G. N. Berman

Problemas y ejercicios de análisis matemático

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

Г. Н. БЕРМАН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

G. N. BERMAN

Problemas y ejercicios de análisis matemático

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por N. N. Serdiukova

На испанском языке

Impreso en la URSS. 1977

Prefacio

El presente libro de «Problemas y ejercicios de análisis matemático» se destina a los alumnos de ingeniería que estudian el análisis matemático, de acuerdo con los programas correspondientes, en escuelas técnicas superiores.

Contiene diversos ejercicios que en su mayor parte tienen por objeto controlar y profundizar el nivel de conocimientos que hayan adquirido los alumnos en el análisis matemático. En el manual no se dan explicaciones teóricas ni fórmulas. Se estima que el lector las encontrará en cualquier manual de análisis matemático. Para un conjunto de problemas y ejercicios análogos por su contenido se dan indicaciones instructivas, comunes para ellos.

Los problemas y ejercicios para cuya solución es necesario conocer las leyes de física van precedidos de la correspondiente información. En los más difíciles (señalados por un asterisco [*]) se dan sugerencias para su solución, que aparecen en la parte de «Respuestas a los ejercicios».

Esta es la traducción al español de una de las últimas variantes del manual escrito por los siguientes autores:

I. G. Aramanóvich, G. N. Berman, A. F. Bermant,
B. A. Kordemski, R. I. Pozoiski, M. G. Shestopal.

B. A. Kordemski
11 de septiembre de 1976

Indice

PREFACIO 5

CAPÍTULO I. **Función** 9

§ 1. Nociones elementales sobre la función 9
§ 2. Propiedades más elementales de las funciones 14
§ 3. Funciones más simples 18
§ 4. Función inversa. Funciones potencial, exponencial y logarítmica 24
§ 5. Funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas 26
§ 6. Problemas de cálculo 30

CAPÍTULO II. **Límite. Continuidad** 32

§ 1. Definiciones principales 32
§ 2. Magnitudes infinitas. Criterios de existencia del límite . . . 34
§ 3. Funciones continuas 37
§ 4. Operación de hallar los límites. Comparación de las magnitudes infinitesimales 40

CAPÍTULO III. **Derivada y diferencial. Cálculo diferencial** 50

§ 1. Derivada. Velocidad de variación de la función 50
§ 2. Diferenciación de las funciones 53
§ 3. Diferencial. Diferenciabilidad de la función 71
§ 4. La derivada como velocidad de variación (otros ejemplos) 75
§ 5. Derivación sucesiva 83

CAPÍTULO IV. **Análisis de las funciones y de sus gráficas** 90

§ 1. Comportamiento de la función 90
§ 2. Aplicación de la primera derivada 91
§ 3. Aplicación de la segunda derivada 102
§ 4. Tareas complementarias. Resolución de ecuaciones 105
§ 5. Fórmula de Taylor y su aplicación 113
§ 6. Curvatura 115
§ 7. Problemas de cálculo 118

CAPÍTULO V. **Integral definida** 119

§ 1. Integral definida y sus propiedades más elementales 119
§ 2. Propiedades fundamentales de la integral definida 123

CAPÍTULO VI. **Integral indefinida. Cálculo integral** 129

§ 1. Métodos más simples de integración 129
§ 2. Métodos principales de integración 133
§ 3. Tipos principales de las funciones integrables 138

CAPÍTULO VII. **Métodos para calcular integrales definidos. Integrales impropias** 146

§ 1. Métodos de integración exacta 146

§ 2. Métodos aproximados 155
§ 3. Integrales impropias 158

CAPÍTULO VIII. **Aplicaciones de la integral** 164
§ 1. Algunos problemas de geometría y de estática 164
§ 2. Algunos problemas de física 181

CAPÍTULO IX. **Series** 192
§ 1. Series numéricas 192
§ 2. Series funcionales 197
§ 3. Series de potencias 201
§ 4. Algunas aplicaciones de las series de Taylor 204

CAPÍTULO X. **Funciones de varias variables. Cálculo diferencial** 208
§ 1. Funciones de varias variables 208
§ 2. Propiedades más elementales de las funciones 210
§ 3. Derivadas y diferenciales de las funciones de varias variables 215
§ 4. Derivación de las funciones 219
§ 5. Derivación sucesiva 223

CAPÍTULO XI. **Aplicaciones del cálculo diferencial de las funciones de varias variables** 228
§ 1. Fórmula de Taylor. Extremos de las funciones de varias variables 228
§ 2. Líneas planas 234
§ 3. Función vectorial del argumento escalar. Líneas alabeadas. Superficies 236
§ 4. Campo escalar. Gradiente. Derivada respecto a la dirección. 242

CAPÍTULO XII. **Integrales múltiples e integración múltiple** 245
§ 1. Integrales dobles y triples 245
§ 2. Integración múltiple 246
§ 3. Integrales en los sistemas de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas 250
§ 4. Aplicaciones de integrales dobles y triples 254
§ 5. Integrales impropias. Integrales dependientes del parámetro 264

CAPÍTULO XIII. **Integrales curvilíneas e integrales de superficie** 271
§ 1. Integrales curvilíneas de primer género 271
§ 2. Integrales curvilíneas de segundo género 275
§ 3. Integrales de superficie 281

CAPÍTULO XIV. **Ecuaciones diferenciales** 285
§ 1. Ecuaciones de primer orden 285
§ 2. Ecuaciones de primer orden (continuación) 298
§ 3. Ecuaciones de segundo orden y de órdenes superiores 302
§ 4. Ecuaciones lineales 306
§ 5. Sistemas de ecuaciones diferenciales 312
§ 6. Problemas de cálculo 315

CAPÍTULO XV. **Series trigonométricas** 318
§ 1. Polinomios trigonométricos 318
§ 2. Series de Fourier 319
§ 3. Método de Krilov. Análisis armónico 323

CAPÍTULO XVI. **Elementos de la teoría del campo** 324
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS 331
SUPLEMENTO. Tablas de ciertas funciones elementales 465

Capítulo I

Función

§ 1. Nociones elementales sobre la función

Funciones y formas de su expresión

1. La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo plano es función del número de sus lados. Expresar analíticamente esta función. ¿Qué valores puede tomar el argumento?

2. La función y de x está dada en la siguiente tabla:

Variable independiente x	0	0,5	1	1,5	2	3
Función y	−1,5	−1	0	3,2	2,6	0

Variable independiente x	4	5	6	7	8	9	10
Función y	−1,8	−2,8	0	1,1	1,4	1,9	2,4

Construir su gráfica, uniendo los puntos con una línea «suave». Siguiendo la gráfica y determinando los valores de la función para $x = 2{,}5$; $3{,}5$; $4{,}5$; $5{,}5$; $6{,}5$; $7{,}5$; $8{,}5$; $9{,}5$, hacer la tabla «más completa».

3. La función viene expresada por la gráfica representada en la fig. 1. Pasar el dibujo al papel milimetrado, elegir la escala y unos

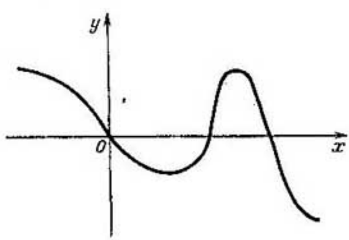

Fig. 1

cuantos valores de la variable independiente. Después de leer en el dibujo los valores de la función, correspondientes a los valores elegidos de la variable independiente, formar la tabla de dichos valores.

4. La función viene dada por la gráfica representada en la fig. 2. Ateniéndose a la gráfica contestar a las siguientes preguntas:

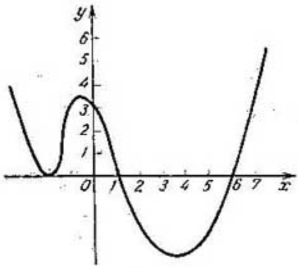

Fig. 2

a) ¿Qué valores de la variable independiente hacen que la función se anule?

b) ¿Cuáles deben ser los valores de la variable independiente para que la función sea positiva?

c) ¿Cuáles deben ser los valores de la variable independiente para que la función sea nagativa?

5. La fórmula de la ley de Coulomb expresa la relación de dependencia que existe entre la fuerza F de interacción de dos cargas eléctricas e_1 y e_2, por una parte, y la distancia r que media entre ellas, por otra:

$$F=\frac{e_1\cdot e_2}{\varepsilon\cdot r^2}$$

Poniendo $e_1=e_2=1$ y $\varepsilon=1$ formar la tabla de los valores de la función dada para $r=1, 2, 3, \ldots, 10$ y construir su gráfica uniendo los puntos con una línea «suave».

6. Escribir la función que exprese la dependencia entre el radio r de un cilindro y su altura h siendo el volumen dado $V=1$. Calcular los valores de r, teniendo h los siguientes valores: 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5. Construir la gráfica de la función.

7. Expresar el área de un trapecio isósceles de bases a y b como función del ángulo α de base a. Construir la gráfica de la función para $a=2$, $b=1$.

8. Expresar la dependencia entre la longitud b de un cateto de un triángulo rectángulo y la longitud a de otro cateto, siendo la hipotenusa constante e igual a $c=5$. Construir la gráfica de esta función.

9. Dadas las funciones

a) $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$; b) $\varphi(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$,

hallar: $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(\sqrt{2})$; $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$; $\varphi(0)$; $\varphi(1)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-2)$; $\varphi(4)$. ¿Existen $f(-1)$, $\varphi(-1)$?

10. Dada la función $f(u)=u^3-1$, hallar $f(1)$; $f(a)$; $f(a+1)$; $f(a-1)$; $2f(2a)$.

11. Dadas las funciones $F(z)=2^{z-2}$ y $\varphi(z)=2^{|z|-2}$, hallar $F(0)$; $F(2)$; $F(3)$; $F(-1)$; $F(2{,}5)$; $F(-1{,}5)$ y $\varphi(0)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-1)$; $\varphi(x)$; $\varphi(-1)+F(1)$.

12. Dada la función $\psi(t)=t\cdot a^t$, hallar $\psi(0)$; $\psi(1)$; $\psi(-1)$; $\psi\left(\frac{1}{a}\right)$; $\psi(a)$; $\psi(-a)$.

13. $\varphi(t)=t^3+1$. Hallar $\varphi(t^2)$ y $[\varphi(t)]^2$.

14. $F(x)=x^4-2x^2+5$. Demostrar que $F(a)=F(-a)$.

15. $\Phi(z)=z^3-5z$. Demostrar que $\Phi(-z)=-\Phi(z)$.

16. $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$. Demonstrar que $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$.

17. $f(x)=\operatorname{sen} x-\cos x$. Demostrar que $f(1)>0$.

18. $\psi(x)=\lg x$. Demostrar que $\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)]$.

19. $F(z)=a^z$. 1) Demostrar que para cualquier valor de z es válida la siguiente relación

$$F(-z)\cdot F(z)-1=0.$$

2) Demostrar que

$$F(x)\cdot F(y)=F(x+y).$$

20. Dados la gráfica de la función $y=f(x)$ y los valores a y b de la variable independiente x (véase la fig. 3), construir $f(a)$

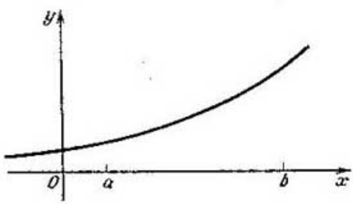

Fig. 3

y $f(b)$ en el dibujo. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la relación

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}?$$

21. Mostrar que si cualquier cuerda de la gráfica de la función $y = f(x)$ está por encima del arco que aquélla subtiende, se verifica la desigualdad

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

para todas las $x_1 \neq x_2$.

22. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$, hallar todas las raíces de la ecuación a) $f(x) = f(0)$; *b*) $f(x) = f(-1)$.

23. Dada la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$, hallar todas las raíces de la ecuación $f(x) = f(-2)$.

24. Dada la función $f(x)$, hallar por lo menos una raíz de la ecuación $f(x) = f(a)$.

25. Señalar dos raíces de la ecuación $f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$, si es sabido que la función $f(x)$ está definida en el intervalo $[-5, 5]$. Hallar todas las raíces de la ecuación dada siendo $f(x) = x^2 - 12x + 3$.

26. $F(x) = x^2 + 6$; $\varphi(x) = 5x$. Hallar todas las raíces de la ecuación $F(x) = |\varphi(x)|$.

27. $f(x) = x + 1$; $\varphi(x) = x - 2$. Resolver la ecuación

$$|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|.$$

28. Hallar los valores de a y b en la expresión de la función $f(x) = ax^2 + bx + 5$ para los cuales sea válida la identidad $f(x + 1) - f(x) \equiv 8x + 3$.

29. Sea $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$. ¿Cuáles deben ser los valores de las constantes a, b y c para que se cumpla la identidad $f(x + 1) - f(x) \equiv \operatorname{sen} x$?

Funciones compuestas

30. $y = z^2$, $z = x + 1$. Expresar y como función de x.

31. $y = \sqrt{z + 1}$, $z = \operatorname{tg}^2 x$. Expresar y como función de x.

32. $y = z^2$, $z = \sqrt[3]{x + 1}$, $x = a^t$. Expresar y como función de t.

33. $y = \operatorname{sen} x$; $v = \lg y$; $u = \sqrt{1 + v^2}$. Expresar u como función de x.

34. $y = 1 + x$; $z = \cos y$; $v = \sqrt{1 - z^2}$. Expresar v como función de x.

35. Presentar en forma de cadenas formadas a base de las principales funciones elementales las siguientes funciones compuestas:

1) $y = \operatorname{sen}^3 x$; 2) $y = \sqrt[3]{(1 + x)^2}$; 3) $y = \lg \operatorname{tg} x$;

4) $y = \operatorname{sen}^3 (2x + 1)$; 5) $y = 5^{(3x+1)^2}$.

36. $f(x) = x^3 - x$; $\varphi(x) = \operatorname{sen} 2x$. Hallar:

a) $f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$; b) $\varphi[f(1)]$; c) $\varphi[f(2)]$;

d) $f[\varphi(x)]$; e) $f[f(x)]$; f) $f\{f[f(1)]\}$;
g) $\varphi[\varphi(x)]$.

37. Demostrar que es válida la siguiente forma de construir la gráfica de la función compuesta $y = f[\varphi(x)] = F(x)$, valiéndose de las gráficas conocidas de las funciones componentes: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$. Del punto A de la gráfica de la función $\varphi(x)$ (véase la fig. 4), el cual corresponde al valor dado de la variable independiente

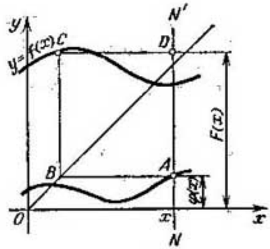

Fig. 4

x, se traza una recta paralela al eje Ox hasta que se corte en el punto B con la bisectriz de los ángulos coordenados primero y tercero. Del punto B se traza una recta paralela al eje Oy hasta que se corte con la gráfica de la función $f(x)$ en el punto C. Si del punto C se traza una recta paralela al eje Ox, el punto D de su intersección con la recta NN' será el de la gráfica de la función $F(x)$ correspondiente al valor tomado de x.

Funciones implícitas

38. Escribir en forma explícita la función y dada en forma implícita mediante la siguiente ecuación:

1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
3) $x^3 + y^3 = a^3$; 4) $xy = C$; 5) $2^{xy} = 5$;
6) $\lg x + \lg(y + 1) = 4$; 7) $2^{x+y}(x^2 - 2) = x^3 + 7$;
8) $(1 + x)\cos y - x^2 = 0$.

39*. Mostrar que para $x > 0$ la ecuación $y + |y| - x - |x| = 0$ determina la función cuya gráfica será la bisectriz del primer ángulo coordenado, mientras que para $x \leqslant 0$ son las coordenadas de todos los puntos del tercer ángulo coordenado (incluidos sus puntos frontera) las que satisfacen a la ecuación dada.

§ 2. Propiedades más elementales de las funciones

Dominio de definición de la función

40. Formar la tabla de los valores de la función de argumento entero $y = \frac{1}{x!}$ para $1 \leqslant x \leqslant 6$.

41. El valor de la función de argumento entero $u = \varphi(n)$ es igual a la cantidad de números primos no mayores que n. Formar la tabla de los valores de u para $1 \leqslant n \leqslant 20$.

42. El valor de la función de argumento entero $u = f(n)$ es igual al número de divisores enteros del argumento distintos de 1 y de la misma n. Formar la tabla de los valores de u para $1 \leqslant \leqslant n \leqslant 20$.

43. La figura 5 presenta una «barra» formada por tres segmentos cuyas longitudes son iguales a 1; 2; 1 unidad de longitud, y el peso

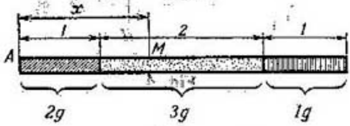

Fig. 5

es igual a 2; 3; 1 unidades de peso, respectivamente. El peso del segmento AM cuya longitud es igual a x, es función de x. ¿Para qué valores de x está definida esta función? Presentar su forma analítica y construir su gráfica.

44. Una torre tiene la siguiente forma: Un cono circular recto truncado cuyos radios de base son $2R$ (inferior) y R (superior) y cuya altura es R, sostiene un cilindro de radio R y de altura $2R$. Este último sostiene, a su vez, una semiesfera de radio R. Expresar el área S de la sección transversal de la torre como función de la distancia x que media entre la sección y la base inferior del cono. Construir la gráfica de la función $S = f(x)$.

45. Una esfera de radio R lleva inscrito un cilindro. Hallar la dependencia funcional entre el volumen V del cilindro y su altura x. Indicar el dominio de definición de esta función.

46. Una esfera de radio R lleva inscrito un cono recto. Hallar la dependencia funcional entre el área de la superficie lateral S del cono y su generatriz x. Indicar el dominio de definición de esta función.

En los ejercicios 47—48 hallar los dominios de definición de las funciones que se indican:

47. 1) $y=1-\lg x$; 2) $y=\lg(x+3)$; 3) $y=\sqrt{5-2x}$;

4) $y=\sqrt{-px}$ $(p>0)$; 5) $y=\frac{1}{x^2-1}$; 6) $y=\frac{1}{x^2+1}$;

7) $y=\frac{1}{x^3-x}$; 8) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$; 9) $y=1-\sqrt{1-x^2}$;

10) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 11) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

12) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; 13) $y=\operatorname{arcsen}\frac{x}{4}$;

14) $y=\operatorname{arcsen}(x-2)$; 15) $y=\arccos(1-2x)$;

16) $y=\arccos\frac{1-2x}{4}$; 17) $y=\operatorname{arcsen}\sqrt{2x}$;

18) $y=\sqrt{1-|x|}$; 19) $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$; 20) $y=\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$;

21) $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$;

22) $y=\lg\operatorname{sen} x$; 23) $y=\arccos\frac{2}{2+\operatorname{sen} x}$;

24) $y=\log_x 2$.

48. 1) $y=\frac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$; 2) $y=\sqrt{3-x}+\operatorname{arcsen}\frac{3-2x}{5}$;

3) $y=\operatorname{arcsen}\frac{x-3}{2}-\lg(4-x)$;

4) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$;

5) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$;

6) $y=\frac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$;

7) $y=\lg\operatorname{sen}(x-3)+\sqrt{16-x^2}$;

8) $y=\sqrt{\operatorname{sen} x}+\sqrt{16-x^2}$;

9) $y=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}+\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$;

10) $y=\lg\frac{x-5}{x^2-10x+24}-\sqrt[3]{x+5}$;

11) $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$;

12) $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

13) $y=(x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}$; 14) $y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$;

15) $y=\lg[1-\lg(x^2-5x+16)]$.

49. ¿Son idénticas las funciones

1) $f(x)=\frac{x}{x^2}$ y $\varphi(x)=\frac{1}{x}$; 2) $f(x)=\frac{x^2}{x}$ y $\varphi(x)=x$;

3) $f(x)=x$ y $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$; 4) $f(x)=\lg x^2$ y $\varphi(x)=2\lg x$?

50. Pensar un ejemplo de la función dada en forma analítica:

1) definida sólo en el intervalo $-2\leqslant x\leqslant 2$;

2) definida sólo en el intervalo $-2<x<2$ y no definida para $x=0$;

3) definida para todos los valores reales de x, a excepción de $x=2$, $x=3$, $x=4$.

51. Hallar los dominios de definición de las ramas unívocas de la función $y=\varphi(x)$ dada mediante la ecuación:

1) $y^2-1+\log_2(x-1)=0$; 2) $y^4-2xy^2+x^2-x=0$.

Características del comportamiento de funciones

52. $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$; indicar el dominio de definición de la función $f(x)$ y mostrar que dicha función es no negativa.

53. Hallar los intervalos de signos constantes y las raíces de la función:

1) $y=3x-6$; 2) $y=x^2-5x+6$; 3) $y=2^{x-1}$;

4) $y=x^3-3x^2+2x$; 5) $y=|x|$.

54. ¿Qué funciones de las que se dan a continuación son pares, impares y qué funciones no son pares ni impares?

1) $y=x^4-2x^2$; 2) $y=x-x^2$; 3) $y=\cos x$; 4) $y=2^x$;

5) $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ 6) $y=\operatorname{sen} x$; 7) $y=\operatorname{sen} x-\cos x$;

8) $y=1-x^2$; 9) $y=\operatorname{tg} x$; 10) $y=2^{-x^2}$;

11) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$; 12) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$; 13) $y=\frac{x}{a^x-1}$;

14) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$; 15) $y=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$;

16) $y=2^{x-x^4}$; 17) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

55. Presentar cada una de las siguientes funciones como suma de una función par y otra impar:

1) $y=x^2+3x+2$; 2) $y=1-x^3-x^4-2x^5$;

3) $y=\operatorname{sen} 2x+\cos\frac{x}{2}+\operatorname{tg} x$.

56. Demostrar que $f(x)+f(-x)$ es una función par y que $f(x)-f(-x)$ es una función impar.

57. Presentar las siguientes funciones como suma de una función par y otra impar:

1) $y=a^x$; 2) $y=(1+x)^{100}$ (véase el ejercicio 56).

58. Demostrar que el producto de dos funciones pares es una función par, el de dos impares es una función par y el de una par y otra impar es una impar.

59. ¿Qué funciones de las que se dan a continuación son periódicas?

1) $y = \text{sen}^2 x$; 2) $y = \text{sen}\, x^2$; 3) $y = x \cdot \cos x$;

4) $y = \text{sen}\, \frac{1}{x}$; 5) $y = 1 + \text{tg}\, x$; 6) $y = 5$;

7) $y = [x]$; 8) $y = x - [x]$.

(La función $[x]$ se define así: si x es un número entero, entonces $[x] = x$. Si x no es número entero, $[x]$ es igual al número entero máximo menor que x. Así, se tiene $[2] = 2$; $[3, 25] = 3$; $[-1{,}37] = -2$.)

60. Construir la gráfica de una función periódica tal que su período sea $T = 1$ y que en su intervalo semiabierto $[0, 1)$ sea dada mediante la fórmula:

1) $y = x$; 2) $y = x^2$.

61. Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos en que las funciones son constantes

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| - x$.

62. Indicar los valores máximo y mínimo de las funciones

1) $y = \text{sen}^2 x$; 2) $y = \cos x^3$; 3) $y = 1 - \text{sen}\, x$; 4) $y = 2^{x^2}$.

63. Mediante la adición de gráficas construir la gráfica de la función $y = f(x) + \varphi(x)$:

1) para las gráficas presentadas en la fig. 6;

2) para las gráficas presentadas en la fig. 7.

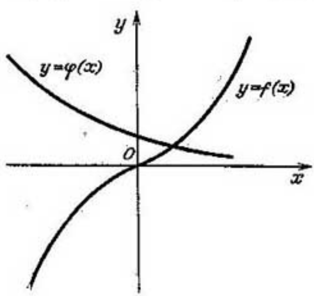

Fig. 6

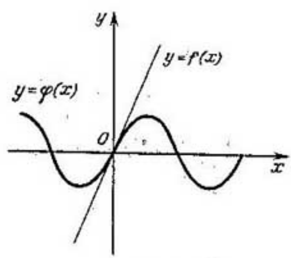

Fig. 7

64. Conociendo la gráfica de la función $y = f(x)$ construir la gráfica de la función:

1) $y = |f(x)|$; 2) $y = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)]$;

3) $y = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)]$.

§ 3. Funciones más simples

Función lineal

65. Sean la intensidad de corriente $I = 0{,}8$ A y la tensión $E = 2{,}4$ V. Aplicando la ley de Ohm, expresar analíticamente la dependencia entre la intensidad de corriente y la tensión. Construir la gráfica de la función hallada.

66. Un vaso de forma cualquiera contiene un líquido. A la profundidad $h = 25{,}3$ cm la presión del líquido es $p = 18{,}4$ gf/cm^2.

a) Formar la función que exprese la dependencia entre la presión y la profundidad;

b) determinar la presión a la profundidad de $h = 14{,}5$ cm;

c) ¿a qué profundidad la presión resultará igual a 26,5 gf/cm^2?

67. Un cuerpo efectúa movimiento rectilíneo bajo la acción de la fuerza F. Partiendo de la ley de Newton escribir la función que exprese la dependencia entre la fuerza F y la aceleración w, si se sabe que cuando el cuerpo se mueve experimentando una aceleración de 12 m/s^2, en su trayecto $s = 15$ m se realiza un trabajo igual a $A = 32$ julios.

68. Determinar la función lineal $y = ax + b$ valiéndose de los siguientes datos:

1)

x	y
0	4
3	6

2)

x	y
2	4,3
$-1{,}6$	0

3)

x	y
2,5	7,2
3,2	6,8

69. Cierta cantidad de gas ocupó el volumen de 107 cm^3 a la temperatura 20° C; para una temperatura igual a 40° C el volumen llegó a ser igual a 114 cm^3.

a) Aplicando la ley de Gay-Lussac formar la función que exprese la dependencia entre el volumen V del gas y la temperatura t.

b) ¿Cuál sería el volumen a 0° C?

70. Al comenzar un punto su movimiento uniforme a lo largo de una recta, al cabo de 12 s alcanza un punto que dista $+32{,}7$ cm de un cierto punto de dicha recta, mientras que al cabo de 20 s la distancia llegó a ser igual a $+43{,}4$ cm. Expresar la distancia s como función del tiempo t.

71. En un circuito la tensión va disminuyendo uniformemente (de acuerdo con la ley lineal). Al comienzo del experimento la tensión era igual a 12 V y al final del mismo experimento, que duró 8 s, la tensión descendió hasta 6,4 V. Expresar la tensión V como función del tiempo t y construir la gráfica de esta función.

72. Hallar el incremento de la función lineal $y = 2x - 7$ al pasar la variable independiente x del valor $x_1 = 3$ al de $x_2 = 6$.

73. Hallar el incremento de la función lineal $y = -3x + 1$, correspondiente al incremento de la variable independiente $\Delta x = 2$.

74. La función $y = 2{,}5x + 4$ tuvo el incremento $\Delta y = 10$. Hallar el incremento del argumento.

75. Dados la función $y = \frac{x-a}{a^2-b^2}$ y el valor inicial de la variable independiente $x_1 = a - b$, hallar el valor finito x_2 de la variable independiente x para el cual el argumento $\Delta y = \frac{1}{a-b}$.

76. La función $\varphi(x)$ viene dada así: $\varphi(x) = \frac{1}{2}x + 2$ para $-\infty < x \leqslant 2$; $\varphi(x) = 5 - x$ para $2 \leqslant x < +\infty$. Hallar, analítica y gráficamente, las raíces de la ecuación $\varphi(x) = 2x - 4$.

77. Construir la gráfica de la función:

1) $y = |x + 1| + |x - 1|$; 2) $y = |x + 1| - |x - 1|$;
3) $y = |x - 3| - 2|x + 1| + 2|x| - x + 1$.

78*. ¿Para qué valores de x es válida la desigualdad

$$|f(x) + \varphi(x)| < |f(x)| + |\varphi(x)|,$$

si $f(x) = x - 3$ y $\varphi(x) = 4 - x$?

79. ¿Para qué valores de x es válida la desigualdad

$$|f(x) - \varphi(x)| > |f(x)| - |\varphi(x)|,$$

si $f(x) = x$ y $\varphi(x) = x - 2$?

80. La función $f(x)$ está definida así: en cada uno de los intervalos $n \leqslant x < n + 1$, donde n es un número entero positivo, $f(x)$ varía linealmente, siendo $f(n) = -1$, $f\left(n + \frac{1}{2}\right) = 0$. Construir la gráfica de esta función.

Función cuadrática

81. Construir la gráfica e indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

1) $y = \frac{1}{2}x^2$; 2) $y = x^2 - 1$; 3) $y = |x^2 - 1|$; 4) $y = 1 - x^2$;
5) $y = x^2 - x + 4$; 6) $y = x - x^2$; 7) $y = |x - x^2|$;
8) $y = 2x^2 + 3$; 9) $y = 2x^2 - 6x + 4$; 10) $y = -3x^2 + 6x - 1$;
11) $y = |-3x^2 + 6x - 1|$; 12) $y = -x|x|$.

82. Escribir en forma analítica la función unívoca definida en el intervalo $(-\infty, 6]$, si se sabe que su gráfica consta de los puntos del eje Ox cuyas abscisas son menores que -3, de los puntos de la parábola que es simétrica respecto al eje Oy y que pasa por los puntos $A(-3, 0)$, $B(0, 5)$, y de los puntos del segmento CD cuyos extremos son $C(3, 0)$ y $D(6, 2)$.

83. Hallar el valor máximo de la función:
1) $y = -2x^2 + x - 1$; 2) $y = -x^2 - 3x + 2$;
3) $y = 5 - x^2$; 4) $y = -2x^2 + ax - a^2$; 5) $y = a^2x - b^2x^2$.

84. Hallar el valor mínimo de la función:
1) $y = x^2 + 4x - 2$; 2) $y = 2x^2 - 1{,}5x + 0{,}6$; 3) $y = 1 - 3x + 6x^2$;
4) $y = a^2x^2 + a^4$; 5) $y = (ax + b)(ax - 2b)$.

85. Presentar el número a como suma de dos sumandos tales que su producto sea el mayor posible.

86. Presentar el número a como suma de dos números tales que la suma de sus cuadrados sea la menor posible.

87. Se debe levantar una valla de madera al lado de un muro de piedra para cercar un terreno rectangular. La longitud total de dicha valla es igual a 8 m. ¿Cuál debe ser la longitud de la parte de pared paralela al muro para que la valla abarque la mayor área posible?

88. La suma de los lados de un ángulo dado de un triángulo es igual a 100 cm. ¿Cuánto deben medir los lados para que el área del triángulo sea la mayor posible?

89. ¿Cuál de los cilindros cuyo perímetro dado de la sección axial es igual a $P = 100$ cm tiene la mayor área lateral?

90. ¿Cuál de los conos cuyo perímetro de la sección axial es igual a P, tiene la mayor área lateral?

91. Consideremos un sólido cuya forma es la de un cilindro circular recto y que tiene colocado encima de él un cono (de la misma base). El ángulo del vértice del cono es igual a 60°. El perímetro de la sección axial es igual a 100 cm. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su superficie lateral sea la mayor posible?

92. Un triángulo isósceles de base a y altura h lleva inscrito un rectángulo de la manera representada en la fig. 8. ¿Cuál debe ser la altura del rectángulo para que su superficie sea la mayor posible?

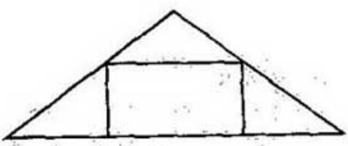

Fig. 8

93. Un cono recto dado lleva inscrito un cilindro de manera que los planos y los centros de las bases circulares del cilindro y del cono coinciden. ¿Cuál debe ser la relación de los radios de las bases del cilindro y del cono para que la superficie lateral del cilindro sea la mayor posible?

94. Sea dado un cono recto circular cuyo radio de base es igual a R y su altura, H. Lleva inscrito un cilindro de manera que los planos y los centros de las bases circulares del cono y del cilindro coinciden. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que la superficie total del mismo sea la mayor posible? Considerar los casos $H > 2R$ y $H \leqslant 2R$.

95. ¿Cuál debe ser el radio de un círculo para que el sector cuyo perímetro es igual a un número dado P tenga la mayor superficie posible?

96. Una ventana de forma rectangular está rematada en la parte superior por un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es igual a P. ¿Cuál debe ser la base a del rectángulo para que la ventana tenga la mayor superficie posible?

97. Una ventana de forma rectangular está rematada en la parte superior por un semicírculo. ¿Cuál debe ser la base del rectángulo para que la ventana tenga la mayor superficie siendo el perímetro igual a 2 m?

98. De un cartón de forma rectangular de dimensiones $30 \times \times 50$ cm² se deben cortar cuadrados de manera que doblando la hoja a lo largo de las líneas punteadas (véase la fig. 9) se obtenga una

Fig. 9

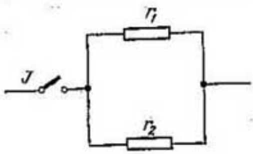

Fig. 10

caja de superficie lateral máxima. Hallar el lado de los cuadrados cortados.

99. Es necesario fabricar un modelo del paralelepípedo recto de base cuadrada con un alambre que mide 120 cm. ¿Cuánto debe medir la cara de la base para que la superficie total del paralelepípedo sea la mayor posible?

100. Se debe cortar un alambre de longitud a en dos partes. Una parte estará destinada para hacer un cuadrado, la otra, para un triángulo equilátero. ¿De qué manera debe ser cortado el alambre para que la suma de las áreas de las figuras obtenidas sea la menor posible?

101. En la recta $y = x$ hallar un punto tal que la suma de los cuadrados de la distancia que media entre éste y los puntos $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, b)$ sea la menor posible.

102. En la recta $y = x + 2$ hallar un punto tal que la suma de los cuadrados de la distancia que media entre éste y las rectas $3x - 4y + 8 = 0$ y $3x - y - 1 = 0$ sea la menor posible.

103. La corriente eléctrica J se distribuye por dos ramas de resistencias r_1 y r_2 (véase la fig. 10). Mostrar que las pérdidas menores de la energía necesaria para calentar el conductor en la unidad de tiempo corresponden a una distribución de las corrientes inversamente proporcional a las resistencias de las ramas. (Partir de la ley: la cantidad de calor desprendida es $Q = 0{,}24\, J^2Rt$.)

104. Trazar la parábola $y = x^2$ y, valiéndose de ella, resolver gráficamente las siguientes ecuaciones:
1) $x^2 - x - 2{,}25 = 0$; 2) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; 3) $3{,}1x^2 - 14x + 5{,}8 = 0$;
4) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; 5) $3x^2 - 8x + 7 = 0$.

105. La función $\varphi(x)$ viene dada así: $\varphi(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ para $-\infty < x \leqslant \frac{11}{3}$; $\varphi(x) = 1 + x$ para $\frac{11}{3} \leqslant x < +\infty$. Analítica y gráficamente hallar todas las raíces reales de la ecuación $[\varphi(x)]^2 = 7x + 25$.

106. Señalar el dominio de definición de la función

$$y = \lg(ax^2 + bx + c).$$

107. Hallar $f(x + 1)$, dada la función $f(x - 1) = 2x^2 - 3x + 1$

108*. Mostrar que la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x + c}{x^2 + 4x + 3c}$ toma cualquier valor real si $0 < c \leqslant 1$.

Función homográfica

109. Aplicando la ley de Boile y Mariotte, hallar la función que exprese la dependencia entre el volumen del gas y la presión a $t =$ const si es sabido que a la presión 760 mm Hg el volumen del gas es igual a 2,3 *l*. Dibujar la gráfica de esta función.

110. La variable x es inversamente proporcional a y; y es inversamente proporcional a z; z, a su vez, es inversamente proporcional a v. ¿Qué dependencia existe entre x y v?

111. La variable x es inversamente proporcional a y; y es directamente proporcional a z, z es directamente proporcional a u, que es a su vez inversamente proporcional a v. ¿Qué dependencia existe entre x y v?

112. Durante la electrólisis la cantidad de sustancia que se desprende en el electrodo es directamente proporcional a la intensidad de corriente; ésta es proporcional a la conductibilidad del electrólito, esta última es proporcional a la concentración del electrólito. Dada cierta cantidad de sustancia, la concentración es inversamente proporcional al volumen del solvente. ¿Qué dependencia existe entre la cantidad de sustancia desprendida en el electrodo y el volumen del solvente?

113. Construir la gráfica de la función homográfica:

1) $y=\frac{x-1}{x-2}$; 2) $y=\frac{2x}{3-x}$; 3) $y=\frac{2x-5}{3x-7,5}$;

4) $y=\frac{x}{1-\frac{1}{2}x}$; 5) $y=\frac{4-3x}{3-2,25x}$.

114. Siguiendo la gráfica hallar los valores máximo y mínimo de la función homográfica en el intervalo indicado:

1) $y=\frac{4}{x}$ $[1, 5]$; 2) $y=\frac{x}{2x-5}$ $[-1, 2]$;

3) $y=\frac{1-x}{1+x}$ $[0, 4]$.

115. Demostrar: 1) si las abscisas de los cuatro puntos $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4; y_4)$ de la gráfica de la función

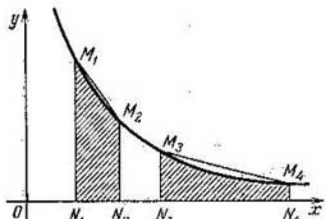

Fig. 11

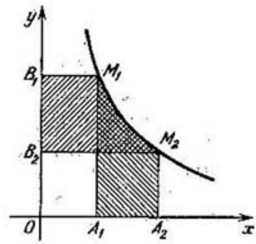

Fig. 12

$y=\frac{k}{x}$ (véase la fig. 11) se hallan en la proporción $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_3}{x_4}$, los trapecios rectilíneos $M_1M_2N_2N_1$ y $M_3M_4N_4N_3$ son equivalentes;

2) si los puntos M_1 y M_2 pertenecen a la gráfica de la función $y=\frac{k}{x}$ (la fig. 12), las áreas de las figuras $A_1M_1M_2A_2$ y $B_1M_1M_2B_2$ son equivalentes entre sí.

116. Construir la gráfica de la función $y=\frac{x^2+1}{x}$ mediante la adición gráfica.

§ 4. Función inversa. Funciones potencial, exponencial y logarítmica

Función inversa

117. Hallar la función inversa a la dada:

1) $y=x$; 2) $y=2x$; 3) $y=1-3x$; 4) $y=x^2+1$;

5) $y=\frac{1}{x}$; 6) $y=\frac{1}{1-x}$; 7) $y=x^2-2x$; 8) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$;

9) $y=10^{x+1}$; 10) $y=1+\lg(x+2)$; 11) $y=\log_x 2$;

12) $y=\frac{2^x}{1+2^x}$; 13) $y=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}+1$; 14) $y=2\operatorname{sen} 3x$;

15) $y=1+2\operatorname{sen}\frac{x-1}{x+1}$; 16) $y=4\arcsen\sqrt{1-x^2}$.

118. Demostrar que la función inversa a la función homográfica $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (considerando que $ad-bc\neq 0$) es también homográfica.

119. ¿Cuál debe ser la condición para que la función homográfica del ejercicio 118 coincida con su inversa?

120. Mostrar que si $f(x)=\sqrt[n]{a-x^n}$, $x>0$, se tiene $f[f(x)]=x$. Hallar la función inversa a la $f(x)$.

121. ¿Cuál es la característica de la gráfica de la función idéntica a su inversa?

122. La función y de x viene dada por la ecuación $y^2-1+\log_2(x-1)=0$. Hallar el dominio de definición de la función dada y escribir la función inversa a la dada.

123. La función y de x viene dada mediante la ecuación $y^2+\operatorname{sen}^3 x-y+2=0$. Hallar la función inversa a la dada.

Función potencial

124. Construir la gráfica de la función:

1) $y=\frac{1}{3}x^3$; 2) $y=-\frac{1}{2}x^3$; 3) $y=x^3+3x^2$;

4) $y=x^3-x+1$; 5) $y=-x^3+2x-2$; 6) $y=2x^{\frac{3}{2}}$;

7) $y=\frac{1}{2}x^{\frac{5}{4}}$, 8) $y=x^{0,3}$; 9) $y=x^{2,1}$; 10) $y=x^{0,62}$;

11) $y=\frac{1}{2}x^{-0,2}$; 12) $y=5x^{-2,5}$; 13) $y=1-\sqrt{|x|}$.

125. Hallar gráficamente los valores aproximados de las raíces reales de la ecuación $x+3=4\sqrt[3]{x^2}$.

126*. Dibujar la parábola cúbica $y = x^3$ y utilizarla para resolver gráficamente las ecuaciones:

1) $x^3 + x - 4 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$;

3) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$; 4) $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$.

127. De acuerdo con la condición dada formar la ecuación y resolverla gráficamente:

1) ¿El cuadrado de qué número es igual al mismo número sumado a su valor inverso?

2) Un globo de madera cuyo radio mide 10 cm y cuya densidad es igual a 0,8 g/cm³, flota sobre la superficie del agua. Hallar la altura del segmento hundido.

3) Un cubo y una pirámide de base cuadrada, ambos de madera, pesan juntos 0,8 kgf. La arista del cubo es igual al lado de la base de la pirámide. La altura de la pirámide mide 45 cm. Hallar la arista del cubo. El peso específico de la madera es igual a 0,8 gf/cm³.

128. Sea dada la función $y = x^n$, $x > 0$. ¿Para qué valores de x esta función tiene valores mayores que los de la función inversa y para qué valores de x tiene valores menores?

Funciones exponencial e hiperbólicas

129. Construir la gráfica de la función:

1) $y = -2^x$; 2) $y = 2^{x+3}$; 3) $y = \frac{1}{3} \cdot 3^x$;

4) $y = 1 - 3^{x-3}$; 5) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 6) $y = 2^{-x^2}$.

130. Valiéndose de la gráfica de la función $y = 2^x$ y sin recurrir a otros cálculos, construir la gráfica de la función:

1) $y = 2^{x-1}$; 2) $y = \frac{1}{12} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$; 3) $y = \frac{1}{3} \cdot 2^{\frac{x-1}{2}} + 1$.

131. La gráfica de la función $y = a^x$ es una línea. Mostrar que la gráfica de la función $y = k \cdot a^x$ $(k > 0)$ es la misma línea pero desplazada paralelamente al eje de coordenadas.

132. Mediante la adición gráfica construir la gráfica de la función:

1) $y = x^2 + 2^x$; 2) $y = x^2 - 2^x$.

133. Resolver gráficamente la ecuación $2^x - 2x = 0$.

134. Construir la figura limitada por las líneas $y = 2^x$, $y = \frac{1+x}{x}$ y $x = 3$. Hallar por la gráfica y de manera aproximada las coordenadas de los puntos de intersección de las líneas indicadas.

135. Hallar el mayor valor posible de n para el cual $2^x > x^n$ para todas las $x \geqslant 100$ (n es un entero).

136. Demostrar que $y = \operatorname{sh} x$ e $y = \operatorname{th} x$ son funciones impares, mientras $y = \operatorname{ch} x$ es una función par. ¿Son estas funciones periódicas?

137. Demostrar la validez de las siguientes igualdades:
1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; 2) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$;
3) $2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$; 4) $\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \alpha$;
5) $\operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta$; 6) $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
7) $1 - \operatorname{cth}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Función logarítmica

138. Construir la gráfica de la función:
1) $y = -\log_2 x$; 2) $y = \lg \frac{10}{x}$; 3) $y = |\lg x|$;
4) $y = \log_2 |x|$; 5) $y = 1 + \lg(x+2)$; 6) $y = \log_2 |1 - x|$;
7) $y = a^{\log_a x}$; 8) $y = \log_x 2$.

139. Valiéndose de la gráfica de la función $y = \lg x$, construir la gráfica de la función:
1) $y = \frac{1}{2} \lg(x+1)$; 2) $y = 2 \lg \left(\frac{x+1}{2}\right)$.

140. Sea dada la función $y = x + \lg \frac{1}{x}$. Mediante la adición gráfica construir la gráfica de la función dada y por la gráfica hallar el valor mínimo de dicha función en el semiintervalo $(0, 2]$.

141. Mostrar que la gráfica de la función $y = \log_a (x + \sqrt{x^2+1})$ es simétrica respecto al origen de coordenadas. Hallar la función inversa.

142. Demostrar que la ordenada de la gráfica de la función $y = \log_a x$ es igual a su correspondiente de la gráfica de la función $y = \log_{a^n} x$ multiplicada por n.

§ 5. Funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas

Funciones trigonométricas

143. Indicar la amplitud y el período de la armónica:
1) $y = \operatorname{sen} 3x$; 2) $y = 5 \cos 2x$; 3) $y = 4 \operatorname{sen} \pi x$;
4) $y = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$; 5) $y = \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{4}$; 6) $y = 3 \operatorname{sen} \frac{5x}{8}$.

144. Indicar la amplitud, el período, la frecuencia y la fase inicial de la armónica:

1) $y=2\operatorname{sen}(3x+5)$; 2) $y=-\cos\frac{x-1}{2}$;

3) $y=\frac{1}{3}\operatorname{sen}2\pi\left(\omega-\frac{1}{6}\right)$; 4) $y=\operatorname{sen}\frac{2t+3}{6\pi}$.

145. Construir la gráfica de la función:

1) $y=-\operatorname{sen}x$; 2) $y=1-\operatorname{sen}x$; 3) $y=1-\cos x$;

4) $y=\operatorname{sen}2x$; 5) $y=\operatorname{sen}\frac{x}{2}$; 6) $y=-2\operatorname{sen}\frac{x}{3}$;

7) $y=\cos 2x$; 8) $y=2\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

9) $y=2\operatorname{sen}\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)$; 10) $y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi x-1{,}2)$;

11) $y=2+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$; 12) $y=2\cos\frac{x-\pi}{3}$;

13) $y=|\operatorname{sen}x|$; 14) $y=|\cos x|$; 15) $y=|\operatorname{tg}x|$;

16) $y=|\operatorname{ctg}x|$; 17) $y=\sec x$; 18) $y=\operatorname{cosec}x$.

19) $y=\begin{cases}\cos x & \text{para} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 1 & \text{—"—} \quad 0<x<1,\\ \frac{1}{x} & \text{—"—} \quad 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

146. Los lados de un triángulo miden 1 cm y 2 cm, respectivamente. Construir la gráfica del área del triángulo como función del ángulo x comprendido entre dichos lados. Hallar el dominio de definición de esta función, y el valor del argumento x para el cual el área del triángulo sea máxima.

147. Un punto efectúa movimiento uniforme a lo largo de una circunferencia de radio R, con velocidad lineal v cm/s, teniendo por centro el origen de coordenadas y en el sentido contrario al de las agujas del reloj. En el momento inicial la abscisa de dicho punto era a. Formar la ecuación de la oscilación armónica de la abscisa del punto.

148. Un punto efectúa movimiento uniforme a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=1$. En el momento t_0 su ordenada era y_0, en el momento t_1, y_1. Hallar la dependencia entre la ordenada del punto y el tiempo, hallar también el período y la fase inicial de la oscilación.

149. La fig. 13 muestra un mecanismo de manivela. El volante es de radio R, la biela es de longitud a. El volante gira uniformemente en el sentido de las agujas del reloj dando n vueltas en un segundo. En el momento $t=0$ en el que la biela y la manivela formaron una misma recta (posición del punto muerto), la cruceta (A) ocupó el punto O. Hallar la dependencia entre el desplazamiento x de la cruceta (A) y el tiempo t.

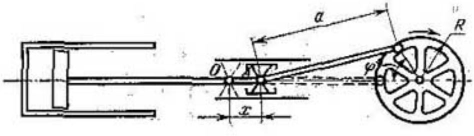

Fig. 13

150. Mediante la adición gráfica construir la gráfica de la función:

1) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$; 2) $y = \operatorname{sen} 2\pi x + \operatorname{sen} 3\pi x$;

3) $y = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3}$; 4) $y = x + \operatorname{sen} x$;

5) $y = x - \operatorname{sen} x$; 6) $y = -2^x + \cos x$.

151. Resolver gráficamente la ecuación:
1) $x = 2 \operatorname{sen} x$; 2) $x = \operatorname{tg} x$; 3) $x - \cos x = 0$;
4) $4 \operatorname{sen} x = 4 - x$; 5) $2^{-x} = \cos x$.

152. Hallar el período de la armónica compuesta:
1) $y = 2 \operatorname{sen} 3x + 3 \operatorname{sen} 2x$; 2) $y = \operatorname{sen} t + \cos 2t$;

3) $y = \operatorname{sen} \frac{\pi t}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi t}{4}$;

4) $y = \operatorname{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \operatorname{sen}\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \operatorname{sen} 5\pi t$.

153. Presentar en forma de una armónica simple:
1) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$; 2) $y = \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

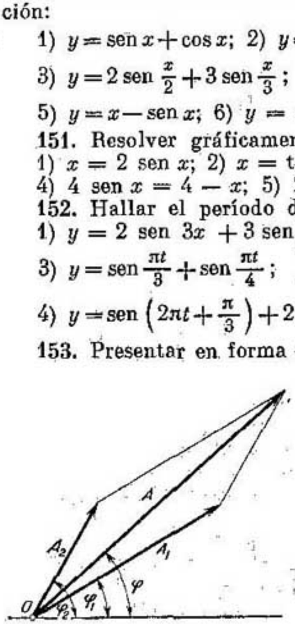

Fig. 14

154. Comprobar el siguiente procedimiento gráfico de la adición de las oscilaciones armónicas. Sean dadas las armónicas

$A_1 \operatorname{sen}(\omega x + \varphi_1)$ y $A_2 \operatorname{sen}(\omega x + \varphi_2)$.

Tracemos los vectores $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ cuyos módulos son A_1 y A_2, respectivamente, formando los ángulos φ_1 y φ_2 con el eje horizontal (véase la fig. 14). Efectuando la adición de los vectores $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$, obtendremos el vector $\boldsymbol{A}$ de módulo A inclinado hacia el eje horizontal en un ángulo φ. La A y φ serán la amplitud y la fase inicial de la suma, respectivamente

$$A_1 \operatorname{sen}(\omega x + \varphi_1) + A_2 \operatorname{sen}(\omega x + \varphi_2) = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi).$$

155*. Indicar el período de la función y construir su gráfica:

1) $y=|\operatorname{sen} x|+|\cos x|$; 2) $y=\frac{1}{2}\left(\frac{|\operatorname{sen} x|}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen} x}{|\cos x|}\right)$.

156. Hallar el dominio de definición y explicar el aspecto de la gráfica de la función:

1) $y=\lg \operatorname{sen} x$; 2) $y=\sqrt{\lg \operatorname{sen} x}$; 3) $y=\sqrt{\lg \frac{1}{|\operatorname{sen} x|}}$.

