula (1):

$$\ln(1+x) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \ln\frac{p+1}{p} = \ln(p+1) - \ln p,$$

y en el segundo miembro:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3} - \frac{1}{4p^4} + \ldots$$

De aquí que

$$\ln(p+1)=\ln p+\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{3p^3}-\frac{1}{4p^4}+\dots$$

Si suponemos $p=2$, hallaremos

$$\ln 3=\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\dots$$

Para calcular los logaritmos se pueden aplicar también otras series, por ejemplo, el desarrollo de $\ln\frac{1+x}{1-x}$. Aquí no nos ocuparemos de esto. Tengamos presente que el cálculo de los logaritmos por medio de una serie es conveniente sólo para los números primos; los logaritmos de los números compuestos se hallan con más sencillez y rapidez aplicando las reglas de los logaritmos.

Por ejemplo:

$$\ln 4=\ln(2^2)=2\cdot\ln 2;\quad \ln 6=\ln(2\cdot 3)=\ln 2+\ln 3.$$

Advirtamos que tratamos del cálculo de los logaritmos *naturales.* Para obtener los logaritmos decimales es suficiente multiplicar los logaritmos naturales por el módulo de la base, es decir, por $\frac{1}{\ln 10}=0{,}4342944819\dots$

## § 157. Ejemplos de desarrollo en serie de potencias de la diferencia $x-a$

1. Desarróllese $x^3-3x^2+7x-4$ en serie de potencias $x-1$.

Solución. Suponiendo $f(x)=x^3-3x^2+7x-4$, derivamos:

$$f'(x)=3x^2-6x+7,$$
$$f''(x)=6x-6,$$
$$f'''(x)=6,$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x)=0.$$

Hallamos los coeficientes de la serie de Taylor (§ 153)

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+$$
$$+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a)+\dots$$

Para el desarrollo dado, $a=1$. Por eso:

$$f(a)=f(1)=1;\quad f'(a)=f'(1)=4;\quad f''(a)=f''(1)=0;$$
$$f'''(a)=f'''(1)=6;\quad f^{\mathrm{IV}}(a)=f^{\mathrm{IV}}(1)=0.$$

Todos los coeficientes sucesivos son también iguales a cero. Por eso,

$$f(x)=x^3-3x^2+7x-4=1+4(x-1)+(x-1)^3.$$

2. Desarróllese $\sqrt{x}$ en serie de potencias de la diferencia $x-4$.

Solución. $f(x)=\sqrt{x}$. Derivando $f(\mathrm{x})=x^{\frac{1}{2}}$ y suponiendo $a=4$, hallamos: $f(4)=\sqrt{4}=2$,

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}};\quad f''(4)=-\frac{1}{4\cdot 4\sqrt{4}}=-\frac{1}{32}.$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{8x^2\sqrt{x}};\quad f'''(4)=\frac{3}{8\cdot 4^2\sqrt{4}}=\frac{3}{256},\ \text{etc.}$$

Por eso $\sqrt{x}=2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(x-4)^3}{512}-\ldots$

Es evidente que por medio de tal serie se puede calcular la raíz con la aproximación que se quiera.

3. Desarróllese $\cos x$ en serie de potencias de la diferencia $x-\frac{\pi}{3}$.

Solución. Derivando $f(x)=\cos x$ y suponiendo $a=\frac{\pi}{3}$, hallamos:

$$f(x)=\cos x;\qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};$$

$$f'(x)=-\operatorname{sen} x;\qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f''(x)=-\cos x:\qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2};$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x; \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f^{IV}(x) = \cos x; \qquad f^{IV}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \text{ etc.}$$

Por eso,

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \\ + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - \dots$$

# E. PROBLEMAS Y EJERCICIOS

## § 1. Método de coordenadas

1. Trácense los puntos: a) $(3; 4)$, $(-2; 5)$, $(-4; -1)$ y $(1; -7)$, b) $\left(1\frac{3}{5};\ -0{,}8\right)$, $(-0{,}6; -1{,}2)$, $\left(-1{,}75; \frac{2}{3}\right)$ y $(0{,}7; 1{,}1)$.

2. Hállense las coordenadas de un punto situado simétricamente al punto $M(5; -2)$: a) respecto al eje $Ox$, b) respecto al eje $Oy$.

3. Sean las coordenadas de un punto $x = -a$ e $y = b$, ¿cuáles son las coordenadas del punto situado simétricamente al dado: a) respecto al eje de las abscisas, b) respecto al eje de las ordenadas?

4. Los puntos $A(2; 5)$ y $B(-3; 2)$ son los extremos del segmento $AB$. Hállese la longitud de su proyección: a) en el eje de las abscisas, b) en el eje de las ordenadas.

5. Compruébese que los triángulos son isósceles y rectángulos si sus vértices son los puntos: a) $(-3; 4)$, $(4; 3)$ y $(0; 0)$; b) $(-4; -2)$, $(-3; 5)$ y $(0; 1)$.

6. Compruébese que el triángulo con los vértices en los puntos $A(-4; 3)$; $B(0; 2)$ y $C(2; -5)$ es obtusángulo.

7. Determínese la abscisa del punto $M$, sabiendo que su ordenada es igual a 4, y la distancia desde él hasta el punto $N(1; -2)$ es igual a 10 unidades de longitud.

8. Hállese en el eje de ordenadas un punto que dista del punto $A(-3; 1)$ 5 unidades de escala.

9. Hállese en el eje de las ordenadas un punto equidistante del origen de las coordenadas y del punto $(3; -5)$.

10. Hállese en el eje de las abscisas un punto equidistante de los puntos $A(-1; 0)$ y $B(7; -4)$.

11. Hállese el centro de un exágono regular, conociendo dos de sus vértices adyacentes; $A(2; 0)$ y $B(5; 3\sqrt{3})$.

12. Hállese el punto equidistante d tres puntos dados: $A$ (0; —6); $B$ (1; 1) y $C$ (7; —7).

13. Hállese el centro de la circunferencia circunscrita en el triángulo cuyos vértices son los puntos $A$ (4; —2), $B$ (5; —3) y $C$ (—4; —6).

14. Los vértices de un triángulo están situados en los puntos $A$ (1; —5), $B$ (5; 2), $C$ (0; —3). Hállense los puntos medios de sus lados.

15. El segmento, cuyos extremos son $A$ (—2; 3) y $B$ (4; —1), está dividido en tres partes iguales. Hállense las coordenadas de los puntos de división.

16. El segmento, cuyos extremos son $A$ (3; 2) y $B$ (15; 6), está dividido en cinco partes iguales. Hállense las coordenadas de los puntos de división.

17. Hállense los puntos simétricos respecto al origen de coordenadas para los puntos: a) (2; 0), b) (0; —3), c) (2; 5), d) (—3; 1).

18. Del punto $A$ (—3; 1) se ha trazado un segmento al punto $B$ (4; —2). ¿Hasta qué punto es necesario prolongarlo en la misma dirección para que se duplique su longitud?

19. Del punto (0; —1) se ha trazado un segmento al punto (—4; 3). ¿Hasta qué punto es necesario prolongarlo en la misma dirección para que se triplique su longitud?

20. Hállese la longitud de la mediana del lado $AC$ en el triángulo cuyos vértices son $A$ (3; 7), $B$ (—4; 0) y $C$ (1; —4).

21. Hállese el centro de gravedad de un triángulo cuyos vértices son $A$ (1; 4), $B$ (—5; 0) y $C$ (—2; —1).

22. Dado un triángulo cuyos vértices son $A$ (2; 1), $B$ (6; 4) y $C$ (—4; 9), hállese el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $A$ con el lado opuesto $BC$.

23. Hállense los vértices de un triángulo sabiendo que los puntos medios de sus lados son.

$$M\left(-\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{2}\right),\quad N\left(-1\frac{1}{2};\ -2\right)\quad \text{y}\quad P\left(2;\ 1\frac{1}{2}\right).$$

24. Los puntos $A$ (1; 0), $B$ (2; 1) y $C$ (3; —2) son tres vértices sucesivos de un paralelogramo. Hállese el cuarto vértice $D$.

25. Conociendo dos vértices adyacentes de un paralelogramo (2; 0), (—3; 3) y el punto de intersección de sus diagonales $N$ (—1; 0), hállense los otros dos vértices.

26. En los puntos $M_1$ $(x_1; y_1)$, $M_2$ $(x_2; y_2)$, $M_3$ $(x_3; y_3)$ actúan las fuerzas paralelas $P_1$, $P_2$, $P_3$. Determínense las coordenadas del punto de aplicación de su resultante.

27. Aplíquense las fórmulas obtenidas en el problema anterior para el caso de tres fuerzas $P_1 = 12$ kg, $P_2 = -18$ kg y $P_3 = 6$ kg, aplicadas respectivamente a los puntos $M_1$ (3; −5), $M_2$ (4; 1) y $M_3$ (6; 0), y explíquese el significado del resultado obtenido.

28. ¿Cuál es el ángulo que forma con el eje $Ox$ la recta que pasa por los puntos: a) $M$ (0; 2) y $N$ (2; 4), b) $M$ (2; 0) y $N$ (−4; 6), c) $M$ (1; −1) y $N$ (3; −1)?

29. Verifíquese que el cuadrilátero $ABCD$, cuyos vértices son $A$ (2, 6), $B$ (5; 1), $C$ (−1; −6) y $D$ (−4; −1) es un paralelogramo.

30. Verifíquese que en el cuadrilátero $ABCD$, cuyos vértices son $A$ (2; −5), $B$ (7; −3), $C$ (6; 1) y $D$ (−2; 3), las diagonales $AC$ y $BD$ son perpendiculares entre sí.

31. ¿Cómo están relacionados entre si los coeficientes angulares de dos rectas situadas simétricamente respecto: a) al eje $Ox$, b) al eje $Oy$?

32. Demuéstrese que la recta que pasa por los puntos $A$ (−1; 3) y $B$ (5; 6) forma con el eje $Ox$ un ángulo igual a la mitad del formado por la recta que pasa por los puntos $C$ (−3; −2) y $D$ (0; 2).

33. Demuéstrese que la línea media de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado.

34. Demuéstrese que en un triángulo rectángulo la longitud de la mediana de la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

## § 2. La recta

1. Fórmese la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos a) (0; −4) y (3; 0) b) (−2; 5) y (2; −5).

2. Fórmese la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes del origen de los ejes de coordenadas y de los puntos a) (0; 4), b) (5; 0).

3. Hállese en la recta $y = 3x - 2$ el punto para el cual: a) la abscisa es igual a 3, b) la ordenada es igual a 13.

4. Se dan las rectas $y = 2x - 1$ y $x + y - 2 = 0$. Compruébese si pasan estas rectas por los puntos $A$ (1; 1), $B$ (2; 0), $C$ (0; −1), $D$ (−3; 5), $E$ (−2; −5) y 0 (0; 0).

5. Fórmese la ecuación de la recta que corta en los ejes $Ox$ y $Oy$ segmentos iguales respectivamente a: a) 3 y 5; b) $-7$ y 4.

6. Hállese la ecuación de la recta que corta en el eje $Oy$ un segmento igual a 3, y que forma con el eje $Ox$ un ángulo de: a) 45°, b) 135°, c) 180°.

7. Hállese la ecuación de una recta que corta en la parte negativa del eje $Oy$ a un segmento de 5 unidades de longitud y que forma con el eje $Ox$ un ángulo de: a) 30°, b) 120° y c) 0°.

8. Fórmense las ecuaciones: a) de las bisectrices de los ángulos de las coordenadas, b) de las rectas paralelas al eje $Ox$, al eje $Oy$, que pasan por el punto: 1) $(2; -3)$, 2) $(-5; -1)$, 3) $(-3; 0)$, 4) $(0; 4)$.

9. La indicación de un contador de electricidad era de 2,7 kW al conectarlo. Fórmese la ecuación de la recta que representa gráficamente la indicación del contador si la carga es de 5 bombillas de 60 vatios cada una.

10. La fuerza $F$ está aplicada al origen de coordenadas y sus componentes, en los ejes $Ox$ y $Oy$, son iguales respectivamente a 4 y $-3$. Hállese la ecuación de la recta por la que va dirigida esta fuerza.

11. ¿Cuál es la línea que sirve de gráfica del movimiento uniforme desarrollado de acuerdo con la ley: $s = vt + s_0$?

12. La gráfica de un movimiento uniforme corta en los ejes $Ox$ y $Oy$ segmentos respectivamente iguales a $-\frac{1}{3}$ y 6. Hállese la velocidad de este movimiento sabiendo que la unidad de escala correspondiente al eje $Ox$ es de un minuto, y al eje $Oy$, de un metro.

13. Una persona anda por una viga horizontal, que se halla sobre los apoyos $A$ y $B$. La presión que soporta el apoyo $B$ varía en dependencia de la posición de la persona. Hállese la ecuación de la dependencia de esta presión respecto a la distancia a que se halla la persona del otro apoyo $A$, dándose los siguientes datos: peso de la viga $P = 120$ kg, longitud de la misma $l = 5$ m, peso de la persona $p = 65$ kg.

14. Se dan las rectas: a) $5x + 12y - 39 = 0$, b) $4y - 3x + 10 = 0$, c) $x - 2y + 3 = 0$, d) $9x + 12y + 10 = 0$. Sin resolver las ecuaciones respecto a $y$, hállense los coeficientes angulares y los ángulos formados por las rectas con el eje $Ox$.

15. Redúzcanse a la forma de ecuación con coeficiente angular las ecuaciones de las rectas: a) $x - y + 2 = 0$, b) $2x + y - 1 = 0$, c) $4x - 2y - 1 = 0$, d) $3x + 6y + 2 = 0$, e) $x - 5y = 0$, f) $2y + 3 = 0$.

Escríbanse los valores de los coeficientes angulares y de las ordenadas en el origen de estas rectas.

16. Hállense las interseciones en los ejes de coordenadas de las rectas: a) $3x - 2y - 12 = 0$, b) $y = 2 - 3x$.

17. Trácense las rectas expresadas por las ecuaciones de los problemas № 15 y 16.

18. Investíguese cómo están situadas respecto a los ejes de coordenadas y trácense las siguientes rectas: a) $2y - x = 0$, b) $x - y = 0$, c) $x + y = 0$, d) $x + 1 = 0$, e) $y - 2 = 0$, f) $3x = 0$, g) $4y = 0$.

19. Redúzcanse las ecuaciones de las rectas: a) $2x + 3y - 6 = 0$, b) $y = 3 + 6x$, c) $y = x - 1$ y d) $3x - 2y + 5 = 0$ a la forma de ecuación de la recta en función de las intersecciones sobre los ejes.

20. Hállense los puntos de intersección de las rectas: a) $y = 4 - x$ e $y = 2x + 3$, b) $2x + 3y - 1 = 0$ y $3x - 2y + 5 = 0$, c) $5x + y = 0$ y $10x + 2y - 1 = 0$, d) $x = 0$ e $y = 5$, e) $x = 1$ e $y = 2$, f) $y = -1$ y $x = 2$.

21. Las diagonales de un rombo, iguales a 8 y 6 unidades de escala, son adoptadas respectivamente como eje de las abscisas y eje de las ordenadas. Fórmense las ecuaciones de los lados de este rombo.

22. Fórmense las ecuaciones de las diagonales de un cuadrado, cuyos lados son iguales a $a$, si dos lados adyacentes coinciden con los ejes de coordenadas y todo el cuadrado está situado en el tercer cuadrante.

23. Una recta corta segmentos iguales en el eje de coordenadas y pasa por el punto $M(3;\ 2)$. Hállese su ecuación.

24. Una recta pasa por el punto $(3;\ 5)$ de tal modo que el segmento de ella situado entre los ejes de coordenadas es dividido en el punto dado por la mitad. Hállese la ecuación de esta recta.

25. Hállese la ecuación de una recta que pasa por el punto $(3;\ 2)$ y forma con el eje $Ox$ un ángulo de: a) $45°$, b) $135°$.

26. Trácense desde el punto $M(6;\ 2)$ unas rectas que formen con el eje $Ox$ un triángulo equilátero.

27. Un rayo de luz va dirigido por la recta $y = \frac{2}{3}x - 4$; al llegar al eje de las abscisas se refleja en él. Determínese el punto de contacto del rayo con el eje y la ecuación del rayo reflejado.

28. Hállese la ecuación de la recta que pasa por los puntos: a) $M_1(-1;\ 2)$ y $M_2(2;\ 1)$, b) $M_1(-3;\ -1)$ y $M_2(-1;\ 3)$, c) $M_1(2;\ 0)$ y $M_2(2;\ -3)$, d) $M_1(-4;\ -3)$ y $M_2(1;\ -3)$.

29. Compruébese si están situados en una misma recta los tres puntos dados:

a) $(-5;\ -3)$, $(-1;\ 1)$ y $(3;\ 5)$;
b) $(-2;\ 1)$, $(0;\ 3)$ y $(3;\ 5)$.

30. ¿Cuál es la ordenada del punto $M$, si su abscisa es igual a 6 y está situada en una recta junto con los puntos: a) $A(2;\ 3)$ y $B(-1;\ -3)$, b) $A(-6;\ -1)$ y $A(3;\ 2)$?

31. Hállese el ángulo agudo formado por las rectas:

a) $2x + y - 1 = 0$ e $y - 3x + 1 = 0$;
b) $x\sqrt{3} - y + 2 = 0$ y $x\sqrt{3} + y - 2 = 0$;
c) $x - y + 2 = 0$ y $2x + 3y - 1 = 0$;
d) $2x - y + 3 = 0$ y $4x - 2y - 3 = 0$;
e) $x + 3y + 1 = 0$ y $3x - y - 1 = 0$.

32. Calcúlense dos coeficientes angulares de las rectas que pasan por los puntos: a) $M_1(1;\ -1)$ y $M_2(3;\ -5)$, b) $M_1(\sqrt{3};\ 5)$ y $M_2(-\sqrt{3};\ -1)$, c) $M_1(-3;\ -2)$ y $M_2(1;\ -2)$.

33. Calcúlense los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son:

a) $A(2;\ 1)$, $B(3;\ 1)$ y $C(1;\ 2)$;
b) $A(0;\ 2)$, $B(2;\ 0)$ y $C(4;\ 2)$.

34. ¿Hay paralelas o perpendiculares entre las rectas representadas por estas ecuaciones:

a) $x - 3y + 1 = 0$, $2x - 6y + 5 = 0$ e $y = -3x - 2$;
b) $2x - y = 0$, $x + 2y + 3 = 0$ e $y = 2x - 1$?

35. Tracense por el punto $(3;\ -6)$ rectas paralelas a: a) $y = -2x + 3$, b) $y = 3x$, c) $y = 0$, d) $x = 0$.

36. Trácense por el origen de coordenadas las rectas perpendiculares a: a) $x - y = 0$, b) $y + 2x - 3 = 0$, c) $x - 1 = 0$, d) $2y + 1 = 0$.

37. Trácese por el punto $M$ (1; 2) una paralela a la recta que pasa por los puntos $A$ (2; —3) y $B$ (3; —1).

38. Trácese por el punto $M$ (1; —2) una perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A$ (—3; 2) y $B$ (—1; 3).

39. Fórmense las ecuaciones de dos perpendiculares a la recta $2x - y + 5 = 0$, levantadas en los puntos de intersección con los ejes de coordenadas.

40. Fórmense las ecuaciones de la rectas que pasan por el punto (2; 2) y forman un ángulo de 45° con la recta $4x - 5y - 1 = 0$.

41. Trácense rectas por el punto $M$ (3; 5) que formen un ángulo de 45° con la recta $x - y + 7 = 0$.

42. Fórmense las ecuaciones de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles, conociendo el vértice del ángulo recto $C$ (4; —1) y la ecuación de la hipotenusa $3x - y + 5 = 0$.

43. Hállese la ecuación de la recta trazada por el punto que divide el segmento situado entre los puntos $A$ (—2; 3) y $B$ (4; 6), en la razón de 2 : 3, perpendicular a la recta que en los ejes $Ox$ y $Oy$ corta segmentos iguales respectivamente a —3 y 4.

44. Hállese la ecuación de la recta trazada por el punto $N$, cuyo segmento entre los puntos $A$ (—3; 2) y $B$ (4; 1) se divide en la razón de 3 : 4, y que sea paralela a la recta que pasa por los puntos: (2; —1) y (—3; 0).

45. Trácese por el punto de intersección de las rectas $2x + 5y + 8 = 0$ y $3x - 4y - 11 = 0$ una recta tal que con la recta $4x - y + 3 = 0$: a) sea paralela, b) sea perpendicular, c) forme un ángulo de 45°.

46. Se dan los puntos $A$ (—7; 1), $B$ (3; 6), $C$ (5; 3), $D$ (—5; 8). ¿En qué razón se divide cada uno de los segmentos $AB$ y $CD$ por el punto de su intersección?

47. Trácese por el punto (2; —3) una recta tal que forme con el eje $Ox$ un ángulo que sea el doble que el ángulo formado por la recta $y = \frac{1}{2}x + 3$ y el propio eje.

48. Hállese la base de la perpendicular trazada del punto (—1; 2) a la recta $3x - 5y - 21 = 0$.

49. Hállese la distancia: a) del punto (4; —1) hasta la recta $12x - 5y - 27 = 0$, b) del punto (2; —3) hasta la recta $5x + 12y - 13 = 0$.

50. Hállese la altura del triángulo, si: a) el vértice del triángulo es el punto $A$ (—1; —1), y la base, la recta $4x -$

$-y+3=0$, b) si el vértice del triángulo es el punto (5; $-3$), y la base, el segmento que une los puntos (0; $-1$) y (3; 3).

51. Hállese el punto simétrico al punto $Q(-2;\ -9)$ respecto a la recta $2x+5y-38=0$.

52. Se dan las ecuaciones de las bases de un trapecio: $3x-4y+10=0$ y $6x-8y+15=0$. Hállese la altura.

53. Se da la recta $3x-4y-5=0$. Hállese la ecuación de la recta paralela a la dada, que está a la distancia de dos unidades de ella.

54. Fórmese la ecuación de una recta que pasa por el punto $M_0(x_0;\ y_0)$ y es paralela a la recta que une los puntos $M_1(x_1;\ y_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2)$.

55. Desde el punto de intersección de la recta $7x-24y-14=0$ con el eje $Ox$ trácese la bisectriz del ángulo formado por la recta dada con el eje $Ox$.

56. Se dan dos puntos $A(-3;\ 8)$ y $B(2;\ 2)$. Hállese en el eje de las abscisas el punto $M$, de tal modo que la quebrada $AMB$ tenga la longitud mínima.

57. ¿Cuál es el ángulo que tiene que formar un rayo dirigido al eje $Ox$ desde él punto $A(5;\ 2)$, para que el rayo reflejado del eje pase por el punto $B(-1;\ 4)$?

58. Fórmese la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0(x_0;\ y_0)$ y por el punto de intersección de dos rectas: $A_1x+B_1y+C_1=0$ y $A_2x+B_2y+C_2=0$.

