Capítulo XI

Aplicaciones del cálculo diferencial de las funciones de varias variables

§ 1. Fórmula de Taylor. Extremos de las funciones de varias variables

Fórmula de Taylor

3242. $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$; desarrolar la función $f(x+h, y+k)$ en potencias de h y k.

3243. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 4$; hallar el incremento que recibe al pasar las variables independientes de los valores $x = 5$, $y = 6$ a los valores $x = 5 + h$, $y = 6 + k$.

3244. $f(x, y) = \frac{xy^3}{4} - yx^3 + \frac{x^2y^2}{2} - 2x + 3y - 4$;

hallar el incremento que recibe la función al pasar las variables independientes de los valores $x = 1$, $y = 2$ a los valores $x = 1 + h$, $y = 2 + k$. Calcular $f(1{,}02;\ 2{,}03)$ limitándose a los términos de 2° orden inclusive.

3245. $f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx$; desarrollar $f(x + h, y + k, z + l)$ en potencias de h, k, l.

3246. Desarrollar $z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ en potencias de $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$. Hallar los términos de primero y segundo órdenes y R_2 (término complementario de segundo orden).

3247. Desarrollar la función $z = x^y$ en potencias de $(x - 1)$, $(y - 1)$ hallando los términos hasta el tercer orden inclusive. Aplicar el resultado obtenido para calcular (¡sin recurrir a las tablas!) $1{,}1^{1{,}02}$.

3248. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$; desarrollar $f(x + h, y + k)$ en potencias de h y k, limitándose a los términos de segundo orden respecto a h y k. Aplicar el resultado para calcular $e^{0{,}1} \operatorname{sen} 0{,}49\pi$.

3249. Hallar varios primeros términos de desarrollo de la función e^x sen y en serie de Taylor en el entorno del punto (0, 0).

3250. Hallar varios primeros términos de desarrollo de la función $e^x \ln(1+y)$ en serie de Taylor en el entorno del punto (0, 0).

En los ejercicios 3251—3256 desarrollar las funciones que se dan a continuación en serie de Taylor para $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3251. $z = \frac{1}{1-x-y+xy}$.

3252*. $z = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$.

3253. $z = \ln(1-x)\ln(1-y)$.

3254. $z = \ln \frac{1-x-y+xy}{1-x-y}$.

3255. $z = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$.

3256. $z = e^x \cos y$.

3257. Hallar varios primeros términos de desarrollo en potencias de $x-1$, $y-1$ de la función z dada implícitamente por la ecuación

$$z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0.$$

La función dada es igual a 1 cuando $x = 1$, $y = 1$.

3258. Obtener la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para los valores suficientemente pequeños de $|x|$, $|y|$.

Extremos

En los ejercicios 3259—3267 hallar los puntos estacionarios de las funciones que se dan a continuación.

3259. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3260. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

3261. $z = xy(a - x - y)$.

3262. $z = (2ax - x^2)(2by - y^2)$.

3263. $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y)$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$

3264. $z = \frac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

3265. $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$.

3266. $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

3267. $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

3268. La fig. 60 muestra las líneas de nivel de la función $z = f(x, y)$. ¿Qué particularidades ofrece la función en los puntos A, B, C, D y en la línea EF?

3269. La función z viene dada en forma implícita: $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$. Hallar sus puntos estacionarios.

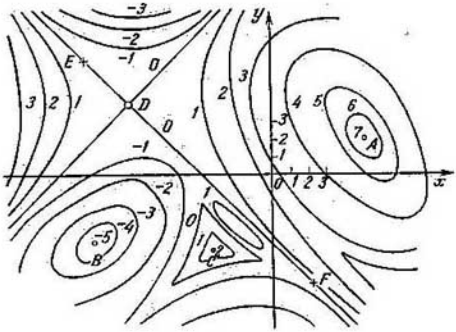

Fig. 60

3270. La función z viene dada en forma implícita: $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$. Hallar sus puntos estacionarios.

3271. Hallar los puntos extremos de la función $z = 2xy - 3x^2 - 2z^2 + 10$.

3272. Hallar los puntos extremos de la función $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

3273. Hallar los puntos extremos de la función $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

3274. Mostrar que la función $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^2}{y}$ tiene mínimo en el punto $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

3275. Mostrar que la función $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ tiene mínimo, cuando $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$

3276. Mostrar que la función $z = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y + 20$ tiene mínimo, cuando $x = 5$, $y = 6$.

3277. Hallar los puntos estacionarios de la función $z = x^3y^2(12 - x - y)$ que satisfagan la condición $x > 0$, $y > 0$ y analizar su carácter.

3278. Hallar los puntos estacionarios de la función $z = x^3 + y^3 - 3xy$ y analizar su carácter.

Valores máximos y mínimos

3279. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $z = x^2 - y^2$ en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3280. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ en rectángulo limitado por las rectas

$$x = 0, \ y = 0, \ x = 1, \ y = 2.$$

3281. Hallar el valor máximo de la función $z = x^2 y (4 - x - y)$ en el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

3282. Hallar los valores máximo y mínimo de la función

$$z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$$

en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3283. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$ en el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$; $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

3284. Desarrollar el número positivo a en tres sumandos positivos de modo que el producto de éstos tenga el valor máximo.

3285. Representar el número positivo a en forma de producto de cuatro factores positivos cuya suma sea la menor posible.

3286. En el plano Oxy hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de distancias que medien entre las tres rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ y el punto buscado sea la menor posible.

3287. Trazar un plano de modo que pase por el punto (a, b, c) y que el volumen del tetraedro recortado por dicho plano del triedro coordenado sea el menor posible.

3288. Sean dados n puntos: $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$. En el plano Oxy hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de distancias que medien entre todos los puntos dados y el punto buscado, sea la menor posible.

3289. Sean dados tres puntos $A(0, 0, 12)$, $B(0, 0, 4)$ y $C(8, 0, 8)$. En el plano Oxy hallar un punto D tal que la esfera que pase por estos tres puntos tenga el menor radio posible.

3290. Inscribir en la esfera dada de diametro $2R$ un paralelepípedo rectangular que tenga el mayor volumen posible.

Extremos condicionados

En los ejercicios 3291—3296 analizar si las funciones que se dan a continuación tienen extremos.

3291. $z = x^m + y^m \ (m > 1)$ para $x + y = 2 \ (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

3292. $z = xy$ para $x^2 + y^2 = 2a^2$.

3293. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ para $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$.

3294. $z=a\cos^2 x+b\cos^2 y$ para $y-x=\frac{\pi}{4}$.

3295. $u=x+y+z$ para $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

3296. $u=xyz$ para $\begin{cases} 1)\ x+y+z=5, \\ 2)\ xy+xz+yz=8. \end{cases}$

3297*. Demostrar que la siguiente relación es válida

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2.$$

3298. $f(x, y)=x^3-3xy^2+18y$, siendo $3x^2y-y^3-6x=0$. Demostrar que la función $f(x, y)$ alcanza su extremo en los puntos $x=y=\pm\sqrt{3}$.

3299. Hallar el mínimo de la función $u=ax^2+by^2+cz^2$, donde a, b, c son constantes positivas y x, y, z están unidas por la relación $x+y+z=1$.

3300. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $u=y^2+4z^2-4yz-2xz-2xy$ para $2x^2+3y^2+6z^2=1$.

3301. En el plano $3x-2z=0$ hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de las distancias que medien entre dicho punto y los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(2, 3, 4)$ sea la menor posible.

3302. En el plano $x+y-2z=0$ hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de las distancias que medien entre dicho punto y los planos $x+3z=6$ e $y+3z=2$ sea la menor posible.

3303. Sean dados los puntos $A(4, 0, 4)$, $B(4, 4, 4)$; $C(4, 4, 0)$. En la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ hallar el punto S tal que el volumen de la pirámide $SABC$ sea: a) el mayor posible, b) el menor posible. Comprobar la respuesta de manera geométrica elemental.

3304. Hallar el paralelepípedo rectangular de volumen dado V que tenga la menor área posible.

3305. Hallar el paralelepípedo rectangular de área dada S el cual tenga el mayor volumen posible.

3306. Hallar el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que sea susceptible de ser inscrito en el elipsoide de semiejes a, b, c.

3307. La tienda de campaña tiene la forma de cilindro rematado por un cono. ¿Cuáles deberían ser las relaciones entre sus dimensiones lineales para que la cantidad de tela necesaria para su fabricación sea mínima siendo el volumen dado?

3308. La sección del canal presenta la forma de trapecio isósceles de área dada (véase la fig. 61). ¿Cuáles deberían ser sus dimensiones para que la superficie lavada del canal sea la menor posible?

3309. De todos los paralelepípedos rectangulares que tienen la diagonal dada hallar el que tenga el mayor volumen posible.

3310. Calcular las dimensiones exteriores que debería tener un cajón abierto (sin la tapa) de forma de paralelepípedo rectangular, del que se dan el espesor de paredes α y el volumen V, para que al fabricarlo se gaste la menor cantidad posible de material.

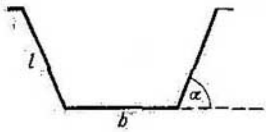

Fig. 61

3311. Hallar el volumen máximo del paralelepípedo siendo la suma de todas sus aristas igual a $12a$.

3312. Circunscribir en torno a una elipse dada un triángulo de base paralela al eje mayor cuya área sea la menor posible.

3313. En la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ hallar los puntos tales que las distancias entre éstos y la recta $3x+y-9=0$ sean mínimas y máximas.

3314. En la parábola $x^2+2xy+y^2+4y=0$ hallar el punto tal que la distancia entre éste a la recta $3x-6y+4=0$ sea la menor posible.

3315. En la parábola $2x^2-4xy+2y^2-x-y=0$ hallar el punto más próximo a la recta $9x-7y+16=0$.

3316. Hallar la distancia máxima que media entre los puntos de la superficie

$$2x^2+3y^2+2z^2+2xz=6$$

y el plano $z=0$.

3317. Hallar los lados de un triángulo rectángulo cuyo perímetro sea mínimo siendo dada su área S.

3318. El cono recto elíptico cuyos semiejes de la base miden a y b y cuya altura es H, lleva inscrito un prisma de base rectangular de tal modo que los lados de la base son paralelos a los ejes y la intersección de las diagonales de la base se halla en el centro de la elipse. ¿Cuáles deberían ser los lados de la base y la altura del prisma para que su volumen sea el mayor posible? ¿A qué sería igual este volumen mayor?

3319. Hallar la pirámide regular triangular de volumen dado tal que la suma de sus aristas sea la menor posible.

3320. Sean dados dos puntos en la elipse. Hallar uno tercero en la misma elipse tal que el área del triángulo que tiene los dos primeros puntos por sus vértices, sea la mayor posible.

3321. Trazar la normal a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ de modo que la distancia que medie entre el origen de coordenadas y la normal buscada sea la mayor posible.

3322. En el elipsoide de revolución $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ hallar los puntos las distancias entre los cuales y el plano $3x+4y+12z=288$ sean la mayor posible y la menor posible.

3323. Sean dadas las líneas planas $f(x, y)=0$ y $\varphi(x, y)=0$. Mostrar que el extremo de distancia entre los puntos (α, β) y (ξ, η) que se hallan en estas líneas, respectivamente, se verifica si se cumple la siguiente condición

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}=\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}.$$

Valiéndose de ello, hallar la distancia mínima entre la elipse $x^2+2xy+5y^2-16y=0$ y la recta $x+y-8=0$.

§ 2. Líneas planas

Tangentes y normales

En los ejercicios 3324—3327 escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a las líneas en los puntos que se indican.

3324. $x^3y+y^3x=3-x^2y^2$ en el punto $(1, 1)$.

3325. $a^2(x^4+y^4)-x^3y^3=9a^6$ en el punto $(a, 2a)$.

3326. $\cos xy=x+2y$ en el punto $(1, 0)$.

3327. $2x^3-x^2y+3x^2+4xy-5x-3y+6=0$ en el punto de su intersección con el eje Oy.

Puntos singulares

En los ejercicios 3328—3340 hallar los puntos singulares de las líneas.

3328. $y^2=x^2(x-1)$. **3329.** $a^2x^2=(x^2+y^2)y^2$.

3330. $y^2=ax^2+bx^5$. **3331.** $y^2=x(x-a)^2$.

3332. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. **3333.** $x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0$.

3334. $x^4+12x^3-6y^3+36x^2+27y^2-81=0$.

3335. $x^3+y^3+3axy=0$. **3336.** $x^2+y^2=y^4+y^4$.
3337. $y=x\ln x$. **3338.** $y^2=\operatorname{sen}^3 x$.
3339. $y^2=(x-a)^3$. **3340.** $x^5=(y-x^2)^2$.

Envolventes

3341. Escribir la ecuación de la envolvente de la familia de rectas $y=ax+f(a)$. En particular, poner $f(a)=\cos a$.

3342. Hallar la envolvente de la familia de rectas $y=2mx+m^4$.

3343. Un haz de rectas está trazado de tal modo que pasa por el punto $A(a, 0)$. Hallar la envolvente de la familia de normales trazadas a las rectas del haz en los puntos de su intersección con el eje Oy.

3344. Hallar la envolvente de la familia de parábolas $y^2=a(x-a)$.

3345. Hallar la envolvente de la familia de parábolas $ax^2+a^2y=1$.

3346. Hallar la envolvente de la familia de parábolas $y=a^2(x-a)^2$.

3347. Hallar la envolvente de la familia de parábolas semicúbicas $(y-a)^2=(x-a)^3$.

3348. Hallar la envolvente de la familia de líneas $x^2+ay^2=a^3$.

3349. Hallar la envolvente de la familia de elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ siendo la suma de semiejes de cada elipse igual a d.

3350. Los radios de la circunferencia son proyectados a sus dos diámetros perpendiculares entre sí. En las proyecciones, que sirven de semiejes, son trazadas las elipses. Hallar la envolvente de la familia de elipses obtenida.

3351. Hallar la envolvente de la familia de circunferencias que tienen sus centros sobre la parábola $y=bx^2$ y que pasan por su vértice.

3352. La recta se desplaza de tal modo que la suma de longitudes de los segmentos cortados por la recta en los ejes de coordenadas sigue constante e igual a a. Hallar la envolvente de la familia de rectas obtenida.

3353. Hallar la envolvente del diámetro del círculo que rueda, sin deslizarse, sobre una recta dada (el radio del círculo es igual a R).

3354. Las cuerdas de un círculo (cuyo radio es igual a R) paralelas a la dirección dada que sirven de diámetros, llevan circunscritas unas circunferencias. Hallar la envolvente de esta familia de circunferencias.

3355. La recta se desplaza de tal modo que el producto de los segmentos cortados por ésta en los ejes de coordenadas, es igual a la magnitud constante a. Hallar la envolvente de estas rectas.

3356. Mostrar que toda línea es envolvente de la familia de sus tangentes.

3357. Mostrar que la evoluta de la línea es la envolvente de la familia de sus normales. Hallar la evoluta de la parábola $y^2 = 2px$ como lugar geométrico de los centros de curvatura y como envolvente de la familia de normales. Comparar los resultados.

3358. Demostrar el teorema: si la línea (A) es la envolvente de la familia de rectas $x \cos t + y \operatorname{sen} t - f(t) = 0$, la evoluta de la línea (A) es la envolvente de la familia de rectas $-x \operatorname{sen} t + y \cos t - f'(t) = 0$.

3359. El radio vector $\overline{OM}$ de cierto punto M de la hipérbola equilátera $xy = 1$ es proyectado sobre las asíntotas de la hipérbola. Hallar la envolvente de las elipses trazadas en las proyecciones $\overline{OM}$ sirviendo éstas de semiejes.

§ 3. Función vectorial del argumento escalar. Líneas alabeadas. Superficies

Función vectorial del argumento escalar

3360. Demostrar las siguientes fórmulas de derivación

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{uv}) = \boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \times \boldsymbol{v}.$$

Aquí $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son funciones vectoriales del argumento escalar t.

3361. Sea dado $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Hallar las derivadas.

$$\text{a) } \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}^2); \quad \text{b) } \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right); \quad \text{c) } \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right); \quad \text{d) } \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right).$$

3362. Los vectores $\boldsymbol{r}(t)$ y $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ son dados como colineares para todos los valores de t. Demostrar que los vectores $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$, $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}$, ..., $\frac{d^n\boldsymbol{r}}{dt^n}$ son también colineares al vector $\boldsymbol{r}(t)$.

3363. Demostrar que si el módulo $|\boldsymbol{r}|$ de la función $\boldsymbol{r}(t)$ sigue constante para todos los valores de t, se tiene $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \perp \boldsymbol{r}$. (¿Cuál sería la interpretación geomértica de este hecho?) ¿Se verifica el teorema inverso?

3364. Sea dado $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} \cos \omega t + \boldsymbol{b} \operatorname{sen} \omega t$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores constantes. Demostrar que

1) $\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \omega \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ y 2) $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + \omega^2 \boldsymbol{r} = 0$.

3365. Demostrar que si $\boldsymbol{e}$ es vector unitario de la dirección del vector $\boldsymbol{E}$, se tiene $\boldsymbol{e} \times d\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{E} \times d\boldsymbol{E}}{E^2}$.

3366. Demostrar que si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} e^{\omega t} + \boldsymbol{b} e^{-\omega t}$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores constantes, se tiene $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} - \omega^2 \boldsymbol{r} = 0$.

3367. $\boldsymbol{u} = \alpha (x, y, z, t) \boldsymbol{i} + \beta (x, y, z, t) \boldsymbol{j} + \gamma (x, y, z, t) \boldsymbol{k}$, donde x, y, z son funciones de t. Demostrar que

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

3368. Sea dado $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$, $u = \varphi(x)$. Expresar las derivadas $\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dx^2}$, $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dx^3}$ por medio de $\frac{d\boldsymbol{r}}{du}$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{du^2}$, $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{du^3}$.

3369. Demostrar que si para la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ se verifica la relación $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \alpha \cdot \boldsymbol{r}$, donde $\alpha = \text{const}$, la hodógrafa de la función $\boldsymbol{r}(t)$ es un rayo que sale del polo.

3370. Sea $\boldsymbol{r}(t)$ una función definida, continua y derivable en el intervalo (t_1, t_2), siendo $\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}(t_2)$. Aplicar el teorema de Rolle a la función $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}$, donde $\boldsymbol{a}$ es cualquier vector constante. Dar interpretación geométrica del resultado.

3371. Sea dado el radio vector de un punto móvil $\boldsymbol{r}\,\{a \operatorname{sen} t, -a \cos t, bt^2\}$ (donde t es el tiempo, a y b son constantes). Hallar las hodógrafas de la velocidad y la aceleración.

3372. Hallar la trayectoria del movimiento para el cual el radio vector del punto móvil satisfaga la condición $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$, donde $\boldsymbol{a}$ es vector constante.

3373. El punto material se desplaza de acuerdo con la ley $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2} \boldsymbol{g} t^2$ ($\boldsymbol{r}$ es el radio vector del mismo punto en el momento t, $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{g}$ son vectores dados). Mostrar que: 1) la energía cinética del punto material es una función cuadrática del tiempo; 2) $\boldsymbol{v}_0$ es la velocidad inicial (esto es, el valor del vector de la velocidad en el momento $t = 0$); 3) el movimiento se efectúa siendo la aceleración constante e igual al vector $\boldsymbol{g}$; 4) el movimiento se efectúa sobre la parábola (a no ser colineares los vectores $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{g}$) cuyo eje es paralelo al vector $\boldsymbol{g}$.

3374. La ley del movimiento del punto material se da por la fórmula

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} \cos t + \boldsymbol{b} \operatorname{sen} t + \boldsymbol{c},$$

donde los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí. Determinar la trayectoria del movimiento. ¿En qué momentos sería extremada la velocidad del movimiento? ¿En qué momentos sería extremada la aceleración?

3375. Las fórmulas para pasar de las coordenadas cartesianas a las esféricas presentan la siguiente forma: $x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$, $z = \rho \cos \theta$, donde ρ es la distancia que media entre el punto dado y el polo, θ es su latitud, φ es el ácimut, o sea, la longitud. Hallar los componentes de la velocidad del movimiento del punto material dirigidos hacia los vectores ortogonales unitarios e_ρ, e_θ, e_φ.

Líneas alabeadas

En los ejercicios 3376—3383 formar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal para las líneas dadas en los puntos indicados.

3376. $\boldsymbol{r}\left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2},\right)$ esto es, $x=\frac{t^4}{4}$, $x=\frac{t^3}{3}$, $y=\frac{t^2}{2}$ en un punto cualquiera.

3377. $x=a\cos\varphi$, $y=a\operatorname{sen}\varphi$, $z=\frac{k}{2\pi}\varphi$ en el punto dado $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{k}{8}\right)$.
Demostrar que la tangente en todos los puntos de la línea forma un mismo ángulo con el eje Oz.

3378. $x=at$, $y=\frac{1}{2}at^2$, $z=\frac{1}{3}at^3$ en el punto $(6a, 18a, 72a)$.

3379. $x=t-\operatorname{sen} t$, $y=1-\cos t$, $z=4\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ en el punto $(\pi/2-1, 1, 2\sqrt{2})$.

3380. $y^2+z^2=25$, $x^2+y^2=10$ en el punto $(1, 3, 4)$.

3381. $2x^2+3y^2+z^2=47$, $x^2+2y^2=z$ en el punto $(-2, 1, 6)$.

3382. $x^2+y^2=z^2$, $x=y$ en el punto (x_0, y_0, z_0)

3383. $x^3+z^3=a^3$, $y^3+z^3=b^3$ en un punto cualquiera.

3384. En la línea $\boldsymbol{r}\{\cos t, \operatorname{sen} t, e^t\}$ hallar el punto en el cual la tangente sea paralela al plano $\sqrt{3}x+y-4=0$.

En los ejercicios 3385—3387 formar las ecuaciones del plano osculador, la normal principal y binormal a las líneas dadas en los puntos indicados.

3385. $y^2=x$, $x^2=z$ en los puntos $(1, 1, 1)$.

3386. $x^2=2az$, $y^2=2bz$ en un punto cualquiera.

3387. $\boldsymbol{r}\{e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\}$ en el punto $(e, e^{-1}, \sqrt{2})$.

3388. Mostrar que las tangentes, las normales principales y binormales de la línea $\boldsymbol{r}\{e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t, e^t\}$ forman ángulos constantes con el eje Oz.

En los ejercicios 3389—3392 formar las ecuaciones de la recta tangente, el plano normal, la binormal, el plano osculador, la normal principal y el plano rectificante a las líneas dadas en los puntos indicados.

3389. $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = t^3$ en el punto (1, 0, 1).

3390. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2$ en el punto (1, 1, 1).

3391. $\boldsymbol{r}\{\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{tg} t\}$ en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

3392. $\boldsymbol{r}\{t^3 - t^2 - 5,\ 3t^2 + 1,\ 2t^3 - 16\}$ en el punto correspondiente al valor del parámetro $t = 2$.

3393. Mostrar que la línea $\boldsymbol{r}\{2t + 3,\ 3t - 1,\ t^2\}$ tiene en todos los puntos un mismo plano osculador. Interpretar este hecho desde el punto de vista geométrico.

3394. Demostrar que la línea

$$\boldsymbol{r}\{a_1t^2 + b_1t + c_1,\ a_2t^2 + b_2t + c_2,\ a_3t^2 + b_3t + c_3\}$$

es plana y formar la ecuación del plano en que se halla situada.

3395. Hallar el radio de torsión de la línea $\boldsymbol{r}\{\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{ch} t\}$.

3396. Hallar el radio de curvatura de la línea $\boldsymbol{r}\{\ln\cos t, \ln\operatorname{sen} t, \sqrt{2}t\}$, $0 < t < \pi/2$. Mostrar que la torsión en cualquier punto suyo es igual a la curvatura en este punto.

3397. Mostrar que para la línea $\boldsymbol{r}\{e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t, e^t\}$ (véase el ejercicio 3388) la relación entre la curvatura y la torsión se mantiene constante para todos los puntos de la curva.

3398. ¿Cómo podría ser expresada la curvatura de la línea alabeada dada por las ecuaciones $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$?

3399. Expresar los vectores $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ por medio de las derivadas del radio vector del punto en la curva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

3400. Expresar cada uno de los vectores $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ por medio de los otros dos.

3401. Hallar el vector $\boldsymbol{\omega}(s)$ (vector de Darboux) que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau}_1;\quad \frac{d\boldsymbol{\nu}_1}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}_1;\quad \frac{d\boldsymbol{\beta}_1}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\beta}_1.$$

Longitud del arco de la línea alabeada

En los ejercicios 3402—3409 hallar la longitud del arco de las líneas que se indican.

3402. $\boldsymbol{r}\{2t, \ln t, t^2\}$ desde $t = 1$ hasta $t = 10$.

3403. $\boldsymbol{r}\{a\cos t, a\operatorname{sen} t, a\ln\cos t\}$ desde el punto $(a, 0, 0)$ hasta el punto $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{a}{2}\ln 2\right)$.

3404. $\boldsymbol{r}\{e^t\cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t\}$ desde el punto $(1, 0, 1)$ hasta el punto correspondiente al parámetro t.

3405. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(3, 3, 2)$.

3406. $z^2 = 2ax$, $9y^2 = 16xz$, desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(2a, 8a/3, 2a)$.

3407. $4ax = (y+z)^2$, $4x^2+3y^2 = 3z^2$ desde el origen de coordenadas hasta el punto (x, y, z).

3408. $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $z = a \ln \frac{2a}{2a-x}$ desde el origen de coordenadas hasta el punto (x, y, z).

3409. $y = a \arcsen \frac{x}{a}$, $z = \frac{1}{4} a \ln \frac{a+x}{a-x}$ desde el origen de coordenadas hasta el punto $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\pi}{6}, \frac{a}{4}\ln 3\right)$.

Superficies

En los ejercicios 3410—3419 escribir las ecuaciones de los planos tangentes y las normales en los puntos indicados, para las superficies dadas.

3410. $z = 2x^2 - 4y^2$ en el punto $(2, 1, 4)$.

3411. $z = xy$ en el punto $(1, 1, 1)$.

3412. $z = \frac{x^3 - 3axy + y^3}{a^2}$ en el punto $(a, a, -a)$.

3413. $z = \sqrt{x^2+y^2} - xy$ en el punto $(3, 4, -7)$.

3414. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ en el punto $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

3415. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

3416. $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ en el punto $(1, 2, -1)$.

3417. $3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0$ en el punto $(1, 1, 1)$.

3418. $(z^2 - x^2)\,xyz - y^5 = 5$ en el punto $(1, 1, 2)$.

3419. $4 + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = x+y+z$ en el punto $(2, 3, 6)$.

3420. Mostrar que la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en cualquier punto suyo $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tiene la siguiente forma:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

3421. Trazar el plano tangente al elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, de tal modo que sea paralelo al plano $x - y + 2z = 0$.

3422. Trazar el plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ de tal modo que corte segmentos de igual longitud en los semiejes positivos.

3423. Mostrar que las superficies $x+2y-\ln z+4=0$ y $x^2-xy-8x+z+5=0$ son tangentes, esto es, tienen un plano común tangente, en el punto $(2, -3, 1)$.

3424. Demostrar que todos los planos tangentes a la superficie $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ se cortan en un mismo punto.

3425. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la esfera $\boldsymbol{r}\,\{u\cos v,\ u \operatorname{sen} v,\ \sqrt{a^2-u^2}\}$ en el punto $\boldsymbol{r}_0\,\{x_0, y_0, z_0\}$.

3426. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal al paraboloide hiperbólico $\boldsymbol{r}\,\{a(u+v),\ b(u-v),\ uv\}$ en un punto cualquiera $\{x_0, y_0, z_0\}$.

3427. Demostrar que las superficies $x^2+y^2+z^2=ax$ y $x^2+y^2+z^2=by$ son ortogonales entre sí.

3428. Mostrar que el plano tangente a la superficie $xyz=a^3$ en cualquier punto suyo forma un tetraedro de volumen constante con los planos de coordenadas. Determinar este volumen.

3429. Mostrar que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ cortan, en los ejes de coordenadas, segmentos cuya suma es igual a a.

3430. Escribir la ecuación del plano tangente perpendicular a la recta $\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ para la superficie $z=xy$.

3431. Mostrar que la longitud del segmento de la normal entre la superficie $x^2+y^2+z^2=y$ y el plano xOy es igual a la distancia que media entre el origen de coordenadas y la proyección de la normal en este plano.

3432. Demostrar que la normal a la superficie del elipsoide de revolución $\frac{x^2+z^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ en cualquier punto suyo $P(x, y, z)$ forma ángulos iguales con las rectas PA y PB, si $A(0, -4, 0)$ y $B(0, 4, 0)$.

3433. Demostrar que todas las normales a la superficie de revolución

$$z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

cortan el eje de revolución.

3434. Trazar un plano tangente a la superficie $x^2-y^2-3z=0$ de tal modo que pase por el punto $A(0, 0, -1)$ y que sea paralelo a la recta $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

3435. En la superficie $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$ hallar los puntos en los cuales los planos tangentes sean paralelos a los planos coordenados.

3436. Formar la ecuación del plano tangente a la superficie $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ en un punto cualquiera. Expresar los coeficientes de esta ecuación

a) a través de los valores de los parámetros u_0 y v_0,

b) a través de las coordenadas x_0, y_0, z_0 del punto de tangencia.

3437. Hallar el lugar geométrico de las bases de las perpendiculares bajadas desde el origen de coordenadas a los planos tangentes al paraboloide de revolución $2pz = x^2 + y^2$.

3438. Hallar el lugar geométrico de las bases de las perpendiculares bajadas desde el origen de coordenadas a los planos tangentes a la superficie $xyz = a^3$.

§ 4. Campo escalar. Gradiente. Derivada respecto a la dirección

Gradiente

3439. 1) $\psi(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 1$. Hallar las proyecciones del gradiente en el punto (1, 2).

2) $u = 5x^2y - 3xy^3 + y^4$. Hallar las proyecciones del gradiente en un punto cualquiera.

3440. 1) $z = x^2 + y^2$. Hallar grad z en el punto (3, 2).

2) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$. Hallar grad z en el punto (2, 1).

3) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Hallar grad x en el punto (x_0, y_0).

3441. 1) Hallar la pendiente más pronunciada que caracteriza la superficie ascendiente $z = \ln (x^2 + 4y^2)$ en el punto (6, 4, ln 100).

2) Hallar la pendiente más pronunciada de la superficie $z = x^y$ en el punto (2, 2, 4).

3442. ¿Cuál es la dirección de la mayor variación de la función $\varphi(x, y, z) = x \operatorname{sen} z - y \cos z$ en el origen de coordenadas?

3443. 1) $z = \arcsen \frac{x}{x+y}$. Hallar el ángulo entre los gradientes de esta función en los puntos (1, 1) y (3, 4).

2) Sean dadas las funciones $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Hallar el ángulo entre los gradientes de estas funciones en el punto (3, 4).

3444. 1) Hallar el punto en el cual el gradiente de la función $z = \ln \left(x + \frac{1}{y}\right)$ sea igual a $\mathbf{i} - \frac{16}{9}\mathbf{j}$.

2) Hallar los puntos en los cuales el módulo del gradiente de la función $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ sea igual a 2.

3445. Demostrar las siguientes relaciones (φ y ψ son funciones derivables, c es constante):

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi;\quad \operatorname{grad}(c+\varphi)=\operatorname{grad}\varphi;$$
$$\operatorname{grad}(c\varphi)=c\operatorname{grad}\varphi;\quad \operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi;$$
$$\operatorname{grad}(\varphi^n)=n\varphi^{n-1}\operatorname{grad}\varphi;\quad \operatorname{grad}[\varphi(\psi)]=\varphi'(\psi)\operatorname{grad}\psi.$$

3446. $z=\varphi(u, v)$, $u=\psi(x, y)$, $v=\zeta(x, y)$. Mostrar que

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

3447. 1) $u(x, y, z)=x^2y^2z$. Hallar las proyecciones de grad $\boldsymbol{u}$ en el punto (x_0, y_0, z_0).