Funciones trigonométricas inversas

157. Construir la gráfica de la función:

1) $y=\operatorname{arcctg} x$; 2) $y=2 \arcsen \frac{x}{2}$; 3) $y=1+\operatorname{arctg} 2x$;

4) $y=\frac{\pi}{2}-\arccos 2x$; 5) $y=\arcsen \frac{1-x}{4}$.

158. Un sector circular de ángulo central α se arrolla engendrando un cono. Hallar la dependencia entre el ángulo ω en el vértice de dicho cono y el ángulo α, y construir la gráfica.

159. Un cuadro de altura a cuelga de la pared de modo inclinado, formándose un ángulo diedro φ entre la pared y el cuadro. Un observador que se encuentra frente a la pared, a la distancia l, ve el borde inferior del cuadro por encima de la altura de su vista (la diferencia es igual a b). Hallar la dependencia entre el ángulo γ (formado entre la vista del observador y el cuadro) y el ángulo φ.

160. Indicar la dependencia entre el ángulo φ de la vuelta que da la manivela (véase el ejercicio 149) y el desplazamiento x de la cruceta.

161. Hallar el intervalo en que varía x para el cual sea válida la identidad:

1) $\arcsen x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$; 2) $\arcsen \sqrt{x}+\arccos \sqrt{x}=\frac{\pi}{2}$;

3) $\arccos \sqrt{1-x^2}=\arcsen x$; 4) $\arccos \sqrt{1-x^2}=-\arcsen x$;

5) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$; 6) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg} \frac{1}{x}-\pi$;

7) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}=2 \operatorname{arctg} x$; 8) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}=-2 \operatorname{arctg} x$;

9) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}=\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$;

10) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} 1=\pi+\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.

162. Valiéndose de las identidades del ejercicio 161, hallar el dominio de definición y construir la gráfica de la función:

1) $y=\arccos \sqrt{1-x^2}$; 2) $y=\arcsen \sqrt{1-x}+\arcsen \sqrt{x}$;

3) $y=\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$; 4) $y=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$.

163*. Construir la gráfica de la función $y = \text{arcsen}\,(\text{sen}\,x)$. Demostrar que la función indicada es periódica y hallar su período.

164. Construir la gráfica de la función $y = \arccos\,(\cos x)$.

165. Construir la gráfica de la función $y = \text{arctg}\,(\text{tg}\,x)$.

166. Construir la gráfica de la función:

1) $y = x - \text{arctg}\,(\text{tg}\,x)$; 2) $y = x - \text{arcsen}\,(\text{sen}\,x)$;

3) $y = x\,\text{arcsen}\,(\text{sen}\,x)$; 4) $y = \arccos\,(\cos x) - \text{arcsen}\,(\text{sen}\,x)$.

§ 6. Problemas de cálculo

167. Trazar la gráfica de la función $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 7$ en el intervalo cerrado $[-4, 2]$ tomando los valores de x con intervalo de 0,2. En el eje de ordenadas elegir la escala 20 veces menor que la del eje de las abscisas. Hallar los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo cerrado $[-3, 2]$ de acuerdo a la gráfica. ¿En qué punto pasa la función del crecimiento al decrecimiento? Hallar la raíz de la función en el intervalo cerrado $[-4, 2]$. La exactitud del cálculo debe ser 0,1.

168. Al estudiar las leyes de dispersión de la metralla (en la teoría balística del tiro) es necesario construir la gráfica de la función $y = e^{A\cos^2\alpha}$; $e \approx 2{,}718$. Efectuar esta operación para $A = 2$, dando a α los valores desde 0 hasta 90° con intervalo de 5°. El cálculo debe ser efectuado con exactitud hasta 0,01.

169. Sean dados tres puntos: M_1 (1; 8;) M_2 (5; 6); M_3 (9; 3). Trazar la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que atraviese estos tres puntos. Hallar las raíces de la función $ax^2 + bx + c$. La exactitud del cálculo debe ser 0,01.

170. Una lámina de hojalata de 30×30 cm² ha de servir para fabricar una caja de 1600 cm² de capacidad, recortando de ella cuadrados iguales. ¿Cuánto debe medir el lado x de cada cuadrado cortado? La exactitud del cálculo debe ser 0,01.

171. Comprobar lo siguiente: si en la ecuación $x^4 + px^2 + qx + s = 0$ ponemos $x^2 = y$, dicha ecuación será sustituida por el sistema

$$\begin{cases} x^2 = y, \\ (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2, \end{cases}$$

donde $y_0 = \frac{1-p}{2}$, $x_0 = -\frac{q}{2}$ y $r^2 = y_0^2 + x_0^2 - s$.

Valiéndose de este procedimiento, resolver gráficamente la ecuación $x^4 - 3x^2 - 8x - 29 = 0$. La exactitud del cálculo debe ser 0,1.

172*. Utilizando el procedimiento del ejercicio 171 demostrar lo siguiente: al efectuar un cambio complementario de la variable

$x = x' + \alpha$, las raíces reales de la ecuación de cuarto grado $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pueden ser halladas gráficamente encontrando los puntos de intersección de una cierta circunferencia con la parábola $y = x^2$.

Valiéndose de este procedimiento resolver gráficamente la ecuación $x^4 + 1{,}2x^3 - 22x^2 - 39x + 31 = 0$. La exactitud del cálculo debe ser 0,1.

173. Hallar gráficamente las raíces de la ecuación e^x sen $x = 1$, $e \approx 2{,}718$, comprendidas entre 0 y 10. Indicar la fórmula general aproximada para los valores de las raíces restantes. La exactitud del cálculo ha de ser 0,01.

174. Resolver gráficamente el sistema:

$$x + y^2 = 1; \qquad 16x^2 + y = 4.$$

La exactitud del cálculo ha de ser 0,01.

175. Construir la gráfica de la función (en el sistema de coordenadas polares) para los valores del ángulo polar φ con el paso igual a $\pi/12$ *).

1) $\rho = a\varphi$ (espiral de Arquímedes); 2) $\rho = a/\varphi$ (espiral hiperbólica); 3) $\rho = e^{a\varphi}$ ($e \approx 2{,}718$) (espiral logarítmica); 4) $\rho = a$ sen 3φ (rosa de tres pétalos); 5) $\rho = a \cos 2\varphi$ (rosa de dos pétalos); 6) $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ (cardioide).

Efectuar los cálculos con exactitud hasta 0,01. Conviene elegir cualquier constante $a > 0$.

---

*) Se admite aquí que si $\rho(\varphi) < 0$, en el correspondiente rayo no existe el punto de la gráfica.

Capítulo II

Límite. Continuidad

§ 1. Definiciones principales

Funciones de argumento entero

176. La función de argumento entero toma los valores
$u_1 = 0{,}9;\quad u_2 = 0{,}99;\quad u_3 = 0{,}999;\ \ldots,\ u_n = \underbrace{0{,}999\ldots9}_{n\ \text{veces}};\ \ldots$

¿A qué es igual $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$? ¿Qué valor debe tener n para que el valor absoluto de la diferencia entre u_n y su límite no sea mayor que 0,0001?

177. La función u_n toma los valores

$$u_1=1;\quad u_2=\frac{1}{4};\qquad u_3=\frac{1}{9};\ \ldots;\qquad u_n=\frac{1}{n^2};\ \ldots$$

Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. ¿Qué valor debe tener n para que la diferencia entre u_n y su límite sea menor que un número dado positivo ε?

178. Demostrar que $u_n=\frac{n-1}{n+1}$ tiende a 1, al crecer n en forma limitada. ¿A partir de qué valor de n el valor absoluto de la diferencia entre u_n y 1 no es mayor que 10^{-4}?

179. La función v_n toma los valores

$$v_1=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1};\qquad v_2=\frac{\cos\pi}{2};\qquad v_3=\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{3};\ \ldots;\ v_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n};\ \ldots$$

Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$. ¿Cuál debe ser el valor de n para que el valor absoluto de la diferencia entre v_n y su límite no sea mayor que 0,001? ¿Toma la función v_n el valor de su propio límite?

180. El término general u_n de la sucesión $u_1=\frac{1}{2}$, $u_2=\frac{5}{4}$, $u_3=\frac{7}{8}$, $u_4=\frac{17}{16}$, ... tiene la forma $\frac{2^n-1}{2^n}$, si n es un número impar, y $\frac{2^n+1}{2^n}$ si n es un número par.

Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. ¿Cuál debe ser el valor de n para que la diferencia entre u_n y el valor absoluto de su límite no sea mayor que 10^{-4}; que un número dado positivo ε?

181. Demostrar que la sucesión $u_n=\frac{4n^2+1}{3n^2+1}$, al crecer n infinitamente, tiende al límite igual a $\frac{4}{3}$ creciendo de modo monótono. ¿A partir de qué valor de n, la magnitud $\frac{4}{3}-u_n$ no es mayor que un número dado positivo ε?

182. Demostrar que $u_n=\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$ tiene por límite 1, al crecer n infinitamente. ¿A partir de qué valor de n la magnitud $|1-u_n|$ no es mayor que un número dado positivo ε?
¿Qué carácter tiene la variable u_n? ¿Es creciente o decreciente?

183. La función v_n toma los valores de coeficientes binomiales:

$$v_1=m,\qquad v_2=\frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\qquad v_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \ldots,$$

$$\ldots,\ v_n=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[(m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n},\ \ldots,$$

donde m es un entero positivo. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

184. Demostrar que la sucesión $u_n=1+(-1)^n$ no tiene límite cuando n crece infinitamente.

185. Demostrar que al crecer n infinitamente la sucesión $u_n=\frac{2^n+(-2)^n}{2^n}$ no tiene límite, y la sucesión $v_n=\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$ sí lo tiene. ¿A qué es igual éste?

186. ¿Tiene límite la siguiente sucesión:

$$1)\ u_n=n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2};\qquad 2)\ u_n=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{\lg n}\ (n>1)?$$

187. Demostrar el teorema: si las sucesiones $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ y $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ tienden al mismo límite común a, la sucesión $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n, \ldots$ tiende al mismo límite.

188. Demostrar el teorema: si la sucesión $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ tiende al límite a, cualquier subsucesión suya (por ejemplo, $u_1, u_3, u_5, \ldots$) tiende al mismo límite.

189. La sucesión $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ tiene por límite $a\neq 0$. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$. ¿Qué se puede decir sobre este límite si $a=0$? (Citar ejemplos.)

Funciones de argumento continuo

190. Sea $y = x^2$. Cuando $x \to 2$, $y \to 4$. ¿Cuál debe ser el valor de δ para que $|x-2| < \delta$ dé por resultado $|y-4| < \varepsilon = 0{,}001$?

191. Sea $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Para $x \to 2$, tenemos $y \to \frac{3}{5}$. ¿Cuál debe ser el valor de δ para que $|x-2| < \delta$ dé por resultado $\left|y-\frac{3}{5}\right| < 0{,}1$?

192. Sea $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$. Para $x \to 3$ tenemos: $y \to \frac{1}{4}$. ¿Cuál debe ser el valor de δ para que $|x-3| < \delta$ dé por resultado $\left|\frac{1}{4}-y\right| < 0{,}01$?

193. Demostrar que sen x tiende a la unidad si $x \to \pi/2$. ¿Qué condiciones debe satisfacer x en el entorno del punto $x = \pi/2$ para que se verifique la desigualdad $1 - \operatorname{sen} x < 0{,}01$?

194. Si x crece infinitamente, la función $y = \frac{1}{x^2+1}$ tiende a cero: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. ¿Cuál debe ser el valor de N para que $|x| > N$ dé por resultado $y < \varepsilon$?

195. Si $x \to \infty$, $y = \frac{x^2-1}{x^2+3} \to 1$. ¿Cuál debe ser el valor de N para que $|x| > N$ dé por resultado $|y-1| < \varepsilon$?

§ 2. Magnitudes infinitas. Criterios de existencia del límite

Magnitudes infinitas

196. La función u_n toma los valores

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 5, \quad u_3 = 7, \quad \ldots, \quad u_n = 2n + 1, \quad \ldots$$

Demostrar que u_n es una magnitud infinitamente grande cuando $n \to \infty$. ¿A partir de qué valor de n la magnitud u_n se hace mayor que N?

197. Demostrar que el término general u_n de cualquier progresión aritmética es una magnitud infinitamente grande cuando $n \to \infty$. (¿Cuándo es positiva? ¿Negativa?) ¿Es válida esta aserción en el caso de cualquier progresión geométrica?

198. Cuando $x \to 0$ tenemos: $y = \frac{1+2x}{x} \to \infty$. ¿Qué condiciones debe satisfacer x para que se verifique la desigualdad $|y| > 10^4$?

199. Demostrar que la función $y=\frac{x}{x-3}$ es infinitamente grande cuando $x\to 3$. ¿Cuál debe ser el valor de x para que la magnitud $|y|$ sea mayor que 1000?

200. Cuando x tiende a 1, la función $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ crece infinitamente. ¿Cuál debe ser el valor de δ para que $|x-1|<\delta$ dé por resultado $\frac{1}{(x-1)^2}>N=10^4$?

201. La función $y=\frac{1}{2^x-1}$ es infinitamente grande para $x\to 0$. ¿Qué desigualdades debe satisfacer x para que $|y|$ sea mayor que 100?

202. Para $x\to\infty$ tenemos: $y=\lg x\to\infty$. ¿Cuál debe ser el valor de M para que $x>M$ dé por resultado $y>N=100$?

203. ¿Cuáles de las principales funciones elementales son acotadas en todo el dominio de su definición?

204. Demostrar que la función $y=\frac{x^2}{1+x^4}$ es acotada en todo el eje numérico.

205. ¿Es acotada la función $y=\frac{x^2}{1+x^5}$ en todo el eje numérico? ¿Sería acotada en el intervalo $(0, \infty)$?

206. ¿Es acotada la función $y=\lg \operatorname{sen} x$ en todo el dominio de su existencia?

La misma pregunta sobre la función $y=\lg\cos x$.

207. 1) Demostrar que las funciones $y=x\operatorname{sen} x$ e $y=x\cos x$ no son acotadas cuando $x\to\infty$ (indicar para cada una de ellas, por lo menos, una sucesión x_n para la cual $y_n\to\infty$).

2) ¿Serán infinitamente grandes estas funciones?

3) Construir sus gráficas.

208. Construir las gráficas de las funciones $f(x)=2^{x\operatorname{sen} x}$ y $f(x)=2^{-x\operatorname{sen} x}$. Para cada una de estas funciones indicar dos sucesiones x_n y x_n' de los valores de x tales, que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$, y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=0$.

209. ¿Para qué valores de a la función $y=a^x\operatorname{sen} x$ no es acotada cuando $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$?

210. ¿Será infinitamente grande la función no acotada:

1) $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ para $x\to 0$;

2) $f(x)=x\operatorname{arctg} x$ para $x\to\infty$;

3) $f(x)=2^x\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$ para $x\to+\infty$;

4) $f(x)=(2+\operatorname{sen} x)\lg x$ para $x\to+\infty$;

5) $f(x)=(1+\operatorname{sen} x)\lg x$ para $x\to+\infty$?

211. La función u_n toma los valores

$$u_1=2,\ u_2=\frac{3}{4},\ u_3=\frac{4}{9},\ \ldots,\ u_n=\frac{n+1}{n^2},\ \ldots$$

Demostrar que u_n es infinitesimal cuando $n\to\infty$.

212. La función u_n toma los valores

$$u_1=-7,\ u_2=-\frac{1}{2},\ u_3=\frac{1}{27},\ u_4=\frac{1}{8},\ \ldots$$
$$\ldots,\ u_n=\frac{n^2-8}{n^3},\ \ldots$$

Demostrar que u_n es infinitesimal cuando $n\to\infty$.

213. Demostrar que $y=\frac{x}{x+1}\to 0$ cuando $x\to 0$. ¿Qué condiciones debe satisfacer x para que se verifique la desigualdad $|y|<$ $<10^{-4}$?

214. Mostrar que la función $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ tiende a cero cuando $x\to\infty$. ¿Cuál debe ser el valor de N para que $y<\varepsilon$ cuando $x>N$?

215. Demostrar que si la función $f(x)$ tiene por límite a para $x\to\infty$, la función $f(x)$ es susceptible de ser representada en forma de la suma $f(x)=a+\varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es infinitesimal para $x\to\infty$.

Presentar en forma de suma las siguientes funciones:

$$1)\ y=\frac{x^3}{x^3-1};\qquad 2)\ y=\frac{x^2}{2x^2+1};\qquad 3)\ y=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Criterios de existencia del límite

216*. La función u_n toma los valores

$$u_1=\frac{1}{4},\ u_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{10},\ \ldots,\ u_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\ldots+\frac{1}{3^n+1},\ \ldots$$

Demostrar que u_n tiende a cierto límite cuando $n\to\infty$.

217. La función u_n toma los valores

$$u_1=\frac{1}{2},\ u_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4},\ u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6},\ \ldots$$
$$\ldots,\ u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 4\ldots(2n)},\ \ldots$$

Demostrar que u_n tiende a cierto límite cuando $n\to\infty$.

218. Demostrar el teorema:

Si la diferencia entre dos funciones es infinitesimal cuando la variable independiente varía de manera exactamente igual, siendo una de estas funciones creciente y la otra decreciente, las dos tienden a un mismo límite.

219. Sean dados dos números: u_0 y v_0 ($u_0 < v_0$). Los términos de las sucesiones u_n y v_n son dados por las fórmulas:

$$u_1=\frac{u_0+v_0}{2}, \quad v_1=\frac{u_0+2v_0}{3}; \quad u_2=\frac{u_1+v_1}{2}, \quad v_2=\frac{u_1+2v_1}{3};$$

en general,

$$u_n=\frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}, \qquad v_n=\frac{u_{n-1}+2v_{n-1}}{3}.$$

Partiendo del teorema expuesto en el ejercicio anterior, demostrar que las dos sucesiones u_n y v_n tienden a un mismo límite comprendido entre u_0 y v_0.

220. Dada la sucesión de números u_n:

$$u_1=\sqrt{6}, \quad u_2=\sqrt{6+u_1}, \ \ldots, \quad u_n=\sqrt{6+u_{n-1}}, \ \ldots$$

Demostrar que esta sucesión tiene límite. Hallarlo.

§ 3. Funciones continuas

221. La función y está definida de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ll} y=0 & \text{para } x<0; \\ y=x & \text{para } 0\leqslant x<1; \\ y=-x^2+4x-2 & \text{para } 1\leqslant x<3; \\ y=4-x & \text{para } x\geqslant 3. \end{array}$$

¿Es esta función continua?

222. Los radios de las bases de tres cilindros superpuestos miden 3, 2 y 1 m, respectivamente. La altura de cada uno de los tres cilindros es igual a 5 m. Expresar el área de la sección transversal del cuerpo engendrado como función de la distancia que media entre la sección y la base inferior del cilindro que ocupa la parte baja del cuerpo. ¿Será esta función continua? Construir su gráfica.

223. Sea

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{si } x\leqslant 1; \\ 3-ax^2, & \text{si } x>1. \end{cases}$$

¿Cómo debe ser elegido el número a para que la función $f(x)$ sea continua? (Construir su gráfica.)

224. Sea

$$f(x)=\begin{cases} -2\operatorname{sen} x, & \text{si } x\leqslant -\frac{\pi}{2}; \\ A\operatorname{sen} x+B, & \text{si } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}; \\ \cos x, & \text{si } x\geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Elegir los números A y B de tal modo que la función $f(x)$ sea continua. Construir su gráfica.

225. ¿En qué puntos sufren discontinuidades las funciones $y = \frac{1}{x-2}$ e $y = \frac{1}{(x+2)^2}$? Construir las gráficas de las dos. Explicar la diferencia en el comportamiento de estas funciones cerca de los puntos de discontinuidad.

226. La función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$ no está definida para $x = 1$. ¿Cuál debe ser el valor de $f(1)$ para que la función completada con este valor llegue a ser continua para $x = 1$?

227. ¿Qué géneros de discontinuidad sufren las funciones $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $y = \frac{\cos x}{x}$ para $x = 0$? Mostrar el carácter de las gráficas de estas funciones en el entorno del punto $x = 0$.

228. Decir si es continua la función dada del modo siguiente: $y = \frac{|x|}{x}$ para $x \neq 0$, $y = 0$ para $x = 0$. Construir la gráfica de esta función.

229. ¿Cuántos puntos de discontinuidad (y de qué género) tiene la función $y = \frac{1}{\lg |x|}$? Construir su gráfica.

230. La función $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ no está definida en el punto $x = 0$. ¿Es posible completar la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ de tal modo que llegue a ser continua en este punto? Construir su gráfica.

231. Decir si es continua la función definida de la manera siguiente:

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2x} \quad \text{para} \quad x \neq 0, \ f(0) = 1.$$

Construir la gráfica de esta función.

232. Construir la gráfica de la función $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$. ¿Qué valor debe tener la función $f(0)$ para que la función $f(x)$ sea continua por todas partes?

233. Demostrar que la función $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ tiene discontinuidad de primer género en el punto $x = 0$. Construir, de modo esquemático, la gráfica de esta función en el entorno del punto $x = 0$.

234. Analizar el carácter de la discontinuidad de la función $y = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$ en el punto $x = 1$. ¿Se puede definir y, cuando $x = 1$, de tal modo que la función llegue a ser continua para $x = 1$?

235. Analizar el carácter de discontinuidad de la función $y = \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ en el punto $x=0$.

236. La función $f(x)$ está definida del modo siguiente: $f(x) = (x+1)\,2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}$ para $x \neq 0$ y $f(0)=0$. Demostrar que en el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$ la función $f(x)$ toma todos los valores, sin excepción, comprendidos entre $f(-2)$ y $f(2)$, y, sin embargo, es discontinua (¿en qué punto precisamente?). Construir su gráfica.

237. Decir si es continua la función $y = \dfrac{1}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$. Esclarecer el carácter de su gráfica.

238. La función está definida del modo siguiente: si x es un número racional, $f(x)=0$; si x es un número irracional, $f(x)=x$. ¿Para qué valor de x es continua esta función?

239. Decir si es continua la función y construir su gráfica.

$$1)\ y = x-[x]; \quad 2)\ y = \frac{1}{x-[x]}; \quad 3)\ y = (-1)^{[x]}.$$

[La función $[x]$ es igual al número entero máximo no mayor que x (véase el ejercicio 59).]

240. Valiéndose de las propiedades de las funciones continuas comprobar que la ecuación $x^5-3x=1$ tiene, por lo menos, una raíz comprendida entre 1 y 2.

241*. Mostrar que: a) el polinomio de grado impar tiene, por lo menos, una raíz real; b) el polinomio de grado par tiene, por lo menos, dos raíces reales, si toma, al menos, un valor cuyo signo sea contrario del que tiene el coeficiente de su término de grado más elevado.

242. Mostrar que la ecuación $x \cdot 2^x = 1$ tiene, por lo menos, una raíz positiva no mayor que 1.

243. Mostrar que la ecuación $x = a \operatorname{sen} x + b$, donde $0 < a < 1$, $b > 0$ tiene, por lo menos, una raíz positiva siendo no mayor que $b+a$.

244*. Mostrar que la ecuación $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$, donde $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3>0$ y $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$, tiene dos raíces reales comprendidas en los intervalos (λ_1, λ_2) y (λ_2, λ_3).

§ 4. Operación de hallar los límites. Comparación de las magnitudes infinitesimales

Funciones de argumento entero

En los ejercicios 245—267 hallar los límites.

245. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$

246. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$

247. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

248. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$

249. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$.

250. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$.

251. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$.

252. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

253. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

254. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$

255. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$.

256. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$.

257. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

258. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

259. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

260. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

261. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$.

262. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.

263. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{n^2+1}\right)$.

264*. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}\right)$.

265. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

266. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$.

267. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$.

Función de argumento continuo

En los ejercicios 268—304 hallar los límites.

268. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$.

269. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$

270. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$.

271. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

272. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

273. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

274. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$. $\frac{1}{2}$

275. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. 6

276. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. I

277. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$. -1

278. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right]$. ∞

279. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$.

280. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m y n son números enteros).

281. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

282. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

283. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$.

284. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$.

285. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

286. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

287. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right]$.

288. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$.

289. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

290. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

291. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[8]{x^8+x^7+1}-x}$.

292. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

293. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

294. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

295. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

296. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

297. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

298. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

299. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

300. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

301. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(a>b)$.

302. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ (n y m son números enteros).

303*. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

304. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

305. ¿De qué manera varían las raíces de la ecuación cuadrada $ax^2+bx+c=0$ cuando b y c conservan sus valores constantes $(b\neq0)$ y la magnitud a tiende a cero?

En los ejercicios 306—378 hallar los límites.

306. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

307. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

308. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ *).

309. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

310. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$.

311. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$.

312. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

313. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$.

---

314. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}$.

315. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}kx}{x}$.

316. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\beta x}$.

317. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{sen}5x}$.

318. $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha^n)}{(\operatorname{sen}\alpha)^m}$ (n y m son números enteros positivos).

---

* En los ejemplos en que se presenta $x\to\pm\infty$ deben ser considerados separadamente los casos de $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$.

319. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\arcsen x}{3x}$.

320. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-\arcsen x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

321. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

322. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \operatorname{sen} 2x}$.

323. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$.

324. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\operatorname{sen} x-\cos x}$.

325. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{\alpha^3}$.

326. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^3\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha}$.

327. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

328. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

329. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\operatorname{sen} x)^2}}$.

330. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$.

331. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right) \operatorname{tg} x$.

332. $\lim\limits_{\alpha\to \pi} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}$.

333. $\lim\limits_{z\to 1} (1-z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$.

334. $\lim\limits_{y\to a} \left(\operatorname{sen}\frac{y-a}{2}\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi y}{2a}\right)$.

335. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos 2x}$.

336. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

337. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\operatorname{sen}\frac{x}{4}\right)}$.

338. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(2x\operatorname{tg} x-\frac{\pi}{\cos x}\right)$.

339. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$.

340. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

341. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$.

342. $\lim\limits_{\alpha\to \beta} \frac{\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

343. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+2h)-2\operatorname{sen}(a+h)+\operatorname{sen} a}{h^2}$.

344. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2h)-2\operatorname{tg}(a+h)+\operatorname{tg} a}{h^2}$.

345. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$.

346. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{tg} x}$.

347. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\operatorname{sen} x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

348. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

349. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg} 3x}-\sqrt[3]{1-\operatorname{arcsen} 3x}}{\sqrt{1-\operatorname{arcsen} 2x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg} 2x}}$.

350*. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

---

351. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

352. $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{t}\right)^t$.

353. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

354. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

355. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

356. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

357. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

358. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$.

359. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x$.

360. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

361. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

362. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

363. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cosec} x}$.

364. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

365. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x}$.

366. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

367. $\lim\limits_{x\to\infty} \{x[\ln(x+a)-\ln x]\}$.

368. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

369. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h-1}{h}$.

370. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.

371. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$.

372*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

373. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$.

374. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} 2x}-e^{\operatorname{sen} x}}{x}$.

375. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

376. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

377. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)$.

378. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{th} x$.

Diversos límites

En los ejercicios 379—401 hallar los límites.

379. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(ax+1)^n}{x^n+A}$. Considerar separadamente los casos en que n es: 1) un número entero positivo, 2) un número entero negativo, 3) cero.

380. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})$.

381. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a^x}{a^x+1}$ $(a>0)$.

382. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $(a>0)$.

383. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

384. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

385. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}$.

386. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

387. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+3h)-3\operatorname{sen}(a+2h)+3\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h^3}$.

388. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x\,(\sqrt{2\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x+4}-\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+6\operatorname{sen} x+2})$.

389. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

390*. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\,\ldots\,\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

391. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

392. $\lim\limits_{x\to\infty} (\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$.

393*. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

394. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+2}\right)$.

395*. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

396. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^n}\right)^x$ $(n>0)$.

397*. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$.

398. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}$.

399. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}}$.

400. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$.

491. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+a\operatorname{sen} bx)^{\frac{1}{x}}$.

Comparación de magnitudes infinitesimales

402. La magnitud infinitesimal u_n toma los valores

$$u_1=1,\quad u_2=\frac{1}{2},\quad u_3=\frac{1}{3},\ \ldots,\ u_n=\frac{1}{n},\ \ldots,$$

y la magnitud infinitesimal v_n respectivamente

$$v_1=1,\quad v_2=\frac{1}{2!},\quad v_3=\frac{1}{3!},\ \ldots,\ v_n=\frac{1}{n!},\ \ldots$$

Comparar u_n y v_n. ¿Cuál de las dos es de orden infinitesimal superior?

403. La función u_n, toma los valores

$$u_1=0,\quad u_2=\frac{3}{8},\quad u_3=\frac{8}{27},\ \ldots,\ u_n=\frac{n^2-1}{n^3},\ \ldots,$$

y la función v_n, respectivamente

$$v_1=2,\quad v_2=\frac{5}{8},\quad v_3=\frac{10}{27},\ \ldots,\ v_n=\frac{n^2+1}{n^3},\ \ldots$$

Comparar estas dos magnitudes infinitesimales.

404. La magnitud infinitesimal u_n toma los valores

$$u_1=0,\quad u_2=\frac{1}{4},\quad u_3=\frac{2}{9},\ \ldots,\ u_n=\frac{n-1}{n^2},\ \ldots,$$

y la magnitud infinitesimal v_n, respectivamente

$$v_1=3,\quad v_2=\frac{5}{4},\quad v_3=\frac{7}{9},\ \ldots,\ v_n=\frac{2n+1}{n^2},\ \ldots$$

Comprobar que u_n y v_n son infinitesimales del mismo orden, pero no equivalentes.

405. Las funciones $y=\frac{1-x}{1+x}$ e $y=1-\sqrt{x}$ son infinitesimales cuando $x\to 1$. ¿Cuál de las dos es de orden infinitesimal superior?

406. Dada la función $y=x^3$, mostrar que Δy y Δx cuando $\Delta x\to 0$ y $\Delta x\neq 0$, son infinitesimales del mismo orden.

Comprobar que la magnitud Δy es infinitesimal de orden superior que Δx cuando $x=0$.

¿Para qué valor de x son equivalentes los incrementos Δy y Δx?

407. Comprobar que las magnitudes infinitesimales $1-x$ y $1-\sqrt[3]{x}$ son del mismo orden infinitesimal cuando $x\to 1$. ¿Son equivalentes?

408. Sea $x\to 0$. Entonces $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}$ $(a>0)$ es una magnitud infinitesimal. Determinar su orden respecto a x.

409. Definir el orden, respecto a x, de la función infinitesimal para $x\to 0$:

1) $x^3+1000x^2$; 2) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$; 3) $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$; 4) $\frac{7x^{10}}{x^3+1}$.

410. Demostrar que los incrementos de las funciones $u = a\sqrt{x}$ y $v = bx^2$ para $x > 0$ y para el incremento general $\Delta x \to 0$ son del mismo orden infinitesimal. ¿Para qué valor de x son equivalentes (a y b son distintas de cero)?

411. Mostrar que cuando $x \to 1$ las magnitudes infinitesimales $1 - x$ y $a(1 - \sqrt[k]{x})$, donde $a \neq 0$ y k es un número entero positivo, son del mismo orden infinitesimal. ¿Para qué valor de a son equivalentes?

412. Demostrar que las funciones $\sec x - \operatorname{tg} x$ y $\pi - 2x$ son infinitesimales del mismo orden cuando $x \to \pi/2$. ¿Son equivalentes?

413. Demostrar que las magnitudes infinitesimales $e^{2x} - e^{x}$ y $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x$ son equivalentes cuando $x \to 0$.

414. Definir el orden de la función infinitesimal respecto a x cuando $x \to 0$:

$$1)\ \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1;\quad 2)\ \sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x};\quad 3)\ e^{\sqrt{x}}-1;$$

$$4)\ e^{\operatorname{sen} x}-1;\quad 5)\ \ln(1+\sqrt{x\operatorname{sen} x});\quad 6)\ \sqrt{1+x^2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2};$$

$$7)\ e^{x}-\cos x;\quad 8)\ e^{x^2}-\cos x;\quad 9)\ \cos x-\sqrt[3]{\cos x};$$

$$10)\ \operatorname{sen}(\sqrt{1+x}-1);\quad 11)\ \ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^{x}-1)^2};$$

$$12)\ \operatorname{arcsen}(\sqrt{4+x^2}-2).$$

Algunos problemas de geometría

415. Consideremos un triángulo equilátero de lado a. Sus tres alturas sirven para engendrar un nuevo triángulo equilátero y así sucesivamente n veces. Hallar el límite de la suma de las áreas de todos los triángulos cuando $n \to \infty$.

416. Un círculo de radio R lleva inscrito un cuadrado; éste, lleva inscrito un círculo el cual, a su vez, tiene inscrito un cuadrado, y así sucesivamente n veces. Hallar el límite de la suma de las áreas de todos los círculos y el de la suma de las áreas de todos los cuadrados cuando $n \to \infty$.

417. Un triángulo isósceles rectángulo cuya base está dividida en $2n$ partes iguales lleva inscrita una figura escalonada (véase la fig. 15). Demostrar que la diferencia entre el área del triángulo y la figura escalonada es infinitesimal cuando n crece infinitamente.

418. Un triángulo isósceles rectángulo cuyo cateto es igual a a, tiene dividida su hipotenusa en n partes iguales. De los puntos de división están trazadas rectas paralelas a los catetos resultando una línea quebrada, $AKLMNOPQRTB$ (véase la fig. 16), cuya longitud es igual a $2a$ para cualquier n. De ahí que el límite de su longitud es igual a $2a$. Pero, por otra parte, la línea quebrada va aproximándose infinitamente a la hipotenusa del triángulo cuando n crece infinitamente. Por consiguiente, la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las longitudes de los catetos. Este razonamiento encierra un error. Hallarlo.

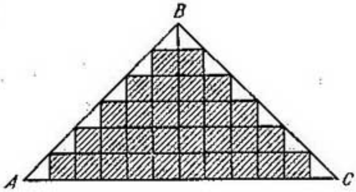

Fig. 15

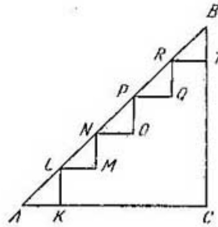

Fig. 16

419. El segmento AB cuya longitud es a, está dividido en partes iguales por n puntos, desde los cuales se han trazado rayos en ángulos

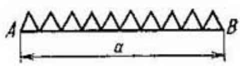

Fig. 17

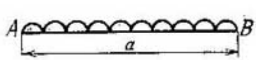

Fig. 18

$\frac{\pi}{2n}$ (véase la fig. 17). Hallar el límite de la longitud de dicha línea quebrada cuando n crece infinitamente. Comparar con el resultado del ejercicio anterior.

420. El segmento AB cuya longitud es a está dividido en n partes iguales. Los pequeños segmentos resultantes sirven de cuerdas y subtienden arcos de circunferencia, cada uno de los cuales es igual a π/n radián (véase la fig. 18). Hallar el límite de la longitud de la línea resultante cuando $n \to \infty$. ¿Cómo cambiaría el resultado si las cuerdas subtendiesen una semicircunferencia?

421. Una circunferencia cuyo radio es R está dividida por n puntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$ en partes iguales. Cada uno de los referidos puntos sirve para trazar desde él un arco de circunferencia (cuyo radio es de r) hasta que se corte con otros arcos trazados desde los puntos vecinos (véase la fig. 19). Hallar el límite de la longitud de la línea cerrada resultante cuando n crece infinitamente.

422. Dos círculos de radios R y r respectivamente ($R > r$), tocan el eje OY en el origen de coordenadas y están colocados a la dere-

cha del eje (véase la fig. 20). ¿De qué orden, respecto a x, son el segmento infinitesimal MM' y el ángulo infinitesimal α cuando $x \to 0$?

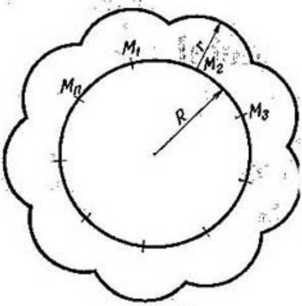

Fig. 19

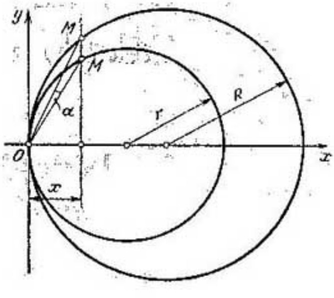

Fig. 20

423. El segmento lineal OP une el centro de una circunferencia con el punto P, que se halla fuera de aquélla. De éste trazamos una tangente PT a la circunferencia. Del punto T bajamos una perpendicular, TN, sobre la recta OP. El punto de intersección de la recta OP con la circunferencia es A. Demostrar que los segmentos AP y AN son infinitesimales equivalentes cuando $P \to A$.

424. En los puntos extremos y medio del arco AB de una circunferencia se han trazado las tangentes y los puntos A y B se han unido por una cuerda. Demostrar que la razón de las áreas de dos triángulos resultantes tiende a 4, disminuyendo infinitamente el arco AB.

Problemas de cálculo

425. Partiendo de la equivalencia de las funciones $\sqrt{1+x}-1$ y $\frac{1}{2}x$, cuando $x \to 0$, calcular aproximadamente: 1) $\sqrt{105}$; 2) $\sqrt{912}$; 3) $\sqrt{260}$; 4) $\sqrt{1632}$; 5) $\sqrt{0{,}31}$; 6) $\sqrt{0{,}021}$.

426. Mostrar que las funciones $\sqrt[n]{1+x}-1$ y x/n son infinitesimales equivalentes cuando $x \to 0$. Valerse de ello para calcular aproximadamente las raíces: 1) $\sqrt[3]{1047}$; 2) $\sqrt[3]{8144}$; 3) $\sqrt[5]{1{,}1}$; 4) $\sqrt[5]{1080}$. Hallar el valor de las referidas raíces en la tabla logarítmica. Comparar los resultados.

427. Valiéndose de la equivalencia de $\ln(1+x)$ y x cuando $x \to 0$, calcular aproximadamente los logaritmos naturales (neperianos) de los siguientes números: 1,01; 1,02; 1,1; 1,2. Hallar los logaritmos decimales de los mismos números y compararlos con los datos presentados en la tabla.

Capítulo III

Derivada y diferencial. Cálculo diferencial.

§ 1. Derivada. Velocidad de variación de la función

Algunos problemas de física

428. Dada la ecuación del movimiento rectilíneo del punto:

$$s = 5t + 6,$$

hallar la velocidad media del movimiento: a) en los primeros 6 segundos, b) en el intervalo de tiempo transcurrido entre el final del tercer segundo hasta el final del sexto segundo.

429. El punto M va alejándose del punto inmóvil A de modo que la distancia AM aumenta siendo proporcional al cuadrado de tiempo. Al transcurrir 2 min desde que comenzó el movimiento, la distancia AM era igual a 12 m. Hallar la velocidad media del movimiento: a) en los primeros 5 min; b) en el intervalo de tiempo desde $t = 4$ min hasta $t = 7$ min; c) en el intervalo de tiempo desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$.

430. Dada la ecuación del movimiento rectilíneo:

$$s = t^3 + \frac{3}{t},$$

hallar la velocidad media del movimiento en el intervalo de tiempo desde $t = 4$ hasta $t = 4 + \Delta t$, poniendo $\Delta t = 2$; 1; 0,1; 0,03.

431. Un cuerpo efectúa la caída libre de acuerdo con la ley $s = \frac{gt^2}{2}$, donde g ($\approx 9{,}80$ m/s^2) es la aceleración de la gravedad. Hallar la velocidad media del movimiento en el intervalo de tiempo desde $t = 5$ s hasta $(t + \Delta t)$s, poniendo $\Delta t = 1$s; 0,1s; 0,05 s; 0,001s; hallar la velocidad del cuerpo en caída libre al final del quinto y del décimo segundos. Obtener la fórmula de la velocidad del cuerpo en caída libre para cualquier momento de tiempo t.

432. Consideremos una barra delgada de estructura heterogénea AB cuya longitud $L = 20$ cm. La masa de un segmento AM aumenta proporcionalmente al cuadrado de la distancia entre el punto M

y el punto A, siendo la masa del segmento $AM = 2$ cm igual a 8 g. Hallar: a) la densidad media lineal del segmento $AM = 2$ cm de la barra; b) de toda la barra; c) la densidad de la barra en el punto M.

433. La masa (en g) de una barra delgada de estructura heterogénea AB, que mide 30 cm, está distribuida de acuerdo con la ley $m = 3\,l^2 + 5\,l$, donde l es la longitud de un segmento de la barra medida a partir del punto A. Hallar: 1) la densidad media lineal de la barra; 2) la densidad lineal: a) en el punto que dista $l = 5$ cm del punto A; b) en el mismo punto A; c) en el extremo de la barra;

434. La fórmula $Q = t + 0{,}00002\ t^2 + 0{,}0000003\ t^3$ establece la cantidad de calor Q (en calorías) necesaria para que la temperatura de 1 g de agua pase de 0 a t°C. Calcular la capacidad calorífica del agua para $t = 30°$, $t = 100°$.

435*. La velocidad angular de la rotación uniforme es definida como la razón del ángulo de giro respecto al correspondiente intervalo de tiempo. Dar la definición de la velocidad angular de la rotación no uniforme.

436. Si la desintegración radiactiva se efectuase uniformemente, deberíamos comprender bajo la velocidad de desintegración la cantidad de sustancia desintegrada en la unidad de tiempo. Sin embargo, en realidad dicho proceso se verifica de modo no uniforme. Dar la definición de la velocidad de desintegración radiactiva.

437. La intensidad de la corriente continua es definida como la cantidad de electricidad que pasa por la sección transversal del conductor en la unidad de tiempo. Dar la definición de la intensidad de la corriente alterna.

438. Se llama coeficiente térmico de dilatación lineal de una barra al incremento de una unidad de su longitud al aumentar la temperatura en 1° C, suponiendo la expansión térmica uniforme. Pero, en realidad, el proceso se efectúa de modo no uniforme. Sea $l = f(t)$, donde l es la longitud de la barra, t, la temperatura. Dar la definición del coeficiente de dilatación lineal.

439. Se llama coeficiente de tracción del muelle al incremento de unidad de la longitud del muelle bajo la acción de una fuerza unitaria ejercida sobre cada centímetro cuadrado de la sección transversal del mismo. La tracción se supone proporcional al esfuerzo ejercido (ley de Hooke). Dar la definición del coeficiente de tracción k para el caso de desviación de la ley de Hooke. (Sean l la longitud del muelle, S, el área de la sección transversal, P, la fuerza de tracción, y $l = \varphi(P)$.)

Función derivada

440. Hallar el incremento de la función $y = x^3$ en el punto $x_1 = 2$, poniendo el incremento Δx de la variable independiente igual a: 1) 2; 2) 1; 3) 0,5; 4) 0,1.

441. Hallar la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para las siguientes funciones:

1) $y=2x^3-x^2+1$ para $x=1$; $\Delta x=0,1$;

2) $y=\frac{1}{x}$ para $x=2$; $\Delta x=0,01$;

3) $y=\sqrt{x}$ para $x=4$; $\Delta x=0,4$.

Mostrar que cuando $\Delta x \to 0$, el límite de la referida razón en el primer caso es igual a 4, en el segundo, $-\frac{1}{4}$, en el tercero, $\frac{1}{4}$.

442. Dada la función $y = x^2$, hallar los valores aproximados de la derivada en el punto $x = 3$, poniendo sucesivamente Δx igual a: a) 0,5; b) 0,1; c) 0,01; d) 0,001.

443. $f(x)=x^2$. Hallar $f'(5)$; $f'(-2)$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$.

444. $f(x)=x^3$. Hallar $f'(1)$; $f'(0)$; $f'(-\sqrt{2})$; $f'\left(\frac{1}{3}\right)$.

445. $f(x) = x^2$. ¿En qué punto $f(x) = f'(x)$?

446. Comprobar la siguiente aserción: para la función $f(x) = x^2$ es válida la relación $f'(a+b) = f'(a) + f'(b)$.

¿Es válida esta identidad para la función $f(x) = x^3$?

447. Hallar la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$ para $x = 0$.

448. Hallar la derivada de la función $y = \lg x$ para $x = 1$.

449. Hallar la derivada de la función $y = 10^x$ para $x = 0$.

450. Es sabido que la función $f(0)=0$ y que existe el límite de la expresión $\frac{f(x)}{x}$ para $x \to 0$. Demostrar que este límite es igual a $f'(0)$.

451. Demostrar el siguiente teorema: si $f(x)$ y $\varphi(x)$ son iguales a cero, cuando $x = 0$ [$f(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$] y tienen las derivadas, para $x = 0$, siendo $\varphi'(0) \neq 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)}.$$

452. Demostrar lo siguiente: si $f(x)$ tiene la derivada cuando $x = a$, se tiene

$$\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a} = f(a)-af'(a).$$

453. Demostrar que la derivada de una función par es una función impar, mientras que la derivada de una función impar es una función par.

Interpretación geométrica de la derivada

454. Hallar el coeficiente angular de la tangente a la parábola $y = x^2$: 1) en el origen de coordenadas; 2) en el punto (3; 9); 3) en el punto (—2; 4), 4) en los puntos de intersección de la tangente con la recta $y = 3x - 2$.

455. ¿En qué puntos es igual a 3 el coeficiente angular de la tangente a la parábola cúbica $y = x^3$?

456. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^3$ 1) es paralela al eje Ox; 2) forma un ángulo de 45° con el eje Ox?

457. Una tangente a la parábola cúbica $y = x^3$ ¿puede formar un ángulo obtuso con el eje Ox?

458. ¿Qué ángulos forman al cortarse la parábola $y = x^2$ y la recta $3x - y - 2 = 0$?

459. ¿Qué ángulos forman al cortarse las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$?

460. ¿Qué ángulo forman al cortarse la hipérbola $y = 1/x$ y la parábola $y = \sqrt{x}$?

461. Escribir la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3$ en el punto cuya abscisa es 2. Hallar la subtangente y la subnormal.

462. ¿Para qué valor de la variable independiente son paralelas las tangentes a las curvas $y = x^2$ e $y = x^3$?

463. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2$ 1) es paralela a la recta $y = 4x - 5$; 2) es perpendicular a la recta $2x - 6y + 5 = 0$; 3) forma un ángulo de 45° con la recta $3x - y + 1 = 0$?

464. Demostrar que la subtangente correspondiente a cualquier punto de la parábola $y = ax^2$ es igual a la mitad de la abscisa del punto de tangencia. Valiéndose de esta circunstancia, formular el método para trazar la tangente a la parábola en el punto dado.

465. Demostrar que la normal a la parábola en cualquier punto que pertenezca a ésta desempeña la función de bisectriz del ángulo formado entre el radio focal del punto y la recta paralela al eje de la parábola y que pasa por el punto dado.

§ 2. Diferenciación de las funciones

Funciones exponenciales

En los ejercicios de este párrafo x, y, z, t, u, v, s son variables independientes, a, b, c, d, m, n, p, q son constantes.

466. Derivar la función:

1) $3x^2-5x+1$; 2) $x^4-\frac{1}{3}x^3+2{,}5x^2-0{,}3x+0{,}1$;

3) ax^2+bx+c; 4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}$; 5) $2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$;

6) $0{,}8\sqrt[4]{y}-\frac{y^3}{0{,}3}+\frac{1}{5y^2}$; 7) $\frac{x}{n}+\frac{n}{x}+\frac{x^2}{m^2}+\frac{m^2}{x^2}$;

8) $\frac{mx^2}{\sqrt{x}}+\frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{p\sqrt{x}}{x}$; 9) $\frac{mz^2+nz+4p}{p+q}$;

10) $0{,}1t^{-\frac{2}{3}}-\frac{5{,}2}{t^{1{,}4}}+\frac{2{,}5}{\sqrt[5]{t}}$; 11) $(x-0{,}5)^2$; 12) $\sqrt{x}\,(x^3-\sqrt{x}+1)$;

13) $(v+1)^2(v-1)$; 14) $0{,}5-3(a-x)^2$;

15) $\frac{ax^3+bx^2+c}{(a+b)x}$; 16) $\left(\frac{mu+n}{p}\right)^3$.

467. $f(x)=3x-2\sqrt{x}$. **Hallar:** $f(1)$; $f'(1)$; $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$.

468. $f(t)=\frac{t^2-5t-1}{t^3}$. Hallar: $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

469. $f(z)=\frac{2z^3-3z+\sqrt{z}-1}{z}$. Hallar: $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

470. $f(x)=4-5x+2x^3-x^5$. Mostrar que

$$f'(a)=f'(-a).$$

En los ejercicios 471—489 derivar las funciones que se indican.

471. 1) $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$;
2) $y=(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$;
3) $y=(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$;
4) $y=\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$;
5) $y=(\sqrt[3]{x}+2x)(1+\sqrt[3]{x^2}+3x)$;
6) $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$;
7) $y=(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$.

472. $y=\frac{x+1}{x-1}$. **473.** $y=\frac{x}{x^2+1}$.

474. $s=\frac{3t^2+1}{t-1}$. **475.** $u=\frac{v^3-2v}{v^2+v+1}$.

476. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$. **477.** $z=\frac{x^2+1}{3(x^2-1)}+(x^2-1)(1-x)$.

478. $u=\frac{v^5}{v^3-2}$. **479.** $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$.

480. $y=\frac{2}{x^3-1}$. 481. $u=\frac{v^2-v+1}{a^2-3}$.

482. $y=\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$. 483. $z=\frac{1}{t^2+t+1}$.

484. $s=\frac{1}{t^2-3t+6}$. 485. $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$.

486. $y=\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$. 487. $y=\frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$.

488. $y=\frac{ax+bx^2}{am+bm^2}$. 489. $y=\frac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

490. $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; hallar $f'(0)$ y $f'(1)$.

491. $F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$; hallar $F'(0)$, $F'(1)$ y $F'(2)$

492. $F(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2+1}$; hallar $F'(0)$ y $F'(-1)$.

493. $s(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}$; hallar $s'(0)$ y $s'(2)$.

494. $y(x)=(1+x^3)\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$; hallar $y'(1)$ y $y'(a)$.

495. $\rho(\varphi)=\frac{\varphi}{1-\varphi^2}$; hallar $\rho'(2)$ y $\rho'(0)$.

496. $\varphi(z)=\frac{a-z}{1+z}$; hallar $\varphi'(1)$.

497. $z(t)=\left(\sqrt{t^3}+1\right)t$; hallar $z'(0)$.