59. Se dan las ecuaciones de dos lados de un paralelogramo $x+y-1=0$ y $3x-y+4=0$ y el punto de intersección de sus diagonales $N(3;\ 3)$. Hállense las ecuaciones de los otros dos lados de este paralelogramo.

60. Determínense los límites de un terreno cuadrado por medio de los siguientes datos:

a) dos postes que se conservan y constituyen los vértices opuestos, estando determinados los postes en el plano por las coordenadas $A(2;\ 1)$ y $C(4;\ 5)$;

b) tres postes que se han conservado: uno en el centro y dos en los vértices de uno de sus lados, estando determinados los postes en el plano por las siguientes coordenadas: el del centro $N(1;\ 6)$ y los laterales $A(5;\ 9)$ y $B(4;\ 2)$.

61. Determínese la situación del punto $M$, si la distancia desde el punto $A(1;\ -2)$ es igual a 5 unidades de longitud, y la dirección a él desde el punto $B(0;\ -8)$ forma con la dirección positiva del eje $Ox$ un ángulo cuya tangente es igual a $\frac{1}{2}$.

62. Desde el punto $M$ (9; 5) se han trazado tres perpendiculares a los lados de un triángulo, cuyos vértices son los puntos (8; 8), (0; 8) y (4; 0). Verifíquese que las bases de las tres perpendiculares están situadas en una misma recta, y que el punto $M$ pertenece a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo dado.

63. Compruébese que el punto de intersección de las alturas de un triángulo está situado en la misma recta que el punto de intersección de sus medianas y el centro de la circunferencia circunscrita. Tómese, por ejemplo, el triángulo $ABC$: $A$ (5; 8), $B$ (—2; 9) y $C$ (—4; 5).

## § 3. La circunferencia

1. Fórmese la ecuación de una circunferencia que tiene:

a) el centro en el punto (3; —5) y el radio es igual a 4;

b) el centro en el punto (—2; 1) y pasa por el origen de coordenadas;

c) el centro en el punto (—3; 0), y el extremo del diámetro en el punto (2; —4).

2. Fórmese la ecuación de una circunferencia, cuyo diámetro es el segmento de la recta $4x - 3y + 12 = 0$, situado entre los ejes de coordenadas.

3. Escríbase la ecuación de una circunferencia, cuyo centro se encuentra en el eje de las abscisas y pasa por los puntos $M$ (2; 3) y $N$ (5; —2).

4. Escríbase la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $M$ (—3; 9), y tiene el centro en el eje de las ordenadas.

5. Fórmese la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de las abscisas en el punto $A$ (2; 0) y pasa por el punto $M$ (—1; 3).

6. Fórmense las ecuaciones de las circunferencias que pasan por el punto $M$ (2; —1) y son tangentes a los dos ejes de coordenadas.

7. Hállense las ecuaciones normales de las circunferencias que pasan por los puntos $M$ (—1; 4) y $N$ (3; 0) y las longitudes de sus radios son 4 unidades.

8. Hállense las ecuaciones normales de las circunferencias que pasan por los puntos $M$ (4; —2) y $N$ (5; —3), y las longitudes de sus radios son 5 unidades.

9. Fórmese la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos: a) (0; 0), (7; —7), (8; 0), b) (0; 4), (1; 2), (3; —2).

10. Fórmese la ecuación de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo cuyos vértices están situados en los puntos: $A$ (0; —6), $B$ (1; 1) y $C$ (8; 0).

11. Hállense el centro y el radio de la circunferencia:

a) $x^2+y^2-6y=0$;
b) $x^2+y^2+8x-9=0$;
c) $x^2+y^2-10x+4y+13=0$;
d) $2x^2+2y^2-6x-8y-19=0$;
e) $2x^2+2y^2-5x+3y-7=0$;
f) $x^2+y^2-12x+2y+37=0$;
g) $x^2+y^2-2x+12y+38=0$.

12. Hállese la ecuación de la circunferencia cuyo radio es igual a dos unidades de longitud, y que es concéntrica a la circunferencia $x^2+y^2+6x+8=0$.

13. Hállese la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $M$ (—3; 4) y es concéntrica a la circunferencia $x^2+y^2+3x-4y-1=0$.

14. Transfórmese la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+4x-12y-9=0$, trasladando el origen de coordenadas a su centro y conservando la misma dirección de los ejes.

15. Hállense los puntos de intersección con los ejes de coordenadas de cada una de las circunferencias; a) $x^2+y^2-6x-10y+9=0$, b) $x^2+y^2-10x-6y+25=0$.

16. ¿Cuál es la posición relativa de cada una de las rectas: a) $x-2y-5=0$, b) $3x+4y+25=0$, c) $x+y-17=0$ y la circunferencia $x^2+y^2=25$?

17. Hállese el centro de un círculo cuyo radio $r=50$, sabiendo que su circunferencia corta en el eje de las abscisas una cuerda de longitud igual a 28 unidades y que pasa por el punto $M$ (0; 8).

## § 4. La elipse

En los siguientes problemas es necesario formar la ecuación de la elipse si se sabe que:

1. Las coordenadas del foco $F$ y del punto $M$ de la elipse: a) $F$ (±2; 0) y $M$ (2; —3), b) $F$ (±15; 0) y $M$ (20, 12), c) $F$ (±22; 0) y $M$ (13; 12).

2. Los vértices de la elipse son los puntos (±3; 0) y (0; ±1).

3. La distancia entre los focos es igual a 16, y el eje mayor, igual a 34.

4. El semieje menor es igual a 4, y la distancia entre los focos, igual a 15.

5. El semieje mayor es igual a 10, y la excentricidad, igual a 0,6.

6. La excentricidad $e = 0{,}28$, y los focos tienen las coordenadas $(\pm 7;\ 0)$.

7. Las distancias desde cada uno de los focos hasta los extremos del eje focal son iguales respectivamente a 18 y 8.

8. El eje menor es igual a 6, y la excentricidad, igual a 0,8.

9. La suma de los semiejes es igual a 8, y la distancia focal es también igual a 8.

10. La excentricidad es igual a $\frac{1}{3}$, y la elipse pasa por el punto $M(c;\ 4)$, siendo $c$ la abscisa del foco.

11. La elipse pasa por los puntos: a) $M(6;\ 4)$ y $N(-8;\ 3)$, b) $M(6;\ -6)$ y $N(9;\ \sqrt{6})$.

12. Calcúlese la longitud de los ejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad de la elipse, conociendo su ecuación: a) $25x^2 + 169y^2 = 4225$, b) $3x^2 + 5y^2 = 30$, c) $2x^2 + y^2 = 32$, d) $9x^2 + 25y^2 = 4$, e) $256x^2 + 81y^2 = 576$.

13. Todas las ordenadas de la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ se han reducido a la mitad. Hállese la ecuación de la curva obtenida.

14. Determínese la excentricidad de la elipse si:

a) su eje menor se ve desde el foco bajo un ángulo recto;

b) la distancia entre los focos es igual a la distancia entre los extremos de los ejes mayor y menor;

c) la ordenada del punto de la elipse, cuya abscisa es la abscisa del foco, forma una $\frac{1}{m}$ parte de la longitud del semieje menor $(m > 1)$.

15. Se da la excentricidad $e$ de una elipse. Hállese la *razón de sus semiejes.*

16. Cualquier meridiano del globo terráqueo tiene la forma de una elipse, siendo la razón de sus ejes $\frac{299}{300}$. Hállese la excentricidad de un meridiano.

17. La órbita del globo terráqueo es una elipse, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Conociendo la excentricidad de esta elipse $e = 0{,}017$ y el semieje $a = 150 \cdot 10^6\ km$, hállese en cuándo es menor la distancia mínima desde la *Tierra hasta el Sol (en diciembre) que la distancia máxima* (en junio).

18. En la elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ hállese el punto cuya distancia hasta el foco derecho sea el cuádruplo respecto a la distancia desde este punto hasta el foco izquierdo.

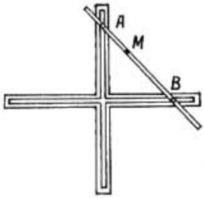



Fig. 170

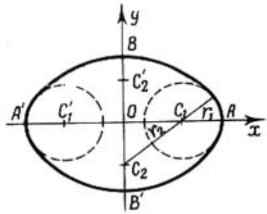



Fig. 171

19. El segmento $AB$, de longitud constante, se desliza con sus extremos por los lados de un ángulo recto. Tómese en el segmento un punto cualquiera $M$ y demuéstrese que la trayectoria que traza al deslizarse es una elipse.

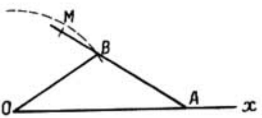



Fig. 172

20. En la figura 170 se representa un compás elíptico, en el que por medio de los tornillos $A$, $B$ y $M$ se puede variar la longitud de la recta $AB$ que se desliza, y el lugar $M$ en el que se fija el lapicero. ¿Cómo hay que disponer el compás para dibujar las elipses:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, b) $\frac{x^2}{16}+y^2=1$, c) $x^2+y^2=25$?

21. En la práctica, la descripción exacta de una elipse (§ 23) suele sustituirse por la aproximada, que se traza con un compás. Desde el punto $C_1$ (fig. 171), con un radio igual a $C_1A_1$ y desde el punto $C_2$, con un radio igual a $C_2B$, se describen unas partes de la circunferencia. Los radios tienen que ser elegidos de tal manera que las dos partes de la circunferencia tengan una tangente común en el punto de unión. Determínese cuál es la dependencia relativa de

los radios $C_1A = r_1$ y $C_2B = r_2$, para que la elipse aproximada tenga los semiejes dados $a$ y $b$.

22. En la figura 172 se representa un mecanismo en el que $OB = BA = a$, $MB = b$. El punto $O$ está inmóvil, $B$ gira alrededor de él, describiendo una circunferencia, y $A$ se desplaza por la recta $Ox$. ¿Cuál es la curva que describe el punto $M$?

## § 5. La hipérbola

En los siguientes problemas es necesario formar la ecuación de una hipérbola, si se sabe que:

1. Las coordenadas, del foco $F$ y del punto $M$ de la hipérbola: a) $F(\pm 13;\ 0)$ y $M(22;\ 12)$, b) $F(\pm 15;\ 0)$ y $M(-20;\ 12)$, c) $F\left(\pm 4\frac{1}{2};\ 0\right)$ y $M\left(10\frac{1}{2};\ 8\right)$.

2. Las coordenadas de los vértices $(\pm 1;\ 0)$ y las coordenadas de los focos $(\pm 3;\ 0)$.

3. El semieje real es igual a 5 y los vértices dividen por la mitad la distancia entre el centro y el foco.

4. El semieje real es igual a 6, y la excentricidad $e = 1{,}5$.

5. La distancia focal es igual a 26, y la excentricidad igual a 2,6.

6. La excentricidad de la hipérbola es igual a 1,25, y la hipérbola pasa por el punto $(2\sqrt{5};\ -1{,}5)$.

7. La hipérbola pasa por los puntos $M(-4;\ 3)$ y y $N(\sqrt{10};\ -1{,}5)$.

8. Hállense las coordenadas de los focos, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas: a) $16x^2 - 9y^2 = 576$, b) $3x^2 - 5y^2 = 30$, c) $64x^2 - 225y^2 = 400$.

9. Hállese la ecuación de la hipérbola para la cual:

a) las asíntotas están representadas por medio de las ecuaciones $y = \pm \frac{1}{2}x$, y los focos tienen las coordenadas $(\pm \sqrt{10};\ 0)$;

b) las asíntotas están representadas por las ecuaciones $y = \pm \frac{3}{4}x$, y la hipérbola pasa por el punto (2,1).

10. Determínese el ángulo formado por las asíntotas, si la excentricidad $e = 2$.

11. Calcúlese la excentricidad de la hlpérbola, si el ángulo formado por sus asíntotas es igual a 60°, a 90°.

12. Hállese la dependencia entre la excentricidad de la hipérbola y el ángulo formado por la asíntota con el eje principal.

13. Hállese la distancia desde un punto situado en la hipérbola $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{64}=1$, hasta sus focos, si la abscisa del punto es igual a: a) 15, b) $-16\frac{13}{17}$.

14. Hállese en la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ un punto cuya distancia hasta el foco izquierdo es el doble que hasta el derecho.

15. Hállese en la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ un punto $M(x_0, y_0)$ para el cual los radios vectores focales son perpendiculares entre sí.

16. Hállese la ecuación de la hipérbola equilátera que pasa por el punto: a) $(4; -2)$, b) $(-3; \sqrt{2})$.

17. Transfórmense las ecuaciones de las hipérbolas en ecuaciones relativas a las asíntotas: a) $x^2-y^2=12$, b) $x^2-y^2=8$.

18. Transfórmense las ecuaciones de las hipérbolas en ecuaciones relativas a las asíntotas, tomando los ejes de simetría de la hipérbola como ejes de coordenadas:

$$\text{a) } xy=3, \text{ b) } xy=5.$$

19. Fórmese la ecuación de la hipérbola que tiene los focos comunes con la elipse $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$, suponiendo la excentricidad de la hipérbola igual a 1,25.

20. Fórmese la ecuación de la hipérbola sabiendo que sus vértices están situados en los focos de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, y los vértices de esta elipse se encuentran en los focos de la hipérbola.

21. Calcúlese la longitud del lado de un cuadrado inscrito: a) en la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, b) en la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Investíguese en qué hipérbolas se puede inscribir un cuadrado.

22. Fórmense las ecuaciones de dos perpendiculares, bajadas desde el foco derecho de la hipérbola $9x^2-16y^2=144$ a sus asíntotas.

23. Hállense los puntos de intersección de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ con las rectas: a) $20x + 21y + 12 = 0$, b) $4x - 3y = 0$, c) $y = 2x - 3$.

24. Hállense los puntos de intersección de la hipérbola $2x^2 - y^2 = 4$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

25. Hállense los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ con la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

## § 6. La parábola

En los siguientes problemas es necesario formar la ecuación de la parábola que tiene el vértice en el origen de coordenadas, conociendo:

1. Las coordenadas del foco a) (4; 0), b) (0; —3).

2. La ecuación de la directriz es: a) $x = 1$, b) $y = -2$.

3. La parábola es simétrica al eje $Ox$ y pasa por el punto: a) (1; —2), b) (—2; 4).

4. La parábola es simétrica al eje $Oy$ y pasa por el punto: a) (—3; 2), b) (2; —3).

5. Una piedra arrojada al alto, formando un ángulo agudo con el horizonte, describe el arco de una parábola y cae a una distancia de 16 metros. Determínese el parámetro de esta parábola si la altura máxima alcanzada por la piedra es de 12 metros.

6. El espejo del faro de un automóvil tiene la forma de una parábola (su sección). Hállese la ecuación de esta parábola, teniendo en cuenta que el diámetro del faro es de 20 cm, y la profundidad, 15 cm. El eje $Ox$ es el eje del faro. El origen de las ordenadas está situado en la parte profundad del espejo.

7. El espejo parabólico del refractor de un observatorio tiene una distancia focal de 20 metros y un diámetro de 6 metros. Hállese la profundidad de la cavidad parabólica que fue necesario hacer al construir este espejo de un cristal plano.

8. Fórmese la ecuación de la parábola que es:

a) simétrica al eje $Ox$ y que corta en este eje el segmento $+a$, y en el eje $Oy$, los segmentos $\pm b$ (fig. 173);

b) simétrica respecto al eje $Oy$ y que corta en este eje el segmento $+b$, y en el eje $Ox$, los segmentos $\pm a$ (fig. 174).

9. La armazón representada en la figura 175 tiene la forma de una parábola.

La longitud de la luz es igual a $l$, la flecha de la comba es igual a $f$; la luz está dividida en $2n$ partes iguales. Determínese la longitud de las vigas verticales ($y_1$, $y_2$, ...) y las diagonales ($d_1$, $d_2$, ... y $d'_1$, $d'_2$, ...) de la armazón.

Ejemplo numérico: $l = 20$ m, $f = 5$ m y $n = 4$.

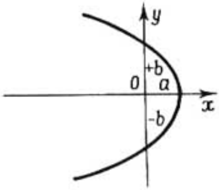



Fig. 173

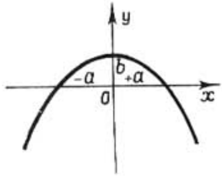



Fig. 174

10. Resuélvase el mismo problema si se trata de una armazón en forma de hoz, formada por dos parábolas (fig. 176).

Ejemplo numérico: $l = 20$ m, $f = 2$ $m$ (la flecha de la comba de la armazón), $f' = 3$ $m$ (la comba de la parábola inferior), $n = 4$.

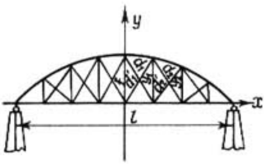



Fig. 175

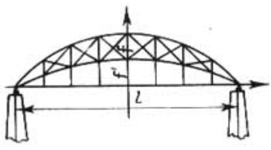



Fig. 176

11. Fórmese la ecuación de la parábola, conociento las coordenadas del vértice $O'$ y del foco $F$ de la parábola: a) $O'$ (2; 3) y $F$ (2; 5); b) $O'$ (3; 0) y $F$ (3; —3); c) $O'$ (1; —2) y $F$ (4; —2); d) $O'$ (2; 0) y $F$ (0; 0).

12. Fórmese la ecuación de la parábola, conociendo la ecuación de la directriz y las coordenadas del vértice $O'$ de la parábola: a) $y = -2$ y $O'$ (4; 1), b) $y = 1$ y $O'$ (3; —1), c) $x = 3$ y $O'$ (1; 1), d) $x = 0$ y $O'$ (—1; 0).

13. Fórmese la ecuación de la parábola, conociendo la ecuación de la directriz y las coordenadas del foco $F$ de la

parábola: a) $x=0$ y $F$ (5; 0), b) $y=-1$ y $F$ (2; 3), c) $x=1$ y $F$ (—2; 2).

14. Fórmese la ecuación de la parábola, sabiendo que en ella:

a) el eje es paralelo al eje $Oy$, el vértice tiene las coordenadas (2; —1) y la parábola pasa por el punto (4; 0); b) el eje es paralelo al eje $Ox$, el vértice tiene las coordenadas (2; 3) y la parábola pasa por el punto (1; 1).

15. Determínense las coordenadas del vértice, la magnitud del parámetro y la dirección del eje de simetría de las siguientes parábolas:

a) $y^2-10x-2y+21=0$, b) $y^2-6x+14y+49=0$,
c) $y^2+8x-16=0$, d) $x^2-6x+4y-11=0$,
e) $y=x^2-8x+15$, f) $y=x^2+6x$,
g) $y=2x-x^2$, h) $y=x-x^2$.

16. Transfórmense las ecuaciones de las circunferencias: a) $x^2+y^2+6x-7=0$ y b) $x^2+y^2-10x+2y+1=0$ en ecuaciones canónicas y determínense las coordenadas del centro y del radio.

17. Transfórmense las ecuaciones de las hipérbolas: a) $9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$ y b) $5x^2-6y^2+10x-12y-31=0$ en canónicas y determínense las coordenadas del centro y las magnitudes de los ejes.

18. a) Hállese en la parábola $y^2=4x$ un punto, para el cual el radio vector focal es igual a 17.

b) Hállese en la parábola $y^2=8x$ un punto para el cual el radio vector focal es igual a 10.

19. Hállese la ecuación de una cuerda común para la parábola $y^2=18x$ y el círculo $(x+6)^2+y^2=100$.

20. Verifíquese que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el punto dado y que son tangentes a la recta dada, es una parábola.

## § 7. Problemas mixtos

1. Demuéstrese que para cada recta que sale del punto $M$ ($x_0$; $y_0$) y corta a la circunferencia $x^2+y^2=a^2$, el producto de las distancias desde el punto $M$ hasta los puntos de intersección de la recta con la circunferencia es el mismo (corolario del teorema conocido en la planimetría sobre el producto de una secante por su parte exterior).

2. El vértice del ángulo recto de un triángulo se encuentra en la recta $2x+y-10=0$, y los otros dos vértices, en los puntos $(2; -3)$ y $(4; 1)$. Calcúlese el área del triángulo.

3. Hállese el ángulo formado por las rectas que pasan por el origen de coordenadas y por los puntos que dividen en tres partes iguales la cuerda $2x+3y-12=0$ de la parábola $2x^2-9y=0$.

4. El centro de una circunferencia tangente a los ejes de coordenadas se encuentra en la recta $3x-5y+15=0$. Hállese la ecuación de esa circunferencia.

5. En el primer cuadrante de la elipse $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ se ha tomado un punto, cuya abscisa es igual a $1\frac{2}{5}$, y ha sido unida con los focos de la elipse. Demuéstrese que los radios vectores obtenidos son perpendiculares entre sí.

6. El vértice de una parábola se halla en el centro de una circunferencia, cuyo radio es igual a $\frac{3}{4}$ del parámetro $p$ de la parábola. La cuerda que une los puntos de intersección de ambas curvas sirve de lado de un rectángulo inscrito en la circunferencia. Hállense las longitudes de los lados del rectángulo y las ecuaciones de sus diagonales.

7. Los focos de las elipses $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ y $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ están unidos entre sí por unas rectas, y en el rombo formado de este modo hay inscrita una circunferencia. Hállese la ecuación de esta circunferencia.

8. Una elipse y una hipérbola tienen focos comunes, siendo la distancia que los separa igual a $2\sqrt{13}$; la diferencia entre los semiejes focales es igual a 4, y la razón de las excentricidades, igual a $\frac{3}{7}$. Fórmense las ecuaciones de estas curvas y hállense los puntos de intersección.

9. Se da la hipérbola $x^2-y^2-6x=0$. Hállese la ecuación de la recta que une el centro de la hipérbola con el centro de la circunferencia que pasa por el origen y el punto de intersección de la recta $x-2y+4=0$ con los ejes de coordenadas.

10. Si el origen de coordenadas $O$ sirve de centro a una circunferencia, que es tangente a la recta $3x-y-10=0$, y de vértice de una parábola, cuyo parámetro es igual a $\frac{3}{2}$,

y su eje coincide con el eje $Ox$, y si desde el punto $M$ de intersección de estas curvas, situado en el primer cuadrante, se traza una circunferencia, tangente al eje $Ox$, que corta a la primera circunferencia en los puntos $P$ y $Q$, en ese caso, el punto de intersección de la cuerda $PQ$ con la ordenada del punto $M$ pertenece a una elipse, cuyo eje mayor es el diámetro de la primera circunferencia, y el eje menor es igual al radio de la misma circunferencia. Demuéstrese esto.

## § 8. Teoría de los límites

1. Verifíquese que si $x$ toma uno tras otro los valores: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$; ...; $\frac{2^n-1}{2^n}$ ..., su límite es igual a 1.

2. Verifíquese que el límite de $\cos x$ es igual a cero si $x \to \frac{\pi}{2}$.

3. Verifíquese que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

4. Verifíquese que $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$.

5. Si $x \to 0$, ¿cuáles de estas magnitudes son infinitamente pequeñas: $10x$; $x^2$; $\sqrt{x}$; $ax^2$; $\frac{2}{x}$; $\frac{0{,}001}{x}$; $\frac{x}{x^2}$; $\frac{x^2}{x}$; $x^2+0{,}1x$; $x-x^2$?