2) $u(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Hallar grad u.

3448. Mostrar que la función $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ satisface la relación $u = 2\ln 2 - \ln(\operatorname{grad} u)^2$.

3449. Demostrar que si x, y, z son funciones de t, se tiene

$$\frac{d}{dt}f(x, y, z)=\operatorname{grad} f\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

donde $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

3450. Aplicar la relación demostrada en el ejercicio anterior para hallar el gradiente de la función:

1) $f=\boldsymbol{r}^2$; 2) $f=|\boldsymbol{r}|$; 3) $f=F(\boldsymbol{r}^2)$; 4) $f=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})$; 5) $f=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})$;

donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores constantes.

Derivada respecto a la dirección

3451. 1) Hallar la derivada de la función $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ en el punto M (3, 1) en la dirección que va desde este punto hasta el punto (6, 5).

2) Hallar la derivada de la función $z = \operatorname{arctg} xy$ en el punto (1, 1) en la dirección de la bisectriz del primer ángulo coordenado.

3) Hallar la derivada de la función $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ en el punto (2, 1) en la dirección que va desde éste al origen de coordenadas.

4) Hallar la derivada de la función $z = \ln(e^x + e^y)$ en el origen de coordenadas en la dirección del rayo que forma el ángulo α con el eje de abscisas.

3452. Hallar la derivada de la función $z = \ln(x + y)$ en el punto (1, 2) perteneciente a la parábola $y^2 = 4x$ en la dirección de ésta.

3453. Hallar la derivada de la función $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ en el punto $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, perteneciente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$, en la dirección de ésta.

3454. Demostrar que la derivada de la función $z = \frac{y^2}{x}$ en cualquier punto de la elipse $2x^2 + y^2 = 1$ en la dirección de la normal hacia la elipse, es igual a cero.

3455. 1) Hallar la derivada de la función $u = xy^2 + z^3 - xyz$ en el punto $M(1, 1, 2)$ en la dirección que forma ángulos de 60°, 45°, 60°, respectivamente, con los ejes de coordenadas.

2) Hallar la derivada de la función $w = xyz$ en el punto $A(5, 1, 2)$ en la dirección que va desde este punto al punto $B(9, 4, 14)$.

3456. Hallar la derivada de la función $u = x^2y^2z^2$ en el punto $A(1, -1, 3)$ en la dirección que va desde este punto al punto $B(0, 1, 1)$.

3457. Demostrar que la derivada de la función $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ en cualquier punto $M(x, y, z)$ en la direccion que va desde éste al origen de coordenadas, es igual a $-\frac{2u}{r}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3458. Demostrar que la derivada de la función $u = f(x, y, z)$ en la dirección de su gradiente es igual al módulo de éste.

3459. Hallar la derivada de la función

$$u = \frac{1}{r}, \text{ donde } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

en la dirección de su gradiente.

Capítulo XII

Integrales múltiples e integración múltiple

§ 1. Integrales dobles y triples

3460. Una placa fina (se prescinde de su espesor) se halla en el plano xOy ocupando el dominio D. La densidad de la placa es función del punto $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y)$. Hallar la masa de la placa.

3461. Por la misma placa (véase el ejercicio anterior) está distribuida la carga eléctrica de densidad superficial $\sigma = \sigma(P) = \sigma(x, y)$. Formar la expresión para la carga global de la placa.

3462. La misma placa (véase el ejercicio 3460) gira alrededor del eje Ox con la velocidad angular ω. Formar la expresión para la energía cinética de la placa.

3463. El calor específico de la placa (véase el ejercicio 3460) varía de acuerdo con la ley $c = c(P) = c(x, y)$. Hallar la cantidad de calor que recibió la placa al ser calentada desde la temperatura t_1 hasta t_2.

3464. El cuerpo ocupa un cierto dominio Ω en el espacio. Su densidad es función del punto $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y, z)$. Hallar la masa del cuerpo.

3465. Por el mismo cuerpo (véase el ejercicio 3464) está distribuida, de manera no homogénea, la carga eléctrica cuya densidad es función del punto $\delta = \delta(x, y, z)$. Hallar la carga global del cuerpo.

Evaluar las integrales en los ejercicios 3466—3476.

3466. $\iint\limits_D (x+y+10)\,d\sigma$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant 4$.

3467. $\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant 4$.

3468. $\iint\limits_D (x+y+1)\,d\sigma$, donde D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3469. $\iint\limits_D (x+xy-x^2-y^2)\,d\sigma$, donde D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3470. $\iint\limits_D xy(x+y)\,d\sigma$, donde D es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3471. $\iint\limits_D (x+1)^y\,d\sigma$, donde D es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3472. $\iint\limits_D (x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}+2)\,d\sigma$, donde D es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3473. $\iint\limits_D (x^2+y^2-4x-4y+10)\,d\sigma$, donde D es el dominio acotado por la elipse $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$ (incluyendo la frontera).

3474. $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dv$, donde Ω es la esfera $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$.

3475. $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dv$, donde Ω es el cubo $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, $x \leqslant 3$, $y \leqslant 3$, $z \leqslant 3$.

3476. $\iiint\limits_\Omega (x+y-z+10)\,dv$, donde Ω es la esfera $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3$.

§ 2. Integración múltiple

Integral doble. Dominio rectangular

En los ejercicios 3477—3484 calcular las integrales dobles tomadas sobre los dominios rectangulares de integración D, dados por los datos indicados entre paréntesis.

3477. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 2)$.

3478. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dx\,dy \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3479. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1)$

3480. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1).$

3481. $\iint\limits_D \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1)$

3482. $\iint\limits_D x \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

3483. $\iint\limits_D x^2 y e^{xy}\,dx\,dy \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2).$

3484. $\iint\limits_D x^2 y \cos(xy^2)\,dx\,dy \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2\right).$

Integral doble. Cualquier dominio

En los ejercicios 3485—3497 hallar los límites de la integral iterada de segundo orden $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ siendo dados los dominios finitos de integración D.

3485. Paralelogramo cuyos lados son
$x = 3, \quad x = 5, \quad 3x - 2y + 4 = 0, \quad 3x - 2y + 1 = 0.$

3486. Triángulo cuyos lados son $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2.$

3487. $x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

3488. $x + y \leqslant 1,\ x - y \leqslant 1,\ x \geqslant 0.$

3489. $y \geqslant x^2,\ y \leqslant 4 - x^2.$

3490. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1.$ 3491. $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 4.$

3492. D está limitado por las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}.$

3493. Triángulo cuyos lados son $y = x,\ y = 2x,\ x + y = 6.$

3494. Paralelogramo cuyos lados son $y = x,\ y = x + 3,\ y = -2x + 1,\ y = -2x + 5.$

3495. $y - 2x \leqslant 0,\ 2y - x \geqslant 0,\ xy \leqslant 2.$

3496. $y^2 \leqslant 8x,\ \ y \leqslant 2x,\ \ y \leqslant 4x - 24 \leqslant 0.$

3497. D está limitado por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (se tiene en cuenta el dominio que contiene el origen de coordenadas).

En los ejercicios 3498—3503 cambiar el orden de integración.

3498. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$ 3499. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$

3500. $\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y)\, dy.$ **3501.** $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy.$

3502. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\, dy.$ **3503.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x, y)\, dy.$

3504. Cambiando el orden de integración escribir la expresión dada en forma de una integral iterada de segundo orden:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x, y)\, dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\, dy;$

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\, dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y)\, dy;$

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{2/3}} f(x, y)\, dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y)\, dy.$

3505. Representar la integral doble $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$, donde D son los dominios indicados en las figs. 62, 63, 64, 65, en forma de

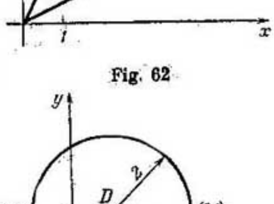

Fig. 62

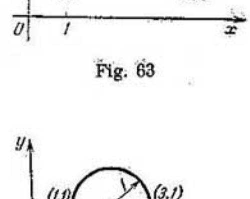

Fig. 63

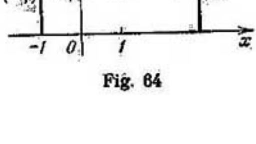

Fig. 64

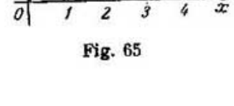

Fig. 65

la suma de las integrales iteradas de segundo orden (con el menor número posible de sumandos). Las figuras de las ilustraciones 64 y 65 representan rectas y arcos de circunferencias.

En los ejercicios 3506—3512 calcular las integrales dadas.

3506. 1) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy$; 2) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x}\, dy$; 3) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x\, dx$.

3507. $\iint\limits_D x^3y^2\, dx\, dy$, D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

3508. $\iint\limits_D (x^2+y)\, dx\, dy$, D es un dominio acotado por las parábolas $y=x^2$ e $y^2=x$.

3509. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$, D es un dominio acotado por las rectas $x=2$, $y=x$ y la hipérbola $xy=1$.

3510. $\iint\limits_D \cos(x+y)\, dx\, dy$, D es un dominio acotado por las rectas $x=0$, $y=\pi$ e $y=x$.

3511. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$, D es la cuarta parte del círculo $x^2+y^2 \leqslant 1$ que se halla en el primer cuadrante.

3512. $\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\, dx\, dy$, D es un dominio acotado por la línea $x^3+y^3=1$ y los ejes de coordenadas.

3513. Hallar el valor medio de la función $z = 12 - 2x - 3y$ en el dominio acotado por las rectas $12 - 2x - 3y = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

3514. Hallar el valor medio de la función $z = 2x + y$ en el triángulo limitado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 3$.

3515. Hallar el valor medio de la función $z = x + 6y$ en el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = 5x$ y $x = 1$.

3516. Hallar el valor medio de la función $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Integral triple

En los ejercicios 3517—3524 calcular las integrales.

3517. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dz$. **3518.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c (x+y+z)\, dz$.

3519. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y xyz\,dz.$ **3520.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3y^3z\,dz.$

3521. $\int\limits_0^{e-1} dx \int\limits_0^{e-x-1} dy \int\limits_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\,dz.$

3522. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, Ω es un dominio limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

3523. $\iiint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy\,dz$, Ω es un dominio limitado por el paraboloide hiperbólico $z=xy$ y los planos $x+y=1$ y $z=0$ $(z \geqslant 0)$.

3524. $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$, Ω es un dominio limitado por el cilindro $y=\sqrt{x}$ y los planos $y=0$, $z=0$ y $x+z=\pi/2$.

§ 3. Integrales en los sistemas de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

Integral doble

En los ejercicios 3525—3531 pasar a las coordenadas polares ρ y φ ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$) en la integral doble $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ y apuntar los límites de integración.

3525. D es el círculo: 1) $x^2+y^2 \leqslant R^2$; 2) $x^2+y^2 \leqslant ax$; 3) $x^2+y^2 \leqslant by$.

3526. D es un dominio limitado por las circunferencias $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$ y las rectas $y=x$, $y=2x$.

3527. D es el dominio que es la parte común de dos círculos $x^2+y^2 \leqslant ax$, $x^2+y^2 \leqslant by$.

3528. D es un dominio limitado por las rectas

$$y=x, \quad y=0 \quad \text{y} \quad x=1.$$

3529. D es el menor de los segmentos en que es cortado el círculo $x^2+y^2 \leqslant 4$ por la recta $x+y=2$.

3530. D es la parte interior del lazo derecho de la lemniscata de Bernoulli $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3531. D es un dominio definido por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $(x^2 + y^2)^3 \leqslant 4a^2x^2y^2$.

En los ejercicios 3532—3535 transformar las integrales dobles a las coordenadas polares.

3532. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\, dy$. **3533.** $\int\limits_{\frac{R}{2}}^{2R} dy \int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x, y)\, dx$.

3534. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\, dy$.

3535. $\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int\limits_0^{Rx} f\left(\frac{x}{y}\right) dy + \int\limits_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy$.

En los ejercicios 3536—3540 calcular las integrales dobles pasando a las coordenadas polares.

3536. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\, dy$.

3537. $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy$, donde el dominio D viene determinado por las desigualdades $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3538. $\iint\limits_D (h-2x-3y)\, dx\, dy$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

3539. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant Rx$.

3540. $\iint\limits_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, dx\, dy$, donde D es una parte del círculo

$$x^2+y^2 \geqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant 9,\ y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \leqslant x\sqrt{3}.$$

3541. Partiendo de razonamientos geométricos mostrar que si las coordenadas cartesianas se transforman de acuerdo con las fórmulas $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \operatorname{sen} \varphi$ (a y b son constantes), el elemento de área será el siguiente:

$$d\sigma = ab\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

En los ejercicios 3542—3544 transformar las integrales dobles aplicando el resultado del ejercicio anterior y seleccionando a y b de manera conveniente.

3542. $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, donde el dominio D está limitado por la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

3543. $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, donde el dominio D está limitado por la línea $\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^2=x^2y$.

3544. $\iint\limits_D f\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dx\,dy$, donde D es una parte del anillo elíptico limitada por las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ y situada en el primer cuadrante.

3545. Calcular la integral $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, donde D es un dominio limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y situado en el primer cuadrante.

3546. Calcular la integral $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$, donde D es un dominio limitado por la línea $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4=\frac{xy}{\sqrt{6}}$ y situado en el primer cuadrante.

Integral triple

En los ejercicios 3547 — 3551 pasar a las coordenadas cilíndricas ρ, φ, z ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z=z$) o a las coordenadas esféricas ρ, θ, φ ($x=\rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z=\rho\cos\theta$) en la integral triple $\iiint\limits_\Omega f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ e indicar los límites de integración.

3547. Ω es un dominio que se halla situado en el primer octante y limitado por el cilindro $x^2+y^2=R^2$ y los planos $z=0$, $z=1$, $y=x$, $y=\sqrt{3}$.

3548. Ω es un dominio limitado por el cilindro $x^2+y^2=2x$, el plano $z=0$ y el paraboloide $z=x^2+y^2$.

3549. Ω es una parte de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ situada en el primer octante.

3550. Ω es una parte de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ situada dentro del cilindro $(x^2+y^2)^2=R^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$.

3551. Ω es la parte común de dos esferas

$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2 \quad \text{y} \quad x^2+y^2+(z-R)^2\leqslant R^2.$$

En los ejercicios 3552—3558 calcular las integrales pasando a las coordenadas cilíndricas o a las esféricas.

3552. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz.$

3553. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz.$

3554. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz$

3555. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2\, dz.}$

3556. $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$, donde el dominio Ω viene determinado por las desigualdades $z\geqslant 0$, $r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

3557. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, donde Ω es la esfera x^2+y^2+ $+z^2\leqslant 1$.

3558. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, donde Ω es el cilindro $x^2+y^2\leqslant$ $\leqslant 1$, $-1\leqslant z\leqslant 1$.

§ 4. Aplicaciones de integrales dobles y triples

Volumen del cuerpo. I

En los ejercicios 3559—3596 hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies que se indican, aplicando la integración doble (los parámetros que se indican en los ejercicios se consideran positivos).

3559. Por los planos de coordenadas, los planos $x = 4$ e $y = 4$ y el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2 + 1$.

3560. Por los planos de coordenadas, los planos $x = a$, $y = b$, y el paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$.

3561. Por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ y los planos coordenados (pirámide).

3562. Por los planos $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ y $x + y + z = 6$.

3563. Por el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$, los planos coordenados y el plano $x + y = 1$.

3564. Por el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.

3565. Por los cilindros $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, y los planos $z = 0$, $x + z = 6$.

3566. Por los planos coordenados, el plano $2x + 3y - 12 = 0$ y el cilindro $z = y^2/2$.

3567. Por el cilindro $z = 9 - y^2$, los planos coordenados y el plano $3x + 4y = 12$ $(y \geqslant 0)$.

3568. Por el cilindro $z = 4 - x^2$, los planos coordenados y el plano $2x + y = 4$ $(x \geqslant 0)$.

3569* Por el cilindro $2y^2 = x$, los planos $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ y $z = 0$.

3570. Por el cilindro circular de radio r cuyo eje es el de ordenadas, por los planos coordenados y por el plano $\frac{x}{r} + \frac{y}{a} = 1$.

3571. Por el cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, los planos $z = 12 - 3x - 4y$ y $z = 1$.

3572. Por los cilindros $x^2 + y^2 = R^2$ y $x^2 + z^2 = R^2$.

3573. Por los cilindros $z = 4 - y^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ y el plano $z = 0$.

3574. Por los cilindros $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \frac{x^3}{a^2}$ y el plano $z = 0$ $(x \geqslant 0)$.

3575. Por el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = 3$.

3576. Por el paraboloide hiperbólico $z = xy$, el cilindro $y = \sqrt{x}$ y los planos $x + y = 2$, $y = 0$ y $z = 0$.

3577. Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $y = x^2$ y los planos $y = 1$ y $z = 0$.

3578. Por el cilindro elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y los planos $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$ y $z = 0$ $(x \geqslant 0)$.

3579. Por el paraboloide $z = \frac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$ y el plano $z = 0$.

3580. Por los cilindros $y = e^x$, $x = e^{-x}$, $z = e^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

3581. Por los cilindros $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$ y los planos $z = 0$ e $y + z = 1$.

3582*. Por los cilindros $z = \ln x$ y $z = \ln y$ y los planos $z = 0$ y $x + y = 2e$ $(x \geqslant 1)$.

3583. Por los cilindros $y = x + \operatorname{sen} x$, $y = x - \operatorname{sen} x$ y $z = \frac{(x+y)}{4}$ (cilindro parabólico cuyas generatrices son paralelas a la recta $x - y = 0$, $z = 0$) y el plano $z = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi,\ y \geqslant 0)$.

3584. Por la superficie cónica $z^2 = xy$ (véase la fig. 66), el cilindro $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ y el plano $z = 0$.

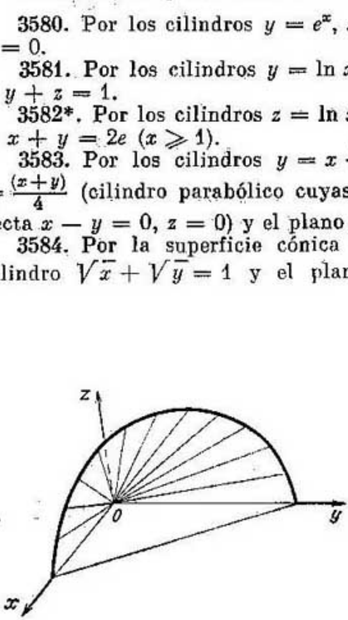

Fig. 66

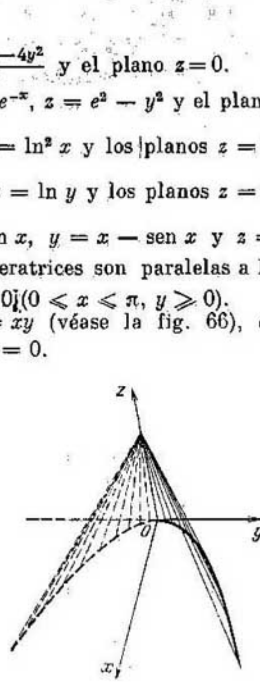

Fig. 67

3585. Por la superficie cónica $4y^2 = x(2 - z)$ (cono parabólico, véase la fig. 67) y los planos $z = 0$ y $x + z = 2$.

3586. Por la superficie $z = \cos x \cdot \cos y$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = \pi/2$.

3587. Por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, los planos $z = 0$ y $z = x + y + 10$.

3588. Por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, los planos $2x - z = 0$ y $4x - z = 0$.

3589. Por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, el paraboloide $Rz = 2R^2 + x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$.

3590. Por el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, el paraboloide $z = \frac{x^2 + y^2}{a}$ y el plano $z = 0$.

3591. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ax$. (Problema de Viviani).

3592. Por el paraboloide hiperbólico $z = \frac{xy}{a}$, el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y el plano $z = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

3593. Por los cilindros $x^2 + y^2 = x$ y $x^2 + y^2 = 2x$, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y los planos $x + y = 0$, $x - y = 0$ y $z = 0$.

3594. Por los cilindros $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$ y por los planos $z = x + 2y$ y $z = 0$.

3595. Por la superficie cónica $z^2 = xy$ y el cilindro $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

3596. Por el helicoide («escalera de caracol») $z = h \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y los planos $x = 0$, $z = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

Area de la figura plana

En los ejercicios 3597—3608 hallar las áreas de los dominios que se indican efectuando la integración doble.

3597. Del dominio limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

3598. Del dominio limitado por las rectas $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.

3599. Del dominio limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3600. Del dominio comprendido entre la parábola $y^2 = \frac{b^2}{a} x$ y la recta $y = \frac{b}{a} x$.

3601. Del dominio limitado por las parábolas $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, y la recta $x = 4$.

3602*. Del dominio limitado por la línea $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$.

3603. Del dominio limitado por la línea $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

3604. Del dominio limitado por la línea $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$ (lemniscata de Bernoulli).

3605. Del dominio limitado por la línea $x^3 + y^3 = 2xy$ situada en el primer cuadrante (lazo).

3606. Del dominio limitado por la línea $(x + y)^3 = xy$ situada en el primer cuadrante (lazo).

3607. Del dominio limitado por la línea $(x + y)^5 = x^2y^2$ situada en el primer cuadrante (lazo).

3608*. Del dominio limitado por la línea

1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$; 2) $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{25}$.

Volumen del cuerpo. II

En los ejercicios 3609—3625 calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies dadas efectuando la integración triple (los parámetros que se indican en los ejercicios se consideran positivos).

3609. Por los cilindros $z = 4 - y^2$ y $z = y^2 + 2$ y por los planos $x = -1$ y $x = 2$.

3610. Por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = x^2 + 2y^2$ y los planos $y = x$, $y = 2x$ y $x = 1$.

3611. Por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2x^2 + 2y^2$, el cilindro $y = x^2$ y el plano $y = x$.

3612. Por los cilindros $z = \ln(x + 2)$ y $z = \ln(6 - x)$ y los planos $x = 0$, $x + y = 2$ y $x - y = 2$.

3613*. Por el paraboloide $(x - 1)^2 + y^2 = z$ y el plano $2x + z = 2$.

3614*. Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = x + y$.

3615*. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$.

3616. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = R(R - 2z)$ $(z \geqslant 0)$.

3617. Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z^2 = xy$.

3618. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$ y el cono $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ (se tiene en cuenta la parte de la esfera situada dentro del cono).

3619*. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$. **3620.** $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$.

3621. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4$. **3622.** $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

3623. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2$.

3624. $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3z$.

3625. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z^2 = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

Area de la superficie

3626. Calcular la parte del plano $6x + 3y + 2z = 12$ que está situada en el primer octante.

3627. Calcular el área de la parte de la superficie $z^2 = 2xy$ la cual se halla por encima del rectángulo situado en el plano $z = 0$ y limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 6$.

3628. Hallar el área de la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ situada por encima del plano Oxy y recortada por el plano $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

En los ejercicios 3629—3639 hallar las áreas de las partes indicadas de las superficies dadas.

3629. De la parte $z^2 = x^2 + y^2$ recortada por el cilindro $z^2 = 2py$.

3630. De la parte $y^2 + z^2 = x^2$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$.

3631. De la parte $y^2 + z^2 = x^2$ recortada por el cilindro $x^2 - y^2 = a^2$ y los planos $y = b$, $y = -b$.

3632. De la parte $z^2 = 4x$ recortada por el cilindro $y^2 = 4x$ y el plano $x = 1$.

3633. De la parte $z = xy$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$.

3634. De la parte $2z = x^2 + y^2$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3635. De la parte $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ $(R \leqslant a)$.

3636. De la parte $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = Rx$.

3637. De la parte $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ recortada por la superficie $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$.

3638. De la parte $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ recortada por las superficies $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ que está situada en el primer octante.

3639. De la parte $(x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha)^2 + z^2 = a^2$ situada en el primer octante $(\alpha < \pi/2)$.

3640*. Calcular el área de la superficie terrestre (considerándola esférica y siendo su radio $R \approx 6400$ km) comprendida entre los meridianos $\varphi = 30°$, $\varphi = 60°$ y los paralelos $\theta = 45°$ y $\theta = 60°$.

3641. Calcular el área total de la superficie del cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ $(z \geqslant 0)$.

3642. Los ejes de dos cilindros iguales, de radio R, se cortan formando el ángulo recto. Hallar el área de la parte de la superficie de uno de los dos cilindros, la cual se halla dentro del otro cilindro.

Momentos y centro de gravedad

En los ejercicios 3643—3646 hallar los momentos estáticos de las figuras planas homogéneas aplicando la integración doble (la densidad $\gamma = 1$).

3643. Del rectángulo de lados a y b, respecto al lado a.

3644. Del semicírculo respecto al diámetro.

3645. Del círculo respecto a una tangente.

3646. Del hexágono regular respecto a su lado.

3647. Demostrar que el momento estático del triángulo de base a, respecto a esta base depende sólo de la altura del mismo.

En los ejercicios 3648—3652 hallar los centros de gravedad de las figuras planas homogéneas efectuando la integración doble.

3648. De la figura limitada por la mitad superior de la elipse la cual se apoya en el eje mayor.

3649. De la figura limitada por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, el eje Ox y la recta $x = \pi/4$.

3650. Del sector circular correspondiente al ángulo central α (el radio del círculo es igual a R).

3651. Del segmento circular correspondiente al ángulo central α (el radio del círculo es igual a R).

3652. De la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = x^2 - x^4$ $(x \geqslant 0)$.

En los ejercicios 3653—3659 hallar los momentos de inercia de las figuras planas homogéneas (la densidad $\gamma = 1$).

3653. Del círculo de radio R, con respecto a su tangente.

3654. Del cuadrado, de lado a, con respecto a su vértice.

3655. De la elipse con respecto a su centro.

3656. Del rectángulo, de lados a y b, con respecto al punto de intersección de las diagonales.

3657. Del triángulo isósceles, de base a y la altura h, con respecto a su vértice.

3658. Del círculo de radio R con respecto al punto situado sobre su circunferencia.

3659. Del segmento de la parábola cuya cuerda es perpendicular al eje, con respecto al vértice de la parábola (la longitud de la cuerda es igual a a, la flecha, h).

3660. Demostrar que el momento de inercia del anillo circular, con respecto al centro, es dos veces mayor que el momento de inercia con respecto a cualquier eje que pasa por el centro del anillo y se halla situado en su plano.

3661. Demostrar que la suma de los momentos de inercia de la figura plana F, con respecto a cualquier par de ejes perpendiculares entre sí, que se hallan situados en el mismo plano que la figura y que pasan por un punto inmóvil O, es una magnitud constante.

3662*. Demostrar que el momento de inercia de la figura plana, con respecto a un eje es igual a $Md^2 + I_c$, donde M es la masa distribuida por la superficie, d es la distancia que media entre el eje y el centro de gravedad de la figura, I_c es el momento de inercia con respecto al eje que es paralelo al eje dado y que pasa por el centro de gravedad de la figura (teorema de Steiner).

En los ejercicios 3663—3665 hallar los momentos estáticos de los cuerpos homogéneos (la densidad $\gamma = 1$).

3663. Del paralelepípedo recto, de aristas a, b y c, con respecto a sus caras.

3664. Del cono circular recto (el radio de la base es R, la altura H), con respecto al plano que pasa por el vértice siendo paralelo a la base.

3665. Del cuerpo limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ y el plano Oxy con respecto a este mismo.

En los ejercicios 3666—3672 hallar los centros de gravedad de los cuerpos homogéneos limitados por los planos dados.

3666. Por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 4$ y $x + y + z = 8$ (paralelepípedo truncado).

3667. Por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ y los planos coordenados (se tiene en cuenta el cuerpo situado en el primer octante).

3668. Por el cilindro $z = \frac{y^2}{2}$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $2x + 3y - 12 = 0$.

3669. Por los cilindros $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ y los planos $z = 0$ y $x + z = 6$.

3670. Por el paraboloide $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z \geqslant 0)$.

3671. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el cono $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$ (sector esférico).

3672. $(x^2 + y^2 + r^2)^2 = a^3 z$.

En los ejercicios 3673—3674 hallar los centros de gravedad de las superficies homogéneas.

3673. De la parte de la esfera situada en el primer octante.

3674. De la parte del paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ recortada por el plano $z = 1$.

En los ejercicios 3675—3680 hallar los momentos de inercia de los cuerpos homogéneos cuya masa es igual a M.

3675. Del paralelepípedo recto, de aristas a, b y c, con respecto a cada una de las mismas y con respecto al centro de gravedad.

3676. De la esfera con respecto a una tangente recta.

3677. Del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ con respecto a cada uno de sus tres ejes.

3678. Del cilindro circular recto (el radio de la base es R, la altura, H), con respecto al diámetro de la base y con respecto al diámetro de su sección media.

3679. De la esfera vacía cuyo radio exterior es igual a R y el interior, r, con respecto al diámetro.

3680. Del paraboloide de revolución (de radio de la base R y de altura H), con respecto al eje que pasa por su centro de gravedad y es perpendicular al eje de revolución (momento ecuatorial).

En los ejercicios 3681—3683 calcular los momentos de inercia de las partes indicadas de las superficies homogéneas (la masa de cada parte es igual a M).

3681. De la superficie lateral del cilindro (de radio de la base R y la altura H), con respecto al eje que pasa por su centro de gravedad y es perpendicular al eje del cilindro.

3682. De la parte del paraboloide $x^2+y^2=2cz$ recortada por el plano $z=c$, con respecto al eje Oz.

3683. De la superficie lateral del cono truncado (los radios de la base son iguales a R y r, la altura H), con respecto a su eje.

Diversos problemas

3684. Hallar la masa de una lámina cuadrada, de lado $2a$, si la densidad del material de la misma es proporcional al cuadrado de distancia a partir del punto de intersección de las diagonales y en las esquinas del cuadrado es igual a 1.

3685. Un anillo plano está limitado por dos circunferencias concéntricas cuyos radio son de R y r ($R>r$). Tomando en consideración que la densidad del material es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de las circunferencias, hallar la masa del anillo. La densidad sobre la circunferencia del círculo interior es igual a 1.

3686. Una figura, limitada por una elipse de semiejes a y b, lleva distribuida sobre sí una masa de tal modo que su densidad es proporcional a la distancia desde el eje mayor, siendo igual a γ a la unidad de distancia del mismo eje. Hallar toda la masa.

3687. El cuerpo está limitado por dos superficies esféricas concéntricas cuyos radios son iguales a r y R ($R>r$). Teniendo en cuenta que la densidad del material es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de las esferas y que a la distancia igual a la unidad, la densidad es igual a γ, hallar toda la masa del cuerpo.

3688. Calcular la masa del cuerpo limitado por un cilindro circular recto de radio R y de altura H si su densidad en cualquier punto es numéricamente igual al cuadrado de distancia que media entre este mismo punto y el centro de la base del cilindro.

3689*. Calcular la masa del cuerpo limitado por un cono circular cuya altura es igual a h y el ángulo formado entre el eje y la generatriz es igual a α. Se debe tener en cuenta que la densidad es proporcional al n-ésimo grado de distancia desde el plano trazado por el vértice del cono paralelamente a la base siendo igual a γ, a la distancia igual a la unidad ($n > 0$).

3690. Hallar la masa de la esfera de radio R teniendo en cuenta que la densidad es proporcional al cubo de distancia desde el centro e igual a γ, a la distancia igual a la unidad.

3691. Hallar la masa del cuerpo limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ ($z > 0$), si la densidad en cada punto es igual a la suma de los cuadrados de coordenadas.

3692*. La densidad de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$ en cualquier punto suyo numéricamente es igual al cuadrado de distancia que media entre este punto y el origen de coordenadas. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la esfera.

3693*. Hallar el momento estático de la parte común de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$ respecto al plano Oxy. La densidad en cualquier punto del cuerpo numéricamente es igual a la distancia que media entre este punto y el plano xOy.