En los ejercicios 498—513 derivar las funciones que se indican

498. 1) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$; 2) $(x^2+1)^4$; 3) $(1-x)^{20}$; 4) $(1+2x)^{30}$; 5) $(1-x^2)^{10}$; 6) $(5x^3+x^2-4)^5$; 7) $(x^3-x)^6$; 8) $\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^6$; 9) $s=\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^4$; 10) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$; 11) $y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$; 12) $y=(2x^3+3x^2+6x+1)^4$.

499. $v=\frac{(s+4)^2}{s+3}$. 500. $s=\frac{t^3}{(1-t)^2}$.

501. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$. 502. $y=\frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$.

503. $y=\sqrt{1-x^2}$. 504. $y=\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^4$.

505. $u=\left(\frac{v}{1-v}\right)^m$. 506. $y=\frac{2}{(x^2-x+1)^2}$.

507. $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 508. $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$.

509. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$. 510. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

511. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

512. $u=\frac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}$.

513. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$.

514. $u(v)=(v^2+v+2)^{\frac{3}{2}}$; hallar $u'(1)$.

515. $y(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; hallar $y'(2)$.

516. $y(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; hallar $y'(0)$.

Funciones trigonométricas

En los ejercicios 517—546 derivar las funciones que se indican.

517. $y=\operatorname{sen} x+\cos x$.

518. $y=\frac{x}{1-\cos x}$.

519. $y=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

520. $\rho=\varphi \operatorname{sen} \varphi+\cos \varphi$.

521. $z=\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}+\frac{\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$.

522. $s=\frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}$.

523. $y=\frac{x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$.

524. $y=\frac{x \operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg} x}$.

525. $y=\cos^2 x$.

526. $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$.

527. $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

528. $y=3\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^3 x$.

529. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$.

530. $y=x\sec^2 x-\operatorname{tg} x$.

531. $y=\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x$.

532. $y=\operatorname{sen} 3x$.

533. $y=a\cos\frac{x}{3}$.

534. $y=3\operatorname{sen}(3x+5)$.

535. $y=\operatorname{tg}\frac{x+1}{2}$.

536. $y=\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$.

537. $y=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

538. $y=\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$.

539. $y=\cos^3 4x$.

540. $y=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

541. $y=\operatorname{sen}\sqrt{1+x^2}$.

542. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$.

543. $y=(1+\operatorname{sen}^2 x)^4$.

544. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

545. $y=\cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

546. $y=\operatorname{sen}^2(\cos 3x)$.

547. Deducir las fórmulas:

$$(\operatorname{sen}^n x \cos nx)' = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos (n+1)\,x;$$
$$(\operatorname{sen}^n x \operatorname{sen} nx)' = n \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} (n+1)\,x;$$
$$(\cos^n x \operatorname{sen} nx)' = n \cos^{n-1} x \cos (n+1)\,x;$$
$$(\cos^n x \cos nx)' = -n \cos^{n-1} x \operatorname{sen} (n+1)\,x.$$

Funciones trigonométricas inversas

En los ejercicios 548—572 derivar las funciones que se indican.

548. $y = x \operatorname{arcsen} x$.

549. $y = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\arccos x}$.

550. $y = (\operatorname{arcsen} x)^2$.

551. $y = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{x - 1^2}$.

552. $y = \dfrac{1}{\operatorname{arcsen} x}$.

553. $y = x \operatorname{sen} x \operatorname{arctg} x$.

554. $y = \dfrac{\arccos x}{x}$.

555. $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x$.

556. $y = (\arccos x - \operatorname{arcsen} x)^n$.

557. $y = \operatorname{arcsec} x$.

558. $y = \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$.

559. $y = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

560. $y = \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$.

561. $y = \operatorname{arcsen} (x-1)$.

562. $y = \arccos \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

563. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

564. $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{2}{x}$.

565. $y = \operatorname{arcsen} (\operatorname{sen} x)$.

566. $y = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{x}$.

567. $y = \sqrt{1 - (\arccos x)^2}$.

568. $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

569. $y = \dfrac{1}{2} \sqrt[4]{\operatorname{arcsen} \sqrt{x^2+2x}}$.

570. $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x}{1 - \cos \alpha \operatorname{sen} x}$.

571. $y = \arccos \dfrac{b + a \cos x}{a + b \cos x}$.

572. $y = \operatorname{arctg} \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$.

Funciones logarítmicas

En los ejercicios 573—597 derivar las funciones que se indican.

573. $y = x^2 \log_3 x$.

574. $y = \ln^2 x$.

575. $y = x \lg x$.

576. $y = \sqrt{\ln x}$.

577. $y = \dfrac{x-1}{\log_2 x}$.

578. $y = x \operatorname{sen} x \ln x$.

579. $y=\frac{1}{\ln x}$.
580. $y=\frac{\ln x}{x^n}$.
581. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.
582. $y=\frac{\ln x}{1+x^2}$.
583. $y=x^n \ln x$.
584. $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$.
585. $y=\ln(1-2x)$.
586. $y=\ln(x^2-4x)$.
587. $y=\ln \operatorname{sen} x$.
588. $y=\log_3(x^2-1)$.
589. $y=\ln \operatorname{tg} x$.
590. $y=\ln \arccos 2x$.
591. $y=\ln^4 \operatorname{sen} x$.
592. $y=\operatorname{arctg}[\ln(ax+b)]$.
593. $y=(1+\ln \operatorname{sen} x)^n$.
594. $y=\log_2[\log_3(\log_5 x)]$.
595. $y=\ln \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$.
596. $y=\operatorname{arcsen}^2 \ln(a^3+x^3)]$.
597. $y=\sqrt[3]{\ln \operatorname{sen}\frac{x+3}{4}}$.

Funciones exponenciales

En los ejercicios 598—633 derivar las funciones que se indican.

598. $y=2^x$.
599. $y=10^x$.
600. $y=\frac{1}{3^x}$.
601. $y=\frac{x}{4^x}$.
602. $y=x\cdot 10^x$.
603. $y=xe^x$.
604. $y=\frac{x}{e^x}$.
605. $y=\frac{x^3+2x}{e^x}$.
606. $y=e^x \cos x$.
607. $y=\frac{e^x}{\operatorname{sen} x}$.
608. $y=\frac{\cos x}{e^x}$.
609. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.
610. $y=x^3-3^x$.
611. $y=\sqrt{1+e^x}$.
612. $y=(x^2-2x+3)e^x$.
613. $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$.
614. $y=\frac{1-10^x}{1+10^x}$.
615. $y=\frac{e^x}{1+x^2}$.
616. $y=xe^x(\cos x+\operatorname{sen} x)$.
617. $y=e^{-x}$.
618. $y=10^{2x-3}$.
619. $y=e^{\sqrt{x+1}}$.
620. $y=\operatorname{sen}(2^x)$.
621. $y=3^{\operatorname{sen} x}$.
622. $y=a^{\operatorname{sen}^3 x}$.
623. $y=e^{\operatorname{arcsen} 2x}$.
624. $y=2^{3^x}$.
625. $y=e^{\sqrt{\ln x}}$.
626. $y=\operatorname{sen}(e^{x^2+3x-2})$.
627. $y=10^{1-\operatorname{sen}^4 3x}$.
628. $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.
629. $y=\ln \operatorname{sen}\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$.
630. $y=ae^{-b^2x^2}$.
631. $y=x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}$.
632. $y=Ae^{-k^2x}\operatorname{sen}(\omega x+\alpha)$.
633. $y=a^x x^a$.

Funciones hiperbólicas

En los ejercicios 634—649 derivar las funciones que se indican.

634. $y = \operatorname{sh}^3 x$.
635. $y = \ln \operatorname{ch} x$.
636. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.
637. $y = \operatorname{th}(1 - x^2)$.
638. $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$.
639. $y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$.
640. $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$.
641. $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}$.
642. $y = \operatorname{th}(\ln x)$.
643. $y = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$.
644. $y = \sqrt[3]{(1 + \operatorname{th}^2 x)^3}$.
645. $y = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2}$.
646. $y = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}$.
647. $y = \frac{1}{2} \operatorname{th} x + \dfrac{\sqrt{2}}{8} \ln \dfrac{1 + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{th} x}$.
648. $y = \frac{1}{x} \operatorname{ch} 2x + \sqrt{x} \operatorname{sh} 2x$.
649. $y = x^2 e^{3x} \operatorname{cosech} x$.

Derivación logarítmica

En los ejercicios 650—666 derivar las funciones que se indican aplicando la regla de la derivación logarítmica.

650. $y = x^{x^2}$.
651. $y = x^{x^x}$.
652. $y = (\operatorname{sen} x^{\cos x})$.
653. $y = (\ln x)^x$.
654. $y = (x + 1)^{2/x}$.
655. $y = x^3 e^{x^2} \operatorname{sen} 2x$.
656. $y = \dfrac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$.
657. $y = x^{\ln x}$.
658. $y = \dfrac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.
659. $y = \sqrt{x \operatorname{sen} x \sqrt{1 - e^x}}$.
660. $y = \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{arcsen} x}{1 + \operatorname{arcsen} x}}$.
661. $y = x^{\frac{1}{x}}$.
662. $y = x^{\operatorname{sen} x}$.
663. $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.
664. $y = 2x^{\sqrt{x}}$.
665. $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$.
666. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

Funciones diversas

En los ejercicios 667—770 derivar las funciones que se indican.

667. $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$.
668. $y = a \operatorname{tg}\left(\frac{x}{k} + b\right)$.
669. $y = \sqrt{1 + \sqrt{2px}}$.
670. $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 2)$.

671. $y = \lg(x - \cos x)$.

672. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$.

673. $y = 5\operatorname{tg}\frac{x}{5} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

674. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$.

675. $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x$.

676. $y = \operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x}$

677. $y = y^5 \sqrt[3]{x^6 - 8}$

678. $y = e^{-x^2} \ln x$.

679. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

680. $y = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$.

681. $y = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$.

682. $y = \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos 2x}$.

683. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

684. $y = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$.

685. $y = \operatorname{sen}^2\frac{x}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

686. $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5 + 2}}{3x^4}$.

687. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

688. $y = x \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

689. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$.

690. $y = \cos 2x \ln x$.

691. $y = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

692. $y = \operatorname{arcsen}(n \operatorname{sen} x)$.

693. $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen} x}$.

694. $y = \frac{1}{18}\operatorname{sen}^6 3x - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^8 3x$.

695. $y = x - \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$.

696. $y = \cos\frac{\operatorname{arcsen} x}{2}$.

697. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

698. $\arccos\sqrt{1 - 3x}$.

699. $y = \operatorname{sen}^2\left(\frac{1 - \ln x}{x}\right)$.

700. $y = \log_3(x^2 - \operatorname{sen} x)$.

701. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

702. $y = \ln\frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x}$.

703. $y = x \operatorname{arcsen}(\ln x)$.

704. $y = \operatorname{tg}\frac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

705. $y = \cos x \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}$.

706. $y = 0{,}4\left(\cos\frac{2x+1}{2} - \operatorname{sen} 0{,}8x\right)^2$.

707. $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$.

708. $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

709. $y = \ln\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}$.

710. $y = \ln\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

711. $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$.

712. $y = x^2\sqrt{1 + \sqrt{x}}$.

713. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}$.

714. $y = x^3 \operatorname{arctg} x^3$.

715. $y=\frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \cos x}$.
716. $y=\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}$.

717. $y=\frac{\operatorname{arcsen} 4x}{1-4x}$.
718. $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$.

719. $y=\ln\frac{1-e^x}{e^x}$
720. $y=10^{x\operatorname{tg} x}$.

721. $y=\operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{sen} x^2$.
722. $y=\frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

723. $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$.
724. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

725. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$,

726. $y=\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

727. $y=\frac{\operatorname{sen} 3x}{2\operatorname{sen}^2 x\cos x}$.
728. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

729. $y=\sqrt{a^2-x^2}-a\arccos\frac{x}{a}$.

730. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.

731. $y=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{ctg} x}+\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.

732. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

733. $y=e^{ax}(a\operatorname{sen} x-\cos x)$.
734. $y=xe^{1-\cos x}$.

735. $y=\frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$.
736. $y=e^x(\operatorname{sen} 3x-3\cos 3x)$.

737. $y=3x^3\operatorname{arcsen} x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$.

738. $y=\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$.

739. $y=2\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{\sqrt{6}}-\sqrt{2+4x-x^2}$.

740. $y=\ln(e^x\cos x+e^{-x}\operatorname{sen} x)$.

741. $y=\frac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$.
742. $y=\frac{1}{\cos(x-\cos x)}$.

743. $y=e^x\operatorname{sen} x\cos^3 x$.
744. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$.

745. $y=x-\ln\left(2e^x+1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}\right)$.

746. $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.
747. $y=\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$.

748. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg} x\ln(1+\operatorname{sen} x)-x$.

749. $y=2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)-6\operatorname{arcsen}2x.$

750. $y=\frac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg}x.$

751. $y=\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$

752. $y=\ln\left(x\operatorname{sen}x\sqrt{1-x^2}\right).$ 753. $y=x\sqrt{1+x^2}\operatorname{sen}x.$

754. $y=\frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}.$ 755. $y=\sqrt[5]{\left(1+xe^{\sqrt{x}}\right)^3}.$

756. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{x^2-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}.$

757. $y=\frac{\operatorname{sen}x}{4\cos^4 x}+\frac{3\operatorname{sen}x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$

758. $y=\frac{xe^x\operatorname{arctg}x}{\ln^5 x}.$ 759. $y=\frac{(1-x^2)\,e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}.$

760. $y=x\sqrt{(x^2+a^2)^3}+\frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right).$

761. $y=x(\operatorname{arcsen}x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}x.$

762. $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$

763. $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$

764. $y=\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\ln\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

765. $y=\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$

766. $y=(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}.$ 767. $y=\sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}.$

768. $y=\ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$

769. $y=\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$

770. $y=-\frac{x}{1+8x^3}+\frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{3}}.$

771. Demostrar que la función $y=\ln\frac{1}{1+x}$ satisface la relación $xy'+1=e^y$.

772. Demostrar que la función

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$$

satisface la relación $2y=xy'+\ln y'$.

773. Demostrar que la función $y=\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$ satisface la relación $(1-x^2)y'-xy=1$.

774*. Calcular las sumas

a) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$;

b) $2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}$.

Funciones inversas

775. Supongamos que la regla para derivar la función potencial fue establecida sólo para un exponente entero positivo. Deducir la fórmula para derivar la raíz, aplicando la regla para derivar la función inversa.

776. $x=e^{\operatorname{arcsen} y}$; hallar la expresión para $\frac{dy}{dx}$ mediante y, mediante x.

777. $t=2-3s+s^3$; expresar $\frac{ds}{dt}$ mediante s.

778. $u=\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$; comprobar la relación $\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=1$.

779. Teniendo en cuenta que las funciones $\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$ y $\operatorname{sen}^2 x$ son recíprocamente inversas y que $(\operatorname{sen}^2 x)'=\operatorname{sen}2x$, hallar $(\operatorname{arcsen}\sqrt{x})'$.

780. Designemos la función, inversa a la función potencial exponencial $y=x^x$, por el símbolo $\alpha(x)$, es decir, supongamos que de $y=x^x$ se deduce $x=\alpha(y)$. Hallar la fórmula para la derivada de la función $y=\alpha(x)$.

781. Las funciones que son inversas a las funciones hipebólicas son designadas por los símbolos $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$. Hallar las derivadas de estas funciones.

782. $s=te^{-t}$; hallar $\frac{dt}{ds}$.

783. $y=\frac{1-x^4}{1+x^4}$. Expresar $\frac{dx}{dy}$ mediante x, mediante y. Mostrar que es válida la relación $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$.

784. $x=y^3-4y+1$. Hallar $\frac{dy}{dx}$.

785. $t=\operatorname{arcsen} 2^s$. Hallar la expresión para $\frac{ds}{dt}$ mediante s, mediante t.

786. Comprobar la validez de la relación $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$, si x e y se relacionan por medio de la dependencia:

1) $y = x^2 + ax + b$; 2) $y = x^{-n}$;

3) $y = \ln(x^2 - 1)$.

Funciones dadas en forma implícita

787. Aplicando la derivación mostrar que las derivadas de los dos miembros de la igualdad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ son idénticamente iguales entre sí.

788. Aplicando la derivación mostrar que las derivadas de los dos miembros de la igualdad

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x - 1}{\cos x} + \frac{\cos x\,(2\operatorname{sen} x + 1)}{1 + \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x$$

son idénticamente iguales entre sí.

789. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ en el punto $(1, \sqrt{2})$?

790. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la hipérbola $xy = a$ $(a = 0)$ en el punto $(a, 1)$?

791. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la circunferencia $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 17$ en el punto $(2, 1)$?

En los ejercicios 792—812 hallar las derivadas de las funciones y dadas en forma implícita.

792. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **793.** $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

794. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. **795.** $y^2 \cos x = a^2 \operatorname{sen} 3x$.

796. $y^3 - 3y + 2ax = 0$. **797.** $y^2 - 2xy + b^2 = 0$.

798. $x^4 + y^4 = x^2y^2$. **799.** $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$.

800. $\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x + y)$. **801.** $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

802. $2y \ln y = x$. **803.** $x - y = \arcsen x - \arcsen y$.

804. $x^y = y^x$. **805.** $y = \cos(x + y)$.

806. $\cos(xy) = x$. **807.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

808. $y = 1 + xe^y$.

809. $x \operatorname{sen} y - \cos y + \cos 2y = 0$.

810. $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

811. $y \operatorname{sen} x - \cos(x - y) = 0$.

812. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

813. Mostrar que la función y definida por la ecuación $xy - \ln y = 1$, satisface también la relación

$$y^2 + (xy - 1)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Aplicaciones de la derivada

814. En la parábola $y = x^2$ se han marcado dos puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Por estos puntos pasa la secante. ¿En qué punto de la parábola la tangente a ésta es paralela a la secante trazada?

815. Una cuerda está trazada de manera que pasa por el foco de la parábola y es perpendicular al eje de ésta. Por los puntos de intersección de la cuerda y la parábola pasan tangentes. Demostrar que éstas se cortan en ángulo recto.

816. Escribir la ecuación de la tangente y de la normal a la hipérbola $y = 1/x$ en el punto cuya abscisa es $x = -1/2$. Hallar la subtangente y la subnormal.

817. Mostrar que el segmento de la tangente a la hipérbola $y = \frac{a}{x}$ comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto.

818. Mostrar que respecto a la hipérbola $xy = a$ el área del triángulo formado por cualquier tangente y los ejes de coordenadas es igual al cuadrado del semieje de la hipérbola.

819. Un punto móvil se desplaza sobre una recta de modo que su distancia s del punto inicial al cabo de t s es igual a $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

a) ¿En qué momentos se encontró en el punto inicial el punto referido? b) ¿En qué momentos fue igual a cero su velocidad?

820. Un cuerpo cuya masa es de 3 kg efectúa movimiento rectilíneo de acuedro con la ley

$$s = 1 + t + t^2,$$

s viene expresada en centímetros, t, en segundos. Determinar la energía cinética $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ del cuerpo al cabo de 5 s al iniciar el movimiento.

821. El ángulo α de giro de una polea en función del tiempo t viene expresado por la función $\alpha = t^2 + 3t - 5$. Hallar la velocidad angular para $t = 5$ s.

822. Una rueda gira de modo que el ángulo de giro es proporcional al cuadrado de tiempo. La primera vuelta ha sido realizada en 8 s. Hallar la velocidad angular ω al cabo de 32 s al comenzar el movimiento.

823. El ángulo θ, que se forma al dar una vuelta una rueda, al cabo de t segundos, es igual a $\theta = at^2 - bt + c$, donde a, b, c son constantes positivas. Hallar la velocidad angular ω de la rotación de la rueda. ¿En qué momento es igual a cero la velocidad angular?

824. La cantidad de electricidad que pasa por un conductor a partir del momento de tiempo $t = 0$, se calcula con la fórmula siguiente

$$Q = 2t^2 + 3t + 1 \text{ (culombios).}$$

Hallar la intensidad de corriente al final del quinto segundo.

825. En la línea $y = x^2 (x - 2)^2$ hallar los puntos en los cuales las tangentes sean paralelas al eje de abscisas.

826. Mostrar que la línea $y = x^5 + 5x - 12$ en todos sus puntos está inclinada hacia el eje Ox, formándose entre ellos un ángulo agudo

827. ¿En qué puntos de la línea $y = x^3 + x - 2$ la tangente a ella es paralela a la recta $y = 4x - 1$?

828. Formar las ecuaciones de las tangentes a la línea $y = x - \frac{1}{x}$ en los puntos de su intersección con el eje de abscisas.

829. Formar la ecuación de la tangente a la línea $y = x^3 + 3x^2 - 5$, perpendicular a la recta $2x - 6y + 1 = 0$.

En los ejercicios 830—833 formar las ecuaciones de la tangente y de la normal a las líneas que se indican.

830. $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $M (x_0, y_0)$.

831. $y = \ln x$ en el punto $M (x_0, y_0)$.

832. $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ en el punto cuya abscisa es $x = 2a$.

833. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (cisoide) en el punto $M (x_0, y_0)$.

834. Mostrar que la subtangente a una parábola de n-ésimo orden $y = x^n$ es igual a $\frac{1}{n}$ parte de la abscisa del punto de contacto.

Indicar el modo de construir la tangente a la línea $y = x^n$.

835. Hallar las subtangentes y las subnormales a la línea $y = x^3$, $y^2 = x^3$, $xy^2 = 1$. Indicar el modo de construir las tangentes a las líneas indicadas.

836. Formar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $x^2 = 4\,ay$ en su punto (x_0, y_0). Mostrar que la tangente en el punto cuya abscisa es $x_0 = 2am$ tiene la siguiente ecuación $x = \frac{y}{m} + am$.

837. La cuerda de la parábola $y = x^2 - 2x + 5$ une los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Formar la ecuación de la tangente a la parábola paralela a la cuerda.

838. Formar la ecuación de la normal a la línea $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ en el punto cuya abscisa es $x = 3$.

839. Formar la ecuación de la normal a la línea $y = -\sqrt{x} + 2$ en el punto de su intersección con la bisectriz del primer ángulo coordenado.

840. Formar la ecuación de la normal a la parábola $y = x^2 - 6x + 6$ perpendicular a la recta que une el origen de coordenadas con el vértice de la parábola.

841. Mostrar que las normales a la línea $y = x^2 - x + 1$, trazadas en los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5/2$ se cortan en un solo punto.

842. En los puntos de intersección de la recta $x - y + 1 = 0$ y la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ están trazadas las normales a la parábola.

Hallar el área del triángulo engendrado por las normales y la cuerda que subtiende los referidos puntos de intersección.

843. Mostrar que las tangentes a la hipérbola $y = \frac{x-4}{x-2}$ en los puntos de su intersección con los ejes de coordenadas son paralelas entre sí.

844. Trazar la tangente a la hipérbola $y = \frac{x+9}{x+5}$ de modo que atraviese el origen de coordenadas.

845. En la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ hallar el punto en el cual la tangente sea paralela al eje de abscisas.

846. Hallar la ecuación de la tangente a la línea

$$x^2 (x + y) = a^2 (x - y)$$

en el origen de coordenadas.

847. Demostrar que las tangentes a la línea $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$ trazadas en los puntos en los cuales $y = 1$, se cortan en el origen de coordenadas.

848. Trazar la normal a la línea $y = x \ln x$ que sea paralela a la recta $2x - 2y + 3 = 0$.

849. Hallar la distancia que media entre el origen de coordenadas y la normal a la línea $y = e^{2x} + x^2$, trazada en el punto $x = 0$.

850. Construir la gráfica de la función $y = \text{sen}\,(2x - \pi/3)$ y hallar el punto de intersección de las tangentes a la gráfica, trazadas en los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 0$ y $x_2 = 5\pi/12$.

851. Mostrar que la subtangente a la línea $y = ae^{bx}$ (donde a y b son constantes) tiene longitud constante en todos los puntos.

852. Mostrar que la subnormal a la línea $y = x \ln (cx)$ (donde c es cualquier constante) en cualquier punto de la línea referida es la cuarta proporcional a la abscisa, a la ordenada y a la suma de la abscisa y de la ordenada del punto referido.

853. Mostrar que cualquier tangente a la línea

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4x^2}$$

se corta con el eje de ordenadas en un punto equidistante entre el punto de contacto y el origen de coordenadas.

854. Mostrar que la tangente a la elipse $\frac{x^2}{a_2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en el punto $M(x_0, y_0)$ tiene la siguiente ecuación $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

855. Mostrar que la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ en el punto $M_1(x_0, y_0)$ tiene la siguiente ecuación $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

856. Demostrar que la normal a la elipse en cualquier punto que le pertenezca divide en dos el ángulo entre los radios focales de este

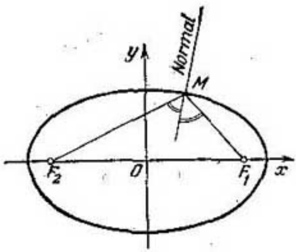

Fig. 21

punto (véase la fig. 21). Deducir el procedimiento para construir la tangente y la normal a la elipse.

857. Formar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ que sean perpendiculares a la recta $2x+4y-3=0$.

858. Una recta pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la tangente trazada a una curva en un punto cualquiera M de la misma. Hallar el lugar geométrico P de los puntos de intersección de la recta referida con una recta que sea paralela al eje de ordenadas y que pase por el punto M.

Hallar tales lugares geométricos para a) la parábola $y^2=2px$, b) la logarítmica $y=\log_b x$, c) la circunferencia $x^2+y^2=a^2$, d) la tractriz

$$y=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

En los ejercicios 859—864 hallar los ángulos que se forman al cortarse las líneas que se indican.

859. 1) $y=\frac{x+1}{x+2}$ e $y=\frac{x^2+4x+8}{16}$.

2) $y=(x-2)^2$ e $y=4x-x^2+4$.

860. 1) $x^2+y^2=8$ e $y^2=2x$.

2) $x^2+y^2-4x=1$ y $x^2+y^2+2y=9$.

861. $x^2-y^2=5$ y $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$.

862. $x^2+y^2=8ax$ e $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$.

863. $x^2=4ay$ e $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

864. $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$.

865. Formar la ecuación de la tangente y de la normal a la línea

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$$

en el punto cuya abscisa es a.

866. Demostrar que la suma de los segmentos formados en los ejes de coordenadas por la tangente a la curva $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ es igual a a para todos sus puntos.

867. Mostrar que el segmento de la tangente a la astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ limitado por los ejes de coordenadas tiene longitud constante e igual a a.

868. Demostrar que el segmento de la tangente a la tractriz

$$y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}$$

limitado por los ejes de ordenadas y el punto de contacto, tiene longitud constante.

869. Mostrar que para cualquier punto M (x_0, y_0) de la hipérbola equilátera $x^2-y^2=a^2$ el segmento de la normal desde el punto M hasta el punto de intersección con el eje de abscisas es igual al radio polar del punto M.

870. Mostrar que el segmento cortado en el eje de abscisas por la tangente en un punto cualquiera de la curva $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1$, es proporcional al cubo de la abscisa del punto de contacto.

871. Demostrar que la ordenada de cualquier punto de la línea $2x^2y^2-x^4=c$ (donde c es una constante) es una media proporcional entre la abscisa y la diferencia entre la abscisa y la subnormal trazada a la línea en el mismo punto.

872. Dadas las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ cuyo eje $2a$ es común, mientras que los ejes $2b$ son diferentes (véase la fig. 22), demostrar que las

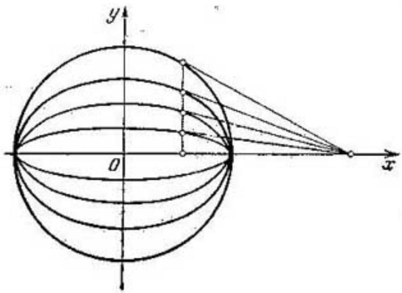

Fig. 22

tangentes trazadas en los puntos cuyas abscisas son las mismas, se cortan en un mismo punto que pertenece al eje de abscisas. Valiéndose de ello, señalar un procedimiento sencillo para construir la tangente a la elipse.

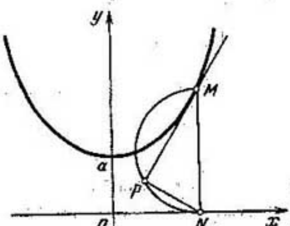

Fig. 23

873. Mostrar que la línea $y=e^{kx}$ sen mx toca cada una de las líneas $y=e^{kx}$, $y=-e^{kx}$ en todos los puntos que son comunes para ellas.

874. Para construir la tangente a la catenaria $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{2}$ se procede de la manera siguiente: en la ordenada MN del punto M, que sirve de diámetro, se traza una semicircunferencia (véase la fig. 23) y se marca la cuerda $NP=a$; la recta MP será la tangente buscada. Demostrarlo.

Derivación gráfica

875. Al pasar la corriente eléctrica por el devanado del electroimán de un motor ha sido medida la temperatura, lo cual ha dado los siguientes resultados:

Tiempo t (en min)	0	5	10	15	20	25
Temperatura θ °C	20	26	32,5	41	46	49
Tiempo t (en min)	30	35	40	45	50	55
Temperaturt θ °C	52,5	54,5	56,5	58	59,5	61

Construir una gráfica aproximada de la dependencia continua de la temperatura en función del tiempo. Después de haber efectuado la derivación gráfica, construir la gráfica que muestre a qué velocidad varía la temperatura en función del tiempo.

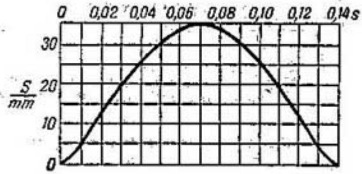

Fig. 24

876. La fig. 24 presenta la curva de la subida que efectúa la válvula de admisión del cilindro de una máquina de vapor (de baja presión). Construir la curva de velocidad aplicando la derivación gráfica.

§ 3. Diferencial. Diferenciabilidad de la función

Diferencial

877. Hallar el incremento de la función $y = x^2$ correspondiente al incremento Δx de la variable independiente. Calcular Δy, si $x = 1$ y $\Delta x = 0{,}1$; $0{,}01$; ¿Cuál será el error (absoluto y relativo) del valor de Δy, si se limita al término que contiene sólo el primer grado de Δx?

878. Hallar el incremento Δv del volumen v de una esfera al aumentar el radio $R = 2$ en ΔR. Calcular Δv, si $\Delta R = 0{,}5$; $0{,}1$; $0{,}01$. ¿Cuál será el error en el valor de Δv, si se limita al término que contiene sólo el primer grado de ΔR?

879. Dada la función $y = x^3 + 2x$, hallar el valor del incremento y de su parte lineal principal que corresponden a la variación de x desde $x = 2$ hasta $x = 2{,}1$.

880. ¿Qué incremento recibe la función $y = 3x^2 - x$ al pasar el valor de la variable independiente de $x = 1$ a $x = 1,02$? ¿Cuál es el valor de la parte lineal principal correspondiente? Hallar la razón entre los valores segundo y primero.

881. Dados la función $y = f(x)$ y el incremento $\Delta x = 0,2$ en un punto x, hallar la derivada en el punto x, tomando en consideración que la parte principal correspondiente del incremento de la función resultó igual a 0,8.

882. Sea dada la función $f(x) = x^2$. Es sabido que en un punto al incremento de la variable independiente $\Delta x = 0,2$ le corresponde la parte principal del incremento de la función $df(x) = -0,8$. Hallar el valor inicial de la variable independiente.

883. Hallar el incremento y la diferencial de la función $y = x^2 - x$ para $x = 10$ y $\Delta x = 0,1$. Calcular los errores absoluto y relativo que se obtienen al sustituir el incremento por la diferencial. Trazar la gráfica.

884. Hallar el incremento y la diferencial de la función $y = \sqrt{x}$ para $x = 4$ y $\Delta x = 0,41$. Calcular los errores absoluto y relativo. Trazar la gráfica.

885. $y = x^3 - x$. Para $x = 2$ calcular Δy y dy, dando a Δx los valores $\Delta x = 1$; $\Delta x = 0,1$; $\Delta x = 0,01$. Hallar los valores correspondientes del error relativo

$$\delta = \frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|}.$$

886. Para la función $y = 2^x$, cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0,4$, hallar gráficamente (trazando la gráfica en papel milimetrado a gran escala) el incremento y la diferencial y calcular los errores absoluto y relativo al sustituir el incremento por la diferencial.

887. El lado de un cuadrado mide 8 cm. ¿En cuánto aumentará su área si cada lado se prolonga en: a) 1 cm; b) 0,5 cm; c) 0,1 cm? Hallar la parte lineal principal del incremento del área del cuadrado y valorar el error relativo (en tanto por ciento) al sustituir el incremento por su parte principal.

888. Es sabido que al aumentar cada lado de un cuadrado en 0,3 cm la parte lineal principal del incremento del área constituye 2,4 cm². Hallar la parte lineal principal del incremento del área que corresponde al incremento de cada lado en: a) 0,6 cm; b) 0,75 cm; c) 1,2 cm.

889. Hallar la diferencial de la función:

1) $0,25\sqrt{x}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x}}{0,2}$; 3) $\frac{1}{0,5x^2}$; 4) $\frac{1}{4x^4}$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

6) $\frac{1}{n\sqrt[3]{x}}$; 7) $\frac{\sqrt{x}}{a+b}$; 8) $\frac{p}{q^x}$; 9) $\frac{m-n}{x^{0,2}}$; 10) $\frac{m+n}{\sqrt{x}}$.

11) $(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$; 12) $\frac{x^3+1}{x^3-1}$; 13) $\frac{1}{1-t^2}$;

14) $(1+x-x^2)^3$; 15) $\operatorname{tg}^2 x$; 16) $5^{\ln \operatorname{tg} x}$; 17) $2^{-\frac{1}{\cos x}}$;

18) $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$; 19) $\frac{\cos x}{1-x^2}$; 20) $\sqrt{\operatorname{arcsen} x}+(\operatorname{arctg} x)^2$;

21) $3 \operatorname{arcsen} x-4 \operatorname{arctg} x+\frac{1}{2} \arccos x-\frac{7}{2} \operatorname{arctg} x$;

22) $3^{-\frac{1}{x^2}}+3x^3-4\sqrt{x}$.

890. Calcular el valor de la diferencial de la función: 1) $y=\frac{1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}$ al variar la variable independiente desde $x=\frac{\pi}{6}$ hasta $x=\frac{61\pi}{360}$; 2) $y=\cos^2\varphi$ al variar φ desde $60°$ hasta $60°30'$; 3) $y=\operatorname{sen} 2\varphi$ al variar φ desde $\frac{\pi}{6}$ hasta $\frac{61\pi}{360}$; 4) $y=\operatorname{sen} 3\varphi$ al variar φ desde $\frac{\pi}{6}$ hasta $\frac{61\pi}{360}$; 5) $y=\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}$ al variar θ desde $\frac{\pi}{6}$ hasta $\frac{61\pi}{360}$.

891. Hallar el valor aproximado del incremento de la función $y=\operatorname{sen} x$ al variar x desde $30°$ hasta $30°1'$. ¿A qué es igual sen $30°1'$?

892. Hallar el valor aproximado del incremento de la función $y=\operatorname{tg} x$ al variar x desde $45°$ hasta $45°10'$.

893. Hallar el valor aproximado del incremento de la función $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ al variar x desde $\frac{\pi}{3}$ hasta $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{100}$.

894. $\rho=k\sqrt{\cos 2\varphi}$, hallar $d\rho$.

895. $y=3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{2x}}+6^{\sqrt{x}}$. Calcular dy para $x=1$ y $dx=0,2$.

896. Calcular aproximadamente sen $60°3'$, sen $60°18'$. Comparar los resultados obtenidos con los datos tabulares.

897. Comprobar que la función $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ satisface la relación $2x^2\,dy=(x^2y^2+1)\,dx$.

898. Comprobar que la función y definida por la ecuación $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=$ $=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, satisface la relación $x\,(dy-dx)=y\,(dy+dx)$.

899. $f(x)=e^{0,1x(1-x)}$. Calcular aproximadamente $f(1,05)$.

900. Calcular arctg 1,02; arctg 0,97.

901. Calcular aproximadamente $\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$.

902. Calcular aproximadamente arcsen 0,4983.

903. Si la longitud de un hilo pesado (cable, cadena) (véase la fig. 25) es igual a $2s$, el medio tramo es l, y la flecha es igual a f, se tiene la igualdad aproximada

$$s = l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right).$$

a) Calcular qué cambio sufre la longitud del hilo al variar su flecha en la magnitud df.

b) Tomando en consideración la variación ds que sufre la longitud del hilo (por ejemplo, al alterarse la temperatura o la carga), decir qué cambio se opera en la flecha debido a ello.

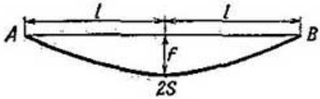

Fig. 25

904. Cuando se calcula un ángulo por su tangente y por su seno con ayuda de tablas logarítmicas, se cometen errores. Hacer un paralelo entre éstos, es decir, comparar la exactitud de los resultados obtenidos para el ángulo x con las fórmulas $\lg \operatorname{sen} x = y$ y $\lg \operatorname{tg} x = z$ si y y z son dadas con errores iguales.

905. Al efectuar cálculos técnicos se recurre, muy a menudo, a la reducción de π y $\sqrt{g}$ (g es la aceleración de la gravedad) en el caso en que uno de estos números está en el numerador y el otro, en el denominador. ¿Cuál es el error relativo que se comete?

906. Expresar la diferencial de la función compuesta por medio de la variable independiente y su diferencial:

1) $y = \sqrt[3]{x^2+5x}$; $x = t^3 + 2t + 1$; 2) $s = \cos^2 z$, $z = \frac{t^2-1}{4}$;

3) $z = \operatorname{arctg} v$, $v = \frac{1}{\operatorname{tg} s}$; 4) $v = 3^{-\frac{1}{x}}$, $x = \ln \operatorname{tg} s$;

5) $s = e^z$, $z = \frac{1}{2}\ln t$, $t = 2u^2 - 3u + 1$;

6) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}$, $u = \operatorname{arcsen} v$, $v = \cos 2s$.

Diferenciabilidad de las funciones

907. La función $y = |x|$ es continua para cualquier x. Comprobar que no es derivable cuando $x = 0$.

908. Efectuando un análisis, decir si la función $y = |x^3|$ para $x = 0$ es continua y derivable.

909. La función $f(x)$ está definida de la manera siguiente: $f(x) = 1 + x$ para $x \leqslant 0$; $f(x) = x$ para $0 < x < 1$; $f(x) = 2 - x$

para $1 \leqslant x \leqslant 2$ y $f(x) = 3x - x^2$ para $x > 2$. Averiguar si la función $f(x)$ es continua y aclarar la existencia y la continuidad de $f'(x)$.

910. La función $y = |\operatorname{sen} x|$ es continua para cualquier x. Mostrar que no es derivable cuando $x = 0$. ¿Existen otros valores de la variable independiente para los cuales la función no sea derivable?

911. Averiguar si la función $y = e^{-|x|}$ es continua y derivable para $x = 0$.

912. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$. ¿Es derivable la función $f(x)$ cuando $x = 0$?

913. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$. ¿Es derivable y continua la función $f(x)$ cuando $x = 0$?

914. Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$, mostrar que la parte lineal principal del incremento de la función no es susceptible de ser despejada cuando $x = 1$ y, por lo tanto, la función $f(x)$ no tiene derivada para $x = 1$. Dar la intepretación geométrica del resultado.

915. $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$. ¿Es continua la función $f(x)$ cuando $x = 0$? ¿Es variable? Dar la interpretación geométrica del resultado.

916. $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. ¿Es continua la función $f(x)$ cuando $x = 0$? ¿Es derivable?

§ 4. La derivada como velocidad de variación (otros ejemplos)

Velocidad relativa

917. Un punto se mueve sobre la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$. Hallar la velocidad de la variación del radio polar ρ respecto al ángulo polar φ.

918. Un punto se mueve sobre la espiral logarítmica $\rho = e^{a\varphi}$. Hallar la velocidad de la variación del radio polar si se sabe que gira con velocidad angular ω.

919. Un punto se mueve sobre la cicunferencia $\rho = 2r \cos\varphi$. Hallar la velocidad de la variación de la abscisa y la ordenada del punto si el radio polar gira con velocidad angular ω. En este caso el eje polar desempeña la función del de las abscisas, y el polo ha de ser considerado como el origen del sistema de coordenadas cartesianas.

920. Un círculo de radio R rueda, sin deslizarse, sobre una recta. El centro del círculo se mueve con velocidad constante v. Hallar la velocidad de la variación de la abscisa x y la ordenada y para un punto que pertenece al límite del círculo.

921. La presión barométrica p sufre alteraciones al variar la altura h de acuerdo con la función $\ln \frac{p}{p_0} = ch$, donde p_0 es la presión normal y c es una constante. A la altura de 5540 m la presión alcanza la mitad de la normal. Hallar la velocidad de la variación de la presión barométrica en función de la altura.

922. Entre y y x existe la relación $y^2 = 12x$. El argumento x crece uniformemente a una velocidad de 2 unidades por segundo. ¿A qué velocidad aumenta y cuando $x = 3$?

923. La ordenada del punto que describe la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ decrece con una velocidad de 1,5 cm/s. ¿A qué velocidad varía la abscisa del punto cuando la ordenada llega a ser igual a 4 cm?

924. ¿En qué punto de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 400$ la ordenada decrece con la misma velocidad con que crece la abscisa?

925. El lado de un cuadrado aumenta con velocidad v. ¿Cuál es la velocidad de la variación del perímetro y del área del mismo en el momento en que su lado llega a ser igual a a?

926. El radio de un círculo cambia con velocidad v. ¿Cuál es la velocidad de la variación de la longitud de su circunferencia y del área en el momento en que su radio llega a ser igual a r?

927. El radio de una esfera cambia con velocidad v. ¿Con qué velocidad varía su volumen y su superficie?

928. ¿Para qué valor del ángulo su seno varía dos veces más lento que el argumento?

929. ¿Para qué valor del ángulo son iguales las velocidades de la variación de su seno y de su tangente?

930. La velocidad del crecimiento del seno aumentó en n veces. ¿Cuántas veces aumentó la velocidad del crecimiento de la tangente?

931. Supongamos que el volumen del tronco de un árbol es proporcional al cubo de su diámetro y que éste crece de año en año uniformemente. Mostrar que la velocidad del crecimiento del volumen, siendo el diámetro igual a 90 cm, es 25 veces mayor que la del crecimiento para el caso del diámetro igual a 18 cm.

Funciones dadas en forma paramétrica

932. Probar si un punto dado por las coordenadas cartesianas está en la línea cuya ecuación se da en forma paramétrica: a) ¿Está el punto (5; 1) sobre la circunferencia $x = 2 + 5 \cos t$, $y = -3 + 5 \operatorname{sen} t$? b) ¿Está el punto $(2, \sqrt{3})$ sobre la circunferencia $x = 2 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$?

933. Construir las gráficas de las funciones dadas en forma paramétrica:

a) $x = 3 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$; b) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$;

c) $x = \cos t$, $y = t + 2 \operatorname{sen} t$; d) $x = 2^{t-1}$, $y = \frac{1}{4}(t^3 + 1)$.

934. De las ecuaciones que dan la función en forma paramétrica eliminar el parámetro:

1) $x = 3t$, $y = 6t - t^2$; 2) $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} 2t$;
3) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$; 4) $x = \varphi - \operatorname{sen} \varphi$, $y = 1 - \cos\varphi$;
5) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{sen} 2t + 2 \cos 2t$.

935. Hallar el valor del parámetro que corresponde a las coordenadas dadas del punto sobre la línea cuya ecuación se da en forma paramétrica:

1) $x = 3 (2 \cos t - \cos 2t)$, $y = 3 (2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$; $(-9, 0)$;
2) $x = t^2 + 2t$, $y = t^3 + t$; $(3, 2)$;
3) $x = 2 \operatorname{tg} t$, $y = 2 \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} 2t$; $(2, 2)$;
4) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; $(0, 0)$.

En los ejercicios 936—945 hallar las derivadas de y respecto a x.

936. $x = a \cos \varphi$, $\qquad y = b \operatorname{sen} \varphi$.

937. $x = a \cos^3 \varphi$, $\qquad y = b \operatorname{sen}^3 \varphi$.

938. $x = a (\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$, $\qquad y = a (1 - \cos \varphi)$.

939. $x = 1 - t^2$, $\qquad y = t - t^3$.

940. $x = \frac{t+1}{t}$, $\qquad y = \frac{t-1}{t}$.

941. $x = \ln (1 + t^2)$, $\qquad y = t - \operatorname{arctg} t$.

942. $x = \varphi (1 - \operatorname{sen} \varphi)$, $\qquad y = \varphi \cos \varphi$.

943. $x = \frac{1+t^3}{t^2-1}$, $\qquad y = \frac{1}{t^2-1}$.

944. $x = e^t \operatorname{sen} t$, $\qquad y = e^t \cos t$.

945. $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $\qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

En los ejercicios 946—949 hallar los coeficientes angulares de las tangentes a las líneas que se indican.

946. $x = 3 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ en el punto $(3\sqrt{2}/2, 2\sqrt{2})$.

947. $x = t - t^4$, $y = t^2 - t^3$ en el punto $(0,0)$.

948. $x = t^3 + 1$, $y = t^2 + t + 1$ en el punto $(1,1)$.

949. $x = 2 \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ en el punto $(1, -\sqrt{3}/2)$.

950. Para la línea dada paramétricamente mostrar la relación entre el parámetro t y el ánuglo α que forma la tangente a la línea con el eje de abscisas.

1) $\begin{cases} x=\cos t+t\operatorname{sen} t-\dfrac{t^2}{2}\cos t, \\ y=\operatorname{sen} t-t\cos t-\dfrac{t^2}{2}\operatorname{sen} t; \end{cases}$

2) $x = a\cos^3 t,\ y = a\operatorname{sen}^3 t;$

3) $x=a\cos t\sqrt{2\cos 2t},\ y=a\operatorname{sen} t\sqrt{2\cos 2t}.$

951. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = 2t + 3t^2$, $y = t^2 + 2t^3$ satisface la relación $y = y'^2 + 2y'^3$ $\left(\text{la prima denota la derivación con respecto a } x,\right.$ $\left.\text{esto es, } y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$.

952. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x=\dfrac{1+t}{t^3}$, $y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{2}{t}$ satisface la relación $xy'^3=1+y'\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$.

953. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = \operatorname{ch} 2t$, $y = \operatorname{sh} 2t$ satisface la relación $yy' - x = 0\ \left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$.

954. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t},\quad y=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

satisface la relación $y\sqrt{1+y'^2}=y'\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$.

955. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x=\dfrac{1+\ln t}{t^2}$, $y=\dfrac{3+2\ln t}{t}$ satisface la relación $yy'=2xy'^2+1\qquad\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right)$.

956. Hallar los ángulos que se forman al cortarse las líneas:

$$1)\ y=x^2 \text{ y } \begin{cases} x=\dfrac{5}{3}\cos t, \\ y=\dfrac{5}{4}\operatorname{sen} t; \end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\operatorname{sen}\varphi \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x=\dfrac{at^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{at\sqrt{3}}{1+t^2} \end{cases}$$

957. Mostrar que cualquiera que sea la posición del círculo generador de una cicloide, la tangente y la normal en el punto correspondiente de la cicloide pasan por su punto superior e inferior, respectivamente.

958. Hallar las longitudes de la tangente, la normal, la subtangente y la subnormal a la cardioide

$$x = a(2\cos t - \cos 2t),\ y = a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$$

en un punto cualquiera de ésta.

959. Hallar las longitudes de la tangente, la normal, la subtangente, la subnormal a la astroide

$$x = a\operatorname{sen}^3 t, \qquad y = a\cos^3 t$$

en un punto cualquiera de ésta.

960. Demostrar que la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ es, al mismo tiempo, la normal a la evolvente de la circunferencia

$$x = a(\cos t + t\operatorname{sen} t), \qquad y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t).$$

961. Hallar las longitudes de la tangente, la normal, la subtangente y la subnormal a la evolvente de la circunferencia (véanse las ecuaciones de ésta en el ejercicio anterior).

962. Demostrar que el segmento de la normal a la curva

$$x = 2a\operatorname{sen} t + a\operatorname{sen} t\cos^2 t, \qquad y = -a\cos^3 t,$$

limitado por los ejes de coordenadas, es igual a $2a$.

En los ejercicios 963—966 formar las ecuaciones de la tangente y la normal a las líneas que se indican en los puntos citados.

963. $x = 2e^t$; $\quad y = e^{-t}$ $\quad$ para $t = 0$.

964. $x = \operatorname{sen} t$, $\quad y = \cos 2t$ $\quad$ para $t = \pi/6$

965. $x = 2\ln \operatorname{ctg} t + 1$, $\quad y = \operatorname{tg} t + \operatorname{cgt} t$ $\quad$ para $t = \pi/4$.

966. 1) $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$, $\quad y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$ $\quad$ para $t = 2$;

2) $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\operatorname{sen} t), \\ y = t(t\operatorname{sen} t + 2\cos t), \end{cases}$ para $t = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $x = \operatorname{sen} t$, $y = a^t$ $\quad$ para $t = 0$.

967. Mostrar que en dos puntos de la cardioide (véase el ejercicio 958), los cuales corresponden a los valores del parámetro t que se diferencian en $\dfrac{2}{3}\pi$, las tangentes son paralelas.

968. Demostrar que si las líneas OT y ON son las perpendiculares bajadas desde el origen de coordenadas hasta la tangente y la normal a la astroide en cualquiera de sus puntos (véase el ejercicio 959), se tiene

$$4\cdot OT^2 + ON^2 = a^2.$$

969. Hallar la longitud de la perpendicular bajada desde el origen de coordenadas hasta la tangente a la línea

$$2x = a\,(3\cos t + \cos 3t),\ 2y = a\,(3\,\text{sen}\,t + \text{sen}\,3t).$$

Mostrar que $4\rho^2 = 3p^2 + 4a^2$, donde ρ es el radio polar del punto dado y p es la longitud de dicha perpendicular.

Velocidad de la variación del radio polar

970. Dada la circunferencia $\rho = 2\,r\,\text{sen}\,\varphi$, hallar el angulo θ formado por el radio polar y la tangente, y el ángulo α que forman entre sí el eje polar y la tangente.

971. Demostrar que para la parábola $\rho = a\,\sec^2\frac{\varphi}{2}$ la suma de los ángulos formados por la tangente con el radio polar y el eje polar, es igual a dos ángulos rectos. Valiéndose de esta propiedad construir la tangente a la parábola.

972. Dada la línea $\rho = a\,\text{sen}^3\frac{\varphi}{3}$ (concoide), mostrar que $\alpha = 4\theta$ (las designaciones son las que se dan en el ejercicio 970).