6. Si $x$ toma uno tras otro los siguientes valores: 1; $\frac{1}{2}$; 3; $\frac{1}{4}$; 5; $\frac{1}{6}$; ..., ¿es $x$ una magnitud infinitamente grande o infinitamente pequeña?

Hállense los límites de las siguientes expresiones:

7. $\frac{10}{x+1}$ si $x \to 4$.

8. $\frac{x^2-3x+6}{x+2}$ si $x \to 2$.

9. $\frac{x^2+6x-1}{5x+3}$ si $x \to 0$.

10. $\frac{x^2-1}{x+1}$ si $x \to 1$.

11. $\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$ si $x \to 3$.

12. $\frac{x^3+2x^2}{x^4-x^3+5x^2}$ si $x \to 0$.

13. $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^3-4x^2+3x}$ si $x \to 1$.

14. $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ si $x \to a$.

15. $\frac{x^p-x^q}{x^p-x^q}$ si $x \to 0$ y $p > q$.

16. $\frac{1+x-x^2}{x^2+x-1}$ si $x \to \infty$.

17. $\frac{ax^4+bx^3+cx^2}{kx^4+lx^3+mx^2}$ si $x \to \infty$.

18. $\frac{x^2+5}{2x^3+3}$ si $x \to \infty$.

19. $\frac{ax^2+b}{x^3+c}$ si $x \to \infty$.

20. $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ si $x \to \infty$.

21. $\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}$ si $x \to 1$.

22. $\frac{2x}{x^2-a^2}-\frac{1}{x-a}$ si $x \to a$.

23. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$ si $x \to 3, x \to a$

24. $\sqrt{x^2+1}-x$, donde $x>0$, si $x \to \infty$.

Explíquese el sentido geométrico.

## § 9. La función y la continuidad de la función

1. Suponiendo $f(x) = 5 + 3x - 5x^2$, hállese $f(-1)$.
2. Suponiendo $\varphi(x) = x^2 - 2$, hállese $\varphi(x) + 4$ y $\varphi(x + 4)$.
3. Dado: $F(x) = \frac{1}{x^2}+1$ hállese $F(x - 2)$.
4. Dado: $F(x)=\frac{2x}{5}+\frac{5}{2x}$; verifíquese que $F\left(\frac{5}{2}\right) = -F\left(-\frac{5}{2}\right)$.
5. Dado; $f(x)=\frac{1}{x}$; verifíquese que $f(x+h) - f(x) = -\frac{h}{x^2+xh}$.
6. Hállense los valores de $t$ para los que $f(t) = t^2 + t - 6$ se convierte en cero.
7. Una ecuación con una incógnita tiene la forma $f(x) = 0$. ¿Qué notación debe emplearse para indicar que los números 1 y $-2$ son raíces de esta ecuación?
8. Suponiendo $f(x) = a^x$, escríbase por medio de este símbolo la igualdad $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
9. Suponiendo $f(x) = \operatorname{tg} x$, escríbase por medio de este símbolo la fórmula $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}$.
10. Dado $f(x) = \operatorname{sen} x$, verifíquese que

$$f(x+2z)+f(x)=2\operatorname{sen}(x+z)\cdot\cos z.$$

11. Hállense los campos de determinación de las funciones:

a) $y=\sqrt{4-x^2}$; b) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}$; c) $y=\sqrt{3+x}+\sqrt{x-1}$; d) $y=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$.

12. Constrúyase la gráfica de las funciones:

a) $y=|x|$ en el segmento $[-2;\ +2]$;

b) $y=|x-2|$ en el segmento $[-2;\ +6]$;

c) $y=4x-x^2$ en el segmento $[-1;\ 4]$;

d) $y=\frac{1}{x-1}$; e) $y=\frac{1}{(x-1)^2}$; f) $y=x+\frac{1}{x}$;

g) $y=\frac{x^2}{x-1}$; h) $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; i) $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$;

j) $y=\begin{cases} x+2, \text{ si } -2\leqslant x\leqslant -1; \\ 1; \text{ si } -1\leqslant x\leqslant +1; \\ 2-x, \text{ si } +1\leqslant x\leqslant +2. \end{cases}$

13. Hállese la magnitud de la variación del volumen de un cubo al variar la longitud $x$ de su arista en $\Delta x$. Hágase el cálculo para $x=2$m y $\Delta x=0{,}1$ m.

14. Calcúlese el incremento de la función $y=x^3-2x+5$ al variar el argumento desde $x=2$ hasta $x_1=2{,}01$.

15. Hállese el incremento de la función $y=\frac{2}{x-1}$ si el valor del argumento $x$ es arbitrario y si el incremento $\Delta x$ es arbitrario.

16. Hállese el incremento de la función $y=\lg x$ para cualquier valor positivo de $x$ si el valor del incremento $\Delta x$ es arbitrario.

17. Determínense los puntos de discontinuidad de las funciones:

a) $y=\frac{1}{x}$; b) $y=\frac{1}{(x-1)^2}$;

c) $y=\frac{1}{x^2-1}$; d) $y=\frac{x+7}{x^2+10x+21}$;

e) $y=\frac{2x-3}{6x^2-23x+21}$ f) $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

18. *Demuéstrese la continuidad de la función para* cualquier valor real $x=c$:

a) $y=\frac{2x}{x^2+1}$; b) $y=\sqrt{x}\ (x\geqslant 0)$;

c) $y=\cos x$; d) $y=a^x\ (a>0;\ a\neq 1)$;

e) $y=\log_a x\ (a>1;\ 0<x<+\infty)$.

19. ¿Será la función propuesta:

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3 - x, & \text{si } 1 \leqslant x < 2, \end{cases}$$

continua en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2$? Constrúyase la gráfica.

20. Demuéstrese la continuidad de $\operatorname{tg} x$ para todos los valores de $x$, menos $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donde $k$ es cualquier número entero.

## § 10. Función derivada

1. Hállese la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para las funciones:

a) $y = 2x^3 - x^2 + 1$ si $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$;

b) $y = \frac{1}{x}$ si $x = 2$; $\Delta x = 0{,}01$;

c) $y = \sqrt{x}$ si $x = 4$, $\Delta x = 0{,}41$.

Verifíquese que al tender $\Delta x$ a cero, esta razón tiende en el primer caso a 4, en el segundo a $-\frac{1}{4}$ y en el tercero a $\frac{1}{4}$.

2. La ecuación del movimiento de un punto es: $s = t^3 + 10$. Hállese la velocidad del movimiento de dicho punto en el instante $t = 2$.

3. El ángulo $\varphi$ de giro de una rueda al frenar se determina por medio de la ecuación $\varphi = a + bt - ct^2$, en la que $a$, $b$, $c$ son constantes y $t$ es el tiempo. Hállese la velocidad angular en el instante $t$ y determínese cuándo se parará la rueda.

4. Al elevar la temperatura de 1 kilogramo de agua desde 0° hasta $t°$, la cantidad de calor $Q$ requerida se determina por medio de la fórmula:

$$Q = t + 0{,}00002t^2 + 0{,}0000003t^3 \ kcal,$$

Hállese la capacidad calorífica del agua para $t = 50°$.

5. Un cuerpo de 2 kilogramos se mueve rectilíneamente según la ley $s = 1 + t^2$; $s$ se expresa en centímetros, y $t$ en

segundos. Determínese la energía cinética $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ del cuerpo una vez transcurridos 5 segundos desde que empezó el movimiento.

6. Una pieza metálica, cuya densidad es igual a $d$, tiene la forma de un cono, siendo la base de éste igual a 1 cm. La longitud de la pieza es de 50 *cm*. Hállese la densidad lineal en la mitad de la longitud de la pieza.

7. Hállese el coeficiente angular de la tangente a la parábola $y = x^2$: a) en el origen de coordenadas, b) en el punto $x = 3$, c) en el punto $x = -2$, d) en los puntos de intersección de la parábola con la recta $y = 3x - 2$. Verifíquese que la tangente en el punto $C\ (x_1;\ y_1)$ divide el segmento $[0,\ x_1]$ del eje de las abscisas por la mitad y hállese la regla de la construcción de la tangente.

8. Hállese el coeficiente angular de la tangente a la parábola cúbica $y = x^3$: a) en el punto $(x_1;\ y_1)$, b) en el punto $x = 2$. ¿Puede ser negativo el coeficiente angular de la tangente a la parábola cúbica $y = x^3$? Verifíquese que la tangente en el punto $C\ (x_1;\ y_1)$ divide el segmento $[0,\ x_1]$ del eje de las abscisas en la razón $2 : 1$, a partir del origen de coordenadas. Hállese la regla de construcción de la tangente.

9. Hállese la ecuación de la tangente a la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$ ; a) en el punto $(x_1;\ y_1)$, b) en el punto $x = 1$, c) en el punto $x = -\frac{1}{2}$. ¿Puede ser positivo el coeficiente angular de la tangente?

10. ¿Cuáles tienen que ser los valores del argumento para que las tangentes a las parábolas $y = x^2$ e $y = x^3$ sean paralelas?

11. ¿Cuál es el ángulo que forman al cortarse la hipérbola $x = \frac{1}{x}$ y la parábola $y = \sqrt{x}$?

12. ¿Qué ángulos se forman al cortarse las parábolas: $y = \sqrt{2x}$ e $y = \frac{x^2}{2}$?

13. ¿En qué punto la normal a la parábola $y = x^2$ es perpendicular a la recta $y = 4x + 1$?

14. Demuéstrese que las normales a la curva $y = x^2 - x + 1$, trazadas en los puntos: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{5}{2}$, se cortan en un mismo punto.

## § 11. Cálculo de las derivadas

1. $y=3x^2-6x+10.$

2. $y=5x^4+x^2+\frac{1}{3}.$

3. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+x+$
$+1.$

4. $y=\frac{1}{5}x^3-\frac{1}{3}x^2-$
$-x+0{,}5.$

5. $y=ax^4+bx^2+c.$

6. $y=ax^3+bx^2-cx+d.$

7. $y=\frac{4x^3}{3}-\frac{2x^5}{5}-\frac{x^7}{7}.$

8. $y=-\frac{7x^6}{8}+\frac{5x^4}{4}-$
$-\frac{3x^2}{2}-\frac{2}{3}.$

9. $y=-\frac{ax^4}{b}-\frac{bx^2}{2a}+\frac{a-b}{b}.$

11. $y=x^a-x^b+3x^{ab}.$

10. $y=\frac{x^3}{a+b}-\frac{x^2}{a-b}-\frac{x}{ab}.$

13. $y=x^k-2x^\pi+\lg 2.$

12. $y=x^{2a}-2x^{\lg 2}+\pi^2.$

15. $y=3x^{-2}-2x^{-\frac{1}{2}}+x.$

14. $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}.$

17. $y=x^2\sqrt{3}+5\sqrt{x^3}+$
$+\sqrt{5}.$

16. $y=3\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}+$
$+5x\sqrt[5]{x}.$

19. $y=\frac{3a^2}{x^2}-\frac{a}{3x^4}.$

18. $y=\frac{1}{x^2}-\frac{7}{x^3}+\frac{1}{3}.$

20 $y=2\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

### Para los § 81 y 82

*Derivar*

21. $y=(1+5x)(1-7x).$

22. $y=(1+4x^3)(1-2x^2).$

23. $y=(2x^2+3x+5)\times$
$\times(5x^2-2x+3).$

24. $y=(1-x-x^3)\times$
$\times(1-x+x^3).$

25. $y=(ax+b)(cx+d).$

26. $y=(ax+b)(cx^2+d).$

27. $y=x(2x-1)(3x+2).$

28. $y=(x^2-1)(x^2-4)\times$
$\times(x^2-9).$

29. $y=\frac{5x}{1+x^2}.$

30. $y=\frac{1-x}{1+x}.$

31. $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}.$

32. $y=\frac{ax+b}{cx+d}.$

33. $y=\frac{k+ax^2}{l-ax^2}$.

34. $y=\frac{x}{a}+\frac{a}{x}+\frac{x^2}{b^2}+\frac{b^2}{x^2}$.

35. $y=\frac{2x}{5}+\frac{5}{2x}$.

36. $y=\frac{2+x}{3}+\frac{6}{4-x^2}$.

37. $y=3x-\frac{27}{2-x}$.

38. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$.

39. $y=\frac{a}{b+cx^n}$.

40. $z=\frac{1}{t^2-t+1}$.

41. $z=\frac{t-t^3}{\sqrt{\pi}}$.

42. $F(u)=(1+u^3)\times$
$\times\left(5-\frac{1}{u^2}\right)$.
Hállese $F'(1)$.

43. $F(u)=\frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}$.
Hállese $F'(a)$.

44. $F(u)=(1+\sqrt{u})\times$
$\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$.
Hállese $F'(a)$.

45. $S(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{2}$
Hállese $S'(0)$, $S'(2)$.

46. $\rho=\frac{\varphi}{1+\varphi^2}$.
Hállense $\rho'(2)$ y $\rho'(0)$.

## Para el § 85

47. $y=(3x^2+8)^6$.

48. $y=(5-4x^3)^7$.

49. $y=(ax^2+bx+c)^3$.

50. $y=(mx^4+nx^2+p)^4$.

51. $y=(x^m+x^n)^k$.

52. $y=(ax^m+bx^n)^p$.

53. $y=\sqrt{a^2+x^2}$

54. $y=\sqrt[3]{a+bx+cx^2}$.

55. $y=(ax+b)^2-(ax-b)^2$

56. $y=\sqrt{5-7\sqrt{1+x^2}}$.

57. $y=x\sqrt{5}-2\sqrt{3x+5}$.

58. $y=(x^2\sqrt{3}+5\sqrt{x^3})^4$.

59. $y=\frac{7}{(x^2-1)^3}$.

60. $y=\frac{5}{(3-2x^2)^2}$.

61. $y=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

62. $y=\frac{2a}{(1+\sqrt{x})^n}$.

63. $y=\sqrt{(1-x^2)^3}-$
$-\sqrt{1-x^2}$.

64. $y=\sqrt[3]{x^2+1}+$
$+\sqrt[3]{(x^2+1)^4}$.

65. $y=\sqrt{2+\sqrt{2x}}$.

66. $y=\sqrt{a+\sqrt{ax}}$.

67. $y=(a+x^2)\sqrt{1+bx}$.

68. $y=(2+3x^2\sqrt{1+5x^2})$.

69 $y=\frac{x^2-2}{(x-1)^4}$.

70. $y=\frac{5x^3}{(5x-4)^3}$.

71. $y=(3x+5)^3(5x+4)^5$.

72. $y=(x+1)(2-3x)^2\times$
$\times(2x+3)^3$.

73. $y=(x+a)^m(x+b)^n$.

74. $y=\frac{(a+x)^m}{(b-x)^n}$.

75. $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

76. $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$.

77. $y=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$.

78. $y=\frac{\sqrt[5]{(1+x^5)^3}}{x^3}$.

79. $y=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

80. $y=\frac{2x}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$.

81. $y=\frac{x^n}{(1+\sqrt{x})^n}$.

82. $y=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

## Para el § 86

*Hállese el límite*

83. $\frac{\operatorname{sen} kx}{x}$ si $x\to 0$.

84. $\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}$ si $x\to a$

85. $\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x}$ si $x\to 0$.

86. $x\cdot\operatorname{ctg} x$ si $\to 0$.

## Para el § 87

*Hállense las derivadas*

87. $y=\operatorname{sen} nx$.

88. $y=\operatorname{sen} x^n$.

89. $y=\operatorname{sen}^n x$.

90. $y=\cos(ax)^m$.

91. $y=\cos^m ax$.

92. $y=\operatorname{ctg} ax$.

93. $y=\operatorname{tg}^n bx$.

94. $y=2x+\operatorname{sen} 2x$.

95. $y=\operatorname{tg}\varphi-\varphi$.

96. $y=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\frac{\varphi}{2}$.

97. $\rho=a\cdot\cos 2\theta$.

98. $\rho=k\sqrt{\cos 2\theta}$.

99. $x=r(t-\operatorname{sen} t)$.

100. $y=r(1-\cos t)$.

101. $y=2\cdot\operatorname{sen}3x+3\cos 2x$.

102. $y=A\cdot\operatorname{sen}(\omega t+a)$.

103. $s=\cos\frac{a}{t}$.

104. $s=\operatorname{sen}\frac{1}{t^2}$.

105. $y=\cos^2 2x$.

106. $y=2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$.

107. $y=a\cdot\operatorname{sen}^3\frac{1}{x}$.

108. $y=\operatorname{sen}(\cos x)$.

109. $y=\cos(\operatorname{sen}x)$.

110. $y=\operatorname{ctg}^3 x+3\operatorname{ctg}x$.

111. $y=\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+ +\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}x$.

112. $y=\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}- -2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x$.

113. $y=\sqrt{1+\operatorname{sen}2x}- -\sqrt{1-\operatorname{sen}2x}$.

114. $y=\frac{x}{\operatorname{sen}x}$.

115. $y=\operatorname{sen}x\times \times(\operatorname{sen}x+\cos x)$.

116. $y=\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}2x$.

117. $y=\operatorname{sen}^2 x\cdot(\cos^2 x+1)$.

118. $f(x)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$.

Hállese $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

119. $f(x)=\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}$.

Hállese $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

120. $f(x)=\frac{a\cdot\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$.

Hallese $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

121. $f(x)=\frac{1-\cos\frac{x}{3}}{\operatorname{sen}\frac{x}{3}}$.

Hállese $f'(\pi)$.

122. $y=ax\cdot\operatorname{tg}ax$.

123. $y=\sec ax$.

124. $y=\sec^n ax$.

## Para el § 88

125. Sabiendo que $\frac{1}{\lg e}=2{,}302585$ y $\frac{1}{\ln 10}=0{,}4342945$, hállense:

a) los logaritmos naturales de 2, 7 y 13 por medio de los logaritmos decimales de esos números;

b) $\ln 3=1{,}09861$; $\ln 5=1{,}60944$; $\ln 11=2{,}39790$. Hállense sus logaritmos decimales por medio de cálculos.

## Para los § 89—93

*Hállense las derivadas*

126. $y = \log_a (3 + x)$.

127. $y = \log_a (1 + x^2)$.

128. $y = \ln (a^2 - x^2)$.

129. $y = \ln (5 + 3x)$.

130. $y = \frac{1}{3} \ln (a^2 + x^2)$.

131. $y = 3 \ln (5 - x) + 2 \ln (4 + x)$.

132. $y = \ln x^3 + \ln^3 x$.

133. $y = \log_a \sqrt{x}$.

134. $y = \ln 3x + \ln \frac{3}{x}$.

135. $y = \ln \sqrt{x} + \sqrt{\ln x}$.

136. $y = \ln \ln x$.

137. $y = \ln \sqrt{x + 1}$.

138. $y = \ln \frac{a + x}{a - x}$.

139. $y = \ln \frac{x^n}{1 + x^n}$.

140. $y = \log_a x^2 + \log_a^2 x$.

141. $y = \log_a^3 2x$.

142. $y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$.

143. $y = \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$.

144. $y = \ln (x + \ln x)$.

145. $y = a \cdot \ln x^n$.

146. $y = a \cdot \ln^n x$.

147. $y = \ln \operatorname{sen} x + \ln \cos x$.

148. $y = \ln (1 + \cos x)$.

149. $y = \ln \operatorname{sen}^2 x$.

150. $y = \ln \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$.

151. $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

152. $y = \operatorname{sen} \ln x$.

153. $y = \operatorname{tg} \ln x$.

154. $y = 5^{x^2 - 2x}$.

155. $y = 2^{x^3 - 3x}$.

156. $y = \frac{1}{2} \cdot 3^{1 + x^2}$

157. $y = x^n + n^x$.

158. $y = e^x + e^{-x}$.

159. $y = e^{\frac{x}{2} + \frac{2}{x}}$.

160. $\rho = a^{\varphi}$.

161. $\rho = a^{\ln \varphi}$.

162. $y = a \cdot e^{\sqrt{x}}$.

163. $y = e \cdot a^{\frac{x}{e}}$.

164. $y = 5^{\operatorname{sen}^2 x}$.

165. $y = a^{\operatorname{tg} nx}$.

166. $y = e^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$.

167. $y = a^{e^x}$.

168. $y = e^{ax}$.

169. $y = (x - 3) e^{2x} - 4x \cdot e^x + 3$.

170. $y=x^2\cdot e^x\cdot\cos x$.

172. $y=x\cdot\ln x-x$.

174. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

176. $y=x\cdot\operatorname{ctg}x-$
$-\ln\operatorname{sen}x+\frac{x^2}{2}$.

178. $f(x)=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-$
$-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Hállese $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

180. $y=e^{ax}\times$
$\times(\operatorname{sen}ax-\cos ax)$.

182. $f(x)=\sqrt[3]{\ln x}$.
Hállese $f'(e)$

184. $y=\ln(\ln^2 x)$

171. $\frac{\ln x}{x}$.

173. $y=e^{x\cdot\ln x}$.

175. $y=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$.

177. $y=\frac{1}{2}x^2\ln\operatorname{tg}x+$
$+\operatorname{sen}x$.

179. $f(x)=e^{\pi x}\operatorname{sen}\pi x$.

Hállese $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

181. $f(x)=\ln\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$.

Hállese $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

183. $f(x)=x\sqrt[3]{\ln x}$.
Hállese $f'(e)$.

185. $f(x)=\frac{x}{e^{\sqrt{x}}}$.

Hállese $f'(0)$.

186. $y=\ln e^{7x^2-x+1}$.

187. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

188. $y=\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})$.

189. $y=\ln\frac{x}{\sqrt{x^2-1}-x}$.

190. $y=\operatorname{arc}\operatorname{sen}\frac{x}{a}$.

191. $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

192. $y=\operatorname{arc}\operatorname{cosec}x$.

193. $y=e^{\operatorname{arc}\operatorname{sen}x}$.

194. $y=\operatorname{arc}\operatorname{sen}(\cos x)$.

195. $y=\operatorname{arc}\cos(\operatorname{sen}x)$.

196. $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\ln x)$.

197. $y=\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\left(\ln\frac{1}{x}\right)$.

198. $y=\ln\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

199. $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\ln\operatorname{sen}x)$.

200. $y=\operatorname{arctg}\frac{a+x}{a-x}$.

201. $y=x\cdot\operatorname{arc}\operatorname{sen}x$.