3694*. Demostrar que el momento de inercia de un cuerpo con respecto a cualquier eje es igual a $Md^2 + I_c$, donde M es la masa del cuerpo, d, la distancia desde el eje hasta el centro de gravedad del cuepro, e I_c es el momento de inercia con respecto al eje que es paralelo al eje dado y que pasa por el centro de gravedad del cuerpo (teorema de Steiner; compárese con el ejercicio 3662).

Resolver los problemas de los ejercicios 3695—3698 basándose en la ley de gravitación universal de Newton (véase la indicación ante el ejercicio 2670).

3695. Sea dada una esfera homogénea de radio R y de densidad γ. Calcular la fuerza con la cual atrae el punto material de la masa m que se encuentra a la distancia igual a a ($a > R$) de su centro. Mostrar que la fuerza de interacción es tal cual si toda la masa de la esfera estuviese concentrada en su centro.

3696*. Demostrar que la fuerza de interacción newtoniana entre dos esferas homogéneas es tal cual si las masas de las esferas estuviesen concentradas en sus centros.

3697. Sea dada la esfera maciza heterogénea $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ cuya densidad varía de acuerdo con la ley $\gamma = \lambda z^2$. Calcular la fuerza con la cual atrae el punto material de masa m, si éste se halla en el eje z, a la distancia igual a $2R$ del centro de la esfera.

3698. Sea dado un cuerpo homogéneo limitado por dos esferas concéntricas (capa esférica). Demostrar que la atracción que ejerce esta capa sobre un punto situado dentro de la cavidad del cuerpo, es igual a cero.

Se llama el centro de presión al punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de presión sobre la figura plana dada (todas las fuerzas de presión son perpendiculares al plano de la figura). Determinando las coordenadas del centro de presión se parte del concepto de que el momento estático de la resultante (es decir, de la presión sobre toda la superficie) respecto a cualquier eje es igual a la suma de los momentos estáticos de cada fuerza por separado respecto al mismo eje. Partiendo de todo lo sobredicho resolver los problemas de los ejercicios 3699—3701.

3699. Hallar el centro de presión del rectángulo de lados a y b ($a > b$) cuyo lado mayor se halla situado a lo largo de la superficie libre del líquido, y el plano del rectángulo es perpendicular a esta superficie.

Mostrar que la posición del centro de presión, respecto al rectángulo, no sufrirá ningún cambio si el plano del rectángulo está inclinado hacia la superficie del líquido formando el ángulo α ($\alpha \neq 0$). ¿Cómo cambiarían los resultados anteriores si el lado mayor a estuviese situado no en la superficie del líquido sino a la profundidad h (siguiendo paralelo a la superficie)?

3700. Un triángulo de altura h se halla situado en el plano inclinado hacia la superficie libre del líquido formando el ángulo α. ¿A qué profundidad se halla el centro de presión de este triángulo si:

a) la base del triángulo está en la superficie del líquido;

b) el vértice está en la superficie y la base es paralela a ésta?

3701. Hallar el centro de presión de la figura limitada por una elipse de semiejes a y b ($a > b$), si el eje mayor es perpendicular a la superficie del líquido y el extremo superior del mismo eje se encuentra a la distancia h de la superficie.

3702*. Demostrar que la presión del líquido sobre una superficie plana sumergida libremente al agua es igual al peso de la columna cilíndrica de este líquido situado encima de la superficie si ésta está situada horizontalmente a la profundidad de su centro de gravedad.

§ 5. Integrales impropias Integrales dependientes del parámetro

Integrales impropias dobles y triples

En los ejercicios 3703—3711 calcular las integrales impropias o probar su divergencia.

3703. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$. **3704.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$.

3705. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}$. **3706.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-|y|}\,dx\,dy$.

3707. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}(x+y)\,e^{-(x+y)}\,dx\,dy$. **3708.** $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} xye^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$.

3709*. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\,dx\,dy$.

3710*. $\int\limits_{0}^{\infty} dx\int\limits_{x}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$. **3711*.** $\int\limits_{0}^{\infty} dx\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-y}\frac{\operatorname{sen} y}{y^2}\,dx$.

En los ejercicios 3712—3715 esclarecer cuáles de las integrales impropias tomadas a lo largo del círculo de radio R con el centro en el origen de coordenadas, son convergentes.

3712. $\iint\limits_{D}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$. **3713.** $\iint\limits_{D}\frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3714. $\iint\limits_{D}\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy$. **3715.** $\iint\limits_{D}\frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3716. ¿Podría ser seleccionado el número m de tal modo que la integral impropia $\iint\frac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^m}}$ extendida por todo el plano sea convergente?

En los ejercicios 3717—3719 calcular las integrales impropias.

3717. $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}$ **3718.** $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xy\,dx\,dy\,d}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}$.

3719*. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz.$

En los ejercicios 3720—3722 esclarecer si son convergentes las integrales impropias tomadas sobre la esfera Ω de radio R con el centro en el origen de coordenadas.

3720. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}.$

3721. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$

3722. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dx\,dy\,dz.$

3723. Calcular la integral $\iiint\limits_{\Omega} \ln(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, donde el dominio Ω es una esfera de radio R con el centro en el origen de coordenadas.

3724*. Calcular el volumen del sólido limitado por la superficie $z=(x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$ y el plano $z=0$.

3725. Calcular el volumen del sólido limitado por la superficie $z=x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}$ y el plano $z=0$.

3726. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano $z=0$ y por una parte de la superficie $z=xe^{-(x^2+y^2)}$ situada por encima de este plano.

3727. Sea dado un sólido homogéneo limitado por un cilindro circular recto (cuyo radio de base es R, la altura, H, y la densidad, γ). Hallar la fuerza que obra sobre el punto de masa m situado en el centro de la base del cilindro.

3728. Sea dado un sólido homogéneo limitado por un cono circular recto (cuyo radio de base es R, la altura, H, y la densidad, γ). Calcular la fuerza con que este sólido atrae el punto de masa m situado en el vértice del cono.

3729. Sea dada una esfera maciza heterogénea de radio R cuya densidad γ y la distancia desde el centro r están unidas por la relación $\gamma = a - br$ $(a>0,\ b>0)$.

a) Hallar las constantes a y b si es sabido que la densidad media de la esfera es γ_m, y la densidad sobre la superficie de la esfera es γ_0.

b) Calcular la fuerza de atracción ejercida por la esfera sobre el punto de masa m situado sobre la superficie de la esfera.

Integrales dependientes del parámetro.
Regla de Leibniz

3730. Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x^2+z^2}}$.

3731. Hallar la curvatura de la línea $y = \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} d\alpha$ en el punto cuya abscisa es $x = 1$.

3732. Valiéndose de la igualdad $\int\limits_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a} \ln(1+ab)$, obtener la siguiente fórmula derivando respecto al parámetro:

$$\int\limits_0^b \frac{x\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2} \ln(1+ab) - \frac{b}{a(1+ab)}.$$

3733. Partiendo de la igualdad $\int\limits_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ calcular la integral $\int\limits_0^b \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

3734. Partiendo de la igualdad $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$ calcular la integral $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ (n es un entero positivo).

3735. Calcular el valor de la integral $\int\limits_0^\infty e^{-ax} x^{n-1}\, dx$ (n es un entero positivo) para $a > 0$, después de haber hallado $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\, dx$.

3736*. Partiendo de la igualdad (véase el ejercicio 2318) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\pi}{2\,|ab|}$ hallar $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x)^2}$.

En los ejercicios 3737—3749 calcular las integrales derivando respecto al parámetro.

3737. $\int\limits_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^{x}}\,dx \ (a > -1)$. **3738.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx \ (a > -1)$.

3739. $\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **3740.** $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \ (a^2 < 1)$.

3741. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx$. **3742.** $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \ (a^2 < 1)$.

3743. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx \ (a^2 < 1)$.

3744. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+a\operatorname{sen} x}{1-a\operatorname{sen} x}\right)\frac{dx}{\operatorname{sen} x} \ (a^2 < 1)$.

3745. $\int\limits_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}\,dx \ (a > 0)$ sabiendo que $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a > 0)$. (véase el ejercicio 2439).

3746*. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx \quad (a > 0,\ b > 0)$.

3747*. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\operatorname{sen} bx - \operatorname{sen} cx}{x}\,dx \quad (a > 0)$.

3748. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\cos bx - \cos cx}{x}\,dx \quad (a > 0)$.

3749*. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\cos^2 x + b^2\operatorname{sen}^2 x)\,dx$.

3750. Después de calcular la integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx$, hallar $\int\limits_{2}^{\frac{\pi}{0}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$.

3751. Valiéndose de la igualdad $\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$, calcular la integral

$$\int_0^1 \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\,dx \quad (\alpha>-1,\ \beta>-1).$$

3752. Valiéndose de la igualdad $2a\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ (véase el ejercicio 2439), calcular la integral $\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}}-e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$.

3753. Deducir la igualdad $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-z^2x}\,dz$ $(x>0)$ de la relación $\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integral de Poisson) y utilizarla para calcular las integrales (integrales de difracción o de Fresnel):

a) $\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$; b) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{x}}$.

Diversos problemas

3754. Sea la función $f(x)$ continua para $x\geqslant 0$, y cuando $x\to 0$ la función $f(x)$ tiende al límite finito $f(\infty)$. Tomando todo esto en consideración demostrar que si $a>0$ y $b>0$, se tiene $\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=[f(\infty)-f(0)]\ln\frac{a}{b}$.

En los ejercicios 3755—3756 calcular las integrales aplicando el resultado del ejercicio 3754.

3755. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$. **3756.** $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^n}-e^{-bx^n}}{x}\,dx$ $(n>0)$.

3757*. Sea la función $f(x)$ continua para $x\geqslant 0$ y la integral $\int_A^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ convergente para cualquier $A>0$. Demostrar, tomando en consideración todo esto, que si $a>0$ y $b>0$, se tiene $\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$. (Compárese con el ejercicio 3754.)

En los ejercicios 3758—3762 calcular las integrales aplicando el resultado del ejercicio 3757 ($a > 0$, $b > 0$).

3758. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx.$ **3759.** $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx.$

3760. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax \cdot \operatorname{sen} bx}{x}\,dx.$ **3761.** $\int\limits_0^\infty \frac{b \operatorname{sen} ax - a \operatorname{sen} bx}{x^2}\,dx.$

3762*. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}\,dx.$

3763*. La función de Laplace se define así: $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ (esta función desempeña un papel muy importante en la teoría de probabilidad). Demostrar las relaciones:

1) $\int\limits_0^x \Phi(az)\,dz=\frac{e^{-a^2x^2}-1}{a\sqrt{\pi}}+x\Phi(ax)$; 2) $\int\limits_0^\infty [1-\Phi(x)]\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$

3764*. Las funciones si (x) y ci (x) suelen ser definidas del modo siguiente:

$\operatorname{si}(x)=-\int\limits_x^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ («seno integral») y $\operatorname{ci}(x)=-\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$ («coseno integral»). Demostrar que

$$\int\limits_0^\infty \operatorname{sen} x \operatorname{si}(x)\,dx=\int\limits_0^\infty \cos x \operatorname{ci}(x)\,dx=-\frac{\pi}{4}.$$

3765*. La función $J_0(x)$ definida por la igualdad

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

se llama función de Bessel de orden cero. Demostrar que:

1) $\int\limits_0^\infty e^{-ax}J_0(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ $(a>0)$;

2) $$\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x}J_0(x)\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{si } a\geqslant 1;\\ \operatorname{arcsen} a, & \text{si } |a|\leqslant 1;\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } a\leqslant -1.\end{cases}$$

3766. Demostrar que la función $y=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xz}}{1+z^2}\,dz$ satisface la ecuación diferencial $y''+y=1/x$.

3767*. Demostrar que la función $y=\int\limits_{-1}^{1}(z^2-1)^{n-1}e^{xz}\,dz$ satisface la ecuación diferencial $xy''+2ny'-xy=0$.

3768*. Demostrar que la función $y=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xz}}{(1+z^2)^{n+1}}\,dz$ satisface la ecuación diferencial $xy''-2ny'+xy=1$.

3769*. Demostrar que la función de Bessel de orden cero $J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$ satisface la ecuacion diferencial $J_0''(x)+\frac{J_0'(x)}{x}+J_0(x)=0$.

Capítulo XIII

Integrales curvilíneas e integrales de superficie

§ 1. Integrales curvilíneas de primer género*)

Cálculo de integrales

En los ejercicios 3770—3775 calcular las integrales curvilíneas.

3770. $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, donde L es un segmento de la recta $y=\frac{1}{2}x-2$ comprendido entre los puntos $A(0, -2)$ y $B(4, 0)$.

3771. $\int\limits_L xy\,ds$, donde L es el contorno de un rectángulo cuyos vértices son $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$ y $D(0, 2)$.

3772. $\int\limits_L y\,ds$, donde L es un arco de la parábola $y^2 = 2px$, recortado por la parábola $x^2 = 2py$.

3773. $\int\limits_L (x^2 + y^2)^n ds$, donde L es la circunferencia

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t.$$

3774. $\int\limits_L xy\,ds$, donde L es la cuarta parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ situada en el primer cuadrante.

3775. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,ds$, donde L es el primer arco de la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

3776. Deducir la fórmula para calcular la integral $\int\limits_L F(x, y)\,ds$ en coordenadas polares, si la línea L viene dada por la ecuación $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2)$.

*) Así denominaremos las integrales de tipo $\int f(x, y)\,ds$, donde s es la longitud. (*Nota del T.*)

3777*. Calcular la integral $\int\limits_L (x-y)\,ds$, donde L es la circunferencia $x^2+y^2=ax$.

3778. Calcular la integral $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,ds$, donde L es una línea dada por la ecuación $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x \geqslant 0)$ (mitad de la lemniscata).

3779. Calcular la integral $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,ds$, donde L es una parte de la espiral de Arquímedes $\rho=2\varphi$, comprendida dentro de un círculo de radio R con el centro en el origen de coordenadas.

3780. Calcular la integral $\int\limits_L \frac{z^2\,ds}{x^2+y^2}$, donde L es la primera espira de la hélice $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen} t$, $z=at$.

3781. Calcular la integral $\int\limits_L xyz\,ds$, donde L es una cuarta parte de la circunferencia $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$, situada en el primer octante.

3782. Calcular la integral $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)ds$, donde L es la primera espira de la línea helicoidal cónica

$$x=t\cos t,\qquad y=t\operatorname{sen} t,\qquad z=t.$$

3783. Calcular la integral $\int\limits_L (x+y)\,ds$, donde L es una cuarta parte de la circunferencia $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, situada en el primer octante.

Aplicaciones de las integrales

3784. Hallar la masa de un fragmento de la línea $y=\ln x$ comprendido entre los puntos cuyas abscisas son x_1 y x_2, si la densidad de la línea en cada punto es igual al cuadrado de la abscisa del punto.

3785. Hallar la masa de un fragmento de la catenaria $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ comprendido entre los puntos cuyas abscisas son $x_1=0$ y $x_2=a$, si la densidad de la línea en cada punto es inversamente proporcional a la ordenada del punto siendo la densidad en el punto $(0, a)$ igual a δ.

3786. Hallar la masa de una cuarta parte de la elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, situada en el primer cuadrante si la densidad en cada punto es igual a la ordenada de este punto.

3787. Hallar la masa de la primera espira de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$, cuya densidad en cada punto es igual al cuadrado del radio polar de este punto.

3788. Hallar la masa del arco de la línea $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ desde el punto correspondiente a $t = 0$ hasta un punto cualquiera si la densidad del arco es inversamente proporcional al cuadrado del radio polar y en el punto $(1, 0, 1)$ es igual a 1.

3789. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la primera semiespira de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$, considerando la densidad constante.

3790. Calcular el momento estático de la primera espira de la línea helicoidal cónica $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$ con respecto al plano Oxy, considerando la densidad proporcional al cuadrado de distancia desde este plano $\rho = kz^2$.

3791. Calcular los momentos de inercia, con respecto a los ejes de coordenadas, de la primera espira de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = \frac{h}{2\pi} t$.

En los ejercicios 3792—3797 calcular las áreas de las partes de las superficies cilíndricas comprendidas entre el plano Oxy y las superficies indicadas.

3792. $x^2 + y^2 = R^2, \quad z = R + \frac{x^2}{R}$.

3793. $y^2 = 2px, \quad z = \sqrt{2px - 4x^2}$.

3794. $y^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3, \quad z = 2 - \sqrt{x}$.

3795. $x^2 + y^2 = R^2, \quad 2Rz = xy$.

3796. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = kx$ y $z = 0$ $(z \geqslant 0)$ ("herradura cilíndrica").

3797. $y = \sqrt{2px}, \quad z = y$ y $x = \frac{8}{9}p$.

3798. Calcular el área de la superficie recortada de un cilindro circular de radio R por otro cilindro semejante si los ejes de estos dos cilindros se cortan formando el ángulo recto (compárese con la solución del problema en el ejercicio 3642).

3799. Hallar el área de una parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = Rx$ comprendida dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

De acuerdo con la ley Biot — Savart; el elemento de corriente ejerce la acción sobre la masa magnética m con la fuerza igual a $\frac{mI \operatorname{sen} \alpha \, ds}{r^2}$, donde I es la corriente, ds es el elemento de longitud del conductor, r es la distancia que media entre el elemento de corriente y la masa magnética, α es el ángulo formado entre la dirección de la recta que une la masa magnética y el elemento de corriente, y la dirección del mismo elemento de corriente. Dicha fuerza está dirigida, siguiendo la normal, hacia el plano que contiene el elemento de corriente y el punto en que se halla situada la masa magnética. La dirección de la fuerza se establece de acuerdo con la regla de Ampère (también la regla del sacacorchos). Partiendo de esta ley, resolver los problemas de los ejercicios 3800—3805.

3800. Hallar la fuerza con que la corriente I en un conductor rectilíneo infinito ejerce su acción sobre el punto de masa magnética m situado a la distancia a desde el conductor.

3801. Por el circuito de forma cuadrada cuyo lado es a, pasa la corriente I. ¿Con qué fuerza dicha corriente actúa sobre el punto de masa magnética m situado en el centro del cuadrado?

3802. Mostrar que la corriente I que pasa por el arco de la línea cuya ecuación en las coordenadas polares presenta la forma $\rho = \rho(\varphi)$, ejerce la acción sobre el punto de masa magnética situado en el polo aplicando la fuerza

$$f = mI \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\rho}.$$

3803. ¿Con qué fuerza actúa la corriente I que pasa por un circuito cerrado elíptico, sobre el punto de masa magnética m situado en el foco de la elipse?

3804. ¿Con qué fuerza actúa la corriente I que pasa por un circuito parabólico infinito, sobre el punto de masa magnética m situado en el foco de la parábola? La distancia que media entre el vértice y el foco es igual a $p/2$.

3805. ¿Con qué fuerza actúa la corriente I que pasa por un circuito circular de radio R sobre el punto de masa magnética m situado en el punto P que se halla a la distancia h desde el plano del círculo y en la perpendicular levantada en el centro del mismo? ¿Para qué valor de P esta fuerza sería máxima siendo h dada?

§ 2. Integrales curvilíneas de segundo género*)

Cálculo de integrales

En los ejercicios 3806—3821 calcular las integrales curvilíneas.

3806. $\int\limits_L x\,dy$, donde L es el contorno de un triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ en dirección positiva (es decir, en sentido contrario al de las agujas del reloj).

3807. $\int\limits_L x\,dy$, donde L es un segmento de la recta $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ desde el punto de su intersección con el eje de abscisas hasta el punto de su intersección con el eje de ordenadas.

3808. $\int\limits_L (x^2-y^2)\,dx$, donde L es el arco de la parábola desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(2, 4)$.

3809. $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dy$, donde L es el contorno de un cuadrilátero cuyos vértices se hallan en los puntos $A\,(0, 0)$, $B\,(2, 0)$, $C\,(4, 4)$ y $D\,(0, 4)$, indicados según el orden de recorrido.

3810. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(\pi,\,2\pi)} -x\cos y\,dx+y\operatorname{sen} x\,dy$ a lo largo del segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(\pi, 2\pi)$.

3811. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} xy\,dx+(y-x)\,d$ a lo largo de la línea 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y^2=x$, 4) $y=x^3$.

3812. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} 2xy\,dx+x^2\,dy$ a lo largo de la línea 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y=x^3$, 4) $y^2=x$.

3813. $\int\limits_L y\,dx+x\,dy$, donde L es el cuadrante de la circunferencia $x=R\cos t$, $y=R\operatorname{sen} t$ desde $t_1=0$ hasta $t_2=\pi/2$.

---

* Así denominaremos las integrales de tipo $\int\limits_L P\,(x, y)\,dx+Q\,(x, y)\,dy$. (*Nota del T.*)

3814. $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$, donde L es la elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$ recorrida en sentido positivo.

3815. $\int\limits_L \frac{y^2\,dx - x^2\,dy}{x^2+y^2}$, donde L es la semicircunferencia $x = a\cos t$, $y = a\,\text{sen}\,t$ desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = \pi$.

3816. $\int\limits_L (2a - y)\,dx - (a - y)\,dy$, donde L es el primer arco (desde el origen de coordenadas) de la cicloide $x = a\,(t - \text{sen}\,t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

3817. $\int\limits_L \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, donde L es la cuarta parte de la astroide $x = R\cos^3 t$, $y = R\,\text{sen}^3\,t$ desde el punto $(R, 0)$ hasta el punto $(0, R)$.

3818. $\int\limits_L x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)\,dz$, donde L es un segmento de la recta desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta el punto $(2, 3, 4)$.

3819. $\int\limits_L yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$, donde L es un arco de la hélice $x = R\cos t$, $y = R\,\text{sen}\,t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ desde el punto de la intersección de la hélice con el plano $z = 0$ hasta el punto de su intersección con el plano $z = a$.

3820. $\int\limits_{(1,\,1,\,1)}^{(4,\,4,\,4)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$ a lo largo de la recta.

3821. $\int\limits_L y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, donde L es la línea de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y del cilindro $x^2 + y^2 = Rx$ $(R > 0,\ z \geqslant 0)$, siendo recorrida, en el proceso de integración, en sentido contrario al de las agujas del reloj si se mira desde el origen de coordenadas.

Fórmula de Green

En los ejercicios 3822—3823 transformar las integrales curvilíneas tomadas a lo largo de los contornos cerrados L, en sentido positivo, en las integrales dobles sobre los dominios limitados por estos mismos contornos.

3822. $\int\limits_L (1 - x^2)\,y\,dx + x\,(1 + y^2)\,dy$.

3823. $\int\limits_L (e^{xy} + 2x \cos y)\, dx + (e^{xy} - x^2 \operatorname{sen} y)\, dy.$

3824. Calcular la integral del ejercicio 3822 de dos modos considerando la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ como contorno de integración L:

1) directamente, 2) aplicando la fórmula de Green.

3825. Calcular la integral $\int\limits_L (xy + x + y)\, dx + (xy + x - y)\, dy$, donde L es: 1) la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$. La integración debe efectuarse en sentido positivo. (Calcular la integral de dos modos: 1) directamente, 2) aplicando la fórmula de Green).

3826. Demostrar que la integral

$$\int\limits_L (yx^3 + e^y)\, dx + (xy^3 + xe^y - 2y)\, dy$$

es igual a cero, si L es una línea cerrada y simétrica respecto al eje de coordenadas.

3827. Valiéndose de la fórmula de Green calcular la diferencia entre las integrales

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2\, dx - (x-y)^2\, dy$$

y

$$I_2 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2\, dx - (x-y)^2\, dy,$$

donde AmB es un segmento de la recta que une los puntos $A\ (0,\ 0)$ y $B\ (1,\ 1)$ y AnB es el arco de la parábola $y = x^2$.

3828. Mostrar que la integral

$$\int\limits_L \{x \cos (N,\ x) + y \operatorname{sen} (N,\ x)\}\, ds,$$

donde $(N,\ x)$ es un ángulo formado por la normal exterior a la línea y por la dirección positiva del eje de abscisas, calculada sobre el contorno cerrado L en sentido positivo, es igual al área doble de la figura limitada por el contorno L.

3829. Demostrar que la magnitud de la integral $\int\limits_L (2xy - y)\, dx + x^2\, dy$, donde L es un contorno cerrado, es igual al área del dominio limitado por este contorno.

3830. Demostrar que la integral $\int\limits_L \varphi(y)\,dx + [x\varphi'(y) + x^3]\,dy$ es igual al momento de inercia triple de una figura plana homogénea limitada por el contorno L, respecto al eje de ordenadas.

Independencia de la integral del contorno de integración. Métodos para hallar la función primitiva

En los ejercicios 3831—3835 probar que las integrales tomadas a lo largo de los contornos cerrados son iguales a cero cualesquiera que fuesen las funciones que forman parte de los integrandos.

3831. $\int\limits_L \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy.$

3832. $\int\limits_L f(xy)\,(y\,dx + x\,dy).$

3833. $\int\limits_L f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$

3834. $\int\limits_L [f(x+y) + f(x-y)]\,dx + [f(x+y) - f(x-y)]\,dy.$

3835. $\int\limits_L f(x^2 + y^2 + z^2)\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$

3836*. Demostrar que la integral $\int\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ tomada a lo largo de cualquier contorno cerrado que encierre el origen de coordenadas, en sentido positivo, es igual a 2π.

3837. Calcular la integral $\int\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+4y^2}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=1$ en sentido positivo.

En los ejercicios 3838—3844 calcular las integrales curvilíneas de las diferenciales totales.

3838. $\int\limits_{(-1,\,2)}^{(2,\,3)} y\,dx + x\,dy.$ **3839.** $\int\limits_{(0,\,0)}^{(2,\,1)} 2xy\,dx + x^2\,dy.$

3840. $\int\limits_{(3,\,4)}^{(5,\,12)} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$ (el origen de coordenadas no se halla en el contorno de integración).

3841. $\int\limits_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ donde los puntos P_1 y P_2 están situados sobre las circunferencias concéntricas cuyos centros se hallan en el origen de coordenadas y los radios son iguales a R_1 y R_2, respectivamente (el origen de coordenadas no se halla en el contorno de integración).

3842. $\int\limits_{(1,\,-1,\,2)}^{(2,\,1,\,3)} x\,dx - y^2\,dy + z\,dz.$

3843. $\int\limits_{(1,\,2,\,3)}^{(3,\,2,\,1)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz.$

3844. $\int\limits_{(7,\,2,\,3)}^{(5,\,3,\,1)} \frac{zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx}{(x-yz)^2}$ (el contorno de integración no corta la superficie $z=\frac{x}{y}$.

En los ejercicios 3845—3852 hallar las funciones siendo dadas las diferenciales totales.

3845. $du = x^2\,dx + y^2\,dy.$ **3846.** $du = 4\,(x^2 - y^2)\,(x\,dx - y\,dy).$

3847. $du = \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}.$

3848. $du = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - \left(\frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy.$

3849. $du = \left[\frac{x-2y}{(y-x)^2} + x\right]dx + \left[\frac{y}{(y-x)^2} - y^2\right]dy.$

3850. $du = (2x\cos y - y^2 \operatorname{sen} x)\,dx + (2y\cos x - x^2 \operatorname{sen} y)\,dy.$

3851. $du = \frac{2x\,(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right)dy.$

3852. $du = \frac{(3y-x)\,dx + (y-3x)\,dy}{(x+y)^3}.$

3853. Seleccionar el número n de tal modo que la expresión $\frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{(x^2+y^2)^n}$ sea la diferencial total. Hallar la función correspondiente.

3854. Seleccionar las a y b constantes de tal modo que la expresión $\frac{(y^2+2xy+ax^2)\,dx - (x^2+2xy+by)^2\,dy}{(x^2+y^2)^2}$ sea la diferencial total. Hallar la función correspondiente.

En los ejercicios 3855-3860 hallar las funciones siendo dadas las diferenciales totales.

3855. $du = \frac{dx+dy+dz}{x+y+z}.$

3856. $du = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$ **3857.** $du = \frac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1+x^2y^2z^2}.$

3858. $du = \frac{2(zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx)}{(x-yz)^2}$.

3859. $du = \frac{dx - 3\,dy}{z} + \frac{3y - x + z^3}{z^2}\,dz$.

3860. $du = e^{\frac{y}{x}}\,dx +$

$$+\left(\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z} + ze^{yz}\right)dy + \left(-\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)\,y}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z}\right)dz.$$

Aplicaciones de las integrales

En los ejercicios 3861—3868 calcular las áreas de las figuras limitadas por las líneas cerradas, mediante la integral curvilínea.

3861. Por la elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$.

3862. Por la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\,t$.

3863. Por la cardioide $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\,\mathrm{sen}\,t - a\,\mathrm{sen}\,2t$.

3864*. Por el lazo del folio de Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

3865. Por el lazo de la línea $(x+y)^3 = xy$.

3866. Por el lazo de la línea $(x+y)^4 = x^2y$.

3867*. Por la lemniscata de Bernoulli $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$.

3868. Por el lazo de la línea $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12} = xy$.

Trabajo

3869. En cada punto del plano, sobre el punto material actúa una fuerza cuyo valor es constante e igual a F y cuya dirección sigue la del eje positivo de abscisas. Hallar el trabajo efectuado por esta fuerza cuando el punto se desplaza a lo largo del arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, situado en el primer cuadrante.

3870. En cada punto del plano, sobre el punto material actúa la fuerza F cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas son iguales a $X = xy$, $Y = x + y$. Calcular el trabajo de la fuerza F al desplazarse el punto desde el origen de coordenadas hasta el punto (1, 1) a lo largo de: 1) la recta $y = x$; 2) la parábola $y = x^2$, 3) una línea quebrada de dos eslabones cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas (considerar dos casos).

3871. En cada punto M de la elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$ está aplicada la fuerza F cuyo valor es igual a la distancia que media entre el punto M y el centro de la elipse, y dirigida hacia el centro de la elipse. a) Calcular el trabajo de la fuerza F al desplazarse el punto a lo largo del arco de la elipse situado en el primer cuadrante. b) Hallar el trabajo cuando el punto recorre toda la elipse.

3872. Las proyecciones de la fuerza sobre los ejes de coordenadas son dadas por las fórmulas $X = 2xy$ y $Y = x^2$. Mostrar que el trabajo de la fuerza, al desplazarse el punto, depende sólo de su posición inicial y final y no depende de la forma del trayecto. Calcular la magnitud del trabajo al desplazarse desde el punto (1, 0) hasta el punto (0, 3).

3873. La magnitud de la fuerza es inversamente proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el plano xOy. Dicha fuerza está dirigida hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo, al desplazarse el punto bajo la acción de esta fuerza a lo largo de la recta $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ desde el punto $M(a, b, c)$ hasta el punto $N(2a, 2b, 2c)$.

3874. La magnitud de la fuerza es inversamente proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el eje Oz. Dicha fuerza es perpendicular a este eje y está dirigida hacia él. Hallar el trabajo de la fuerza al desplazarse el punto bajo la acción de dicha fuerza a lo largo de la circunferencia $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \operatorname{sen} t$ desde el punto $M(1, 1, 0)$ hasta el punto $N(0, 1, 1)$.

3875. Demostrar que el trabajo de la fuerza de gravitación de dos masas puntuales, efectuado al desplazarse una de ellas no depende de la forma del trayecto. La magnitud de la fuerza de atracción F la establece la ley de Newton $F = \frac{km_1m_2}{r^2}$, donde r es la distancia entre los puntos, m_1 y m_2 son las masas concentradas en dichos puntos, k es la constante de gravitación.

§ 3. Integrales de superficie

Integrales de superficie de primer género

En los ejercicios 3876—3884 calcular las integrales.

3876. $\iint\limits_S \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dq$, donde S es una parte del plano $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ situada en el primer octante.

3877. $\iint\limits_S xyz\,dq$, donde S es una parte del plano $x+y+z=1$ situada en el primer octante.

3878. $\iint\limits_S x\,dq$, donde S es una parte de la esfera $x^2+y^2=z^2=$ $=R^2$, situada en el primer octante.