973. Mostrar que dos parábolas $\rho = a\,\sec^2\frac{\varphi}{2}$ y $\rho = b\,\text{cosec}^2\frac{\varphi}{2}$ se cortan formando un ángulo recto.

974. Hallar el valor de la tangente del ángulo formado entre el eje polar y la tangente a la línea $\rho = a\,\sec^2\varphi$ en los puntos en que $\rho = 2a$.

975. Hallar la tangente del ángulo formado entre el eje polar y la línea tangente en el origen de coordenadas: 1) a la línea $\rho = \text{sen}^3\varphi$ 2) a la línea $\rho = \text{sen}\,3\varphi$.

976. Mostrar que dos cardioides $\rho = a\,(1 + \cos\varphi)$ y $\rho = a\,(1 - \cos\varphi)$ se cortan formando un ángulo recto.

977. La ecuación de la línea en las coordenadas polares es dada en forma paramétrica: $\rho = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$. Expresar la tangente del ángulo θ formado entre la línea tangente y el radio polar, como función de t.

978. Una línea viene dada mediante las ecuaciones $\rho = at^3$, $\varphi = bt^2$. Hallar el ángulo entre el radio polar y la tangente.

979. Dada la elipse $x = a\cos t$; $y = b\,\text{sen}\,t$, expresar el radio polar ρ y el ángulo polar φ como función del parámetro t. Valiéndose de la forma así obtenida para dar la elipse, calcular el ángulo formado entre la tangente y el radio polar.

Se llama *subtangente polar* a la proyección del segmento de la tangente desde el punto de contacto hasta su intersección con la perpendicular levantada al radio polar en el polo, sobre dicha perpendicular. De análoga manera se define la *subnormal polar*. Tomando esto en consideración, resolver los problemas de los ejercicios 980—984.

980. Deducir la fórmula para la subtangente polar y la subnormal polar de la línea $\rho = f(\varphi)$.

981. Mostrar que la longitud de la subtangente polar de la espiral hiperbólica $\rho = \frac{a}{\varphi}$ es constante.

982. Mostrar que la longitud de la subnormal polar de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ es constante.

983. Hallar la longitud de la subnormal polar de la espiral logarítmica $\rho = a^{\varphi}$.

984. Hallar la longitud de la subnormal polar de la espiral logarítmica $\rho = a^{\varphi}$.

Velocidad de la variación de la longitud

En los ejercicios 985—999 s designa la longitud del arco de la línea correspondiente.

985. La recta $y = ax + b$; $\frac{ds}{dx} = ?$

986. La circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$; $\frac{ds}{dx} = ?$

987. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{ds}{dy} = ?$

988. La parábola $y^2 = 2px$; $ds = ?$

989. La parábola semicúbica $y^2 = ax^3$; $\frac{ds}{dy} = ?$

990. La sinusoide $y = \operatorname{sen} x$; $ds = ?$

991. La catenaria $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(y = \operatorname{ch} x)$; $\frac{ds}{dx} = ?$

992. La circunferencia $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$; $\frac{ds}{dt} = ?$

993. La cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $\frac{ds}{dt} = ?$

994. La astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$; $ds = ?$

995. La espiral de Arquímedes $x = at \operatorname{sen} t$, $y = at \cos t$; $ds = ?$

996. La cardioide $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t); \end{cases}$ $ds = ?$

997. La tractriz

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right), \quad y = a \operatorname{sen} t; \quad ds = ?$$

998. La evolvente de la circunferencia

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \, y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t); \, \frac{ds}{dt} = ?$$

999. La hipérbola $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$; $ds = ?$

Velocidad del movimiento

1000. Una escala, que mide 10 m de longitud, tiene apoyado su extremo superior contra una pared vertical. Su extremo inferior se halla apoyado en el suelo y se desliza apartándose de la pared a 2 m por minuto. ¿A qué velocidad va descendiendo el extremo superior de la escala cuando el inferior dista 6 m de la pared? ¿Cuál es la dirección del vector de la velocidad?

1001. Un tren y un globo aerostático parten de un mismo punto simultáneamente. El tren se traslada a una velocidad uniforme de 50 km por hora. El globo sube (también uniformemente) a 10 km por hora. ¿A qué velocidad se aparta el uno del otro? ¿Cuál es la dirección del vector de la velocidad?

1002. Un hombre de 1,7 m de estatura se aleja, a 6,34 km por hora, de una fuente luminosa que se encuentra a 3 m de altura. ¿A qué velocidad se traslada la sombra que proyecta su cabeza?

1003. Un caballo corre a 20 km por hora a lo largo de una circunferencia en cuyo centro se halla un farol. En el punto inicial de la carrera del caballo está situada una cerca que sigue la dirección de la tangente a la circunferencia referida. ¿A qué velocidad se desplaza la sombra del caballo a lo largo de la cerca en el momento en que éste ha recorrido 1/8 de la circunferencia?

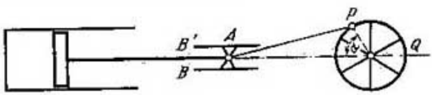

Fig. 26

1004. La fig. 26 muestra, de manera esquemática, el mecanismo de manivela de una máquina de vapor: A es la cruceta, BB' son las correderas de la cruceta, AP es la biela, P es el gorrón de manivela,

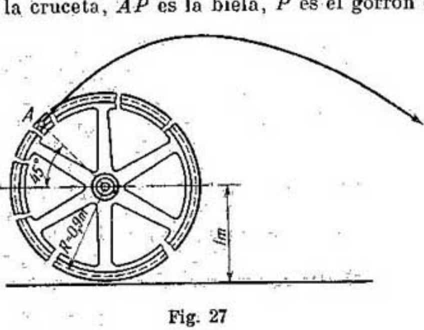

Fig. 27

Q es el volante. El volante, de radio R, gira uniformemente con velocidad angular ω. La longitud de la biela es igual a l. ¿Cuál es la velocidad que tiene la cruceta al desplazarse, en el momento en que el volante ha girado un ángulo α?

1005. Un volante que había dado 80 vueltas por minuto quedó roto. El radio del mismo mide 0,9 m. Su centro se halla levantado por sobre el suelo, la distancia entre ambos, en línea vertical, mide 1 m. ¿Cuál es la velocidad a que efectuará su caída hacia el suelo el pedazo roto (designado por la letra A en la fig. 27)?

§ 5. Derivación sucesiva

Funciones dadas en forma explícita

1006. $y = x^2 - 3x + 2$; $y'' = ?$
1007. $y = 1 - x^2 - x^4$; $y''' = ?$
1008. $f(x) = (x + 10)^6$; $f'''(2) = ?$
1009. $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$; $f^{IV}(1) = ?$
1010. $y = (x^2 + 1)^3$; $y'' = ?$ **1011.** $y = \cos^2 x$; $y''' = ?$
1012. $f(x) = e^{2x-1}$; $f''(0) = ?$ **1013.** $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $f''(1) = ?$

1014. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $f^{V}(x) = ?$

1015. $y = x^3 \ln x$; $y^{IV} = ?$ **1016.** $f(x) = \dfrac{a}{x^n}$; $y''(x) = ?$

1017. $\rho = a \operatorname{sen} 2\varphi$; $\dfrac{d^4\rho}{d\varphi^4} = ?$ **1018.** $y = \dfrac{1-x}{1+x}$; $y^{(n)} = ?$

En los ejercicios 1019—1028 hallar las segundas derivadas de las funciones

1019. $y = xe^{x^2}$.
1020. $y = \dfrac{1}{1+x^3}$.
1021. $y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$.
1022. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.
1023. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.
1024. $y = \dfrac{1}{a + \sqrt{x}}$.
1025. $y = e^{\sqrt{x}}$.
1026. $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsen x$.
1027. $y = \arcsen (a \operatorname{sen} x)$. **1028.** $y = x^x$.

En los ejercicios 1029—1040 hallar las expresiones comunes para las derivadas de n-ésimo orden de las funciones:

1029. $y = e^{ax}$.
1030. $y = e^{-x}$.
1031. $y = \operatorname{sen} ax + \cos bx$
1032. $y = \operatorname{sen}^2 x$.
1033. $y = xe^x$.
1034. $y = x \ln x$.

1035. $y=\frac{1}{ax+b}$. **1036.** $y=\ln(ax+b)$.

1037. $y=\log_a x$. **1038.** $y=\frac{x}{x^2-1}$.

1039. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$. **1040.** $y=\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x$.

1041. Demostrar que la función $y=(x^2-1)^n$ satisface la relación

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0.$$

1042. Demostrar que la función $y=e^x \operatorname{sen} x$ satisface la relación $y''-2y'+2y=0$, mientras la función $y=e^{-x}\operatorname{sen} x$ satisface la relación $y''+2y'+2y=0$.

1043. Demostrar que la función $y=\frac{x-3}{x+4}$ satisface la relación $2y'^2=(y-1)\ y''$.

1044. Demostrar que la función $y=\sqrt{2x-x^2}$ satisface la relación $y^3y''+1=0$.

1045. Demostrar que la función $y=e^{4x}+2e^{-x}$ satisface la relación $y'''-13y'-12y=0$.

1046. Demostrar que la función $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ satisface la relación $xy''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{4}y=0$.

1047. Demostrar que la función $y=\cos e^x+\operatorname{sen} e^x$ satisface la relación $y''-y'+ye^{2x}=0$.

1048. Demostrar que la función

$$y=A\ \operatorname{sen}(\omega t+\omega_0)+B\cos(\omega t+\omega_0)$$

(A, B, ω, ω_0 son constantes) satisface la relación

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0.$$

1049. Demostrar que la función

$$a_1e^{nx}+a_2e^{-nx}+a_3\cos nx+a_4\operatorname{sen} nx$$

(a_1, a_2, a_3, a_4, n son constantes) satisface la relación $\frac{d^4y}{dx^4}=n^4y$.

1050. Demostrar que la función $y=\operatorname{sen}(n\arcsin x)$ satisface la relación $(1-x^2)\ y''-xy'+n^2y=0$.

1051. Demostrar que la función $e^{\alpha \arcsin x}$ satisface la relación $(1-x^2)\ y''-xy'-\alpha^2y=0$.

1052. Demostrar que la función $y=(x+\sqrt{x^2+1})^k$ satisface la relación $(1+x^2)y''+xy'-k^2y=0$.

1053. Demostrar que la expresión $S=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ no varía si sustituimos y por $\frac{1}{y}$; esto es, si ponemos $y=\frac{1}{y_1}$, se tiene $\frac{y_1'''}{y_1'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2=S$.

1054. Sea dado $y=f(x)$. Expresar $\frac{d^2x}{dy^2}$ mediante $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Mostrar que la fórmula $R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ es susceptible de ser reducida a la forma

$$R^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

1055. Sea dado $F(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$ siendo $f'(x)\varphi'(x)=C$. Demostrar que

$$\frac{F''}{F}=\frac{f''}{f}+\frac{\varphi''}{\varphi}+\frac{2C}{f\cdot\varphi} \text{ y } \frac{F'''}{F}=\frac{f'''}{f}+\frac{\varphi'''}{\varphi}.$$

Funciones dadas en forma implícita

1056. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; $\frac{d^2y}{dx^2}=?$

1057. $x^2+y^2=r^2$; $\frac{d^3y}{dx^3}=?$ **1058.** $y=\operatorname{tg}(x+y)$; $\frac{d^3y}{dx^3}=?$

1059. $s=1+te^s$; $\frac{d^2s}{dt^2}=?$ **1060.** $y^3+x^3-3axy=0$; $y''=?$

1061. $y=\operatorname{sen}(x+y)$; $y''=?$ **1062.** $e^{x+y}=xy$; $y''=?$

1063. Deducir la fórmula para la segunda derivada de la función inversa a la dada $y=f(x)$.

1064. $e^y+xy=e$; hallar $y''(x)$ para $x=0$.

1065. $y^2=2px$; hallar la expresión $k=\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1066. Comprobar que de $y^2+x^2=R^2$ se deduce $k=\frac{1}{R}$, donde $k=\frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1067. Demostrar que si

$$ax^2+2bxy+cy^2+2gx+2fy+h=0,$$

se tiene

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by+g}{bx+cy+f} \text{ y } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{A}{(bx+cy+f)^3}$$

donde A es una constante que no depende de x e y.

1068. Demostrar que si $(a+bx)e^{\frac{y}{x}} = x$, se tiene

$$x^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2.$$

Funciones dadas en forma paramétrica

1069. $x = at^2, \quad y = bt^3; \quad \frac{d^2x}{dy^2} = ?$

1070. $x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1071. $x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = ?$

1072. $x = a(\varphi - \operatorname{sen}\varphi), \ y = a(1-\cos\varphi); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1073. 1) $x = a\cos^3 t, \quad y = a \operatorname{sen}^3 t; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = ?$

2) $x = a\cos^2 t, \quad y = a \operatorname{sen}^2 t; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1074. 1) $x = \ln t, \quad y = t^2 - 1; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

2) $x = \operatorname{arcsen} t, \quad y = \ln(1-t^2); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1075. $x = at\cos t, \ y = at \operatorname{sen} t; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1076. Demostrar que la función $y = f(x)$ dada mediante las ecuaciones paramétricas $y = e^t \cos t$, $x = e^t \operatorname{sen} t$, satisface la relación $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$.

1077. Demostrar que la función $y = f(x)$ dada paramétricamente mediante las ecuaciones $y = 3t - t^3$, $x = 3t^2$ satisface la relación

$$36y''(y - \sqrt{3x}) = x + 3.$$

1078. Demostrar que la función dada paramétricamente mediante las ecuaciones

$$x = \operatorname{sen} t, \ y = \operatorname{sen} kt,$$

satisface la relación

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2y = 0.$$

1079. Demostrar que si

$$x = f(t)\cos t - f'(t)\operatorname{sen} t, \ y = f(t)\operatorname{sen} t + f'(t)\cos t$$

se tiene

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = [f(t) + f''(t)]^2\, dt^2.$$

Aceleración del movimiento

1080. Un punto efectúa movimiento rectilíneo, siendo $s=\frac{4}{3}t^3-t+5$. Hallar la aceleración a al finalizar el 2° segundo (s está expresada en metros; t, en segundos).

1081. Un movimiento rectilíneo se efectúa de acuerdo con la fórmula $s=t^2-4t+1$.

Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento.

1082. Un punto efectúa movimiento rectilíneo, siendo $s=\frac{2}{9}\times\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}+s_0$. Hallar la aceleración al finalizar el primer segundo (s está expresada en cm, t, en s).

1083. Un punto efectúa el movimiento rectilíneo, siendo $s=\sqrt{t}$. Demostrar que el movimiento del punto es retardado y que la aceleración a es proporcional al cubo de la velocidad v.

1084. Una viga pesada, que mide 13 m, se hace descender hacia el suelo de la manera siguiente (véase la fig. 28): su extremo inferior está sujeto a una vagoneta, mientras que el superior se mantiene fijo con un cable devanado en un cabrestante. El cable va desenrollándose a 2 m por minuto. ¿Qué aceleración experimenta la vagoneta cuando se aparta rodando, en el momento en que dista 5 m del punto O?

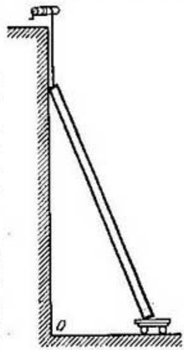

Fig. 28

1085. La cubierta de una barcaza se encuentra 4 m más abajo de la altura del muelle. Tirando de la barcaza, la hacen acercarse para que se ponga al lado del muelle, mediante un cable el cual va devanándose en un cabrestante a 2 m por segundo. ¿Qué aceleración experimenta la barcaza al moverse, en el momento en que dista 8 m del muelle (en línea horizontal)?

1086. Un punto efectúa movimiento rectilíneo de manera que su velocidad varía proporcionalmente a la raíz cuadrada del trayecto recorrido. Mostrar que el movimiento se efectúa al actuar una fuerza constante sobre el punto indicado.

1087. Se tiene un punto material sobre el cual actúa una fuerza inversamente proporcional a la velocidad del movimiento del punto. Demostrar que la energía cinética del punto es la función lineal del tiempo.

Fórmula de Leibniz

1088. Aplicar la fórmula de Leibniz para calcular la derivada:
1) $[(x^2+1)\operatorname{sen}x]^{(20)}$;
2) $(e^x\operatorname{sen}x)^{(n)}$; 3) $(x^3\operatorname{sen}\alpha x)^{(n)}$.

1089. Mostrar que si $y = (1 - x)^{-\alpha}e^{-\alpha x}$, se tiene

$$(1-x)\frac{dy}{dx}=\alpha xy.$$

Aplicando la fórmula de Leibniz mostrar que

$$(1-x)\,y^{(n+1)}-(n+\alpha x)\,y^{(n)}-n\alpha y^{(n-1)}=0.$$

1090. La función $y=e^{\alpha \operatorname{arcsen} x}$ satisface la relación $(1-x^2)\,y''-$ $-xy'-\alpha^2 y=0$ (véase el ejercicio 1051). Aplicando la fórmula de Leibniz y derivando esta igualdad n veces, mostrar que

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,xy^{(n+1)}-(n^2+\alpha^2)\,y^{(n)}=0.$$

1091. Mostrar que

$(e^{ax}\cos bx)^{(n)}=r^n e^{ax}\cos(bx+n\varphi)$, donde $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{b}{a}$.

Aplicando la fórmula de Leibniz, llegar a las siguientes fórmulas:

$$r^n\cos n\varphi=a^n-C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^4a^{n-4}b^4-\ \ldots,$$
$$r^n\operatorname{sen} n\varphi=C_n^1a^{n-1}b-C_n^3a^{n-3}b^3+C_n^5a^{n-5}b^5-\ \ldots$$

1092. Demostrar que $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=(-1)^n\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

1093. Mostrar que la función $y=\operatorname{arcsen} x$ satisface la relación $(1-x^2)y''=xy'$. Aplicando a ambos miembros de esta ecuación la fórmula de Leibniz, hallar $y^{(n)}(0)$ $(n\geqslant 2)$.

1094. Aplicando la fórmula de Leibniz n veces, mostrar que la función $y=\cos(m \operatorname{arcsen} x)$ satisface la relación

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)\,xy^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n)}=0.$$

1095. Si $y=(\operatorname{arcsen} x)^2$, se tiene

$$(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n-1)\,xy^{(n)}-(n-1)^2\,y^{(n-1)}=0.$$

Hallar $y'(0)$, $y''(0)$, $1.\ .\ .$, $y^{(n)}(0)$.

Diferenciales de ordenes superiores

1096. $y=\sqrt[3]{x^2}$; $d^2y=?$ **1097.** $y=x^m$; $d^3y=?$

1098. $y=(x+1)^3(x-1)^2$; $d^2y=?$

1099. $y=4^{-x^2}$; $d^2y=?$

1100. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)$; $d^2y=?$ **1101.** $y=\sqrt{\ln^2 x-4}$; $d^2y=?$

1102. $y=\operatorname{sen}^2 x$; $d^3y=?$ **1103.** $\rho^2\cos^3\varphi-a^2\operatorname{sen}^3\varphi=0$; $d^2\rho=?$

1104. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; $d^2y=?$

1105. $y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$; $x=\operatorname{tg}t$; expresar d^2y mediante: 1) x y dx, 2) t y dt.

1106. $y=\operatorname{sen}z$; $z=a^x$; $x=t^3$; expresar d^2y mediante: 1) z y dz, 2) x y dx; 3) t y dt.

Capítulo IV

Análisis de las funciones y de sus gráficas

§ 1. Comportamiento de la función

1107. Mostrar que el punto $x = 0$ es el punto del mínimo de la función

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 1.$$

1108. Partiendo de la definición de la función creciente y decreciente y de los puntos del máximo y del mínimo, mostrar que la función $y = x^3 - 3x + 2$ crece en el punto $x_1 = 2$, decrece en el punto $x_2 = 0$, alcanza su máximo en el punto $x_3 = -1$ y su mínimo en el punto $x_4 = 1$.

1109. Igual que en el ejercicio 1108, mostrar que la función $y = \cos 2x$ crece en el punto $x_1 = \frac{3\pi}{4}$, decrece en el punto $x_2 = \frac{\pi}{6}$, alcanza su máximo en el punto $x_3 = 0$ y su mínimo en el punto $x_4 = \frac{\pi}{2}$.

1110. Sin recurrir al concepto de la derivada, analizar el comportamiento de la función dada en el punto $x = 0$:

1) $y = 1 - x^4$; 2) $y = x^5 - x^3$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$; 4) $y = \sqrt[3]{x^2}$;

5) $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$; 6) $y = |\operatorname{tg} x|$; 7) $y = |\ln(x+1)|$;

8) $y = e^{-|x|}$; 9) $y = \sqrt{x^3 + x^2}$.

1111. Mostrar que la función $y = \ln(x^2 + 2x - 3)$ crece en el punto $x_1 = 2$, decrece en el punto $x_2 = -4$ y no tiene puntos estacionarios.

1112. Esclarecer el comportamiento de la función $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ en los puntos $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{\pi}{3}$ y $x_4 = 2$.

1113. Esclarecer el comportamiento de la función $y = x - \ln x$ en los puntos $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2$, $x_3 = e$ y $x_4 = 1$ y mostrar que si la función dada crece en el punto $x = a > 0$, en cambio, decrece en el punto $1/a$.

1114. Esclarecer el comportamiento de la función

$$y = x \operatorname{arctg} x$$

en los puntos $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

1115. Esclarecer el comportamiento de la función

$$y = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{para } x \neq 0, \\ 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

en los puntos $x_1 = 1/2$, $x_2 = -1/2$ y $x_3 = 0$.

§ 2. Aplicación de la primera derivada

Teoremas de Rolle y Lagrange

1116. Verificar la validez del teorema de Rolle para la función $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ en el intervalo $[-1, 2]$.

1117. Verificar la validez del teorema de Rolle para la función $y = \ln \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

1118. Verificar la validez del teorema de Rolle para la función $y = 4^{\operatorname{sen} x}$ en el intervalo $[0, \pi]$.

1119. Verificar la validez del teorema de Rolle para la función $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ en el intervalo $[1, 2]$.

1120. La función $y = \frac{2-x^2}{x^4}$ toma valores iguales en los extremos del intervalo $[-1, 1]$. Mostrar que la derivada de dicha función no se reduce a cero en parte alguna del intervalo $[-1, 1]$, y explicar esta desviación del teorema de Rolle.

1121. La función $y = |x|$ toma valores iguales en los extremos del intervalo $[-a, a]$. Mostrar que la derivada de dicha función no se reduce a cero en parte alguna del intervalo $[-a, a]$, y explicar esta desviación del teorema de Rolle.

1122. Demostrar el siguiente teorema: si la ecuación

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x = 0$$

tiene la raíz positiva $x = x_0$, la ecuación

$$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

también la tiene, siendo esta raíz menor que x_0.

1123. Sea dada la función $f(x) = 1 + x^m (x-1)^n$, donde m y n son números enteros positivos. Sin calcular la derivada, mostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene, por lo menos, una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

1124. Mostrar que la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$ no puede tener dos raíces distintas en el intervalo $(0, 1)$.

1125. Sin calcular la derivada de la función

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

esclarecer cuántas raíces reales tiene la ecuación $f'(x) = 0$ e indicar en qué intervalos están.

1126. Mostrar que la función $f(x) = x^n + px + q$ no puede tener más de dos raíces reales siendo n par, y más de tres siendo n impar.

1127. Escribir la fórmula de Lagrange para la función $y = \operatorname{sen} 3x$ en el intervalo $[x_1, x_2]$.

1128. Escribir la fórmula de Lagrange para la función $y = x \times (1 - \ln x)$ en el intervalo $[a, b]$.

1129. Escribir la fórmula de Lagrange para la función $y = \operatorname{arcsen} 2x$ en el intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

1130. Verificar la validez del teorema de Lagrange para la función $y = x^n$ en el intervalo $[0, a]$; $n > 0$, $a > 0$.

1131. Verificar la validez del teorema de Lagrange para la función $y = \ln x$ en el intervalo $[1, e]$.

1132. Mediante la fórmula de Lagrange demostrar las desigualdades

$$\frac{a-b}{a} \leqslant \ln \frac{a}{b} \leqslant \frac{a-b}{b},$$

siendo $0 < b \leqslant a$.

1133. Mediante la fórmula de Lagrange demostrar las desigualdades

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2 \beta} \leqslant \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta \leqslant \frac{\alpha-\beta}{\cos^2 \alpha} \quad \text{siendo } 0 < \beta \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

1134. Para $a > b$ demostrar mediante la fórmula de Lagrange la validez de las desigualdades

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b),$$

si $n > 1$, y las desigualdades opuestas, si $n < 1$.

1135. Analicemos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{para } x \neq 0, \\ 0 & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

Es derivable para cualquier valor de x. Escribamos para ella la fórmula de Lagrange en el intervalo $[0, x]$:

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi) \qquad (0 < \xi < x).$$

Obtendremos:

$$x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = x\left(2\xi \operatorname{sen}\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi}\right),$$

de donde $\cos\frac{1}{\xi} = 2\xi \operatorname{sen}\frac{1}{\xi} - x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$. Hacemos ahora que x tienda a cero, en este caso ξ también tenderá a cero, y de este modo llegamos a: $\lim\limits_{\xi\to 0} \cos\frac{1}{\xi} = 0$.

Explicar este resultado paradójico.

1136. Aplicando la fórmula

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x,$$

a la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$ en el intervalo $[1;\ 1{,}1]$, hallar el valor aproximado de arctg 1,1.

En los ejercicios 1137—1141 aplicando la fórmula

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x,$$

calcular los valores aproximados de las expresiones que se indican.

1137. arcsen 0,54

1138. lg 11. Comparar con los datos tabulares.

1139. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ para $x = 0{,}2$.

1140. lg 7, sabiendo que lg 2 = 0,3010 y lg 3 = 0,4771. Comparar el resultado con los datos tabulares.

1141. lg 61. Comparar el resultado con los datos tabulares.

1142. Confirmar que aplicando la fórmula

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

para calcular el logaritmo de $N + 0{,}01\,N$, es decir, poniendo

$$\lg(N + 0{,}01N) = \lg N + \frac{0{,}43429}{N + \frac{0{,}01}{2}N}\,0{,}01N = \lg N + \frac{0{,}43429}{100{,}5}$$

cometemos un error menor que 0,00001, es decir, obtenemos cinco cifras exactas después de la coma si es que lg N viene dado con cinco cifras exactas.

Comportamiento de las funciones en el intervalo

1143. Mostrar que la función $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ decrece en el intervalo $(-2, 1)$.

1144. Mostrar que la función $y = \sqrt{2x - x^2}$ crece en el intervalo $(0, 1)$ y decrece en el intervalo $(1, 2)$. Construir la gráfica de esta función.

1145. Mostrar que la función $y = x^3 + x$ crece por todas partes.

1146. Mostrar que la función $y = \operatorname{arctg} x - x$ decrece por todas partes.

1147. Mostrar que la función $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ crece en cualquier intervalo que no tenga el punto $x = 0$.

1148. Mostrar que la función $y = \frac{\operatorname{sen}(x+a)}{\operatorname{sen}(x+b)}$ varía de manera monótona en cualquier intervalo que no encierre puntos de discontinuidad de la función.

1149*. Demostrar la desigualdad $\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}$ siendo

$$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}.$$

1150. Hallar los intervalos de monotonía de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ y construir la gráfica en el intervalo $(-2, 4)$ siguiendo sus puntos.

1151. Hallar los intervalos de monotonía de la función $y = x^4 - 2x^2 - 5$.

En los ejercicios 1152—1164 hallar los intervalos de monotonía de las funciones.

1152. $y = (x-2)^5 (2x+1)^4$.

1153. $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $(a > 0)$.

1154. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

1155. $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.

1156. $y = x - e^x$.

1157. $y = x^2 e^{-x}$.

1158. $y = \frac{x}{\ln x}$.

1159. $y = 2x^2 - \ln x$.

1160. $y = x - 2 \operatorname{sen} x$. $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

1161. $y = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

1162. $y = x + \cos x$.

1163. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

1164. $y = x\sqrt{ax - x^2}$ $(a > 0)$.

En los ejercicios 1165—1184 hallar los valores extremos de las funciones.

1165. $y = 2x^3 - 3x^2$.

1166. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

1167. $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$. **1168.** $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8^2}$.

1169. $y=\frac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$. **1170.** $y=-x^2\sqrt{x^2+2}$.

1171. $y=\frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$. **1172.** $y=\frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$.

1173. $y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$. **1174.** $y=\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$.

1175. $y=x-\ln(1+x)$. **1176.** $y=x-\ln(1+x^2)$.

1177. $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

1178. $y=(x^2-2x)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x$.

1179. $y=\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{8}x^2-\frac{x-1}{2}$.

1180. $y=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\operatorname{arcsen} x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\frac{\pi}{12}x^2$.

1181. $y=x\operatorname{sen} x+\cos x-\frac{1}{4}x^2 \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1182. $y=\left(\frac{1}{2}-x\right)\cos x+\operatorname{sen} x-\frac{x^2-x}{4} \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1183. $y=\frac{2-x}{\pi}\cos\pi(x+3)+\frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}(x+3) \quad (0<x<4)$.

1184. $y=ae^{px}+be^{-px}$.

En los ejercicios 1185—1197 hallar los valores máximos y mínimos de las funciones dadas en los intervalos que se indican.

1185. $y=x^4-2x^2+5$; $[-2,\ 2]$.

1186. $y=x+2\sqrt{\ }$; $[0,\ 4]$.

1187. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$; $[-1,\ 2]$.

1188. $y=x^3-3x^2+6x-2$; $[-1,\ 1]$.

1189. $y=\sqrt{100-x^2} \quad (-6\leqslant x\leqslant 8)$.

1190. $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$.

1191. $y=\frac{x-1}{x+1} \quad (0\leqslant x\leqslant 4)$.

1192. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x} \quad (0<x<1)\ (a>0,\ b>0)$.

1193. $y=\operatorname{sen} 2x-x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1194. $y=2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$.

1195. $y=x^x \quad (0,1\leqslant x<\infty)$.

1196. $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2} \quad (0\leqslant x\leqslant 3)$.

1197. $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$.

Desigualdades

En los ejercicios 1198—1207 demostrar la validez de las desigualdades.

1198. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ $(x > 1)$.

1199. $e^x > 1 + x$ $(x \neq 0)$.

1200. $x > \ln(1 + x)$ $(x > 0)$.

1201. $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ $(x > 1)$.

1202. $2x \operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1 + x^2)$.

1203. $1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geqslant \sqrt{1 + x^2}$.

1204. $\ln(1 + x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x}$ $(x > 0)$.

1205. $\operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ $(x > 0)$.

1206. $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x > 2x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

1207. $\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2}$ $(x \neq 0)$.

Ejercicios para hallar los valores máximos y mínimos de las funciones

1208. Dividir el número 8 en dos sumandos tales que la suma de sus cubos sea la menor posible.

1209. ¿Qué número positivo sumado a su inverso da lugar a la suma mínima?

1210. Dividir el número 36 en dos factores tales que la suma de sus cuadrados sea la menor posible.

1211. Se debe hacer una caja con tapa, cuyo volumen sea de 72 cm³. Los lados de la base han de estar en relación 1 : 2. ¿Cuáles deben ser las medidas de todos los lados para que la superficie total sea la menor posible?

1212. De una hoja de cartón, de 18×18 cm², deben ser recortados cuadrados iguales de modo que doblando la hoja, siguiendo las

Fig. 29

líneas punteadas (véase la fig. 29), resulte una caja que tenga la mayor capacidad posible. ¿Cuánto debe medir cada lado del cuadrado?

1213. Resolver el problema anterior para el caso de la hoja rectangular de 8×5 cm².

1214. Al volumen de un prisma triangular regular es igual a v. ¿Cuánto debe medir el lado de la base para que su superficie total sea la menor posible?

1215. Una tina abierta tiene la forma de cilindro. Siendo su volumen igual a v, ¿cuál debe ser el radio de la base y la altura para que su superficie total sea la menor posible?

1216. Hallar la relación entre el radio R y la altura H de un cilindro que tiene la menor superficie total posible, conociendo su volumen.

1217. Se debe hacer un embudo cónico que tenga la generatriz igual a 20 cm. ¿Cuál debe ser la altura del embudo para que su volumen sea el mayor posible?

1218. Un sector de ángulo central α está recortado de un círculo. Al enrollarse el sector, ha sido engendrada una superficie cónica. ¿Cuál debe ser la abertura del ángulo α para que el volumen del cono obtenido sea el mayor posible?

1219. El perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación del triángulo en torno a su base sea el mayor posible?

1220. Al perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cono engendrado por la rotación del triángulo en torno a su altura bajada sobre la base sea el mayor posible?

1221. Hallar la altura del cilindro que tenga el volumen máximo posible y que sea susceptible de ser inscrito en una esfera de radio R.

1222. Hallar la altura del cono de máximo volumen que sea susceptible de ser inscrito en una esfera de radio R.

1223. Al actuar la fuerza de gravedad sobre una gota de lluvia cuya masa inicial es igual a m_0, la hace caer. La gota va evaporándose uniformemente de modo que la pérdida de la masa es proporcional al tiempo (el coeficiente de proporcionalidad es k). ¿Al cabo de cuántos segundos al comenzar la caída será máxima la energía cinética de la gota y cuál será su valor? (Se prescinde de la resistencia del aire.)

1224. Una palanca de segundo género tiene A por su punto de apoyo. Del punto B ($AB = a$) está suspendida la carga P. El peso de la unidad de la longitud de la palanca es igual a k. ¿Cuál debería ser la longitud de la palanca para que la carga P quede en equilibrio con la fuerza mínima? (El momento de la fuerza compensadora debe equivaler a la suma de los momentos de la carga P y de la palanca.)

1225. La suma que se gasta en el combustible para el hogar de la caldera de un barco es proporcional al cubo de la velocidad. Es sabido que si el barco marcha a 10 km por hora, se gastan 30 rublos (por hora) en el combustible. Los demás gastos, que no dependen de la velocidad son de 480 rublos por hora. ¿A qué velocidad del barco serían mínimos los gastos totales por un km? ¿Cuál sería la suma total de los gastos por hora?

1226. Tres puntos A, B y C se hallan situados de modo que $\angle ABC = 60°$. Un automóvil sale del punto A y en el mismo momento del punto B parte un tren. El auto avanza hacia el punto B a 80 km por hora, el tren se dirige hacia el punto C a 50 km por hora. Teniendo en cuenta que la distancia $AB = 200$ km, ¿en qué momento, al comenzar el movimiento, será mínima la distancia entre el automóvil y el tren?

1227. Dado un cierto punto A en una circunferencia, trazar una cuerda BC paralela a la tangente en el punto A de modo que el área del triángulo ABC sea la mayor posible.

1228. Hallar los lados del rectángulo de máximo perímetro e inscrito en una semicircunferencia de radio R.

1229. Inscribir el rectángulo de mayor área posible en un segmento dado del círculo.

1230. Circunscribir en torno a un cilindro dado el cono que tenga el menor volumen posible (los planos de las bases circulares del cilindro y del cono deben coincidir).

1231. Hallar la altura del cono recto circular, de menor volumen posible, circunscrito en torno a una esfera de radio R.

1232. Hallar el ángulo en el vértice de la sección axial de un cono que tiene la menor superficie lateral posible y que está circunscrito en torno a una esfera dada.

1233. ¿Cuál ha de ser la abertura del ángulo en el vértice de un triángulo isósceles, de área dada, para que el radio de un círculo inscrito en dicho triángulo sea el mayor posible?

1234. Hallar la altura de un cono que tiene el menor volumen posible y que está circunscrito en torno a una semiesfera de radio R (el centro de la base del cono coincide con el de la esfera).

1235. ¿Cuál ha de ser la altura de un cono inscrito en una esfera de radio R para que su superficie lateral sea la mayor posible?

1236. Demostrar que la cantidad de tela necesaria para hacer una tienda de campaña de forma cónica y de capacidad dada será la menor posible en el caso de que su altura sea $\sqrt{2}$ veces mayor que el radio de la base.

1237. Trazar una recta de modo que pase por un punto dado P (1, 4) y que la suma de las longitudes de los segmentos positivos cortados por dicha recta en los ejes de coordenadas, sea la menor posible.

1238. Hallar los lados del rectángulo, de mayor área posible, inscrito en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1239. Hallar la elipse cuya área sea la menor posible y que está circunscrita en torno a un rectángulo dado (el área de la elipse de semiejes a y b es igual a πab).

1240. Sea dada la elipse $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{28}=1$. Trazar una tangente de modo que el área del triángulo engendrado por dicha tangente y los ejes de coordenadas, sea la menor posible. ¿Por qué punto de la elipse debe pasar dicha tangente?

1241. Sean dados dos puntos A (1, 4) y B (3, 0) en la elipse $2x^2+y^2=18$. Hallar el tercer punto C tal que el área del triángulo ABC sea la mayor posible.

1242. Sean dados la parábola $y^2=2px$ y un punto en su eje, a una distancia a del vértice. Indicar la abscisa x del punto de la parábola más próximo al punto referido.

1243. Una banda de hierro, de anchura a, ha de ser encorvada de modo que tome la forma de canalón cilíndrico abierto (la sección del canalón ha de semejarse a un arco de segmento circular). ¿Cuál ha de ser la abertura del ángulo central que se apoya en este arco para que la capacidad del canalón sea la mayor posible?

1244. Un tronco de árbol que mide 20 m, tiene la forma de un cono truncado. Los diámetros de sus bases miden 2 m y 1 m, respectivamente. Se debe cortar una viga de sección trasversal cuadrada cuyo eje coincida con el del tronco y cuyo volumen sea el mayor posible. ¿Qué dimensiones debe tener la viga?

1245. Una serie de experimentos con la magnitud A han dado como resultado n valores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Con frecuencia se admite como valor de A un valor de x tal que la suma de los cuadrados de sus desviaciones de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sea la menor posible. Hallar x que satisfaga esta condición.

1246. Un torpedero está anclado, a 9 km del punto más próximo de la orilla. Se necesita enviar a un mensajero al campamento situado en la orilla. La distancia entre éste y el punto más próximo referido, es igual a 15 km. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre a pie 5 km por hora, y en una barca, remando, 4 km por hora, decir en qué punto de orilla debe desembarcar para llegar al campamento lo más pronto posible.

1247. Un farol debe ser colgado exactamente encima del centro de una plazoleta circular de radio R. ¿A qué altura deberá estar el farol para que ilumine, lo mejor posible, una senda que rodea la plazoleta? (La iluminación de la plazoleta es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de distancia que media entre el foco luminoso y la plazoleta en mención.)

1248. En un segmento de longitud l que une dos manantiales de luz de intensidad luminosa I_1 e I_2, hallar el punto peor iluminado.

1249. Un cuadro de altura 1,4 m cuelga de la pared de modo que su borde inferior está 1,8 m por encima del radio de la vista de un observador. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el observador para que su posición sea la más ventajosa para contemplar el cuadro (es decir, para que el ángulo visual sea el mayor posible)?

1250. Una carga de peso P situada en un plano horizontal debe ser desplazada bajo la acción de la fuerza F aplicada a ella. La fuerza de rozamiento es proporcional a la de que aprieta el cuerpo contra el plano y tiene la dirección opuesta a la de la fuerza que desplaza el cuerpo. El coeficiente de proporcionalidad (el coeficiente de rozamiento) es igual a k. ¿Qué valor debe tener el ángulo φ formado entre el horizonte y la fuerza F aplicada para que el valor de ésta resulte el menor posible? Hallar el valor mínimo de la fuerza de desplazamiento.

1251. La velocidad con la que pasa el agua por un tubo cilíndrico es directamente proporcional al llamado radio hidráulico R, que se calcula mediante la fórmula $R=\frac{S}{p}$, donde S es el área de sección del flujo del agua dentro del tubo, p es el perímetro de la sección del tubo hundido en el agua. La proporción (o el grado) en que el agua llena el tubo, se caracteriza por el ángulo central que se apoya sobre la superficie horizontal del agua coriente. ¿Cuál ha de ser esta proporción para que la velocidad del paso del agua sea la mayor posible? (Al resolver el problema, aparece una ecuación transcendente cuyas raíces han de ser halladas gráficamente).

1252. En una página de un libro el texto impreso debe ocupar S cm^2. Los márgenes superior e inferior deben ser iguales a a cm, los de izquierda y de derecha, iguales a b cm. Si tomamos en consideración sólo la economía del papel, ¿qué dimensiones de la página serían las más ventajosas?

1253*. Un embudo cónico, de radio de base R y altura H está lleno de agua. Una esfera pesada está sumergida en el embudo. ¿Cuál ha de ser el radio de la esfera para que el volumen de agua expulsada del embudo por la parte sumergida de la esfera, sea el mayor posible?

1254. Una parábola tiene su vértice situado sobre una circunferencia de radio R, y el eje de la parábola sigue la dirección del diámetro. ¿Cuál ha de ser el parámetro de la parábola para que el área del segmento limitado por la parábola y la cuerda común para ésta y la circunferencia, sea la mayor posile? (El área del segmento parabólico simétrico es igual a dos tercios del producto de su base por la altura.)

1255. Un plano, paralelo a la generatriz, corta un cono cuyo radio de base es R y cuya altura, H. ¿Cuál ha de ser la distancia entre la línea de intersección de dicho plano con el plano de la base cónica y el centro de la base cónica para que el área de sección sea la mayor posible? (Véase también el ejercicio anterior.)

1256. Sea dada la parábola $y^2 = 2px$ y la normal en un punto P. ¿Dónde debe estar situado el punto P para que el segmento de la normal situado dentro de la curva tenga la longitud mínima?

1257. El segmento de la tangente a una elipse comprendido entre los ejes, tiene longitud mínima. Mostrar que la tangente se divide, en el punto de contacto, en dos partes iguales a los semiejes de la elipse, respectivamente.

1258. Demostrar que la distancia entre el centro de la elipse y cualquier normal no es superior a la diferencia de los semiejes. (Es conveniente recurrir a la expresión paramétrica de la elipse.)

1259. En el sistema de coordenadas rectangulares xOy vienen dados el punto (a, b) y la curva $y = f(x)$. Mostrar que la distancia entre el punto constante (a, b) y la variable $(x, f(x))$ puede alcanzar su extremo sólo siguiendo la dirección de la normal a la curva $y = f(x)$.

Se llama función primitiva de la función $f(x)$ a la función $F(x)$ cuya derivada es igual a la dada: $F'(x) = f(x)$.

En los ejercicios 1260—1262 mostrar (derivando y sin derivar) que las funciones dadas son primitivas de una misma función.

1260. $y = \ln ax$ e $y = \ln x$.

1261. $y = 2 \operatorname{sen}^2 x$ e $y = -\cos 2x$.

1262. $y = (e^x + e^{-x})^2$ e $y = (e^x - e^{-x})^2$.

1263*. Mostrar que la función

$$y = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

es constante (es decir, no depende de x). Hallar su valor.

1264. Mostrar que la función $y = 2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1+x^2}$ es constante cuando $x \geqslant 1$. Hallar el valor de esta constante.

1265. Mostrar que la función

$$y = \arccos \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x} - 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right),$$

donde $0 < b \leqslant a$ es constante cuando $x \geqslant 0$. Hallar el valor de esta constante.

1266. Comprobar que las funciones $\frac{1}{2} e^{2x}$, $e^x \operatorname{sh} x$ y $e^x \operatorname{ch} x$ difieren en una magnitud constante. Mostrar que cada una de las funciones indicadas es una función primitiva con respecto a la función e^{2x}.

§ 3. Aplicación de la segunda derivada

Extremos

Aplicando el concepto de la segunda derivada, hallar los extremos de las funciones que se indican en los ejercicios 1267—1275.

1267. $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x$ $(a > 0)$.

1268. $y = x^2(a-x)^2$. **1269.** $y = x + \frac{a^2}{x}$ $(a > 0)$.

1270. $y = x + \sqrt{1-x}$. **1271.** $y = x\sqrt{2-x^2}$.

1272. $y = \operatorname{ch} ax$. **1273.** $y = x^2e^{-x}$.

1274. $y = \frac{x}{\ln x}$. **1275.** $y = x^{\frac{1}{x}}$.

1276. ¿Para qué valor de a la función

$$f(x) = a \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$$

tiene el extremo para $x = \pi/3$? ¿Será máximo o mínimo?

1277. Hallar los valores de a y b para los cuales la función

$$y = a \ln x + bx^2 + x$$

tiene extremos en los puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Mostrar que para estos valores de a y b la función dada tiene el mínimo en el punto x_1, y el máximo en el punto x_2.

Convexidad, concavidad, puntos de inflexión

1278. Aclarar si es convexa o cóncava la línea $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ en los entornos de los puntos $(1, 11)$ y $(3, 3)$.

1279. Aclarar si es convexa o cóncava la línea $y = \operatorname{arctg} x$ en los entornos de los puntos $(1, \pi/4)$ y $(-1, -\pi/4)$.

1280. Aclarar si es convexa o cóncava la línea $y = x^2 \ln x$ en los entornos de los puntos $(1, 0)$ y $(1/e^2, -2/e^4)$.

1281. Mostrar que la gráfica de la función $y = x \operatorname{arctg} x$ es cóncava en todas partes.

1282. Mostrar que la gráfica de la función $y = \ln(x^2 - 1)$ es convexa en todas partes.

1283. Demostrar que si la gráfica de la función es convexa en todas partes o cóncava en todas partes, la función referida puede tener no más que un valor extremo.

1284. Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes positivos y exponentes pares. Mostrar que la gráfica de la función $y = P(x) + ax + b$ es cóncava en todas partes.

1285. Las líneas $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$ son cóncavas sobre el intervalo (a, b). Demostrar que sobre dicho intervalo: a) la línea $y = \varphi(x) + \psi(x)$ es cóncava; b) si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son positivas y tienen un punto mínimo común, la línea $y = \varphi(x)\psi(x)$ es cóncava.

1286. Mostrar qué aspecto ofrece la gráfica de la función si se sabe que en el intervalo (a, b):

1) $y > 0,\ y' > 0,\ y'' < 0$; 2) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' > 0$;
3) $y < 0,\ y' > 0,\ y'' > 0$; 4) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' < 0$.

En los ejercicios 1287—1300 hallar los puntos de inflexión, intervalos de concavidad y de convexidad de las gráficas de las funciones que se indican.

1287. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$. **1288.** $y = (x + 1)^4 + e^x$.

1289. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

1290. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.

1291. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.

1292. $y = (x+2)^6 + 2x + 2$. **1293.** $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$ $(a > 0)$.

1294. $y = a - \sqrt[3]{x-b}$. **1295.** $y = e^{\operatorname{sen} x}\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

1296. $y = \ln(1 + x^2)$. **1297.** $y = \frac{a}{x}\ln\frac{x}{a}$ $(a > 0)$.

1298. $y = a - \sqrt[5]{(x-b)^2}$. **1299.** $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

1300. $y = x^4(12 \ln x - 7)$.

1301. Mostrar que la línea $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ tiene tres puntos de inflexión que están situados en una misma recta.

1302. Mostrar que los puntos de inflexión de la línea $y = x \operatorname{sen} x$ están situados en la línea $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

1303. Mostrar que los puntos de inflexión de la línea $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ están situados en la línea $y^2(4 + x^4) = 4$.

1304. Confirmar que las gráficas de las funciones $y = \pm e^{-x}$ e $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$ (la curva de oscilaciones amortiguadas) tienen tangentes comunes en los puntos de inflexión de la línea $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$.

1305. ¿Para qué valores de a y b el punto $(1, 3)$ es el de inflexión de la línea $y = ax^3 + bx^2$?

1306. Elegir α y β tales que el punto A $(2; 2{,}5)$ sea el de inflexión de la línea $x^2y + \alpha x + \beta y = 0$. ¿Qué otros puntos de inflexión tiene la línea referida?

1307. ¿Para qué valores de a tiene puntos de inflexión la gráfica de la función $y = e^x + ax^3$?

1308. Demostrar que la abscisa del punto de inflexión en la gráfica de una función no puede coincidir con el punto del extremo de esta misma función.

1309. Demostrar que entre dos puntos de extremo de cualquier función derivada dos veces está situada por lo menos una abscisa del punto de inflexión de la gráfica de la función.

1310. Comprobar lo siguiente, tomando la función $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8$ como ejemplo: entre las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de la función puede no haber puntos de extremo (comparar con el ejercicio anterior).

1311. Observando y examinando la gráfica de la función (véase la fig. 30) indicar el aspecto de las gráficas de su primera y segunda derivadas.

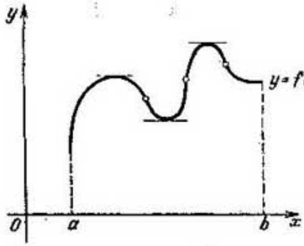

Fig. 30

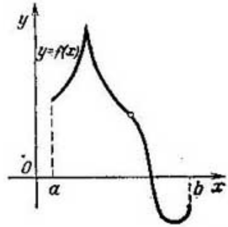

Fig. 31

1312. Hacer lo mismo con respecto a la gráfica de la función presentada en la fig. 31.

1313. Indicar el aspecto de la gráfica de la función examinando la gráfica de su derivada (véase la fig. 32).

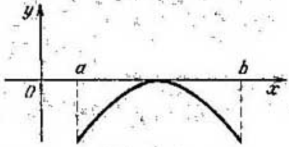

Fig. 32

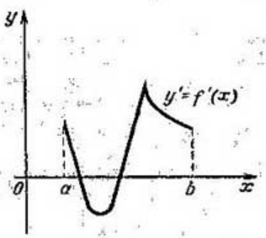

Fig. 33

1314. Indicar el aspecto de la gráfica de la función examinando la gráfica de su derivada (véase la fig. 33).

1315. La línea viene dada en forma paramétrica por las ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Mostrar que a los valores de t para los cuales la expresión $\frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi}$ cambia de signo (la prima designa la derivación con respecto a t) y $\varphi'(t) \neq 0$, les corresponden los puntos de inflexión de la línea referida.

1316. Hallar los puntos de inflexión para la línea $x = t^2$, $y = 3t + t^3$.

1317. Hallar los puntos de inflexión para la línea $x = e^t$, $y = \operatorname{sen} t$.

§ 4. Tareas complementarias. Resolución de ecuaciones.

Fórmula de Cauchy y regla de L'hospital

1318. Escribir la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $\varphi(x) = \ln x$ en el intervalo $[a, b]$, $0 < a < b$.

1319. Escribir la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = e^{2x}$ y $\varphi(x) = 1 + e^x$ en el intervalo $[a, b]$.

1320. Comprobar la validez de la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = x^3$ y $\varphi(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[1, 2]$.