202. $y = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} x.$

203. $y = \sqrt{a^2 - x^2} + a \cdot \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}.$

204. $y = x\sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arc\,sen} x.$

205. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}.$

206. $y = x^{\frac{1}{x}}.$

207. $y = (\operatorname{sen} x)^x.$

208. $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}.$

209. $y = x^{\ln x}.$

210. $y = x^{\frac{1}{\ln x}}.$

211. $y = x^{\operatorname{arc\,sen} x}.$

212. $y = e^{x^x}.$

213. $y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}.$

## Para el § 94

*Hállense las derivadas del orden indicado en la solución*

214. $y = \operatorname{arc\,sen} x.$ Solución: $y'' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

215. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$ Solución: $y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$

216. $y = \frac{a \cdot \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}.$ Solución: $y'' = \frac{a \cdot \operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2}.$

217. $y = \ln \operatorname{sen} x.$ Solución: $y''' = 2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec}^2 x.$

*Hállese la expresión general de las derivadas de orden enésimo*

218. $y = x^m.$ Solución: $y^{(n)} = m(m-1) \ldots [m-(n-1)]\, x^{m-n}.$

219. $y = \frac{1}{x+a}.$ S.: $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n!\,(x+a)^{-(n+1)}.$

220. $y = e^{a+bx}.$ S.: $y^{(n)} = b^n \cdot e^{a+bx}.$

221. $y = a^{bx}.$ S.: $y^{(n)} = a^{bx} \cdot b^n \cdot \ln^n a.$

222. $y = \cos x.$ S.: $y^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$

223. $y = \operatorname{sen} x$. S.: $y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

224. $y = \ln(ax+b)$. S.: $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$.

*Compruébense las igualdades*

225. Si $y = \operatorname{sen} x - x\cdot\cos x$, entonces $y'' + y = 2\operatorname{sen} x$.

226. Si $y = a\cdot\cos 2x + b\cdot\operatorname{sen} 2x$, entonces $y'' + 4y = 0$.

## § 12. Estudio de la función por medio de la derivada. Máximo y mínimo. La velocidad y la aceleración

Determínense los intervalos de la variación de $x$ en los que las funciones siguientes crecen y decrecen:

1. $y = x^2 - 4x + 6$.
2. $y = 2x^2 - 4x + 5$.
3. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
4. $y = x^3 - 3x^2 + 5$.
5. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
6. $y = x^4 - 4x^2 + 5$.

Determínense los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

7. $y = 2x^2 - 5x - 3$.
8. $y = 4 + 3x - x^2$.
9. $y = 4 - 3x - x^2$.
10. $y = x^3 - 27x$.
11. $y = x^2 - 2x^3$.
12. $y = x^3 + 3x - 7$.
13. $y = x^3 + 9x - 1$.
14. $y = x^3 + x^2 - 8x + 1$.
15. $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 2$.
16. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 15$.
17. $y = x^4 - 14x^2 + 24x - 3$.
18. $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
19. $y = (x-1)(x+1)^3$.
20. $y = x(x-1)^2\cdot(x+1)^3$.
21. $y = \frac{2x}{5} + \frac{5}{2x}$.
22. $y = 3x - \frac{27}{2-x}$.
23. $y = \frac{x}{x^2+1}$.
24. $y = \frac{1-x}{x^2-x+4}$.
25. $y = \frac{3x^2+5x+25}{2+x}$.
26. $y = \frac{x^2+3x-10}{x+5}$.
27. $y = \frac{1-x}{(1+x)^2}$.
28. $y = 2 + \sqrt[3]{(x-2)^2}$.
29. $y = 3 - \sqrt[3]{(x+4)^2}$.
30. $y = e^{-x^2}$.
31. $y = x^2\cdot e^{-x}$.
32. $y = \frac{x}{\ln x}$.

Hállense en los siguientes ejercicios el máximo y el mínimo de la función respecto a los valores más sencillos de los arcos.

33. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$. 34. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

35. $y = x + \operatorname{tg} x$. 36. $y = \operatorname{sen} x (1 + \cos x)$.

37. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

38. Divídase el número 10 en dos partes de tal modo que su producto alcance el valor máximo.

39. Divídase el número 10 en dos partes de tal modo que la suma del duplo de una de ellas y del cuadrado de la otra sea la mínima.

40. Hállese un número positivo tal que al sumarlo con su recíproco dé la suma mínima.

41. Hállese un número positivo que se diferencie de su cuadrado en la magnitud máxima.

42. De todos los rectángulos que tienen un perímetro dado $2p$, hállese el que tiene el área máxima.

43. De todos los rectángulos inscritos en un círculo de radio $R$, hállese el que tiene: a) el área máxima, b) el perímetro máximo.

44. De todos los triángulos isósceles inscritos en un círculo de radio $R$, hállese el que tiene: a) el área máxima, b) el perímetro máximo.

45. ¿Cuál de los triángulos rectángulos de hipotenusa $c$ tienen: a) la suma máxima de los catetos, b) el área máxima?

46. Una ventana tiene la forma de un rectángulo, con un semicírculo en lo alto, y su perímetro es $2p$. ¿Cuál debe ser la proporción entre las dimensiones de la ventana para que tenga el área máxima?

47. ¿A qué tiene que ser igual el radio de un círculo para que su sector, de perímetro $2a$, tenga el área máxima?

48. ¿Cuál tiene que ser la proporción entre el radio y la altura de un cilindro para que éste tenga el volumen dado $v$ y la superficie total sea la minima?

49. ¿De qué dimensiones es necesario elegir el radio y la altura de una tienda de campaña de forma cónica para que tenga el volumen dado $v$ y para que se gaste en ella el mínimo de tela?

50. Hállense los lados de un rectángulo de área máxima inscrito en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

51. Determínese la anchura de un rectángulo de área máxima inscrito en un segmento de altura $h$ de la parábola $y^2 = 2px$.

52. Una torre de perforación está en el campo a 9 *km* del punto más próximo de una carretera. Hace falta enviar a una persona desde la torre a un poblado situado a lo largo de la carretera a 15 *km* del punto mencionado (se supone que la carretera es recta). Si esa persona marcha en bicicleta a 8 *km* por hora a campo traviesa y a 10 *km* por hora por la carretera, ¿a qué punto de la carretera debe dirigirse por el campo para llegar en menos tiempo al poblado?

53. El barco $A$, que se encuentra a 75 millas al este del barco $B$, navega hacia el oeste a 12 millas por hora; el barco $B$ navega hacia el norte a 9 millas por hora. ¿Dentro de cuánto tiempo se encontrarán los barcos a la distancia mínima?

54. La luz de una lámpara de mesa puede bajarse y subirse. ¿A qué altura es necesario levantarla sobre un libro colocado en la mesa a $a$ centímetros del centro de la base de la lámpara para que a iluminación sea la máxima? Za iluminación de directamente proporcional al seno del ángulo de inclinación del rayo luminoso respecto al plano del libro e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del libro a la luz $\left(I = \frac{k \cdot \operatorname{sen} \varphi}{r^2}\right)$.

55. Supongamos que la magnitud $x$ ha sido medida $n$ veces con la misma escrupulosidad y que los resultados obtenidos son $l_1, l_2, l_3 \dots l_n$, que aunque muy poco, se diferencian entre sí. En cada medición, la diferencia $|x - l_k|$ es el error absoluto. Según la teoría de los errores, el valor más probable de la magnitud será aquél con el cual la suma de los cuadrados de los errores:

$$(x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + (x - l_3)^2 + \dots + (x - l_n)^2$$

alcanza el mínimo. Demuéstrese que el valor más probable es la media aritmética de los resultados de las mediciones:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n}$$

Investíguense las siguientes funciones y trácense sus gráficas:

56. $y = x^4$.  57. $y = x^3$.

58. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.  59. $y = x^2 - 2x^3$

60. $y=e^{-x^2}$.

61. $y=\frac{2x}{5}+\frac{5}{2x}$.

62. $y=\frac{3x^2+5x+25}{2+x}$.

63. $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$.

64. $y=x+2\sqrt{4-x}$.

65. La ley del movimiento rectilíneo de un punto es: $s = t^3 - 4t^2 + 10t + 1$. Determínese su velocidad y aceleración en los instantes: $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$.

¿En qué instante alcanza el punto la velocidad mínima y cuál es la magnitud de esta velocidad mínima?

66. La ley del movimiento rectilíneo de un punto es: $s = a \cdot e^{-kt}$. Determínese la velocidad y aceleración iniciales

67. La ley del movimiento rectilíneo de un punto es:

$$s=\frac{v_0}{2}(e^t-e^{-t}).$$

Verifíquese que la aceleración $\alpha=s$.

68. La ley del movimiento rectilíneo de un punto es:

$$s=a\cdot \operatorname{tg} \omega t.$$

Hállense la velocidad y la aceleración.

## § 13. La diferencial

1. Verifíquese que la diferencial de una función lineal es igual al incremento de la función.

2. Calcúlese el incremento y la diferencial de la función $y = x^3 - 2x + 5$ al variar el valor del argumento de $x = 2$ a $x + \Delta x = 2{,}01$.

3. Calcúlese el incremento y la diferencial de la función $y = \frac{2}{x-1}$ al variar el argumento de 3 a 3,001.

Hállense las diferenciales de las siguientes funciones:

4. $y=ax^3+bx^2-cx+d$.

5. $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

6. $y=\frac{x}{c}-\frac{c}{x}$.

7. $y=\sqrt[3]{1+x^2}$.

8. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ al variar $x$ de 3 a 3,2.

9. $y=\sqrt{\frac{4-x}{1+x}}$ al variar $x$ de 0 a 0,1.

10. $y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$.

11. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$.

12. $y = \ln x^2 + \ln \sqrt{x}$.

13. $y = x \cdot \ln x$.

14. $y = \ln \sqrt{1 + x^2}$.

15. $y = \operatorname{arcsen} \frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

16. $y = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$.

17. Al medir con una aproximación hasta de $\frac{1}{2} \cdot 0{,}1\ m$ se ha encontrado que el lado de un cuadrado es igual a $5{,}2\ m$. Determínense los errores máximos, absoluto y relativo, para el área del cuadrado.

18. Al medir con aproximación hasta de $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01\ m$ se ha encontrado que la arista de un cubo es igual a $1{,}05\ m$. Hállense los errores máximos, absoluto y relativo, para el volumen del cubo.

19. El período de oscilación de un péndulo se determina por medio de la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, en la que $l$ es la longitud del péndulo y $g$ es la aceleración de la fuerza de gravedad. Al medir $l$ se ha cometido el error $\Delta l$. Determínese el error relativo cometido al calcular $T$.

20. Verifíquese que al elevar a la enésima potencia el error relativo de la base aumenta $n$ veces, y al extraer la raíz de índice $n$, el error relativo del radicando queda dividido por $n$.

## § 14. La integral indefinid

### Para los § 113—116

1. $\int x^3\, dx$.

2. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

5. $\int (x^4 - 3x^3 + 5x^2)\, dx$.

6. $\int (1 - 2x)(1 + 3x)\, dx$.

7. $\int \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

8. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

9. $\int \frac{2x+3}{x}\, dx$.

10. $\int \frac{(x+2)^2}{x}\, dx$.

11. La velocidad de un cuerpo después de $t$ segundos de haber comenzado el movimiento es igual a $v_0+at$. Determínese el espacio recorrido en $t$ segundos.

12. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1; 1) si el coeficiente angular de la tangente en cualquiera de sus puntos es igual a $3x-1$.

## Para el § 117

13. $\int \left(\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx.$

14. $\int \frac{dx}{1-x}.$

15. $\int \frac{dx}{(x+1)^2}.$

16. $\int \frac{4x^3\,dx}{(x^4+a^4)^2}.$

17. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^5}.$

18. $\int \frac{ax\,dx}{a^2+x^2}$

19. $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{1+\sqrt{x}}.$

20. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

21. $\int \frac{\ln x\cdot dx}{x}.$

22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

23. $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x^2}.$

24. $\int e^{-4x}\cdot dx.$

25. $\int \frac{dx}{3\cdot e^x}.$

26. $\int 12a^{2x}\cdot\ln a\cdot dx.$

27. $\int 2^{4x^2-8}x\,dx.$

28. $\int \frac{x^3+7x^2-4x-3}{x-1}\,dx.$

29. $\int \frac{x^3-x^2+x+4}{x+1}\,dx.$

30. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

31. $\int x^2\sqrt{x^3-1}\cdot dx.$

32. $\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}\,dx.$

33. $\int \frac{(2x+a)\,dx}{\sqrt{x^2+ax+b}}.$

34. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\cdot dx.$

35. $\int \frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}\,dx.$

36. $\int 3\cdot e^x\cdot\sqrt{1+e^x}\cdot dx.$

37. $\int 2x\sqrt{2x-1}\,dx.$

38. $\int \frac{dx}{1+e^x}.$

39. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}.$

40. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}.$

41. $\int \frac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}\,dx.$

42. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx.$

43. $\int \frac{dx}{\operatorname{arcsen} x\cdot\sqrt{1-x^2}}.$

44. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\cdot dx}{1+x^2}.$

45. $\sqrt{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{dx}{x^2}.$

46. $\int \frac{dx}{\left(\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right)\cdot(x+x^3)}$

47. La velocidad $v$ de un cuerpo se determina por la ecuación $v=3t^2+2t$; la distancia recorrida durante el tiempo $t=2$ segundos es igual a 12 $m$. Hállese la ley del movimiento.

48. Hállese la ley del movimiento rectilíneo, sabiendo que en cada instante $t$ la aceleración $a=t^2$ $m/seg^2$ y que el cuerpo comenzó a moverse a la velocidad inicial $v=2$ metros por segundo.

49. Hállese la ecuación de la curva si en todos sus puntos la tangente forma con el eje $Ox$ un ángulo cuya tangente es igual a $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$, y la curva pasa por el punto $M\,(0;a)$.

## Para el § 118

50. $\int \operatorname{sen}(nx+a)\cdot dx.$

51. $\int \cos\frac{2x-3}{5}\,dx.$

52. $\int (\operatorname{sen} 2x-\cos 3x)\cdot dx.$

53. $\int \left(\cos ax+\operatorname{sen}\frac{x}{a}\right)dx.$

54. $\int \left(\cos\frac{x}{a}-\operatorname{sen} ax\right)\cdot dx.$

55. $\int (\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x)\,dx.$

56. $\int (\sec^2 5x-\operatorname{cosec}^2 5x)\,dx.$

57. $\boxed{\int \operatorname{tg} x\,dx=-\ln\cos x+C.}$

58. $\boxed{\int \operatorname{ctg} x\,dx=\ln\operatorname{sen} x+C.}$

59. $\int \operatorname{tg} x\cdot\sec x\,dx.$

60. $\int \operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{cosec} x\cdot dx$

61. $\sqrt{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}.$

62. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}\cdot\operatorname{sen}^2 x}.$

63. $\int \operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x\,dx.$

64. $\int \cos^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot dx.$

65. $\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}.$

66. $\int \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{\cos^3 ax}.$

67. $\int x^2\cdot\operatorname{sen}(2x^3+3)\cdot dx.$

68. $\int \cos\frac{3}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

69. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx$.

70. $\int \frac{\cos x\cdot dx}{1+2\operatorname{sen} x}$.

71. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{a-b\cdot\cos x}$

72. $\int \frac{1+\cos x}{(x+\operatorname{sen} x)^3}\,dx$.

73. $\int \frac{4dx}{1-\cos x}$.

74. $\int \frac{dx}{a(1+\cos x)}$.

75. $\int \operatorname{tg}^2 x\cdot dx$.

76. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

77. $\int e^{\cos x}\cdot\operatorname{sen} x\,dx$.

78. $\int \cos x\cdot a^{\operatorname{sen} x}\,dx$.

79. $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$.

80. $\int \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}\,dx$.

81. $\int \frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x\cdot dx}{\sqrt{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}}$.

82. $\int \frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x\cdot dx}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 x}}$.

83. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$.

84. $\int \sqrt{1+\operatorname{sen} x}\cdot dx$.

85. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}$.

86. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}$.

87. $\int \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\cos^3 x}\,dx$.

88. $\int \frac{\cos x+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$.

89. $\int \frac{\cos x+2\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x-2\cos x}\,dx$.

90. $\int \frac{x\cdot\cos x\cdot dx}{(x\cdot\operatorname{sen} x+\cos x-1)^m}$.

91. Hállese una función si su derivada es igual a $\operatorname{sen} x+\cos x$ y toma el valor 1, para $x=\pi$.

92. En cada instante la velocidad de un cuerpo es $v=\cos 2t$. Hállese la ley del movimiento sabiendo que al transcurrir el tiempo $t=\frac{\pi}{2}$ segundos, el cuerpo recorre la distancia $s$, igual a $6\,m$.

En los ejemplos siguientes, los valores de las letras son positivos. Las integrales encerradas en rectángulos pueden emplearse como fórmulas. Deben omitirse los ejercicios marcados con asteriscos si no se estudian las fórmulas (XI) y (XII).

Calcúlese:

93. $\int \frac{dx}{9+4x^2}$.

94. $\int \frac{dx}{4+9x^2}$.

95. $\int \frac{dx}{7+5x^2}$.

96. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

97*. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$.

98*. $\int \frac{dx}{7-5x^2}$.

99. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

100. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

101. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x^2}}$.

102. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$.

103*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 9}}$.

104*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 4}}$.

105*. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

106*. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+7x^2}}$.

107*. $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

108. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^6}}$.

109. $\int \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}$.

110. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

111. $\int \frac{\cos x \cdot dx}{a^2+\operatorname{sen}^2 x}$.

112*. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{a^2-\cos^2 x}$.

113. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$

114. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx.$

115. $\boxed{\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}}\,x + C}$

116*. $\boxed{\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}} + C}$

117. $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{b}{a}}\,x + C}$

118*. $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right) + C}$

119*. $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2-b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2-b}\right) + C}$

120. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

121. $\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\operatorname{sen}^2 x}$.

122*. $\int \frac{dx}{a\cos^2 x - b \cdot \operatorname{sen}^2 x}$.

## Para el § 119

123. $\int \cos^3 x\, dx.$

124. $\int \operatorname{sen}^5 x \cdot dx.$

125. $\int (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \times \times \operatorname{sen} x\, dx.$

126. $\int \operatorname{sen}^4 x \cdot \cos^3 x\, dx.$

127. $\int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen} 2x\, dx.$

128. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1 - \operatorname{sen} x}.$

129. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x \cdot dx}{1 + \cos x}.$

130. $\int \cos^2 (ax) \cdot dx$

131. $\int \operatorname{sen}^2 (ax)\, dx.$

132. $\int \operatorname{sen}^4 x \cdot dx.$

133. $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^4 x \cdot dx.$

134. $\int \cos^2 x \cdot \cos 2x \cdot dx$

135. $\int \operatorname{ctg}^3 x\, dx.$

136. $\int \operatorname{tg}^4 x \cdot dx.$

137. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx.$

## Para el § 121

138. $\int x \ln x\, dx.$

139. $\int x e^{-x}\, dx.$

140. $\int \frac{x}{e^{2x}}\, dx.$

141. $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$

142. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx.$

143. $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx.$

144. $\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx.$

145. $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x}.$

146. $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}.$

147. $\int x^3 \cdot e^{2x}\, dx.$

148. $\int x^{-2} \ln x\, dx.$

149. $\int x^3 (\ln x)^2\, dx.$

150. $\int x^2 \arcsin x \, dx$.

151. $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx$.

152. $\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx$.

153. $\int \sqrt{x^2-a^2} \, dx$.

I n d i c a c i ó n.

$$\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^2 x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

se toma mediante la sustitución

$1-x^2=t, \quad x^2=1-t.$

Demostrar las fórmulas de "decreciencia de potencia :

154. $\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx.$

I n d i c a c i ó n.

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x \, dx;$$
$$u = \operatorname{sen}^{n-1} x; \; dv = \operatorname{sen} x \, dx;$$
$$du = (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x \, dx; \; v = -\cos x;$$
$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x.$$

155. $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$

## § 15. La integral definida

Calcúlese:

1. $\int_0^3 5x^2 \, dx$.

2. $\int_{-1}^{+2} (2x+3x^2+4x^3) \, dx$.

3. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$.

4. $\int_1^4 \frac{32 \, dx}{x^3}$.

5. $\int\limits_{1}^{2} \sqrt{x}\, dx.$ 6. $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

7. $\int\limits_{1}^{3} \sqrt{2x-2}\, dx.$ 8. $\int\limits_{1}^{3} \frac{x\, dx}{1+x^2}.$

9. $\int\limits_{0}^{1} e^x\, dx.$ 10. $\int\limits_{-1}^{+1} a^x\, dx.$

11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}.$ 12. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

13. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen} 3x\, dx.$ 14. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\, dx.$

15. $\int\limits_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^2 x\, dx.$

16. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, suponiendo $x = t^2$.

17. $\int\limits_{0}^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1}\, dx$, suponiendo $e^x - 1 = t^2$

18. $\int\limits_{0}^{1} x^3 e^{2x}\, dx^*.$

19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{arctg} x\, dx^*.$

20. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x\, dx.$

---

* Se toma la integral por partes, § 121.

21. La velocidad de un cuerpo en un movimiento rectilíneo se expresa por medio de la fórmula $v = 2 + t$. Hállese la distancia recorrida entre los instantes $t = 2$ y $t = 5$.

22. Un cuerpo ha sido arrojado hacia abajo verticalmente, con una velocidad inicial de 10 metros por segundo. Sabiendo que $\frac{dv}{dt} = g$, hállese la distancia que ha recorrido el cuerpo en $t$ segundos.

23. Hállese la integral definida de la función $4x^3$, si su función primitiva es igual a cero, para $x = 2$.

24. Calcúlese la integral definida de la función $\frac{x^2}{1+x^3}$, si su función primitiva es igual a cero, para $x = 1$.

25. Calcúlese la integral definida de la función $\operatorname{tg} x$, si su función primitiva es igual a cero para $x = 0$.

26. Calcúlese la integral definida de la función $\operatorname{sen} 2x$, si su función primitiva es igual a cero para $x = \frac{\pi}{4}$.

27. Calcúlese el área de una semionda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} 2x$.

28. Calcúlese el área limitada por la hipérbola equilátera $xy = 1$, el eje $Ox$ y las rectas $x = 1$ y $x = a$ $(a > 1)$.

Calcúlense por integración las áreas limitadas por las siguientes líneas:

29. $y = 4x,\ y = 0,\ x = 3$.

30. $y = 2x + 1,\ y = 0,\ x = 3$.

31. $2y - 3x - 5 = 0,$ $y = 0,\ x = 1,\ x = 3$.

32. $x + 2y + 8 = 0,$ $y = 0,\ x = -4$.

33. $y = 2x - x^2,\ y = 0$.

34. $y = x^2 - x,\ y = 0$.

35. $y = x^3,\ y = 2x$.

36. $y^2 = 4x,\ y^2 = x^3$.

37. $y^2 = 4(x + 1),$ $y = x + 1$.

38. $y^2 = 2(x + 4),$ $y = x + 4$.

39. $y = 2x - x^2,\ y = -x$.

40. $y^3 = x,\ y = -2,\ x = 8$.

41. $4x^2 - 9y + 18 = 0$ y $2x^2 - 9y + 36 = 0$.

42. $5x^2 - 60x + 4y + 160 = 0$ $x^2 - 12x + 2y + 32 = 0$.

43. $x^2 + y^2 = 8$ y $y^2 = 2x$.

y 44. $x^2 + y^2 = 16$ y $y^2 = 4(x + 1)$.