3879. $\iint\limits_S y\,dq$, donde S es la semiesfera $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

3880. $\iint\limits_S \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dq$, donde S es la semiesfera $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

3881. $\iint\limits_S x^2y^2\,dq$, donde S es la semiesfera $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

3882. $\iint\limits_S \frac{dq}{r^2}$, donde S es el cilindro $x^2+y^2=R^2$, limitado por los planos $z=0$ y $z=H$, r es la distancia que media entre el punto de superficie y el origen de coordenadas.

3883. $\iint\limits_S \frac{dq}{r^n}$, donde S es la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, r es la distancia que media entre el punto de la esfera y el punto fijo $P(0, 0, c)$ $(c>R)$.

3884. $\iint\limits_S \frac{dq}{r}$, donde S es una parte de la superficie del paraboloide hiperbólico $z=xy$, recortada por el cilindro $x^2+y^2=R^2$, r es la distancia que media entre el punto de la superficie y el eje Oz.

3885*. Hallar la masa de una esfera si la densidad de superficie en cada punto es igual a la distancia que media entre dicho punto y cierto diámetro fijo de la esfera.

3886. Hallar la masa de una esfera si la densidad de superficie en cada punto es igual al cuadrado de distancia que media entre dicho punto y cierto diámetro fijo de la esfera.

Integrales de superficie de segundo género

En los ejercicios 3887—3893 calcular las integrales de superficie.

3887. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, donde S es el lado positivo del cubo formado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

3888. $\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy$, donde S es el lado positivo de la mitad inferior de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3889. $\iint\limits_S z\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3890. $\iint\limits_S z^2\,dx\,dy$, donde S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3891. $\iint\limits_S xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz$, donde S es la cara exterior de la pirámide formada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ y $x+y+z=1$.

3892. $\iint\limits_S yz\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + xy\,dx\,dz$, donde S es la cara exterior de la superficie situada en el primer octante y formada por el cilindro $x^2+y^2=R^2$ y los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ y $z=H$.

3893. $\iint\limits_S y^2\,z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dx\,dz$, donde S es la cara exterior de la superficie situada en el primer octante y formada por el paraboloide de revolución $z=x^2+y^2$, por el cilindro $x^2+y^2=1$ y los planos de coordenadas (véase la fig. 68).

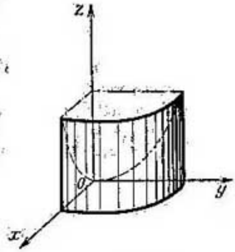

Fig. 68

Fórmula de Stokes

3894. Aplicando la fórmula de Stokes, transformar la integral $\int\limits_L (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$ tomada a lo largo de cierto contorno cerrado, en la integral de superficie «tendida» sobre este contorno.

3895. Calcular la integral $\int\limits_L x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$, donde el contorno L es la circunferencia $x^2+y^2=R^2$, $z=0$: a) directamente y b) aplicando la fórmula de Stokes y considerando la semiesfera $z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ como superficie. La integración, a lo largo de la circunferencia en el plano xOy, debe efectuarse en sentido positivo.

Fórmula de Ostrogradski

3896. Aplicando la fórmula de Ostrogradski transformar la integral sobre la superficie cerrada en una integral triple sobre el volumen del cuerpo limitado por esta superficie:

$$\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy.$$

La integración debe efectuarse sobre la cara exterior de la superficie S.

3897. Aplicando la fórmula de Ostrogradski transformar la integral sobre la superficie cerrada en una integral triple sobre el volumen del cuerpo limitado por esta superficie:

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\{\cos(N,\ x)+\cos(N,\ y)+\cos(N,\ z)\}\,d\sigma,$$

donde N es la normal exterior a la superficie S.

3898. Calcular la integral del ejercicio 3897, si S es la esfera de radio R cuyo centro se halla situado en el origen de coordenadas.

3899. Calcular la integral

$$\iint_S [x^3\cos(N,\ x)+y^3\cos(N,\ y)+z^3\cos(N,\ z)]\,d\sigma,$$

donde S es la esfera de radio R cuyo centro se halla situado en el origen de coordenadas y N es la normal exterior.

3900. Aplicando la fórmula de Ostrogradski calcular las integrales de los ejercicios 3891—3893.

Capítulo XIV

Ecuaciones diferenciales

§ 1. Ecuaciones de primer orden

Ecuaciones con variables separables

En los ejercicios 3901—3910 hallar las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales.

3901. $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0$.

3902. $xyy' = 1 - x^2$. **3903.** $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

3904. $y' \operatorname{tg} x - y = a$. **3905.** $xy' + y = y^2$.

3906. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$.

3907. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

3908. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$. **3909.** $y' = 10^{x+y}$.

3910. $y' + \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} = \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$.

3911. La balística establece la dependencia entre la velocidad v del proyectil y la distancia l recorrida por éste en el cañón del arma mediante la siguiente ecuación:

$v = \frac{al^n}{b+l^n}$, donde $v = \frac{dl}{dt}$ y $n < 1$. Hallar la dependencia entre el tiempo t del movimiento del proyectil y la distancia l recorrida por dentro del cañón.

3912. Si x es la cantidad de ácido yodhídrico HJ que se ha descompuesto para el momento de tiempo t, la velocidad de descomposición $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ la determina la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = k_1 \times \times \left(\frac{1-x}{v}\right)^2 - k_2\left(\frac{x}{v}\right)^2$, donde k_1, k_2 y v son constantes. Integrar esta ecuación.

En los ejercicios 3913—3916 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

3913. $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$; $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$.

3914. $y' = \frac{1+y^2}{x+x^2}$; $y|_{x=0} = 1$.

3915. $\operatorname{sen} y \cos x \, dy = \cos y \operatorname{sen} x \, dx$; $y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$.

3916. $y - xy' = b\,(1 + x^2y')$; $y|_{x=1} = 1$.

3917. Hallar la línea que pase por el punto (2, 3) y cuya propiedad sea la siguiente: el segmento de cualquier tangente suya comprendido entre los ejes de coordenadas se divide en dos partes iguales en el punto de contacto.

3918. Hallar la línea que pase por el punto (2, 0) y cuya propiedad sea la siguiente: el segmento de la tangente entre el punto de contacto y el eje de ordenadas tiene la longitud constante e igual a dos.

3919. Hallar todas las líneas para las cuales el segmento de la tangente comprendido entre el punto de contacto y el eje de abscisas se divide en dos partes iguales en el punto de intersección con el eje de ordenadas.

3920. Hallar todas las líneas para las cuales la subtangente sea proporcional a la abscisa del punto de contacto (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k).

3921. Hallar la línea que pase por el punto $(a, 1)$ y cuya subtangente tenga la longitud constante e igual a a.

3922. Hallar la línea para la cual la longitud de la normal (su segmento desde el punto de la misma hasta el eje de abscisas) sea la magnitud constante a.

3923. Hallar la línea para la cual la suma de las longitudes de la tangente y de la subtangente en cualquier punto suyo sea proporcional al producto de las coordenadas del punto de contacto (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k).

3924. Hallar la línea $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$, $f(0) = 0$) que limite el trapecio mixtilíneo de base $[0, x]$ y cuya área sea proporcional al grado $(n + 1)$ de $f(x)$. Es sabido que $f(x) = 1$.

3925. El punto material cuya masa es igual a 1g, efectúa el movimiento rectilíneo bajo la acción de la fuerza directamente proporcional al tiempo calculado a partir del momento $t = 0$ e inversamente proporcional a la velocidad del movimiento de dicho punto. En el momento $t = 10$ s la velocidad era igual a 0,5 m/s, y la fuerza, $4 \cdot 10^{-5}$ N. ¿A qué será igual la velocidad al cabo de 1 min de comenzar el movimiento?

3926. Un punto material efectúa el movimiento rectilíneo siendo su energía cinética, en el momento t, directamente proporcional a la velocidad media del movimiento en el intervalo de tiempo desde el cero hasta t. Es sabido que siendo $t = 0$ el trayecto es $s = 0$. Mostrar que el movimiento es uniforme.

3927. Una lancha automóvil se desplaza a la velocidad de $v = 10$ km/h, estando las aguas tranquilas. En plena marcha su motor fue desconectado. Al cabo de $t = 20$ s la velocidad de la lancha bajó hasta $v_1 = 6$ km/h. Considerando que la fuerza de resistencia del agua al movimiento de la lancha es proporcional a la velocidad de ésta, hallar la velocidad de la lancha a los dos minutos de parar el motor. Hallar también la distancia recorrida por la lancha durante un minuto después de parar el motor.

3928. Un recipiente cilíndrico que tiene el eje vertical y cuya sección transversal es S, tiene en su fondo un pequeño orificio circular cuya área es q, cerrado por un diafragma (como en el objetivo de una cámara de fotografía). El recipiente contiene un líquido cuya altura es h. En el momento $t = 0$ el diafragma comienza a abrirse siendo el área del orificio proporcional al tiempo. El orificio queda totalmente abierto en T s. ¿Cuál será la altura H del líquido al cabo de T s de comenzar el experimento? (Véanse los ejercicios 2701—2706).

3929. La velocidad del enfriamento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo y del medio ambiente. En los ejercicios 2710—2711 hemos considerado el coeficiente de proporcionalidad como constante. En algunos cálculos consideran que depende linealmente del tiempo: $k = k_0(1 + \alpha t)$. Tomando en consideración este razonamiento, hallar la depedencia entre la temperatura del cuerpo θ y el tiempo t considerando que siendo $t = 0$, la temperatura del cuerpo es $\theta = \theta_0$, y la del medio ambiente es θ_1.

3930*. La velocidad del crecimiento de área de una hoja joven de la planta Victoria regia (también taropé), que tiene, como es sabido, forma circular, es proporcional a la circunferencia de la hoja y a la cantidad de la luz solar que cae sobre ésta. La cantidad de la luz, a su vez, es proporcional al área de la hoja y al coseno del ángulo entre la dirección de los rayos y la vertical. Hallar la dependencia entre el área S de la hoja y el tiempo t si se sabe que a las seis de la mañana dicha área era igual a 1600 cm^2 y a las seis de la tarde, a 2500 cm^2. (Considerar que la observación se efectuó en el ecuador, en el momento de equinoccio en que el ángulo formado entre la dirección de los rayos solares y la vertical es susceptible de considerar igual a 90° a las seis de la mañana y a las seis de la tarde e igual a 0° al mediodía.)

En los ejercicios 3931—3933, mediante la sustitución de la función buscada, reducir las ecuaciones dadas a las ecuaciones con variables separables, y resolverlas.

3931. $y' = \cos(x - y)$ (poner $u = x - y$).

3932. $y' = 3x - 2y + 5$. **3933.** $y'\sqrt{1 + x + y} = x + y - 1$

Ecuaciones homogéneas

En los ejercicios 3934—3944 hallar las soluciones generales de las ecuaciones dadas.

3934. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

3935. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

3936. $x\,dy - y\,dx = y\,dy$.

3937. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

3938. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

3939. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3940. $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

3941. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

3942. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

3943. $(3y^2 + 3xy + x^2)\,dx = (x^2 + 2xy)\,dy$.

3944. $y' = \frac{y}{x} + \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}$.

En los ejercicios 3945—3948 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

3945. $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$; $\quad y|_{x=1} = 0$.

3946. $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$; $\quad y|_{x=0} = 1$.

3947. $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$; $\quad y|_{x=1} = -1$.

3948. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$; $\quad y|_{x=0} = \sqrt{5}$.

3949. Reducir la ecuación $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ a la cuadratura. ¿Cuál debería ser la función $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ para que $y = \frac{x}{\ln|Cx|}$ sea la solución general de la ecuación dada?

3950. Hallar la línea para la cual el cuadrado de la longitud de un segmento recortado por cualquier tangente del eje de ordenadas, sea igual al producto de las coordenadas del punto de contacto.

3951. Hallar la línea para la cual la ordenada inicial de cualquier tangente es igual a la subnormal correspondiente.

3952*. Hallar la línea para la cual la longitud del radio polar de cualquier punto suyo M es igual a la distancia que media entre el punto de intersección del eje Oy y la tangente en el punto M, y el origen de coordenadas.

3953*. ¿Qué clase de la superficie de revolución presenta el espejo de un proyector si los rayos luminosos que parten de un manantial puntiforme, al reflejarse, se propagan formando un haz paralelo?

Ecuaciones lineales

En los ejercicios 3954—3964 hallar las soluciones generales de las ecuaciones dadas.

3954. $y' + 2y = 4x$. 3955. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

3956. $y' + \frac{1-2x}{x^2}\, y = 1$.

3957. $(1 + x^2)\, y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

3958. $y' + y = \cos x$. 3959. $y' + ay = e^{mx}$.

3960. $2y\, dx + (y^2 - 6x)\, dy = 0$.

3961. $y' = \frac{1}{2x - y^2}$. 3962. $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$.

3963. $x\,(y' - y) = (1 + x^2)\, e^x$.

3964. $y' + y\Phi'(x) - \Phi(x)\,\Phi'(x) = 0$, donde $\Phi(x)$ es la función dada.

En los ejercicios 3965—3968 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

3965. $y' - y \operatorname{tg} y = \sec x$; $y\,|_{x=0} = 0$.

3966. $xy' + y - e^x = 0$; $y\,|_{x=a} = b$.

3967. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$; $\quad y\,|_{x=1} = 0$.

3968. $t\,(1 + t^2)\, dx = (x + xt^2 - t^2)\, dt$; $\quad x\,|_{t=1} = -\frac{\pi}{4}$.

3969. Sean y_1 e y_2 dos distintas soluciones de la ecuación

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x).$$

a) Demostrar que $y = y_1 + C\,(y_2 - y_1)$ es la solución general de la misma ecuación (C es constante).

b) ¿Cuál debería ser la relación entre las constantes α y β para que la combinación lineal $\alpha y_1 + \beta y_2$ sea la solución de la ecuación dada?

c) Demostrar que si y_3 es la tercera solución particular distinta de y_1 e y_2, la relación $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ es constante.

3970. Demostrar la identidad (véase el ejercicio 2345): $\int\limits_0^x e^{2xz - z^2}\, dz = e^{\frac{x^2}{4}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\, dz$ formando la ecuación diferencial para la función $I(x) = \int\limits_0^x e^{2xz - z^2}\, dz$ y resolverla.

3971. Hallar la línea para la cual la ordenada inicial de cualquier tangente sea dos unidades de escala menor que la abscisa del punto de contacto.

3972*. Hallar la línea para la cual el área del rectángulo construido sobre la abscisa de cualquier punto y sobre la ordenada inicial de la tangente en este punto es una magnitud constante ($= a^2$).

3973*. Hallar la línea para la cual el área de un triángulo formado por el eje de abscisas, la tangente y el radio vector del punto de contacto, sea constante ($= a^2$).

3974. Un punto de masa m efectúa el movimiento rectilíneo. Sobre dicho punto actúa una fuerza proporcional al tiempo (el coeficiente de proporcionalidad es k_1) transcurrido desde el momento en que la velocidad era igual a cero. Además, sobre el mismo punto actúa la fuerza de resistencia del medio, que es proporcional a la velocidad (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k). Hallar la dependencia entre la velocidad y el tiempo.

3975. Un punto de masa m efectúa el movimiento rectilíneo. Sobre dicho punto actúa una fuerza, proporcional al cubo de tiempo transcurrido desde el momento en que la velocidad era igual a v_0 (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k). Además, sobre el mismo punto ejerce su acción el medio, esta acción es proporcional al producto de la velocidad y el tiempo (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k_1). Hallar la dependencia entre la velocidad y el tiempo.

3976. La temperatura inicial θ_0° C del cuerpo es igual a la del medio ambiente. El cuerpo recibe el calor de un aparato calentador (la velocidad con que pasa el calor es una función dada del tiempo: $c\varphi(t)$, donde c es la capacidad calorífica constante del cuerpo). Además, el cuerpo cede el calor al medio ambiente (la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre las temperaturas del cuerpo y del medio). Hallar la dependencia que existe entre la temperatura del cuerpo y el tiempo medido al comenzar el experimento.

Resolver los problemas de los ejercicios 3977—3978 tomando en consideración lo siguiente. Si la corriente eléctrica alterna $I = I(t)$ pasa por el conductor teniendo el coeficiente de inductancia igual a L y la resistencia R, la caída de tensión a lo largo del conductor será igual a $L\frac{dI}{dt} + RI$.

3977. La diferencia de potencial en los bornes de una bobina va disminuyendo uniformemente de $E_0 = 2$V hasta $E_1 = 1$ V durante 10 segundos. ¿A qué será igual la intensidad de la corriente al finalizar el décimo segundo si al principio del experimento era igual a $16\frac{2}{3}$ A? La resistencia de la bobina es igual a 0,12 ohm, el coeficiente de inductancia, 0,1 H.

3978. Hallar la intensidad de la corriente en la bobina en el momento t si su resistencia es R, el coeficiente de inductancia, L, la corriente inicial $I_0 = 0$, la fuerza electromotriz varía de acuerdo con la ley $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$.

Diversos problemas
(Ecuaciones con variables separables, homogéneas y lineales)

En los ejercicios 3979—3997 hallar las soluciones generales de las ecuaciones dadas.

3979. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$. **3980.** $x^2\,dy + (3 - 2x)\,dx = 0$.

3981. $x(x^2 + 1)\,y' + y = x(1 + x^2)^2$.

3982. $y' = \frac{y + 1}{x}$. **3983.** $y' = \frac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}$.

3984. $(8y + 10x)\,dx + (5y + 7x)\,dy = 0$.

3985. $x^3 y' = y(y^2 + x^2)$. **3986.** $\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

3987. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x}\,dy = 0$.

3988. $y' = e^{2x} - e^x y$. **3989.** $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$.

3990. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \operatorname{sen} 2y}$.

3991. $(x - 2xy - y^2)\,dy + y^2\,dx = 0$.

3992. $y' + y \cos x = \operatorname{sen} x \cos x$.

3993. $(x + 1)\,y' - ny = e^x (x + 1)^{n+1}$.

3994. $y\,dx = (y^3 - x)\,dy$.

3995. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x + y)\frac{dy}{dx} + xy = 0$.

3996*. $yy' \operatorname{sen} x = \cos x (\operatorname{sen} x - y^2)$.

3997. $y' = (x + y)^2$.

3998. Verificar que las ecuaciones $(1 - x^2)\,y' + xy = ax$ tienen por curvas integrales las elipses e hipérbolas cuyos centros están en el punto $(0, a)$ y cuyos ejes son paralelos a los ejes de coordenadas, teniendo cada curva un eje constante de longitud igual a 2.

En los ejercicios 3999—4002 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfagan las condiciones iniciales indicadas.

3999. $\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2$; $y|_{x=1} = 1$.

4000. $y' - \frac{y}{1 - x^2} = 1 + x$; $y|_{x=0} = 1$.

4001. $(1+e^x)yy' = e^y$; $\quad y|_{x=0} = 0$.

4002. $y' = 3x^2y + x^5 + x^2$; $\quad y|_{x=0} = 1$.

4003. Demostrar que sólo las rectas $y = kx$ y las hipérbolas $xy = m$ tienen la siguiente propiedad. La longitud del radio polar de cualquiera de sus puntos es igual a la de la tangente trazada en este mismo punto.

4004. Hallar la línea para la cual la longitud de su normal sea proporcional al cuadrado de la ordenada. El coeficiente de proporcionalidad es igual a k.

4005. Hallar la línea para la cual cualquier tangente se corta con el eje de ordenadas en el punto equidistante entre el punto de contacto y el origen de coordenadas.

4006. Hallar la ecuación de la línea que corte el eje de abscisas en el punto $x = 1$ y que tiene la siguiente propiedad: La longitud de la subnormal en cada punto de la línea es igual al promedio aritmético de coordenadas en este punto.

4007. Hallar la línea para la cual el área del trapecio engendrado por los ejes de coordenadas, la ordenada de un punto cualquiera y la tangente en este punto, sea igual a la mitad del cuadrado de la abscisa.

4008. Hallar la línea para la cual el área comprendida entre el eje de abscisas, la misma línea y dos ordenadas una de las cuales es constante y la otra, variable, sea igual a la relación del cubo de la ordenada variable a la abscisa variable.

4009. Hallar la línea para la cual el área de la figura limitada por el eje de abscisas, dos ordenadas y el arco $\overline{MM'}$ de esta línea, sea proporcional al arco MM' cualesquiera que sean los puntos M y M'.

4010. Hallar la línea para la cual la abscisa del centro de gravedad del trapecio mixtilíneo engendrado por los ejes de coordenadas, la recta $x = a$ y la misma línea, sea igual a $\frac{3a}{4}$ cualquiera que sea a.

4011*. Hallar la línea tal que todas las tangentes a ella pasen por el punto dado (x_0, y_0).

4012. Hallar la línea que pase por el origen de coordenasas y para la cual todas sus normales pasen por el punto dado (x_0, y_0).

4013. ¿Qué línea tiene la siguiente propiedad: el ángulo formado entre el eje Ox y la tangente a la misma línea en cualquier punto suyo, es dos veces mayor que el ángulo formado entre el mismo eje y el radio polar del punto de contacto?

4014. Sobre un cuerpo de masa $m = 1$ actúa una fuerza proporcional al tiempo (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k_1). Además, el cuerpo es objeto de la reacción del medio ambiente, que es proporcional a la velocidad del cuerpo (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k_2). Hallar la ley del movimiento del cuerpo (la dependencia entre el trayecto y el tiempo).

4015. Una partícula efectúa la caída en el medio cuya resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad de la partícula. Mostrar que la ecuación del movimiento es la siguiente: $\frac{dv}{dt} = g - kv^2$, donde k es constante, g es la aceleración de la gravedad. Integrar esta ecuación y mostrar que v tiende a $\sqrt{\frac{g}{k}}$ para $t \to \infty$.

4016. La fuerza de rozamiento que retarda el movimiento giratorio de un disco en un medio líquido, es proporcional a la velocidad angular de la rotación.

1) El disco comenzó su movimiento giratorio con la velocidad angular de 3 vueltas por segundo, al cabo de 1 minuto gira con la velocidad angular de 2 vueltas por segundo. ¿Cuál sería su velocidad angular al cabo de 3 minutos de comenzar la rotación?

2) El disco comenzó a girar teniendo la velocidad angular de 5 vueltas por segundo, al cabo de 2 minutos gira con la velocidad angular de 3 vueltas por segundo. ¿Al cabo de cuánto tiempo después de comenzar la rotación, la velocidad angular del disco será de 1 vuelta por segundo?

4017. La bala penetra una tabla cuyo grosor es $h = 0{,}1$ m, con la velocidad $v_0 = 200$ m/s. Al atravesarla, sale por el otro lado con la velocidad $v_1 = 80$ m/s. Considerando la fuerza de la resistencia que ofrece la tabla al paso de la bala, proporcional al cuadrado de la velocidad de ésta, calcular el tiempo invertido por la bala en atravesar la tabla.

4018*. Una gota de agua cuya masa inicial es igual a M_0 g se evapora uniformemente con la velocidad m g/s, moviéndose por inercia con la velocidad inicial v_0 cm/s. La fuerza de la resistencia del medio es proporcional a la velocidad del movimiento de la gota y a su radio, siendo en el momento inicial ($t = 0$) igual a f_0 dinas. Hallar la dependencia entre la velocidad de la gota y el tiempo.

4019*. Una gota de agua de masa inicial M_0 g se evapora con la velocidad m g/s, efectuándose la caída libre en el aire. La fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad del movimiento de la gota (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k).

Hallar la dependencia entre la velocidad del movimiento de la gota y el tiempo transcurrido desde que comenzó a caer la gota, teniendo en cuenta que en el momento inicial del tiempo la velocidad de la gota era igual a cero. Considerar que $k \neq 2m$.

4020*. Resolver el mismo problema que en el ejercicio anterior, pero con respecto a una gota de forma esférica, considerando la fuerza de resistencia del aire proporcional al producto de la velocidad de la gota y el área de su superficie. La densidad del líquido es igual a γ. (Reducir a las cudraturas.)

4021*. Si en el curso de cierto proceso una substancia se transforma en otra, siendo la velocidad con que se efectúa la formación del producto, proporcional a la cantidad disponible de la substancia que sufre la transformación, este proceso se llama reacción (proceso) de primer orden.

Cierta substancia cuya cantidad inicial era igual a m_0, va transformándose en otra, siendo inmediato el comienzo del segundo proceso, debido al cual surge el segundo producto. Ambas transformaciones se efectúan como reacciones de primer orden. Los coeficientes de proporcionalidad son: k_1 para el primero, y k_2 para el segundo proceso.

¿Qué cantidad del segundo producto se obtiene al cabo de t unidades del tiempo después de comenzar el proceso?

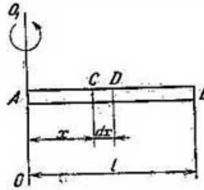

Fig. 69

4022. Un recipiente cuyo volumen es de 100 l contiene salmuera que lleva disueltos 10 kg de la sal. En el recipiente entra el agua, con la velocidad de 3 l/min, produciéndose una mezcla que, a su vez, se trasvasa, con la misma velocidad, al segundo recipiente, de igual cabida (es decir, 100 l) y relleno previamente de agua pura. De este segundo recipiente sale el exceso del líquido. ¿Cuánta cantidad de la sal contiene el segundo recipiente al pasar una hora? ¿Cuál es la cantidad máxima de la sal en el segundo recipiente? ¿Cuándo se lorga esta cantidad máxima? (La concentración de la sal se mantiene uniforme mezclándose el contenido.)

4023. La tensión y la resistencia de un circuito van variando uniformemente, por espacio de un minuto, desde el cero hasta 120 V, y desde el cero hasta 120Ω, respectivamente (véanse los ejercicios 3977—3978). La inductancia del circuito es constante (1 henrio). La corriente inicial es de I_0. Hallar la dependencia entre la corriente y el tiempo en el curso del primer minuto del experimento.

4024*. Un estrecho tubo cilíndrico y horizontal AB, cerrado herméticamente, encierra el gas. Gira uniformemente, con la velocidad angular ω, alrededor del eje vertical OO_1 que pasa por uno de los extremos del tubo, según lo muestra la fig. 69. El tubo mide l cm de longitud, su sección transversal es de S cm², la masa del gas encerrado es M g, la presión dentro del tubo en reposo es constante a lo largo de todo el tubo e igual a p_0. Hallar la distribución de la presión a lo largo del tubo cuando efectúa el movimiento giratorio, es decir, expresar p como función de x.

Otros ejemplos de ecuaciones de primer orden

En los ejercicios 4025—4037 hallar las soluciones generales de las ecuaciones reduciéndolas a lineales u homogéneas efectuando el cambio de variables.

4025. $y'=\frac{2y-x-5}{2x-y+4}$. **4026.** $y'=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$.

4027. $(x+y+1)\,dx=(2x+2y-1)\,dy$.

4028. $y'=\frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$. **4029.** $y'=\frac{y^2-x}{2y(x+1)}$.

4030. $y'=\frac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$. **4031.** $(1-xy+x^2y^2)\,dx=x^2\,dy$.

4032. $(x^2y^3-1)\,y'+2xy^3=0$.

4033. $yy'+x=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)^2$.

4034. $xy'+1=e^y$.

4035. $(x^2+y^2+1)\,dy+xy\,dx=0$.

4036. $x\,dx+y\,dy+x\,(x\,dy-y\,dx)=0$.

4037. $(x^2+y^2+y)\,dx=x\,dy$.

En los ejercicios 4038—4047 resover las ecuaciones de Bernoulli

4038. $y'+2xy=2x^3y^3$. **4039.** $y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0$.

4040. $y^{n-1}(ay'+y)=x$. **4041.** $x\,dx=\left(\frac{x^2}{y}-y^3\right)dy$.

4042. $xy'+y=y^2\ln x$. **4043.** $y'-y\operatorname{tg}x+y^2\cos x=0$.

4044. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. **4045.** $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$.

4046. $y\,dy-\frac{ay^2}{x^2}\,dx=\frac{b\,dx}{x^2}$.

4047. $y'=\frac{y\varphi(x)-y^2}{\varphi(x)}$, donde $\varphi(x)$ es la función dada.

4048. Hallar la línea para la cual un segmento recortado en el eje de ordenadas por la tangente en cualquier punto sea proporcional:

1) al cuadrado de la ordenada del punto de contacto,

2) al cubo de la ordenada del punto de contacto.

4049. Hallar las líneas dadas por las ecuaciones de la forma $\rho = f(\varphi)$ para las cuales el área de los sectores limitados por la misma línea y el radio polar de un punto constante (ρ_0, φ_0) y el otro móvil (ρ, φ) de la línea, sea proporcional al producto de las coordenadas polares ρ y φ de este punto móvil. El coeficiente de proporcionalidad es igual a k.

Ecuaciones en diferenciales totales

En los ejercicios 4050—4057 hallar las soluciones generales de las ecuaciones dadas.

4050. $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0.$

4051. $\frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right) dx.$

4052. $e^y dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0.$ **4053.** $yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy = 0$

4054. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}.$

4055. $\frac{y + \operatorname{sen} x \cdot \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\,dx + \frac{x}{\cos^2(xy)}\,dy + \operatorname{sen} y\,dy = 0.$

4056. $\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right) dx + \left(-1 + \sqrt{x^2+y^2}\right) y\,dy = 0.$

4057. $\left(\frac{1}{y} \operatorname{sen} \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1\right) dx +$
$+ \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \operatorname{sen} \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right) dy = 0.$

Factor integrante

En los ejercicios 4058—4062 hallar el factor integrante y las soluciones generales de las ecuaciones.

4058. $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$

4059*. $y\,(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0.$

4060. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0.$

4061. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0.$

4062. $(x \cos y - y \operatorname{sen} y)\,dy + (x \operatorname{sen} y + y \cos y)\,dx = 0.$

4063. Mostrar que la ecuación lineal $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ tiene por factor integrante la función $e^{\int P(x)\,dx}$.

4064. Hallar el factor integrante de la ecuación de Bernoulli

$$y' + P(x)\,y = y^n Q(x).$$

4065. Determinar las condiciones para las cuales la ecuación

$$X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0$$

admita el factor integrante de la forma $M = F(x + y)$.

4066. Determinar las condiciones para las cuales la ecuación

$$X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0$$

admita el factor integrante de la forma $M = F(x \cdot y)$.

Diversos problemas

En los ejercicios 4067—4088 hallar las soluciones generales de las ecuaciones.

4067. $y' = ax + by + c.$ **4068.** $ay' + by + cy^m = 0.$

4069. $y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}.$ **4070.** $y' = \frac{y^2+xy-x^2}{y^2}.$

4071. $y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}.$ **4072.** $y'(y^2-x) = y.$

4073. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy = 0.$

4074. $(2y + xy^3)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0.$

4075. $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2+y^2)\,dy = 0.$

4076. $y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}.$

4077. $x\,dy + y\,dx + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0.$

4078. $\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0.$

4079. $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}.$ **4080.** $y \operatorname{sen} x + y' \cos x = 1.$

4081. $y' - y + y^2 \cos x = 0.$ **4082.** $y' = \frac{\cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos y}.$

4083. $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x.$

4084. $\left(x \cos \frac{y}{x} + y \operatorname{sen} \frac{y}{x}\right) y\,dx + \left(x \cos \frac{y}{x} - y \operatorname{sen} \frac{y}{x}\right) x\,dy = 0.$

4085. $y' = \frac{x}{\cos y} - \operatorname{tg} y.$

4086. $y - y' \cos x = y^2 \cos x\,(1 - \operatorname{sen} x).$

4087. $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x.$

4088. $(1 + e^{\frac{x}{y}})\,dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0.$

4089. Hallar la línea para la cual la subnormal en cualquier punto sea a la suma de la abscisa y la ordenada como la ordenada de este punto es a la abscisa.

4090. Hallar la línea que tenga la propiedad de que un segmento de la tangente en cualquier punto, comprendido entre el eje Ox y la recta $y = ax + b$, se divide por el punto de contacto en dos partes iguales.

4091. Hallar la línea para la cual la distancia que media entre la normal en cualquier punto suyo y el origen de coordenadas y la que media entre la misma normal y el punto (a, b) estén en razón constante e igual a k.