1321. Comprobar la validez de la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $\varphi(x) = x + \cos x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

1322. Demostrar que si en el intervalo $[a, b]$ se cumple la expresión $|f'(x)| \geqslant |\varphi'(x)|$, y $\varphi'(x)$ no se reduce a cero, también será válida la expresión $|\Delta f(x)| \geqslant |\Delta\varphi(x)|$, donde $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, $\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$, y x y $x + \Delta x$ son cualesquiera puntos del intervalo $[a, b]$.

1323. Demostrar que en el intervalo $[x, 1/2]$ $(x \geqslant 0)$ el incremento de la función $y = \ln(1 + x^2)$ es menor que el de la función $y = \operatorname{arctg} x$, y en el intervalo $[1/2, x]$, viceversa, es decir, $\Delta \operatorname{arctg} x < \Delta \ln(1 + x^2)$. Valiéndose de esta última relación mostrar que en el intervalo $[1/2, 1]$

$$\operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2) \geqslant \frac{\pi}{4} - \ln 2.$$

En los ejercicios 1324—1364 hallar los límites.

1324. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.

1325. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x}$.

1326. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$.

1327. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$. **1329.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\operatorname{sen} bx}}$.

1330. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{tg} x}$. **1331.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

1332. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$. **1333.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$.

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$. **1335.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x\cos x}$.

1336. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$. **1337.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

1338. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$. **1339.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x-x}$.

1340. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}$. **1341.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\operatorname{sen}^6 2x}$.

1342. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^4-4x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+x^4}{6\operatorname{sen} x-6x+x^3}$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{sen} 2x}{\ln\operatorname{sen} x}$. **1344.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\operatorname{sen} x}$.

1345. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$. **1346.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n e^{-x})$.

1347. $\lim\limits_{x\to\infty}[(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x]$.

1348. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\operatorname{sen}\frac{a}{x}\right]$. **1349.** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]$.

1350. $\lim\limits_{\varphi\to a}\left[(a^2-\varphi^2)\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2a}\right]$. **1351.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$.

1352. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)$. **1353.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$.

1354. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)}-x]$.

1355. $\lim\limits_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)]$. **1356.** $\lim\limits_{x\to 0}[x^2e^{\frac{1}{x^2}}]$. **1357.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

1358. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\operatorname{sen} x}$. **1359.** $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$. **1360.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

1361. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$. **1362.** $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

1363. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$. **1364.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right]$.

1365. Comprobar que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$ existe, pero no es susceptible de ser calculado de acuerdo con la regla de L'Hospital.

1366. ¿El valor de qué función (para valores suficientemente grandes de x) es mayor: $a^x x^a$ o x^x?

1367. ¿Los valores de qué función (para valores suficientemente grandes de x) son mayores: $f(x)$ o $\ln f(x)$ cuando $f(x)\to\infty$, para $x\to\infty$.

1368. Sea $x\to 0$. Demostrar que $e-(1+x)^{\frac{1}{x}}$ es una infinitesimal de primer orden respecto a x.

1369. Sea $x\to 0$. Demostrar que $\ln(1+x)-e\ln\ln(e+x)$ es una infinitesimal de segundo orden respecto a x.

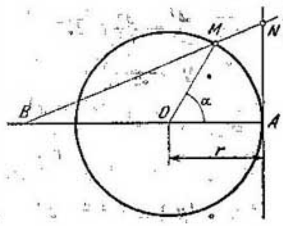

Fig. 34

1370. La tangente trazada en el punto A a una circunferencia de radio r (véase la fig. 34) lleva marcado un segmento AN cuya longitud es igual a la del arco AM. La recta MN corta la prolongación del diámetro AO en el punto B. Comprobar que

$$OB=\frac{r(\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha-\alpha},$$

donde α es la medida en radianes del ángulo central correspondiente al arco AM, y mostrar que $\lim\limits_{\alpha\to 0} OB=2r$.

Variación asintótica de las funciones
y asíntotas de las líneas

1371. Partiendo directamente de la definición, comprobar que la recta $y=2x+1$ es una asíntota de la línea

$$y=\frac{2x^4+x^3+1}{x^3}.$$

1372. Partiendo directamente de la definición, comprobar que la recta $x+y=0$ es una asíntota de la línea $x^2y+xy^2=1$.

1373. Demostrar que las líneas $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$ e $y=\frac{x^2}{x-1}$ se aproximan asintóticamente cuando $x\to\pm\infty$.

1374. Demostrar que las funciones

$$f(x)=\sqrt{x^6+2x^4+7x^2+1} \text{ y } \varphi(x)=x^3+x$$

son equivalentes asintóticamente cuando $x \to \infty$. Valiéndose de esta circunstancia calcular aproximadamente $f(115)$ y $f(120)$. ¿Cuál sería el error si pusiéramos $f(100)=\varphi(100)$?

En los ejercicios 1375—1391 hallar las asíntotas de las líneas dadas.

1375. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **1376.** $xy=a$.

1377. $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$. **1378.** $y=c+\frac{a^3}{(x-b)^2}$.

1379. $2y(x+1)^2=x^3$. **1380.** $y^3=a^3-x^3$.

1381. $y^3=6x^2+x^3$. **1382.** $y^2(x^2+1)=x^2(x^2-1)$.

1383. $xy^2+x^2y=a^3$.

1384. $y(x^2-3bx+2b^2)=x^3-3ax^2+a^3$.

1385. $(y+x+1)^2=x^2+1$. **1386.** $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

1387. $y=xe^x$. **1388.** $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$.

1389. $y=x \operatorname{arcsec} x$. **1390.** $y=2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

1391. $y=\frac{xf(x)+a}{f(x)}$, donde $f(x)$ es un polinomio, $(a\neq 0)$.

1392. Una línea es dada paramétricamente por las ecuaciones $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Demostrar que las asíntotas no paralelas a los ejes de coordenadas pueden existir sólo cuando para los valores de $t=t_0$, existen simultáneamente

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty \text{ y } \lim_{t\to t_0}\psi(t)=\infty.$$

Si la ecuación de la asíntota es $y=ax+b$, se tiene

$$a=\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \quad b=\lim_{t\to t_0}[\psi(t)-a\varphi(t)].$$

¿Cómo se podrían hallar las asíntotas paralelas a los ejes de coordenadas?

1393. Hallar las asíntotas de la línea: $x=\frac{1}{t}$, $y=\frac{t}{t+1}$.

1394. Hallar las asíntotas de la línea: $x=\frac{2e^t}{t-1}$, $y=\frac{te^t}{t-1}$.

1395. Hallar las asíntotas de la línea: $x=\frac{2t}{1-t^2}$, $y=\frac{t^2}{1-t^2}$.

1396. Hallar las asíntotas del folio de Descartes: $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

1397. Hallar las asíntotas de la línea: $x=\frac{t-8}{t^2-4}$, $y=\frac{3}{t(t^2-4)}$

Análisis general de las funciones y de las líneas

En los ejercicios 1398—1464 efectuar un análisis exhaustivo de las funciones que se indican y trazar sus gráficas.

1398. $y=\frac{x}{1+x^2}$.

1399. $y=\frac{x}{1-x^2}$.

1400. $y=\frac{x}{x^2-1}$.

1401. $y(x-1)(x-2)(x-3)=1$.

1402. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

1403. $y=(x^2-1)^3$.

1404. $y=32x^2(x^2-1)^3$.

1405. $y=\frac{1}{x}+4x^2$.

1406. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.

1407. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

1408. $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.

1409. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

1410. $y(x-1)=x^3$.

1411. $y(x^3-1)=x^4$.

1412. $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

1413. $y=\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.

1414. $xy=(x^2-1)(x-2)$.

1415. $(y-x)x^4+8=0$.

1416. $y=\frac{x}{e^x}$.

1417. $y=x^2e^{-x}$.

1418. $y=\frac{e^x}{x}$.

1419. $y=x-\ln(x+1)$.

1420. $y=\ln(x^2+1)$.

1421. $y=x^2e^{-x^2}$.

1422. $y=x^3e^{-x}$.

1423. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

1424. $y=\frac{1}{e^x-1}$.

1425. $y=x+\frac{\ln x}{x}$.

1426. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

1427. $y=x+\operatorname{sen} x$.

1428. $y=x\operatorname{sen} x$.

1429. $y=\ln\cos x$.

1430. $y=\cos x-\ln\cos x$.

1431. $y=x-2\operatorname{arctg} x$.

1432. $y=e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$ (sin buscar puntos de inflexión).

1433. $y=e^{\operatorname{sen} x}-\operatorname{sen} x$ (sin buscar puntos de inflexión).

1434. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$.

1435. $y^3=x^2(x^2-4)^3$.

1436. $(3y+x)^3=27x$.

1437. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}=1$.

1438. $y=(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^3$.

1439. $y^3=6x^2-x^3$.

1440. $(y-x)^2=x^5$.

1441. $(y-x^2)^2=x^5$

1442. $y^2=x^3+1$.

1443. $y^2=x^3-x$.

1444. $y^2=x(x-1)^2$.

1445. $y^2=x^2(x-1)$.

1446. $y^2=\frac{x^3-2}{3x}$.

1447. $x^2y+xy^2=2$.

1448. $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$ (estrofoide) $(a>0)$.

1449. $9y^2=4x^3-x^4$.

1450. $25y^2=x^2(4-x^2)^3$.

1451. $y^2=x^2-x^4$.

1452. $x^2y^2=4(x-1)$.

1453. $y^2(2a-x)=x^3$ (cisoide) $(a>0)$.

1454. $x^2y^2=(x-1)(x-2)$.

1455. $x^2y^2=(a+x)^3(a-x)$ (concoide) $(a>0)$.

1456. $16y^2=(x^2-4)^2(1-x^2)$.

1457. $y^2=(1-x^2)^3$.

1458. $y^2x^4=(x^2-1)^3$.

1459. $y^2=2exe^{-2x}$.

1460. $y=e^{\frac{1}{x}}-x$.

1461. $y=e^{\operatorname{tg} x}$.

1462. $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $f(0)=1$

1463. $y=1-xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}$ cuando $x\neq 0$, $y=1$ para $x=0$.

1464. $y=x^2-4|x|+3$.

En los ejercicios 1465—1469 analizar las funciones dadas en forma paramétrica y trazar sus gráficas.

1465. $x=t^3+3t+1$, $y=t^3-3t+1$.

1466. $x=t^3-3\pi$, $y=t^3-6\operatorname{arctg} t$.

1467. $x=\frac{3t}{1+t^3}$, $y=\frac{3t^2}{1+t^3}$.

1468. $x=te^t$, $y=te^{-t}$.

1469. $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\operatorname{sen} t-a\operatorname{sen} 2t$ (cardioide).

En los ejercicios 1470—1477 analizar las líneas cuyas ecuaciones son dadas en el sistema de coordenadas polares (véase la nota en la pág. 31).

1470. $\rho = a \operatorname{sen} 3\varphi$ (rosa de tres pétalos).

1471. $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$. **1472.** $\rho = a(1 + \operatorname{tg} \varphi)$.

1473. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (cardioide).

1474. $\rho = a(1 + b \cos \varphi)$ $(a > 0,\ b > 1)$.

1475. $\rho = \sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$ (lituo).

1476. $\rho = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{\varphi}{\pi}$.

1477. $\rho = \sqrt{1 - t^2}$, $\varphi = \operatorname{arcsen} t + \sqrt{1 - t^2}$.

En los ejercicios 1478—1481 analizar y construir las líneas después de haber reducido sus ecuaciones al sistema de coordenadas polares.

1478. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$. **1479.** $(x^2 + y^2)\, x = a^2y$.

1480. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

1481. $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2$.

Resolución de ecuaciones

1482. Comprobar que la ecuación $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ tiene sólo una raíz simple $x_1 = -3$ y la otra, doble $x_2 = 2$.

1483. Comprobar que la ecuación $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$ tiene dos raíces dobles $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$.

1484. Mostrar que la ecuación $x \operatorname{arcsen} x = 0$ tiene sólo una raíz real $x = 0$ siendo ésta doble.

1485. Mostrar que las raíces de la ecuación $x \operatorname{sen} x = 0$ tienen la forma $y = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, correspondiendo al valor $k = 0$ una raíz doble. ¿Cuál es la multiplicidad de las demás raíces?

1486. Mostrar que la ecuación $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ tiene sólo una raíz real simple perteneciente al intervalo $(0, 1)$. Hallar esta raíz, con exactitud hasta 0,1, aplicando el método de pruebas.

1487. Mostrar que la ecuación $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ tiene dos, y sólo dos, raíces reales simples pertenecientes a los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, respectivamente. Aplicando el método de pruebas, hallar estas raíces con exactitud hasta 0,1.

1488. Mostrar que la ecuación $f(x) = a \neq 0$, donde $f(x)$ es un polinomio de coeficientes positivos, siendo impares los exponentes de todos sus términos, tiene una, y sólo una, raíz real, que puede ser múltiple. Analizar el caso de $a = 0$. Hallar la raíz de la ecuación $x^3 + 3x - 1 = 0$, con exactitud hasta 0,01 y combinando el método de pruebas con el de cuerdas.

1489. Demostrar el siguiente teorema: para que la ecuación $x^3 + px + q = 0$ tenga tres raíces reales simples, es necesario y suficiente que los coeficientes p y q satisfagan la desigualdad $4p^3 + 27q^2 < 0$. Hallar todas las raíces de la ecuación $x^3 - 9x + 2 = 0$, con exactitud hasta 0,01 y combinando el método de pruebas con el de cuerdas.

1490. Mostrar que la ecuación $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ tiene dos, y sólo dos, raíces reales simples pertenecientes a los intervalos (0, 1) y (1, 2), respectivamente. Hallar estas raíces con exactitud hasta 0,01 combinando el método de cuerdas con el de tangentes.

1491. Mostrar que la ecuación $x^5 + 5x + 1 = 0$ tiene una raíz real simple perteneciente al intervalo $(-1, 0)$. Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,01 combinando el método de cuerdas con el de tangentes.

En los ejercicios 1492—1497 deben hallarse los valores aproximados de las raíces de las ecuaciones combinando los tres métodos: el de pruebas, el de cuerdas y el de tangentes. (En caso necesario conviene usar tablas de los valores de las funciones que figuren en las ecuaciones).

1492. Mostrar que la ecuación $xe^x = 2$ tiene solamente una raíz real perteneciente al intervalo (0, 1). Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,01.

1493. Mostrar que la ecuación $x \ln x = a$ no tiene raíces reales cuando $a < -1/e$, tiene una raíz real doble cuando $a = -1/e$, dos raíces reales simples cuando $-1/e < a < 0$ y una raíz real simple cuando $a \geqslant 0$. Hallar la raíz de la ecuación $x \ln x = 0{,}8$ con exactitud hasta 0,01.

1494. Mostrar que la llamada ecuación de Kepler $x = \varepsilon \operatorname{sen} x + a$, donde $0 < \varepsilon < 1$ tiene una raíz real simple. Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,001 para $\varepsilon = 0{,}538$ y $a = 1$.

1495. Mostrar que la ecuación $a^x = ax$ para $a > 1$ siempre tiene dos, y sólo dos, raíces reales y positivas, siendo una igual a 1 y otra, menor, mayor o igual a 1, lo cual depende de si a es mayor, menor o igual a e. Hallar la segunda raíz de esta ecuación con exactitud hasta 0,001 cuando $a = 3$.

1496. Mostrar que la ecuación $x^2 \operatorname{arctg} x = a$, donde $a \neq 0$, tiene una raíz real. Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,001 cuando $a = 1$.

1497. ¿Cuál ha de ser la base a de un sistema de logaritmos en el que existen números iguales a sus logaritmos? ¿Cuántos números de este tipo puede haber? Hallar este número (con exactitud hasta 0,01) para $a = 1/2$.

§ 5. Fórmula de Taylor y su aplicación

Fórmula de Taylor para los polinomios

1498. Desarrollar el polinomio $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ en potencias del binomio $x - 4$.

1499. Desarrollar el polinomio $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ en potencias del binomio $x + 1$.

1500. Desarrollar el polinomio $x^{10} - 3x^5 + 1$ en potencias del binomio $x - 1$.

1501. Desarrollar la función $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ en potencias de x, aplicando la fórmula de Taylor.

1502. $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado. Sabiendo que $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, $f^{IV}(2) = 24$, calcular $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

Fórmula de Taylor

1503. Escribir la fórmula de Taylor de n-ésimo orden para la función $y = \frac{1}{x}$ cuando $x_0 = -1$.

1504. Escribir la fórmula de Taylor (la de Maclaurin) de n-ésimo orden para la función $y = xe^x$ para $x_0 = 0$.

1505. Escribir la fórmula de Taylor de n-ésimo orden para la función $y = \sqrt{x}$ cuando $x_0 = 4$.

1506. Escribir la fórmula de Taylor de $2n$-ésimo orden para la función $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ cuando $x_0 = 0$.

1507. Escribir la fórmula de Taylor de n-ésimo orden para la función $y = x^3 \ln x$ cuando $x_0 = 1$.

1508. Escribir la fórmula de Taylor de $2n$-ésimo orden para la función $y = \operatorname{sen}^2 x$ cuando $x_0 = 0$.

1509. Escribir la fórmula de Taylor del 3er orden para la función $y = \frac{x}{x-1}$ cuando $x_0 = 2$ y construir las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

1510. Escribir la fórmula de Taylor de 2° orden para la función $y = \operatorname{tg} x$ cuando $x_0 = 0$ y construir la gráfica de la función dada y de su polinomio de Taylor de segundo grado.

1511. Escribir la fórmula de Taylor de 3er orden para la función $y = \operatorname{arcsen} x$ cuando $x_0 = 0$ y construir la gráfica de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

1512. Escribir la fórmula de Taylor de 3^er^ orden para la función $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ cuando $x_0 = 1$ y construir la gráfica de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

1513*. Demostrar que el número θ en el término complementario de la fórmula de Taylor de primer orden

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a+\theta h)$$

tiende a 1/3 para $h \to 0$, si $f'''(x)$ es continua para $x = a$ y $f'''(a) \neq 0$.

Algunas aplicaciones de la fórmula de Taylor

En los ejercicios 1514—1519 analizar el comportamiento de las funciones dadas en los puntos que se indican.

1514. $y = 2x^6 - x^3 + 3$ en el punto $x = 0$.

1515. $y = x^{11} + 3x^6 + 1$ en el punto $x = 0$.

1516. $y = 2\cos x + x^2$ en el punto $x = 0$.

1517. $y = 6\ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x$ en el punto $x = 1$.

1518. $y = 6 \operatorname{sen} x + x^2$ en el punto $x = 0$.

1519. $y = 24e^x - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4 - 20$ en el punto $x = 0$.

1520. $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo por la fórmula de Taylor para $x_0 = 1$. Calcular aproximadamente $f(1{,}03)$.

1521. $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo por la fórmula de Taylor para $x_0 = 2$. Calcular aproximadamente $f(2{,}02)$ y $f(1{,}97)$.

1522. $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo de $f(x)$ en potencias de $x - 1$ y calcular aproximadamente $f(1{,}005)$.

1523. $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo en potencias de $x - 2$. Calcular aproximadamente $f(2{,}1)$. Calcular $f(2{,}1)$ exactamente y hallar los errores absoluto y relativo.

1524. Comprobar que calculando los valores de la función e^x para $0 < x \leqslant 1/2$ con arreglo a la fórmula aproximada

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

se comete un error menor que 0,01. Valiéndose de ello, hallar $\sqrt{e}$ con tres cifras exactas.

1525. Valiéndose de la fórmula aproximada $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ hallar $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ y calcular el error.

1526. Comprobar que para los ángulos menores que 28° el error que resultaría de haber tomado la expresión $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ en vez de $\operatorname{sen} x$, sería menor que 0,000001. Valiéndose de ello, calcular $\operatorname{sen} 20^\circ$ con seis cifras exactas.

1527. Hallar el $\cos 10^\circ$ con exactitud hasta 0,001. Mostrar que es suficiente tomar la correspondiente fórmula de Taylor de segundo orden para alcanzar la exactitud indicada.

1528. Aplicando la fórmula aproximada

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}$$

hallar el $\ln 1{,}5$ y calcular el error.

§ 6. Curvatura

En los ejercicios 1529—1536 hallar la curvatura de las líneas que se indican.

1529. De la hipérbola $xy = 4$ en el punto $(2, 2)$.

1530. De la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ en los vértices.

1531. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ en el origen de coordenadas.

1532. $y^2 = 8x$ en el punto $(9/8, 3)$.

1533. $y = \ln x$ en el punto $(1, 0)$.

1534. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ en el origen de coordenadas.

1535. $y = \operatorname{sen} x$ en los puntos correspondientes a los extremos de la función.

1536. Del folio de Descartes $x^3 + y^3 = 3\,axy$ en el punto $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$.

En los ejercicios 1537—1542 hallar la curvatura de las líneas que se indican en un punto cualquiera (x, y).

1537. $y = x^3$. **1538.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **1539.** $y = \ln \sec x$.

1540. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **1541.** $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$. **1542.** $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

En los ejercicios 1543—1549 hallar la curvatura de las líneas que se indican.

1543. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ para $t = 1$.

1544. $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ para $t = t_1$.

1545. $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$ para $t = \frac{\pi}{2}$.

1546. $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} 2t$ en un punto cualquiera.

1547. $\rho = a^{\varphi}$ en el punto $\rho = 1$, $\varphi = 0$.

1548. $\rho = a\varphi$ en un punto cualquiera.

1549. $\rho = a\varphi^{k}$ en un punto cualquiera.

1550. Hallar el radio de curvatura de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto en que el segmento de la tangente entre los ejes de coordenadas se divide en dos partes iguales por el punto de contacto.

1551. Mostrar que el radio de curvatura de la parábola es igual al segmento doble de la normal comprendido entre los puntos de intersección de la normal con la parábola y su directriz.

1552. Mostrar que el radio de curvatura de la cicloide en cualquier punto suyo es dos veces mayor que la longitud de la normal en el mismo punto.

1553. Mostrar que el radio de curvatura de la lemniscata $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ es inversamente proporcional al radio polar correspondiente.

1554. Hallar la circunferencia de curvatura de la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

1555. Hallar la circunferencia de curvatura de la hipérbola $xy = 1$ en el punto $(1, 1)$.

1556. Hallar la circunferencia de curvatura de la línea $y = e^x$ en el punto $(0, 1)$.

1557. Hallar la circunferencia de curvatura de la línea $y = \operatorname{tg} x$ en el punto $(\pi/4, 1)$.

1558. Hallar la circunferencia de curvatura de la cisoide $(x^2 + y^2)\,x - 2ay^2 = 0$ en el punto (a, a).

En los ejercicios 1559—1562 hallar los vértices (es decir, los puntos en los cuales la curvatura toma su valor extremo) de las líneas que se indican.

1559. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. **1560.** $y = \ln x$.

1561. $y = e^x$.

1562. $x = a(3\cos t + \cos 3t)$, $y = a(3\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 3t)$.

1563. Hallar el mayor valor del radio de curvatura de la línea $\rho = a\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3}$.

1564. Mostrar que la curvatura en un punto P de la línea $y = f(x)$ es igual a $|y''\cos^3\alpha|$, donde α es el ángulo formado por la tangente a la línea en el punto P con el eje positivo de las abscisas.

1565. Mostrar que la curvatura de una línea en un punto cualquiera puede ser expresada por la relación $k = \left|\frac{d\operatorname{sen}\alpha}{dx}\right|$ donde α tiene el mismo significado que en el ejercicio anterior.

1566. La función $f(x)$ está definida del modo siguiente: $f(x) = x^3$ en el intervalo $-\infty < x \leqslant 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ en el intervalo $1 < x < \infty$. ¿Cuáles deben ser los valores de a, b, c para que la línea $y = f(x)$ tenga una curvatura continua por todas partes?

1567. Son dados el arco AM de la circunferencia de radio igual a 5 cuyo centro es el punto $(0, 5)$, y el segmento BC de la recta que une los puntos $B(1, 3)$ y $C(11, 66)$ (véase la fig. 35). Es necesario unir el punto M con el punto B por un arco parabólico de modo que la línea $AMBC$ tenga la curvatura continua por todas partes. Hallar la ecuación de la parábola buscada (tomar la parábola de quinto orden).

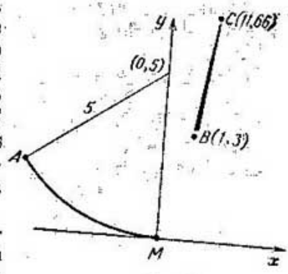

Fig. 35

En los ejercicios 1568—1574 hallar las coordenadas del centro de la curvatura y la ecuación de la evoluta para las líneas que se indican.

1568. Parábola de n-ésimo orden $y = x^n$.

1569. Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **1570.** Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1571. Parábola semicúbica $y^3 = ax^2$.

1572. Parábola $x = 3t$, $y = t^2 - 6$.

1573. Cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

1574. Línea $\begin{cases} x = a(1 + \cos^2 t)\operatorname{sen} t, \\ y = a \operatorname{sen}^2 t \cos t. \end{cases}$

1575. Mostrar que la evoluta de la tractriz

$$x = -a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = a \operatorname{sen} t$$

es una catenaria.

1576. Mostrar que la evoluta de la espiral logarítmica $\rho = a^{\varphi}$ es exactamente la misma espiral, pero desplazada un poco con cierto ángulo. ¿Sería posible elegir un valor de modo que la evoluta coincida con la espiral?

1577. Mostrar que cualquier envolvente de una circunferencia puede ser engendrada desplazando una de ellas con un ángulo correspondiente.

1578. Mostrar que la distancia entre un punto de la cicloide y el centro de la curvatura del punto correspondiente de la evoluta es igual al diámetro doble del círculo generador.

1579. La parábola semicúbica $py^2 = \frac{4}{27}(x - 2p)^3$ sirve de evoluta de la parábola $y^2 = 4px$. Hallar la longitud del arco de la parábola semicúbica desde el «pico» hasta el punto (x, y).

1580. Hallar la longitud de la misma evoluta de la elipse cuyos semiejes son iguales a a y b.

1581. Mostrar que la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ tiene por evoluta una astroide de dimensiones lineales dobles y girada 45°. Valiéndose de ello calcular la longitud del arco de la astroide citada.

1582*. Mostrar que la evoluta de la cardioide $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$ es también una cardioide semejante a la dada. Valiéndose de ello hallar la longitud del arco de toda la cardioide.

1583*. Demostrar el siguiente teorema: si la curvatura del arco de cierta línea sólo crece, o bien solamente decrece, las circunferencias de la curvatura correspondientes a distintos puntos de dicho arco no se cortan y se hallan situadas una dentro de la otra.

§ 7. Problemas de cálculo

1584. Hallar el mínimo de la función $y = x^4 + x^2 + x + 1$ con exactitud hasta 0,001.

1585. Hallar el máximo de la función $y = x + \ln x - x^3$ con exactitud hasta 0,001.

1586. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $y = x^3 + 3\cos x$ en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ con exactitud hasta 0,01.

1587. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $y = x - e^{x^2}$ en el intervalo (0,2; 0,5) con exactitud hasta 0,001.

1588. Hallar las coordenadas del punto de inflexión de la línea

$$y = \frac{e^x}{10}(x^3 - 6x^2 + 19x - 30)$$

con exactitud hasta 0,01.

1589. Hallar las coordenadas del punto de inflexión de la línea

$$y = 6x^3 \ln x + 2x^3 - 9x^2$$

con exactitud hasta 0,01.

1590. Hallar la curvatura de la línea $y = \frac{1}{x^2}$ en el punto de su intersección con la recta $y = x - 1$, con exactitud hasta 0,01.

1591. En la línea $y = \ln x$ hallar, con exactitud hasta 0,001, las coordenadas del punto en que el radio de curvatura de la línea dada es tres veces mayor que la abscisa de este punto.

Capítulo V

Integral definida

§ 1. Integral definida y sus propiedades más elementales

1592. Expresar por medio de una integral el área de la figura limitada por las siguientes líneas:

1) los ejes de coordenadas, la recta $x = 3$ y la parábola $y = x^2 + 1$;

2) el eje de abscisas, las rectas $x = a$, $x = b$ y la línea $y = e^x + 2$ $(b > a)$;

3) el eje de abscisas y el arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ correspondiente al primer semiperíodo;

4) las parábolas $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$;

5) las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$;

6) las líneas $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$.

1593. La figura está limitada por el eje de abscisas y las rectas $y = 2x$, $x = 4$, $x = 6$. Hallar las áreas de las figuras de n «escalones» entrantes y salientes, dividiendo el intervalo $[4, 6]$ en partes iguales. Mostrar que si n crece infinitamente, las dos expresiones obtenidas tienden a un mismo límite S, área de la figura. Hallar los errores absoluto y relativo al sustituir el área de la figura dada por las de las figuras de n «escalones» entrantes y salientes.

1594. Un trapecio mixtilíneo de base $[2, 3]$ está limitado por la parábola $y = x^2$. Hallar los errores absoluto y relativo al sustituir el área dada por la de la figura entrante de 10 «escalones».

1595. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = x^2/2$, las rectas $x = 3$, $x = 6$ y el eje de abscisas.

1596. Calcular el área del segmento de la parábola $y = x^2$ cortado por la recta $y = 2x + 3$.

1597. Calcular el área del segmento parabólico de base $a = 10$ cm y la altura $h = 6$ cm. (La base es una cuerda perpendicular al eje de la parábola, véase la fig. 36.)

1598. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = x^2 - 4x + 5$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$, $x = 5$.

1599. Calcular el área de la figura limitada por los arcos de las parábolas $y = \frac{1}{4}x^2$ e $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2 - 6x + 10$ e $y = 6x - x^2$.

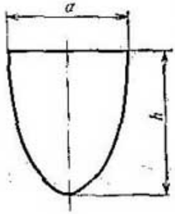

Fig. 36

1601. Calcular el área comprendida entre la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, la tangente a ésta en el punto (3, 5), el eje de ordenadas y el de abscisas.

1602. Un punto material efectúa el movimiento a una velocidad $v = 2t + 4$ cm/s. Hallar la distancia recorrida por el punto en los primeros 10 s.

1603. En la caída libre la velocidad v es igual a gt. Hallar la distancia recorrida en los primeros 5 s de caída.

1604. La velocidad del movimiento, que es proporcional al cuadrado del tiempo, era igual a 1 cm/s al finalizar el cuarto segundo. ¿Cuál es la distancia recorrida en los primeros 10 s?

1605. Se sabe que la fuerza que ejerce la reacción a la extensión del muelle, es proporcional al alargamiento del mismo (ley de Hooke). Al extender un muelle, lo hicieron 4 cm más largo, efectuando con ello un trabajo igual a 100 julios. ¿Qué trabajo se produciría al hacer el muelle 10 cm más largo?

1606. Para que un muelle se haga 2 cm más largo, es necesario efectuar un trabajo igual a 20 julios. ¿Cuánto más largo se hará el muelle si se aplica un trabajo igual a 80 julios?

1607. La velocidad v de la desintegración radiactiva es una función dada del tiempo: $v = v(t)$. Expresar la cantidad m de la sustancia radiactiva desintegrada en el espacio de tiempo desde el momento T_0 hasta el momento T_1: a) aproximadamente, mediante una suma, b) exactamente, mediante una integral.

1608. La velocidad a que se calienta el cuerpo es una función dada del tiempo $\psi(t)$. ¿Cuántos grados aumenta la temperatura θ del cuerpo en el espacio del tiempo comprendido entre el momento T_0 y el momento T_1? Expresar el resultado: a) aproximadamente, mediante una suma, b) exactamente, mediante una integral.

1609. La corriente alterna I es una función dada del tiempo $I = I(t)$. Expresar (aproximadamente, mediante una suma, y exactamente, mediante una integral) la cantidad Q de electricidad que pasa a través de la sección transversal del conductor en el tiempo T desde que comienza el experimento.

1610. La tensión E de la corriente alterna es una función dada del tiempo $E = \varphi(t)$. La corriente I es también una función dada del tiempo $I = \psi(t)$. Expresar el trabajo A de la corriente en el espacio de tiempo comprendido entre el momento T_0 y el momento T_1: a) aproximadamente, mediante una suma, b) exactamente, mediante una integral.

1611. Un circuito eléctrico es alimentado por una batería de acumuladores. Por espacio de 10 min la tensión en los bornes decrece uniformemente desde $E_0 = 60$ V hasta $E = 40$ V. La resistencia del circuito $R = 20$ ohm. Hallar la cantidad de electricidad que pasa por el circuito en 10 min.

1612. La tensión de un circuito eléctrico decrece uniformemente, disminuyendo $a = 1{,}5$ V por un minuto. La tensión inicial del circuito $E_0 = 120$ V, la resistencia del mismo $R = 60$ ohm. Hallar el trabajo del circuito efectuado en 5 min. Se prescinde de la inductancia y de la capacidad.

1613. En un circuito se introduce uniformemente la tensión. Al comenzar el experimento la tensión era igual a cero. Al cabo de un minuto la tensión alcanza 120 V. La resistencia del circuito es igual a 100 ohm. Se prescinde de la inductancia y de la capacidad. Hallar el trabajo del circuito durante 1 min.

1614. La pared rectangular de un acuario lleno de agua tiene base a y altura b. Expresar la fuerza P de la presión del agua contra la pared: a) aproximadamente, mediante una suma, b) exactamente, mediante una integral.

1615. a) Calcular la fuerza P con la que el agua, que llena el acuario, hace presión sobre una de sus paredes. Esta tiene forma rectangular, longitud $a = 60$ cm, y altura, $b = 25$ cm. b) Dividir la pared del acuario con una recta horizontal de modo que las fuerzas de presión sobre las dos partes de la pared sean iguales.

Cálculo de integrales mediante la suma

1616. Calcular la integral $\int_0^1 e^x\,dx$ sumando directamente y pasando después al límite. (Conviene dividir el intervalo de integración en n partes iguales.)

1617. Sumando directamente y pasando luego al límite, calcular la integral $\int_a^b x^k\,dx$, donde k es un número entero positivo (dividir el intervalo de integración en partes tales que las abscisas de los puntos de división formen una progresión geométrica).

1618. Valiéndose de la fórmula obtenida en el ejercicio anterior, calcular las integrales:

1) $\int\limits_0^{10} x\,dx$; 2) $\int\limits_{a-2}^{a+2} x\,dx$; 3) $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} x^2\,dx$; 4) $\int\limits_a^{2a} \frac{b^2x^2}{a^2}\,dx$;

5) $\int\limits_0^a (3x^2-x+1)\,dx$; 6) $\int\limits_0^m \frac{x^2+m^2}{m^2}\,dx$; 7) $\int\limits_1^{2,5} (2x+1)^2\,dx$;

8) $\int\limits_a^b (x-a)(x-b)\,dx$; 9) $\int\limits_{-a}^0 \frac{(a+x)^2}{a}\,dx$; 10) $\int\limits_0^1 \left(\frac{ax-b}{a-b}\right)^2 dx$;

11) $\int\limits_0^2 x^3\,dx$; 12) $\int\limits_1^3 \frac{x^4}{3}\,dx$; 13) $\int\limits_0^1 \left(\frac{x^5}{7}-\frac{x^6}{6}\right) dx$.

1619.* Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$ para $k>0$. Calcular aproximadamente $1^5+2^5+\ldots+100^5$.

1620. Calcular la integral $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$, sumando directamente y pasando luego al límite. (Dividir el intervalo de integración de modo que las abscisas de los puntos de división una progresión geométrica.)

1621. Formar la suma integral para la integral $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ dividiendo el intervalo de integración en n partes iguales. Efectuando la comparación con los resultados del ejercicio anterior, calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

1622*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{an}\right)$ (a es un número entero). Calcular aproximadamente $\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{300}\right)$.

1623*. Calcular las integrales, sumando directamente y pasando luego al límite:

1) $\int\limits_0^a xe^x\,dx$; 2) $\int\limits_1^a \ln x\,dx$; 3) $\int\limits_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx$.

[En el 1) dividir el intervalo de integración en partes iguales, en los 2) y 3) proceder igual que en el ejercicio 1620.]

§ 2. Propiedades fundamentales de la integral definida

Interpretación geométrica de la integral definida

1624. Expresar mediante una integral el área de la figura limitada por el arco de la sinusoide correspondiente al intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ y por el eje de abscisas.

1625. Calcular el área de la figura limitada por la parábola cúbica $y = x^3$ y la recta $y = x$.

1626. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x - 3$ e $y = -x^2 + 6x - 3$.

1627. Calcular el área de la figura limitada por las líneas $y = x^3 - x$ e $y = x^4 - 1$.

Evaluación de la integral

1628. Demostrar que la integral $\int\limits_0^{10} \frac{x\,dx}{x^3+16}$ es menor que $\frac{5}{6}$.

1629. Demostrar que la integral $\int\limits_0^{2} e^{x^2-x}\,dx$ está comprendida entre $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$ y $2e^2$.

En los ejercicios 1630—1635 evaluar las integrales.

1630. $\int\limits_{1,5}^{3,5} \frac{x^2\,dx}{x-1}$.

1631. $\int\limits_0^{2} \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx$.

1632. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\operatorname{sen}^2 x)\,dx$

1633. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

1634. $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$.

1635. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} x^2 e^{-x^2}\,dx$.

1636. Sin hacer ningún cálculo, averiguar cuál de las integrales es mayor:

1) $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ ó $\int\limits_0^1 x^3\,dx$; 2) $\int\limits_1^2 x^2\,dx$ ó $\int\limits_1^2 x^3\,dx$.

1637. Esclarecer cuál de las integrales es mayor:

1) $\int\limits_0^1 2^{x^2}\,dx$ ó $\int\limits_0^1 2^{x^3}\,dx$, 2) $\int\limits_1^2 2^{x^2}\,dx$ ó $\int\limits_1^2 2^{x^3}\,dx$,

3) $\int\limits_1^2 \ln x\,dx$ ó $\int\limits_1^2 (\ln x)^2\,dx$, 4) $\int\limits_3^4 \ln x\,dx$ ó $\int\limits_3^4 (\ln x)^2\,dx$.

1638. Aplicando la desigualdad de Cauchy — Buniakovsky

$$\left|\int\limits_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b [f_1(x)]^2\,dx}\,\sqrt{\int\limits_a^b [f_2(x)]^2\,dx}$$

demostrar que $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Mostrar que la aplicación de la regla general produce la evaluación menos exacta.

1639. Partiendo de consideraciones geométricas demostrar las siguientes proposiciones:

a) si en el intervalo $[a, b]$ la función $f(x)$ crece y tiene su gráfica cóncava, se tiene

$$(b-a)\,f(a) < \int\limits_a^b f(x)\,dx < (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2};$$

b) si en el intervalo $[a, b]$ la función $f(x)$ crece y tiene su gráfica convexa, se tiene

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} < \int\limits_a^b f(x)\,dx < (b-a)\,f(b).$$

1640. Evaluar la integral $\int\limits_2^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$ aplicando el resultado obtenido en el ejercicio 1639.

1641. Evaluar la integral $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ aplicando:

1) el teorema fundamental sobre la evaluación de la integral,
2) el resultado obtenido en el ejercicio 1639,
3) la desigualdad de Cauchy — Buniakovsky (véase el ejercicio 1638).

Valor medio de la función

1642. Calcular el valor medio de la función lineal $y = kx + b$ en el intervalo $[x_1, x_2]$. Hallar el punto en que la función toma este valor.

1643. Calcular el valor medio de la función cuadrática $y = ax^2$ en el intervalo $[x_1, x_2]$. ¿En cuántos puntos del intervalo la función toma este valor?

1644. Calcular el valor medio de la función $y = 2x^2 + 3x + 3$ en el intervalo $[1, 4]$.

1645. Partiendo de consideraciones geométricas, calcular el valor medio de la función $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ en el intervalo $[-a, a]$.

1646. Partiendo de consideraciones geométricas, indicar el valor medio de la función continua impar en el intervalo simétrico respecto al origen de coordenadas.

1647. La sección de un canalón tiene la forma del segmento parabólico. Su base es igual a $a = 1$ m, la profundidad $h = 1{,}5$ m (véase la fig. 36 en la pág. 120). Hallar la profundidad media del canalón.

1648. La tensión del circuito eléctrico crece uniformemente por espacio de un minuto, desde $E_0 = 100$ V hasta $E_1 = 120$ V. Hallar la intensidad media de la corriente correspondiente a este mismo espacio de tiempo. La resistencia del circuito es igual a 10 ohm.

1649. La tensión del circuito eléctrico va decreciendo uniformemente, disminuyendo 0,4 V por minuto. La tensión inicial en el circuito es igual a 100 V. La resistencia es igual a 5 ohm. Hallar la potencia media de la corriente durante la primera hora del funcionamiento.

Integral de límite variable

1650. Calcular las integrales de límites superiores variables:

$$1)\ \int_0^x x^2\,dx; \quad 2)\ \int_a^x x^5\,dx; \quad 3)\ \int_1^x \left(\frac{x^3}{5} - \frac{x^4}{4}\right)dx.$$

1651. La velocidad del movimiento de un cuerpo es proporcional al cuadrado del tiempo. Hallar la dependencia entre la distancia recorrida s y el tiempo t, si es sabido que en los primeros 3 s el cuerpo recorrió 18 cm y que el movimiento comenzó en el momento $t = 0$.

1652. La fuerza que obra sobre un punto material cambia uniformemente respecto a la distancia recorrida. Al principio del trayecto era igual a 10 N y al desplazarse el punto 10 metros, la fuerza aumentó hasta 600 N. Hallar la función que expresa la relación entre el trabajo y la distancia recorrida.

1653. La tensión de un circuito eléctrico varía uniformemente, siendo igual a E_1 para $t = t_1$, y E_2 para $t = t_2$. La resistencia R es constante, se prescinde de la capacidad y de la autoinducción. Expresar el funcionamiento de la corriente como función del tiempo t transcurrido desde que comenzó el experimento.

1654. La capacidad calorífica de un cuerpo depende de la temperatura del modo siguiente: $c = c_0 + \alpha t + \beta t^2$. Hallar la función que determine la dependencia existente entre la cantidad de calor recibida por el cuerpo al ser calentado desde cero hasta t, y la temperatura t.

1655. Un trapecio mixtilíneo está limitado por la parábola $y = x^2$, el eje de abscisas y una ordenada móvil. Hallar el valor del incremento ΔS y de la diferencial dS del área del trapecio cuando $x = 10$, y $\Delta x = 0{,}1$.

1656. Un trapecio mixtilíneo está limitado por la línea $y = \sqrt{x^2 + 16}$, los ejes de coordenadas y una ordenada móvil. Hallar el valor de la diferencial dS del área del trapecio cuando $x = 3$ y $\Delta x = 0{,}2$.

1657. Un trapecio mixtilíneo está limitado por la línea $y = x^3$, el eje de abscisas y una ordenada móvil. Hallar los valores del incremento ΔS del área, de su diferencial dS, los errores absoluto (α) y relativo $\left(\delta = \frac{\alpha}{\Delta S}\right)$ que se cometen al sustituir el incremento por la diferencial, si $x = 4$ y Δx toma los valores **1**; 0,1 y 0,01.

1658. Hallar la derivada de la función

$$y = \int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}\,dt \text{ para } x = 1.$$

1659. Hallar la derivada de la función

$$y = \int_0^x \operatorname{sen} x\,dx \text{ para } x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

1660. ¿A qué es igual la derivada de la integral cuyo límite inferior es móvil y el superior es constante, respecto al límite inferior?

1661. Hallar la derivada de la función $y = \int_x^5 \sqrt{1+x^2}\,dx$ para $x = 0$ y $x = 3/4$.

1662. Hallar la derivada respecto a x de la función $y = \int_0^{2x} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

1663. Hallar la derivada respecto a x de la función

1) $\int\limits_{2}^{e^x} \frac{\ln z}{z}\,dz$; 2) $\int\limits_{x^2}^{1} \ln x\,dx$.

1664*. Hallar la derivada respecto a x de la función $\int\limits_{x}^{2x} \ln^2 x\,dx$.

1665. Hallar la derivada respecto a x de la función y dada en forma implícita:

$$\int\limits_0^y e^t\,dt + \int\limits_0^x \cos t\,dt = 0.$$

1666. Hallar la derivada respecto a x de la función y dada en forma paramétrica:

1) $x = \int\limits_0^t \operatorname{sen} t\,dt$, $y = \int\limits_0^t \cos t\,dt$; 2) $x = \int\limits_1^{t^2} t \ln t\,dt$, $y = \int\limits_{t^3}^{1} t^2 \ln dt$.

1667. Hallar el valor de la segunda derivada respecto a z de la función

$$y = \int\limits_0^{z^2} \frac{dx}{1+x^3} \quad \text{para } z = 1.$$

1668. ¿Para qué valor de x la función

$I(x) = \int\limits_0^x xe^{-x^2}\,dx$ tiene extremo? ¿A qué es igual?

1669. Hallar la curvatura en el punto (0, 0) de la línea dada por la ecuación

$$y = \int\limits_0^x (1+t)\ln(1+t)\,dt.$$

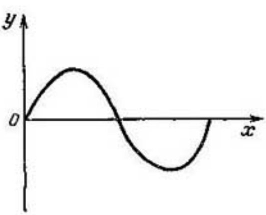

Fig. 37

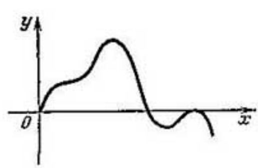

Fig. 38

1670. Hallar los puntos del extremo y los de inflexión de la gráfica de la función

$$y=\int_0^x (x^2-3x+2)\,dx.$$ Construir la gráfica de esta función.

1671. Siguiendo las gráficas de las funciones presentadas en las fig. 37 y 38, averiguar la forma de las gráficas de sus funciones primitivas.

Fórmula de Newton — Leibniz

1672. Calcular las integrales:

1) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_4^1 \frac{dx}{x^3}$; 3) $\int_1^9 3\sqrt{x}\,dx$; 4) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$;

5) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,dx$; 6) $\int_1^2 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\,dx$; 7) $\int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax}}$;

8) $\int_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt$; 9) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$ $(a>0,\ b>0)$; 10) $\int_{z_0}^{z_1} (\sqrt{z}-1)^2\,dz$.

1673. Calcular las integrales:

1) $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$; 2) $\int_0^\pi \cos x\,dx$

(interpretar geométricamente el resultado obtenido),

3) $\int_0^3 e^x\,dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$; 5) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; 6) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1674. La función $f(x)$ tiene valores iguales en los puntos $x=a$ y $x=b$, y una derivada continua. ¿A qué es igual la integral $\int_a^b f'(x)\,dx$?

1675. La tangente a la gráfica de la función $y=f(x)$ en el punto cuya abscisa es $x=a$, forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje de abscisas, mientras que en el punto cuya abscisa es $x=b$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$. Calcular $\int_a^b f''(x)\,dx$ y $\int_a^b f'(x)\,f''(x)\,dx$; $f''(x)$ se supone continua.

Capítulo VI

Integral indefinida. Cálculo integral

§ 1. Métodos más simples de integración

En los ejercicios 1676—1702 hallar las integrales, usando la tabla de integrales y aplicando las reglas elementales para la integración.

1676. $\int \sqrt{x}\, dx$. 1677. $\int \sqrt[m]{x^n}\, dx$. 1678. $\int \frac{dx}{x^2}$.

1679. $\int 10^x\, dx$. 1680. $\int a^x e^x\, dx$. 1681. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

1682. $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$. 1683. $\int 3{,}4x^{-0{,}17}\, dx$. 1684. $\int (1-2u)\, du$.

1685. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\, dx$. 1686. $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\, dx$.

1687. $\int (2x^{-1{,}2}+3x^{-0{,}8}-5^{0{,}38})\, dx$.

1688. $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz$. 1689. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\, dx$.

1690. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\, dx$. 1691. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$.

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$. 1693. $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}\, dx$.

1694. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\, dx$. 1695. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot \operatorname{sen}^2 x}\, dx$.

1696. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$. 1697. $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$.

1698. $\int 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\, dx$. 1699. $\int \frac{(1+2x^2)\, dx}{x^2(1+x^2)}$.

1700. $\int \frac{(1+x)^2\,dx}{x(1+x^2)}$. **1701.** $\int \frac{dx}{\cos 2x+\operatorname{sen}^2 x}$.

1702. $\int (\operatorname{arcsen} x+\arccos x)\,dx$.

En los ejercicios 1703—1780 hallar las integrales, aplicando el teorema sobre la invariancia de las fórmulas de integración.

1703. $\int \operatorname{sen} x\, d(\operatorname{sen} x)$. **1704.** $\int \operatorname{tg}^3 x\, d(\operatorname{tg} x)$.

1705. $\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$. **1706.** $\int (x+1)^{15}\,dx$.

1707. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$. **1708.** $\int \frac{dx}{(a+bx)^c}$ $(c\neq 1)$.

1709. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$. **1710.** $\int \sqrt{8-2x}\,dx$.

1711. $\int \frac{m}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}\,dx$. **1712.** $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

1713. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$. **1714.** $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx$.

1715. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$. **1716.** $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{4+x^5}}$.

1717. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$. **1718.** $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$.

1719. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$. **1720.** $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x}$.

1721. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}$. **1722.** $\int \cos^3 x\operatorname{sen} 2x\,dx$.

1723. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$. **1724.** $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{1+x^2}$.

1725. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arcsen} x)^3\sqrt{1-x^2}}$. **1726.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$.

1727. $\int \cos 3x\, d(3x)$. **1728.** $\int \frac{d(1+\ln x)}{\cos^2(1+\ln x)}$.

1729. $\int \cos 3x\,dx$. **1730.** $\int (\cos\alpha-\cos 2x)\,dx$.

1731. $\int \operatorname{sen}(2x-3)\,dx$. **1732.** $\int \cos(1-2x)\,dx$.

1733. $\int \left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-2}dx$. **1734.** $\int e^x(\operatorname{sen} e^x)\,dx$.

1735. $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$. **1736.** $\int \frac{d(\operatorname{arcsen} x)}{\operatorname{arcsen} x}$. **1737.** $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-3x+8}$.

1738. $\int \frac{dx}{2x-1}$. 1739. $\int \frac{dx}{cx+m}$. 1740. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

1741. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$. 1742. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$. 1743. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+a^2}$.

1744. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. 1745. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$. 1746. $\int \operatorname{tg} 3x\,dx$.

1747. $\int \operatorname{ctg}(2x+1)dx$. 1748. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$. 1749. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

1750. $\int \frac{(\ln x)^m}{x}\,dx$. 1751. $\int e^{\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{sen} x)$.

1752. $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$. 1753. $\int a^{3x}\,dx$. 1754. $\int a^{-x}\,dx$.

1755. $\int e^{-3x+1}\,dx$. 1756. $\int e^{x^2}x\,dx$. 1757. $\int e^{-x^3}x^2\,dx$.