45. Trácese la gráfica de la función potencial $y = x^m$, considerando a $m$ como número entero positivo, y de un

punto arbitrario $A$ $(x, y)$ de la curva obtenida bájense las perpendiculares $AB$ y $AC$ a los ejes de coordenadas. Demuéstrese que el área limitada por la curva $y = x^m$, el eje $Ox$ y la recta $AB$ constituye la $\frac{1}{m+1}$ parte del área del rectángulo $OCAB$.

46. Demuéstrese que el área limitada por la curva continua $x = \varphi(y)$, el eje $Ox$ y las rectas $y = a$, $y = b$ es igual a $\int_a^b x dy = \int_a^b \varphi(y) \cdot dy$.

47. Verifíquese que el área limitada por el arco $AB$ de la hipérbola equilátera $xy = k$, el eje $Ox$ y las ordenadas de los puntos $A$ y $B$ es igual al área limitada por este mismo arco $AB$, el eje $Oy$ y las abscisas de los puntos $A$ y $B$ $\left(\text{cada una de ellas es igual a } k \cdot \ln \frac{b}{a}\right)$.

48. Calcúlese el área del segmento de la parábola $x^2 - 12y = 0$, *que es cortado por la recta que pasa por el* origen de coordenadas, y por el punto de la parábola, cuya abscisa es igual a 6.

49. Calcúlese el área del segmento de la parábola $4y - x^2 = 0$, que corta una cuerda que une los puntos de la parábola cuyas abscisas son 2 y 4.

50. La ecuación de una curva es $y = x(3 - x)^2$. Calcúlese el área limitada por esta curva, el eje $Ox$ y las ordenadas de los puntos máximo y mínimo.

51. Hállese el volumen de un paraboloide de revolución engendrado por la revolución alrededor del eje $Ox$ del segmento de la parábola $y^2 = x$ de altura $x$.

52. Hállese el volumen de un esferoide engendrado por la revolución de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor de su eje menor $(a > b)$.

53. Calcúlese el volumen engendrado por la revolución de una onda de la sinusoide $y = \text{sen } x$.

54. Calcúlese de volumen engendrado al girar alrededor del eje $Ox$ la superficie limitada por las parábolas $y^2 = 4x$ e $y^2 = x^3$.

55. Calcúlese el volumen engendrado al girar alrededor del eje $Ox$ la superficie limitada por las parábolas $y^2 = 8x$ e $y = x^2$.

56. A la parábola $y^2 = 12x$ en el punto cuya abscisa es 6 se ha trazado una tangente. Calcúlese el volumen engendrado al girar alrededor del eje $Ox$ la superficie limitada por la tangente trazada, el eje $Ox$ y la parábola.

57. A la parábola $y^2 = 2(x - 1)$ en el punto cuya abscisa es igual a 3 se ha trazado una tangente. Calcúlese el volumen engentrado por la revolución alrededor del eje $Ox$ del área limitada por la tangente trazada, el eje $Ox$ y la parábola.

58. Una parte de la elipse $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$, situada entre las perpendiculares al eje $Ox$, trazadas por los focos, gira alrededor del eje $Ox$. Determínese el volumen del la barrica obtenida.

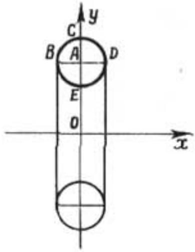


Fig. 177

59. Demúestrese que el volumen del anillo obtenido al girar un círculo alrededor del eje $Ox$, que no lo intersecciona (fig. 177), es igual al producto del área del círculo de la sección del anillo por la longitud de la circunferencia media del anillo.

Indicación. Designando el radio del círculo por medio de la letra $r$ y las coordenadas del centro $A$ con $(0, b)$, obtenemos la ecuación del círculo:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

De la ecuación obtenemos dos valores de $y$:

$$y - b = \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$y_1 = b + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y_2 = b - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

$y_1$ es el valor de la ordenada de los puntos de la semicircunferencia $BCD$, e $y_2$, el valor de la ordenada de los puntos de la semicircunferencia $BED$. El volumen del anillo se calcula por medio de la fórmula (XXII).

60. Hállese el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución de la rama de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje $Ox$, desde el vértice $x = a$ hasta la sección $x = x$ y alrededor del eje $Oy$ desde la sección $y = 0$ hasta la sección $y = y$.

61. Calcúlese la presión que soporta una compuerta rectangular de esclusa de 20 metros de ancha y 5 metros de profundidad de inmersión.

62. Calcúlese la presión ejercida sobre la superficie de un triángulo de 8 metros de base y 6 metros de altura, sumergido en el agua de tal manera que su base esté en la superficie del agua, y la altura se encuentra dirigida hacia abajo verticalmente.

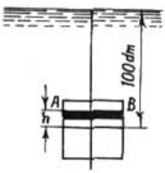


Fig. 178

63. Una presa vertical tiene la forma de un trapecio, cuya base superior es 50 metros, la inferior, 20 metros, y la altura, 10 metros. ¿Cuál es la presión que soporta la presa si su base superior está en la superficie del agua?

64. Determínese la presión que soporta 1 $dm^2$ de la pared vertical de la borda de una embarcación si el centro del cuadrado está debajo del agua, a 10 metros de profundidad.

Indicación (fig. 178). El área del rectángulo $AB$ es $ds = 1\ dm \cdot \Delta h\ dm$ y se encuentra situada desde la superficie libre del agua a la profundidad de $(100 - h)\ dm$. Aquí $h$ es un número positivo si $AB$ está encima del centro $O$, y es negativo si está debajo del centro $O$.

65. El extremo de un tubo redondo sumergido en el agua horizontalmente puede ser cerrado con una tapa. Determínese la presión que soporta esta tapa si su diámetro es igual a 6 $dm$ y su centro está a una profundidad del agua de 15 metros.

66. El movimiento rectilíneo de un cuerpo en cierto medio ambiente está sujeto a la ley $s = t^2$, donde $s$ es la longitud del espacio recorrido durante el tiempo $t$. La resistencia del medio ambiente es proporcional al cuadrado de la velocidad del movimiento. Determínese el trabajo que efectúa la resistencia del medio ambiente al desplazarse el cuerpo desde $s = 0$ hasta $s = a$.

67. Según la ley de Hoocke, la fuerza necesaria para dilatar una varilla metálica desde la longitud $l_0$ hasta la longitud $l_0 + x$ es igual a $\frac{kx}{l_0}$, donde $k$ es un número constante que depende de las propiedades del metal. Calcúlese el trabajo invertido para dilatar la varilla desde la longitud $l_0$ hasta la longitud $l_1$.

68. La contracción de un muelle espiral es proporcional a la fuerza empleada. Calcúlese el trabajo necesario para contraer un muelle en 5 centímetros, teniendo en cuenta que para contraerlo en un centímentro es necesaria la fuerza de 2 *kg*.

69. La fuerza necesaria para dilatar un muelle metálico es proporcional a su dilatación. Calcúlese el trabajo invertido al dilatar un muelle en 5 centímetros, si para dilatarlo en un centímetro es necesaria la fuerza de 10 *kg*.

70. Calcúlese el trabajo necesario para extraer el agua de una cisterna cilíndrica cuyo radio tiene $r$ metros y su profundidad $h$ metros.

71. Calcúlese el trabajo necesario para extraer el agua que llena una caldera semiesférica de radio $r = 0{,}6$ metros.

72. Según la ley de Newton, la fuerza de gravitación es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Un cuerpo que se encuentra en reposo atrae un punto material que se desplaza por una línea recta desde la distancia $r_1$ hasta $r_2$ a partir del centro del cuerpo.

Calcúlese el trabajo que realiza la fuerza de gravitación.

**Referente al § 128. Valor medio de una función.**

Calcular los valores medios de las funciones siguientes:

73. $f(x) = x^2$ en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 3$.

74. $f(x) = a + \cos x$ en el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

75. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ en el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

76. $f(x) = \ln x$ en el segmento $1 \leqslant x \leqslant e$*.

## § 16. Ecuaciones diferenciales

### Para los §§ 136—141.

Demostrar que para las ecuaciones diferenciales dadas, las funciones $y$ de $x$ dadas son sus soluciones:

1. $\frac{dy}{dx} = (a - y) \operatorname{tg} x; \quad y = a - 5 \cos x.$

2. $y' \operatorname{tg} x = y; \quad y = C \operatorname{sen} x.$

3. $y'' - 2y' + y = 0; \quad y_1 = e^x, \ y_2 = xe^x.$

---

* Se integra por partes.

Hallar la ecuación de la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial dada, y construir parte de ellas:

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$. 5. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. 6. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$.

Hallar las integrales generales de las ecuaciones diferenciales dadas, y las integrales particulares que satisfacen la condición $y=1$ si $x=1$.

7. $x^2\,dy-y^2\,dx=0$. 8. $x\frac{dy}{dx}-1=y^2$.

9. $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\ln x$.

Indicación. $\int \ln x\,dx$ se integra por partes.

10. $\frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{\sqrt{1-y^2}}$.

Resolver las siguientes ecuaciones:

11. $\operatorname{tg} x \operatorname{sen}^2 y\,dx+\cos^2 x \operatorname{ctg} y\,dy=0$.

12. $(xy^2+x)\,dx+(x^2y+y)\,dy=0$.

13. $y'=e^{x-y}$. 14. $y'-e^{-y}+1=0$.

Resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas siguientes:

15. $\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y)\,y}{x^2}$. 16. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}$.

17. $y\,dx+(x+y)\,dy=0$. 18. $y\,dx=(x+y)\,dy$.

19. $(x^2-y^2)\,dx+2xy\,dy=0$.

20. Hallar la solución particular de la ecuación $\frac{ds}{dt}=\frac{s}{t}+1$, que satisface la condición $s=\ln 2$ si $t=1$.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

21. $\frac{dy}{dx}-2y=e^{3x}$. 22. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=\frac{3}{x^2}$.

23. $\frac{dy}{dx}+\frac{ny}{x}=\frac{m}{x^n}$. 24. $\frac{ds}{dt}\operatorname{sen} t+s\cos t=1$.

25. Hallar la ecuación de una curva que pasa por el punto (1; 1), si el coeficiente angular de la tangente en cada punto es negativo e igual en valor absoluto al cuadrado de la ordenada.

26. Hallar la ecuación de una curva que pasa por el punto (1; 1), si su tangente en cada punto divide a la abscisa de dicho punto en una relación 2: 1, contando a partir del origen de coordenadas.

Indicación. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (§ 5, fórmula VI).

27. Hallar la ecuación de una familia de curvas, si el coeficiente angular de la normal en cada punto de la curva con $x > 0$ es negativo e igual en valor absoluto a la mitad del cociente entre la abscisa y la ordenada del punto de tangencia.

28. Hallar la ecuación de una familia de curvas, si la tangente en cada punto determina en el eje de las abscisas un segmento igual al doble de la ordenada del punto de tangencia.

Hallar la curva que pasa por el punto (4; 1).

29. Hallar la ecuación de una curva, si la superficie delimitada por los ejes coordenadas, dicha curva y la ordenada de un punto de ésta con $x > 0$, es igual a 1/3 de la superficie del rectángulo construido sobre las coordenadas de dicho punto.

30. Hallar la ecuación de una curva, si la superficie delimitada por los ejes coordenadas, dicha curva y la ordenada $x > 0$, es igual al cociente entre el cubo de la ordenada y la abscisa $x$.

31. En una columna vertical de aire la presión en cada nivel se determina por la presión de las capas superiores. Hallar la dependencia entre la presión y la altura del nivel, sabiendo que en cualquier nivel la densidad del gas es proporcional a su presión (ley de Boyle-Mariotte), si en el nivel del mar la presión es igual a 1 kg por cm², y a un nivel de 500 m sobre el nivel del mar es 0,92 kg por cm².

Indicación. La densidad del aire a un nivel $h$ es la derivada de la presión $p$ respecto a $h$. La ecuación diferencial es $\frac{dp}{dh} = -kp$. El coeficiente de proporcionalidad $k$ y la constante arbitraria $C$ se determinan de las condiciones: 1) $p_{h=1} = 1$, 2) $p_{h=500} = 0{,}92$.

32. En un recipiente hay 100 $l$ de salmuera, que contienen 10 kg de sal diluida. En el recipiente entra agua con una velocidad de 3 $l$ por minuto, y se mezcla en él inme-

diatamente; al mismo tiempo del recipiente sale mezcla con velocidad de 2 $l$ por minuto. ¿Cuánta agua contendrá el recipiente luego del 1 hora?

### Para los §§ 142. 143.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden:

33. $\frac{d^2y}{dx^2} = x + a.$ 34. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{a^2}{s^2}$ .

35. $\frac{d^2y}{dx^2} = y.$ 36. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0.$

37. $y'' + 2y' + 5y = 0.$

Hallar las soluciones particulares que satisfacen las condiciones dadas:

38. $3y'' + 2y' - y = 0.$ $y = 2,$ $y' = 6$ si $x = 0.$

39. $y'' + 2y' = 0;$ $y = 1,$ $y' = 0$ si $x = 0.$

40. $y'' + 4y = 0;$ $y = 2,$ $y' = 2$ si $x = \frac{\pi}{4}$ .

41. Hallar la curva integral de la ecuación $y'' + y = 0$, tangente en el origen de coordenadas (0; 0) a la recta $y = x$.

42. El movimiento de un punto material está dado por la ecuación diferencial $\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$. Hallar la expresión de $s$ en función de $t$, si $\frac{ds}{dt} = A\omega$ para $t = 0$.

## § 17. Derivación de funciones de varias variables

Calcúlense las derivadas parciales, las diferenciales parciales y la diferencial total de las siguientes funciones:

1. $u = x \cdot y^2 \cdot z^3.$ 2. $u = \frac{y}{x}$ .

3. $u = (x + a)(y + b).$ 4. $u = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ .

5. $u = (x^2 + y^2)^n.$ 6. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

7. $u = \ln(x^2 + y^2).$ 8. $u = \ln(x^2 + xy + y^2).$

9. $u=\ln\frac{x+y}{x-y}$.

10. $u=\operatorname{sen}(x+y)$.

11. $u=\operatorname{sen}\frac{y}{x}$.

12. $u=\operatorname{sen}\frac{x+y}{z}$.

13. $u=\ln\operatorname{sen}\frac{x}{y}$.

14. $u=\ln\cos\frac{y}{x}$.

15. $u=e^{xy}$.

16. $u=e^{\frac{y}{x}}+e^{\frac{z}{x}}$.

17. $u=y^x$.

18. $u=x^{\operatorname{sen} y}$.

19. $u=\operatorname{arctg}(xy)$.

20. $u=\operatorname{arcsen}\frac{x}{y}$.

21. $u=\frac{xy}{x+z}$.

22. $u=xy\operatorname{sen}(x+y)$.

23. $u=(xy)^z$.

24. $u=z^{xy}$.

25. Un cateto de un triángulo rectángulo aumenta de 6 *cm* a 6,2 *cm*, y el otro disminuye de 8 *cm* a 7,7 *cm*. ¿Que variación (aproximada) experimenta la hipotenusa en este caso?

26. El volumen de un cono truncado se expresa por la fórmula $v=\frac{1}{3}\pi h\,(R^2+r^2+Rr)$, en la que $h$ es la altura, y $R$ y $r$ son los radios de las bases del cono. Suponiendo $R=30\ dm$, $r=20\ dm$ y $h=40\ dm$, hállese aproximadamente la variación del volumen del cono al aumentar $R$ en 0,3 $dm$, $r$ en 0,4 $dm$ y $h$ en 0.2 $dm$. Determínese cuál es el porcentaje de esta variación respecto al volumen inicial.

27. La aceleración $g$ se determina por medio de la fórmula $s=\frac{1}{2}gt^2$. Determínese el error relativo al calcular $g$, si al medir $s$ y $t$ se han cometido pequeños errores.

28. El área de un triángulo se determina por medio de la fórmula $s=\frac{1}{2}ab\cdot\operatorname{sen}C$. Determínese el error relativo al calcular $s$ si al medir $a$, $b$ y $C$ se han cometido pequeños errores.

Hállese la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas:

29. $x^4+x^2y^2+y^4=0$.

30. $x^2+y^2=a(x^2-y^2)$.

31. $\operatorname{sen}x=\cos y$.

32. $\operatorname{sen}x=x\cdot\operatorname{sen}y$.

33. $y = 1 + x \cdot e^y$.  34. $x + \operatorname{arctg} y - y = 0$.

35. $x = y - a \cdot \operatorname{sen} y$.  Hállese $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$.

36. Hállese la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en el punto $(x_1, y_1)$.

37. Hállese la ecuación de la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $(x_1, y_1)$.

38. Hállese la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 2px$ en el punto $(x_1, y_1)$.

39. En el punto de intersección de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ y la hipérbola $x^2 = \frac{y^2}{3}$, situado en el primer cuadrante, se han trazado las tangentes a la elipse y a la hipérbola. Demuéstrese que esas tangentes son perpendiculares entre sí.

40. Hállense las ecuaciones de las tangentes al círculo $y^2 = 2ax - x^2$ en los puntos cuya abscisa es $a$.

## § 18. Desarrollo de funciones en series de potencias

Desarróllense en potencias de $x$:

1. $f(x) = a^x$, $(a > 0)$.  2. $f(x) = \cos x$.

3. $f(x) = \ln(1 - x)$.  4. $f(x) = \operatorname{sen}(a + x)$.

5. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.  6. $f(x) = \cos^2 x$.

7. Desarróllese $e^x$ en potencias de la diferencia $x - 2$.

8. Desarróllese $\ln x$ en potencias de $x - 1$.

9. Desarróllese $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ en potencias de $x - 1$.

10. Desarróllese $f(x) = (a + x)^m$ en potencias de $a$.

Aplicando los desarrollos conocidos, hállense los desarrollos de las funciones:

11. $f(x) = e^{-x^2}$.  12. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

13. Calcúlese $\sqrt[5]{1,2}$.

14. Desarrollando $\operatorname{tg} x$ en potencias de $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, calcúlese tg 46°.

# § 19. Respuestas e indicaciones

## § 1

**2.** a) (5; 2), b) (—5; —2). **3.** a) ($-a$; $-b$), b) ($a$; $b$). **4.** a) 5 unidades de longitud, b) 3 unidades de longitud. **6. Indicación.** $AC^2 > AB^2 + BC^2$. **7.** Son posibles dos puntos: (—7; 4) y (9; 4). **8.** (0; 5) y (0; —3) **9.** (0; —3,4). **10.** (4; 0). **11.** (8; 0) o $(-1; 3\sqrt{3})$. **12.** (4; —3). **13.** (1; —6). **14.** $\left(3; -1\frac{1}{2}\right)$, $\left(2\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -4\right)$. **15.** $\left(0; 1\frac{2}{3}\right)$ y $\left(2; \frac{1}{3}\right)$. **16.** (5,4; 2,8), (7,8; 3,6) (10,2; 4,4) y (12,6; 5,2). **17.** a) (—2; 0), b) (0; 3), c) (—2; —5), d) (3; —1). **18.** (11; —5). **19.** (—12; 11). **20.** $\frac{3}{2}\sqrt{17}$. **21.** (—2; 1). **Indicación.** El centro de gravedad de un triángulo es el punto que divide la mediana según la razón 2 : 1, considerado desde el vértice. **22.** $\left(2\frac{2}{3}; 5\frac{2}{3}\right)$. **Indicación.** La bisectriz divide al lado opuesto en partes proporcionales a los lados contiguos. **23.** (3; 7), (—4; 0) y (1; —4). **24.** (2; —3). **Indicación.** Las diagonales de un paralelogramo se dividen en el punto de intersección por la mitad; el vértice buscado se determina como el extremo de un segmento del que se conoce el origen y su punto medio. **25.** (1; —3) y (—4; 0). **26.** $x = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3}$, $y = \frac{P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3}{P_1 + P_2 + P_3}$. **Indicación.** Es necesario en primer lugar determinar las coordenadas del punto de aplicación de la resultante de las dos fuerzas $P_1$ y $P_2$, y después determinar las coordenadas del punto de aplicación de la resultante de $P_1 + P_2 + P_3$. Es sabido que la resultante de dos fuerzas $P_1$ y $P_2$ es igual a su suma $P_1 + P_2$ y está aplicada en el punto $M$, situado en el segmento $M_1M_2$, al cual lo divide en dos partes en razón inversamente proporcional a las fuerzas. **27.** La fórmula no da valores determinados para las coordenadas del punto de aplicación de la resultante, puesto que $P_1 + P_2 + P_3 = 6 + (-18) + 12 = 0$, es decir, la resultante es nula, y una resultante igual a cero puede ser aplicada en cualquier punto del plano. **28.** a) 45°, b) 135°, c) 0°. **31.** En ambos casos son iguales por su magnitud absoluta y de signo contrario.

## § 2

**1.** a) $6x + 8y + 7 = 0$; b) $2x - 5y = 0$. **2.** a) $y = 2$, b) $x = 2\frac{1}{2}$. **3.** a) (3; 7), b) (5; 13). **4.** La primera recta pasa por los puntos $A$, $C$ y $E$, la segunda pasa por los puntos $A$, $B$ y $D$. El punto $A$ es el punto de intersección de las rectas dadas. Las rectas no pasan por el origen de los ejes. 5. a) $y = -\frac{5}{3}x + 5$; b) $y = \frac{4}{7}x + 4$.