4092. Hallar la línea para la cual la distancia que media entre el origen de coordenadas y la tangente en cualquier punto equivalga a la que media entre el origen de coordenadas y la normal en el mismo punto.

4093*. Hallar la línea que tenga la propiedad de que la ordenada de cualquier punto suyo sea la media proporcional entre la abscisa y la suma de la abscisa y la subnormal trazada hacia la línea en el mismo punto.

4094. En el circuito eléctrico cuya resistencia es $R = 3/2\Omega$, se introduce uniformemente, durante dos minutos, la tensión (desde cero hasta 120 V). Además, se introduce automáticamente una inductancia de modo que el número de henrios en el circuito equivale al número con que se mide la corriente en amperios. Hallar la dependencia entre la corriente y el tiempo durante los dos primeros minutos del experimento.

§ 2. Ecuaciones de primer orden (continuación)

Campo de direcciones. Isoclinas

4095. Sea dada la ecuación $y' = -\frac{x}{y}$. a) Construir el campo de direcciones determinado por la ecuación dada. b) Esclarecer la posición del vector del campo respecto al radio polar de cualquier punto del campo. c) Hallar la forma de las curvas integrales de la ecuación valiéndose del campo de direcciones. d) Hallar las curvas integrales resolviendo la ecuación dada aplicando el procedimiento ordinario (es decir, separando las variables). e) Señalar la familia de isoclinas para la ecuación dada.

4096. Escribir la ecuación diferencial cuyas isoclinas sean:
1) las hipérbolas equiláteras $xy = a$; 2) las parábolas $y^2 = 2px$; 3) las circunferencias $x^2 + y^2 = R^2$.

4097. Hallar las isoclinas de la ecuación diferencial de la familia de parábolas $y = ax^2$. Hacer un dibujo. Interpretar el resultado geométricamente.

4098. Mostrar que las rectas que pasan por el origen de coordenadas son isoclinas de la ecuación homogénea, y solamente homogénea.

4099. Indicar las ecuaciones lineales cuyas isoclinas sean rectas.

4100. Sean y_1, y_2, y_3 las ordenadas de cualesquiera tres isoclinas de cierta ecuación lineal correspondientes a una abscisa. Mostrar que la razón $\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$ conserva un mismo significado cualquiera que sea la abscisa.

Integración aproximada de las ecuaciones diferenciales

4101. Sea dada la ecuación $y'=\frac{x^2+y^2}{10}$. Construir, de modo aproximado, una curva integral que corresponda al intervalo $1\leqslant x\leqslant 5$ y que pase por el punto $M(1, 1)$.

4102. Sea dada la ecuación $y'=\frac{x^2+y^2}{1}$. Construir, de modo aproximado, una curva que corresponda al intervalo $0{,}5\leqslant x\leqslant 3{,}5$ y que pase por el punto $(0{,}5;\ 0{,}5)$.

4103. Sea dada la ecuación $y'=xy^3+x^2$. Calcular y con dos cifras decimales, para $x=1$, aplicando el método de Euler y tomando en consideración que y es la solución particular que satisface a la condición inicial $y\,|_{x=0}=0$.

4104. Sea dada la ecuación $y'=\sqrt{x}\cdot y^2+1$. Calcular y para $x=2$ aplicando el método de Euler y tomando en consideración que y es la solución particular que satisface a la condición inicial $y\,|_{x=1}=0$. Calcular y con dos cifras decimales.

4105. Sea dada la ecuación $y'=\frac{xy}{2}$ y la condición inicial $y\,|_{x=0}=1$. Resolver la ecuación exactamente y hallar el valor de y para $x=0{,}9$. Luego, hallar este valor aplicando el método aproximado dividiendo el intrevalo $[0;\ 0{,}9]$ en nueve partes. Indicar el error relativo del último resultado.

4106. Sean dadas la ecuación $y'=\frac{3x^2}{x^3+y+1}$ y la condición inicial $y\,|_{x=1}=0$. Resolver la ecuación exactamente, y calcular el valor de x para $y=1$ aplicando algún método aproximado para integrar las ecuaciones (comparar con el valor de x que haya sido obtenido en la solución exacta).

4107. $y'=y^2+xy+x^2$. Aplicando el método de aproximaciones sucesivas hallar la segunda aproximación para la solución que satisfaga a la condición inicial $y\,|_{x=0}=1$.

4108. $y'=xy^3-1$. Hallar el valor de la ecuación dada, para $x=1$, que satisfaga a la condición inicial $y\,|_{x=0}=0$. Siguiendo el método de aproximaciones sucesivas limitarse a la tercera aproximación. Efectuar los cálculos con dos cifras decimales.

En los ejercicios 4109—4116 hallar varios primeros términos del desarrollo en serie de potencias de las soluciones de las ecuaciones para las condiciones iniciales indicadas.

4109. $y'=y^3-x;\ y\,|_{x=0}=1$.

4110. $y' = x^2y^2 - 1$; $y \mid_{x=0} = 1$.
4111. $y' = x^2 - y^2$; $y \mid_{x=0} = 0$.
4112. $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$; $y \mid_{x=0} = 1$.
4113. $y' = \frac{xy}{1+x+y}$; $y \mid_{x=0} = 0$.
4114. $y' = e^y + xy$; $y \mid_{x=0} = 0$.
4115. $y' = \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x$; $y \mid_{x=0} = 0$.
4116. $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$; $y \mid_{x=1} = 1$.

Soluciones singulares. Ecuaciones de Clairaut y Lagrange

En los ejercicios 4117—4130 hallar las soluciones generales y singulares de las ecueciones de Clairaut y de Lagrange.

4117. $y = xy' + y'^2$.
4118. $y = xy' - 3y'^3$.
4119. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.
4120. $x = xy' + \sqrt{1+y'^2}$.
4121. $y = xy' + \operatorname{sen} y'$.
4122. $xy' - y = \ln y'$.
4123. $y = y'^2 (x + 1)$.
4124. $2yy' = x (y'^2 + 4)$.
4125. $y = yy'^2 + 2xy'$.
4126. $y = x (1 + y') + y'^2$.
4127. $y' = \ln (xy' - y)$.
4128. $y = y' (x + 1) + y'^2$.
4129. $y = y'x + a \sqrt[3]{1-y'^3}$.
4130. $x = y \left(\frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'}\right)$.

En los ejercicios 4131—4133 hallar las soluciones singulares de las ecuaciones aplicando el mismo procedimiento que el que se emplea en el caso de las ecuaciones de Lagrange y de Clairaut.

4131. $y'^2 - yy' + e^x = 0$.
4132. $x^2y'^2 - 2 (xy - 2) y' + y^2 = 0$.
4133. $y' (y' - 2x) = 2 (y - x^2)$.

4134. Demostrar el teorema: si una ecuación diferencial lineal es la de Clairaut, la familia de sus curvas integrales representa un haz de rectas.

4135. El área del triángulo engendrado por una tangente a la línea buscada y los ejes de coordenadas, es una constante. Hallar la línea.

4136. Hallar la línea cuyas tangentes corten, en los ejes de coordenadas, segmentos cuya suma sea igual a $2a$.

4137. Hallar la línea para la cual el producto de las distancias que median entre cualquier tangente y dos puntos dados sea constante.

4138. Hallar la línea para la cual el área del rectángulo que tiene por sus lados tangente y normal en cualquier punto, equivale al área del rectángulo cuyos lados son iguales a la longitud de la abscisa y la ordenada de este punto.

4139. Hallar la línea para la cual la suma de la normal y la subnormal sea proporcional a la abscisa.

4140*. Hallar la línea para la cual el segmento de la normal comprendido entre los ejes de coordenadas tenga la longitud constante e igual a a.

4141. La velocidad de un punto material, en cualquier momento de tiempo, se diferencia de la velocidad media (desde que comenzó el movimiento hasta este momento) en una magnitud proporcional a la energía cinética del punto e inversamente proporcional al tiempo transcurrido desde que comenzó el movimiento. Hallar la dependencia entre el trayecto y el tiempo.

Trayectorias ortogonales e isogonales. Evolventes

En los ejercicios 4142—4147 hallar las trayectorias ortogonales a las que se indican.

4142. A las elipses cuyo eje mayor es igual a $2a$.

4143. A las parábolas $y^2 = 4(x - a)$.

4144. A las circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$.

4145. A las cisoides $(2a - x)\,y^2 = x^3$.

4146. A las parábolas iguales que tocan a una recta dada siendo el vértice de cada parábola el punto de contacto.

4147. A los círculos de un mismo radio cuyos centros se encuentran sobre una recta dada.

4148. Hallar la familia de trayectorias que cortan las líneas $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$ formándose el ángulo $\alpha = 60°$.

4149. Hallar las trayectorias isogonales de la familia de parábolas $y^2 = 4ax$, el ángulo formado es $\alpha = 45°$.

4150*. Hallar las líneas de propagación del sonido por el plano, si a lo largo de una dirección sopla el viento a la velocidad constante a. La fuente del sonido es inmóvil y se halla en el mismo plano.

En los ejercicios 4151—4154 hallar las evolventes de las líneas que se indican.

4151. De la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

4152. De la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

4153. De la evolvente del círculo

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \qquad y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t).$$

4154. De la parábola semicúbica $y = 3t^2$, $x = -2t^3$.

§ 3. Ecuaciones de segundo orden y de órdenes superiores

Casos particulares de las ecuaciones de segundo orden

En los ejercicios 4155—4182 hallar las soluciones generales de las ecuaciones que se indican.

4155. $y'' = x + \operatorname{sen} x$. **4156.** $y'' = \operatorname{arctg} x$.
4157. $y'' = \ln x$. **4158.** $xy'' = y'$.

4159. $y'' = y' + x$. **4160.** $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

4161. $(1 + x^2) y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

4162. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

4163. $(y'')^2 = y'$. **4164.** $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.
4165. $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \operatorname{sen}^3 x$.
4166. $1 + (y')^2 = 2yy''$.
4167. $(y')^2 + 2yy'' = 0$. **4168.** $a^2 y'' - y = 0$.

4169. $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$. **4170.** $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

4171. $yy'' + (y')^2 = 1$. **4172.** $yy'' = (y')^2$.
4173. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.
4174. $y(1 - \ln y) y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$.
4175. $y'' = 2yy'$.

4176. $\cos y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$.

4177. $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$.
4178. $yy'' - yy' \ln y = (y')^2$.

4179. $y'' = y' \left(\frac{y'}{y} - 2\sqrt{\frac{y'}{y} - 4}\right)$.

4180. $(x + a) y'' + x (y')^2 = y'$.

4181*. $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2$.

4182. $xy'' - \frac{1}{4}(y'')^2 - y' = 0$.

En los ejercicios 4183—4188 resolver las ecuaciones mediante una sustitución conveniente: $yy' = p$, $(y')^2 = p$, $xy' = p$, $\frac{\;}{y} = p$, etc.

4183. $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$. **4184.** $xy'' = y'(e^y - 1)$.

4185. $yy'' + (y')^2 = x$. **4186.** $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{y}{x^2} = 0$.

4187. $x^2 y \frac{d^2y}{dx^2} - \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2 = 0$.

4188. $yy'' = y'(2\sqrt{yy'} - y')$.

En los ejercicios 4189—4199 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones para las condiciones iniciales que se indican.

4189. $y''(x^2+1)=2xy'$; $\quad y|_{x=0}=1, \quad y'|_{x=0}=3.$

4190. $xy''+x(y')^2-y'=0$; $\quad y|_{x=2}=2, \quad y'|_{x=2}=1.$

4191. $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$; $\quad y|_{x=0}=0, \quad y'|_{x=2}=4.$

4192. $2y''=3y^2$; $\quad y|_{x=-2}=1, \quad y'|_{x=-2}=-1.$

4193. $yy''=(y')^2-(y')^3$; $\quad y|_{x=1}=1, \quad y'|_{x=1}=-1.$

4194. $y^3y''=-1$; $\quad y|_{x=1}=1, \quad y'|_{x=1}=0.$

4195. $y^4-y^3y''=1$; $\quad y|_{x=0}=\sqrt{2}, \quad y'|_{x=0}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

4196. $y''=e^{2y}$; $\quad y|_{x=0}=0, \quad y'|_{x=0}=1.$

4197. $2(y')^2=y''(y-1)$; $\quad y|_{x=1}=2, \quad y'|_{x=1}=-1.$

4198*. $x^4y''=(y-xy')^3$; $\quad y|_{x=1}=1, \quad y'|_{x=1}=1.$

4199. $y''=xy'+y+1$; $\quad y|_{x=0}=1, \quad y'|_{x=0}=0.$

4200*. ¿Cuál es la línea cuya propiedad consiste en que el radio de curvatura en cualquier punto es proporcional a la longitud de la normal? Considerar el coeficiente de proporcionalidad igual a $k=-1, +1, -2, +2$.

4201. Hallar la línea para la cual la proyección del radio de curvatura sobre el eje Oy sea una constante igual a a.

4202. Hallar la línea que pase por el origen de coordenades y para la cual el área del triángulo MTP (véase la fig. 70) engendrado por la tangente en un punto M de la línea buscada, por la ordenada MP de este punto y por el eje de abscisas, y el área del triángulo mixtilíneo OMP, están en razón constante e igual al número $k \left(k>\frac{1}{2}\right)$.

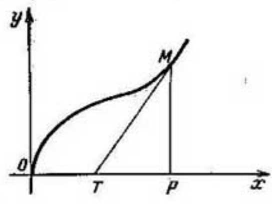

Fig. 70

4203. Hallar la línea para la cual la longitud del arco medida desde un cierto punto, es proporcional al coeficiente angular de la tangente al punto extremo del arco.

4204. Un punto de masa m es lanzado hacia arriba verticalmente, con la velocidad inicial v_0. La fuerza de resistencia del aire es igual a kv^2. Si consideramos la vertical como el eje Oy, para el movimiento dirigido hacia arriba tendremos:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg-kv^2,$$

y para la caída tendremos:

$$m\frac{d^2y}{dt}=-mg+kv^2,$$

donde $v=\frac{dy}{dt}$. Hallar la velocidad del cuerpo en el momento en que efectúa la caída.

4205. Un hilo flexible y no extensible es suspendido por sus dos extremos. ¿Cuál sería la forma que adoptase, en estado de equilibrio, el hilo bajo la acción de una carga distribuida uniformemente a lo largo de la proyección del hilo sobre el plano horizontal? Se prescinde del peso del hilo.

4206. Hallar la ley del movimiento rectilíneo efectuado por un punto material de masa m si se sabe que el trabajo realizado por la fuerza que tiene la misma dirección que el movimiento y que depende del trayecto, es proporcional al tiempo transcurrido desde que comenzó. El coeficiente de proporcionalidad es igual a k.

4207*. Un rayo de luz, procedente del aire (índice de refracción m_0) incide sobre un líquido cuyo índice de refracción es variable. El ángulo de incidencia formado entre la vertical y la dirección del rayo es α_0. El índice de refracción del líquido depende linealmente de la profundidad y es constante en el plano paralelo al horizonte, mientras que a la superficie del líquido es igual a m_1, a la profundidad h, igual a m_2. Hallar la forma del rayo de luz en el líquido. (El índice de refracción del medio es inversamente proporcional a la velocidad de la propagación de luz.)

Casos particulares de las ecuaciones de órdenes superiores

En los ejercicios 4208—4217 hallar las soluciones generales de las ecuaciones.

4208. $y'''=\frac{1}{x}$. **4209.** $y'''=\cos 2x$.

4210. $y^{\mathrm{X}}=e^{ax}$. **4211.** $x^2y'''=(y'')^2$.

4212. $xy^{\mathrm{V}}=y^{\mathrm{IV}}$. **4213.** $y'''=(y'')^3$.

4214. $y'y'''=3(y'')^2$. **4215.** $yy'''-y'y''=0$.

4216. $y'''[1+(y')^2]=3y'(y'')^2$.

4217. $(y'')^2-y'y'''=\left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

Soluciones aproximadas

4218. Al estudiar las oscilaciones de un sistema material de un grado de libertad, se presenta la ecuación diferencial de la siguiente forma $y''=f_1(x)+f_2(y)+f_3(y')$. Resolver esta ecuación gráficamente, si

1) $f_1(x) = 0$, $f_2(y) = -\sqrt{y}$, $f_3(y') = 0{,}5y'$ e $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$;

2) $f_1(x) = -x$, $f_2(y) = 0$, $f_3(y') = -0{,}1y' - 0{,}1y'^3$ e $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$.

4219. $y'' = yy' - x^2$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$.

1) Resolver esta ecuación gráficamente.

2) Hallar varios primeros términos de desarrollo de la solución en serie de potencias.

4220. Hallar los seis primeros términos de desarrollo en serie de la solución de la ecuación diferencial $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$ que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$.

4221. Hallar la solución particular de la ecuación $y'' = x \operatorname{sen} y'$, buscándola en forma de serie de potencias, que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = \frac{\pi}{2}$. (Limitarse a seis primeros términos.)

4222. Hallar la solución particular $y = f(x)$ de la ecuación $y'' = xyy'$, buscándola en forma de serie de potencias. La solución satisface las condiciones iniciales $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Si se limita a los cinco primeros términos de desarrollo, ¿son bastantes para calcular $f(-0{,}5)$ con exactitud hasta 0,001?

4223. Hallar los siete primeros términos de desarrollo en serie de la solución de la ecuación diferencial $yy'' + y' + y = 0$, que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. ¿De qué orden infinitesimal es la diferencia $y - (2 - x - e^{-x})$ para $x \to 0$?

4224. Hallar los 12 primeros términos de desarrollo en serie de la solución de la ecuación diferencial $y'' + yy' - 2 = 0$, que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$. Calcular la integral $\int_0^1 y\,dx$ con exactitud hasta 0,001. Calcular $y'|_{x=0{,}5}$ con exactitud hasta 0,00001.

4225*. Un circuito eléctrico está compuesto de la inductancia $L = 0{,}4$ henrios y un baño eléctrico, los cuales están conectados sucesivamente. El baño contiene 1 litro del agua acidulada con un poco de ácido sulfúrico. La corriente eléctrica descompone el agua debido a lo cual cambian la concentración y, como consecuencia, la resistencia de la disolución en el baño. La tensión en los bornes se mantiene constante (20 V). La cantidad de sustancia desprendida durante la electrólisis es proporcional a la corriente, al tiempo y al equivalente electroquímico de la sustancia (ley de Faraday). El equivalente electroquímico del agua es igual a 0,000187 g/C. Al comienzo del experimento la resistencia de la disolución fue igual a $R_0 = 2\Omega$, la corriente inicial, 10 A. Hallar la depedencia (en forma de una serie de potencias) entre el volumen del agua en el recipiente y entre el tiempo.

4226*. Un circuito eléctrico está compuesto de la inductancia $L = 0{,}4$ henrios y un baño eléctrico, los cuales están conectados sucesivamente. La resistencia inicial del líquido en el baño fue igual a 2 ohmios. Un litro del agua en el baño lleva disueltos 10 g de cloruro de hidrógeno. La corriente eléctrica descompone el ácido, cambiando la concentración de la disolución (compárese con el ejercicio anterior en que cambia no la cantidad de sustancia disuelta, sino el volumen del disolvente). La tensión en los bornes es igual a 20 V, el equivalente electroquímico k del cloruro de hidrógeno es igual a 0,000381 g/C, la corriente inicial, 10 A. Hallar la dependencia (en forma de una serie de potencias) entre la cantidad del ácido clorhídrico en la disolución y el tiempo.

§ 4. Ecuaciones lineales

4227. Las funciones x^3 y x^4 satisfacen cierta ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Comprobar que constituyen el sistema fundamental y formar la ecuación.

4228. Lo mismo, con respecto a las funciones e^x y x^2e^x.

4229. Las funciones x, x^3, e^x forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden. Formar esta ecuación.

4230. Las funciones x^2 y x^3 forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Hallar la solución de esta ecuación que satisfaga las condiciones iniciales $y\,|_{x=1} = 1$, $y'\,|_{x=0} = 0$.

4231. Las funciones $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$ satisfacen cierta ecuación lineal homogénea de segundo orden:

a) comprobar que forman el sistema fundamental de soluciones;

b) formar la ecuación;

c) mostrar que las funciones 1 y $\cos 2x$ son otro sistema fundamental de esta misma ecuación.

4232*. Si y_1 es la solución particular de la ecuación

$$y'' + y'P(x) + yQ(x) = 0,$$

entonces,

$$y_2 = Cy_1 \int e^{-\int P(x)dx} \frac{dx}{y_1^2}$$

(C es una constante) también es la solución. Mostrar esto aplicando tres métodos:

1) probando directamente, 2) sustituyendo $y = y_1z$, 3) valiéndose de la fórmula de Ostrogradski.

4233. Hallar la solución general de la ecuación $(1 - x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0$, conociendo su solución particular $y_1 = x$ y valiéndose de la fórmula del ejercicio 4232.

4234. Resolver la ecuación $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ conociendo su solución particular $y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

4235. La ecuación $(2x - x^2) y'' + (x^2 - 2) y' + 2(1 - x) y = 0$ tiene la siguiente solución: $y = e^x$. Hallar la solución de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$.

4236*. Hallar la condición necesaria y suficiente para que la ecuación $y'' + y'P(x) - yQ(x) = 0$ tenga dos soluciones linealmente independientes y_1 e y_2 que satisfacen la condición $y_1y_2 = 1$.

4237*. Hallar la solución general de la ecuación

$$(1 - x^2) y'' - xy' + 9y = 0,$$

si su solución particular es un polinomio de tercer grado.

En los ejercicios 4238—4240 es fácil dar con una solución particular (sin tener en cuenta la solución trivial $y = 0$) para la ecuación dada. Hallar las soluciones generales de estas ecuaciones.

4238. $y'' - \operatorname{tg} x \cdot y' + 2y = 0$. 4239. $y'' - y' + \frac{y}{x} = 0$.

4240. $y'' - \frac{2x}{x^2+1} y' + \frac{2y}{x^2+1} = 0$.

4241. Hallar la solución general de la ecuación

$$x^3 y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0,$$

conociendo las soluciones particulares $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

En los ejercicios 4242—4244 hallar las soluciones generales de las ecuaciones no homogéneas.

4242. $x^2y'' - xy' + y = 4x^3$.

4243. $y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = x - 1$.

4244. $(3x + 2x^2) y'' - 6(1 + x) y' + 6y = 6$.

4245. La ecuación $(1 + x^2) y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2$ es susceptible de tener la siguiente solución particular: $y = x^2$. Hallar la solución de esta ecuación que satisfaga las condiciones $y|_{x=-1} = 0$, $y'|_{x=-1} = 0$.

4246. Hallar los seis primeros términos de desarrollo en serie de potencias de la solución de la ecuación diferencial $y'' - (1 + x^2) y = 0$ que satisfaga las condiciones iniciales $y|_{x=0} = -2$, $y'|_{x=0} = 2$.

4247. Hallar los nueve primeros términos de desarrollo en serie de potencias de la solución de la ecuación diferencial $y'' = x^2y - y'$ que satisfaga las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$.

4248. Escribir en forma de serie de potencias la solución particular de la ecuación $y'' - xy' + y - 1 = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$.

4249. Escribir en forma de serie de potencias la solución general de la ecuación $y'' = ye^x$. (Limitarse a los seis primeros términos.)

4250. Escribir en forma de serie de potencias la solución general de la ecuación $y'' + xy' - x^2y = 0$. (Limitarse a los seis primeros términos).

Ecuaciones con coeficientes constantes

En los ejercicios 4251—4261 hallar las soluciones generales de las ecuaciones.

4251. $y'' + y' - 2y = 0$. **4252.** $y'' - 9y = 0$.
4253. $y'' - 4y' = 0$. **4254.** $y'' - 2y' - y = 0$.
4255. $3y'' - 2y' - 8y = 0$. **4256.** $y'' + y = 0$.
4257. $y'' + 6y' + 13y = 0$. **4258.** $4y'' - 8y' + 5y = 0$.
4259. $y'' - 2y' + y = 0$. **4260.** $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$.
4261. $2y'' + y' + 2\operatorname{sen}^2 15^\circ \cos^2 15^\circ y = 0$.

En los ejercicios 4262—4264 hallar las soluciones de las ecuaciones que satisfagan las condiciones iniciales que se indican.

4262. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y|_{x=0} = 6$, $y'|_{x=0} = 10$.
4263. $y'' + 4y' + 29y = 0$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 15$.
4264. $4y'' + 4y' + y = 0$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 0$.

4265. Sea dada la solución paricular de cierta ecuación lineal homogénea de segundo orden, con coeficientes constantes $y_1 = e^{mx}$. El discriminante de la correspondiente ecuación característica es igual a cero. Hallar la solución particular de esta ecuación diferencial, la cual, junto con su derivada, se reduce a **1** para $x = 0$.

4266. Hallar la curva integral de la ecuación $y'' + 9y = 0$ que pase por el punto $M(\pi, -1)$ y que toque la recta $y + 1 = x - \pi$ en este mismo punto.

4267. Hallar la curva integral de la ecuación $y'' + ky = 0$, que pase por el punto $M(x_0, y_0)$ y que toque la recta $y - y_0 = a(x - x_0)$ en este mismo punto.

En los ejercicios 4268—4282 formar las soluciones generales de las ecuaciones no homogéneas buscando sus soluciones particulares mediante la selección conveniente o bien aplicando el método de variación de las constantes arbitrarias.

4268. $2y'' + y' - y = 2e^x$. **4269.** $y'' + a^2y = e^x$.
4270. $y'' - 7y' + 6y = \operatorname{sen} x$. **4271.** $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$.
4272. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.
4273. $y'' - 2y' + 2y + 2x$. **4274.** $y'' + 4y' - 5y = 1$.
4275. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $10e^{-x}$; 2) $3e^{2x}$; 3) $2\operatorname{sen} x$; 4) $2x^3 - 30$; 5) $2e^x \cos\frac{x}{2}$;

6) $x - e^{-2x} + 1$; 7) $e^x(3 - 4x)$; 8) $3x + 5 \operatorname{sen} 2x$;
9) $2e^x - e^{-2x}$; 10) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$; 11) $\operatorname{sh} x$.

4276. $2y'' + 5y' = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $5x^2 - 2x - 1$; 2) e^x; 3) $29 \cos x$; 4) $\cos^2 x$;
5) $0{,}1e^{-2{,}5x} - 25 \operatorname{sen} 2{,}5\, x$; 6) $29x \operatorname{sen} x$; 7) $100x \cdot e^{-x} \cos x$;
8) $3 \cdot \operatorname{ch} \frac{5}{2} x$.

4277. $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) 1; 2) e^{-x}; 3) $3e^{2x}$; 4) $2(\operatorname{sen} 2x + x)$; 5) $\operatorname{sen} x \cos 2x$;
6) $\operatorname{sen}^3 x$; 7) $8(x^2 + e^{2x} + \operatorname{sen} 2x)$; 8) $\operatorname{sh} 2x$;
9) $\operatorname{sh} x + \operatorname{sen} x$; 10) $e^x - \operatorname{sh}(x - 1)$.

4278. $y'' + y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $2x^3 - x + 2$; 2) $-8 \cos 3x$; 3) $\cos x$; 4) $\operatorname{sen} x - 2e^{-x}$;
5) $\cos x \cos 2x$; 6) $24 \operatorname{sen}^4 x$; 7) $\operatorname{ch} x$.

4279. $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:

1) $5e^{\frac{3}{5}x}$; 2) $\operatorname{sen} \frac{4}{5} x$; 3) $e^{2x} + 2x^3 - x + 2$; 4) $e^{\frac{3}{5}} \cdot \cos x$;

5) $e^{\frac{3}{5}} \cdot \operatorname{sen} \frac{4}{5} x$; 6) $13\, e^x \cdot \operatorname{ch} x$.

4280. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$. **4281.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$.

4282. $y'' - y' = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $\frac{e^x}{1+e^x}$; 2) $e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$; 3) $e^{2x} \cos e^x$.

En los ejercicios 4283—4287 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfagan las condiciones iniciales que se indican.

4283. $4y' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$; $y|_{x=0} = 3$, $y|_{x=0} = -5{,}5$.
4284. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3{,}2$.
4285. $y'' - y' = 2(1 - x)$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$.
4286. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 2$.
4287. $y'' + y + \operatorname{sen} 2x = 0$; $y|_{x=\pi} = y'|_{x=\pi} = 1$.
4288*. Mostrar que la solución particular $\bar{y}$ de la ecuación $a_0y'' + a_1y' + a_2y = Ae^{px}$ (a_0, a_1, a_2 son los coeficientes constantes, p y A son los números reales o complejos) tiene la forma $\bar{y} = \frac{A}{\varphi(p)} e^{px}$, si p no es la raíz de la ecuación característica $\varphi(r) \equiv a_0r^2 + a_1r + a_2 = 0$; $\bar{y} = \frac{Ax}{\varphi'(p)} e^{px}$, si p es la raíz simple de la ecuación característica; $\bar{y} = \frac{Ax^2}{\varphi''(p)} e^{px}$, si p es la raíz doble de la ecuación característica.

En los ejercicios 4289—4292 hallar las soluciones generales de las ecuaciones de Euler.

4289. $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$. **4290.** $x^2y'' + xy' + y = x$.

4291. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$.

4292. $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$.

4293. Si el eje del árbol de una turbina está colocado horizontalmente y si el centro de gravedad de un disco que lleva el árbol, no

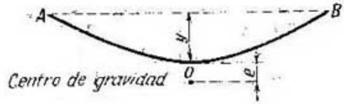

Fig. 71

está en el eje, la flexión y del eje del árbol (véase la fig. 71), al girar éste, satisface la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2\right) y = g\cos\omega t + \omega^2 e,$$

donde m es la masa del disco, α es el número constante que depende del tipo de sujeción que se emplee en los extremos A y B; ω es la velocidad angular de la revolución, e es la excentricidad del centro de gravedad del disco. Hallar la integral general de esta ecuación.

4294. Un punto material de masa de 1 g efectúa el movimiento de repulsión a lo largo de una recta, desde un centro. La fuerza de repulsión es proporcional a la distancia que media entre el punto y el centro (el coeficiente de proporcionalidad es igual a 4). La resistencia del medio es proporcional a la velocidad del movimiento (el coeficiente de proporcionalidad es igual a 3). Al comenzar el movimiento, la distancia entre el punto y el centro es igual a 1 cm, la velocidad, igual a cero. Hallar la ley del movimiento.

4295. Una partícula de masa igual a 1 g avanza a lo largo de una recta hacia el punto A, bajo la acción de cierta fuerza de atracción proporcional a la distancia que media entre la partícula y el punto A. A la distancia igual a 1 cm actúa la fuerza igual a 0,1 din. La resistencia del medio es proporcional a la velocidad del movimiento e igual a 0,4 din a la velocidad de 1 cm/s. En el momento $t = 0$ la partícula se halla a 10 cm del punto A y su velocidad es igual a cero. Hallar la dependencia entre la distancia y el tiempo y calcular la distancia para $t = 3$ s (con exactitud hasta 0,01 cm).

4296. Un punto material de masa m se desplaza, a lo largo de la recta, del punto A al punto B, bajo la acción de la fuerza constante F. La resistencia del medio es proporcional a la distancia que medie entre el cuerpo y el punto B. En el momento inicial (en el punto A) es igual a f ($f < F$). La velocidad inicial del punto es igual a cero. ¿Cuánto tiempo tardará el punto en desplazarse de A a B? ($AB = a$).

4297. Un cuerpo de masa igual a 200 g está colgado del muelle. Al ser extendido éste en 2 cm, el cuerpo fue sacado del estado de reposo y fue suelto (sin velocidad inicial). Hallar la ecuación del movimiento del cuerpo considerando la resistencia del medio proporcional a la velocidad del movimiento. Si el cuerpo se desplaza a la velocidad 1 cm/s, el medio ofrece la resistencia igual a 0,1 kgf. La tensión del muelle al ser extendido en 2 cm es igual a 10 kgf. Se prescinde del peso del muelle.