1758. $\int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$. 1759. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$.

1760. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$. 1761. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 1762. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$.

1763. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$. 1764. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$. 1765. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^4}}$.

1766. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+4}$. 1767. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$. 1768. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4}$.

1769. $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$. 1770. $\int \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{a^2+\operatorname{sen}^2\alpha}$.

1771. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$. 1772. $\int (e^x+1)^3\,dx$.

1773. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 1774. $\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx$.

1775. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$. 1776. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx$.

1777. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$. 1778. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$.

1779. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 1780. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$.

En los ejercicios 1781—1790 hallar las integrales, despejando la parte entera de la fracción bajo el signo de integral.

1781. $\int \frac{x}{x+4}\,dx.$ **1782.** $\int \frac{x}{2x+1}\,dx.$ **1783.** $\int \frac{Ax}{a+bx}\,dx.$

1784. $\int \frac{3+x}{3-x}\,dx.$ **1785.** $\int \frac{(2x-1)\,dx}{x-2}.$ **1786.** $\int \frac{x+2}{2x-1}\,dx.$

1787. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}\,dx.$ **1788.** $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx.$ **1789.** $\int \frac{x^4}{1-x}\,dx.$

1790. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}.$

En los ejercicios 1791—1807 hallar las integrales aplicando el método de descomposición de la expresión integrando y el método para despejar el cuadrado perfecto.

1791. $\int \frac{dx}{x(x-1)}.$ **1792.** $\int \frac{dx}{x(x+1)}.$ **1793.** $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}.$

1794. $\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}.$ **1795.** $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx.$ **1796.** $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}.$

1797. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}.$ **1798.** $\int \frac{dx}{4x^2-9}.$ **1799.** $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$

1800. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}.$ **1801.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$ **1802.** $\int \frac{dx}{x-x^2-2,5}.$

1803. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$ **1804.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}.$

1805. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$ **1806.** $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}.$

1807. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$

En los ejercicios 1808—1831 hallar las integrales aplicando fórmulas trigonométricas para transformar la expresión integrando.

1808. $\int \cos^2 x\,dx.$ **1809.** $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$ **1810.** $\int \frac{dx}{1-\cos x}.$

1811. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}.$ **1812.** $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx.$ **1813.** $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx.$

1814. $\int (\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)\,dx.$ **1815.** $\frac{\cos 2x\,dx}{1+\operatorname{sen} x\cos x}.$

1816. $\int \cos x \operatorname{sen} 3x\,dx.$ **1817.** $\int \cos 2x \cos 3x\,dx.$

1818. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 5x\,dx.$ **1819.** $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx.$

1820. $\int \frac{dx}{\cos x}.$ **1821.** $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx.$ **1822.** $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx.$

1823. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x}$. **1824.** $\int \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}}\,d\alpha$. **1825.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1826. $\int \cos^3 x\,dx$. **1827.** $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. **1828.** $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

1829. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$. **1830.** $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$. **1831.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^6 x}$.

§ 2. Métodos principales de integración

Integración por partes

En los ejercicios 1832—1868 hallar las integrales.

1832. $\int x \operatorname{sen} 2x\,dx$. **1833.** $\int x \cos x\,dx$. **1834.** $\int x e^{-x}\,dx$.

1835. $\int x 3^x\,dx$. **1836.** $\int x^n \ln x\,dx$. $(n \neq -1)$.

1837. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$. **1838.** $\int \arccos x\,dx$. **1839.** $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,dx$.

1840. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{x+1}}\,dx$. **1841.** $\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx$. **1842.** $\int x \cos^2 x\,dx$.

1843. $\int \frac{\lg x}{x^3}\,dx$. **1844.** $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. **1845.** $\int \frac{\operatorname{arcsen} \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

1846. $\int \ln(x^2+1)\,dx$. **1847.** $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$.

1848. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **1849.** $\int x^2 \ln(1+x)\,dx$.

1850. $\int x^2 e^{-x}\,dx$. **1851.** $\int x^3 e^x\,dx$. **1852.** $\int x^2 a^x\,dx$.

1853. $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$. **1854.** $\int x^2 \cos^2 x\,dx$. **1855.** $\int \ln^2 x\,dx$.

1856. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$. **1857.** $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx$. **1858.** $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$.

1859. $\int (\operatorname{arctg} x)^2 x\,dx$. **1860.** $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

1861. $\int e^{3x}(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)\,dx$. **1862.** $\int e^{ax} \cos nx\,dx$.

1863. $\int \operatorname{sen} \ln x \, dx$. **1864.** $\int \cos \ln x \, dx$. **1865*.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1866*. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$. **1867.** $\int \frac{x^2 e^x\,dx}{(x+2)^2}$. **1868.** $\int x^2 e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

Cambio de variable

En los ejercicios 1869—1904 hallar las integrales.

1869. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (sustituyendo $x+1=z^2$).

1870. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$. **1871.** $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx$. **1872.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

1873. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$. **1874.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. **1875.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$.

1876. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$. **1877.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. **1878.** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$.

1879. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (sustituyendo $x=z^6$).

1880. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x}-1)}$. **1881.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$. **1882.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,dx$.

1883. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (sustituyendo $e^x+1=z^4$).

1884. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. **1885.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$.

1886. $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot\operatorname{sen} 2x\cdot\cos 2x\,dx$.

1887. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}\,dx$. **1888.** $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$. **1889.** $\int \frac{x^5\,dx}{(x^2-4)^2}$.

1890. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$

$\left(\text{sustituyendo } x=\frac{1}{z}, \text{ o } x=a\operatorname{tg} z, \text{ o } x=a\operatorname{sh} z\right)$.

1891. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (sustituyendo $x=a\operatorname{sen} z$).

1892. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

$\left(\text{sustituyendo } x=\frac{1}{z}, \text{ o } x=\frac{a}{\cos z}, \text{ o } x=a\operatorname{ch} z\right)$.

1893. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx.$ **1894.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

1895. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}.$ **1896.** $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx.$

1897. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$ **1898.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

1899. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}.$ **1900.** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

1901. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}.$ **1902*.** $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}.$

1903*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$ **1904*.** $\int \frac{(x+1)\,dx}{x(1+xe^x)}.$

En los ejercicios 1905—1909 hallar las integrales efectuando primero el cambio de variable y luego integrando por partes.

1905. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$ **1906.** $\int \operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\,dx.$

1907. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$ **1908.** $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

1909. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)}\,dx.$

Diversos problemas

En los ejercicios 1910—2011 hallar las integrales.

1910. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx.$ **1911.** $\int (1+e^{3x})^2 e^{3x}\,dx.$

1912. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ **1913.** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{e^{\cos x}}\,dx.$

1914. $\int \sqrt{1-e^x}\,e^x\,dx.$ **1915.** $\int x\cos x^2\,dx.$

1916. $\int (2-3x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{5}}\,x^{\frac{1}{3}}\,dx.$ **1917.** $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\,dx.$

1918. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^{\frac{3}{2}}}.$ **1919.** $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}.$

1920. $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}.$ **1921.** $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

1922. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx.$ **1923.** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

1924. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$. 1925. $\int \frac{\ln x\,dx}{x(1-\ln^2 x)}$.

1926. $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx$. 1927. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^n}{1+x^2}\,dx$.

1928. $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi}$. 1929. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$.

1930. $\int \frac{\operatorname{sen}^4 x\,dx}{\cos^6 x}$. 1931. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}\sec^4 x\,dx$.

1932. $\int (1-\operatorname{tg} 3x)^2\,dx$. 1933. $\int \frac{x^3\,dx}{x+1}$.

1934. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3}$. 1935. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$.

1936. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}}$. 1937. $\int x\sqrt{a+x}\,dx$.

1938. $\int (\sqrt{\operatorname{sen} x}+\cos x)^2\,dx$. 1939. $\int a^{mx}b^{nx}\,dx$.

1940. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$. 1941. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

1942. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$. 1943. $\int \frac{(8x-11)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

1944. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$. 1945. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

1946. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+17}$. 1947. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1948. $\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-7x+12}$. 1949. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx$.

1950. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}\,dx$. 1951. $\int \frac{(4-3x)\,dx}{5x^2+6x+18}$.

1952. $\int \frac{(2-5x)\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$. 1953. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$.

1954. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{2x+3}}$. 1955. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx$.

1956. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$. 1957. $\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx$.

1958. $\int x^2\cos\omega x\,dx$. 1959. $\int e^{2x}x^3\,dx$.

1960. $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$.
1961. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \operatorname{sen} x} dx$.

1962. $\int \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^2}$.
1963. $\int \frac{\cos^2 3x}{\operatorname{sen} 3x} dx$.

1964. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} 3x}$.
1965. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{4-\cos^2 2x}$.

1966. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.
1967. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$.

1968. $\int e^{e^x+x} dx$.
1969. $\int e^{2x^2+\ln x} dx$.

1970. $\int \frac{3+x^3}{\sqrt{2+2x^2}} dx$.
1971. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

1972. $\int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^3 x} dx$.
1973. $\int e^x \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

1974. $\int \frac{(1+\operatorname{tg} x)\, dx}{\operatorname{sen} 2x}$.
1975. $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} dx$.

1976. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{3} \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi}$.
1977. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1+\operatorname{sen} x}$.

1978. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{(1+\operatorname{sen}^2 x)} dx$.
1979. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen} x} dx$.

1980. $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx$.
1981. $\int x^3 e^{x^2} dx$.

1982. $\int e^{-x^2} x^5\, dx$.
1983. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x^2}}$.

1984. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.
1985. $\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{x} dx$.

1986. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2+4}}$.
1987. $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4} dx$.

1988. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6} dx$.
1989. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-3}}$.

1990. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.
1991. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$.

1992. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$.
1993. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

1994. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx$.
1995*. $\int \frac{x^7 dx}{(1-x^2)^5}$.

1996. $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}}$.
1997. $\int \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}} dx$.

1998. $\int \frac{x\,dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}$.

1999. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$.

2000. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x-1)}$.

2001. $\int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

2002. $\int \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)^3}$.

2003. $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\operatorname{arctg} x\,dx$.

2004. $\int \frac{e^x(1+e^x)\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

2005. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$.

2006*. $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\,dx$.

2007. $\int \frac{dx}{x^6+x^4}$.

2008. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$.

2009. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

2010. $\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{14} x}}\,dx$.

2011. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$.

§ 3. Tipos principales de las funciones integrables

Funciones fraccionarias racionales

En los ejercicios 2012—2067 hallar las integrales.

1) *El denominador tiene sólo distintas raíces reales.*

2012. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$.

2013. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$.

2014. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

2015. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

2016. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$.

2017. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$.

2018. $\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$.

2019. $\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$.

2020. $\int \frac{(2x^2-5)\,dx}{x^4-5x^2+6}$.

2021. $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

2) *El denominador tiene sólo raíces reales; algunas raíces son múltiples.*

2022. $\int \frac{(x^2-3x+2)\,dx}{x(x^2+2x+1)}$. **2023.** $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$.

2024. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4}$. **2025.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.

2026. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx$. **2027.** $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

2028. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. **2029.** $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx$.

2030. $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$. **2031.** $\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

2032. $\int \frac{(x^2-2x+3)\,dx}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}$. **2033.** $\int \frac{(7x^3-9)\,dx}{x^4-5x^3+6x^2}$.

2034. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx$. **2035.** $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$.

3) *El denominador tiene distintas raíces complejas.*

2036. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. **2037.** $\int \frac{dx}{1+x^3}$. **2038.** $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

2039. $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$. **2040.** $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$.

2041. $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$. **2042.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

2043. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$. **2044.** $\int \frac{(3x^2+x+3)\,dx}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

2045. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$. **2046.** $\int \frac{(x^3-6)\,dx}{x^4+6x^2+8}$.

2047*. $\int \frac{dx}{1+x^4}$.

4) *El denominador tiene raíces complejas múltiples.*

2048. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$. **2049.** $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$.

2050. $\int \frac{(5x^2-12)\,dx}{(x^2-6x+13)^2}$. **2051.** $\int \frac{(x+1)^4\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$.

2052. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$. **2053.** $\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

2054. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$. **2055.** $\int \frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$.

5) *Método de Ostrogradski.*

2056. $\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$. **2057.** $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

2058. $\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}\,dx.$ **2059.** $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx.$

2060. $\int \frac{(x^2-1)^2\,dx}{(1+x)(1+x^2)^3}.$ **2061.** $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}.$

2062. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}.$ **2063.** $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+2x+2)^3}.$

2064. $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,dx.$

2065. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx.$

2066. $\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}\,dx.$

2067. $\int \frac{-9\,dx}{5x^2(3-2x^2)^3}.$

Algunas funciones irracionales

En los ejercicios 2068—2089 hallar las integrales.

1) *Funciones de la forma* $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \ldots\right)$.

2068. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}.$ **2069.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}.$

2070. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}.$ **2071.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}.$

2072. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx.$ **2073.** $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx.$

2074. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}.$ **2075*.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

2) *Binomios diferenciales* $x^m(a+bx^n)^p\,dx$.

2076. $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx.$ **2077.** $\int x^{-1}\,(1+x^{\frac{1}{3}})^{-3}\,dx.$

2078. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$ **2079.** $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx.$

2080. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$ **2081.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

2082. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx.$ **2083.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

2084. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx.$ 2085. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$

2086. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx.$ 2087. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}.$

2088. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx.$ 2089. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$

Funciones trigonométricas

En los ejercicios 2090—2131 hallar las integrales.

2090. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx.$ 2091. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,dx.$

2092. $\int \frac{dx}{\cos x\cdot\operatorname{sen}^3 x}.$ 2093. $\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x}\,dx.$

2094. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\operatorname{sen}^3 x}.$ 2095. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x\cos^4 x}.$

2096. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(1-\cos x)^2}.$ 2097. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^2}.$

2098. $\int \cos^6 x\,dx.$ 2099. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx.$

2100. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx.$ 2101. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}.$

2102. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x}.$ 2103. $\int \frac{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

2104. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}.$ 2105. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x+\cos x}.$

2106. $\int \frac{dx}{a\cos x+b\operatorname{sen} x}.$ 2107. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x\cdot\cos 2x}.$

2108. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\operatorname{sen} x\cdot\cos 3x}.$ 2109. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}.$

2110. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$ 2111. $\int \frac{dx}{5+4\operatorname{sen} x}.$

2112. $\int \frac{2-\operatorname{sen} x}{2+\cos x}\,dx.$ 2113. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{1-\operatorname{tg} x}.$

2114. $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}.$ 2115. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x+2\sec x)^2}.$

2116. $\int \frac{dx}{5-4\operatorname{sen} x+3\cos x}.$ 2117. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\operatorname{sen}^2 x}.$

2118. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}.$ 2119. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen}^4 x}.$

2120. $\int \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x}$. **2121.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$.

2122. $\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}$.

2123. $\int \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}\, dx$. **2124.** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{sen} x \cos x}\, dx$.

2125*. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^3 2x}}{\operatorname{sen}^5 x}\, dx$. **2126.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x \cos^5 x}}$.

2127. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^4 x}}$. **2128.** $\int \sqrt{1 + \operatorname{cosec} x}\, dx$.

2129. $\int \frac{(\cos 2x - 3)\, dx}{\cos^4 x \sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}}$. **2130.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \sqrt{\cos^3 \frac{x}{2}}}$.

2131. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$.

Funciones hiperbólicas

En los ejercicios 2132—2150 hallar las integrales.

2132. $\int \operatorname{ch} x\, dx$. **2133.** $\int \operatorname{sh} x\, dx$.

2134. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$. **2135.** $\int \frac{e^x\, dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$.

2136. $\int (\operatorname{ch}^2 ax + \operatorname{sh}^2 ax)\, dx$. **2137.** $\int \operatorname{sh}^2 x\, dx$.

2138. $\int \operatorname{th}^2 x\, dx$. **2139.** $\int \operatorname{cth}^2 x\, dx$.

2140. $\int \operatorname{sh}^3 x\, dx$. **2141.** $\int \operatorname{ch}^3 x\, dx$.

2142. $\int \operatorname{th}^4 x\, dx$. **2143.** $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\, dx$.

2144. $\int \operatorname{cth}^5 x\, dx$. **2145.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$.

2146. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$. **2147.** $\int \frac{dx}{(1 + \operatorname{ch} x)^2}$.

2148. $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\, dx$. **2149.** $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

2150. $\int \frac{e^{2x}\, dx}{\operatorname{sh}^4 x}$.

Funciones racionales de x y $\sqrt{ax^2+bx+c}$

En los ejercicios 2151—2174 hallar las integrales.

2151*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. **2152.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

2153. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$. **2154.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

2155. $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\,dx$. **2156.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$

2157. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$. **2158.** $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$.

2159. $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$. **2160.** $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$.

2161. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$. **2162.** $\int \frac{dx}{x^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

2163. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$. **2164.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

2165. $\int \frac{(2x^2-3x)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$. **2166.** $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

2167. $\int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$. **2168.** $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

2169. $\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx$. **2170.** $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

2171. $\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$.

2172. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,dx$. **2173.** $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$.

2174. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Diversas funciones

En los ejercicios 2175—2230 hallar las integrales.

2175. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^{12}}$. **2176.** $\int \frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

2177. $\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx$. **2178.** $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$.

2179. $\int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

2180. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}.$

2181. $\int \frac{dx}{1-x^4}.$

2182. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}.$

2183. $\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{\sqrt{x+1}}.$

2184. $\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,dx.$

2185. $\int x^2 \operatorname{sh} x\,dx.$

2186. $\int \operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})\,dx.$

2187. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x\,dx}{x^2}.$

2188. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

2189. $\int xe^{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

2190. $\int (x^3-2x^2+5)\,e^{3x}\,dx.$

2191. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx.$

2192. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^{\frac{1}{2}}}.$

2193. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}.$

2194. $\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}\,dx.$

2195. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

2196. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\,\frac{dx}{x}.$

2197. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x)^3}}.$

2198. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx.$

2199. $\int \frac{x^4\,dx}{x^{15}-1}.$

2200. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x-2\operatorname{sen} x}.$

2201. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$

2202. $\int \frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x}.$

2203. $\int x\ln(1+x^3)\,dx.$

2204. $\int \frac{(\ln x-1)\,dx}{\ln^2 x}.$

2205. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx.$

2206. $\int x^2e^x\cos x\,dx.$

2207. $\int xe^{x^2}(x^2+1)\,dx.$

2208. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 x\cos^5 x}}.$

2209. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x\cos^5 x}.$

2210. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}.$

2211. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}.$

2212. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}\,dx.$

2213. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}.$

2214. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$

2215. $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2}.$

2216. $\int \frac{xe^x\,dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

2217. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^4}.$

2218. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

2219. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^3}\,dx.$

2220. $\int \frac{dx}{(1-2^x)^4}.$

2221. $\int \frac{(e^{3x}+e^{x})\,dx}{e^{4x}-e^{2x}+1}$.

2222. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{x}+e^{2x}}}$.

2223. $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}$.

2224. $\int \operatorname{sen}^8 x\,dx$.

2225. $\int \frac{(3+x^2)^2 x^3\,dx}{(1+x^2)^3}$.

2226. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx$.

2227. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}$.

2228. $\int \frac{(x+\operatorname{sen} x)\,dx}{1+\cos x}$.

2229*. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

2230. $\int e^{\operatorname{sen} x}\,\frac{x\cos^3 x-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$.

Capítulo VII

Métodos para calcular integrales definidas. Integrales impropias

§ 1. Métodos de integración exacta

Aplicación directa de la fórmula de Newton — Leibniz

En los ejercicios 2231—2258 calcular las integrales.

2231. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x}\, dx.$

2232. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}.$

2233. $\int\limits_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}.$

2234. $\int\limits_{4}^{9} \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\, dy.$

2235. $\int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right) dt.$

2236. $\int\limits_{0}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}.$

2237. $\int\limits_{0}^{1} (e^x - 1)^4 e^x\, dx.$

2238. $\int\limits_{0}^{2a} \frac{3\, dx}{2b - x} \quad (b > a > 0).$

2239. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\, dx}{(x^2+1)^2}.$

2240. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}.$

2241. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\lg x}{x}\, dx.$

2242. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}\, dx}{x^2}.$

2243. $\int\limits_{0}^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt{a^2 - x^{2n}}}.$

2244. $\int\limits_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

2245. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3\,dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$.

2246. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{a\,dx}{(x-a)(x-2a)}$.

2247. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

2248. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

2249. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x+x^3}$.

2250. $\displaystyle\int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

2251. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$.

2252. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \operatorname{sen} x\, 2x\,dx$.

2253. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$.

2254. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{\omega}} \operatorname{sen}^2(\omega x+\varphi_0)\,dx$.

2255. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}$.

2256. $\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}^4 \varphi\,d\varphi$.

2257. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$.

2258. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen}\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)dt$.

En los ejercicios 2259—2268 hallar las integrales integrándolas por partes:

2259. $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{-x}\,dx$.

2260. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

2261. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$. **2262.** $\int\limits_0^{\pi} x^3 \operatorname{sen} x\,dx$.

2263. $\int\limits_1^2 x \log_2 x\,dx$. **2264.** $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$.

2265. $\int\limits_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$. **2266.** $\int\limits_0^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

2267. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\,dx$. **2268.** $\int\limits_1^{e} \ln^3 x\,dx$.

2269. Deducir las fórmulas de recurrencia para calcular las integrales $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ y $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx$ (n es un entero positivo o cero) y calcular las integrales:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 x\,dx$; b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x\,dx$; c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{11} x\,dx$.

2270. Deducir la fórmula de recurrencia para calcular la integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ (m y n son enteros positivos o ceros; examinar los casos particulares de valores pares e impares de m y n).

2271. Deducir la fórmula de recurrencia y calcular la integral $\int\limits_{-1}^{0} x^n e^x\,dx$ (n es un entero positivo).

2272. Demostrar la fórmula de recurrencia

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

(n es un entero positivo) y mediante ésta calcular la integral $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

2273. Demostrar que si $J_m=\int\limits_1^e \ln^m x\,dx$, se tiene $J_m=e-mJ_{m-1}$ (m es un entero positivo).

2274*. Hallar la integral $\int\limits_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$ (p y q son enteros positivos).

Cambio de variable en la integral definida

En los ejercicios 2275—2295 calcular las integrales.

2275. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$. **2276.** $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$. **2277.** $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

2278. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$. **2279.** $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$. **2280.** $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

2281*. $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen}^6 \frac{x}{2}\,dx$. **2282*.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x\,dx$.

2283. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}$. **2284.** $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$.

2285. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx$. **2286.** $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

2287. $\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. **2288.** $\int\limits_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$.

2289. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. **2290.** $\int\limits_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$.

2291. $\int\limits_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$. **2292.** $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}$.

2293. $\int\limits_{2,5}^{5} \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4}\,dx$. **2294.** $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

2295. $\int\limits_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}$.

Distintos problemas

2296. Calcular el valor medio de la función $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ en el intervalo $[1, 4]$.

2297. Calcular el valor medio de la función $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$ en el intervalo $[1; 1{,}5]$.

2298. Calcular el valor medio de las funciones $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

2299. Calcular el valor medio de la función $f(x)=\frac{2}{e^x+1}$ en el intervalo $[0, 2]$.

2300. ¿Para qué valor de a el valor medio de la función $y = \ln x$ en el intervalo $[1, a]$ es igual a la velocidad media con que varía la función en este intervalo?

En los ejercicios 2301—2317 calcular las integrales.

2301. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x+x^3}$. **2302.** $\int\limits_{0}^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9\,dx}{(1+x^5)^3}$.

2303. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2}$. **2304.** $\int\limits_{0}^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15}\,dx}{(1+x^8)^{\frac{2}{5}}}$.

2305. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$. **2306.** $\int\limits_{-a}^{+a} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

2307. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{2x+x^2}\,dx$. **2308.** $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$.

2309. $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$. **2310.** $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

2311. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\, dx.$ **2312.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}.$

2313. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\frac{1}{6}\operatorname{sen}^2 x}.$ **2314.** $\int\limits_0^{1} (\operatorname{arcsen} x)^4\, dx.$

2315. $\int\limits_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\, dx.$ **2316.** $\int\limits_0^{1} \frac{(3x+2)\, dx}{(x^2+4x+1)^{\frac{5}{2}}}.$

2317. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x \cos x\, dx}{a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x}.$

2318. Mostrar que $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|ab|\, dx}{a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\pi}{2}$, donde a y b son cualesquiera números reales distintos de cero.

2319. Resolver la ecuación $\int\limits_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{12}.$

2320. Resolver la ecuación $\int\limits_{\ln 2}^{x} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{6}.$

2321. Al quedarse convencido de la validez de las desigualdades $\frac{x}{e}>\ln x>1$ para $x>e$, mostrar que la integral $\int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}$ es menor que 1, pero mayor que 0,92.

2322*. Mostrar que

$$\frac{\pi}{6}\approx 0{,}523<\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}<\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\approx 0{,}555.$$

2323*. Mostrar que

$$0{,}5<\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}\leqslant\frac{\pi}{6}\approx 0{,}523$$

$(n\geqslant 1)$.

2324. Valiéndose de la desigualdad $\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{6}$, que es válida para $x > 0$, y de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski (véase el ejercicio 1638), evaluar la integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \operatorname{sen} x}\, dx$.

2325*. Mostrar que $0{,}78 < \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} < 0{,}93$.

2326. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $J(x) = \int\limits_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\, dt$ en el intervalo $[-1, 1]$.

2327. Hallar el punto extremo y los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = \int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2\, dt$.

En los ejercicios 2328—2331 demostrar la validez de las igualdades sin calcular las integrales.

2328. $\int\limits_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{10} \operatorname{sen}^9 x\, dx = 0$. **2329.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^7-3x^5+7x^3-x}{\cos^2 x}\, dx = 0$.

2330. $\int\limits_{-1}^{1} e^{\cos x}\, dx = 2\int\limits_0^1 e^{\cos x}\, dx$. **2331.** $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx = 0$.

2332*. a) Mostrar que si $f(t)$ es una función impar, $\int\limits_a^x f(t)\, dt$ es una función par, es decir, que $\int\limits_a^{-x} f(t)\, dt = \int\limits_a^x f(t)\, dt$.

b) ¿Será la función $\int\limits_a^x f(t)\, dt$ impar, si la función $f(t)$ es par?

2333*. Demostrar la validez de la igualdad

$$\int\limits_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} \quad (x > 0).$$

2334. Demostrar la identidad
$$\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg} x} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg} x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1.$$

2335. Demostrar la identidad
$$\int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen} \sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

2336. Demostrar la validez de la igualdad
$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\,dx.$$

2337. Demostrar la validez de la igualdad
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2338. Demostrar que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)\,dx$. Aplicar el resultado obtenido para calcular las integrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ y $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

2339*. Demostrar que $\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \times \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)\,dx$. Aplicar el resultado obtenido para calcular la integral
$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

2340*. Mostrar que si la función $f(x)$ es periódica cuyo período es igual a T, se tiene que $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ no depende de a.

2341*. Sabemos que la función $f(x)$ es impar en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ y su período es igual a T. Demostrar que $\int_a^x f(t)\,dt$ es también una función periódica cuyo período es el mismo.

2342. Calcular la integral $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$, donde n es un entero positivo, aplicando dos métodos, a saber, descomponiendo el grado del binomio según la fórmula para el binomio de Newton, y por sustitución $x = \operatorname{sen}\varphi$. Al comparar los resultados deducir la siguiente fórmula de la suma (C_n^k son coeficientes binomiales):

$$C_n^0 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}.$$

2343. La integral $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$ se halla sin ninguna dificultad por sustitución $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$. Tenemos:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} = \int_0^0 \frac{2\,dz}{(1+z^2)\left(5-3\,\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 0.$$

Pero, por otra parte, $-3 < -3\cos x < +3$, por consiguiente, $2 < 5-3\cos x < 8$ y $\frac{1}{2} > \frac{1}{5-3\cos x} > \frac{1}{8}$. De donde

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dx > \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} > \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\,dx,$$

y, por lo tanto, $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} > \frac{\pi}{4}$. Hallar el error en este razonamiento.

2344*. Sea $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x\,dx$ ($n > 1$ y es un entero). Probar que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$. Demostrar que $\frac{1}{2n+2} < I_n < \frac{1}{2n-2}$.

2345*. Demostrar que la siguiente igualdad es válida:

$$\int_0^x e^{zx} e^{-z^2}\,dz = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz.$$

2346*. Demostrar que

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{e^{k\omega^2x^2}}{\int\limits_a^b e^{k\omega^2x^2}\,dx}=\begin{cases}0, & \text{si } x<b,\\ \infty, & \text{si } x=b\end{cases}\qquad (\omega>0,\ k>0,\ b>a>0).$$

§ 2. Métodos aproximados

En los ejercicios 2347—2349 efectuar los cálculos con exactitud hasta 0,001.

2347. El área de la cuarta parte de un círculo cuyo radio es igual a 1, es igual a $\frac{\pi}{4}$. Por otra parte, tomando un solo círculo cuyo centro se halla en el origen de coordenadas y cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$, y aplicando la integración para calcular el área de esta cuarta parte del círculo referido, obtenemos:

$$\frac{\pi}{4}=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx,\ \text{o sea},\ \pi=4\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Aplicando las reglas de los rectángulos, de los trapecios y la de Simpson, calcular aproximadamente el número π dividiendo el intervalo de integración [0, 1] en 10 partes. Comparar los resultados obtenidos entre sí con el dato tabular del número π.

2348. Sabiendo que $\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, calcular aproximadamente el número π, dividiendo el intervalo de integración en 10 partes. Comparar los resultados obtenidos mediante distintas reglas, entre sí y con los del ejercicio anterior.

2349. Calcular $\ln 10=\int\limits_1^{10}\frac{dx}{x}$ para $n = 10$, aplicando la regla de Simpson. Hallar el módulo de transición de los logaritmos naturales a los decimales. Comparar con los datos tabulares.

En los ejercicios 2350—2355, aplicando la fórmula de Simpson, calcular aproximadamente las integrales que no son susceptibles de ser halladas en forma finita con ayuda de las funciones elementales. El número n de los intervalos parciales está indicado entre paréntesis.

2350. $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^3}\,dx\quad (n=10)$. **2351.** $\int\limits_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx\quad (n=10)$.

2352. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\ln x} \quad (n=6).$ **2353.** $\int\limits_{2}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos\varphi}\, d\varphi \quad (n=10).$

2354. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0{,}1\,\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi \quad (n=6).$

2355. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \quad (n=10).$

2356. Usando la fórmula de Simpson, calcular la integral $\int\limits_{1,05}^{1,35} f(x)\, dx$, valiéndose de la siguiente tabla de los valores de la función $f(x)$:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

2357. Una recta toca a la orilla del río en los puntos A y B. Para calcular el área del terreno entre el río y la recta AB han sido tendidas 11 perpendiculares desde el río hasta AB cada 5 metros (la longitud de la recta AB resultó igual a 60 m). Las longitudes de dichas perpendiculares resultaron iguales a 3,28; 4,02; 4,64; 5,26; 4,98; 3,62; 3,82; 4,68; 5,26; 3,82; 3,24. Calcular el valor aproximado del área del terreno.

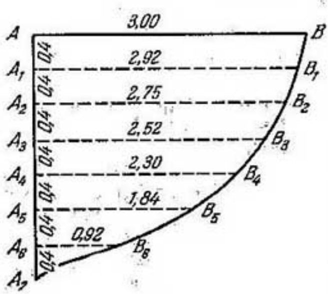

Fig. 39

2358. Calcular el área de la sección transversal de un barco tomando en consideración los siguientes datos (véase la fig. 39): $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = 0{,}4$ m,

$$AB = 3 \text{ m},\ A_1B_1 = 2{,}92 \text{ m},\ A_2B_2 = 2{,}75 \text{ m},\ A_3B_3 = 2{,}52 \text{ m},\ A_4B_4 = 2{,}30 \text{ m},\ A_5B_5 = 1{,}84 \text{ m},\ A_6B_6 = 0{,}92 \text{ m}.$$

2359. Para calcular el trabajo realizado por el vapor en una máquina de vapor, se calcula el área del diagrama de indicador, que es la representación gráfica de la dependencia que existe entre la presión del vapor en el cilindro y el recorrido del émbolo. La fig. 40 muestra el diagrama de indicador de una máquina de vapor. Las

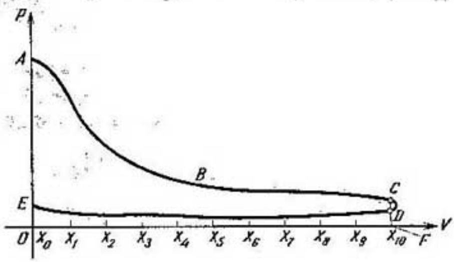

Fig. 40

ordenadas de los puntos de las líneas ABC y ED, que corresponden a las abscisas $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ vienen dadas en la siguiente tabla:

Abscisas . . .	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ordenadas de la línea ABC	60,6	53,0	32,0	24,4	19,9	17,0
Ordenadas de la línea ED	5,8	1,2	0,6	0,6	0,7	0,8

Abscisas . . .	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
Ordenadas de la línea ABC	15,0	13,3	12,0	11,0	6,2
Ordenadas de la línea ED	0,9	1,0	1,3	1,8	5,7

Valiéndose de la fórmula de Simpson, calcular el área $ABCDE$. Las ordenadas son dadas en milímetros. La longitud $OF = 88{,}7$ mm (el punto F es la proyección común de los puntos C y D sobre el eje de abscisas).

En los ejercicios 2360—2363 conviene recurrir a los métodos aproximados para resolver las ecuaciones, cuando se buscan los límites de la integración.

2360. Hallar el área de la figura limitada por los arcos de las parábolas $y = x^3 - 7$ e $y = -2x^2 + 3x$ y por el eje de ordenadas.

2361. Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = x^3$ y la recta $y = 7(x + 1)$.

2362. Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = 16 - x^2$ y por la parábola semicúbica $y = -\sqrt[3]{x^2}$.

2363. Hallar el área de la figura limitada por las líneas $y = 4 - x^4$ e $y = \sqrt[3]{x}$.

2364. La fig. 41 muestra el diagrama de indicador (simplificado) de una máquina de vapor. Partiendo de las medidas indicadas en el diseño (en milímetros) calcular el área $ABCDO$, siendo la ecuación

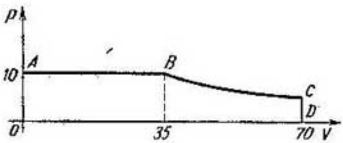

Fig. 41

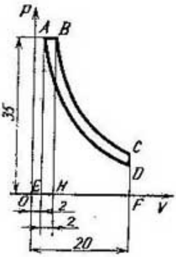

Fig. 42

de la línea BC: $pv^\gamma =$ const (la línea BC se llama *curva adiabática*), $\gamma = 1{,}3$. La línea AB es una recta paralela al eje Ov.

2365. La fig. 42 muestra el diagrama de indicador de un motor Diesel. El segmento AB corresponde al proceso de la combustión de la mezcla; la adiabata BC, a la expansión; el segmento CD, al escape y la adiabata DA, a la compresión. La ecuación de la adiabata BC es: $pv^{1,3} =$ const, la ecuación de la adiabata AD es: $pv^{1,35} =$ const. Partiendo de las medidas indicadas en el diseño (en mm) calcular el área $ABCD$.

§ 3. Integrales impropias

Integrales de límites infinitos

En los ejercicios 2366—2385 calcular las integrales impropias (o demostrar su divergencia).

2366. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4}$. **2367.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2368. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx \quad (a>0)$. **2369.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

2370. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. **2371.** $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$.

2372. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$. **2373.** $\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$.

2374. $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **2375.** $\int_{a^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

2376. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$. **2377.** $\int_0^{\infty} x^3e^{-x^2}\,dx$.

2378. $\int_0^{\infty} x \operatorname{sen} x\,dx$. **2379.** $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

2380. $\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx$. **2381.** $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\,dx$.

2382. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$. **2383.** $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

2384. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. **2385.** $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

En los ejercicios 2386—2393 analizar la convergencia de las integrales.

2386. $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx$. **2387.** $\int_0^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$. **2388.** $\int_0^{\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}\,dx$.

2389. $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$. **2390.** $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$. **2391.** $\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx$.

2392. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}$. **2393.** $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$.

Integrales de las funciones que tienen discontinuidades infinitas

En los ejercicios 2394—2411 calcular las integrales impropias (o demostrar su divergencia).

2394. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **2395.** $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$. **2396.** $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

2397. $\int_0^1 x \ln x\, dx$. **2398.** $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$. **2399.** $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

2400. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

2401. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$.

2402. $\int_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$. **2403.** $\int_3^5 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$.

2404. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$. **2405.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$.

2406. $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. **2407.** $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$. **2408.** $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$.

2409. $\int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. **2410.** $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

2411. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

En los ejercicios 2412—2417 analizar la convergencia de las integrales.

2412. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$. **2413.** $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$. **2414.** $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

2415. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\operatorname{sen} x}-1}$. **2416.** $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$. **2417.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Diversos problemas

2418. La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, \infty)$ y $f(x) \to A \neq 0$ para $x \to \infty$. ¿Puede converger la integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$?

2419. ¿Para qué valores de k la integral $\int\limits_1^\infty x^k \frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}\,dx$ será convergente?

2420. ¿Para qué valores de k convergen las integrales

$$\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^k \ln x} \quad \text{y} \quad \int\limits_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^k}?$$

2421. ¿Para qué valores de k converge la integral $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ $(b < a)$?

2422. ¿Sería posible hallar tal k para que converja la integral $\int\limits_0^\infty x^k\,dx$?

2423. ¿Para qué valores de k y t converge la integral $\int\limits_0^\infty \frac{x^k}{1+x^t}\,dx$?

2424. ¿Para qué valores de m converge la integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$?

2425. ¿Para qué valores de k converge la integral $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{\operatorname{sen}^k x}$?

En los ejercicios 2426—2435 calcular las integrales impropias.

2426. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. 2427*. $\int\limits_{-1}^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2428. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

2429. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ (n es un entero positivo).

2430. $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ (n es un entero positivo).

2431. $\int\limits_0^{\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx$ (n es un entero positivo).

2432. $\int\limits_0^{1} (\ln x)^n\,dx$ (n es un entero positivo).

2433*. $\int\limits_0^{1} \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ para m: a) par; b) impar. ($m>0$).

2434*. $\int\limits_0^{1} \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$ (n es un entero positivo).

2435. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ $(0<\alpha<2\pi)$.

2436*. Demostrar que $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}=\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2437*. Demostrar que $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx=0$.

2438. Calcular la integral $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

En los ejercicios 2439—2448 calcular las integrales aplicando las fórmulas

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (integral de Poisson)},$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} \text{ (integral de Dirichlet)}.$$

2439. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx$ $(a>0)$.

2440. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$. **2441*.** $\int\limits_0^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$.

2442. $\int\limits_0^{\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,dx$ (n es un entero positivo).

2443. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\,dx.$ **2444.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx.$

2445. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax \cos bx}{x}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$

2446*. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx.$ **2447*.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x}\,dx.$ **2448*.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx.$

2449*. Pongamos $\varphi(x) = -\int\limits_0^{x} \ln \cos y\,dy$. (Esta *integral* lleva el nombre *de Lobachevski*.) Demostrar la relación

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - x\ln 2.$$

Valiéndose de la relación hallada calcular la magnitud

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos y\,dy$$

(por primera vez calculada por Euler).

En los ejercicios 2450—2454 calcular las integrales.

2450. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{sen} x\,dx.$ **2451.** $\int\limits_0^{\pi} x \ln \operatorname{sen} x\,dx.$

2452*. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{ctg} x\,dx.$ **2453*.** $\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\,dx.$

2454. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Capítulo VIII

Aplicaciones de la integral

§ 1. Algunos problemas de geometría y de estática

Área de la figura

2455. Calcular el área de la figura limitada por las líneas cuyas ecuaciones son $y^2 = 2x + 1$ y $x - y - 1 = 0$.

2456. Hallar el área de la figura comprendida entre la parábola $y = -x^2 + 4x - 3$ y las tangentes a ésta en los puntos $(0; -3)$ y $(3; 0)$.

2457. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y la normal a ésta inclinada hacia el eje de abscisas formándose entre ellos el ángulo de $135°$.

2458. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

2459. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y^2 + 8x = 16$ y $y^2 - 24x = 48$.

2460. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = x^3/3$.

2461. La circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ está dividida por la parábola $y = x^2/2$ en dos partes. Hallar las áreas de las dos figuras.

2462. Hallar las áreas de las figuras en las cuales la parábola $y^2 = 6x$ divide la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

2463. De un círculo de radio a está cortada una elipse cuyo mayor eje coincide con uno de los diámetros del círculo y el menor es igual a $2b$. Demostrar que el área de la parte restante es igual al área de la elipse cuyos semiejes son a y $a - b$.

2464. Hallar el área de la figura limitada por el arco de una hipérbola y su cuerda trazada desde el foco perpendicularmente al eje real.

2465. La circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ está dividida por la hipérbola $x^2 - 2y^2 = a^2/4$ en tres partes. Calcular sus áreas.

2466. Calcular las áreas de las figuras curvilíneas formadas por la intersección de la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y la hipérbola $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

2467. Calcular el área de la figura comprendida entre la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{x^2}{2}$.

2468. Calcular el área de la figura comprendida entre la línea $y = x(x-1)^2$ y el eje de abscisas.

2469. Calcular el área de la figura limitada por el eje de ordenadas y la línea $x = y^2(y-1)$.

2470. Hallar el área de una parte de la figura limitada por las líneas $y^m = x^n$ e $y^n = x^m$, donde m y n son enteros positivos. La parte buscada se halla en el primer cuadrante. Analizar la cuestión sobre el área total de la figura según los números m y n sean pares o impares.

2471. a) Calcular el área del trapecio mixtilíneo limitado por el eje de abscisas y la línea $y = x - x^2\sqrt{x}$.

b) Calcular el área de la figura limitada por dos ramas de la línea $(y-x)^2 = x^5$ y por la recta $x = 4$.

2472. Calcular el área de la figura limitada por la línea $(y - x - 2)^2 = 9x$ y los ejes de coordenadas.

2473. Hallar el área del lazo de la línea $y^2 = x(x-1)^2$.

2474. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = (1-x^2)^3$.

2475. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = x^2 - x^4$.

2476. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$.

2477. Hallar el área de la figura limitada por la línea $x^2y^2 = 4(x-1)$ y la recta que pasa por sus puntos de inflexión.

2478. Calcular el área de la figura limitada por las líneas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

2479. Calcular el área del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ y el eje de abscisas.

2480. Calcular el área del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2$, por el eje Ox y por dos rectas paralelas al eje Oy trazadas de manera que pasan por los puntos extremos de la función y.

2481. Hallar el área de la figura limitada por las líneas $y = 2x^2e^x$ e $y = -x^3e^x$.

2482. a) Calcular el área del trapecio mixtilíneo de base $[a, b]$, limitado por la línea $y = \ln x$.

b) Calcular el área de la figura limitada por la línea $y = \ln x$, por el eje de ordenadas y las rectas $y = \ln a$, $y = \ln b$.

2483. Calcular el área de la figura limitada por las líneas $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$.

2484. Calcular el área de la figura limitada por las líneas

$$y = \frac{\ln x}{4x}, \qquad y = x\ln x.$$

2485. Calcular el área de uno de los triángulos curvilíneos limitados por el eje de abscisas y las líneas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

2486. Calcular el área del triángulo curvilíneo limitado por el eje de ordenadas y las líneas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \frac{2}{3} \cos x$.

2487. Hallar el área de la figura limitada por la línea $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$ y por el segmento del eje de abscisas que une dos puntos sucesivos de la intersección de la línea citada con el eje de abscisas.

2488. Calcular el área de la figura limitada por el eje de abscisas y las líneas $y = \operatorname{arcsen} x$ e $y = \arccos x$.

2489. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $(y - \operatorname{arcsen} x)^2 = x - x^2$.

2490. Hallar el área de la figura limitada por un arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ y el eje de abscisas.

2491. Calcular el área de la figura limitada por la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

2492. Hallar el área de la figura limitada por la cardioide $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$.

2493. Hallar el área de la figura limitada por: 1) la epicicloide

$$x = (R + r)\cos t - r \cos \frac{R+r}{r} t, \quad y = (R + r) \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} \frac{R+r}{r} t;$$

2) la hipocicloide

$$x = (R - r)\cos t + r \cos \frac{R-r}{r} t, \quad y = (R - r) \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} \frac{R-r}{r} t$$

siendo $R = nr$ (n es un entero). Aquí R es el radio de la circunferencia inmóvil y r es el de la otra móvil; el centro de la circunferencia inmóvil coincide con el origen de coordenadas; t es el ángulo de rotación del radio trazado desde el centro de la circunferencia inmóvil al punto de contacto.

2494. Hallar el área del lazo de la línea:

$$1)\ x = 3t^2;\ y = 3t - t^3; \quad 2)\ x = t^2 - 1,\ y = t^3 - t.$$

2495. a) Calcular el área que describe el radio polar de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ dando una revolución, si $\varphi = 0$ corresponde al comienzo del movimiento.

b) Calcular el área de la figura limitada por la segunda y la tercera espira de la espiral y por un segmento del eje polar.

2496. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho = a \operatorname{sen} 2\varphi$ (rosa de dos pétalos).

2497. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho = a\cos 5\varphi$.

2498. Hallar el área de la figura limitada por el caracol de Pascal $\rho = 2a(2+\cos\varphi)$.

2499. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho = a\operatorname{tg}\varphi$ $(a>0)$ y la recta $\varphi=\pi/4$.

2500. Hallar el área de la parte común de las figuras limitadas por las líneas $\rho = 3+\cos 4\varphi$ y $\rho = 2-\cos 4\varphi$.

2501. Hallar el área de la parte de la figura limitada por la línea $\rho = 2+\cos 2\varphi$, que se halla fuera de la línea $\rho = 2+\operatorname{sen}\varphi$.

2502. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho^2 = a^2\cos n\varphi$ (n es un entero positivo).

2503. Mostrar que el área de la figura limitada por cualesquiera dos radios polares de la espiral hiperbólica $\rho\varphi = a$ y su arco, es proporcional a la diferencia de estos radios.

2504. Mostrar que el área de la figura limitada por cualesquiera radios polares de la espiral logarítmica $\rho = ae^{m\varphi}$ y su arco, es proporcional a la diferencia de los cuadrados de estos radios.

2505*. Hallar el área de la figura comprendida entre la parte externa e interna de la línea

$$\rho = a\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3}.$$

2506. Calcular el área de la figura limitada por la línea

$$\rho=\sqrt{1-t^2},\quad \varphi=\operatorname{arcsen} t+\sqrt{1-t^2}.$$

En los ejercicios 2507—2511 conviene haber pasado a las coordenadas polares y luego efectuar los cálculos.

2507. Hallar el área de la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

2508. Hallar el área de la parte de la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli (véase el ejercicio anterior) que se halla dentro de la circunferencia $x^2+y^2 = a^2/2$.

2509. Hallar el área de la figura limitada por la línea $(x^2+y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

2510. Hallar el área de la figura limitada por la línea

$$(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2).$$

2511. Calcular el área de la figura limitada por la línea $x^4+y^4 = x^2+y^2$.

2512. Calcular el área de la figura comprendida entre la línea $y=\frac{1}{1+x^2}$ y su asíntota.

2513. Hallar el área de la figura comprendida entre la línea $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ y su asíntota.

2514. Hallar el área de la figura comprendida entre la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ y su asíntota.

2515. Hallar el área de la figura comprendida entre la línea $xy^2 = 8 - 4x$ y su asíntota.

2516*. 1) Calcular el área de la figura limitada por la línea $y = x^2e^{-x^2}$ y su asíntota.

2) Calcular el área de la figura limitada por la línea $y^2 = xe^{-2x}$.

2517. Hallar el área de la figura comprendida entre la tractriz $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \operatorname{sen} t$ y el eje de abscisas.

2518. Hallar el área del lazo y la de la figura comprendida entre la línea $\rho = \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$ y su asíntota.

Longitud de la línea *

2519. Calcular la longitud del arco de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = b$).

2520. Hallar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 2px$ desde el vértice hasta el punto $M(x, y)$. (Como la variable independiente ha de ser tomada y.)

2521. Hallar la longitud del arco de la línea $y = \ln x$ (desde $x_1 = \sqrt{3}$ hasta $x_2 = \sqrt{8}$).

2522. Hallar la longitud del arco de la línea $y = \ln(1 - x^2)$ $\left(\text{desde } x_1 = 0 \text{ hasta } x_2 = \frac{1}{2}\right)$.

2523. Hallar la longitud del arco de la línea $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ (desde $x_1 = a$ hasta $x_2 = b$).

2524. Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ comprendida dentro de la parábola $y^2 = \frac{x}{3}$.

2525. Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $5y^3 = x^2$ comprendida dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$.

2526. Calcular la longitud del lazo de la línea $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

---

* En los ejercicios en que se calculan las longitudes de los arcos, en caso necesario, los paréntesis llevan indicaciones sobre el intervalo de variación de la variable independiente el cual corresponde al arco rectificable.

2527. Hallar el perímetro de uno de los triángulos curvilíneos limitados por el eje de abscisas y por las líneas $y = \ln \cos x$ e $y = \ln \operatorname{sen} x$.

2528. Hallar la longitud del arco de la línea $x = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ comprendido entre su punto más inferior y el vértice (el punto de la línea que tiene la curvatura extrema).

2529. Hallar la longitud de la línea $y = \sqrt{x - x^2} + \operatorname{arcsen} \sqrt{x}$.

2530. Hallar la longitud de la línea $(y - \operatorname{arcsen} x)^2 = 1 - x^2$.

2531. Hallar un punto de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ el cuál divida la longitud de su primer arco en razón de $1:3$.

2532. Sean dados la astroide $x = R \cos^3 t$, $y = R \operatorname{sen}^3 t$ y los puntos en ella $A(R, 0)$, $B(0, R)$. En el arco $\overparen{AB}$ hallar el punto M tal que la longitud del arco $\overparen{AM}$ constituya la cuarta parte de la longitud del arco $\overparen{AB}$.

2533*. Hallar la longitud de la línea $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

2534. Hallar la longitud de la línea $x = a \cos^5 t$, $y = a \operatorname{sen}^5 t$.

2535. Hallar la longitud del arco de la tractriz

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right), \qquad y = a \operatorname{sen} t$$

desde su punto $(0, a)$ hasta su punto (x, y).

2536. Hallar la longitud del arco de la evolvente de la circunferencia

$$x = R(\cos t + t \operatorname{sen} t), \qquad y = R(\operatorname{sen} t - t \cos t)$$

(desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = \pi$).