Indicación. Se halla $k$ por medio de la fórmula (VI) § 5. **6.** a) $y = x+3$, b) $y=3-x$, c) $y-3$. **7.** a) $y=\frac{x}{\sqrt{3}}-5$; b) $y=-(x\sqrt{3}+5)$, c) $y=-5$. **8.** a) $y=\pm x$, b) 1) $y=-3$, $x=2$; 2) $y=-1$, $x=-5$; 3) $y=0$, $x=-3$; 4) $y=4$, $x=0$. **9.** $y=0{,}3x+2{,}7$. **10.** $y=-\frac{3}{4}x$. **11.** Una recta cuyo coeficiente angular es igual al valor de la velocidad $v$, y la ordenada inicial es igual al valor $s_0$. **12.** 18 metros por minuto. **13.** $y=\frac{P}{2}+\frac{p}{l}\cdot x$. Indicación. El peso de la viga $P$ se distribuye uniformemente en los dos apoyos; el peso de la persona $p$ se distribuye en los apoyos en razón inversamente proporcional a las distancias hasta estos apoyos. **14.** a) $k=-\frac{5}{12}$, $\varphi=157°23'$; b) $k=\frac{3}{4}$, $\varphi=36°52'$; c) $k=\frac{1}{2}$, $\varphi=26°31'$; d) $k=-\frac{3}{4}$, $\varphi=143°08'$. **15.** a) $k=1$, $b=2$; b) $k=-2$, $b=1$; c) $k=2$, $b=-\frac{1}{2}$; d) $k=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{3}$; e) $k=\frac{1}{5}$, $b=0$; f) $k=0$, $b=-\frac{3}{2}$. **16.** a) 4 y $-6$, b) $\frac{2}{3}$ y 2. **19.** a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; b) $\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{3}=1$; c) $\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1$; d) $\frac{x}{-\frac{5}{3}}+\frac{y}{\frac{5}{2}}=1$. **20.** a) $\left(\frac{1}{3};\ 3\frac{2}{3}\right)$; b) $(-1;\ +1)$; c) las rectas son paralelas. **21.** $3x-4y\mp 12=0$ y $3x+4y\mp 12=0$. **22.** $x-y=0$ y $x+y+a=0$. **23.** $x+y-5=0$. **24.** $5x+3y-30=0$. **25.** a) $x-y-1=0$, b) $x+y-5=0$. **26.** $x\sqrt{3}\mp y\pm 2-6\sqrt{3}=0$. **27.** $(6;\ 0)$, $y=-\frac{2}{3}x+4$. **28.** a) $x+3y-5=0$; b) $2x-y+5=0$; c) $x=2$; d) $y=-3$. **29.** a) Están situadas, b) no están situadas. **30.** a) 11, b) 3. **31.** a) 45°, b) 60°; c) 78°41′, d) 0, e) 90°. **32.** a) $-2$; b) $\sqrt{3}$. c) 0. **33.** a) 26°34′; 18°26′ y 135°; b) 45°, 90° y 45°. **34.** a) las dos primeras son paralelas entre sí y perpendiculares a la tercera; b) la primera y tercera son paralelas entre sí y perpendiculares a la segunda. **35.** a) $y=-2x$; b) $y=3x-15$; c) $y=-6$; d) $x=3$. **36.** a) $x+y=0$; b) $x-2y=0$; c) $y=0$; d) $x=0$. **37.** $y=2x$. **38.** $y=-2x$. **39.** $x+2y-10=0$ y $2x+4y+5=0$. **40.** $9x-y-16=0$ y $x+9y-20=0$. **41.** $x=3$ e $y=5$. **42.** $2x+y-7=0$; $x-2y-6=0$. **43.** $3x+4y-18=0$. **44.** $7x+35y-55=0$. **45.** a) $4x-y-6=0$; b) $x+4y+7=0$; c) $3x-5y-13=0$ y $5x+3y+1=0$. **46.** $AB$ en razón $4:1$, $CD$ en razón $2:3$. **47.** $4x-3y-17=0$. **48.** $(2;\ -3)$. **49.** a) 2; b) 3. **50.** a) 0; b) 5,2. **51.** (10, 21). **52.** 0,5. **53.** $3x-4y+5=0$ y $3x-4y-15=0$. Indicación. El problema tiene dos soluciones, puesto que la recta situada a dos unidades de escala de la recta dada puede trazarse por una y por la otra parte de la recta dada. Por eso, si la primera distancia entre la recta dada y la buscada es igual $a+2$, la otra debe considerarse igual $a-2$. **54.** $\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. **55.** $x-7y-2=0$.

**56.** $M$ (1; 0). Indicación. La línea quebrada $AMB$ tiene la longitud mínima si el rayo del punto $A$ pasa por el punto $M$ hasta el punto $B$ de tal modo que el ángulo de incidencia del rayo $AM$ al eje $Ox$ es igual al ángulo de reflexión del mismo. **57.** 45°. **58.** $\frac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2}-$
$-\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1}=0$. Indicación. Convendremos en que $x$ e $y$ son las coordenadas del punto de intersección, es decir, los valores que satisfacen a cada una de las ecuaciones dadas. Ambas ecuaciones representan una misma recta si sus coeficientes son proporcionales (§ 13, 2°), o sea, si $A_2x+B_2y+C_2=0$ y $\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0$. De aquí que la ecuación de cualquier recta que pase por el punto de intersección de las rectas dadas puede escribirse así: $A_2x+B_2y+C_2-$ $-\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0$. $\lambda$ se determina por la condición de que la recta pasa por el punto $M_0(x_0, y_0)$. **59.** $x+y-11=0$ y $3x-y-$ $-16=0$. **60.** a) $3x+y-7=0$, $3x+y-17=0$, $x-3y+1=0$ y $x-$ $-3y+11=0$; b) $7x-y-26=0$; $x+7y-18=0$; $7x-y+24=0$, $x+7y-68=0$. **61.** (4; $-6$) o (2,4; $-6$,8). **62.** El centro del círculo $O$ (4; 5).

## § 3

**1.** a) $x^2+y^2-6x+10y+18=0$; b) $x^2+y^2+4x-2y=0$; c) $x^2+$ $+y^2+6x-32=0$. **2.** $x^2+y^2+3x-4y=0$. **3.** $3x^2+3y^2-16x-7=0$. **4.** $x^2+y^2-10y=0$. **5.** $x^2+y^2-4x-6y+4=0$. **6.** $x^2+y^2-2x+2y+$ $+1=0$; $x^2+y^2-10x+10y+25=0$. **7.** $(x+1)^2+y^2=16$ y $(x-3)^2+$ $+(y-4)^2+16$. **8.** $(x-1)^2+(y+6)^2=25$ y $(x-8)^2+(y-1)^2=25$. **9.** a) $x^2+y^2-8x+6y=0$; b) no es posible, los puntos están situados en una misma recta. **10.** $(x-4)^2+(y+3)^2=25$. **11.** a) (0; 3). $r=3$; b) ($-4$; 0), $r=5$; c) (5; $-2$), $r=4$; d) $\left(1\frac{1}{2}; 2\right)$, $r=\frac{3\sqrt{7}}{2}$; e) $\left(1\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$, $r=\frac{3\sqrt{10}}{4}$; f) una circunferencia de radio nulo con el punto real (6; $-1$), g) una circunferencia imaginaria. **12.** $x^2+y^2+$ $+6x+5=0$. **13.** $x^2+y^2+3x-4y-0$. **14.** $x^2+y^2=49$. **15.** a) La circunferencia es tangente al eje de las abscisas en el punto (3; 0) y corta el eje de coordenadas en los puntos: (0; 9) y (0; 1); b) la circunferencia es tangente al eje de las abscisas en el punto (5; 0) y no se corta con el eje de las ordenadas. **16.** a) Se corta en los puntos (5; 0) y ($-3$; $-4$); b) son tangentes en el punto ($-3$; $-4$); c) la recta está situada fuera del círculo. **17.** $a=\pm 30$, $b=48$.

## § 4

**1.** a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; b) $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$; c) $\frac{x^2}{676}+\frac{y^2}{192}=1$. **2.** $\frac{y^2}{9}+$ $+y^2=1$. **3.** $\frac{x^2}{289}+\frac{y^2}{225}=1$. **4.** $\frac{4x^2}{289}+\frac{y^2}{16}=1$. **5.** $16x^2+25y^2=1600$.

6. $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{576}=1$. 7. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$. 8. $9x^2+25y^2=225$. 9. $9x^2+25y^2=$ $=225$. 10. $8x^2+9y^2=162$. 11. a) $x^2+4y^2=100$; b) $2x^2+3y^2=180$. 12. a) $2a=26$, $2b=10$, $F(12;\ 0)$, $F_1(-12;\ 0)$, $e=\frac{12}{13}$; b) $2a=2\sqrt{10}$, $2b=2\sqrt{6}$, $F(2;\ 0)$, $F_1(-2;\ 0)$, $e=\frac{\sqrt{10}}{5}$; c) $2a=8$, $2b=8\sqrt{2}$, $F(0;\ 4)$, $F_1(0;\ -4)$, $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $2a=\frac{4}{3}$, $2b=\frac{4}{5}$, $F\left(\frac{8}{15};\ 0\right)$, $F_1\left(-\frac{8}{15};\ 0\right)$, $e=0{,}8$; e) $2a=3$, $2b=5\frac{1}{3}$, $F\left(0;\ \frac{5}{6}\sqrt{7}\right)$, $F_1\left(0;\ -\frac{5}{6}\sqrt{7}\right)$, $e=\frac{5\sqrt{7}}{16}$. 13. La elipse $x^2+4y^2=36$. 14. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; c) $\frac{1}{m}\sqrt{m^2-1}$. 15. $\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$. 16. $e\approx 0{,}08$. 17. $2c=$ $=5{,}1\times10^6$ *km*. 18. $\left(-\frac{15}{2};\ \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{15}{2};\ -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$. 19. Indicación. Los lados del ángulo recto deben ser tomados por los ejes de coordenadas; los segmentos $AM$ y $MB$ deben tomarse iguales a $a$ y $b$, y entonces $\frac{x}{a}=\cos\varphi$ y $\frac{y}{b}=\operatorname{sen}\varphi$. Para eliminar $\varphi$ es necesario elevar estas igualdades al cuadrado y sumarlas. 20. a) $AB=5$, $AM=3$, $MB=2$; b) $AB=5$; $AM=4$; $MB=1$; c) $AB=10$; $AM=MB=5$. 21. Indicación. En el triángulo $C_1OC_2$, la hipotenusa $C_1C_2=r_2-r_1$, y los catetos $OC_1=a-r_1$ y $OC_2=r_2-b$. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene la dependencia buscada en la forma:

$$(a-r_1)^2+(r_2-b)^2=(r_2-r_1)^2.$$

Abriendo los paréntesis y sumando a los dos miembros de la igualdad $-2ab$, se puede presentar esta dependencia así:

$$(b-r_1)\ (r_2-a)=\frac{(a-b)^2}{2}.$$

22. Indicación. Las coordenadas del punto $M$:

$$x=(a-b)\cdot\cos\varphi,\quad y=(a+b)\cdot\operatorname{sen}\varphi.$$

*Aplicando el procedimiento indicado en el problema 19 se obtiene la* ecuación:

$$\frac{x^2}{(a-b)^2}+\frac{y^2}{(a+b)^2}=1,$$

es decir, la curva es una elipse. Tal aparato de dos listones sujetos por un *tornillo se emplea para dibujar grandes elipses (por ejemplo,* al dibujar bóvedas).

## § 5

1. a) $\frac{x^2}{121}-\frac{y^2}{48}=1$; b) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=1$; c) $\frac{4x^2}{49}-\frac{y^2}{8}=1$. 2. $x^2-\frac{y^2}{8}=1$. 3. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$. 4. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{45}=1$. 5. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$. 6. $9x^2-16y^2=144$. 7. $9x^2-8y^2=72$. 8. a) $F(\pm 10;\ 0)$, $e=\frac{5}{3}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$; b) $F(\pm 4;\ 0)$, $e=0{,}4\sqrt{10}$, $y=\pm x\sqrt{0{,}6}$; c) $F\left(\pm 2\frac{5}{6};\ 0\right)$, $e=\frac{17}{15}$, $y=\pm\frac{8}{15}x$. 9. a) $x^2-4y^2=8$; b) $9x^2-16y^2=20$. 10. 120°. 11. $\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{2}$. 12. $e=\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right|$. 13. a) 2 y 32; b) 34 y 4. 14. $x=9\frac{3}{5}$, $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}$ (2 puntos). 15. $x_0=\pm a\sqrt{2-\frac{1}{e^2}}$; $y_0=\pm b\sqrt{1-\frac{1}{e^2}}$ (4 puntos). Indicación. Puesto que los radios vectores que unen el punto $(x_0,\ y_0)$ con los focos son perpendiculares entre sí, la suma de los cuadrados de sus longitudes es igual al cuadrado de la distancia focal:

$$(ex_0-a)^2+(ex_0+a)^2=4c^2.$$

De esta ecuación se determina la abscisa $x_0$, y sustituyendo sus valores en la ecuación de la hipérbola, se halla $y_0$. 16. $x^2-y^2=12$. 17. a) $xy=6$, b) $xy=4$. 18. a) $x^2-y^2=6$; b) $x^2=y^2=10$. 19. $9x^2-16y^2=144$. 20. $9x^2-7y^2=63$. 21. a) $a_4=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; b) $a_4=\frac{2ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$. La resolución es posible si $b>a$. 22. $4x\pm 3y-20=0$. 23. a) $\left(5;\ -5\frac{1}{3}\right)$, $\left(-3\frac{3}{4};\ 3\right)$; b) en el punto infinitamente alejado, la recta sirve de asíntota, c) no se cortan. 24. $(2;\ \pm 2)$ y $(-2;\ \pm 2)$. 25. $\left(5\frac{3}{5};\ \pm\frac{6\sqrt{6}}{5}\right)$ y $\left(-5\frac{3}{5};\ \pm\frac{6\sqrt{6}}{5}\right)$.

## § 6

1. a) $y^2=16x$; b) $x^2=-12y$. 2. a) $y^2=-4x$; b) $x^2=8y$. 3. a) $y^2=4x$; b) $y^2=-8x$. 4. a) $2x^2=9y$; b) $3x^2=-4y$. 5. $|p|=2\frac{2}{3}$. 6. $p=\frac{10}{3}$. 7. 112 *mm*. 8. a) $\frac{x}{a}+\frac{y^2}{b^2}=1$; b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b}=1$. 9. Indicación. Tomando la ecuación de la parábola (véase el problema 8 b), se tiene: $\frac{4x^2}{l^2}+\frac{y}{f}=1$. De aquí que $y=f\left(1-4\frac{x^2}{l^2}\right)$. La anchura de cada parte de la luz $\delta=\frac{l}{2n}$. Las abscisas y las ordenadas se cuen-

tan desde el punto medio (origen $O$), además $x_k = \delta_k = \frac{lk}{2n}$. El puntal (la viga vertical) tiene para esta abscisa la longitud $y_k = f\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)$, donde $k=1, 2, \ldots, n-1$. La longitud de la viga diagonal $d_k$, inclinada hacia el centro de la armazón, se determina por la fórmula de la distancia entre dos puntos con las coordenadas: $\left(\frac{lk}{2n}, 0\right)$ y $\left(\frac{l(k-1)}{2n}; y_{k-1}\right)$, donde $y_{k-1} = f\left[1-\frac{(k-1)^2}{n^2}\right]$, $d_k = \sqrt{f^2\left[1-\frac{(k-1)^2}{n^2}\right]^2+\frac{l^2}{4\pi^2}}$.

La longitud de la viga diagonal $d_k'$ inclinada hacia los extremos de la armazón se halla análogamente:

$$d_k' = \sqrt{f^2\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)^2+\frac{l^2}{4n^2}}.$$

Observamos que $d_k' = d_{k+1}$, es dedir, dos vigas diagonales que se unen en un punto de la parábola son iguales. Esta propiedad hace que la armazón parabólica sea mejor técnicamente que las armazones de otras formas.

Respuesta: $\delta = 2{,}5\,m$, $y_1 = 4{,}69\,m$, $y_2 = 3{,}75\,m$, $y_3 = 2{,}19\,m$, $d_1 = 5{,}60\,m$, $d_2 = d_1' = 5{,}31\,m$, $d_3 = d_2' = 4{,}51\,m$ y $d_4 = d_3' = 3{,}32\,m$. **10.** Indicación. La ecuación de la parábola superior: $y = (f+f')\left(1-4\frac{x^2}{l^2}\right)$; la ecuación de la parábola inferior: $y' = f'\left(1-4\frac{x^2}{l^2}\right)$. Para $x_k = \frac{lk}{2n}$ la longitud del puntal $z_k = y_k - y_k' = f\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)$.

Las longitudes de las diagonales:

$$d_k = \sqrt{(y_{k-1}-y_k')^2+\delta^2} =$$

$$= \sqrt{\left[f\left(1-\frac{(k-1)^2}{n^2}\right)+f'\,\frac{2k-1}{n^2}\right]^2+\frac{l^2}{4n^2}},$$

$$\delta_k' = \sqrt{(y_k-y_{k-1}')^2+\delta^2} =$$

$$= \sqrt{\left[f\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)+f'\,\frac{2k-1}{n^2}\right]^2+\frac{l^2}{4n^2}}.$$

Respuesta: $\delta = 2{,}5\,m$; $y_1 = 4{,}68\,m$, $y_2 = 3{,}75\,m$, $y_3 = 2{,}18\,m$, $y_1' = 2{,}81\,m$, $y_2' = 2{,}25\,m$, $y_3' = 1{,}31\,m$; $z_1 = 1{,}87\,m$, $z_2 = 1{,}50\,m$, $z_3 = 0{,}87\,m$; $d_1 = 3{,}32\,m$, $d_2 = 3{,}48\,m$, $d_3 = 3{,}49\,m$, $d_4 = 3{,}32\,m$; $d_1' = 3{,}02\,m$, $d_2' = 2{,}67\,m$, $d_3' = 2{,}50\,m$, $d_4'$ (la cuerda) $= 2{,}82\,m$. **11.** a) $(x-2)^2 = 8(y-3)$; b) $(x-3)^2 = -12y$; c) $(y+2)^2 = 12(x-1)$; d) $y^2 = -8(x-2)$. **12.** a) $x^2-8x-12y+28=0$; b) $x^2-6x+8y+17=0$; c) $y^2+8x-2y-7=0$; d) $y^2+4x+4=0$. **13.** a) $y^2-10x+25=0$; b) $x^2-4x-8y+12=0$; c) $y^2+6x-4y+7=0$. **14.** a) $x^2-4x-4y=0$; b) $y^2+4x-6y+1=0$. **15.** a) $O'(2; 1)$; $p=5$, el eje es $\parallel OX$; b) $O'(0; -7)$, $p=3$, el eje es $\parallel Ox$; c) $O'(2; 0)$, $p=4$, el eje coincide con la dirección negativa del eje $Ox$; d) $O'(3; 5)$, $p=-2$, el eje es $\parallel Oy$; e) $O'(4; -1)$, $p=\frac{1}{2}$, el eje es $\parallel Oy$; f) $O'(-3; -9)$, $p=\frac{1}{2}$, el eje es $\parallel Oy$; g) $O'(1; 1)$, $p=-\frac{1}{2}$, el eje es $\parallel Oy$; h) $O'\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; $p=-\frac{1}{2}$; el eje es $\parallel Oy$. **16.** a) $O'(-3; 0)$, $r=4$; b) $O'(5; -1)$, $r=5$. **17.** a) $O'(1; -2)$, $a=5$, $b=3$; b) $O'(-1; -1)$, $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{5}$. **18.** a) $(16; \pm 8)$, *b*) $(8; \pm 8)$. **19.** $x=2$.

## § 7

**2.** 3. **3.** $26°34'$. **4.** $4x^2+4y^2-60x-60y+225=0$ y $64x^2+64y^2+240x-240y+225=0$. **6.** $\frac{p}{2}$ y $p\sqrt{2}$; $y=\pm 2x\sqrt{2}$. **7.** $25x^2+25y^2=114$. **8.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; $M_{1,2}\left(\frac{21}{\sqrt{13}}; \pm\frac{12}{\sqrt{13}}\right)$; $M_{3,4}\left(-\frac{21}{\sqrt{13}}; \pm\frac{12}{\sqrt{13}}\right)$, **9.** $x+5y-3=0$.

## § 8

**2.** Indicación. $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Suponiendo $\frac{\pi}{2}-x=y$, se tiene: si $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$, entonces $y \longrightarrow 0$. **3.** Indicación. $|\cos x-1|=|1-\cos x|=2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2<2\cdot\frac{x^2}{4}=\frac{1}{2}x^2$. **7.** 2. **8.** 1. **9.** $-\frac{1}{3}$. **10.** 0. **11.** $\frac{4}{3}$. **12.** $\frac{2}{5}$. **13.** $\frac{1}{2}$. **14.** $\frac{3}{2}a$. **15.** $-1$. **16.** $-1$. **17.** $\frac{a}{k}$. **18.** 0. **19.** 0. **20.** $\infty$. **21.** $-1$. **22.** $\frac{1}{2a}$. **23.** $\frac{\sqrt{3}}{36}$. **24.** 0.

## § 9.

**1.** $-3$. **2.** $x^2+2$ y $x^2+8x-14$. **3.** $\frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+4}$. **6.** 2; $-3$. **7.** $f(1)=0$, $f(-2)=0$. **8.** $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$. **9.** $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}$. **11.** a) $-2\leqslant x\leqslant +2$, b) $-1\leqslant x\leqslant 3$, c) $1\leqslant x\leqslant +\infty$, d) $-2<x<+2$ **13.** $3x^2\Delta x+3x\cdot\Delta x^2+\Delta x^3=1{,}261\ m^3$. **14.** $3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-2\Delta x=0{,}100601$. **15.** $-\frac{2\Delta x}{(x-1+\Delta x)(x-1)}$ **16.** $\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$. **17.** a) 0; b) 1; c) $-1$ y $+1$; d) $-3$. Indicación. $x=-7$ transforma el quebrado en $\frac{0}{0}$, es necesario simplificar por $x+7$, e) $\frac{7}{3}$; f) 0. **19.** Es continua. **20.** Indicación: $\operatorname{tg} x-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

## § 10.

2. 12. 3. $b-2ct$; $t=\frac{b}{2c}$. 4. 1,00425 $kcal$. 5. $2\cdot 10^7$ erg. 6. $\frac{\pi d}{16}$. 7. a) 0; b) 6; c) $-4$; d) 4 y 2. 8. a) $3x^2$; b) 12; c) no puede. 9. a) $y=-\frac{1}{x_1^2}x+2y_1$; b) $y=-x+2$; c) $y=-4x-4$; d) no puede. 10. 0 y $\frac{2}{3}$. 11. arctg $3=71°34'$. 12. 90° y arctg $\frac{3}{4}=36°52'$. 13. (2; 4).