4298. Un zoquete de madera cilíndrico ($S = 100$ cm^2, $h = 20$ cm, $\gamma = 0{,}5$ g/cm^3 ha sido sumergido completamente en el agua y suelto sin velocidad inicial. Considerando que la fuerza de rozamiento es proporcional a la altura de la parte sumergida, esclarecer cuál debe ser el coeficiente de proporcionalidad k para que sobre la superficie del agua aparezca exactamente la mitad del zoquete, como resultado de la primera subida.

¿Cuánto tiempo (t_1) durará la primera subida?

¿Cuál es la ecuación del movimiento durante la primera subida?

4299*. Un tubo largo y estrecho gira alrededor de un eje vertical y perpendicular a aquél, con velocidad angular ω. En el momento inicial, a la distancia a_0 del eje, en el interior del tubo hubo un pequeño globo de masa m. Considerando que en el momento inicial la velocidad del globo, respecto al tubo, era igual a cero, hallar la ley del movimiento del globo respecto al tubo.

4300. Resolver el problema del ejercicio anterior suponiendo que el globo está sujeto al punto O con un muelle. La fuerza con que el muelle actúa sobre el globo es proporcional a la deformación del muelle, la fuerza igual a k dinas modifica la longitud del muelle en 1 cm. La longitud del muelle en estado libre es igual a a_0.

Ecuaciones de órdenes superiores

En los ejercicios 4301—4311 hallar las soluciones generales de las ecuaciones.

4301. $y''' + 9y' = 0$. **4302.** $y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0$.

4303. $y^{(IV)} = 8y'' - 16y$. **4304.** $y^{(IV)} = 16y$.

4305. $y''' - 13y' - 12y = 0$.

4306. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

4307. $y^{(IV)} + 2y''' + y'' = 0$. **4308.** $y^{(n)} = y^{(n-2)}$.

4309. $y^{(IV)} + y = 0$.

4310. $64y^{(VIII)} + 48y^{(VI)} + 12y^{(IV)} + y'' = 0$.

4311. $y^{(n)} + \frac{n}{1} y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1} y' + y = 0$.

4312. $y''' = -y'$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 0$, $y''|_{x=0} = -1$.

4313. $y^{(V)} - y'$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$, $y''|_{x=0} = 0$, $y'''|_{x=0} = 1$, $y^{(IV)}|_{x=0} = 2$.

En los ejercicios 4314—4320 formar las soluciones generales de las ecuaciones no homogéneas, buscando sus soluciones particulares mediante la selección conveniente o bien aplicando el método de variación de las constantes arbitrarias.

4314. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$.

4315. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$.

4316. $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = \cos x$.

4317. $y^{(IV)} + 2a^2y'' + a^4y = \cos ax$.

4318. $y^{(V)} + y''' = x^2 - 1$.

4319. $y^{(IV)} - y = xe^x + \cos x$.

4320. $y^{(IV)} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

4321. $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0;\quad y|_{x=0} = 2,$

$$y'|_{x=0} = 1,\quad y''|_{x=0} = 1.$$

4322. $y''' - y' = 3(2 - x^2);\quad y|_{x=0} = y'|_{x=0} = y''|_{x=0} = 1$.

4323. Resolver la ecuación de Euler $x^3y''' + xy' - y = 0$.

§ 5. Sistemas de ecuaciones diferenciales

4324.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$ **4324.2.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

4324.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$ **4324.4.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

4324.5 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$ **4324.6.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$

(las raíces de la ecuación característica son $r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 5$).

4324.7 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$

(las raíces de la ecuación característica son $r_1 = 2,\ r_{2,3} = 3 \pm i$).

4325. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

4326. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

4327. $\begin{cases} yzy' = x \left(y' = \dfrac{dy}{dx} \right), \\ y^2 z' = x \left(z' = \dfrac{dz}{dx} \right). \end{cases}$

4328. $\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{z}, \\ z' = \dfrac{x-y}{y}. \end{cases}$

4329. $\begin{cases} xy' = y, \\ xzz + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

4330 $\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}, \\ z' = \dfrac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}. \end{cases}$

4331. $\begin{cases} z = y' (z - y)^2, \\ y = z' (z - y)^2. \end{cases}$

4332. $\begin{cases} 4 \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \operatorname{sen} t, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

4333. $\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} = x, \\ \dfrac{d^2 x}{dt^2} = y. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2 x}{dt^2} = 1. \end{cases}$

4335. $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}.$

En los ejercicios 4336—4339 hallar las soluciones particulares de los sistemas de ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones iniciales indicadas.

4336. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - yz}{x^2 - yz}, & y\,|_{x=0} = 1; \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z(x+y)}{x^2 - yz}, & z\,|_{x=0} = -1. \end{cases}$

4337. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{2x}{t}, & x\,|_{t=1} = \dfrac{1}{3}; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 1 + \dfrac{2x}{t}, & y\,|_{t=1} = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

4338. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z, \end{cases}$ $\quad x\,|_{t=0} = 1,$ $\; y\,|_{t=0} = z\,|_{t=0} = 0.$

4339. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+z, & x|_{t=0}=-1; \\ \dfrac{dy}{dt}=z+x, & y|_{t=0}=1; \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y, & z|_{t=0}=0. \end{cases}$$

4340. Hallar la pareja de líneas que posean las siguientes propiedades: a) las tangentes trazadas en los puntos de abscisas iguales, se cortan en el eje de ordenadas; b) las normales trazadas en los puntos de abscisas iguales, se cortan en el eje de abscisas; c) una de las líneas pasa por el punto (1, 1), la otra, por el punto (1, 2).

4341. Sean dadas dos líneas: $y = f(x)$, que pasa por el punto (0, 1) e $y = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, que pasa por el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Las tangentes trazadas a las dos líneas en los puntos de abscisas iguales, se cortan en el eje de abscisas. Hallar la línea $y = f(x)$.

4342. Hallar la línea alabeada que pase por el punto (0, 1, 1) y que posea las siguientes propiedades: a) al desplazarse el punto de contacto a lo largo de la línea, la proyección de la tangente en el plano Oxy describe la bisectriz del ángulo formado entre las direcciones positivas de los ejes Ox y Oy; b) la distancia que media entre la citada proyección y el origen de coordenadas es igual a la coordenada z del punto de contacto.

4343. Dos pequeños globos de sendas masas m, están ligados por un muelle muy ligero (su alargamiento es proporcional a la fuerza de extensión). La longitud del muelle no extendido es l_0. El muelle fue extendido hasta l_1 y luego, en el momento $t = 0$ ambos globos situados verticalmente uno encima del otro, comienzan a caer (se prescinde de la resistencia del medio). Al cabo de un lapso de tiempo igual a T, la longitud del hilo se reduce hasta l_0. Hallar la ley del movimiento de cada uno de los globos.

4344. Un tubo horizontal gira alrededor del eje vertical con velocidad angular igual a 2 radiantes por segundo. En el interior del tubo se encuentran dos pequeños globos de masas iguales a 300 g y 200 g, respectivamente, estando más alejado del eje de revolución el que pesa más. Están ligados por un muelle imponderable elástico y no extendido de 10 cm de longitud. La fuerza de extensión igual a 0,24 N actúa sobre el muelle debido a lo cual éste queda alargado en 1 cm. El centro de gravedad del sistema de los globos se halla alejado 10 cm del eje de revolución. Los globos se mantienen en la posición descrita por cierto mecanismo. En el momento considerado como de referencia para comenzar a medir el tiempo, la acción del mecanismo cesa, y los globos se ponen en movimiento. Hallar la ley del movimiento de cada uno de los globos respecto al tubo. (Se prescinde del rozamiento.)

4345. La velocidad del crecimiento de los cultivos microorgánicos es proporcional a su cantidad y a la cantidad disponible de sustancias nutritivas (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k). La velocidad de disminución de sustancias nutritivas es proporcional a la cantidad disponible de microorganismos (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k_1). Al comienzo del experimento en la vasija hubo A_0 microorganismos y B_0 sustancias nutritivas. Hallar la dependencia entre la cantidad A de microorganismos y la cantidad B de sustancias nutritivas, y el tiempo ($k > 0$, $k_1 > 0$).

4346*. Supongamos que las bacterias se multiplican con velocidad proporcional a su cantidad disponible (el coeficiente de proporcionalidad es igual a a), pero al mismo tiempo elaboran un veneno que las va matando, con velocidad proporcional a la cantidad del veneno y a la cantidad de bacterias (el coeficiente de proporcionalidad es igual a b). Supongamos también que la velocidad con que se elabora el veneno, es proporcional a la cantidad disponible de bacterias (el coeficiente de proporcionalidad es igual a c). Primero la cantidad de bacterias crece alcanzando cierto valor máximo, pero luego decrece tendiendo a cero. Mostrar que para cualquier momento t la cantidad N de bacterias se da por la fórmula

$$N = \frac{4M}{(e^{kt} + e^{-kt})^2},$$

donde M es el máximo de bacterias y el tiempo t se mide a partir del momento en que $N = M$, k es cierta constante.

4347. Dos cilindros cuyas bases se hallan en un mismo plano están unidos abajo por un tubo capital y contienen un líquido, de altura desigual (H_1 y H_2). En una unidad de tiempo, cierto volumen del líquido pasa a través del tubo, siendo proporcional a la diferencia de alturas, es decir, igual a $\alpha \cdot (h_1 - h_2)$, donde α es el coeficiente de proporcionalidad. Hallar la ley que rige el cambio de la altura del líquido en los cilindros situados encima del tubo capilar. La sección transversal de los cilindros es S_1 y S_2.

§ 6. Problemas de cálculo

4348. Un aparato eléctrico calienta 1 kg del agua, siendo sumergido en su interior. La capacidad calorífica del agua se considera constante y la temperatura inicial igual a θ_0. La resistencia R del aparato eléctrico depende linealmente de la temperatura $\theta : R = R_0 (1 + 0{,}004\theta)$, donde R_0 es la resistencia a 0° C (esta ley es válida para la mayoría de los metales puros). El termoaislamiento de la vasija es perfecto debido a lo cual se prescinde de la pérdida de calor. Hallar la dependencia entre la temperatura θ y el tiempo t en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant T$ si:

1) La tensión E se introduce uniformemente desde $E = 0$ hasta $E = E_1$ por espacio de T s. Calcular con exactitud hasta 1°, cuántos grados aumentará la temperatura del agua al finalizar el décimo minuto si $\theta_0 = 0°$, $E_1 = 110$ V, $R_0 = 10\Omega$ y $T = 10$ min.

2) La tensión cambia de acuerdo con la ley $E = E_0$ sen $100\,\pi t$. Calcular, con exactitud hasta 1°, cuántos grados aumentará la temperatura del agua al finalizar el décimo minuto si $\theta_0 = 0°$, $E_0 = 110$ V y $R_0 = 10\Omega$.

4349. Una espiral cuya resistencia es igual a 24Ω calienta un litro del agua que cede, por su parte, su calor al medio ambiente cuya temperatura es igual a 20° C (la velocidad del enfriamiento es proporcional a la diferencia de la temperatura del cuerpo y la del medio). Se sabe que si la corriente se desconecta, la temperatura del agua baja de 40° a 30° en 10 minutos. La temperatura inicial del agua es de 20° C. ¿Cuál será la temperatura del agua al calentarse diez minutos si:

1) La tensión se introduce uniformemente desde $E_0 = 0$ hasta $E_1 = 120$ V por espacio de 10 minutos? La exactitud debe ser de 0,1°.

2) La corriente es alterna, la tensión cambia de acuerdo con la fórmula $E = 110$ sen $100\pi t$? La exactitud debe ser 0,1°.

4350. Sea dada la ecuación $y' = \frac{x}{y} - x^2$. Formar la tabla de los valores de la solución que satisfaga la condición inicial $y|_{x=1} = 1$ dando a x los valores de 1 hasta 1,5 con intervalo igual a 0,05. Los cálculos deben efectuarse hasta la tercera cifra decimal.

4351. Para $x = 1$ calcular el valor de la solución particular de la ecuación diferencial $y' = y + x$ que satisfaga la condición inicial $y|_{x=0} = 1$. Calcular las cinco primeras aproximaciones y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 (hasta la cuarta cifra decimal) aplicando el método de las aproximaciones sucesivas. Comparar los resultados.

4352. Se sabe que la integral $\int e^{-x^2}\,dx$ no se puede expresar mediante funciones elementales. Aprovechando que la función $y = e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ es la solución de la ecuación diferencial $y' = 2xy + 1$, calcular $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}\,dx$. Aplicar el método de las aproximaciones sucesivas y limitarse a la quinta aproximación. Comparar el resultado con el valor aproximado calculado por la regla de Simpson.

4353. $y = f(x)$ es la solución de la ecuación diferencial $y' = y^2 - x$ siendo la condición inicial $y|_{x=0} = 1$. Hallar la cuarta aproximación (y_4) aplicando el método de las aproximaciones sucesivas limitándose a tan cantidad de sumandos que sea necesaria para calcular y_4 (0,3) con tres cifras decimales. Luego, hallar varios primeros términos de desarrollo de $f(x)$ en serie de potencias; calcular $f(0{,}3)$ con tres cifras exactas después de la coma; considerando $f(0{,}3)$ como resultado más exacto, evaluar el error de $y_4(0{,}3)$.

4354. $y = f(x)$ es la solución de la ecuación diferencial $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$ dadas las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. Hallar $f(1{,}6)$ con exactitud de 0,001.

4355*. $y = f(x)$ es la solución de la ecuación diferencial $y'' = y' - y + x$ dadas las condiciones iniciales $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$. Hallar $f(1{,}21)$ con exactitud de 0,000001.

4356*. $y = f(x)$ es la solución de la ecuación diferencial $y'' = xy' - y + e^x$ dadas las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. Hallar $f\left(\frac{1}{2}\right)$ con exactitud de 0,0001.

4357. La línea viene dada por la ecuación $y = f(x)$. Hallar el desarrollo de la función $f(x)$ en serie sabiendo que satisface la ecuación diferencial $y'' = xy$ y las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 0$, $y'_{x=0} = 1$. Calcular la curvatura de la línea en el punto cuya abscisa es igual a 1, con exactutud de 0,0001.

Capítulo XV

Series trigonométricas

§ 1. Polinomios trigonométricos

4358. Valiéndose de las fórmulas de Euler $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ y $\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ demostrar que las funciones $\operatorname{sen}^n x$ y $\cos^n x$ son susceptibles de ser presentadas en la forma de polinominos trigonométricos de n-ésimo orden.

4359. Demostrar las relaciones

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^n x \cos mx\, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^n x \operatorname{sen} mx\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^n x \cos mx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x \operatorname{sen} mx\, dx = 0$$

si $m > n$ (m y n son números enteros).

4360. Mostrar que cada polinomio trigonométrico de n-ésimo orden que contiene solamente cosenos, es susceptible de ser presentado en la forma $P(\cos \varphi)$, donde $P(x)$ es el polinomio de n-ésimo orden respecto a x.

4361. Demostrar la relación valiéndose de la fórmula de Euler (véase el ejercicio 4358)

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}.$$

4362. Demostrar las relaciones:

1) $\cos \varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos (2n-1)\varphi = \frac{\operatorname{sen} 2n\varphi}{2 \operatorname{sen} \varphi}$;

2) $\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} 2\varphi + \ldots + \operatorname{sen} n\varphi = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}$

4363. Hallar los ceros de los polinomios trigonométricos

$$\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}2\varphi + \ldots + \operatorname{sen}n\varphi$$

y

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$.

4364. Mostrar que el polinomio trigonométrico

$$\operatorname{sen}\varphi + \frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen}n\varphi}{n}$$

en el intervalo $[0, \pi]$ tiene máximos en los puntos $\frac{\pi}{n+1}$, $3\frac{\pi}{n+1}, \ldots, (2q-1)\frac{\pi}{n+1}$ y mínimos en los puntos $\frac{2\pi}{n}$, $2\cdot\frac{2\pi}{n}, \ldots, (q-1)\frac{2\pi}{n}$, donde $q=\frac{n}{2}$, si n es par y $q=\frac{n+1}{2}$ si n es impar.

4365*. Demostrar que el polinomio trigonométrico sin término libre

$\Phi_n(\varphi) = a_1\cos\varphi + b_1\operatorname{sen}\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi + b_n\operatorname{sen}n\varphi$

no igual idénticamente a cero, no puede conservar el signo constante para todas las φ.

§ 2. Series de Fourier

4366. Mostrar que la función $y = x^3 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, para $x \neq 0$ e $y = 0$ cuando $x = 0$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, es continua junto con su primera derivada, pero no satisface las condiciones del teorema de Dirichlet. ¿Es posible desarrollarla en serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$?

Resolver los problemas de los ejercicios 4367—4371 en el supuesto de que la función $f(x)$ es continua.

4367. La función $f(x)$ satisface la condición

$$f(x+\pi) = -f(x).$$

Demostrar que todos sus coeficientes pares de Fourier son iguales a cero ($a_0 = a_2 = b_2 = a_4 = b_4 = \ldots = 0$).

4368. La función $f(x)$ satisface la condición

$$f(x+\pi) = f(x).$$

Demostrar que todos sus coeficientes impares de Fourier son iguales a cero.

4369. La función $f(x)$ satisface las condiciones $f(-x) = f(x)$ y $f(x+\pi) = -f(x)$.

Demostrar que $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$ y $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots$ $\ldots = 0$.

4370. La función $f(x)$ satisface las condiciones

$$f(-x) = -f(x) \text{ y } f(x+\pi) = -f(x).$$

Demostrar que $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$ y $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots$ $\ldots = 0$.

4371. La función $f(x)$ satisface las condiciones:

a) $f(-x) = f(x)$ y $f(x+\pi) = f(x)$;

b) $f(-x) = -f(x)$ y $f(x+\pi) = f(x)$.

¿Cuáles de sus coeficientes de Fourier se reducen a cero?

4372. Desarrollar la función igual a -1 en serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, 0)$ e igual a 1 en el intervalo $(0, \pi)$.

4373. Desarrollar la función $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de senos.

4374. Valiéndose de los resultados de los ejercicios 4372 y 4373 obtener el desarrollo para las funciones $y = x$ e $y = \frac{\pi - x}{2}$. Indicar

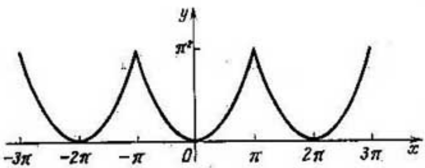

Fig. 72

los intervalos para los cuales sean válidas las fórmulas obtenidas.

4375. Desarrollar la función $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de cosenos.

4376. Desarrollar la función $y = x^2$ en serie de Fourier: 1) en el intervalo $(-\pi, \pi)$; 2) en el intervalo $(0, 2\pi)$ (véanse las figuras 72 y 73).

Valiéndose de los desarrollos obtenidos calcular las sumas de las series:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots,$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$$

En los ejercicios 4377—4390 desarrollar en serie de Fourier las funciones dadas en los intervalos que se indican.

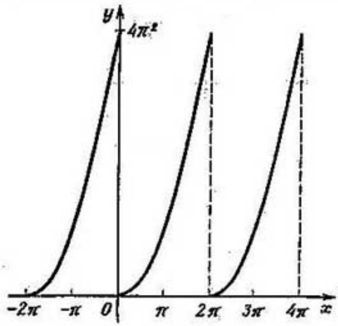

Fig. 73

4377. La función $y = x^2$ en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de senos.

4378. La función $y = x^3$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

4379. La función $f(x)$ igual a 1 para $-\pi < x < 0$ e igual a 3 para $0 < x < \pi$.

4380. La función $f(x)$ igual a 1 en el intervalo $(0, h)$ e igual a 0 en el intervalo (h, π) en serie de cosenos $(0 < h < \pi)$.

4381. La función continua $f(x)$ igual a 1 para $x = 0$ e igual a 0 en el intervalo $(2h, \pi)$ y lineal en el intervalo $(0, 2h)$ en serie de cosenos $(0 < h < \pi/2)$.

4382. La función $y = |x|$ en el intervalo $(-l, l)$.

4383. La función $y = e^x - 1$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.

4384. La función $y = e^x$ en el intervalo $(-l, l)$.

4385. La función $y = \cos ax$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ (a no es un número entero).

4386. La función $y = \operatorname{sen} ax$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ (a no es un número entero).

4387. La función $y = \operatorname{sen} ax$ (a es un número entero) en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de cosenos.

4388. La función $y = \cos ax$ (a es un número entero) en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de senos.

4389. La función $y = \operatorname{sh} ax$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

4390. La función $y = \operatorname{ch} x$ en el intervalo $(0, \pi)$ en serie de cosenos y en serie de senos.

4391. Desarrollar en serie de Fourier la función cuya gráfica está representada en la fig. 74.

4392*. Desarrollar en serie de Fourier la función cuya gráfica está representada en la fig. 75.

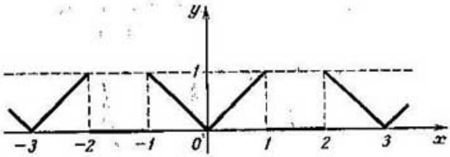

Fig. 74

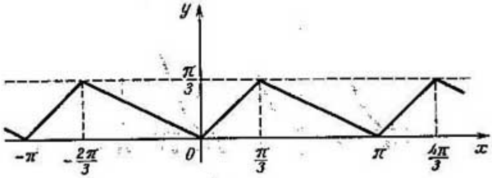

Fig. 75

4393*. Desarrollar en serie de Fourier las funciones cuyas gráficas están representadas en las figuras 76 y 77.

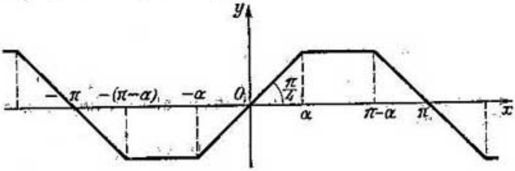

Fig. 76

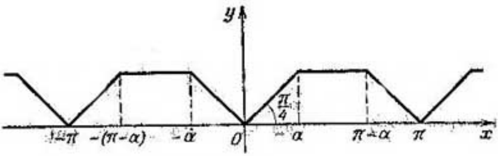

Fig. 77

4394. Desarrollar la función $y = x(\pi - x)$ en serie de senos en el intervalo $(0, \pi)$. Aplicar el resultado obtenido para calcular la suma de la serie

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} + \ldots$$

4395. Sea la función $\varphi(x) = (\pi^2 - x^2)^2$.

a) Mostrar que se verifican las igualdades

$$\varphi(-\pi)=\varphi(\pi),\ \ \varphi'(-\pi)=\varphi'(\pi)\ \text{y}\ \varphi''(-\pi)=\varphi''(\pi)$$
$$[\text{pero}\ \varphi'''(-\pi)\neq\varphi'''(\pi)].$$

b) Valiéndose de los resultados obtenidos desarrollar la función $\varphi(x)$ en serie de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

c) Calcular la suma de la serie

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}+\ldots$$

§ 3. Método de Krilov. Análisis armónico

En los ejercicios 4396—4399 mejorar la convergencia de las series trigonométricas haciendo que los coeficientes alcancen el orden k indicado entre paréntesis.

4396*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}\operatorname{sen} nx\ \ (k=4).$

4397*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+1}\operatorname{sen} nx\ \ (k=2).$

4398*. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}\cos nx\ \ (k=4).$

4399*. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\cos nx\ \ (k=5).$

4400. Las funciones $f_i(x)$ $(i=1, 2, 3)$ son dadas en el intervalo $[0, 2\pi]$ por la siguiente tabla:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$f_1(x)$	27	32	35	30	26	20	18	22	26	30	32	36
$f_2(x)$	0,43	0,87	0,64	0,57	0,28	0	−0,30	−0,64	−0,25	0,04	0,42	0,84
$f_3(x)$	2,3	3,2	2,1	1,6	−0,4	−0,2	−0,4	0,3	0,7	0,9	1,2	1,6

Hallar la expresión aproximada de estas funciones en forma de un polinomio trigonométrico de segundo orden.

Capítulo XVI

Elementos de la teoría del campo*

Campo vectorial, divergencia y rotor

4401. Hallar las líneas vectoriales del campo homogéneo $\boldsymbol{A}(P) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, donde a, b y c son constantes.

4402. Hallar las líneas vectoriales del campo plano $\boldsymbol{A}(P) = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$, donde ω es constante.

4403. Hallar las líneas vectoriales del campo $\boldsymbol{A}(P) = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$, donde ω y h son constantes.

4404. Hallar las líneas vectoriales del campo:

1) $\boldsymbol{A}(P) = (y + z)\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$;

2) $\boldsymbol{A}(P) = (z - y)\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + (y - x)\boldsymbol{k}$;

3) $\boldsymbol{A}(P) = x(y^2 - z^2)\boldsymbol{i} - y(z^2 + x^2)\boldsymbol{j} + z(x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$.

En los ejercicios 4405—4408 calcular la divergencia y el rotor de los campos vectoriales dados.

4405. $\boldsymbol{A}(P) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

4406. $\boldsymbol{A}(P) = (y^2 + z^2)\boldsymbol{i} + (z^2 + x^2)\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$.

4407. $\boldsymbol{A}(P) = x^2yz\boldsymbol{i} + xy^2z\boldsymbol{j} + xyz^2\boldsymbol{k}$.

4408. $\boldsymbol{A}(P) = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$.

4409. El campo vectorial está formado por una fuerza que tiene el valor constante F y la dirección positiva del eje de abscisas. Calcular la divergencia y el rotor de este campo.

4410. El campo vectorial plano está formado por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de distancia que media entre el punto de su aplicación y el origen de coordenadas, y dirigida hacia el origen de coordenadas. (Por ejemplo, el campo eléctrico plano formado por una carga puntual.) Hallar la divergencia y el rotor de este campo.

4411. Hallar la divergencia y el rotor del campo espacial cuyas propiedades son las mismas que caracterizan el campo en el ejercicio 4410.

---

* Los ejercicios que contienen problemas referentes a las propiedades del campo escalar y su gradiente aparecen en el § 4 del capítulo XI.

4412. El campo vectorial está formado por una fuerza inversamente proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el eje Oz, perpendicular a este eje y dirigida hacia él. Calcular la divergencia y el rotor de este campo.

4413. El campo vectorial está formado por una fuerza inversamente proporcional a la distancia que media entre su punto de aplicación y el plano xOy, y dirigida hacia el origen de coordenadas. Calcular la divergencia de este campo.

En los ejercicios 4414 y más adelante $\boldsymbol{r}$ es el radio vector, $r = |\boldsymbol{r}|$, su módulo.

4414. Calcular div $(a\boldsymbol{r})$, donde a es el escalar constante.

4415. Demostrar la relación

$$\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{A}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{A} + (A \operatorname{grad} \varphi).$$

donde $\varphi = \varphi(x, y, z)$ es una función escalar.

4416. Calcular div $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ra})$ y div $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{ra})$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores constantes.

4417. Calcular div $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$, donde $\boldsymbol{a}$ es un vector constante.

4418. Sin pasar a las coordenadas, calcular la divergencia del campo vectorial:

1) $\boldsymbol{A}(P) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{ar}) - 2\boldsymbol{a}r^2$;

2) $\boldsymbol{A}(P) = \dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3}$,

3) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$.

4419. Calcular la divergencia del campo vectorial

$$\boldsymbol{A}(P) = f(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

Demostrar que la divergencia del campo es igual a cero solamente cuando $f(|\boldsymbol{r}|) = \frac{C}{r^2}$, si el campo es espacial, y $f(|\boldsymbol{r}|) = \frac{C}{|\boldsymbol{r}|}$, si el campo es plano, donde C es cualquier número constante.

4420. Demostrar que

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{A}_1(P) + \boldsymbol{A}_2(P)] = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1(P) + \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_2(P).$$

4421. Calcular rot $[\varphi \boldsymbol{A}(P)]$, donde $\varphi = \varphi(x, y, z)$ es una función escalar.

4422. Calcular rot $r\boldsymbol{a}$ donde $\boldsymbol{a}$ es un vector constante.

4423. Calcular rot $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$ donde $\boldsymbol{a}$ es un vector constante.

4424. Un sólido gira con la velocidad angular constante ω alrededor del eje. Hallar la divergencia y el rotor del campo de velocidades lineales.

4425. Demostrar la relación

$$\boldsymbol{n}\,(\operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}) - \operatorname{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n})) = \operatorname{div}\boldsymbol{A},$$

si $\boldsymbol{n}$ es un vector constante singular.

Es sumamente conveniente aplicar el vector simbólico ∇ (el operador nabla de Hamilton) a las operaciones diferenciales del análisis vectorial (grad, div, rot):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

La aplicación de este operador a una u otra magnitud (escalar o vectorial) debe ser comprendida de la manera siguiente: conviene efectuar, de acuerdo con las reglas del álgebra vectorial, la multiplicación de este vector por la magnitud dada; luego la multiplicación del símbolo $\frac{\partial}{\partial x}$, etc., por la magnitud S debe considerarse como la búsqueda de la derivada correspondiente. Entonces se tiene $\operatorname{grad} u = \nabla u$; $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \nabla\boldsymbol{A}$; $\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A}$.

El operador de Hamilton es válido también para ser aplicado a las operaciones diferenciales de segundo orden:

$$\nabla\nabla u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u; \qquad \nabla\times\nabla u = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u;$$

$$\nabla\nabla(\nabla\boldsymbol{A}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}; \qquad \nabla(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A};$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

4426. Demostrar que $\boldsymbol{r}\cdot\nabla r^n = nr^n$, donde $\boldsymbol{r}$ es el radio vector.

4427. Demostrar las relaciones:

1) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$; 2) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = 0$.

4428. Demostrar que

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

(Esta expresión se llama operador de Laplace y suele ser designada por Δu. También puede ser usado el operador de Hamilton para escribirla en la siguiente forma $\Delta u = (\nabla\nabla)\,u = \nabla^2 u$.)

4429. Demostrar que

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(P) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}(P) - \Delta\boldsymbol{A}(P),$$

donde $\Delta\boldsymbol{A}(P) = \Delta A_x\boldsymbol{i} + \Delta A_y\boldsymbol{j} + \Delta A_z\boldsymbol{k}$.

Potencial

4430. El campo vectorial está formado por el vector constante $\boldsymbol{A}$. Verificar que este campo tiene potencial y hallarlo.

4431. El campo vectorial está formado por la fuerza proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el origen de coordenadas, y dirigida hacia el origen de coordenadas. Mostrar que este campo es conservativo, y hallar el potencial.

4432. Las fuerzas del campo son inversamente proporcionales a la distancia que media entre los puntos de su aplicación y el plano Oxy, y dirigidas hacia el origen de coordenadas. ¿Es conservativo este campo?

4433. Las fuerzas del campo son proporcionales al cuadrado de distancia que media entre los puntos de su aplicación y el eje Oz y dirigidas hacia el origen el de coordenadas. ¿Es conservativo este campo?

4434. El campo vectorial está formado por la fuerza inversamente proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el eje Oz, perpendicular a este eje y dirigida hacia él. Mostrar que este campo es conservativo y hallar su potencial.

4435. El campo vectorial está formado por velocidades lineales de los puntos de un sólido que gira alrededor de su eje. ¿Tiene potencial este campo?

4436. Las fuerzas del campo son dadas del modo siguiente: $\mathbf{A}(P) = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ (el así llamado campo centrado). Mostrar que el potencial del campo es igual a

$$u(x, y, z) = \int_a^r f(r)\,dr \quad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

Obtener de aquí, como caso particular, el potencial atractivo de la masa puntual y el potencial del campo para el ejercicio 4431.

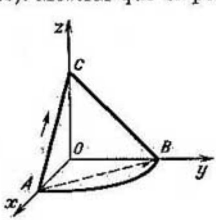

Fig. 78

4437. Hallar el trabajo de las fuerzas del campo $\mathbf{A}(p) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ al desplazarse el punto de masa m a lo largo de una línea cerrada compuesta de un segmento de la recta $x + z = 1$, $y = 0$, la cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ y un segmento de la recta $y + z = 1$, $x = 0$ (véase la fig. 78) según la dirección indicada en el dibujo. ¿Cómo cambiaría el valor del trabajo si el arco BA fuese sustituido por la línea quebrada BOA o por el segmento BA?