2537. Calcular la longitud del arco de la línea

$$x = (t^2 - 2) \operatorname{sen} t + 2t \cos t,$$
$$y = (2 - t^2) \cos t + 2t \operatorname{sen} t$$

(desde $t_1 = 0$, hasta $t_2 = \pi$).

2538. Hallar la longitud del lazo de la línea $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

2539. Dos circunferencias de radios iguales a b, ruedan, sin resbalar, con velocidad angular igual, sobre una circunferencia de radio a, por dentro y por fuera de ésta. En el momento $t = 0$ tocan el punto M de la circunferencia inmóvil con sus puntos M_1 y M_2. Mostrar que la relación de las distancias recorridas por los puntos M_1 y M_2 en cualquier lapso de tiempo, es constante e igual a $\frac{a+b}{a-b}$ (véase el ejercicio 2493).

2540. Demostrar que la longitud del arco de la línea

$$x = f''(t)\cos t + f'(t)\,\mathrm{sen}\, t,$$
$$y = -f''(t)\,\mathrm{sen}\, t + f'(t)\cos t$$

correspondiente al intervalo (t_1, t_2), es igual a $[f(t) + f''(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}$.

2541. Aplicar el resultado del ejercicio anterior para calcular la longitud del arco de la línea $x = e^t(\cos t + \mathrm{sen}\, t)$, $y = e^t(\cos t - \mathrm{sen}\, t)$ (desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = t$).

2542. Demostrar que los arcos de las líneas

$$x = f(t) - \varphi'(t), \qquad y = \varphi(t) + f'(t)$$

y

$$x = f'(t)\,\mathrm{sen}\, t - \varphi'(t)\cos t,$$
$$y = f'(t)\cos t + \varphi'(t)\,\mathrm{sen}\, t$$

correspondientes a un mismo intervalo de variación del parámetro t tienen longitudes iguales.

2543. Hallar la longitud del arco de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ desde el principio hasta el final de la primera espira.

2544. Demostrar que el arco de la parábola $y = \frac{1}{2p}x^2$ correspondiente al intervalo $0 \leqslant x \leqslant a$, tiene la misma longitud que el arco de la espiral $\rho = p\varphi$, correspondiente al intervalo $0 \leqslant \rho \leqslant a$.

2545. Calcular la longitud del arco de la espiral hiperbólica $\rho\varphi = 1$ (desde $\varphi_1 = 3/4$ hasta $\varphi_2 = 4/3$).

2546. Hallar la longitud de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

2547. Hallar la longitud de la línea $\rho = a\,\mathrm{sen}^3\frac{\varphi}{3}$ (véase el ejercicio 2505).

2548. Demostrar que la longitud de la línea $\rho = a\,\mathrm{sen}^m\frac{\varphi}{m}$ (m es un entero) es conmensurable con a cuando m es un número par y conmensurable con la longitud de la circunferencia de radio a cuando m es impar.

2549. ¿Para qué valores del exponente k ($k \neq 0$) la longitud de la línea $y = ax^k$ viene expresada en funciones elementales? (Conviene partir del teorema de Chebishev sobre los casos de integrabilidad del binomio diferencial.)

2550. Hallar la longitud de la línea dada por la ecuación

$$y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos x}\,dx.$$

2551. Calcular la longitud del arco de la línea

$$x = \int_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz, \qquad y = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz$$

desde el origen de coordenadas hasta el punto más próximo que tenga la tangente vertical.

2552. Demostrar que la longitud del arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ correspondiente al período del seno, es igual a la longitud de la elipse cuyos semiejes son iguales a $\sqrt{2}$ y 1.

2553. Mostrar que la longitud del arco de la cicloide «acortada» o «alargada» $x = mt - n \operatorname{sen} t$, $y = m - n \cos t$ (m y n son números positivos) en el intervalo desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = 2\pi$ es igual a la de la elipse cuyos semiejes son $a = m + n$, $b = |m - n|$.

2554*. Demostrar que la longitud de la elipse de semiejes a y b satisface las desigualdades $\pi(a + b) < L < \pi\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2}$ (problema de I. Bernoulli).

Volumen del cuerpo

2555. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada por la revolución de la parábola $y^2 = 4x$ alrededor de su eje (paraboloide de revolución) y por el plano perpendicular a su eje que dista una unidad del vértice de la parábola.

2556. Una elipse cuyo eje mayor es de $2a$ y el menor, de $2b$ gira alrededor: 1) del eje mayor; 2) del eje menor. Hallar el volumen de los elipsoides de revolución engendrados. En caso particular calcular el volumen de la esfera.

2557. Un segmento parabólico simétrico cuya base es igual a a y la altura, h, gira alrededor de su base. Calcular el volumen del cuerpo de revolución engendrado («limón» de Cavalieri).

2558. Una figura limitada por la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ y la recta $x = a + h$ $(h > 0)$, gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo de revolución.

2559. Un trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = xe^x$ y las rectas $x = 1$, $y = 0$, gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2560. La catenaria $y = \operatorname{ch} x$ gira alrededor del eje de abscisas siendo engendrada una superficie llamada *catenoide*. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la catenoide y dos planos que distan a y b unidades desde el origen y que son perpendiculares al eje de abscisas.

2561. Una figura limitada por los arcos de las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$, gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

2562. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje de abscisas del trapecio que se halla situado encima del eje Ox y que viene limitado por la línea $(x-4)\,y^2 = x\,(x-3)$.

2563. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = \arcsin x$ y cuya base es $[0, 1]$.

2564. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje de ordenadas de la figura limitada por la parábola $y = 2x - x^2$ y el eje de abscisas.

2565. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por el trapecio mixtilíneo que gira alrededor del eje de ordenadas y que está limitado por el arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ correspondiente al semiperíodo.

2566. La lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$ gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada.

2567. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la figura que gira alrededor del eje de abscisasas y está limitada por la línea: 1) $x^4 + y^4 = a^2x^2$; 2) $x^4 + y^4 = x^3$.

2568. Un arco de la cicloide $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ gira alrededor de su base. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada.

2569. La figura limitada por un arco de la cicloide (véase el ejercicio anterior) y por la base de ésta, gira alrededor de la recta perpendicular al centro de la base (eje de simetría). Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2570. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ alrededor de su eje de simetría.

2571. La figura limitada por el arco de la línea $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\operatorname{sen}^3 t$ (evoluta de la elipse) situada en el primer cuadrante, y por los ejes de coordenadas, gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2572. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie del huso infinito engendrado por la revolución de la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ alrededor de su asíntota.

2573. La línea $y^2 = 2exe^{-2x}$ gira alrededor de su asíntota. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada.

2574*. 1) La figura limitada por la línea $y = e^{-x^2}$ y la asíntota de ésta gira alrededor del eje de ordenadas. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

2) La misma figura gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2575*. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada al girar la línea $y = x^2e^{-x^2}$ alrededor de su asíntota.

2576*. La figura limitada por la línea $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y el eje de abscisas, gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

2577*. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada al girar la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ $(a > 0)$ alrededor de su asíntota.

2578. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada al girar la tractriz $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \operatorname{sen} t$ alrededor de su asíntota.

2579*. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2580. 1) Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ y el plano $z = 1$.

2) Hallar el volumen del cuerpo limitado por el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ y por los planos $z = -1$ y $z = 2$.

2581. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por el paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ y el elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

2582. Hallar los volúmenes de los cuerpos engendrados al cortarse el hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ y el elipsoide $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

2583. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie cónica $(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$ y el plano $z = 0$.

2584. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ y el cono $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

2585*. Hallar el volumen del cuerpo cortado de un cilindro circular por el plano que pasa por el diámetro de la base («segmento cilíndrico», véase la fig. 43). En particular, poner $R = 10$ cm y $H = 6$ cm.

2586. Un cilindro parabólico está cortado por dos planos uno de los cuales es perpendicular a la generatriz. Como resultado se obtiene un cuerpo mostrado en la fig. 44. La base común de los segmentos parabólicos es $a = 10$ cm, la altura del mismo segmento que

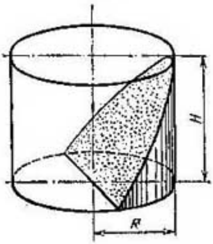

Fig. 43

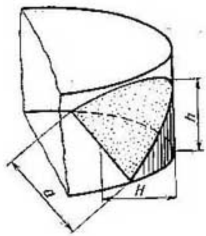

Fig. 44

está en la base, es $H = 8$ cm, la altura del cuerpo h es de 6 cm. Calcular el volumen del cuerpo.

2587. Un cilindro cuya base es una elipse está cortado por un plano inclinado que pasa por el eje menor de la elipse. Calcular el

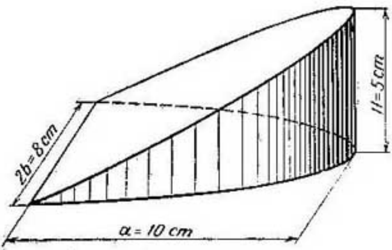

Fig. 45

volumen del cuerpo engendrado. La fig. 45 presenta las dimensiones lineales.

2588*. En todas las cuerdas de un círculo de radio R paralelas a una misma dirección están construidos segmentos parabólicos simétricos de altura constante H. Los planos de éstos son perpendiculares al plano de la circunferencia. Hallar el volumen del cuerpo engendrado de esta manera.

2589. Un cono circular recto de radio R y de altura H está cortado en dos partes por un plano que pasa por el centro de la base paralelamente a la generatriz (véase la fig. 46). Hallar los volúmenes de las dos partes del cono. (Las secciones del cono por los planos paralelos a la generatriz son segmentos parabólicos.)

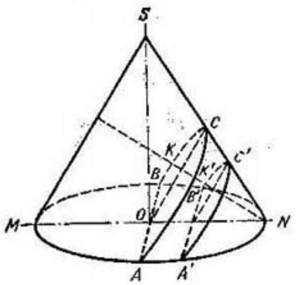

Fig. 46

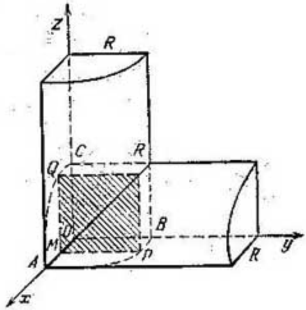

Fig. 47

2590. El centro de un cuadrado de dimensiones variables se desplaza a lo largo del diámetro de un círculo de radio a. Al mismo tiempo el plano en que se halla el cuadrado sigue siendo perpendicular al del círculo y dos vértices opuestos del cuadrado se desplazan sobre la circunferencia. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por este cuadrado que se halla en movimiento.

2591. Un círculo de radio variable se desplaza de tal modo que uno de los puntos de su circunferencia sigue en el eje de abscisas, mientras que su centro avanza sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, y el plano del mismo es perpendicular al eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2592. Los ejes de dos cilindros iguales se cortan formando el ángulo recto. Hallar el volumen del cuerpo que forma parte común del

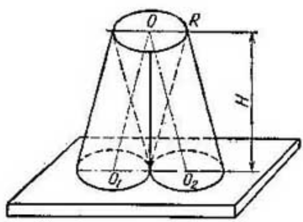

Fig. 48

cilindro (la fig. 47 presenta 1/8 del cuerpo). (Examinar las secciones engendradas por los planos paralelos a los ejes de los dos cilindros).

2593. Dos cilindros inclinados tienen la misma altura H, la base superior común de radio R y sus bases inferiores se tocan (véase la fig. 48). Hallar el volumen de la parte común de los cilindros.

Area de la superficie de revolución

2594. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución de la parábola $y^2 = 4ax$ alrededor del eje de abscisas desde el vértice hasta el punto cuya abscisa es $x = 3a$.

2595. Calcular el área de la superficie engendrada por la revolución de la parábola cúbica $3y - x^3 = 0$ alrededor del eje de abscisas (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = a$).

2596. Calcular el área de la catenoide, superficie engendrada por la revolución de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ alrededor del eje de abscisas (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = a$).

2597. Al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor de su eje mayor es engendrada la superficie llamada elipsoide alargado de revolución, mientras cuando gira alrededor de su eje menor es engendrada la superficie llamada elipsoide acortado de revolución. Hallar las áreas de las superficies de los elipsoides alargado y acortado.

2598. Calcular el área de la superficie fusiforme engendrada por la revolución de un arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje de abscisas.

2599. El arco del tangensoide $y = \operatorname{tg} x$ desde su punto $(0, 0)$ hasta su punto $(\pi/4, 1)$ gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el área de la superficie engendrada.

2600. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje de abscisas del lazo de la línea $9ay^2 = x(3a - x)^2$.

2601. El arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ que se halla en el primer cuadrante gira alrededor de la cuerda que lo subtiende. Calcular el área de la superficie engendrada.

2602. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje de abscisas del arco de la línea $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$ desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = \pi/2$.

2603. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ alrededor del eje de abscisas.

2604. El arco de la cicloide gira alrededor de su eje de simetría. Hallar el área de la superficie engendrada (véase el ejercicio 2568).

2605. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ alrededor de su eje polar.

2606. La circunferencia $\rho = 2r \operatorname{sen}\varphi$ gira alrededor del eje polar. Hallar el área de la superficie engendrada.

2607. La lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ gira alrededor del eje polar. Hallar el área de la superficie engendrada.

2608. El arco infinito de la línea $y = e^{-x}$ correspondiente a los valores positivos de x, gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el área de la superficie engendrada.

2609. La tractriz $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a \operatorname{sen} t$ gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el área de la superficie infinita engendrada.

Momentos y centro de gravedad)*

2610. Calcular el momento estático de un rectángulo de base a y la altura h con respecto a su base.

2611. Calcular el momento estático de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos son iguales a a, con respecto a cada uno de sus lados.

2612. Demostrar que se verifica la siguiente fórmula:

$$\int_a^b (ax+b)\, f(x)\, dx = (a\xi + b)\int_a^b f(x)\, dx,$$

donde ξ es la abscisa del centro de gravedad del trapecio mixtilíneo de base $[a, b]$ limitado por la línea $y = f(x)$.

2613. Hallar el centro de gravedad de un segmento parabólico de base a y la altura h.

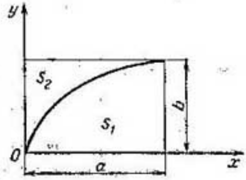

Fig. 49

2614. Un rectángulo de lados a y b está dividido en dos partes por el arco de una parábola cuyo vértice coincide con uno de los vértices del rectángulo y que pasa por el vértice opuesto de éste (véase la fig. 49). Hallar el centro de gravedad de las dos partes S_1 y S_2 del rectángulo.

2615. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

* En todos los ejercicios de esta parte (2610—2662) la densidad se toma igual a 1.

2616. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del semicírculo limitado por el eje de abscisas y la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

2617. Hallar el centro de gravedad del arco de la circunferencia de radio R, el cual subtiende el ángulo central α.

2618. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por los ejes de coordenadas y la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

2619. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por los ejes de coordenadas y el arco de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que se halla en el primer cuadrante.

2620. Hallar el momento estático del arco de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ el cual se halla en el primer cuadrante, con respecto al eje de abscisas.

2621. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por el arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ y el segmento del eje de abscisas (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = \pi$).

En los ejercicios 2622—2624 hallar el momento estático de la figura limitada por las líneas dadas, con respecto al eje de abscisas.

2622. $y = \frac{2}{1+x^2}$ e $y = x^2$,

2623. $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \frac{1}{2}$ (para un segmento).

2624. $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

2625. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = ax^3 - x^4$.

2626. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ comprendida entre los puntos cuyas abscisas son $x_1 = -a$ y $x_2 = a$.

2627. Demostrar que el momento estático de un arco cualquiera de la parábola, con respecto al eje de la misma, es proporcional a la diferencia de los radios de curvatura en los puntos extremos del arco. El coeficiente de proporcionalidad es igual a $p/3$, donde p es el parámetro de la parábola.

2628. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del primer arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2629. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por el primer arco de una cicloide y el eje de abscisas.

2630. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ el cual se halla en el primer cuadrante.

2631. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por los ejes de coordenadas y el arco de una astroide el cual se halla en el primer cuadrante.

2632. Demostrar que la asbcisa y la ordenada del centro de gravedad del sector limitado por dos radios polares y por la línea cuya ecuación se da en las cooredenadas polares $\rho = \rho(\varphi)$, vienen expresadas del modo siguiente:

$$x = \frac{2}{3}\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos\varphi \, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \, d\varphi}, \qquad y = \frac{2}{3}\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \, d\varphi}.$$

2633. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del sector limitado por una semiespira de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ (desde $\varphi_1 = 0$ hasta $\varphi_2 = \pi$).

2634. Hallar el centro de gravedad de un sector circular de radio R cuyo ángulo central es igual a 2α.

2635. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad de la figura limitada por la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

2636. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad de la figura limitada por el lazo derecho de la lemniscata de Bernoulli $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

2637. Mostrar que las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del arco de la línea cuya ecuación es dada en las coordenadas polares $\rho = \rho(\varphi)$, vienen expresadas del modo siguiente:

$$y = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi 2} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\varphi}, \qquad y = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \operatorname{son}\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\varphi}.$$

2638. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del arco de la espiral logarítmica $\rho = ae^{\varphi}$ (desde $\varphi_1 = \pi/2$ hasta $\varphi_2 = \pi$).

2639. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del arco de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (desde $\varphi_1 = 0$ hasta $\varphi_2 = \pi$).

2640. ¿A qué distancia del centro geométrico se halla el centro de gravedad de la semiesfera de radio R?

2641. Hallar el centro de gravedad de la superficie de la semiesfera.

2642. Sea dado un cono circular recto cuyo radio de base es R y la altura H. Hallar la distancia que media entre la base del cono y el centro de gravedad de su superficie lateral, de su superficie total y de su volumen.

2643. ¿Qué distancia media entre la base y el centro de gravedad de un cuerpo, de altura h, limitado por un paraboloide de revolución y un plano perpendicular a su eje?

2644. Hallar el momento de inercia del segmento $AB = l$ con respecto al eje que se halla en el mismo plano. El extremo A del segmento dista a unidades del eje, el extremo B del segmento dista b unidades del eje.

2645. Hallar el momento de inercia de una circunferencia de radio R con respecto a su diámetro.

2646. Hallar el momento de inercia del arco de la línea $y = e^x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$, con respecto al eje de abscisas.

2647. Calcular el momento de inercia, con respecto a los dos ejes de las coordenadas, de un arco de la cicloide $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

2648. Hallar el momento de inercia de un rectángulo de lados a y b con respecto a su lado a.

2649. Hallar el momento de inercia de un triángulo de base a y la altura h con respecto a:

1) la base;

2) la recta que siendo paralela a la base pasa por el vértice;

3) la recta que siendo paralela a la base, pasa por el centro de gravedad del triángulo.

2650. Hallar el momento de inercia de un semicírculo de radio R, con respecto a su diámetro.

2651. Hallar el momento de inercia de un círculo de radio R, con respecto a su centro.

2652. Hallar el momento de inercia de una elipse de semiejes a y b, con respecto a los dos ejes de la misma.

2653. Hallar el momento de inercia de un cilindro cuyo radio de base es igual a R y la altura H, con respecto a su eje.

2654. Hallar el momento de inercia de un cono cuyo radio de base es igual a R, la altura H, con respecto a su eje.

2655. Hallar el momento de inercia de una esfera de radio R, con respecto a su diámetro.

2656. Una elipse gira alrededor de uno de sus ejes. Hallar el momento de inercia del cuerpo engendrado (elipsoide de revolución), con respecto al eje de su revolución.

2657. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje de revolución, de un paraboloide de revolución cuyo radio de base es R y la altura, H.

2658. Calcular el momento de inercia, con respecto al eje Oz, del cuerpo limitado por el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{x} - z^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 1$.

2659. El trapecio mixtilíneo limitado por las líneas $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ gira alrededor

1) del eje Ox, 2) del eje Oy.

Calcular el momento de inercia del cuerpo engendrado, con respecto al eje de revolución.

2660. Hallar el momento de inercia de la superficie lateral de un cilindro cuyo radio de base es R y la altura, H, con respecto a su eje.

2661. Hallar el momento de inercia de la superficie lateral de un cono cuyo radio de base es R y la altura, H, con respecto a su eje.

2662. Hallar el momento de inercia de la superficie de una esfera de radio R, con respecto a su diámetro.

Teoremas de Guldin

2663. Un hexágono regular, de lado a, gira alrededor de uno de sus lados. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2664. Una elipse cuyos ejes son $AA_1 = 2a$ y $BB_1 = 2b$ gira alrededor de una recta paralela al eje AA_1, que dista $3b$ del mismo. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2665. Una astroide gira alrededor de una recta que atraviesa dos picos contiguos. Hallar el volumen y la superficie del cuerpo engendrado (véase el ejercicio 2630).

2666. La figura engendrada por los primeros arcos de las cicloides

$$x = a\,(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = a\,(1 - \cos t)$$

y

$$x = a\,(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = -a\,(1 - \cos t)$$

gira alrededor del eje de ordenadas. Hallar el volumen y la superficie del cuerpo engendrado.

2667. Un cuadrado gira alrededor de una recta que se halla en el mismo plano pasando por uno de sus vértices. ¿Cuál ha de ser la posición de la recta respecto al cuadrado para que el volumen del cuerpo de revolución engendrado sea máximo? La misma pregunta respecto al triángulo.

§ 2. Algunos problemas de física

2668. La velocidad del cuerpo es dada por la fórmula $v = \sqrt{1 + t}$ m/s. Hallar la distancia recorrida por el cuerpo en los primeros 10 s al comenzar el movimiento.

2669. Cuando se efectúa el movimiento armónico oscilatorio a lo largo del eje de abscisas, cerca del origen de coordenadas, la velocidad $\frac{dx}{dt}$ viene dada por la fórmula

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$$

donde t es el tiempo; T, período de oscilación; φ_0, fase inicial. Hallar la posición del punto en el momento t_2 si es sabido que en el momento t_1 se halló en el punto $x=x_1$.

La fórmula $f=k\frac{mM}{r^2}$, donde m y M son las masas de los puntos, r, la distancia que media entre éstos, y k, coeficiente de proporcionalidad igual a $6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot \mathrm{s}^2}$ (ley de Newton) establece la fuerza f de interacción de las masas de dos puntos. Tomando esto en consideración resolver los problemas de los ejercicios 2670—2678. (La densidad se supone constante.)

2670. La barra AB, de longitud l y de masa M, ejerce la atracción sobre el punto C de masa m el cual se halla en la prolongación de la barra. Entre el punto C y el extremo más próximo B de la barra media la distancia a. Hallar la fuerza de interacción de la barra y el punto. ¿Qué masa puntual debe ser colocada en A para que ésta actúe sobre C con la misma fuerza que la barra AB? Considerar el caso de un punto que se halla en la prolongación de la barra y primero dista r_1 de la barra misma. Después, desplazándose a lo largo de la recta, que constituye la prolongación de la barra, el citado punto va acercándose a la misma, resultando entre ambos la distancia r_2. ¿Qué trabajo realiza la fuerza de atracción en este caso?

2671. ¿Cuál es la fuerza con que el semianillo de radio r y de masa M ejerce su acción sobre el punto material de masa m, que se halla en su centro?

2672. ¿Cuál es la fuerza con que el anillo de alambre, de masa M y de radio R, ejerce su acción sobre el punto material C de masa m que se halla en la recta que pasa por el centro del anillo perpendicular a su plano? La distancia entre el citado punto y el centro del anillo es igual a a. ¿Qué trabajo realizaría la fuerza de atracción al desplazarse el punto desde el infinito hasta el centro del anillo?

2673. Aplicando el resultado del ejercicio anterior calcular la fuerza con que un disco plano, de radio R y de masa M, ejerce su acción sobre el punto material de masa m que se halla en su eje, distando a del centro.

2674. Aplicando el resultado del ejercicio anterior calcular la fuerza con que un plano infinito en el cual la masa, de densidad superficial σ, está distribuida uniformemente, ejerce su acción sobre el punto material de masa m. La distancia entre el punto y el plano es a.

2675. Existe un cono recto circular truncado cuyos radios de base son R y r, la altura, h, la densidad, γ. En su vértice está colocado un punto material de masa m. ¿Cuál es la fuerza de la acción que es ejercida por el cono sobre dicho punto?

2676. ¿Cuál es la atracción que ejerce la línea quebrada material $y = |x| + 1$ sobre el punto material, de masa m, que se halla en el origen de coordenadas? (La densidad lineal es igual a γ.)

2677. Demostrar que la línea material quebrada $y = a|x| + 1$ $(a \geqslant 0)$ ejerce la atracción sobre un punto material que se halla en el origen de coordenadas. Dicha atracción no depende de a, es decir, de la abertura del ángulo entre los lados de la línea quebrada.

2678*. Dos barras iguales, siendo cada una de longitud l y de masa M, pertenecen a una misma recta, midiando entre ellas la distancia l. Calcular su atracción mutua.

2679. Bajo la acción de la gravedad una gota de masa inicial M efectúa la caída. Al mismo tiempo va evaporándose uniformemente perdiendo, por segundo, una masa igual a m. ¿Cuál es el trabajo realizado por la gravedad desde que comenzó la caída hasta que la gota quedó completamente evaporada? (Se prescinde de la resistencia del aire.)

2680. ¿Cuál es el trabajo que se debe realizar para amontonar la arena en forma de cono truncado, de altura H, cuyos radios de base sean R y r $(r < R)$? El peso específico es igual a d (la arena se hace desplazar levantándola del suelo, en el que se apoya la base mayor del cono).

2681. Las dimensiones de la pirámide de Cheops son aproximadamente las siguientes: la altura es de 140 m, la arista de la base (del cuadrado), 200 m. El peso específico de la piedra empleada en la construcción es igual aproximadamente a 2,5 gf/cm^3. Calcular el trabajo realizado durante la construcción para superar la gravedad.

2682. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar el agua de un recipiente cilíndrico, de altura $H = 5$ m cuya base es un círculo de radio $R = 3$m.

2683. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar un líquido, de peso específico d, de un recipiente. Este representa, por su forma, un cono de vértice invertido, cuya altura es H y el radio de la base, R. ¿De qué manera cambia el resultado si el cono tiene su vértice en posición normal?

2684. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar el agua de un recipiente semiesférico de radio $R = 0,6$ m.

2685. La caldera tiene la forma de paraboloide de revolución (véase la fig. 50). El radio de la base es $R = 2$ m, la profundidad de

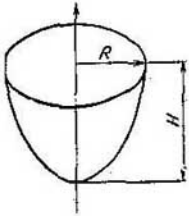

Fig. 50

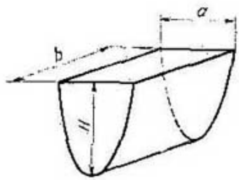

Fig. 51

la caldera, $H = 4$ m. La llena un líquido cuyo peso específico es $d = 0{,}8$ gf/cm^3. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar el líquido.

2686. Hallar el trabajo que ha de ser realizado para sacar el agua de una cisterna que tiene las siguientes dimensiones (véase la fig. 51): $a = 0{,}75$ m, $b = 1{,}2$ m, $H = 1$ m. La superficie lateral de la cisterna representa un cilindro parabólico.

La energía cinética del cuerpo que gira alrededor de un eje in móvil, es igual a $\frac{1}{2} J\omega^2$, donde ω es la velocidad angular, J es el momento de inercia respecto al eje de revolución. Resolver los problemas de los ejercicios 2687—2692, tomando en consideración lo sobredicho.

2687. La barra AB (véase la fig. 52) gira en el plano horizontal alrededor del eje OO' con la velocidad angular $\omega = 10\pi s^{-1}$. La sec-

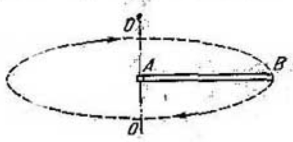

Fig. 52

ción transversal de la barra es $S = 4$ cm^2; la longitud, $l = 20$ cm; la densidad del material de la barra, $\gamma = 7{,}8$ g/cm^3. Hallar la energía cinética de la barra.

2688. Una lámina rectangular cuyos lados miden $a = 50$ cm y $b = 40$ cm, y el grosor es $d = 0{,}3$ cm, gira alrededor del lado a teniendo la velocidad angular ω constante e igual a $3\pi s^{-1}$. Hallar la energía cinética de la lámina. La densidad del material de la lámina $\gamma = 8$ g/cm^3.

2689. Una lámina triangular cuya base es $a = 40$ cm y la altura, $h = 30$ cm, gira alrededor de su base teniendo la velocidad angular ω constante e igual a $\omega = 5\pi$ s^{-1}. Hallar la energía cinética de la lámina tomando en consideración que su grosor $d = 0{,}2$ cm y la densidad del material de la misma $\gamma = 2{,}2$ g/cm^3.

2690. Una lámina en forma del segmento parabólico (véase la fig. 53) gira alrededor del eje de la parábola teniendo la velocidad angular constante e igual a $\omega = 4\pi$ s^{-1}. La base del segmento es $a = 20$ cm; la altura, $h = 30$ cm; el grosor de la lámina, $d = 0{,}3$ cm, la densidad del material $\gamma = 7{,}8$ g/cm^3. Hallar la energía cinética de la lámina.

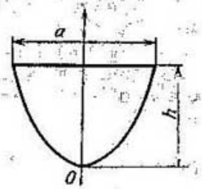

Fig. 53

2691. Un cilindro circular cuyo radio de base es R y la altura H, gira alrededor de su propio eje teniendo la velocidad angular constante e igual a ω. La densidad del material de la lámina es γ. Hallar la energía cinética del cilindro.

2692. Cierto alambre fino, de masa M, ha sido combado adoptando la forma de semicircunferencia de radio R. Va girando alrededor del eje que pasa por los extremos de la semicircunferencia dando n vueltas por minuto. Calcular su energía cinética.

Calcular la energía cinética para el caso en que el eje de revolución es la tangente en el punto medio de la semicircunferencia.

2693. Una lámina en forma de triángulo está sumergida, en posición vertical, en el agua de modo que su base se halla sobre la superficie del agua. La base de la lámina es a, la altura, h.

a) Calcular la fuerza de la presión que ejerce el agua sobre cada uno de los lados de la lámina.

b) ¿En cuánto aumentará la presión si invertimos la lámina de modo que su vértice quede en la superficie y la base sea paralela a la superficie del agua?

2694. Una lámina cuadrada está sumergida, en posición vertical, en el agua de modo que uno de los vértices del cuadrado se halla sobre la superficie del agua, estando en contacto con ella, y una de las diagonales es paralela a la superficie. El lado del cuadrado es igual a a. ¿Cuál es la fuerza de la presión que ejerce el agua sobre cada uno de los lados de la lámina?

2695. Calcular la fuerza de la presión que ejerce el agua sobre la presa que tiene la forma de un trapecio isósceles cuya base superior es $a = 6{,}4$ m; la inferior, $b = 4{,}2$ m, y la altura, $H = 3$ m.

2696. La mitad de una lámina en forma de elipse está sumergida en el líquido, en posición vertical, de modo que uno de sus ejes (cuya longitud es igual a $2b$) se halla sobre la superficie, estando en contacto con ella. ¿Cuál es la fuerza de la presión que ejerce el líquido sobre cada uno de los lados de la lámina? La longitud de la parte sumergida del semieje de la elipse es igual a a; el peso específico del líquido, d.

2697. Una lámina rectangular cuyos lados son a y b ($a > b$) está sumergida en el líquido formándose entre ésta y la superficie del líquido el ángulo α. El lado mayor es paralelo a la superficie y se halla a la profundidad h. Calcular la presión que ejerce el líquido sobre cada uno de los lados de la lámina teniendo en cuenta que el peso específico del líquido es d.

2698. El agua y el aceite (en proporciones iguales) llenan un recipiente rectangular, siendo el peso del aceite dos veces menor que el del agua. Mostrar que la presión sobre cada una de las paredes del recipiente disminuye en una quinta parte si se toma sólo el aceite en vez de la mezcla. (Es necesario tener en cuenta que todo el aceite se halla encima.)

Resolviendo los problemas de los ejercicios 2699—2700 hace falta apoyarse en el principio de Arquímedes que dice lo siguiente: la fuerza de empuje ascensional que ejerce su acción sobre el sólido sumergido en un fluido es igual al peso del fluido desalojado.

2699. Un flotador de madera y de forma cilíndrica cuya superficie de base es $S = 4000$ cm^2 y la altura, $H = 50$ cm, flota sobre la superficie del agua. El peso específico de la madera es $d = 0{,}8$ gf/cm^3. a) ¿Qué trabajo ha de ser realizado para sacar el flotador del agua? b) Calcular el trabajo que hace falta realizar para sumergir el flotador de modo que lo cubra el agua?

2700. Una esfera de radio R y de peso específico 1 está sumergida en el agua de modo que está en contacto con la superficie. ¿Qué trabajo ha de ser realizado para sacar la esfera del agua?

Los problemas de los ejercicios 2701—2706 tratan el fenómeno de la salida de fluidos de un orificio pequeño. La velocidad con que el líquido sale del orificio la determina la ley de Torricelli: $v = \sqrt{2gh}$, donde h es la altura de la columna del líquido sobre el orificio y g es la aceleración de la gravedad*).

*) La forma en que la ley de Torricelli se da aquí, es aplicable sólo al líquido ideal. Es a este líquido ideal al que se dan respuestas a los problemas. (En la práctica hacen uso de la fórmula $v = \mu\sqrt{2gh}$, donde μ es el coeficiente que depende de la viscosidad del líquido y la naturaleza del orificio del que sale el líquido. En el caso más sencillo del agua $\mu = 0{,}6$.)

2701. Un recipiente cilíndrico cuya superficie de la base es de 100 cm, y la altura 30 cm, tiene practicado un orificio. Calcular la superficie de éste si se sabe que el agua que llena el recipiente invierte 2 min en salir de él.

2702. El agua llena un embudo cónico de altura $H = 20$ cm. El radio de la parte superior es $R = 12$ cm. De la parte inferior, que tiene el orificio de radio $r = 0{,}3$ cm, comienza a salir el agua. a) ¿Cuánto tiempo se invierte para que el nivel del agua baje en 5 cm? b) ¿Cuándo quedará vacío el embudo?

2703. La caldera ofrece la forma de semiesfera de radio $R = 43$ cm. En su fondo se ha producido una abertura de superficie $S = 0{,}2$ cm². ¿Cuánto tiempo debe invertir el agua, que llena la caldera, para salir de ésta?

2704. La caldera ofrece la forma de cilindro elíptico de eje horizontal (véase la fig. 54). Los semiejes de la sección elíptica (que es

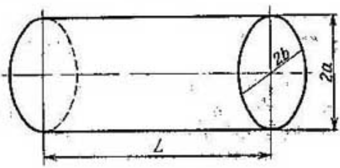

Fig. 54

perpendicular al eje del cilindro) son iguales a b (horizontal) y a (vertical). La generatriz del cilindro es igual a L. El agua llena hasta la mitad la caldera que tiene practicada en su fondo un orificio de superficie S. ¿Cuánto tiempo debe invertir el agua en salir de la caldera a través de este orificio?

2705. Un recipiente prismático, lleno de agua, tiene practicado en su pared vertical una hendidura rectangular vertical cuya altura es igual a h y la anchura, b. Entre el borde superior de la hendidura, paralelo a la superficie del agua, y esta última media la distancia H. ¿Cuánta cantidad del agua sale del recipiente por segundo si el nivel del agua se mantiene a la misma altura? Considerar el caso en que $H = 0$ (problema sobre el desagüe).

2706. Un recipiente lleno de agua hasta los bordes, ofrece la forma de paralelepípedo cuya base tiene el área igual a 100 cm². En su pared vertical hay una hendidura, de altura igual a 20 cm y la anchura igual a 0,1 cm (véase la fig. 55). ¿Cuánto tiempo se invierte para que el nivel del agua en el recipiente disminuya en a) 5 cm, b) 10 cm, c) 19 cm, d) 20 cm? (Aplicar el resultado del ejercicio anterior.)

La ecuación del gas perfecto es la siguiente: $pv = RT$, en la cual p es la presión, v, el volumen, T, la temperatura absoluta y R, la constante del volumen dado del gas. Resolver los problemas de los ejercicios 2707—2709 considerando los gases como perfectos.

2707. Un cilindro cuya base es de área igual a 10 cm², y la altura, igual a 30 cm, contiene el aire atmosférico. ¿Qué trabajo ha de ser realizado para que el émbolo penetre dentro del cilindro 20 cm, o sea,

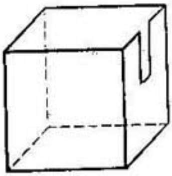

Fig. 55

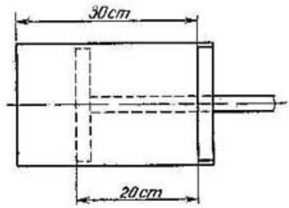

Fig. 56

debe ser introducido en el cilindro de modo que entre el fondo de éste y el émbolo medie 10 cm (véase la fig. 56)? La presión atmosférica es igual a 1,033 kgf/cm². El proceso se efectúa de manera isotérmica, es decir, a temperatura constante. (Para obtener el valor del trabajo en kgm hace falta tomar la presión en kgf/m² y el volumen en m³.)

2708. Un recipiente cilíndrico cuya sección transversal es igual a 100 cm², contiene el aire bajo presión atmosférica. Dentro está colocado un émbolo, mediando entre éste y el fondo del recipiente la distancia inicial igual a 0,1 m. El cilindro se encuentra en el vacío debido a lo cual se produce la expansión del aire contenido dentro, el cual desaloja el émbolo. 1) Calcular el trabajo realizado por el aire dentro del cilindro cuando hace ascender el émbolo a la altura de a) 0,2 m, b) 0,5 m, c) 1 m. 2) ¿Puede el trabajo aumentar sin límites al dilatarse el gas infinitamente? (Igual que en el ejercicio anterior, el proceso se efectúa de manera isotérmica.)

2709. El recipiente cilíndrico cuyo volumen $v_0 = 0,1$ m³ contiene el aire atmosférico el cual es sometido a la compresión al introducir, de manera muy rápida, un émbolo dentro (consideramos que el proceso se efectúa sin ser recibida ni cedida ninguna cantidad del calor, o sea, es adiabático). ¿Qué trabajo ha de ser realizado para comprimir el aire contenido en el recipiente reduciéndolo al volumen $v = 0,03$ m³? (La presión atmosférica es igual a 1,033 kgf/cm².) La presión del gas y el volumen que ocupa en el proceso adiabático forman la relación $pv^{\gamma} = p_0 v_0^{\gamma}$ (ecuación de Poisson). Para los gases diatómicos (también para el aire) $\gamma \approx 1,40$.

Según la ley de Newton, la velocidad con que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura a que se halla y la temperatura del medio que lo rodea. Partiendo de este principio, resolver los problemas de los ejercicios 2710—2711.

2710. Un cuerpo cuya temperatura es igual a 25°, está sumergido en el termostato (su temperatura se mantiene igual a 0°). ¿Cuánto tiempo debe ser invertido para que el cuerpo se enfríe hasta 10° si en 20 min se enfría hasta 20°?

2711. Un cuerpo cuya temperatura es igual a 30°, se enfría hasta 22,5° al permanecer 30 min en el termostato que se halla a la temperatura 0°. ¿Cuál sería la temperatura del cuerpo al cabo de 3 horas al comenzar el experimento?

Según la ley de Coulomb, la fuerza de interacción de dos cargas eléctricas es igual a $\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$ newtons, donde q_1 y q_2 son los valores de las cargas en culombios, r, la distancia que media entre las cargas, en m, la constante dieléctrica $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m ($4\pi\varepsilon_0 = 1{,}11 \times \times 10^{-10}$), ε, la permitividad del medio respecto al vacío (para el aire $\varepsilon \approx 1$). (Sistema racionalizado MKSA.) Partiendo de esta ley, resolver los problemas de los ejercicios 2712—2714.

2712. Una recta infinita está cargada uniformemente de electricidad positiva (la densidad lineal de carga eléctrica es σ). ¿Cuál es la fuerza con que obra dicha recta sobre una carga unitaria que se halla en el punto A mediando entre ambos la distancia a? La permitividad del medio es igual a 1.

2713. Entre dos cargas eléctricas $q_1 = 6{,}67 \cdot 10^{-9}$ C y $q_2 = 10 \cdot 10^{-9}$ C media la distancia igual a 10 cm. El aire sirve de medio que las separa. Al principio, las dos cargas han estado fijas, luego, se ha liberado la carga q_2, que comienza a desplazarse, bajo la acción de la repulsión, alejándose de la carga q_1. ¿Qué trabajo es realizado por la repulsión cuando la carga *a*) se ha alejado mediando entre ambas la distancia igual a 30 cm, *b*) se aleja al infinito?

2714. Entre dos cargas eléctricas $q_1 = 33{,}3 \cdot 10^{-9}$ culombios y $q_2 = 40 \cdot 10^{-9}$ culombios media la distancia igual a 20 cm. ¿Qué distancia mediará entre las cargas si acercamos la segunda hacia la primera realizando el trabajo igual a $18 \cdot 10^{-5}$ julios? (El medio que las separa es el aire).

2715. La tensión en los bornes del circuito eléctrico es $V = 120$ V. Uniformemente en el circuito se introduce una resistencia a 0,1 ohmio por segundo. Además, el circuito está conectado con la resistencia fija $r = 10$ ohmios. ¿Cuántos culombios de electricidad pasarán por el circuito durante dos minutos?

2716. Al principio, la tensión en los bornes del circuito era igual a 120 V, decreciendo después poco a poco en 0,01 V por segundo. Simultáneamente, en el mismo circuito se introduce una resistencia a 0,1 ohmio por segundo, lo cual representa también una velocidad constante. Además de ello, el circuito tiene la resistencia fija igual a 12 ohmios. ¿Cuántos culombios de electricidad pasarán por el circuito en 3 min?

2717. Al cambiar la temperatura, la resistencia de los conductores de metal varía (a temperaturas ordinarias) según la ley $R = R_0(1 + 0{,}004\vartheta)$, en la cual R_0 es la resistencia a 0° C y ϑ es la temperatura en grados Celsio. (Esta ley es válida para la mayoría de los metales puros.) La resistencia del conductor es igual a 10 ohmios a 0° C, éste se va calentando uniformemente desde $\vartheta_1 = 20°$ hasta $\vartheta_2 = 200°$ durante 10 min. Al mismo tiempo, pasa por el conductor la corriente cuya tensión es igual a 120 V. ¿Cuántos culombios de electricidad pasará por el conductor durante este mismo espacio del tiempo?

2718. La ley de la variación de la tensión de la corriente sinusoidal cuya frecuencia es ω, se expresa con la fórmula siguiente: $E = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, en la cual E_0 es la tensión máxima; φ, la fase; t, el tiempo. Hallar el valor medio del cuadrado de la tensión en 1 período. Mostrar que la corriente alterna desprende en 1 período, siendo la resistencia fija, la misma cantidad de calor que la continua cuya tensión es igual a $\sqrt{(E^2)_{\text{med}}}$. (Debido a ello, la expresión $\sqrt{(E^2)_{\text{med}}}$ se la llama la tensión efectiva de la corriente alterna.)

2719. La tensión de la corriente sinusoidal se expresa con la fórmula

$$E = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

y la corriente, con la fórmula

$$I = I_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)$$

en la cual E_0 e I_0 son constantes (los valores máximos de la tensión y de la corriente); T, el período, φ_0, la así llamada diferencia de fase. Calcular el trabajo realizado por la corriente durante el espacio del tiempo desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = T$ y mostrar que este trabajo alcanza su valor máximo cuando la diferencia de fase φ_0 es igual a cero.

2720. Hallar el tiempo durante el cual el aparato eléctrico calienta 1 kg de agua desde 20 hasta 100° C, si la tensión de la corriente es igual a 120 V, la resistencia de la espiral, 14,4 ohmios, la temperatura del aire en la habitación, 20° C, y si también es sabido que 1 kg de agua se enfría desde 40 hasta 30° C en 10 min. (Según la ley de Joule — Lenz, $Q = I^2Rt$, donde Q es la cantidad de calor en julios, I, la corriente en amperios, R, la resistencia en ohmios, t, el tiempo en segundos; el calor específico del agua es 4190 $\frac{\text{julios}}{\text{kg}\cdot\text{grados}}$. Además de ello, aplicar la ley de Newton sobre el enfriamiento, véase el ejercicio 2710.)

2721. El aire que ocupa un recipiente cuya cabida es de 3 l, contiene 20% del oxígeno. El recipiente, que tiene dos tubos, recibe a través de uno de ellos, el oxígeno puro, mientras que a través del otro, sale la misma cantidad del aire. ¿Cuánta cantidad del oxígeno va a contener el recipiente después de que hayan pasado por él 10 l del gas?

2722. El aire contiene $a\%$ $(= 8\%)$ CO_2. Se le hace pasar por un recipiente cilíndrico que contiene masa absorbente cuya capa fina absorbe la cantidad del gas proporcional a su concentración y su grosor. a) Si el aire que ha atravesado la capa de H cm $(= 10$ cm$)$ de grosor, contiene $b\%$ $(= 2\%)$ de CO_2, ¿de qué grosor H_1 debe ser la capa absorbente para que el aire después de atravesar el absorbedor, contenga sólo $c\%$ $(= 1\%)$ del ácido carbónico? b) ¿Cuánta cantidad (en %) queda en el aire que ha atravesado la capa absorbente si su grosor es igual a 30 cm?

2723. Cuando la luz atraviesa una capa de agua igual a 3 m, se pierde la mitad de su cantidad inicial. ¿Cuánta cantidad de la luz llega a la profundidad de 30 m? La cantidad de la luz que es absorbida al atravesar una capa fina de agua, es proporcional al grosor de la capa y a la cantidad de la luz que incide sobre su superficie.

2724. Si la cantidad inicial del fermento, igual a 1 g, al cabo de una hora llega a ser igual a 1,2 g, ¿a qué será igual al cabo de 5 horas al comenzar la fermentación si se considera que la velocidad del incremento del fermento es proporcional a su cantidad disponible?

2725. ¿Cuál era la cantidad inicial del fermento si al cabo de dos horas de haber comenzado la fermentación la cantidad disponible del fermento era igual a 2 g, mientras que al cabo de tres horas era igual a 3 g? (Véase el ejercicio anterior.)

2726. 2 kg de la sal se echan en 30 l del agua. Al cabo de 5 min 1 kg de la sal queda disuelto. ¿Cuánto tiempo tarda en disolverse el 99% de la cantidad inicial de la sal? (La velocidad de la disolución es proporcional a la cantidad de la sal no disuelta y a la diferencia entre la concentración de la disolución saturada, igual a 1 kg por 3 l, y la concentración de la disolución en el momento dado.)

Capítulo IX

Series

§ 1. Series numéricas

Convergencia de la serie numérica

En los ejercicios 2727—2736 para cada serie: 1) hallar la suma de los n primeros términos de la serie (S_n), 2) demostrar la convergencia de la serie, partiendo directamente del concepto de convergencia y 3) hallar la suma de la serie (S).

2727*. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2728. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$

2729. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

2730. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)}+\ldots$

2731. $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots$

2732. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$

2733. $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$

2734. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$

2735. $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots$

2736. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot n^2}+\ldots$

Series de términos positivos

En los ejercicios 2737—2753 partiendo de los criterios de comparación determinar si las series dadas son convergentes.

2737. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\,2^{2n-1}}+\ldots$

2738. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2739. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots$

2740. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\ldots$

2741. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)\,n}+\ldots$

2742. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\ldots$

2743. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}+\ldots$

2744. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$

2745. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln (n+1)}+\ldots$

2746. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$.

2747. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

2748. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

2749. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

2750. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

2751. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$.

2752. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

2753. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$.

En los ejercicios 2754—2762 demostrar la convergencia de las series dadas aplicando el criterio de D'Alembert.

2754. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$

2755. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

2756. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots$

2757. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots$

2758. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$

2759. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$

2760. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\ldots+n^2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2761. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots$

2762. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+\ldots$

En los ejercicios 2763—2766 demostrar la convergencia de las series dadas aplicando el criterio de la radical de Cauchy.

2763. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+\ldots$

2764. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{(2n+1)}\right)^n+\ldots$

2765. $\operatorname{arcsen} 1+\operatorname{arcsen}^2\frac{1}{2}+\ldots+\operatorname{arcsen}\frac{1}{n}+\ldots+$

2766. $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots$

En los ejercicios 2767—2770 aclarar si las series dadas son convergentes aplicando el criterio de la integral de Cauchy.

2767. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots$

2768. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$

2769. $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$

2770. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

En los ejercicios 2771—2784 aclarar cuáles de las series dadas son convergentes y cuáles son divergentes.

2771. $\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\ldots$

2772. $1+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

2773. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\ldots$

2774. $1+\frac{4}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n^2}{n!}+\ldots$

2775. $2+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots$

2776. $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}+\ldots$

2777. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\ldots+\frac{n}{1+n^2}+\ldots$

2778. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\ldots+\frac{2n-1}{3n}+\ldots$

2779. $\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg}^2\frac{1}{2}+\ldots+\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n}+\ldots$

2780. $2+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{2^n}{n^4}+\ldots$

2781. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(4n-1)}+\ldots$

2782. $\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\ldots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$

2783. $1+\frac{1\cdot 2}{2^2}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

2784*. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}+\ldots$

En los ejercicios 2785—2789 demostrar cada una de las relaciones mediante una serie cuyo término común sea la función dada.

2785. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$ **2786.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0 \quad (a>1).$

2787. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0.$ **2788.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0.$

2789. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0.$

Otras series. Convergencia absoluta

En los ejercicios 2790—2799 aclarar cuáles de las series dadas son absolutamente convergentes, cuáles son convergentes de manera no absoluta, cuáles son divergentes.

2790. $1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$

2791. $1-\frac{1}{3^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\ldots$

2792. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

2793. $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1}+\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{4}+\ldots+\frac{\operatorname{sen}n\alpha}{n^2}+\ldots$

2794. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$

2795. $2-\frac{3}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}+\ldots$

2796. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

2797. $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}+\ldots$

2798. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

2799. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2}{n!}$.

2800. Mostrar que si las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ son convergentes, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ es absolutamente convergente.

2801. Mostrar que si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}a_n$ también lo será.

§ 2. Series funcionales

Convergencia de las series funcionales

En los ejercicios 2802—2816 determinar los campos de convergencia de las series.