## § 11

1. $6(x-1)$. 2. $2x(10x^2+1)$. 3. $x^3-x+1$. 4. $\frac{3}{5}x^2-\frac{2}{3}x-1$. 5. $2x(2ax^2+b)$. 6. $3ax^2+2bx-c$. 7. $x^2(4-2x^2+x^4)$. 8. $-\frac{21x^5}{4}+5x^3-3x$. 9. $-\frac{4ax^3}{b}-\frac{bx}{a}$. 10. $\frac{3x^2}{a+b}-\frac{2x}{a-b}-\frac{1}{ab}$. 11. $ax^{a-1}-b\cdot x^{b-1}+3abx^{ab-1}$. 12. $2ax^{2a-1}-2x^{\lg 2-1}\cdot \lg 2$. 13. $kx^{k-1}-2\pi x^{\pi-1}$. 14. $21x^{\frac{5}{2}}+10x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}$. 15. $-6x^{-3}+x^{-\frac{3}{2}}+1$. 16. $\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}+6\sqrt[5]{x}$. 17. $2x\sqrt{3}+\frac{15\sqrt{x}}{2}$. 18. $-\frac{2}{x^3}+\frac{21}{x^4}$. 19. $\frac{4a}{3x^5}-\frac{6a^2}{x^3}$. 20. $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{4x\sqrt{x}}$. 21. $-2(1+35x)$. 22. $-4x(10x^3-3x+1)$. 23. $40x^3+33x^2+50x-1$. 24. $-2(1-x+3x^5)$. 25. $2acx+ad+bc$. 26. $3acx^2+2bcx+ad$. 27. $2(9x^2+x-1)$. 28. $2x(3x^4-28x^2+49)$. 29. $\frac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. 30. $-\frac{2}{(1+x)^2}$. 31. $-\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}$. 32. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. 33. $\frac{2ax(k+l)}{(l-ax^2)^2}$. 34. $\frac{1}{a}-\frac{a}{x^2}+\frac{2x}{b^2}-\frac{2b^2}{x^3}$. 35. $\frac{2}{5}-\frac{5}{2x^2}$. 36. $\frac{1}{3}+\frac{12x}{(4-x^2)^2}$. 37. $3-\frac{27}{(2-x)^2}$. 38. $\frac{b^2}{(a-x)^2}-\frac{a^2}{x^2}$. 39. $-\frac{acnx^{n-1}}{(b+cx^n)^2}$. 40. $\frac{dz}{dt}=\frac{1-2t}{(t^2-t+1)^2}$. 41. $\frac{dz}{dt}=\frac{1-3t^2}{\sqrt{\pi}}$. 42. $F'(1)=16$. 43. $F'(a)=-\frac{1}{2a+(1+a)\sqrt{a}}$. 44. $F'(a)=\frac{1+a}{2a\sqrt{a}}$. 45. $s'(0)=\frac{3}{25}$; $s'(2)=1\frac{2}{15}$. 46. $\rho'(2)=-\frac{3}{25}$; $\rho'(0)=1$. 47. $30x(3x^2+8)^4$. 48. $-84x^2(5-4x^3)^6$. 49. $3(2ax+b)\cdot(ax^2+bx+c)^2$. 50. $8x(2mx^2+n)(mx^4+nx^2+p)^3$. 51. $k(x^m+x^n)^{k-1}(mx^{m-1}+nx^{n-1})$. 52. $p(amx^{m-1}+bnx^{n-1})(ax^m+bx^n)^{p-1}$. 53. $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. 54. $\frac{2cx+b}{3\sqrt[3]{(a+bx+cx^2)^2}}$. 55. $4ab$. 56. $-\frac{7x}{\sqrt{1+x^2}}$. 57. $\sqrt{5}-\frac{3}{\sqrt{3x+5}}$. 58. $2(4x\sqrt{3}+15\sqrt{x})\times(x^2\sqrt{3}+5\sqrt{x^3})^3$. 59. $-\frac{42x}{(x^2-1)^4}$. 60. $\frac{40x}{(3-2x^2)^3}$.

61. $-\dfrac{ax}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$. 62. $-\dfrac{an}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^{n+1}}$. 63. $\dfrac{x\,(3x^2-2)}{\sqrt{1-x^2}}$.
64. $\dfrac{2x\,(4x^2+5)}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$. 65. $\dfrac{1}{2\sqrt{2x}\,(2+\sqrt{2x})}$. 66. $\dfrac{a}{4\sqrt{ax\,(a+\sqrt{ax})}}$.
67. $\dfrac{5bx^2+4x+ab}{2\sqrt{1+bx}}$. 68. $\dfrac{x\,(45x^2+16)}{\sqrt{1+5x^2}}$. 69. $\dfrac{2\,(4-x-x^2)}{(x-1)^5}$.
70. $-\dfrac{60x^2}{(5x-4)^4}$. 71. $(120x+161)\cdot(3x+5)^2\,(5x+4)^4$. 72. $x\,(36x+41)\times$ $\times(3x-2)\,(2x+3)^2$. 73. $(x+a)^{m-1}\,(x+b)^{n-1}\,[(m+n)\,x+mb+na]$
74. $\dfrac{(a+x)^{m-1}\,[(n-m)\,x+mb+na]}{(b-x)^{n+1}}$. 75. $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-1}}$.
76. $\dfrac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4-1}}$. 77. $-\dfrac{a^2}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$. 78. $-\dfrac{3}{x^4\sqrt[5]{(1+x^5)^2}}$.
79. $\dfrac{x\,(4+x^3)}{2\,(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}$. 80. $\dfrac{2\,(3-x^2)}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^5}}$. 81. $\dfrac{nx^{n-1}\,(2+\sqrt{x})}{2\,(1+\sqrt{x})^{n+1}}$.
82. $-\dfrac{1}{2\,(x+\sqrt{x})\sqrt{1-x}}$. 83. $k$. 84. 1. 85. $\dfrac{5}{3}$. 86. 1. 87. $n\cos nx$.
88. $nx^{n-1}\cdot\cos x^n$. 89. $n\cdot\mathrm{sen}^{n-1}x\cdot\cos x$. 90. $-ma^mx^{m-1}\,\mathrm{sen}\,(ax)^m$.
91. $-am\cos^{m-1}ax\cdot\mathrm{sen}\,ax$. 92. $-\dfrac{a}{\mathrm{sen}^2\,ax}$. 93. $bn\,\mathrm{tg}^{n-1}bx\cdot\sec^2 bx$.
94. $4\cos^2 x$. 95. $\dfrac{dy}{d\varphi}=\mathrm{tg}^2\,\varphi$. 96. $\dfrac{dy}{d\varphi}=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\varphi}{2}$. 97. $\dfrac{d\rho}{d\theta}=-2a\,\mathrm{sen}\,2\theta$.
98. $\dfrac{d\rho}{d\theta}=-\dfrac{k\,\mathrm{sen}\,2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$. 99. $\dfrac{dx}{dt}=r\,(1-\cos t)$. 100. $\dfrac{dy}{dt}=r\cdot\mathrm{sen}\,t$.
101. $\dfrac{dy}{dx}=6\,(\cos 3x-\mathrm{sen}\,2x)$. 102. $\dfrac{dy}{dt}=A\cdot\omega\cdot\cos(\omega t+a)$. 103. $\dfrac{ds}{dt}=$ $=\dfrac{a}{t^2}\cdot\mathrm{sen}\,\dfrac{a}{t}$. 104. $\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{2}{t^3}\cdot\cos\dfrac{1}{t^2}$. 105. $\dfrac{dy}{dx}=-2\cdot\mathrm{sen}\,4x$. 106. $\mathrm{sen}\,x$.
107. $-\dfrac{3a}{x^3}\cdot\mathrm{sen}^2\,\dfrac{1}{x}\cdot\cos\dfrac{1}{x}$. 108. $-\mathrm{sen}\,x\cdot\cos(\cos x)$. 109. $-\cos x\cdot\mathrm{sen}\,(\mathrm{sen}\,x)$.
110. $-3\,\mathrm{cosec}^4\,x$. 111. $\sec^6 x$. 112. $\mathrm{tg}^4\,\dfrac{x}{2}$. 113. $\sqrt{1+\mathrm{sen}\,2x}+$ $+\sqrt{1-\mathrm{sen}\,2x}$. 114. $\dfrac{\mathrm{sen}\,x-x\cdot\cos x}{\mathrm{sen}^2\,x}$. 115. $\sqrt{2}\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$.
116. $\mathrm{sen}\,x\cdot\cos 2x+\mathrm{sen}\,3x$. 117. $2\,\mathrm{sen}\,2x\cdot\cos^2 x$. 118. $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=$ $=-4\sqrt{3}$. 119. $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=4\sqrt{3}$. 120. $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a$. 121. $f'(\pi)=\dfrac{2}{9}$.
122. $a\left(\mathrm{tg}\,ax+\dfrac{ax}{\cos^2 ax}\right)$ 123. $a\cdot\mathrm{tg}\,ax\cdot\sec ax$ 124. $ax\sec^n x\cdot\mathrm{tg}\,ax$.
125. a) $\ln 2=0{,}69315$, $\ln 7=1{,}94591$, $\ln 13=2{,}56495$; b) $\lg 3=0{,}47712$, $\lg 5=0{,}69897$, $\lg 11=1{,}04139$. 126. $\dfrac{1}{(3+x)\ln a}$. 127. $\dfrac{2x}{(1+x^2)\ln a}$.
128. $\dfrac{2x}{x^2-a^2}$. 129. $\dfrac{3}{5+3x}$. 130. $\dfrac{2x}{3\,(a^2+x^2)}$ 131. $\dfrac{3}{x-5}+\dfrac{2}{x+4}$.

**132.** $\frac{3(1+\ln^2 x)}{x}$. **133.** $\frac{1}{2x\cdot\ln a}$. **134.** 0. **135.** $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

**136.** $\frac{1}{x\ln x}$. **137.** $\frac{1}{2(x+1)}$. **138.** $\frac{2a}{a^2-x^2}$. **139.** $\frac{n}{x(1+x^n)}$.

**140.** $\frac{2(1+\log_a x)}{x\cdot\ln x}$. **141.** $\frac{3\cdot\log_a^2 2x}{x\cdot\ln a}$. **142.** $\frac{2x}{3(1+x^2)}$. **143.** $\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$.

**144.** $\frac{1+x}{x(x+\ln x)}$. **145.** $\frac{an}{x}$. **146.** $\frac{an\cdot\ln^{n-1}x}{x}$. **147.** $2\operatorname{cotg}2x$. **148.** $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

**149.** $2\operatorname{cotg}x$. **150.** $\operatorname{cotg}2x$. **151.** $\frac{1}{\cos x}$. **152.** $\frac{\cos\ln x}{x}$. **153.** $\frac{1}{x\cdot\cos^2\ln x}$.

**154.** $2(x-1)\cdot 5^{x^2-2x}\cdot\ln 5=(x-1)\cdot 5^{x^2-2x}\cdot\ln 25$. **155.** $(x^2-1)\cdot 2^{x^3-3x}\ln 8$.

**156.** $x\cdot 3^{1+x^2}\cdot\ln 3$. **157.** $nx^{n-1}+n^x\cdot\ln n$. **158.** $\frac{n^{2x}-1}{e^x}$.

**159.** $e^{\frac{x}{2}+\frac{2}{x}}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}\right)$. **160.** $\frac{d\rho}{d\varphi}=a^\varphi\cdot\ln a$. **161.** $\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{a^{\ln\varphi}\cdot\ln a}{\varphi}$.

**162.** $\frac{a\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. **163.** $a^{\frac{x}{e}}\cdot\ln a$. **164.** $5^{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\operatorname{sen}2x\cdot\ln 5$. **165.** $\frac{n\cdot a^{\operatorname{tg}nx}\cdot\ln a}{\cos^2 nx}$.

**166.** $-\frac{e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}}{\left(x\cdot\cos\frac{1}{x}\right)}$. **167.** $a^{e^x}\cdot e^x\cdot\ln a=a^{e^x}$. **168.** $e^{a^x}\cdot a^x\cdot\ln a$.

**169.** $e^{2x}(2x-5)-4e^x(1+x)$. **170.** $x^2\cdot e^x(\cos x-\operatorname{sen}x)+2x\cdot e^x\cdot\cos x$.

**171.** $\frac{1-\ln x}{x^2}$. **182.** $\ln x$. **173.** $e^{x\ln x}(1+\ln x)$. **174.** $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

**175.** $\frac{4\ln a}{(a^x+a^{-x})^2}$. **176.** $-x\cdot\operatorname{cotg}^2 x$. **177.** $x\cdot\ln\operatorname{tg}x+\frac{x^2}{\operatorname{sen}2x}+\cos x$.

**178.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}$. **179.** $f'\left(\frac{1}{2}\right)-\pi\cdot e^{\frac{\pi}{2}}$. **180.** $2ae^{ax}\cdot\operatorname{sen}ax$.

**181.** $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=4$. **182.** $f'(e)=\frac{1}{3e}$. **183.** $f'(e)=\frac{4}{3}$. **184.** $\frac{2}{x\cdot\ln x}$.

**185.** $f'(0)=1$. **186.** $14x-1$. **187.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **188.** $\frac{1}{2\sqrt{x(x+a)}}$.

**189.** $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}}$. **190.** $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **191.** $\frac{1}{x^2+1}$. **192.** $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

**193.** $\frac{e^{\operatorname{arc\,sen}x}}{\sqrt{1-x^2}}$. **194.** $-1$. **195.** $-1$. **196.** $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$. **197.** $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

**198.** $\frac{1}{x}$. **199.** $\frac{\operatorname{cotg}x}{1+\ln^2\operatorname{sen}x}$. **200.** $\frac{a}{a^2+x^2}$. **201.** $\operatorname{arc\,sen}x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

**202.** $x\operatorname{arc\,tg}x$. **203.** $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. **204.** $2\sqrt{1-x^2}$. **205.** $\frac{2a^3}{x^4-a^4}$.

**206.** $x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)\cdot\frac{1}{x^2}$. **207.** $(\operatorname{sen}x)^x(x\cdot\operatorname{cotg}x+\ln\operatorname{sen}x)$.

208. $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot (1+\ln \operatorname{sen} x)$. 209. $2 \cdot x^{\ln x-1} \cdot \ln x$. 210. 0.
211. $x^{\operatorname{arc\,sen} x-1}\left(\operatorname{arc\,sen} x+\dfrac{x \cdot \ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. 212. $e^{x^x} \cdot x^x \cdot (1+\ln x)$.
213. $n\left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx} \cdot \left(1+\ln \dfrac{x}{n}\right)$

## § 12

1. $-\infty < x < 2$ decrece, $+2 < x < +\infty$ crece. 2. $-\infty < x < 1$ decrece, $+1 < x < +\infty$ crece. 3. $-\infty < x < 0$ y $+1 < x < +\infty$ crece, $0 < x < 1$ decrece. 4. $-\infty < x < 0$ y $+2 < x < +\infty$ crece, $0 < x < +2$ decrece. 5. $-\infty < x < -1$ y $0 < x < 1$ decrece, $-1 < x < 0$ y $+1 < x < +\infty$ crece. 6. $-\infty < x < -\sqrt{2}$ y $0 < x < \sqrt{2}$ decrece, $-\sqrt{2} < x < 0$ y $+\sqrt{2} < x < +\infty$ crece. 7. $\frac{5}{4}$ es mínimo. 8. $\frac{3}{2}$ es máximo. 9. $-\frac{3}{2}$ es máximo. 10. $-3$ es máximo, 3 es mínimo. 11. 0 es mínimo, $\frac{1}{3}$ es máximo. 12. No hay extremo. 13. No hay extremo. 14. $-2$ es máximo, $\frac{4}{3}$ es mínimo. 15. $-1$ es máximo, $\frac{7}{3}$ es mínimo. 16. 0 y 2 son mínimos, 1 es máximo. 17. $-3$ y 2 son mínimos, 1 es máximo. 18. $-1$ es mínimo, 1 no hay extremo. 19. $\frac{1}{2}$ es mínimo, $-1$ no hay extremo. 20. $-\frac{1}{3}$ y 1 son mínimos, $\frac{1}{2}$ es máximo, $-1$ no hay extremo. 21. $-2{,}5$ es máximo, $2{,}5$ es mínimo. 22. $-1$ es máximo, 5 es mínimo. 23. $-1$ es mínimo, 1 es máximo. 24. $-1$ es máximo, 3 es mínimo. 25. $-5$ es máximo, 1 es mínimo. 26. No hay extremo. 27. 3 es mínimo. 28. 2 es mínimo. 29. $-4$ es máximo. 30. 0 es máximo. 31. 0 es mínimo, 2 es maximo. 32. $e$ es mínimo. 33. Cuando $x=\frac{\pi}{4}$, el máximo $=\sqrt{2}$. 34. Cuando $x=\frac{\pi}{4}$, el mínimo $=2$; cuando $x=-\frac{\pi}{4}$, el máximo $=-2$. 35. No hay extremo. 36. Cuando $x=\frac{\pi}{3}$, el máximo $=\frac{3}{4}\sqrt{3}$. 37. Cuando $x=\frac{\pi}{4}$, el mínimo $=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 38. 5 y 5. 39. 9 y 1. 40. 1. 41. $\frac{1}{2}$. 42. Es un cuadrado. 43. Es un cuadrado de lado $R\sqrt{2}$. 44. Es un equilátero de lado $R\sqrt{3}$. 45. Es isósceles. 46. La altura del rectángulo tiene que ser igual al radio del semicírculo 47. $R=\frac{1}{2}a$. 48. $2R=H$. 49. $R=\sqrt[6]{\dfrac{9v^2}{2\pi^2}}$, $H=R\sqrt{2}$. 50. $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. 51. La anchura es igual a $\frac{2}{3}$ de la altura. 52. A 3 *km* del poblado. 53. Transcurridas

4 horas. 54. $\frac{a}{\sqrt{2}}=0{,}7\ a$. 56. Concavidad hacia arriba, $x=0$ es mínimo. 57. Concavidad hacia abajo para $x<0$ y hacia arriba si $x>0$, $x=0$ es el punto de inflexión. 58. $x=0$ es máximo, $x=1$ es mínimo, $x=\frac{1}{2}$ *es punto de inflexión; es cóncava hacia abajo si* $x<\frac{1}{2}$, y hacia arriba si $x>\frac{1}{2}$. 59. Véase el ejercicio 11, $x=\frac{1}{6}$ es punto de inflexión; es convexa hacia arriba si $x<\frac{1}{6}$ y hacia abajo si $x>\frac{1}{6}$. 60. Véase el ejercicio 30; cóncava hacia arriba en los intervalos $-\infty<x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<+\infty$, es cóncava hacia abajo en los intervalos $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 61. Véase el ejercicio 21; es cóncava hacia arriba si $x>0$, y hacia abajo si $x<0$, $x=0$ es punto de discontinuidad. 62. Véase el ejercicio 25; es cóncava hacia abajo si $x<-2$, *y hacia arriba si* $x>-2$; $x=-2$ es punto de discontinuidad. 63. $x=0$ es punto de discontinuidad, $x=1$ es punto de mínimo, $x=-\sqrt[3]{2}$ es punto de infliexión, cóncava hacia arriba en los intervalos $-\infty<x<-\sqrt[3]{2}$ y $0<x<+\infty$ y hacia abajo en el intervalo $-\sqrt[3]{2}<x<0$. 64. El campo de definición $-\infty<x\leqslant 4$, cuando $x=3$ hay máximo, concavidad hacia abajo. 65. $v_0=10$; $v_1=5$; $v_2=6$; $\alpha_0=-8$; $\alpha_1=-2$; $\alpha_2=4$; $v_{\min}=4\frac{2}{3}$ cuando $t=\frac{4}{3}$. 66. $v_0=-ak$, $\alpha_0=ak^2$, 68. $v=\frac{a\omega}{\cos^2\omega t}$, $\alpha=-\frac{a\omega^2\operatorname{tg}\omega t}{\cos^2\omega t}$.

## § 13

2. $\Delta y=0{,}100601$; $dy=0{,}1$. 3. $\Delta y=-\frac{1}{2001}$; $dy=-\frac{1}{2000}$. 4. $(3ax^2+2bx+c)\,dx$. 5. $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)dx$. 6. $\left(\frac{1}{C}+\frac{C}{x^2}\right)\cdot dx$. 7. $\frac{2x\,dx}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$. 8. 0,0256. 9. $-0{,}125$. 10. $-\frac{2\,dx}{1-\operatorname{sen}2x}=-$ $-\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$. 11. $\operatorname{tg}^4 x\,dx$. 12. $\frac{5\,dx}{2x}$. 13. $(1+\ln x)\,dx$. 14. $\frac{x\,dx}{1+x^2}$. 15. $\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. 16. $2e^{x}\cdot\cos x\,dx$. 17. 0,5 $m^2$, 2%. 18. 0,017 $m^2$, aproximadamente el 1,4%. 19. $\frac{1}{2}\left|\frac{dl}{l}\right|$.

## § 14

1. $\frac{1}{4}x^4+C$. 2. $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$. 3. $2\sqrt{x}+C$. 4. $-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. 5. $\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3+C$. 6. $\frac{x}{2}(2+x-4x^2)+C$. 7. $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$.

8. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$. 9. $2x+3\ln x+C$. 10. $\frac{1}{2}x^2+4x+$ $+4\ln x+C$. 11. $s=v_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2$. 12. $y=\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$. 13. $\sqrt{2x}\left(\frac{2x}{3}-1\right)+C$. 14. $\ln\frac{1}{1-x}+C$. 15. $-\frac{1}{x+1}+C$. 16. $-\frac{1}{x^4+a^4}+C$. 17. $-\frac{1}{8(x^2+a^2)^4}+C$. 18. $\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$. 19. $2\ln(1+\sqrt{x})+C$. 20. **Indicación:** sacar $\sqrt{x}$ fuera de paréntesis. Respuesta: $2\ln(\sqrt{x}-1)+C$. 21. $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$. 22. $2\sqrt{\ln x}+C$. 23. $\frac{1}{2}\ln\ln x^2+C=\frac{1}{2}\ln\ln x+C_1$, donde $C=C_1+\frac{1}{2}\ln 2$. 24. $-\frac{e^{-4x}}{4}+$ $+C$. 25. $-\frac{1}{3\cdot e^x}+C$. 26. $6\cdot a^{2x}+C$. 27. $\frac{1}{8\ln 2}\cdot 2^{4x^2-8}+C$. 28. $\frac{x^3}{3}+$ $+4x^2+4x+\ln(x-1)+C$. 29. $\frac{x^3}{3}-x^2+3x+\ln(x+1)+C$. 30. $\frac{1}{3}(x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+C$. 31. $\frac{2}{9}(x^3-1)\cdot\sqrt{x^3-1}+C$. 32. $\ln(x^2+$ $+ax+b)+C$. 33. $2\sqrt{x^2+ax+b}+C$. 34. $\ln(e^x+e^{-x})+C$. 35. $a\ln(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})+C$. 36. $2(1+e^x)\sqrt{1+e^x}+C$. 37. $\frac{1}{5}\sqrt{(2x-1)^5}+$ $+\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}+C$. 38. Indicación: $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\left(1+\frac{1}{1+e^x}-1\right)dx$. Respuesta: $x-\ln(1+e^x)+C$. 39. Indicación. Racionalizar el denominador del quebrado. Respuesta: $\frac{2}{3a}[\sqrt{(x+a)^3}+\sqrt{x^3}]+C$. 40. $\frac{2}{3}[\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}]+C$. 41. $\frac{x}{6}(3x+4\sqrt{x}+6)+C$. 42. $\frac{x}{20}(12\sqrt[3]{x^2}+15\sqrt[3]{x}+20)+C$. 43. $\ln\operatorname{arcsen} x+C$. 44. $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+C$. 45. $\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^3}+C$. 46. $\frac{1}{2}\ln\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$. 47. $s=t^3+t^2$. 48. $s=\frac{1}{12}t^4+2t$. 49. $\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$. 50. $-\frac{1}{n}\cos(nx+a)+C$. 51. $\frac{5}{2}\operatorname{sen}\frac{2x-3}{5}+C$. 52. $-\frac{1}{2}\cos 2x-$ $-\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+C$. 53. $\frac{1}{a}\operatorname{sen} ax-a\cdot\cos\frac{x}{a}+C$. 54. $a\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{a}+$ $+\frac{1}{a}\cos ax+C$. 55. $\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x+C$. 56. $\frac{1}{5}(\operatorname{tg} 5x+\operatorname{cotg} 5x)+C$. 59. $\sec x+C$. 60. $-\operatorname{cosec} x+C$. 61. $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+C$. 62. $-2\sqrt{\operatorname{cotg} x}+C$ 63. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+C$. 64. $-\frac{2}{3}\cos^3\frac{x}{2}+C$. 65. $-\frac{1}{\operatorname{sen} x}+C$.