Potencial de fuerza de atracción)*

4438. Sea dada una barra homogénea AB de longitud $2l$ y de densidad lineal δ, situada en el plano $O\xi\eta$ y en el eje $O\xi$ simétrico respecto al origen de coordenadas (véase la fig. 79).

* Aquí (en los ejercicios 4438—4449) se tiene en cuenta la fuerza de la gravedad que actúa de acuerdo con la ley de Newton. En vez de decir el «potencial de la masa» situada sobre (o dentro de) un objeto geométrico, diremos, para abreviar, el «potencial del objeto dado».

a) Hallar el potencial $u(x, y)$ de la barra.

b) Mostrar que las proyecciones X e Y de la fuerza de atracción sobre el punto P de masa m cuyas coordenadas son $\xi = x$, $\eta = y$, son iguales a

$$X = mk\delta\left(\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB}\right), \quad Y = -\frac{mk\delta}{y}\left(\frac{CB}{PB} + \frac{AC}{PA}\right)$$

y el valor de la fuerza resultante R es igual a $R =$

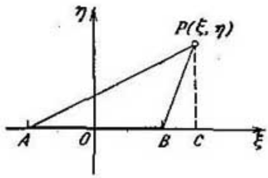

Fig. 79

$= \frac{2mk\delta}{y} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, donde k es la constante de la gravitación (C es la proyección del punto P sobre el eje $O\xi$, α es el ángulo APC, β, el ángulo BPC).

4439. Hallar el potencial de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ en el punto $(R, 0, 2R)$, si la densidad en cada punto es igual al valor absoluto del seno del ángulo formado entre el radio vector del punto y el eje de abscisas.

4440. Hallar el potencial de la primera espira de la hélice homogénea (la densidad es igual a δ) $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$ en el origen de coordenadas.

4441. Hallar el potencial del cuadrado homogéneo de lado a (la densidad superficial es igual a δ) en uno de sus vértices.

4442. En el plano Oxy viene distribuida una masa de densidad δ, que va disminuyendo desde el origen de coordenadas mediando entre ellos la distancia ρ, de acuerdo con la ley $\delta = \frac{1}{1+\rho^2}$. Hallar el potencial en el punto $(0, 0, h)$. (Considerar tres casos: $h < 1$, $h = 1$ y $h > 1$).

4443*. Calcular el potencial de la superficie homogénea lateral de un cilindro circular:

1) en el centro de su base,

2) en el centro de su eje (el radio del cilindro es R, la altura H, la densidad superficial, δ).

4444. Calcular el potencial de la superficie lateral homogénea de un cono circular recto (el radio de la base es R, la altura, H) en su vértice.

4445. Sea dado un cilindro circular homogéneo (el radio de la base es R, la altura, H, la densidad, δ).

1) Hallar el potencial en el centro de su base.

2) Hallar el potencial en el centro de su eje.

4446. Sea dado un cono recto circular homogéneo (el radio de la base es R, la altura, H, la densidad, δ). Hallar el potencial del cono en su vértice.

4447. Hallar el potencial de la semiesfera homogénea $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ $(z \geqslant 0)$ cuya densidad en el punto A $(0, 0, a)$ es igual a δ. (Considerar dos casos: $a \geqslant R$ y $a \leqslant R$).

4448*. Hallar el potencial del cuerpo homogéneo limitado por dos esferas concéntricas de radio R y r $(R > r)$, respectivamente, y de densidad δ, en el punto que dista a del centro de la esfera. (Considerar tres casos: $a \geqslant R$, $a \leqslant r$, $r \leqslant a \leqslant R$.) Mostrar que si el punto se halla dentro de la cavidad del cuerpo, la fuerza de gravitación que actúa sobre este punto, es igual a cero.

4449. Hallar el potencial de la esfera maciza no homogénea

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R$$

en el punto A $(0, 0, a)$ $(a > R)$, si la densidad $\delta = \lambda z^2$, es decir, es proporcional al cuadrado de distancia que media entre dicho punto y el plano Oxy.

Flujo y circulación (caso plano)

4450. Calcular el flujo y la circulación del vector constante A a lo largo de una curva cerrada cualquiera L.

4451. Calcular el flujo y la circulación del vector $\boldsymbol{A}(P) = a\boldsymbol{r}$, donde a es escalar constante y $\boldsymbol{r}$ es el radio vector del punto P, a lo largo de una curva cerrada cualquiera L.

4452. Calcular el flujo y la circulación del vector $\boldsymbol{A}(P) = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ a lo largo de una curva cerrada cualquiera L.

4453. Calcular el flujo y la circulación del vector $\boldsymbol{A}(P) = (x^3 - y)\,\boldsymbol{i} + (y^3 + x)\,\boldsymbol{j}$ a lo largo de la circunferencia de radio R cuyo centro se halla en el origen de coordenadas.

4454. El potencial del campo de velocidades de las partículas de un fluido corriente es igual a $u = \ln r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcular la cantidad del líquido que sale del contorno cerrado L que rodea el origen de coordenadas, en la unidad de tiempo (el flujo) y la cantidad del líquido que pasa en la unidad de tiempo a lo largo de este contorno (la circulación). ¿Cómo cambiará el resultado si el origen de coordenadas se halla fuera del contorno?

4455. El potencial del campo de velocidades de las partículas de un fluido corriente es igual a $u = \varphi$, donde $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Determinar el flujo y la circulación del vector a lo largo del contorno cerrado L.

4456. El potencial del campo de velocidades de las partículas de un fluido corriente es igual a $u(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$. Calcular la cantidad del líquido que pasa en la unidad de tiempo a través del segmento de la recta que une el origen de coordenadas y el punto (1,1).

Flujo y circulación (caso espacial)

4457. Demostrar que el flujo del radio vector $\boldsymbol{r}$ a través de cualquier superficie cerrada es igual al volumen triple del cuerpo limitado por esta superficie.

4458. Calcular el flujo del radio vector a través de la superficie lateral del cilindro circular (el radio de base es R, la altura, H), si el eje del cilindro pasa por el origen de coordenadas.

4459. Determinar a qué será igual el flujo del radio vector a través de ambas bases del cilindro del ejercicio anterior valiéndose de los resultados obtenidos en los ejercicios 4457—4458.

4460. Calcular el flujo del radio vector a través de la superficie lateral del cono circular cuya base se encuentra en el plano xOy y el eje coincide con el eje Oz. (La altura del cilindro es 1, el radio de base 2).

4461. Hallar el flujo del vector $\boldsymbol{A}(P) = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ a través de la línea divisoria de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se halla en el primer octante.

4462*. Hallar el flujo del vector $\boldsymbol{A}(P) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ a través de la superficie lateral de la pirámide cuyo vértice se halla en el punto $S(0, 0, 2)$ y cuya base es el triángulo de vértices $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0)$.

4463. Calcular la circulación del radio vector a lo largo de una espira AB de la hélice $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$, donde A y B son los puntos que corresponden a los valores de los parámetros 0 y 2π.

4464. Un sólido gira con la velocidad angular constante ω alrededor del eje Oz. Calcular la circulación del campo de velocidades lineales a lo largo de la circunferencia de radio R cuyo centro se halla en el eje de revolución y el plano es perpendicular al eje de revolución en el sentido de la revolución.

4465*. Calcular el flujo del rotor del campo de vectores $\boldsymbol{A}(P) = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ a través de la superficie del paraboloide de revolución

$$z = 2(1 - x^2 - y^2)$$

recortada por el plano $z = 0$.

Respuestas a los ejercicios

Al capítulo I

1. Todos los números n pertenecen a la serie natural, excepto $n = 1$ y $n = 2$. Si la suma de los ángulos es S y el número de lados n, se tiene $S = \pi (n - 2)$.

4. a) Para $x = -2$, $x = 1$, $x = 6$ la función se reduce a cero;
b) para $x < -2$, $-2 < x < 1$, $x > 6$ la función es positiva;
c) para $1 < x < 6$ la función es negativa.

6. $r \dfrac{1}{\sqrt{\pi h}}$. **7.** $S = \dfrac{a^2 - b^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$. **8.** $b = \sqrt{25 - a^2}$.

9. $f(0) = -2$; $f(1) = -0{,}5$; $f(2) = 0$; $f(-2) = 4$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -5$; $f(\sqrt{2}) = -0{,}242\ldots$, $\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| = 1$; $\varphi(0) = 2$; $\varphi(1) = 0{,}5$; $\varphi(2) = 0$; $\varphi(-2) = -4$; $\varphi(4) = 0{,}4$; $f(-1)$ no existe; $\varphi(-1)$ no existe.

10. $f(1) = 0$; $f(a) = a^3 - 1$; $f(a + 1) = a^3 + 3a^2 + 3a$; $f(a - 1) = a^3 - 3a^2 + 3a - 2$; $2f(2a) = 16a^3 - 2$.

11. $F(0) = \dfrac{1}{4}$; $F(2) = 1$; $F(3) = 2$; $F(-1) = \dfrac{1}{8}$; $F(2{,}5) = \sqrt{2}$; $F(-1{,}5) = \dfrac{1}{\sqrt{128}}$; $\varphi(0) = \dfrac{1}{4}$; $\varphi(2) = 1$; $\varphi(-1) = \dfrac{1}{2}$; $\varphi(x) = 2^{x-2}$ para $x > 0$ y $\varphi(x) = 2^{-x-2}$ para $x \leqslant 0$; $\varphi(-1) + F(1) = 1$.

12. $\psi(0) = 0$; $\psi(1) = a$; $\psi(-1) = -\dfrac{1}{a}$; $\psi\left(\dfrac{1}{a}\right) = a^{\frac{1-a}{a}}$; $\psi(a) = a^{a+1}$; $\psi(-a) = -a^{1-a}$.

13. $\varphi(t^2) = t^6 + 1$; $[\varphi(t)]^2 = t^6 + 2t^3 + 1$.

20. La relación $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es igual a la tangente del ángulo formado entre la secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, y el sentido positivo del eje Ox.

22. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

23. $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, $x_3 = -\dfrac{1}{2}$.

24. $x = a$ siempre será una raíz.

25. 4 y -2; -2, 2, 4, 10.
26. $x_1=-3$; $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=3$.
27. $x\leqslant -1$ y $x\geqslant 2$.
28. $a=4$, $b=-1$.

29. $a=-\dfrac{1}{2\operatorname{sen}0{,}5}\approx -1{,}04$ (poniendo sen $0{,}5\approx 0{,}48$); $b=1$; $c=-\dfrac{1}{2}+2k\pi$ ó $a=\dfrac{1}{2\operatorname{sen}0{,}5}\approx 1{,}04$; $b=-1$; $c=\dfrac{1}{2}+(2k+1)\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. **30.** $y=(x+1)^2$. **31.** $y=\left|\dfrac{1}{\cos x}\right|$. **32.** $y=\sqrt[3]{(a^t+1)^2}$.

33. $u=\sqrt{1+(\lg\operatorname{sen}x)^2}$. **34.** $v=\operatorname{sen}(1+x)$.

35. 1) $y=v^3$, $v=\operatorname{sen}x$; 2) $y=\sqrt[3]{v}$, $v=u^2$, $u=x+1$; 3) $y=\lg v$, $v=\operatorname{tg}x$; 4) $y=u^3$, $u=\operatorname{sen}v$, $v=2x+1$; 5) $y=5^u$, $u=v^2$, $v=3x+1$.

36. a) $-\dfrac{3}{8}$; b) 0; c) sen 12; d) $-\operatorname{sen}2x\cos^2 2x$; e) $x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x$; f) 0; g) sen (2 sen $2x$).

38. 1) $y=\pm\sqrt{1-x^2}$; 2) $=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$; 3) $y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$; 4) $y=\dfrac{C}{x}$; 5) $y=\dfrac{\log_2 5}{x}$; 6) $y=\dfrac{10\,000}{x}-1$; 7) $y=\log_2(x^3+7)-\log_2(x^2-2)-x$; 8) $y=\operatorname{Arccos}\dfrac{x^2}{1+x}$.

39*. Sean $x>0$ e $y>0$, entonces se tiene $y+y-x-x=0$; $y=x$ (la gráfica es la bisectriz del primer ángulo coordenado). Sean $x>0$ e $y<0$, entonces se tiene $y-y-x-x=0$; $x=0$ (la gráfica es el semieje negativo Oy). Sean $x<0$ e $y>0$, entonces se tiene $y+y-x+x=0$; $y=0$ (la gráfica es el semieje negativo Ox). Sean $x<0$ e $y<0$, entonces se tiene $y-y-x+x=0$, que es la identidad (la gráfica es el conjunto de todos los puntos interiores del tercer ángulo coordenado).

40.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$

41.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7	8	8

42.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u	0	0	0	1	0	2	0	2	1	2	0	4	0	2	2	3	0	4	0	4

43. Si $f(x)$ es el peso del segmento AM, se tiene $f(x) = 2x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = 2 + \frac{3}{2}(x - 1)$ para $1 < x \leqslant 3$, $f(x) = x + 2$ para $3 < x \leqslant 4$. La función viene determinada cuando $0 \leqslant x \leqslant 4$.

44. Para $0 \leqslant x \leqslant R$ $S = \pi (2R - x)^2$, para $R \leqslant x \leqslant 3R$ $S = \pi R^2$, para $3R \leqslant x \leqslant 4R$ $S = \pi (6Rx - x^2 - 8R^2)$. Fuera del intervalo $[0, 4R]$ la función $S = f(x)$ no está determinada.

45. $V = \pi x \left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)$; $0 < x < 2R$.

46. $S = \frac{\pi x^2}{2R} \sqrt{4R^2 - x^2}$; $0 < x < 2R$.

47. 1) $x > 0$; 2) $x > -3$; 3) $x \leqslant \frac{5}{2}$; 4) $-\infty < x \leqslant 0$; 5) todo el eje numérico, excepto los puntos $x = \pm 1$; 6) todo el eje numérico; 7) no está determinado sólo para $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$; 8) todo el eje numérico excepto los puntos $x = 1$ y $x = 2$; 9) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 10) $-\infty < x < 0$ y $4 < x < \infty$; 11) $-\infty < x \leqslant 1$ y $3 \leqslant x < \infty$; en el intervalo $(1, 3)$ la función no está definida; 12) $-\infty < x < 1$ y $2 < x < \infty$; en el intervalo $[1, 2]$ la función no está definida; 13) $-4 \leqslant x \leqslant 4$; 14) $1 \leqslant x \leqslant 3$; 15) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 16) $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$; 17) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; 18) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 19) $-\infty < x < 0$; 20) no tiene sentido; 21) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 22) $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$, donde k es un entero; 23) $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k + 1)\pi$, donde k es un entero; 24) $0 < x < 1$ y $1 < x < \infty$.

48. 1) $-2 \leqslant x < 0$ y $0 < x < 1$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $1 \leqslant x < 4$; 4) $\frac{3}{2} < x < 2$ y $2 < x < \infty$; 5) el dominio de definición consta sólo del punto $x = 1$; 6) $-1 < x < 0$ y $1 < x < 2$; $2 < x < \infty$; 7) $3 - 2\pi < x < 3 - \pi$; $3 < x \leqslant 4$; 8) $-4 \leqslant x \leqslant -\pi$ y $0 \leqslant x \leqslant \pi$; 9) $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$, donde k es un entero; 10) $4 < x < 5$ y $6 < x < \infty$; 11) no está definida en parte alguna; 12) $-1 < x \leqslant 1$ y $2 \leqslant x < 3$; 13) todo el eje numérico; 14) $4 \leqslant x \leqslant 6$; 15) $2 < x < 3$.

49. 1) Sí; 2) son idénticas en cualquier intervalo que no contenga el punto $x = 0$; 3) son idénticas en el intervalo $[0, \infty)$; 4) son idénticas en el intervalo $(0, \infty)$.

50. 1) Por ejemplo, $y = \sqrt{4 - x^2}$; 2) por ejemplo, $y = \frac{1}{x\sqrt{4 - x^2}}$; 3) por ejemplo, $y = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4}$.

51. 1) $1 < x \leqslant 3$; 2) $0 \leqslant x < +\infty$ para dos ramas y $1 \leqslant x < +\infty$ para otras dos ramas.

52. $-\infty < x < \infty$.

53. 1) $y > 0$ para $x > 2$; $y < 0$ para $x < 2$; $y = 0$ para $x = 2$; 2) $y > 0$ para $x < 2$ y $x > 3$; $y < 0$ para $2 < x < 3$; $y = 0$ para $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$; 3) $y > 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, la función no tiene ceros; 4) $y > 0$ en los intervalos $(0, 1)$, $(2, +\infty)$; $y < 0$ en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, 2)$; $y = 0$ para $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$; 5) $y > 0$ para $x \neq 0$; $y = 0$ para $x = 0$.

54. 1), 3), 8), 10), 11), 15) son pares; 5), 6), 9), 12), 14), 17) son impares; 2), 4), 7), 13), 16) no son pares ni impares.

55. 1) $y = (x^2 + 2) + 3x$; 2) $y = (1 - x^4) + (-x^3 - 2x^5)$; 3) $y = (\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg} x) + \cos\frac{x}{2}$.

57. 1) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2} + \frac{a^x - a^{-x}}{2}$;

2) $y = \frac{(1+x)^{100} + (1-x)^{100}}{2} + \frac{(1+x)^{100} - (1-x)^{100}}{2}$.

59. Las funciones 1), 5), 6), 8).
60. Véanse las gráficas en las figs. 80 y 81.

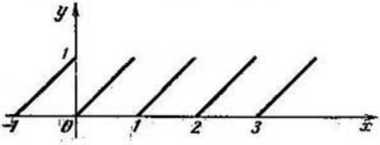

Fig. 80

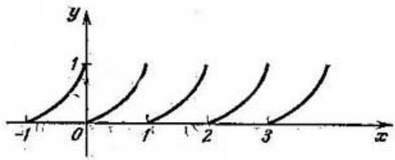

Fig. 81

61. 1) En el intervalo $(-\infty, 0)$ decrece, en el intervalo $(0, +\infty)$ crece; 2) en el intervalo $(-\infty, 0)$ decrece, en el intervalo $(0, +\infty)$ conserva su valor constante, que es el cero.

62. 1) El valor máximo es 1, el valor mínimo es 0; 2) el valor máximo es 1, el valor mínimo es igual a -1; 3) el valor máximo es 2, el valor mínimo es 0; 4) no tiene valor máximo, el mínimo es 1.

65. $I = \frac{E}{3}$. 66. a) $p = 0{,}727h$; b) 10,5 gf/cm²; c) 36,4 cm. 67. $F = \frac{8}{45} w$.

68. 1) $y = \frac{2}{3}x + 4$; 2) $y = 1{,}195x + 1{,}910$; 3) $y = -0{,}57x + 8{,}63$.

69. a) $V = 100 + 0{,}35t$; b) 100 cm³.

70. $S = 16{,}6 + 1{,}34t$. 71. $V = 12 - 0{,}7t$.

72. $\Delta y = 6$. 73. $\Delta y = -6$. 74. $\Delta x = 4$.

75. El valor finito $x_2 = 2a$.

76. $x = 3$; gráficamente se busca el punto de intersección de la gráfica de la función $y = \varphi(x)$ y la recta $y = 2x - 4$.

78*. Es necesario prestar atención a que los datos del problema llevan suprimido el signo de igualdad de la siempre válida relación $|f(x) + \varphi(x)| \leqslant |f(x)| + |\varphi(x)|$. La estricta desigualdad se verifica para $x < 3$ y $x > 4$. El problema puede ser solucionado construyendo las gráficas de las funciones $\Phi(x) = |f(x) + \varphi(x)|$ y $\psi(x) = |f(x)| + |\varphi(x)|$.

79. $x < 2$. Véase la indicación al ejercicio 78*.

82. $y=\begin{cases} 0 & \text{sobre el intervalo } (-\infty;\ -3); \\ -\dfrac{5}{9}x^2+5 & \text{sobre el intervalo } [-3;\ 3], \\ \dfrac{2}{3}x-2 & \text{sobre el intervalo } [3;\ 6]. \end{cases}$

83. 1) $y=-\frac{7}{8}$ para $x=\frac{1}{4}$; 2) $y=\frac{17}{4}$ para $x=-\frac{3}{2}$; 3) $y=5$ para $x=0$; 4) $y=-\frac{7a^2}{8}$ para $x=\frac{a}{4}$; 5) $y=\frac{a^3}{4b^2}$ para $x=\frac{a^2}{2b^2}$.

84. 1) $y=-6$ para $x=-2$; 2) $y=0{,}31875$ para $x=\frac{3}{8}$; 3) $y=\frac{5}{8}$ para $x=\frac{1}{4}$; 4) $y=a^4$ para $x=0$; 5) $y=-\frac{9}{4}b^2$ para $x=\frac{b}{2a}$.

85. $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. 86. $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. 87. 4 m. 88. Cada uno a 50 cm.

89. Aquel cuya sección axial es un cuadrado.

90. Cuanto menor es la altura del cono, tanto mayor es su superficie lateral. La función alcanza su valor máximo cuando el radio de la base es igual a $\frac{P}{4}$, es decir, cuando el cono degenera en un disco plano.

91. 12,5 cm.

92. La altura del rectángulo debe ser igual a la mitad de la altura del triángulo.

93. El radio del cilindro debe ser igual a la mitad del radio del cono.

94. El radio del cilindro debe ser igual a $\frac{RH}{2(H-R)}$ para $H>2R$; para $H\leqslant 2R$ la superficie total del cilindro inscrito será tanto mayor cuanto mayor es el radio de su base.

95. $\frac{P}{2}$. 96. $a=\frac{P}{6-\sqrt{3}}$. 97. $\frac{4}{\pi+4}$.

98. El lado debe ser igual a 10 cm.

99. El lado de la base y cada una de las aristas deben medir 10 cm.

100. El lado del triángulo debe ser igual a $\frac{3a}{9+4\sqrt{3}}$.

101. El punto buscado es $\left(\frac{b}{6},\ \frac{b}{6}\right)$.

102. El punto buscado es $\left(\frac{15}{11},\ \frac{37}{11}\right)$.

104. $x_1\approx -1{,}1$; $x_2\approx 2{,}1$; 2) $x_1=-1$, $x_2=\frac{5}{2}$; 3) $x_1\approx 0{,}5$, $x_2\approx 4{,}1$; 4) $x_1=x_2=\frac{3}{2}$; 5) no tiene raíces reales.

105. $x_1=-3$, $x_2=8$. En la solución gráfica se busca el punto de intersección de la gráfica de la función $y=\varphi(x)$ y de la parábola $y^2=7x+25$.

106. Si $b^2-4ac>0$ y $a>0$, la función está definida en todo el eje numérico excepto el intervalo $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ donde x_1 y x_2 son las raíces del trinomio. Para $b^2-4ac>0$ y $a<0$ la función está definida sólo cuando $x_1<x<x_2$.

Si $b^2 - 4ac < 0$ y $a > 0$, la función está definida en todo el eje numérico. Si $b^2 - 4ac < 0$ y $a < 0$, la función no está definida en parte alguna. Por fin, para $b^2 - 4ac = 0$ la función está definida en todo el eje numérico excepto un punto, a saber, $x = -\frac{b}{2a}$ si $a > 0$, pero si $a < 0$, la función no está definida en parte alguna.

107. $f(x+1) = 2x^2 + 5x + 3$.

108*. Sea $\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c} = m$, donde m es cualquier número real, entonces, $(m-1)x^2 + 2(2m-1)x + c(3m-1) = 0$. El argumento x debe ser un número real, por consiguiente, $(2m-1)^2 - (m-1)(3mc-c) \geqslant 0$ ó $(4-3c)m^2 + 4(c-1)m - (c-1) \geqslant 0$, pero como m es un número real, esta desigualdad, a su vez, es válida sólo cuando

$$\begin{cases} 4-3c > 0 \\ 4(c-1)^2 + (4-3c)(c-1) \leqslant 0, \end{cases}$$

de donde $0 \leqslant c \leqslant 1$, pero como $c \neq 0$, por consiguiente, $0 < c \leqslant 1$.

109. $pv = 1748$.

110. La variable x es inversamente proporcional a v.

111. La variable x es directamente proporcional a v.

112. La cantidad de la sustancia desprendida es inversamente proporcional al volumen del solvente.

114. 1) para $x=1$, $y=4$ (el valor máximo);

para $x=5$, $y=\frac{4}{5}$ (el valor mínimo);

2) para $x=-1$, $y=\frac{1}{7}$ (el valor máximo);

para $x=2$, $y=-2$ (el valor mínimo);

3) para $x=0$, $y=1$ (el valor máximo);

para $x=4$, $y=-\frac{3}{5}$ (el valor mínimo).

117. 1) $y=x$; 2) $y=\frac{x}{2}$; 3) $y=\frac{1-x}{3}$; 4) $y=\pm\sqrt{x-1}$; 5) $y=\frac{1}{x}$;

6) $y=\frac{x-1}{x}$; 7) $y=1\pm\sqrt{x+1}$; 8) $y=\pm\sqrt{x^3-1}$;

9) $y=\lg\frac{x}{10}$; 10) $y=-2+10^{x-1}$; 11) $y=2^{\frac{1}{x}}$;

12) $y=\log_2\frac{x}{1-x}$; 13) $y=\frac{1}{2}\lg\frac{x}{2-x}$; 14) $y=\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$;

15) $y=\dfrac{1+\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2}}{1-\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2}}$; 16) $y=\pm\cos\frac{x}{4}$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

119. $d=-a$. **122.** $1 < x \leqslant 3$; $y = 1 + 2^{1-x^2}$.

123. $y=\operatorname{arcsen}\sqrt[3]{x-x^2-2}$.

125. $x_1 \approx -0{,}5$, $x_2 = 1$, $x_3 \approx 54{,}5$.

126*. 1) $x_1 \approx 1{,}4$, las demás raíces son imaginarias; x_1 es la abscisa del punto de intersección de las gráficas de las funciones cúbica y lineal: $y = x^3$ e $y = -x + 4$; 2) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$; es conveniente aplicar el cambio de la variable $x = x' + \alpha$ seleccionando α de tal modo que el coeficiente de

x'^2 se reduzca a cero; y luego, como en el punto 1); 3) $x_1 = 4$, $x_2 = x_3 = 1$; véase la indicación al punto 2); 4) $x_1 = -1$, las demás raíces son imaginarias; véase la indicación al punto 2).

127. 1) 1,465 . . .; 2) $\approx 14{,}26$ cm; 3) casi 6,8 cm.

128. Si $y_1 = x^n$, $y_2 = \sqrt[n]{x}$, se tiene
cuando $n > 1$ para $0 < x < 1$ $y_1 < y_2$ y para $1 < x < \infty$ $y_1 > y_2$,
cuando $0 < n < 1$ para $0 < x < 1$ $y_1 > y_2$, y para $1 < x < \infty$ $y_1 < y_2$,
cuando $-1 < n < 0$ para $0 < x < 1$ $y_1 < y_2$, y para $1 < x < \infty$ $y_1 > y_2$,
cuando $n < -1$ para $0 < x < 1$ $y_1 > y_2$, y para $1 < x < \infty$ $y_1 < y_2$.

133. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

134. Los puntos de intersección son (1, 2); (3, 8); $\left(3, \frac{4}{3}\right)$; (−1,5; 0,3).

135. $n = 15$.

136. Partiendo de la definición de las funciones hiperbólicas es posible demostrar que $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$. Estas funciones no son periódicas.

140. $y_{\text{mín}} \approx 0{,}8$ para $x \approx 0{,}4$.

141. La gráfica de la función es simértica respecto al origen de coordenadas porque la función es impar. $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$.

143. 1) $A = 1$, $T = \frac{2}{3}\pi$; 2) $A = 5$, $T = \pi$; 3) $A = 4$, $T = 2$; 4) $A = 2$, $T = 4\pi$; 5) $A = 1$, $T = \frac{8}{3}$; 6) $A = 3$, $T = \frac{16}{5}\pi$.

144. 1) 2; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3}{2\pi}$; 5; 2) 1; 4π; $\frac{1}{4\pi}$; $\frac{3\pi - 1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 1; 1; $-\frac{\pi}{3}$; 4) 1; $6\pi^2$; $\frac{1}{6\pi^2}$; $\frac{1}{2\pi}$.

146. El dominio de definición es $(0, \pi)$. El área es máxima cuando $x = \frac{\pi}{2}$.

147. $x = R \operatorname{sen}\left(\frac{vt}{R} + \frac{\pi}{2} + \arccos\frac{a}{R}\right)$.

148. $y = \operatorname{sen}\left[\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}(\operatorname{arcsen} y_1 - \operatorname{arcsen} y_0) + \operatorname{arcsen} y_0\right]$;

$$T = \frac{2\pi(t_1 - t_0)}{\operatorname{arcsen} y_1 - \operatorname{arcsen} y_0}; \qquad \varphi_{\text{inic}} = \frac{t_1 \operatorname{arcsen} y_0 - t_0 \operatorname{arcsen} y_1}{t_1 - t_0}.$$

149. $x = R(1 - \cos\varphi) + a - \sqrt{a^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$, donde $\varphi = 2\pi n t$.

151. 1) $x_1 = 0$, $x_{2,3} \approx \pm 1{,}9$; 2) $x = 0$; $\pm 4{,}5$; $\pm 7{,}72$: luego, con exactitud considerable se puede apreciar $x \approx \pm \frac{(2n+1)\pi}{2}$ $(n > 3)$; 3) $x \approx 0{,}74$; 4) $x_1 = 0{,}9$, $x_2 = 2{,}85$, $x_3 = 5{,}8$; 5) existe un sinnúmero de raíces; $x_1 = 0$, x_2 es un poco menos que $\frac{\pi}{2}$, x_3 es un poco mayor que $\frac{3\pi}{2}$, etc.

152. 1) 2π; 2) 2π; 3) 24; 4) 2.

153. 1) $y = \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $y = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} \operatorname{sen}(x + \varphi_0)$, donde $\varphi_0 = \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$.

155*. 1) El período es $\frac{\pi}{2}$. Sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ la función es susceptible de ser presentada de la siguiente forma:

$$y = \operatorname{sen} x + \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$y = \operatorname{sen} x - \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right],$$

$$y = -\operatorname{sen} x - \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$y = -\operatorname{sen} x + \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

2) El período es 2π. Sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ la función es susceptible de ser presentada de la siguiente forma:

$$y = \operatorname{tg} x \text{ sobre el intervalo } \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y = 0 \text{ sobre el intervalo } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

$$y = -\operatorname{tg} x \text{ sobre el intervalo } \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right).$$

$$y = 0 \text{ sobre el intervalo } \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right].$$

156. 1) El dominio de definición está compuesto de una infinidad de intervalos de la forma $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; no es par ni impar; periódica, el período es 2π. Sobre el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ el seno crece desde 0 hasta 1, por consiguiente, $\lg \operatorname{sen} x$ crece hasta 0 sin dejar de ser negativo. En el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ el seno decrece desde 1 hasta 0, por consiguiente, decrece $\lg \operatorname{sen} x$. En el intervalo $(\pi, 2\pi)$ el seno tiene valores negativos, por consiguiente, la función $\lg \operatorname{sen} x$ no está definida. 2) El dominio de definición está compuesto de puntos separados de la forma $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ En estos puntos $y = 0$. La gráfica son puntos sueltos del eje de las abscisas. 3) La función está definida en todo el eje numérico, excepto los puntos $x = \pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

158. $\omega = 2 \arcsen \frac{\alpha}{2\pi}$. **159.** $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{a(l\cos\varphi + b\operatorname{sen}\varphi)}{b^2 + l^2 + a(b\cos\varphi - l\operatorname{sen}\varphi)}$.

160. $\alpha = \arccos\left[1 - \frac{x(2a - x)}{2R(a + R - x)}\right]$.

161. 1) $-1 \leqslant x \leqslant 1$;
2) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 4) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; 5) $0 < x < \infty$;
6) $-\infty < x < 0$; 7) $0 < x < \infty$; 8) $-\infty < x \leqslant 0$;
9) $-\infty < x < 1$; 10) $1 < x < \infty$.