2802. $1 + x + \ldots + x^n + \ldots$

2803. $\ln x + \ln^2 x + \ldots + \ln^n x + \ldots$

2804. $x + x^4 + \ldots + x^{n^2} + \ldots$

2805. $x + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$

2806. $x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \ldots$

2807. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \ldots + \frac{1}{1+x^n} + \ldots$

2808. $2x + 6x^2 + \ldots + n(n+1)x^n + \ldots$

2809. $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x^n}{n+\sqrt{n}} + \ldots$

2810. $\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \ldots + \frac{x^n}{1+x^{2n}} + \ldots$

2811. $\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{4} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{x}{2^n} + \ldots$

2812. $x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + x^2 \operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + x^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n} + \ldots$

2813. $\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} + \ldots$

2814. $\frac{\cos x}{e^x} + \frac{\cos 2x}{e^{2x}} + \ldots + \frac{\cos nx}{e^{nx}} + \ldots$

2815. $e^{-x} + e^{-4x} + \ldots + e^{-n^2 x} + \ldots$

2816. $\frac{x}{e^x} + \frac{2x}{e^{2x}} + \ldots + \frac{nx}{e^{nx}} + \ldots$

Convergencia uniforme (*regular*)

En los ejercicios 2817—2820 demostrar que las series dadas son uniformemente (regularmente) convergentes en todo el eje Ox.

2817. $1 + \frac{\operatorname{sen} x}{1!} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n!} + \ldots$

2818. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2[1+(nx)^2]}$. **2819.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{2^n}$. **2820.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

2821. Mostrar que la serie $\frac{1}{1+[\varphi(x)]^2} + \frac{1}{4+[\varphi(x)]^2} + \ldots$
$\ldots + \frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2} + \ldots$

es uniformemente (regularmente) convergente en cualquier intervalo en que viene definida la función $\varphi(x)$.

2822. Mostrar que la serie $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}+\ldots$
es uniformemente (regularmente) convergente en todo el semieje positivo. ¿Cuántos términos deberíamos tomar para que pudiéramos calcular, para cualquier x no negativa, la suma de la serie con exactitud hasta 0,001?

2823*. Mostrar que la serie $\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x^2}+\ldots$ $\ldots+\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}+\ldots$ es uniformemente convergente en el intervalo $1+\omega\leqslant x<\infty$, donde ω es cualquier número positivo. Quedarse convencido de que para cualquier x del intervalo($2\leqslant x\leqslant 100$) es suficiente tomar ocho términos para obtener la suma de la serie con exactitud hasta 0,01.

2824. Mostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ es convergente de manera no uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

2825. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n}.$$

Mostrar que la función $f(x)$ está definida y es continua para cualquier x. Hallar $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Quedar convencido de que es suficiente tomar tres términos de la serie para calcular valores aproximados de la función $f(x)$, para cualquier x, con exactitud hasta 0,001. Hallar $f(1)$ y $f(-0{,}2)$ con esta misma exactitud.

2826. La funcin $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x+n\omega)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x-n\omega)^2}\quad(\omega>0).$$

Mostrar que la función $f(x)$ está definida y es continua para cualquier x. Quedar convencido de que la función $f(x)$ es periódica cuyo período es ω.

Integración y derivación de las series

2827. Mostrar que la serie $x^2+x^6+\ldots+x^{4n-2}+\ldots$ es uniformemente convergente en el intervalo $-1+\omega\leqslant x\leqslant 1-\omega$, donde ω es cualquier número positivo menor que 1. Integrando la serie dada hallar la suma de la serie

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots$$

en el intervalo $(-1, 1)$.

2828. Hallar la suma de la serie

$$x+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots$$

2829. Hallar la suma de la serie

$$\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots$$

2830. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=e^{-x}+2e^{-2x}+\ldots+ne^{-nx}+\ldots$$

Mostrar que la función $f(x)$ es continua en todo el semieje positivo Ox. Calcular $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx$.

2831. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=1+2\cdot 3x+\ldots+n3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$$

Mostrar que la función $f(x)$ es continua en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Calcular $\int\limits_{0}^{0,125} f(x)\,dx$.

2832*. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}+\ldots$$

Después de haber quedado convencido de que la función $f(x)$ es continua en el intervalo de integración dado, calcular $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

2833*. La función $f(x)$ viene definida por la serie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}$. Mostrar que la función $f(x)$ es continua en todo el eje numérico. Calcular $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$.

2834. Partiendo de la relación $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$ hallar la suma de la serie:

1) $1-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}+\ldots$, 2) $1-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}+\ldots$

2835. Partiendo de la relación $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n2^n}$ hallar la suma de la serie $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n2^n}+\ldots$

2836. Partiendo de la relación

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2},$$

hallar la suma de la serie

$$\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}+\ldots$$

2837. Demostrar que la serie

$$\frac{\operatorname{sen} 2\pi x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 4\pi x}{4}+\ldots+\frac{\operatorname{sen} 2^n\pi x}{2^n}+\ldots$$

es uniformemente convergente en todo el eje numérico. Mostrar que esta serie no es susceptible de ser derivada término a término en ninguno de los intervalos.

2838. Partiendo de la igualdad $1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ sumar las series $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ y $1+3x+\ldots$ $\ldots+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}+\ldots$ y mostrar que la serie $1+2x+\ldots$ $\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ es unifomemente convergente en el intervalo $-\rho, \rho]$, donde $|\rho|<1$.

2839. Mostrar la validez de la igualdad

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\ldots+\frac{mx^{m-1}}{1+x^m}+\ldots=\frac{1}{1-x},$$

donde $m=2^{n-1}$ y $-1<x<1$.

2840. Mostrar que la función $y=f(x)$ definida por la serie $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\ldots$, satisface la relación $xy'=y(x+1)$.

§ 3. Series de potencias

Desarrollo de las funciones en series de potencias

2841. Desarrollar la función $y=\ln x$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=1$ (para $x_0=1$).

2842. Desarrollar la función $y=\sqrt{x^3}$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=1$.

2843. Desarrollar la función $y=1/x$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=3$.

2844. Desarrollar la función $y=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{4}$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=2$.

En los ejercicios 2845—2849 desarrollar las funciones dadas en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ (serie de Maclaurin):

2845. $y=\operatorname{ch} x$. **2846.** $y=x^2e^x$. **2847.** $y=\cos(x+\alpha)$.

2848. $y=e^x\operatorname{sen} x$. **2849.** $y=\cos x\operatorname{ch} x$.

En los ejercicios 2850—2854 hallar los cinco primeros términos de la serie de Taylor para las funciones dadas en el entorno del punto $x=0$.

2850. $y=\ln(1+e^x)$. **2851.** $y=e^{\cos x}$. **2852.** $y=\cos^n x$.

2853. $y=-\ln\cos x$. **2854.** $y=(1+x)^x$.

En los ejercicios 2855—2868 desarrollar las funciones dadas en el entorno del punto $x=0$, aplicando las fórmulas de desarrollo en la serie de Maclaurin de las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ y $(1+x)^m$.

2855. $y=e^{2x}$. **2856.** $y=e^{-x^2}$. **2857.** $y=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} & \text{para } x\neq 0,\\ 1 & \text{para } x=0.\end{cases}$

2858. $y=\begin{cases}\frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{2x^3} & \text{para } x\neq 0,\\ 1 & \text{para } x=0.\end{cases}$ **2859.** $y=\operatorname{sen}\frac{x}{2}$.

2860. $y=\cos^2 x$. **2861.** $y=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{para } x\neq 0.\\ 1 & \text{para } x=0.\end{cases}$

2862. $y=(x-\operatorname{tg} x)\cos x$.

2863. $y=\ln(10+x)$. **2864.** $y=x\ln(1+x)$.

2865. $y=\sqrt{1+x^2}$. **2866.** $y=\sqrt[3]{8-x^3}$.

2867. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. **2868.** $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

2869. Desarrollar la función $y=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ en el entorno del punto $x=0$ en serie de Taylor. Valiéndose de este desarrollo, hallar la suma de la serie $1+\frac{4}{2}+\ldots+\frac{n^2}{2^{n-1}}+\ldots$

2870. Aplicando el desarrollo de la función en serie de Taylor, hallar el valor de:

1) la séptima derivada de la función $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ para $x=0$,

2) la quinta derivada de la función $y=x^2\sqrt[4]{1+x}$ para $x=0$,

3) la décima derivada de la función $y=x^6e^x$ para $x=0$,

4) la curvatura de la línea $y=x\,[\sqrt[3]{(1+x)^4}-1]$ en el origen de coordenadas.

En los ejercicios 2871—2877 calcular los límites, aplicando el desarrollo de las funciones en serie de Taylor:

2871. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}{x^3}$. **2872.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x)-x^3}{x^5}$.

2873. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x(e^x-1)}$.

2874. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. **2875.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

2876. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$. **2877.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3\operatorname{sen} x}-\frac{3}{x^4}\right)$.

Intervalo de convergencia

En los ejercicios 2878—2889 hallar los intervalos de convergencia de series de potencias.

2878. $10x+100x^2+\ldots+10^nx^n+\ldots$

2879. $x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$

2880. $x+\frac{x^2}{20}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}+\ldots$

2881. $1+x+\ldots+n!\,x^n+\ldots$

2882. $1+2x^2+\ldots+2^{n-1}x^{2(n-1)}+\ldots$

2883. $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}+\ldots$

2884. $1+3x+\ldots+(n-1)\,3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$

2885. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$

2886. $x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(nx)^n}{n!}+\ldots$ Analizando la convergencia en el extremo derecho del intervalo conviene tomar en cuenta que las factoriales de números grandes pueden ir expresadas aproximadamente por la fórmula de Stirling:

$$n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}.$$

2887. $x+4x^2+\ldots+(nx)^n+\ldots$

2888. $\frac{\ln 2}{2}x^2+\frac{\ln 3}{3}x^3+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}+\ldots$

2889. $2x+\left(\frac{9}{4}x\right)^2+\ldots+\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n+\ldots$

2890. Desarrollar la función $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ partiendo de la relación

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

2891. Desarrollar la función $y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ partiendo de la relación

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}$$

e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

2892. Desarrollar la función $y=\ln\left[(1+x)^{1+x}\right]+\ln\left[(1-x)^{1-x}\right]$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

2893. Desarrollar la función $y=(1+x)\,e^{-x}-(1-x)\,e^{x}$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida. Valiéndose del desarrollo hallar la suma de la serie

$$\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\ldots+\frac{n}{(2n+1)!}+\ldots$$

§ 4. Algunas aplicaciones de las series de Taylor

Cálculo de valores aproximados de las funciones

2894. Calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{e}$ tomando tres términos del desarrollo de la función $f(x) = e^x$ en serie de Maclaurin, y calcular el error.

2895. Calcular el valor aproximado del sen 18° tomando tres términos del desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en serie de Maclaurin, y calcular el error.

2896. Calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1,25}$ tomando cuatro términos del desarrollo de la función $f(x) = (1+x)^m$ en serie de Maclaurin, y calcular el error.

En los ejercicios 2897—2904 calcular las expresiones que se dan a continuación aplicando la fórmula de desarrollo de las funciones e^x, sen x, cos x en serie de Maclaurin.

2897. e^2 con exactitud hasta 0,001.

2898. $\sqrt{e}$ con exactitud hasta 0,001.

2899. $\frac{1}{e}$ con exactitud hasta 0,0001.

2900. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ con exactitud hasta 0,0001.

2901. sen 1° con exactitud hasta 0,0001.

2902. cos 1° con exactitud hasta 0,001.

2903. sen 10° con exactitud hasta 0,00001.

2904. cos 10° con exactitud hasta 0,0001.

En los ejercicios 2905—2911 calcular las raíces que se dan a continuación con exactitud hasta 0,001, aplicando la fórmula del desarrollo de la función $(1+x)^m$ en serie de Maclaurin.

2905. $\sqrt[3]{30}$. **2906.** $\sqrt[3]{70}$. **2907.** $\sqrt[3]{500}$. **2908.** $\sqrt[3]{1,015}$.

2909. $\sqrt[5]{250}$. **2910.** $\sqrt[3]{129}$. **2911.** $\sqrt[10]{1027}$.

En los ejercicios 2912—2914 calcular las expresiones dadas aplicando la fórmula del desarrollo de la función $\ln\frac{1+x}{1-x}$ en serie de Maclaurin.

2912. ln 3 con exactitud hasta 0,0001.

2913. $\lg e = \frac{1}{\ln 10}$ con exactitud hasta 0,000001.

2914. lg 5 con exactitud hasta 0,0001.

Resolución de ecuaciones

2915. Sea dada la ecuación $xy' + e^x = y$. Aplicando el método de coeficientes indefinidos hallar el desarrollo de la función y en serie de Taylor en potencias de x. Resolviendo el problema conviene hallar los coeficientes de la serie de Taylor efectuando la derivación sucesiva.

2916. Sea dada la ecuación $y = \ln(1 + x) - xy$. Aplicando el método de coeficientes indefinidos hallar el desarrollo de la función y en serie de Taylor en potencias de x. Resolviendo el problema conviene hallar los coeficientes de la serie de Taylor efectuando la derivación sucesiva.

En los ejercicios 2917—2919 resolver las ecuaciones respecto a y (esto es, hallar la expresión explícita de y) mediante la serie de Taylor de dos maneras, es decir, aplicando el método de coeficientes indefinidos y efectuando la derivación sucesiva.

2917. $y^3 + xy = 1$ (hallar tres términos del desarrollo).

2918. $2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = x - y$ (hallar dos términos del desarrollo).

2919. $e^x - e^y = xy$ (hallar tres términos del desarrollo).

Integracion de las funciones

En los ejercicios 2920—2929 expresar las integrales en forma de series valiéndose del desarrollo de los integrandos en series; indicar los campos de convergencia de las series obtenidas.

2920. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. **2921.** $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$. **2922.** $\int \frac{e^x}{x}\,dx$.

2923. $\int \frac{e^x}{x^2}\,dx$. **2924.** $\int_0^x e^{-x^2}\,dx$. **2925.** $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

2926. $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **2927.** $\int_0^x \sqrt{1+x^3}\,dx$.

2928. $\int_0^x \frac{dx}{1-x^9}$. **2929.** $\int_0^x \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2}\,dx$.

En los ejercicios 2930—2934 calcular los valores aproximados de las integrales definidas tomando el número indicado de los términos del desarrollo del integrando en serie; indicar el error.

2930. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x}\,dx$ (3 términos). **2931.** $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$ (3 términos).

2932. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ (2 términos). **2933.** $\int\limits_{0,1}^{1} \frac{e^x}{x}\,dx$ (6 términos).

2934. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$ (2 términos).

En los ejercicios 2935—2938 calcular las integrales con exactitud hasta 0,001.

2935. $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx.$ **2936.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

2937. $\int\limits_0^{0,8} x^{10} \operatorname{sen} x\,dx.$ **2938.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}.$

2939. Mostrar que en el intervalo $(-0,1;\ 0,1)$ la función $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ se diferencia de la función $\operatorname{arctg} x - \frac{x^5}{10}$ no más que en 0,0000001.

2940. Tomando en cuenta la identidad

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

calcular π con 10 cifras exactas.

2941. Desarrollar la función $y = e^{x^2} \int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ en serie de Taylor de dos maneras, esto es, calculando directamente las derivadas sucesivas, para $x=0$, y multiplicando las series entre sí.

2942*. Calcular la integral $\int\limits_0^1 x^x\,dx.$

2943. Calcular la integral $\int\limits_0^{0,5} e^{\operatorname{sen} x}\,dx$ con exactitud hasta 0,0001.

2944. Calcular la integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos x}\,dx$ con exactitud hasta 0,001.

Diversos problemas

2945. Calcular el área limitada por la línea $y^2 = x^3 + 1$, el eje de ordenadas y la recta $x = 1/2$, con exactitud hasta 0,001.

2946*. Calcular el área del óvalo $x^4 + y^4 = 1$ con exactitud hasta 0,01.

2947. Calcular la longitud de la línea $25y^2 = 4x^5$ desde el pico hasta el punto de intersección con la parábola $5y = x^2$, con exactitud hasta 0,0001.

2948. Calcular la longitud de una semionda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ con exactitud hasta 0,001.

2949. La figura limitada por la línea $y = \operatorname{arctg} x$, el eje de abscisas y la recta $x = 1/2$ gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el volumen del cuerpo de revolución con exactitud hasta 0,001.

2950. La figura limitada por las líneas $y^2 - x^3 = 1$, $4y + x^3 = 0$, la recta $y = 1/2$ y el eje de ordenadas, gira alrededor del eje de ordenadas. Calcular el volumen del cuerpo de revolución con exactitud hasta 0,001.

2951. Calcular con exactitud hasta 0,001 las coordenadas del centro de gravedad del arco de la hipérbola $y = 1/x$, limitado por los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$.

2952. Calcular con exactitud hasta 0,01 las coordenadas del centro de gravedad del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = \frac{1}{\ln x}$, las rectas $x = 1,5$ y $x = 2$ y el eje de abscisas.

Capítulo X

Funciones de varias variables. Cálculo diferencial

§ 1. Funciones de varias variables

2953. Expresar el volumen z del cono en función de su generatriz x y la altura y.

2954. Expresar el área S del triángulo en función de sus tres lados x, y, z.

2955. Formar la tabla de los valores de la función $z = 2x - 3y + 1$ dando a las variables independientes los valores desde 0 hasta 5 con intervalo de una unidad.

2956. Formar la tabla de los valores de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dando a las variables independientes los valores desde 0 hasta 1 con intervalo de 0,1. Calcular los valores de la función con exactitud hasta 0,01.

2957. Hallar los valores de las funciones:

1) $z = \left(\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2$ para $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$;

2) $z = e^{\operatorname{sen}(x+y)}$ para $x = y = \frac{\pi}{2}$;

3) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}$ para $x = 2$, $y = 2$; $x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 1$.

2958. Sea dada la función

$$F(x, y) = \frac{\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)}{\varphi(xy)\psi(xy)}.$$

Hallar $F(a, 1/a)$. En particular, poner $\varphi(u) = u^3$, $\psi(u) = u^2$ y calcular $F(a, 1/a)$.

2959. Sea dada la función $F(x, y) = y^x - \frac{1}{2}x^y$. Si x e y cambian con la misma velocidad, ¿qué función crece con más rapidez (para $x = 3$, $y = 2$): la que se obtiene de F siendo fija y y cambiando sólo x, o la que se obtiene para x fija (cambiando sólo y)?

2960. Sea dada la función

$$\varphi(x, y, z) = y^2 - (y\cos z + z\cos y)\,x + x^{\frac{y+z}{y-z}}.$$

Las variables y y z guardan los valores fijos de y_0 y de z_0 siendo $y_0 = 3z_0$. ¿Qué representa la gráfica de la función $v = \varphi(x, y_0, z_0)$? ¿Es la función $\varphi(x, y, z)$: 1) una función racional de y? de z? 2) una función entera de x?

2961*. La función $z = f(x, y)$, que satisface idénticamente la relación

$$f(mx, my) = m^k f(x, y) \text{ para cualquier } m$$

es llamada función homogénea de k-ésimo orden. Mostrar que la función homogénea de k-ésimo orden $z = f(x, y)$ siempre puede ser representada en forma $z = x^k F\left(\frac{y}{x}\right)$

2962. El carácter homogéneo de una función de cualquier número de variables independientes puede ser determinado de manera análoga a la función de dos variables, por ejemplo, $f(x, y, z)$ es una función homogénea de k-ésimo orden si

$$f(mx, my, mz) = m^k f(x, y, z) \text{ para cualquier } m.$$

También tiene lugar la propiedad:

$$f(x, y, z) = x^k F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Demostrarla.

2963. Probar que la función $z = F(x, y) = xy$ satisface la ecuación diferencial

$$F(ax + bu, cy + dv) = acF(x, y) + bcF(u, y) + a\,dF(x, v) + b\,dF(u, v)$$

2964. Probar que la función $z = F(x, y) = \ln x \ln y$ satisface la ecuación diferencial

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v)$$

$(x, y, u, v$ son positivas).

2965. Definir z como función explícita de x e y ateniéndose a la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. ¿Será esta función unívoca?

2966. Sea dada la función compuesta $z = u^v$, donde $u = x + y$, $v = x - y$. Hallar el valor de la función: 1) para $x = 0$, $y = 1$; 2) para $x = 1$, $y = 1$; 3) para $x = 2$, $y = 3$; 4) para $x = 0$, $y = 0$; 5) para $x = -1$, $y = -1$.

2967. $z = \frac{u+v}{uv}$; $u = w^t$, $v = w^{-t}$; $w = \sqrt{x+y}$; $t = 2(x-y)$. Expresar z directamente en forma de la función de x e y. ¿Es z una función racional de u y v, de w y t, de x e y?

2968. Sea dada la función compuesta $z=u^w+w^{u+v}$, donde $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy$. Expresar z directamente en forma de la función de x e y.

2969. $u=(\xi+\eta)^2-\xi^3-\eta^3$; $\xi=\frac{e^{\omega}+e^{\varphi}}{2}$; $\eta=\frac{e^{\omega}+e^{\varphi}}{2}$, $\omega=$ $=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $\varphi=2\ln(x+y+z)$. Expresar u directamente en forma de la función de x, y y z. ¿Es u una función racional entera de ξ y η, de ω y φ, de x, y, z?

2970. Presentar la función compuesta

$$z=\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy}+x^2+y^2$$

en forma de una «cadena» de dependencias compuesta de dos eslabones.

2971. Investigar la gráfica de la función $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ aplicando el método de intersecciones. ¿Qué representan las intersecciones por los planos $x=$ const, $y=$ const, $z=$ const?

2972. Investigar la gráfica de la función $z=xy$ aplicando el método de intersecciones. ¿Qué representan las intersecciones por los planos $x=$ const, $y=$ const, $z=$ const?

2973. Investigar la gráfica de la función $z=y^2-x^3$ aplicando el método de intersecciones.

2974. Investigar la gráfica de la función

$$z^3=ax^2+by^2\ (a>0,\ b>0)$$

aplicando el método de intersecciones.

§ 2. Propiedades más elementales de las funciones

Dominio de definición

2975. El dominio está limitado por el paralelogramo de lados $y=0$, $y=2$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=\frac{1}{2}x-1$. La frontera del mismo se elimina. Dar este dominio por desigualdades.

2976. El dominio representa la figura limitada por las parábolas $y=x^2$ y $x=y^2$ (incluyendo las fronteras). Dar este dominio por desigualdades.

2977. Escribir, en forma de desigualdades, un dominio abierto que representa un triángulo equilátero, de lados iguales a a, cuyo vértice se halla situado en el origen de coordenadas. Uno de los lados tiene la misma dirección que el semieje positivo Ox (el triángulo está situado en el primer cuadrante).

2978. El dominio está limitado por un cilindro circular infinito de radio R (eliminadas las fronteras) cuyo eje paralelo al eje Oz pasa por el punto (a, b, c). Dar este dominio mediante las desigualdades.

2979. Escribir, en forma de desigualdades, el dominio limitado por la esfera de radio R cuyo centro se halla en el punto (a, b, c) (incluidas las fronteras).

2980. Los vértices de un triángulo rectángulo se hallan situados dentro del círculo de radio R. El área S del triángulo es función de sus catetos x e y: $S = \varphi(x, y)$. ¿Cuál es el dominio de definición de la función $S = \varphi(x, y)$?

2981. La esfera de radio R lleva inscrita una pirámide de base rectangular cuyo vértice se proyecta ortogonalmente en el punto de intersección de las diagonales de la base. El volumen V de la pirámide es función de los lados x e y de su base. ¿Será esta función unívoca? Presentar su forma analítica. Hallar el dominio de definición de la función.

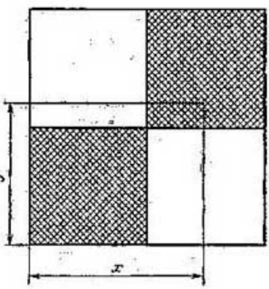

Fig. 57

2982. Una tabla cuadrada ofrece la forma de cuadrícula cuádruple, teniendo dos cuadros blancos y dos negros, como lo muestra la fig. 57. Cada uno de sus lados mide una unidad de longitud. Examinemos el rectángulo cuyos lados x e y son paralelos a los de la tabla y uno de los ángulos coincide con el del cuadro negro. El área de la parte negra del rectángulo será función de x e y. ¿Cuál será su dominio de definición? Presentar su forma analítica.

En los ejercicios 2983—3002 hallar los dominios de definición de las funciones que se dan a continuación.

2983. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$. **2984.** $z=\ln(y^2-4x+8)$.

2985. $z=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$. **2986.** $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

2987. $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$. **2988.** $z=\operatorname{arcsen}\frac{y-1}{x}$.

2989. $z=\ln xy$. **2990.** $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

2991. $z=\operatorname{arcsen}\frac{x^2+y^2}{2}+\operatorname{arcsec}(x^2+y^2)$.

2992. $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$. **2993.** $z=\sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2994. $z=xy\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

2995. $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$. **2996.** $z=\sqrt{\operatorname{sen}\pi(x^2+y^2)}$.

2997. $z=\sqrt{x\operatorname{sen}y}$. **2998.** $z=\ln x-\ln\operatorname{sen}y$.

2999. $z=\ln[x\ln(y-x)]$. **3000.** $z=\operatorname{arcsen}[2y(1+x^2)-1]$.

3001. $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$.

3002. $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $(R>r)$.

Límite. Continuidad de la función

En los ejercicios 3003—3008 calcular los límites de las funciones que se dan a continuación, estimando que las variables independientes tienden, de manera arbitraria, a sus valores límites.

3003. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$. **3004.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

3005. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$. **3006.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

3007. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$. **3008.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

3009. Mostrar que la función $u=\frac{x+y}{x-y}$ para $x\to 0$, $y\to 0$, puede tender a cualquier límite (dependiendo de cómo tienden a cero x e y). Dar ejemplos que muestren tales variaciones de x e y para que: a) $\lim u=1$, b) $\lim u=2$.

3010. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $z=\frac{2}{x^2+y^2}$. ¿Qué variaciones sufre la función en el entorno del punto de discontinuidad?

3011. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $z=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\pi x+\operatorname{sen}^2\pi y}$.

3012. ¿En qué parte es discontinua la función $z=\frac{1}{x-y}$?

3013. ¿En qué parte es discontinua la función $z=\frac{1}{\operatorname{sen}\pi x}+\frac{1}{\operatorname{sen}\pi y}$?

3014. ¿En qué parte es discontinua la función $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$?

3015*. Probar si es continua la función para $x=0$, $y=0$:

1) $f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$.

2) $f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$.

3) $f(x, y)=\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$.

4) $f(x, y)=\frac{1}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$.

5) $f(x, y)=\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$; $f(0, 0)=0$.

6) $f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$; $f(0, 0)=0$.

Líneas y superficies de nivel

3016. Sea dada la función $z = f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Construir las líneas de nivel de esta función para $z = 1, 2, 3, 4$.

3017. La función $z = f(x, y)$ está dada de la manera siguiente: en el punto $P(x, y)$ su valor es igual al ángulo con que se ve desde este punto un segmento AB dado en el plano Oxy. Hallar las líneas de nivel de la función $f(x, y)$.

En los ejercicios 3018—3021 trazar las líneas de nivel de las funciones que se dan a continuación dando a z los valores desde -5 hasta -5 con intervalo igual a una unidad.

3018. $z=xy$. **3019.** $z=x^2y+x$.

3020. $z=y(x^2+1)$. **3021.** $z=\frac{xy-1}{x^2}$.

3022. Construir las líneas de nivel de la función $z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ dando a z los valores desde -1 hasta $\frac{3}{2}$ con intervalo igual a $\frac{1}{2}$.

3023. Construir las líneas de nivel de la función z dada implícitamente por la ecuación $\left(\frac{3}{2}\right)^z[(x-5)^2+y^2] = \left(\frac{2}{3}\right)^z[(x+5)^2+y^2]$ dando a z los valores desde -4 hasta 4 con intervalo igual a 1.

3024. Construir las líneas de nivel de la función z dada implícitamente por la ecuación $y^2 = 2^{-z}(x-z)$ dando a z los valores desde -3 hasta 3 con intervalo igual a 1.

3025. Hallar las líneas de nivel de la función z dada implícitamente por la ecuación $z + x \ln z + y = 0$.

3026. En el espacio viene dado el punto A. La distancia que media entre el punto variable M y el punto A es función de las coordenadas del punto M. Hallar las superficies de nivel de esta función las cuales correspondan a las distancias iguales a 1, 2, 3, 4.

3027. La función $u = f(x, y, z)$ está dada de la manera siguiente: en el punto $P(x, y, z)$ su valor es igual a la suma de las distancias

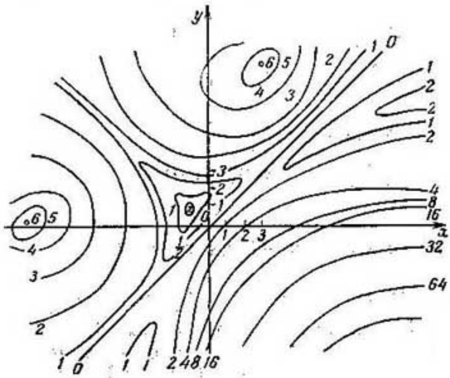

Fig. 58

que median entre el punto mencionado y dos puntos dados: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Indicar las superficies de nivel de la función $f(x, y, z)$.

3028. Hallar las superficies de nivel de la función

$$u = \ln \frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3029. Hallar las superficies de nivel de la función $u = \frac{x^2+y^2}{z}$.

3030. Hallar las superficies de nivel de la función:

1) $u = 5^{2x+3y-z}$, 2) $u = \operatorname{tg}(x^2+y^2-2z^2)$.

3031. La fig. 58 muestra las líneas de nivel de la función $z = f(x, y)$. Construir la gráfica de la función:

1) $z = f(x, 0)$; 2) $z = f(x, 4)$; 3) $z = f(1, y)$;
4) $z = f(-5, y)$; 5) $z = f(x, 3x)$; 6) $z = f(x, x^2)$;

§ 3. Derivadas y diferenciales de las funciones de varias variables

Derivadas parciales

3032. El volumen de gas v es función de su temperatura y presión: $v = f(p, T)$. El coeficiente medio de la expansión del gas, a la presión constante y al cambio de la temperatura desde T_1 hasta T_2 se traduce por la expresión $\frac{v_2 - v_1}{v_1 (T_2 - T_1)}$. ¿Qué es lo que podríamos denominar el coeficiente de expansión, a la presión constante y a la temperatura dada T_0?

3033. La temperatura en un punto A dado de la barra Ox es función de la abscisa x del punto A y el tiempo t: $\theta = f(x, t)$. ¿Cuál sería la interpretación física de las derivadas parciales $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ y $\frac{\partial\theta}{\partial x}$?

3034. El área S del rectángulo se expresa por la fórmula $S = bh$, donde b es la base y h, la altura. Hallar $\frac{\partial s}{\partial h}$, $\frac{\partial s}{\partial b}$ y dar interpretación geomértica de los resultados obtenidos.

3035. Sean dadas dos funciones: $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ (a es constante) y $z = \sqrt{y^2 - x^2}$. Hallar $\frac{du}{dx}$ y $\frac{\partial z}{\partial x}$. Comparar los resultados.

En los ejercicios 3036—3084 hallar las derivadas parciales de las funciones que se dan a continuación respecto a cada una de las variables independientes (x, y, z, u, v, t, φ y ψ son variables):

3036. $z = x - y$.

3037. $z = x^3 y - y^3 x$.

3038. $\theta = axe^{-t} + bt$ (a, b son constantes).

3039. $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$.

3040. $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

3041. $z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$.

3042. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

3043. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

3044. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

3045. $z = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$.

3046. $z = x^y$.

3047. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

3048. $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$.

3049. $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **3050.** $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

3051. $z = e^{-\frac{x}{y}}$. **3052.** $z = \ln (x + \ln y)$.

3053. $u = \operatorname{arctg} \frac{v+w}{v-w}$. **3054.** $z = \operatorname{sen} \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$.

3055. $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$. **3056.** $z = (1 + xy)^y$.

3057. $z = xy \ln (x + y)$. **3058.** $z = x^{xy}$.

3059. $u = xyz$. **3060.** $u = xy + yz + zx$.

3061. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3062. $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$

3063. $w = xyz + yzv + zvx + vxy$.

3064. $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$. **3065.** $u = \operatorname{sen} (x^2 + y^2 + z^2)$.

3066. $u = \ln (x + y + z)$.

3067. $u = x^{\frac{y}{z}}$. **3068.** $u = x^{y^z}$.

3069. $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto $(3, 4)$.

3070. $z = \ln \left(x + \frac{y}{2x}\right)$ en el punto $(1, 2)$.

3071. $z = (2x + y)^{2x+y}$. **3072.** $z = (1 + \log_y x)^3$.

3073. $z = xye^{\operatorname{sen} \pi xy}$.

3074. $z = (x^2 + y^2) \frac{1 - \sqrt{x^2+y^2}}{1 + \sqrt{x^2+y^2}}$.

3075. $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$. **3076.** $z = 2 \sqrt{\frac{1 - \sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}}$.

3077. $z = \ln [xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}]$.

3078. $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{xy}$.

3079. $z = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 1} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

3080. $u = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$. **3081.** $u = \operatorname{arctg} (x - y)^z$.

3082. $u = (\operatorname{sen} x)^{yz}$. **3083.** $u = \ln \frac{1 - \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1 + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3084. $w = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 (x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv) + \ln \cos (x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv)$.

3085. $u=\frac{\cos(\varphi-2\psi)}{\cos(\varphi+2\psi)}$. Hallar $\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)_{\substack{\varphi=\frac{\pi}{4}\\ \psi=\pi}}$.

3086. $u=\sqrt{az^3-bt^3}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial z}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ para $z=b,\ t=a$.

3087. $z=\frac{x\cos y-y\cos x}{1+\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ para $x=y=0$.

3088. $u=\sqrt{\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}^2y+\operatorname{sen}^2z}$. Hallar $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{x=0\\ y=0\\ z=\frac{\pi}{4}}}$.

3089. $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$. Hallar $u_x+u_y+u_z$ para $x=y=$ $=z=1$.

3090. $f(x,y)=x^3y-y^3x$. Hallar $\left(\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}}\right)_{\substack{x=1\\ y=2}}$.

3091. ¿Qué ángulo forma la tangente a la línea $\begin{cases} z=\frac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$ en el punto $(2, 4, 5)$ con la dirección positiva del eje de abscisas?

3092. ¿Qué ángulo forma la tangente a la línea $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ en el punto $(1, 1, \sqrt{3})$ con la dirección positiva del eje de ordenadas?

3093. ¿Qué ángulo se forma al cortarse las líneas planas engendradas por la intersección de las superficies $z=x^2+\frac{y^2}{6}$ y $z=\frac{x^2+x^2}{3}$ por el plano $y=2$?

Diferenciales. Cálculos aproximados

En los ejercicios 3094—3097 hallar las diferenciales parciales de las funciones que se dan a continuación, respecto a cada una de las variables independientes.

3094. $z=xy^3-3x^2y^2+2y^4$.

3095. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3096. $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

3097. $u=\ln(x^3+2y^3-z^3)$.

3098. $z=\sqrt[3]{x+y^2}$. Hallar d_yz para $x=2,\ y=5,\ \Delta y=0{,}01$.

3099. $z=\sqrt{\ln xy}$. Hallar d_xz para $x=1,\ y=1{,}2,\ \Delta x=0{,}016$.

3100. $u=p-\frac{qr}{p}+\sqrt{p+q+r}$. Hallar d_pu para $p=1$, $q=3$, $r=5$, $\Delta p=0{,}01$.

En los ejercicios 3101—3109 hallar las diferenciales totales de las funciones que se dan a continuación.

3101. $z=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$. **3102.** $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

3103. $z=\frac{x+y}{x-y}$. **3104.** $z=\operatorname{arcsen}\frac{x}{y}$.

3105. $z=\operatorname{sen}(xy)$. **3106.** $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3107. $z=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. **3108.** $z=\operatorname{arctg}(xy)$. **3109.** $u=x^{yz}$.

Aplicaciones a los cálculos

3110. Hallar el valor de la diferencial total de la función $z = x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ para $x=3$, $y=4$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

3111. Hallar el valor de la diferencial total de la función $z=e^{xy}$ para $x=1$, $y=1$, $\Delta x=0{,}15$, $\Delta y=0{,}1$.

3112. Hallar el valor de la diferencial total de la función $z=\frac{xy}{x^2-y^2}$ para $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=0{,}03$

3113. Calcular aproximadamente la variación de la función $z=\frac{x+3y}{y-3x}$ al variar x desde $x_1=2$ hasta $x_2=2{,}5$ e y desde $y_1=4$ hasta $y_2=3{,}5$.

3114. Calcular aproximadamente $\ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1)$.

3115. Calcular aproximadamente $1{,}04^{2{,}02}$.

3116. Hallar la longitud del segmento de la recta $x=2$, $y=3$ comprendido entre la superficie $z=x^2+y^2$ y su plano tangente en el punto $(1, 1, 2)$.

3117. El cuerpo ha sido pesado en el aire $(4{,}1 \pm 0{,}1$ gf) y en el agua $(1{,}8 \pm 0{,}2$ gf). Hallar el peso específico del cuerpo e indicar el error del cálculo.

3118. El radio de la base del cono mide $10{,}2 \pm 0{,}1$ cm, la generatriz mide $44{,}6 \pm 0{,}1$ cm. Hallar el volumen del cono e indicar el error del cálculo.

3119. Para calcular el área S del triángulo por su lado a y los ángulos B, C se usa la fórmula

$$S=\frac{1}{2}a^2\frac{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}(B+C)}.$$

Hallar el error relativo δ_S para calcular S si los errores relativos al calcular los elementos mencionados son δ_a, δ_B, δ_C, respectivamente.

3120. Un lado del triángulo mide 2,4 m y aumenta con la velocidad de 10 cm/s. El segundo lado mide 1,5 m y disminuye con la velocidad de 5 cm/s. El ángulo formado por estos dos lados mide 60° y aumenta con la velocidad de 2° al segundo. ¿Cómo varía el área del triángulo y con qué velocidad?

3121. Los radios de las bases de un cono truncado miden $R = 30$ cm, $r = 20$ cm, la altura $h = 40$ cm. ¿Cómo variaría el volumen del cono si aumentásemos R en 3 mm, r, en 4 mm, h, en 2 mm?

3122. Mostrar que para calcular el período T de la oscilación del péndulo, determinado por la fórmula

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(siendo l su longitud y g la aceleración de la gravedad) el error relativo es igual a la semisuma de los errores relativos cometidos al calcular los valores de l y g (todos los errores son supuestos bastante pequeños).

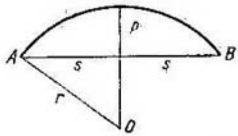

Fig. 59

3123. La fig. 59 muestra el arco AB de una circunferencia. Expresar el error al calcular el radio r de dicho arco tomando en consideración la cuerda $2s$ y la flecha p por los errores ds y dp. Calcular dr para $2s = 19{,}45$ cm $\pm$ 0,5 mm, $p = 3{,}62$ cm $\pm$ 0,3 mm.

§ 4. Derivación de las funciones

Función compuesta

3124. $u = e^{x-2y}$, donde $x = \operatorname{sen} t$, $y = t^3$, $\frac{du}{dt} = ?$

3125. $u = z^2 + y^2 + zy$, $z = \operatorname{sen} t$, $y = e^t$, $\frac{du}{dt} = ?$

3126. $z = \operatorname{arcsen}(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$; $\frac{dz}{dt} = ?$

3127. $z=x^2y-y^2x$, donde $x=u\cos v$, $y=u\operatorname{sen} v$; $\frac{\partial z}{\partial u}=?$ $\frac{\partial z}{\partial v}=?$

3128. $z=x^2\ln y$, $x=\frac{u}{v}$, $y=3u-2v$; $\frac{\partial z}{\partial u}=?$ $\frac{\partial z}{\partial v}=?$

3129. $u=\ln(e^x+e^y)$; $\frac{\partial u}{\partial x}=?$ Hallar $\frac{du}{dx}$ si $y=x^3$.

3130. $z=\operatorname{arctg}(xy)$; hallar $\frac{dz}{dx}$ si $y=e^x$.

3131. $u=\operatorname{arcsen}\frac{x}{z}$, donde $z=\sqrt{x^2+1}$; $\frac{du}{dx}=?$

3132. $z=\operatorname{tg}(3t+2x^2-y)$, $x=\frac{1}{t}$, $y=\sqrt{t}$; $\frac{dz}{dt}=?$

3133. $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y=a\operatorname{sen} x$, $z=\cos x$; $\frac{du}{dx}=?$

3134. $z=\frac{xy\operatorname{arctg}(xy+x+y)}{x+y}$; $dz=?$

3135. $z=(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$ $dz=?$

3136. $z=f(x^2-y^2,\ e^{xy})$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

3137. Mostrar que la función $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, donde $x=u+v$, $y=u-v$, satisface la relación $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{v^2+u^2}$.

3138. Mostrar que la función $z=\varphi(x^2+y^2)$, donde $\varphi(u)$ es una función derivable, satisface la relación $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3139. $u=\operatorname{sen} x+F(\operatorname{sen} y-\operatorname{sen} x)$; mostrar que $\frac{\partial u}{\partial y}\cos x+\frac{\partial u}{\partial x}\cos y=\cos x\cos y$, cualquiera que sea la función derivable F.

3140. $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$; mostrar que $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ cualquiera que sea la función derivable f.

3141. Mostrar que la función derivable homogénea de orden cero $z=F\left(\frac{y}{x}\right)$ (véase el ejercicio 2961) satisface la relación $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3142. Mostrar que la función homogénea de k-ésimo orden $u=x^kF\left(\frac{z}{x};\ \frac{y}{x}\right)$, donde F es una función derivable, satisface la relación $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=ku$.

3143. Comprobar la proposición del ejercicio 3142 para la función $u=x^5 \operatorname{sen}\frac{z^2+y^2}{x^2}$.

3144. Sea dada la función derivable $f(x, y)$. Demostrar que si sustituimos las variables x, y por las funciones lineales homogéneas de X, Y, la función obtenida $F(X, Y)$ estará unida con la función dada por la relación

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=X\frac{\partial F}{\partial X}+Y\frac{\partial F}{\partial Y}.$$

Funciones dadas implícita y paramétricamente

En los ejercicios 3145—3155 hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las funciones dadas implícitamente.

3145. $x^3y-y^3x=a^4$.

3146. $x^2y^2-x^4-y^4=a^4$.

3147. $xe^y+ye^x-e^{xy}=0$.

3148. $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$.

3149. $\operatorname{sen}(xy)-e^{xy}-x^2y=0$.

3150. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

3151. $xy-\ln y=a$.

3152. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a}-\frac{y}{a}=0$.

3153. $yx^2=e^y$.

3154. $ye^x+e^y=0$.

3155. $y^x=x^y$.

3156. $F(x, y)=F(y, x)$. Mostrar que la derivada de y respecto a x puede ir expresada mediante una fracción cuyo numerador se obtiene del denominador permutando las letras y y x.

3157. $x^2+y^2-4x-10y+4=0$. Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $x=6$, $y=2$ y $x=6$, $y=8$. Dar interpretación geométrica de los resultados obtenidos.

3158. $x^4y+xy^4-ax^2y^2=a^5$. Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $x=y=a$.

3159. Demostrar que de $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$ se deduce:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

3160. Demostrar que de $a+b(x+y)+cxy=m(x-y)$ se deduce:

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{dy}{a+2by+cy^2}.$$

3161. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

3162. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0;\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=?\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=?$

3163. $z^3+3xyz=a^3;\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=?\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=?$

3164. $e^z-xyz=0;\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=?\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=?$

3165. Mostrar que cualquiera que sea la función derivable φ, de la relación $\varphi\,(cx-az,\ cy-bz)=0$ se deduce:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}-c.$$

3166. $F(x,\ y,\ z)=0$. Demostrar que

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=1;\qquad \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=-1.$$

3167. Hallar la diferencial total de la función z, definida por la ecuación $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$.

3168. La función z viene dada paramétricamente: $x=u+v$, $y=u-v$, $z=uv$. Expresar z como función explícita de x e y.

3169. $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$. Expresar z como función explícita de x e y.

3170. $x=u\cos v$, $y=u\operatorname{sen} v$, $z=kv$. Expresar z como función explícita de x e y.

En los ejercicios 3171—3175 expresar dz a través de x, y, z, dx y dy de las funciones dadas en forma paramétrica.

3171. $x=\frac{u^2+v^2}{2},\qquad y=\frac{u^2-v^2}{2},\ z=uv.$

3172. $x=\sqrt{a}\,(\operatorname{sen} u+\cos v),\quad y=\sqrt{a}\,(\cos u-\operatorname{sen} v),\quad z=1+\operatorname{sen}(u-v).$

3173. $x=u+v,\ y=u-v,\ z=u^2v^2.$

3174. $x=u\cos v,\ y=u\operatorname{sen} v,\ z=u^2.$

3175. $x=v\cos u-u\cos u+\operatorname{sen} u,\quad y=v\operatorname{sen} u-u\operatorname{sen} u-\cos u,$ $z=(u-v)^2.$

3176. $x=e^u\cos v$, $y=e^u\operatorname{sen} v$, $z=uv$. Expresar dz mediante u, v, dx y dy.

3177. Las relaciones $u=f(x,\ y)$, $v=F(x,\ y)$, donde f y F son funciones derivables de x e y, determinan x e y como funciones derivables de u y v. Demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)=1.$$

3178. u y v son funciones de x, y, z que satisfacen las relaciones $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Mostrar que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3179. Sean $y = f(x, t)$, $F(x, y, t) = 0$. Comprobar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

3180. Sean $f(x, y, z) = 0$. Comprobar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

§ 5. Derivación sucesiva

3181. $x = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$. Mostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3182. $z = x^y$. Mostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3183. $z = e^x(\cos y + x \operatorname{sen} y)$. Mostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3184. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Mostrar que $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$.

En los ejercicios 3185 — 3192 hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ de las funciones que se dan a continuación.

3185. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

3186. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

3187. $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3188. $z = \operatorname{sen}^2(ax+by)$.

3189. $z = e^{xy^y}$.

3190. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

3191. $z = y^{\ln x}$.

3192. $z = \operatorname{arcsen}(xy)$.

3193. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = ?$

3194. $z = e^{xy^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = ?$

3195. $z = \ln(x^2+y^2)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$

3196. $z = \operatorname{sen} xy$; $\qquad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = ?$

3197. $w = e^{xyz}$; $\qquad \dfrac{\partial^3 w}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = ?$

3198. $v = x^m y^n z^p$; $\qquad \dfrac{\partial^6 v}{\partial x\, \partial y^3\, \partial z^2} = ?$

3199. $z = \ln (e^x + e^y)$; mostrar que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ y que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \right)^2 = 0.$$

3200. $u = e^x (x \cos y - y \operatorname{sen} y)$. Mostrar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3201. $u = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; mostrar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3202. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; mostrar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

3203. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; mostrar que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}, \qquad \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}.$$

3204. ¿ Para qué valor de la constante a la función $v = x^3 + axy^2$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$?

3205. $z = \dfrac{y}{y^2 - a^2 x^2}$; mostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3206. $v = \dfrac{1}{x - y} + \dfrac{1}{y - z} + \dfrac{1}{z - y}$; mostrar que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 v}{vx\, \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\, \partial x} \right) = 0.$$

3207. $z = f(x, y)$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Comprobar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\, \partial \eta}.$$

3208. $v = x \ln (x + r) - r$, donde $r^2 = x^2 + y^2$. Mostrar que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{x + r}.$$

3209. Hallar la expresión para la segunda derivada $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ de la función y dada implícitamente por la ecuación $f(x, y) = 0$.

3210. $y = \varphi (x - at) + \psi (x + at)$. Mostrar que $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ cualesquiera que sean las funciones φ y ψ derivables dos veces.

3211. $u=\varphi(x)+\psi(y)+(x-y)\psi'(y)$. Comprobar que

$$(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

(φ y φ son las funciones derivables dos veces).

3212. $z=y\varphi(x^2-y^2)$ .Comprobar que $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ (φ es la función derivable).

3213. $r=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$. Mostrar que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=0$$

(φ y ψ son funciones derivables dos veces).

3214. $u=\frac{1}{y}[\varphi(ax+y)+\psi(ax-y)]$. Mostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{a^2}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

3215. $u=\frac{1}{x}[\varphi(x-y)+\psi(x+y)]$. Mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

3216. $u=xe^y+ye^x$. Mostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=x\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}.$$

3217. $u=e^{xyz}$. Mostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2x\frac{\partial u}{\partial x}+u.$$

3218. $u=\ln\frac{x^2-y^2}{xy}$. Mostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}-\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=2\left(\frac{1}{y^3}-\frac{1}{x^3}\right).$$

En los ejercicios 3219—3224 hallar las diferenciales de segundo orden de las funciones que se dan a continuación.

3219. $z=xy^2-x^2y$. **3220.** $z=\ln(x-y)$.

3221. $z=\frac{1}{2(x^2+y^2)}$. **3222.** $z=x\operatorname{sen}^2 y$.

3223. $z=e^{xy}$. **3224.** $u=xyz$.

3225. $z=\operatorname{sen}(2x+y)$. Hallar d^3z en los puntos $(0,\pi)$; $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

3226. $u = \operatorname{sen}(x+y+z)$; $d^2u = ?$

3227. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $d^2z=?$

3228. $z_3 - 3xyz = a^3$; $d^2z = ?$

3229. $3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 - 4 = 0$. Hallar d^2z en el punto (2, 1, 2).

Cambio de variables

3230. Transformar la expresión diferencial

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}+y,$$

poniendo $x = 1/t$.

3231. Transformar la expresión diferencial

$$x^2y'' - 4xy' + y,$$

poniendo $x = e^z$.

3232. Transformar la expresión diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ay,$$

poniendo $x = \operatorname{sen} t$.

3233. Transformar la expresión diferencial $\frac{y''}{y'^3}+y$ tomando y como variable independiente y x, como su función.

3234. Transformar la expresión $y'y''' - 3y''^2$ tomando y como variable independiente.

3235. Transformar la expresión $yy'' - 2(y^2 + y'^2)$ a la nueva función v, poniendo $y = \frac{1}{v}$.

3236. Transformar la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

a las coordenadas polares que están relacionadas con las fórmulas cartesianas $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\operatorname{sen}\varphi$.

3237. Transformar la expresión $k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ a las coordenadas polares ρ, φ.

3238. La función z depende de x, y. En la expresión $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}$ efectuar el cambio de las variables independientes con ayuda de las fórmulas $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$.

3239. Transformar el operador de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ a las coordenadas polares.

3240. Transformar la expresión $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+kz$ a las coordenadas polares considerando que $z=\omega(\rho)$ depende solamente de ρ y no depende de φ.

3241. En la expresión $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ cambiar las variables x e y por las variables u y v, y la función z, por la variable w, considerando que estas variables están unidas por las relaciones

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2};\quad z=\frac{u^2-v^2}{4}-w.$$