66. $\frac{1}{2a\cdot\cos^2 ax}+C$. 67. $-\frac{1}{6}\cos(2x^3+3)+C$. 68. $-\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3}{x}+C$.
69. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$. 70. $\frac{1}{2}\ln(1+2\operatorname{sen}x)+C$. 71. $\frac{1}{b}\ln(a-b\cos x)+C$.
72. $-\frac{1}{2(x+\operatorname{sen}x)^2}+C$. 73. $-4\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+C$. 74. $\frac{1}{a}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. 75. Indicación. $\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1$. Respuesta: $-x+\operatorname{tg}x+C$. 76. $-x-\operatorname{cotg}x+C$.
77. $-e^{\cos x}+c$. 78. $\frac{a^{\operatorname{sen}x}}{\ln a}+C$. 79. $\operatorname{tg}x+\sec x+C$ o $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+$ $+C$. 80. $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}2x+\frac{1}{2}\operatorname{cosec}2x+C$. 81. $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}+C$.
82. $-\sqrt{1+\cos^2 x}+C$. 83. $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$. 84. $2\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+$ $+C$. 85. $\ln\operatorname{tg}x+C$. 86. $-2\cdot\operatorname{cotg}2x+C$. 87. $\frac{1}{2}(1-\operatorname{tg}x)^2+C$.
88. $-\frac{1}{2}(1+\operatorname{cotg}x)^2+C$. 89. $\ln(1+\operatorname{sen}x-2\cos x)+C$.
90. $\frac{1}{1-m}(x\cdot\operatorname{sen}x+\cos x-1)^{1-m}+C$. 91. $\operatorname{sen}x-\cos x$. 92. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t+6$.
93. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}+C$. 94. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$ 95. $\frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{7}}x+C$.
96. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x+C$. 97. $\frac{1}{12}\ln\frac{2+3x}{2-3x}+C$.
98. $\frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\frac{\sqrt{7}+x\sqrt{5}}{\sqrt{7}-x\sqrt{5}}+C$. 99. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}+C$. 100. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+C$.
101. $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{7}{5}}x+C$. 102. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{5}{7}}x+C$.
103. $\ln(x+\sqrt{x^2\pm 9})+C$. 104. $\ln(x+\sqrt{x^2\pm 4})+C$.
105. $\frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2-3})+C$. 106. $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln(x\sqrt{7}+\sqrt{1+7x^2})+C$.
107. $\frac{5}{2}\operatorname{arcsen}x^2+C$. 108. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{x^3}{a}+C$. 109. $\operatorname{arctg}e^x+C$.
110. $\operatorname{arcsen}e^x+C$. 111. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}x}{a}+C$. 112. $\frac{1}{2a}\ln\frac{a-\cos x}{a+\cos x}+C$.
113. $\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+C$. 114. $a\cdot\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$.
120. $\operatorname{arcsen}(\ln x)+C$. 121. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}x\right)+C$.
122. $\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\cdot\operatorname{tg}x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\cdot\operatorname{tg}x}+C$. 123. $\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+C$.
124. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$. 125. $-\frac{2}{3}\cos^3 x+\cos x+C$.

**126.** $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x-\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x+C$. **127.** $-\frac{2}{5}\cos^5 x+C$. **128.** $\operatorname{sen} x+$ $+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+C$, o $\frac{1}{2}(1+\operatorname{sen} x)^2+C$, donde $C=\frac{1}{2}+C_1$. **129.** $-\cos x-$ $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+C$, o $\frac{1}{2}(1-\cos x)^2+C_1$, donde $C=\frac{1}{2}+C_1$. **130.** $\frac{1}{2}x+$ $+\frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax+C$. **131.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax+C$. **132.** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+$ $+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x+C$. **133.** $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x+C$. **134.** $\frac{1}{4}x+$ $+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 4x+C$ **135.** $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x-\ln \operatorname{sen} x+C$. **136.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x+C$.

## § 15

**1.** 45. **2.** 27. **3.** $\frac{1}{6}$. **4.** 15. **5.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **6.** 2. **7.** $2\frac{2}{3}$. **8.** $\ln\sqrt{5}$. **9.** $e-1$. **10.** $\frac{a^2-1}{a\ln a}$. **11.** $\frac{\pi}{4}$. **12.** $\frac{\pi}{6}$. **13.** $\frac{1}{3}$. **14.** $\frac{\pi}{4}$. **15.** $\frac{\pi}{4}$. **16.** $\frac{4}{15}$. **17.** 16,5. **18.** $\frac{1}{2}gt^2+10t$. **19.** $x^4-16$. **20.** $\frac{1}{3}\ln\frac{1+x^3}{2}$. **21.** $-\ln\cos x$. **22.** $-\frac{\cos 2x}{2}$. **23.** 1. **24.** $\ln a$. El logaritmo natural de los números $a>1$ es el valor del área comprendida entre la hipérbola $xy=1$ y el eje $Ox$ entre los límites desde $x=1$ hasta $x=a$ y se llama también logaritmo hiperbólico. **25.** 18. **26.** $12\frac{1}{4}$. **27.** 11. **28.** 4. **29.** $\frac{4}{3}$. **30.** $\frac{1}{6}$. **31.** 2. **32.** $\frac{32}{15}\sqrt{2}$. **33.** $2\frac{2}{3}$. **34.** $\frac{2}{3}$. **35.** 4,5. **36.** 32. **37.** 8. **38.** 8. **39.** $2\pi+\frac{4}{3}$. **40.** $\frac{16}{3}\pi+4\sqrt{3}$. **44.** 3. **45.** $\frac{1}{3}$. **46.** 4. **47.** $\frac{1}{2}\pi y^2 x$, es decir, el volumen de un paraboloide de revolución es igual a la mitad del volumen de un cilindro que tenga la misma base, un círculo de radio $y$ y la misma altura $x$. **48.** $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. **49.** $\pi^2$ unidades cúbicas. **50.** $4\pi$. **51.** $9{,}6\pi$. **52.** $72\pi$. **53.** $\frac{4}{3}\pi$. **54.** $\frac{44}{15}\pi$. **55.** $\pi r^2\cdot 2\pi b$. **56.** $\frac{\pi b^2}{3a^2}(x^3-3a^2x+2a^3)$; $\frac{\pi a^2}{3b^2}(y^3+3b^2y)$. **57.** 250 $Tm$. **58.** 48 $Tm$. **59.** 1.500 $Tm$. **60.** 100 $kg$. **61.** $1.350\pi\ kg=4.241\ kg$. **62.** $\frac{4}{3}ka^3$, donde $k$ es el coeficiente de resistencia. **63.** $\frac{k(l_1-l_0)^2}{2e_0}$

**64.** 0,25 *Kgm*. **65.** 1,25 *Kgm*. **66.** $500\pi r^2h^2$ *Kgm*. **67.** Aproximadamente 101,7 *Kgm*. **68.** $\mu\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_1}\right)$, donde $\mu$ es el coeficiente de proporcionalidad. **Indicación. La fuerza se toma con el signo menos, puesto que está dirigida al centro del cuerpo.**

## § 16

**4.** $y=Cx$, o $ax+bx=0$. **5.** $x^2+y^2=C$. **6.** $xy=C$. **7.** $Cxy+y-x=0$; $y-x=0$. **8.** $\operatorname{arctg} y=\ln|x|+C$; $\operatorname{arctg} y=\ln|x|+\frac{\pi}{4}$. **9.** $\sqrt{y}=x\ln x+C$; $\sqrt{y}=x\ln x-x+2$. **10.** $\operatorname{arcsen} y-\operatorname{arctg} x=C$; $\operatorname{arcsen} y-\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}$. **11.** $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{cotg}^2 y=C$. **12.** $(x^2+1)(y^2+1)=C$. **13.** $y=\ln(e^x+C)$. **14.** $x=C-\ln|1-e^y|$. **15.** $x=Ce^{-\frac{x}{y}}$. **16.** $x^2-2xy-y^2=C$. **17.** $y^2+2xy=C$. **18.** $y=Ce^{\frac{x}{y}}$. **19.** $\frac{x}{x^2+y^2}=C$. **20.** $s=t\ln(2t)$. **21.** $y=e^{3x}+Ce^{2x}$. **22.** $y=Cx^2-\frac{1}{x}$. **23.** $y=\frac{mx+C}{x^n}$. **24.** $s=\frac{t+C}{\operatorname{sen} t}$. **25.** $xy=1$. **26.** $y=x^3$. **27.** $y=Cx^2$. **28.** $x=(C-2\ln|y|)y$; $x=(4-2\ln|y|)\cdot y$. **29.** $y=Cx^2$. **30.** $(2y^2-x^2)^3=Cx^2$. **31.** $p=e^{-0,000167h}$. **32.** $dy=-\frac{2y}{100+t}dt$; $\approx 3{,}9$ *кг*. **33.** $y=\frac{1}{6}(x+a)^3+C_1x+C_2$. **34.** $C_4s^2+a^2+(C_1t+C_2)^2$. **35.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. **36.** $y=e^x(C_1+C_2x)$. **37.** $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x)$. **38.** $y=3e^x-e^{-3x}$. **39.** $y=1$. **40.** $y=2\operatorname{sen} 2x-\cos 2x$. **41.** $y=\operatorname{sen} x$. **42.** $s=A\operatorname{sen}\omega t$.

## § 17

**1.** $du=y^2z^3\,dx+2xyz^3\,dy+3xy^2z^2\,dz$. **2.** $du=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$. **3.** $du=(y+b)\,dx+(x+a)\,dy$. **4.** $du=\frac{(x^2-y^2)(dx-dy)+2xy\,(dx+dy)}{(x+y)^2}$. **5.** $du=2n(x^2+y^2)^{n-1}(x\,dx+y\,dy)$. **6.** $du=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **7.** $du=\frac{2(x\,dx+y\,dy)}{x^2+y^2}$. **8.** $du=\frac{(2x+y)\,dx+(2y+x)\,dy}{x^2+xy+y^2}$ **9.** $du=\frac{2(x\,dy-y\,dx)}{x^2-y^2}$. **10.** $du=\cos(x+y)(dx+dy)$. **11.** $du=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}\times\cos\frac{y}{x}$. **12.** $du=\frac{z(dx+dy)-(x+y)\,dz}{z^2}\cos\frac{x+y}{z}$. **13.** $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\operatorname{cotg}\frac{x}{y}$. **14.** $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{y}{x}$. **15.** $du=e^{xy}(x\,dy+y\,dx)$.

16. $du=\frac{1}{x}\left(e^{\frac{y}{x}}dy+e^{\frac{z}{x}}dz\right)-\frac{dx}{x^2}\left(y\cdot e^{\frac{y}{x}}+ze^{\frac{z}{x}}\right)$. 17. $du=y^{x-1}\times$ $\times(y\ln y\,dx+x\,dy)$. 18. $du=x^{\operatorname{sen} y}\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen} y\,dx+\cos y\ln x\,dy\right)$. 19. $du=\frac{y\,dx+x\,dy}{1+x^2y^2}$. 20. $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$. 21. $du=$ $=\frac{yz\,dx+(x^2+xz)\,dy-xy\,dz}{(x+z)^2}$. 22. $du=(x\,dy+y\,dx)\operatorname{sen}(x+y)+$ $+xy\cos(x+y)(dx+dy)$. 23. $du=yz(xy)^{z-1}dx+xz(xy)^{z-1}dy+$ $+(xy)^z\ln(xy)\,dz$. 24. $du=z^{xy}\ln z\,(y\,dx+x\,dy)+xyz^{xy-1}dz$. 25. Disminuye aproximadamente en 0,12 *cm*. 26. $820\pi$., alrededor del 3,3%. 27. $\frac{dg}{g}=\frac{ds}{s}-2\frac{dt}{t}$. 28. $\frac{ds}{s}=\frac{da}{a}+\frac{db}{b}+\frac{dc}{\operatorname{tg} c}$. 29. $\frac{dy}{dx}=-$ $-\frac{x(2x^2+y^2)}{y(x^2+2y^2)}$. 30. $\frac{dy}{y}=\frac{x}{y}\cdot\frac{a-1}{a+1}$. 31. $\frac{dy}{dx}=1$. Indicación. $\cos x=$ $=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}=\sqrt{1-\cos^2 y}$. 32. $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x-\operatorname{sen} y}{x\cdot\cos y}$. 33. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{2-y}$. Indicación. $xe^y=y-1$. 34. $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{y^3}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{2(y^2+1)}{y^5}$. 35. $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\alpha\cdot\operatorname{sen} y}{(1-\alpha\cdot\cos y)^3}$. 36. $xx_1+yy_1=a^2$. 37. $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$. 38. $yy_1=p(x+x_1)$. 40. $y=\pm a$.

## § 18

1. $a^x=1+\frac{x\ln a}{1}+\frac{x^2\ln^2 a}{1\cdot 2}+\frac{x^3\ln^3 a}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

2. $\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\ldots 6}+\ldots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

3. $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots(-1\leqslant x<+1)$.

4. $\underset{(-\infty<x<+\infty)}{\operatorname{sen}(a+x)}=\operatorname{sen} a+\frac{x}{1}\cos a-\frac{x^2}{1\cdot 2}\operatorname{sen} a-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cos a+\ldots$

5. $\operatorname{sen}^2 x=\frac{2x^2}{1\cdot 2}-\frac{2^3\cdot x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2^5\cdot x^6}{1\cdot 2\ldots 6}-\ldots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

6. $\cos^2 x=1-\frac{2\cdot x^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3\cdot x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{2^5\cdot x^6}{1\cdot 2\ldots 6}+\ldots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

7. $e^x=e^2+e^2(x-2)+\frac{e^2}{1\cdot 2}(x-2)^2+\ldots$ 8. $\ln x=(x-1)-$ $-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\ldots\quad(1\leqslant x\leqslant 2)$. 9. $-3+4(x-1)+$ $+(x-1)^2+(x-1)^3$. 10. $(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\times$

$\times a^{m-2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} a^{m-3}x^3 + \ldots$ **11.** $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1\cdot 2} - \ldots$ $(-\infty < x < +\infty)$. **12.** $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots (-1 < x < 1)$. **13.** 1,037. **14.** $\operatorname{tg} x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{1\cdot 2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{16}{1\cdot 2\cdot 3} \times$ $\times \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \ldots$ Suponiendo $x - \frac{\pi}{4} = 46° - 45° = 1° = \frac{\pi}{180} = 0{,}017453$, hallamos $\operatorname{tg} 46° = 1{,}0355$.

# F. BREVE INFORMACION HISTORICA

1°. Los elementos de las Matemáticas Superiores que se estudian en las escuelas de peritaje comprenden los apartados que aparecieron como teorías científicas en los siglos XVII y XVIII. En 1637, Descartes publicó su geometría, que fue apreciada por Engels como un viraje en el desarrollo de las matemáticas.

"El punto de viraje en las matemáticas — dijo— fue la *magnitud variable* de Descartes. Gracias a ello, a las matemáticas se incorporaron *el movimiento y la dialéctica*, y y gracias a esto *se hicieron necesarios inmediatamente el cálculo diferencial y el cálculo integral*, que surgieron al instante, y que fueron culminados absoluta y totalmente, y no descubiertos por Newton y Leibnitz" *.

Sin embargo, esta "culminación" no debe entenderse en el sentido de que hubiera sido dicha la última palabra en el cálculo diferencial e integral, sino como la terminación de las investigaciones de los precursores de Newton y y Leibnitz (Fermat, Descartes, Barrow y otros, que aplicaron ya el método de las magnitudes infinitamente pequeñas). Leibnitz (1646—1716) fundó de modo genial el canon del nuevo cálculo, completando las tesis fundamentales de éste por medio de un sistema de reglas y fórmulas. Mediante sus descubrimientos en el campo de la Mecánica, Newton (1642—1727) confirmó el método del cálculo diferencial e integral, trazándole una enorme perspectiva para su aplicación científico-práctica.

2°. En los siglos sucesivos continuó el desarrollo del análisis matemático, enriqueciéndose con nuevas generalizaciones. Les corresponde un gran mérito en esto a los matemáticos de Rusia y la Unión Soviética. Nos circunscribiremos solamente a unos cuantos, cuyos méritos son inconmensurables en el desarrollo de la ciencia mundial.

---

* Federico Engels, *Dialéctica de la Naturaleza*, Gospolitizdat 1952, pág. 206.

Desempeñó un papel de primer orden en el desarrollo del análisis, así como de otras partes de las matemáticas, el académico de Petersburgo Leonardo Euler (1707—1783). "Lean, lean a Euler, que es el maestro de todos nosotros", dijo Laplace (1749—1827), célebre matemático, mecánico y astrónomo francés. Los trabajos científicos de Euler abarcan todos los dominios de las matemáticas y están consagrados a su sistematización y desarrollo. Estos trabajos son notables por su armonía y concisión, por su originalidad y amplitud de criterio. Se deben a Euler procedimientos y métodos de resolución de ecuaciones diferenciales — el principal medio matemático de investigación de los procesos de la naturaleza — que todavía siguen figurando en los manuales de análisis matemático. Los trabajos de Euler se extienden asimismo a la Mecánica, la Hidrodinámica, la Optica y la Astronomía.

Corresponde un destacado lugar en la ciencia a las investigaciones del matemático de Petersburgo Mijaíl Ostrogradski (1801—1861), que hizo grandes descubrimientos en el cálculo integral. Su método de integración de cierto tipo de quebrados racionales y su fórmula de transformación de las integrales curvilíneas múltiples aparecen en todos los manuales de análisis.

El célebre geómetra ruso Nikolái Lobachevski (1792—1856) dedicó diversos trabajos al análisis matemático, en los que expuso originales criterios referentes a diversas cuestiones, aventajando con ello a los hombres de ciencia del Occidente.

Lobachevski fundó una nueva geometría, la geometría no euclidiana. Las ideas de Lobachevski influyeron considerablemente en todos los principios previos y formas de la estructura de las matemáticas, pasando a ser principios rectores en las diversas ramas de las ciencias exactas— la Mecánica, la Física y la Astronomía —, ocupando un lugar primordial (decisivo en algunas cuestiones) en la Filosofía. Está muy lejos de haber sido completada hasta el fin la geometría fundada por Lobachevski. Sus variadas aplicaciones se encuentran en una fase de desarrollo y de intensas investigaciones.

El genial matemático de Petersburgo académico Pafnuti Chébishev (1821—1894) fundó una excelente escuela de las ciencias exactas. "Entre los numerosos problemas hay uno de excepcional importancia—dijo Chébishev—

Cómo se debe disponer de los medios propios para conseguir el mayor provecho posible". Precisamente por eso, "la mayor parte de las cuestiones prácticas se convierte en problemas de las magnitudes máximas y mínimas, que son completamente nuevos para la ciencia, y sólo resolviéndolos podemos dar satisfacción a las exigencias de la práctica, que en todas partes busca lo mejor, lo más ventajoso".

La solución de los problemas prácticos (construcción de mecanismos) hizo que Chébishev creara una parte nueva de las matemáticas, la teoría de la aproximación óptima de las funciones. El desarrollo de la teoría de la aproximación de las funciones de Chébishev ha conducido en la actualidad a la teoría constructiva de las funciones, que tiene gran aplicación. Las obras de Chébishev son muy variadas. Además de resolver cuestiones prácticas, halló también la solución de cuestiones teóricas excepcionalmente complicadas. Por ejemplo, sus descubrimientos geniales en la teoría de los números (la ley de la distribución de los números primos); en el cálculo de probabilidades (la ley de los grandes números); en el cálculo integral halló una fórmula para el cálculo aproximado de las integrales definidas y demostró la imposibilidad de expresar ciertas integrales por medio de funciones elementales.

Son continuadores de Chébishev en el campo del cálculo de probabilidades y de la teoría de la aproximación de las funciones el gran matemático soviético S. Bernshtéin (n. 1880) y varios de sus alumnos.

En el siglo XX, debido a la actividad científica del académico Nikolái Luzin (1883—1950), se formó la escuela matemática de Moscú, que llegó a su apogeo en la época soviética. Por la amplitud e importancia de las cuestiones científicas que estudia y por sus resultados, esa escuela ocupa el primer lugar del mundo. En el campo del análisis se destacan los matemáticos P. Alexándrov, A. Kolmogórov, D. Menshov, I. Priválov y A. Tíjonov.

Durante la época soviética se han desarrollado inconmensurablemente las matemáticas. No sólo las ciudades más importantes (Moscú y Leningrado), sino también otras como Kíev, Tbilisi, Járkov, Odesa, Sarátov, Ereván, etc. se han convertido en centros científicos en los que muchos jóvenes han llegado a ser hombres de ciencia y enriquecen las matemáticas con nuevas investigaciones y descubrimientos.

# INDICE

## A. FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA ANALITICA PLANA

### Capítulo I. Método de coordenadas



### Capítulo II. La recta



### Capítulo III. Curvas de segundo orden

## B. ELEMENTOS DEL CALCULO DIFERENCIAL

### Capítulo IV. Teoría de los límites

## Capítulo V. La función y su continuidad



## Capítulo VI. Función derivada



## Capítulo VII. Derivadas de las funciones elementales

Capítulo VIII. **Aplicación de las derivadas para el estudio de las funciones**

## C a p í t u l o IX. Diferencial



# C. ELEMENTOS DEL CALCULO INTEGRAL

## C a p í t u l o X. Integral indefinida



## C a p í t u l o XI. La integral definida y su aplicación

## Capítulo XII. **Ecuaciones diferenciales**



## D. SUPLEMENTOS

## Capítulo XIII. **Derivación de funciones de varias variables**



## Capítulo XIV. **Desarrollo de funciones en series de potenciales**

## E. PROBLEMAS Y EJERCICIOS

**GUELFAND I., GLAGOLEVA E., KIRILOV A.**

**Método de coordenadas**

Es un libro de Israil Guelfand, doctor en ciencias físico-matemáticas y profesor de la Universidad de Moscú, de Alejandro Kirilov, candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas y de Elena Glagoleva, colaboradora científica. Es el primero de la serie de matemáticas: «Biblioteca de la escuela físico-matemática».

En esta obra se describe el método de las coordenadas, es decir, el procedimiento para determinar la posición de un punto o cuerpo con ayuda de cifras o de otros símbolos.

De un modo ingenioso y comprensible, a la vez que rigurosamente científico, se trata de las coordenadas de un punto sobre una recta, sobre un plano, en el espacio; del espacio cuadridimensional, del cubo cuadridimensional y de otras cuestiones de interés relacionadas con la matemática moderna.

En cada una de las partes del libro se dan tareas y preguntas a resolver por el lector. Es un libro de matemáticas para los escolares del tercer año be las escuelas especiales de matemáticas y no exige conocimientos especiales que no estén incluidos en el programa escolar.

Todo el que se interese en las matemáticas, leerá este libro con satisfacción.

Formato 13,5 × 20,5 cm. En rustica con sobrecubierta. 48 págs.