162. 1) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $-\infty < x < \infty$; 4) está definida por todas partes, excepto $x = 0$.

163*. El período es 2π. Véase la gráfica en la fig. 82. *Indicación.* Sobre el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ tenemos $y = \arcsen(\operatorname{sen} x) \equiv x$ de acuerdo con la

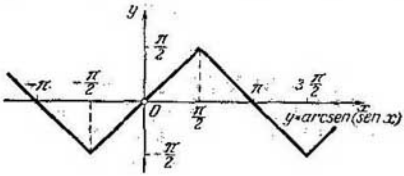

Fig. 82

definición de la función arcsen x. Para obtener la gráfica de la función sobre el intervalo $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 3\frac{\pi}{2}$ ponemos $z = x - \pi$, entonces tenemos $x = \pi + z$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}(z+\pi) = -\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} z) = -z;$$

$$y = \pi - x, \text{ etc.}$$

167. $y_{\text{máx}} \approx 15$, $y_{\text{mín}} \approx 5{,}5$; la función pasa del crecimiento al decrecimiento para $x = -2$. Cero de la función: $x \approx -3{,}6$.

169. $y = \frac{1}{32}(267 - 10x - x^2)$ ó $y = -0{,}0312x^2 - 0{,}3125x + 8{,}344$; ceros de la función: $x_1 \approx -22{,}09$, $x_2 \approx 12{,}09$. Para obtener raíces con exactitud hasta 0,01 los coeficientes deben ser tomados con exactitud hasta 0,0001.

170. $x_1 \approx 2{,}60$ cm, $x_2 \approx 7{,}87$ cm.

171. $x_1 \approx -2{,}3$, $x_2 \approx 3$; las demás raíces son imaginarias.

172*. Seleccionar α de modo que el coeficiente de x'^3 se reduzca a cero; $x_1 \approx -3{,}6$, $x_2 \approx -2{,}9$, $x_3 \approx 0{,}6$, $x_4 \approx 4{,}8$.

173. $x_1 \approx 0{,}59$, $x_2 \approx 3{,}10$, $x_3 \approx 6{,}29$, $x_4 \approx 9{,}43$; en general, $x \approx \approx \pi n$ $(n > 2)$.

174. $x_1 \approx -0{,}57$, $y_1 \approx -1{,}26$; $x_2 = -0{,}42$, $y_2 \approx 1{,}19$, $x_3 \approx 0{,}46$, $y_3 \approx \approx 0{,}74$, $x_4 \approx 0{,}54$, $y_4 \approx -0{,}68$.

Al capítulo II

176. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $n \geqslant 4$.

177. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 178. $n = 19\,999$.

179. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$; $n \geqslant 1000$. La magnitud v_n ora es mayor que su límite ora menor, ora igual a él (en este último caso para $n = 2k + 1$, donde $k = = 0, 1, 2, \ldots$).

180. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$; $n \geqslant 14$; $n \geqslant \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

181. $n \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}}$, si $\varepsilon \leqslant \frac{5}{6}$; $n - 0$, si $\varepsilon > \frac{5}{6}$.

182. $n \geqslant \frac{a}{\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}}$; la sucesión u_n es decreciente.

183. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$; v_n alcanza su límite para $n = m + 1$, porque, a partir de este valor de n, $v_n = 0$.

185. 0.**186.** 1) No. 2) Sí.

189. Cuando $a = 0$ este límite puede ser igual a cualquier número o no existir.

190. $\delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$; $\delta < 0{,}00025$. **191.** $\delta < 2 - \sqrt{3}$. **192.** $\delta < \frac{2}{13}$.

193. $\left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \text{arcsen } 0{,}99 \approx 0{,}136$.

194. $N \geqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, si $\varepsilon \leqslant 1$; $N = 0$, si $\varepsilon > 1$.

195. $N \geqslant \sqrt{\frac{4}{\varepsilon} - 3}$, si $\varepsilon \leqslant \frac{4}{3}$; $N = 0$, si $\varepsilon > \frac{4}{3}$.

196. $n > \frac{N-1}{2}$,

197. u_n es una magnitud positiva infinitamente grande si la diferencia de la progresión $d > 0$, y negativa, cuando $d < 0$. En el caso de la progresión geométrica esta aserción es válida sólo cuando el valor absoluto del denominador de la progresión es mayor que 1.

198. $-\frac{1}{10^4+2} < x < \frac{1}{10^4-2}$. **199.** $\frac{3000}{1001} < x < \frac{3000}{999}$.

200. $\delta < \frac{1}{\sqrt{N}} - 0{,}01$. **201.** $\log_2 0{,}99 < x < \log_2 1{,}01$.

202. $M \geqslant 10^N = 10^{100}$. **203.** sen x, cos x y todas las funciones trigonométricas inversas. **205.** No. Sí. **206.** No. **207.** 1) Por ejemplo, $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ y $x_n = 2\pi n$; 2) No.

209. Si $a > 1$, la función no es acotada (pero no es infinitamente grande) cuando $x \to +\infty$; cuando $x \to -\infty$ tiende a cero. Si $0 < a < 1$, la función no es acotada para $x \to -\infty$ (pero la función no es infinitamente grande). Cuando $x \to +\infty$, tiende a cero. Para $a = 1$ la función es acotada en todo el eje numérico.

210. 1), 3) y 5) no; 2) y 4) sí.

213. $\frac{-1}{10001} < x < \frac{1}{9999}$.

214. $N \geqslant \left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2$

215. 1) $y = 1 + \frac{1}{x^3-1}$; 2) $y = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2(2x^2+1)}$; 3) $y = -1 + \frac{2}{1+x^2}$.

216*. Comparar u_n con la suma de los términos de la progresión geométrica $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^n}$. **220.** 3. **221.** Sí.

222. $f(x) = 9\pi$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$; $f(x) = 4\pi$ para $5 < x \leqslant 10$; $f(x) = \pi$ para $10 < x \leqslant 15$. La función es discontinua cuando $x = 5$ y $x = 10$.

223. $a = 1$. **224.** $A = -1$, $B = 1$. **225.** $x = 2$; $x = -2$. **226.** 2/3.

227. La función $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene, en el punto $x = 0$, una discontinuidad superable, la función $y = \frac{\cos x}{x}$ tiene una discontinuidad de segundo género (infinita).

228. La función es discontinua cuando $x = 0$.

229. La función tiene tres puntos de discontinuidad. Para $x = 0$ la discontinuidad es superable, para $x = \pm 1$ la discontinuidad es de segundo género (infinita).

230. No. Si $x \to 0$ a la derecha, $f(x) \to \pi/2$; si $x \to 0$ a la izquierda, $f(x) \to -\pi/2$.

231. La función es discontinua cuando $x = 0$. 232. 0.

234. No. Si $x \to 1$ a la derecha, $y \to 1$; si $x \to 1$ a la izquierda, $y \to 0$.

235. Si $x \to 0$ a la derecha, $y \to 1$; si $x \to 0$ a la izquierda, $y \to -1$.

236. La función es discontinua cuando $x = 0$ (discontinuidad de primer género).

237. La función tiene discontinuidades de primer género en los puntos $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$.

238. Cuando $x = 0$ la función es continua; cuando $x \neq 0$ la función es discontinua.

239. Las tres funciones son discontinuas cuando x es igual a un entero (negativo o positivo) o a cero.

241*. Escribir el polinomio en la forma $x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)$ y analizar su comportamiento para $x \to \pm \infty$.

244*. Construir, de modo esquemático, la gráfica de la función $y = \frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3}$ analizando su comportamiento en los entornos de los puntos λ_1 λ_2 λ_3.

245. 1. 246. 1/2. 247. 3. 248. ∞. 249. 0. 250. 0. 251. 15/17.

252. 1. 253. 0. 254. 4. 255. 1. 256. 0. 257. 0. 258. 0. 259. 1.

260. 4/3. 261. 1/2. 260. $-1/2$. 263. -1.

264*. 1. Fijarse en que $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. 265. $\frac{1}{2}$. 266. 1. 267. 0.

268. 9. 269. $\frac{3}{4}$. 270∞. 271. 0. 272.0

273. $-2/5$. 274. 1/2. 275. 6. 276. ∞.

277. -1. 278. ∞. 279. 0. 280. m/n. 281. 0. 282. ∞. 283. 1/2.

284. -1. 285. 0. 286. 1/4. 287. $-1/2$. 288. 100. 289. -1.

290. 1. 291. ∞. 292. 0.

293. 0. 294. ∞. 295. 4. 296. 1/4. 297. 3.

298. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, si $x > 0$; ∞, si $x = 0$. 299. $\frac{1}{3}$. 300. $\frac{2}{3}$.

301. $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$. 302. $\frac{m}{n}$. 303*. $\frac{1}{2}$. Sumar y restar una unidad al numerador. 304. $-1/4$. 305. Una raíz tiende a $-c/b$, otra, a ∞.

306. 0. 307. 0. 308. 0, si $x \to +\infty$; ∞, si $x \to -\infty$. 309. 1/2, si $x \to +\infty$; $-\infty$, si $x \to -\infty$. 310. $\frac{a+b}{2}$, si $x \to +\infty$; ∞, si $x \to -\infty$.

311. $\pm 5/2$. 312. 0. 313. 1. 314. 3. 315. k. 316. α/β. 317. 2/5.
318. 0, si $n > m$; 1, si $n = m$; ∞, si $n < m$. 319. 2/3. 320. 1/3.
321. 1/2. 322. 3/4. 323. ∞. 324. -1. 325. 1/2. 326. ∞. 327. 0.
328. 1/2. 329. ∞. 330. $-3/2$. 331. 1. 332. $\pi/2$. 333. $2/\pi$.

334. $-\frac{a}{\pi}$. 335. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 336. 2. 337. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 338. -2. 339. $-2\operatorname{sen} a$.

340. $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$. 341. $\cos^3\alpha$. 342. $\frac{\operatorname{sen} 2\beta}{2\beta}$. 343. $-\operatorname{sen}\alpha$.

344. $\frac{2\operatorname{sen} a}{\cos^3 a}$. 345. $\frac{\sqrt{2}}{8}$. 346. 1. 347. 6. 348. $\frac{3}{2}$. 349. -1.

350*. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Poner $\arccos x = y$. 351. $\frac{1}{e}$. 352. $\frac{1}{e}$. 353. 1.

354. e^{mk}. 355. e^6. 356. $e^{-\frac{2}{3}}$.

357. e^2. 358. 0, si $x \to +\infty$; ∞, si $x \to -\infty$. 359. ∞, si $x \to +\infty$; 0, si $x \to -\infty$. 360. 1. 361. ∞, si $x \to +\infty$; 0, si $x \to -\infty$.

362. e^2. 363. e. 364. $\sqrt{e}$. 365. k. 366. $1/a$. 367. a. 368. $1/e$.

369. $\ln a$. 370. 2/3. 371. e. 372*. 3/2; sumar y restar una unidad al numerador. 373. 2. 374. 1. 375. $a-b$. 376. 1.

377. 0, si $x \to +\infty$; ∞, si $x \to -\infty$.

378. 1, si $x \to +\infty$; -1, si $x \to -\infty$.

379. 1) a^n; 2) 0, si $A \pm 0$; a^n, si $A = 0$ y $a \neq 0$, y ∞, si $A = a = 0$; 3) $\frac{1}{1+A}$.

380. 0, si $x \to +\infty$; $-\infty$, si $x \to -\infty$.

381. Para $a > 1$ el límite es igual a 1, si $x \to +\infty$, e igual a 0, si $x \to -\infty$. Para $a < 1$ el límite es igual a 0, si $x \to +\infty$, e igual a 1, si $x \to -\infty$. Para $a = 1$ el límite es igual a 1/2.

382. Para $a > 1$ el límite es igual a 1, si $x \to +\infty$, e igual a -1, si $x \to -\infty$. Para $a < 1$, viceversa. Para $a = 1$ el límite es igual a 0.

383. 0. 384. 0. 385. 1.

386. 0. 387. $-\cos a$. 388. 1/12. 389. 1/8.

390*. $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Multiplicar y dividir por $\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}$.

391. 1/2. 392. 0. 393*. $-1/2$. Valerse de la fórmula $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+ab}$. 394. $\frac{1}{2}$. 395*. $\frac{1}{2}$. Sustituir $\operatorname{arcsen} x$ por $\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y recurrir a la indicación al ejercicio 393.

396. ∞, si $n < 1$; e, si $n = 1$; 1, si $n > 1$.

397.* 1. Tomar la expresión $1-(1-\cos x)$ en vez de $\cos x$.

398. $-1/2$. 399. $1/e$. 400. e. 421. e^{ab}.

402. v_n es de orden infinitesimal superior. 403. u_n y v_n son magnitudes infinitesimales equivalentes. 405. Son del mismo orden. 406. Para $x = 0$ el orden infinitesimal es distinto. Cuando $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ las magnitudes Δy y Δx son equivalentes. 407. No.

408. De tercer orden. 409. 1) 2; 2) 1/2; 3) 1; 4) 10.

410. $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b^2}}$. 411. $a = k$. 412. No. 414. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$;

4) es infinitesimal equivalente; 5) es infinitesimal equivalente; 6) 1; 7) es infinitesimal equivalente; 8) 2; 9) 2; 10) 1; 11) 2/3; 12) 2.

415. $a^2\sqrt{3}$. 416. $2\pi R^2$; $4R^2$.

418. La línea quebrada viene aproximándose a la recta en el sentido de que sus puntos se aproximan, pero de ello no se deduce que la longitud de la línea quebrada tiende a la longitud del segmento.

419. a. 420. a, $\frac{\pi a}{2}$. 421. $2\pi(R+r)$.

422. El segmento y el ángulo son del orden 1/2.

425. 1) 10,25; 2) 30,2; 3) 16,125; 4) 40,4; 5) 0,558; 6) 0,145.

426. 1) 10,16; 2) 20,12; 3) 1,02; 4) 4,04.

427. $\ln 1{,}01 \approx 0{,}01$; $\ln 1{,}02 \approx 0{,}0{,}2$; $\ln 1{,}1 \approx 0{,}1$; $\ln 1{,}2 \approx 0{,}2$.

Al capítulo III

428. a) 5; b) 5. 429. a) $v=0{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; b) $v=0{,}55\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; c) $\frac{t_1+t_2}{1200}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

430. 75,88; 60,85; 49,03; 48,05. 431. $53{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}49\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}005\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_5=49{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{10}=98{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v=9{,}8t\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

432. a) $4\frac{\text{g}}{\text{cm}}$; b) $40\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; c) $4l\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$, donde l es la longitud del segmento AM.

433. 1) $95\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; 2) a) $35\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; b) $5\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; c) $185\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$.

434. 1) $1{,}002\,\frac{\text{calorías}}{\text{g}\cdot\text{grados}}=4198\,\frac{\text{julios}}{\text{kg}\cdot\text{grados}}$; 2) $1{,}013\,\frac{\text{calorías}}{\text{g}\cdot\text{grados}}$.

435*. Introducir la velocidad angular media, luego, pasando al límite, obtener la magnitud buscada.

438. $k=\frac{f'(t)}{f(t)}$, donde k es el coeficiente de la dilatación lineal.

439. $k=S\,\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}$. 440. 1) 56; 2) 19; 3) 7,625; 4) 1,261.

441. 1) 4,52; 2) −0,249; 3) 0,245. 442. a) 6,5; b) 6,1; c) 6,01; d) 6,001.

443. $f'(5)=10$; $f'(-2)=-4$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$. 444. 3; 0; 6; $\frac{1}{3}$.

445. $x_1=0$, $x_2=2$. 446. Para la función $f(x)=x^3$ no es válida. 447. 1.

448. 0,4343. 449. 2,303.

454. 1) 0; 2) 6; 3) −4; 4) $k_1=2$, $k_2=4$.

455. (1, 1); (−1, −1). 456. 1) (0, 0); 2) (1/2, 1/4). 457. No puede.

458. $\alpha_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, $\alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{13}$. 459. $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

460. arctg 3. 461. $y=12x-16$; $x+12y-98=0$; la subtangente es igual a $\frac{2}{3}$, la subnormal es igual a 96.

462. Para $x=0$ y para $x=2/3$.

463. 1) (2, 4); 2) (−3/2, 9/4); 3) (−1, 1) y (1/4, 1/16).

466. 1) $6x-5$; 2) $4x^3-x^2+5x-0{,}3$; 3) $2ax+b$; 4) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$; 6) $\frac{0{,}2}{\sqrt[5]{y^3}}-10y^2-\frac{0{,}4}{y^3}$; 7) $\frac{1}{n}-\frac{n}{x^2}+\frac{2x}{m^2}-\frac{2m^2}{x^3}$

8) $\frac{3}{2}m\sqrt{x}+\frac{7}{6}n\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}+p\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; 9) $\frac{2mz+n}{p+q}$;

10) $-\frac{1}{15}t^{-\frac{5}{3}}+7{,}28t^{-2{,}4}-\frac{0{,}5}{t\sqrt[5]{t}}$; 11) $2x-1$;

12 $3{,}5x^2\sqrt{x}-1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 13) $3v^2+2v-1$; 14) $6(a-x)$;

15) $\frac{2ax}{a+b}+\frac{b}{a+b}-\frac{c}{(a+b)x^2}$; 16) $\frac{3m(mu+n)^2}{p^3}$.

467. $f(1)=1$; $f'(1)=2$; $f(4)=8$; $f'(4)=2{,}5$; $f(a^2)=3a^2-2|a|$; $f'(a^2)=$ $=3-\frac{1}{|a|}$.

468. $f(-1)=-5$; $f'(-1)=-8$; $f'(2)=\frac{19}{16}$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)=3a^4+10a^3-a^2$.

469. 13. 471. 1) $4x^3-3x^2-8x+9$; 2) $7x^6-10x^4+8x^3-12x^2+4x+3$;

3) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$; 4) $\frac{1}{9}\left(\frac{60}{\sqrt[6]{6}}-\frac{5}{x\sqrt[6]{x^5}}+\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{x}}-48\sqrt[5]{27x^2}\right)$;

5) $\frac{1+12x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{9\sqrt[3]{x^2}+10x\sqrt[3]{x}+36x\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 6) $2x(3x^4-28x^2+49)$;

7) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2x}+2\sqrt{3x}+2\sqrt{6x}+2x\sqrt{6}}{2\sqrt{x}}$.

472. $\frac{2}{(x-1)^2}$. 473. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. 474. $\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$.

475. $\frac{v^4+2v^3+5v^2-2}{(v^2+v+1)^2}$. 476. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

477. $-\frac{4x}{3(x^2-1)^2}+1+2x-3x^2$. 478. $\frac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}$. 479. $-\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$.

480. $-\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}$. 481. $\frac{2v-1}{a^2-3}$. 482. $-\frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}$. 483. $\frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}$.

484. $\frac{3-2t}{(t^2-3t+6)^2}$. 485. $\frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$. 486. $\frac{1+2x+3x^2-2x^3-x^4}{(1+x^3)^2}$.

487. $\frac{6x(1+3x-5x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2}$. 488. $\frac{a+2bx}{m(a+bm)}$.

489. $-\frac{a^2b^2c^2[(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)]}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$.

490. $f'(0)=0$; $f'(1)=6$. 491. $F'(0)=11$; $F'(1)=2$; $F'(2)=-1$.

492. $F'(0)=-\frac{1}{4}$; $F'(-1)=\frac{1}{2}$; 493. $s'(0)=\frac{3}{25}$; $s'(2)=\frac{17}{15}$.

494. $y'(1)=16$; $y'(a)=15a^2+\frac{2}{a^3}-1$. 495. $\rho'(2)-\frac{5}{9}$; $\rho'(0)=1$.

496. $\varphi'(1)=-\frac{a+1}{4}$.

497. $z'(0)=1$.

498. 1) $4x^3-3x^2(a+b+c+d)+2x(ab+ac+ad+bc+db+cd)-$ $-(abc+abd+acd+bcd)$; 2) $8x(x^2+1)^3$; 3) $-20(1-x)^{19}$; 4) $60(1+2x)^{29}$; 5) $-20x(1-x^2)^9$; 6) $5(15x^2+2x)(5x^3+x^2-4)^4$; 7) $6(3x^2-1)(x^3-x)^5$; 8) $6\left(14x+\frac{4}{x^2}\right)\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^5$; 9) $4\left(3t^2+\frac{3}{t^4}\right)\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^3$; 10) $-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$; 11) $\frac{5(x^2+2x-1)(1+x^2)^4}{(1+x)^6}$; 12) $24(x^2+x+1)\times$ $\times(2x^3+3x^2+6x+1)^3$. 499. $\frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$.

500. $\frac{(3-t)t^2}{(1-t)^3}$. 501. $\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$. 502. $-\frac{4}{3\sqrt[3]{4x^2}(1+\sqrt[3]{2x})^2}$.

503. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 504. $-\frac{4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$. 505. $\frac{mv^{m-1}}{(1-v)^{m+1}}$.

506. $-\frac{4(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}$. 507. $\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. 508. $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$.

509. $\frac{2x^3+4x^7}{\sqrt{(1-x^4-x^8)^3}}$. 510. $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$. 511. $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

512. $-\frac{v+\sqrt{a^2+v^2}}{a^2\sqrt{a^2+v^2}}$. 513. $-\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}}-\frac{15x}{2\sqrt[4]{(x^2+2)^7}}$.

514. $u'(1)=9$. 515. $y'(2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 516. 0. 517. $\cos x-\operatorname{sen} x$.

518. $\frac{1-\cos x-x\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}$. 519. $\frac{x-\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{x^2\cos^2 x}$. 520. $\varphi\cos\varphi$.

521. $(\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right)$. 522. $\frac{1}{1+\cos t}$.

523. $\frac{\operatorname{sen} x+\cos x+x(\operatorname{sen} x-\cos x)}{1+\operatorname{sen} 2x}$.

524. $\frac{(1+\operatorname{tg} x)(\operatorname{sen} x+x\cos x)-x\operatorname{sen} x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$. 525. $-\operatorname{sen} 2x$.

526. $\operatorname{tg}^3 x\sec^2 x$. 527. $-\operatorname{sen}^3 x$. 528. $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x(2-\operatorname{sen} x)$. 529. $\operatorname{tg}^4 x$.

530. $2x\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$. 531. $-\frac{16\cos 2x}{\operatorname{sen}^3 2x}$. 532. $3\cos 3x$ 533. $-\frac{a}{3}\operatorname{sen}\frac{x}{3}$.

534. $9\cos(3x+5)$. 535. $\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$. 536. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}\cdot\cos^2 x}$.

537. $-\dfrac{\cos\dfrac{1}{x}}{x^2}$. 538. $\cos(\operatorname{sen} x)\cdot\cos x$. 539. $-12\cos^2 4x \operatorname{sen} 4x$.

540. $\dfrac{1}{4\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}}$. 541. $\dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

542. $-\dfrac{2x}{3\operatorname{sen}^2\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$. 543. $4(1+\operatorname{sen}^2 x)^3\operatorname{sen} 2x$.

544. $\dfrac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}$. 545. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

546. $-3\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen}(2\cos 3x)$. 548. $\operatorname{arcsen} x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

549. $\dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$. 550. $\dfrac{2\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$. 551. $\operatorname{arcsen} x$.

552. $-\dfrac{1}{(\operatorname{arcsen} x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

553. $\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{arctg} x+x\cos x\cdot\operatorname{arctg} x+\dfrac{x\operatorname{sen} x}{1+x^2}$.

554. $-\dfrac{x+\arccos x\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. 555. $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. 556. 0.

557. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 558. $-\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$. 559. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

560. $\dfrac{2x}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2}$. 561. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

562. $-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$. 563. $\dfrac{2x}{1+x^4}$. 564. $-\dfrac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$.

565. $\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$. 566. $-\dfrac{2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}}{1+x^2}$. 567. $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-(\arccos x)^2}}$.

568. $-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

569. $\dfrac{x+1}{8\sqrt[4]{(\operatorname{arcsen}\sqrt{x^2+2x})^3}\sqrt{(1-2x-x^2)(x^2+2x)}}$.

570. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha\cos x}$. 571. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$. 572. $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

573. $2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$. 574. $\frac{2\ln x}{x}$. 575. $\frac{\ln x+1}{\ln 10}$. 576. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

577. $\frac{x\ln x-x+1}{x\ln^2 x}\ln 2$. 578. $\operatorname{sen} x\ln x+x\cos x\ln x+\operatorname{sen} x$.

579. $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. 580. $\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$. 581. $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

582. $\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$. 583. $x^{n-1}(n\ln x+1)$. 584. $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

585. $-\frac{2}{1-2x}$. 586. $\frac{2x-4}{x^2-4x}$. 587. $\operatorname{ctg} x$. 588. $\frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$.

589. $\frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$. 590 $-\frac{2}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}$. 591. $4\ln^3\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{ctg} x$.

592. $\frac{a}{(ax+b)[1+\ln^2(ax+b)]}$. 593. $n(1+\ln\operatorname{sen} x)^{n-1}\operatorname{ctg} x$.

594. $\frac{1}{x\log_5 x\log_3(\log_5 x)\ln 2\ln 3\ln 5}$.

595. $\frac{x}{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\,(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 596. $\frac{6x^2\operatorname{arcsen}[\ln(a^3+x^3)]}{(a^3+x^3)\sqrt{1-\ln^2(a^3+x^3)}}$.

597. $\frac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\operatorname{sen}\frac{x+3}{4}}}$. 598. $2^x\ln 2$. 599. $10^x\ln 10$. 600. $-\frac{\ln 3}{3^x}$.

601. $4^{-x}(1-x\ln 4)$. 602. $10^x(1+x\ln 10)$. 603. $e^x(1+x)$.

604. $\frac{1-x}{e^x}$. 605. $\frac{2^x(\ln 2-1)+3x^2-x^3}{e^x}$. 606. $e^x(\cos x-\operatorname{sen} x)$.

607. $\frac{e^x}{\operatorname{sen}^2 x}(\operatorname{sen} x-\cos x)$. 608. $-\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{e^x}$. 609. $\frac{(\ln x-1)\ln 2}{\ln^2 x}2^{\frac{x}{\ln x}}$.

610. $3x^2-3^x\ln 3$. 611. $\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$. 612. $e^x(x^2+1)$. 613. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$.

614. $-\frac{2\cdot 10^x\ln 10}{(1+10^x)^2}$. 615. $\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$. 616. $e^x(\cos x+\operatorname{sen} x+2x\cos x)$.

617. $-e^{-x}$. 618. $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$. 619. $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$. 620. $2^x\ln 2\cdot\cos(2^x)$.

621. $3^{\operatorname{sen} x}\cos x\cdot\ln 3$. 622. $3\operatorname{sen}^2 x\cos x\cdot a^{\operatorname{sen}^3 x}\ln a$. 623. $\frac{2e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-4x^2}}$.

624. $2^{3x}\cdot 3^x\ln 2\cdot\ln 3$. 625. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$.

626. $\cos(e^{x^2+3x-2})\,e^{x^2+3x-2}(2x+3)$.

627. $-12\cdot 10^{1-\operatorname{sen}^4 3x}\ln 10\cdot\operatorname{sen}^3 3x\cos 3x$.

628. $\frac{(2ax+b)\,e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

629. $\frac{\operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(e^{3x})}\cdot e^{3x}}{(1+e^{6x})\sqrt[3]{[\operatorname{arctg}(e^{3x})]^2}}$. 630. $-2ab^2xe^{-b^2x^2}$.

631. $\frac{2}{a^2}xe^{\frac{-x^2}{a^2}}(a^2-x^2)$. 632. $Ae^{-k^2x}[\omega\cos(\omega x+\alpha)-k^2\operatorname{sen}(\omega x+\alpha)]$.

633. $a^x x^a\left(\frac{a}{x}+\ln a\right)$. 634. $3\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch} x$. 635. $\operatorname{th} x$. 636. $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$.

637. $-\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$. 638. $2\operatorname{sh} 2x$. 639. $\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x$. 640. $\frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$.

641. $e^{\operatorname{ch}^2 x}\operatorname{sh} 2x$. 642. $\frac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$. 643. $x\operatorname{ch} x$. 644. $\frac{3\operatorname{th} x}{2\operatorname{ch}^2 x\sqrt[4]{1+\operatorname{th}^2 x}}$.

645. $\frac{1}{4\operatorname{ch}^4\frac{x}{2}}$. 646. $\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}}$. 647. $\frac{1}{1-\operatorname{sh}^4 x}$.

648. $\frac{x(4+\sqrt{x})\operatorname{sh} 2x+2(2x^2\sqrt{x}-1)\operatorname{ch} 2x}{2x^2}$.

649. $\frac{xe^{3x}}{\operatorname{sh}^2 x}[(3x+2)\operatorname{sh} x-x\operatorname{ch} x]$.

650. $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$. 651. $x^{x^x}\cdot x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right)$.

652. $(\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}-\operatorname{sen} x\ln\operatorname{sen} x\right)$. 653. $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$.

654. $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$.

655. $x^2e^{x^2}\operatorname{sen} 2x\,(3+2x^2+2x\operatorname{ctg} 2x)$.

656. $-\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$. 657. $2x^{\ln x-1}\ln x$.

658. $\frac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)}\cdot\frac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

659. $\frac{1}{2}\sqrt{x\operatorname{sen} x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x}+\operatorname{ctg} x-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{1-e^x}\right)$.

660. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}[(\operatorname{arcsen} x)^2-1]}\sqrt{\frac{1-\operatorname{arcsen} x}{1+\operatorname{arcsen} x}}$. 661. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

662. $x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x\ln x+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$. 663. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\frac{1}{x+1}+\ln\frac{x}{x+1}\right)$.

664. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2+\ln x)$. 665. $(x^2+1)^{\operatorname{sen} x}\left[\frac{2x\operatorname{sen} x}{x^2+1}+\cos x\ln(x^2+1)\right]$.

666. $\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$. 667. $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

668. $\frac{a}{k\cos^2\left(\frac{x}{k}+b\right)}$. 669. $\frac{p}{2\sqrt{1+\sqrt{2px}}\sqrt{2px}}$.

670. $\frac{2x-3}{1+(x^2-3x+2)^2}$. 671. $\frac{1+\operatorname{sen} x}{(x-\cos x)\ln 10}$. 672. $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x(\cos x-2)$.

673. $\sec^2\frac{x}{5}$. 674. $-\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}}$.

675. $2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x$. 676. $e^{\cos x}(\cos x-\operatorname{sen}^2 x)$.

677. $\frac{x^4(7x^6-40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}$. 678. $e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right)$.

679. $\frac{5(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$. 680. $-\frac{1}{1+x^2}$. 681. $2x^2e^{2x+3}$.

682. $\frac{2\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 2x}$. 683. $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$. 684. $-\frac{2(x\cos x+\operatorname{sen} x)}{x^2\operatorname{sen}^2 x}$.

685. $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$. 686. $-\frac{4(31x^5+18)}{27x^5\sqrt[9]{(4x^5+2)^8}}$.

687. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 688. $\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$.

689. $\frac{\operatorname{tg} x(1+2\operatorname{tg}^2 x)}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}}$. 690. $\frac{\cos 2x}{x}-2\operatorname{sen} 2x\ln x$.

691. $\frac{1+x^4}{1+x^6}$. 692. $\frac{n\cos x}{\sqrt{1-n^2\operatorname{sen}^2 x}}$. 693. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^2 x}}$.

694. $\operatorname{sen}^5 3x\cos^3 3x$. 695. $\frac{x\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$. 696. $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\arcsen x}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

697. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$. 698. $\frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}$.

699. $\frac{\ln x-2}{x^2}\operatorname{sen}\left[2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\right]$. 700. $\frac{2x-\cos x}{(x^2-\operatorname{sen} x)\ln 3}$.

701. $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. 702. $-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}(x+\sqrt{1-x^2})}$.

703. $\arcsen(\ln x)+\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$. 704. $-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\sec^2\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$.

705. $-\frac{2\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

706. $-0{,}8\left(\cos\frac{2x+1}{2}-\operatorname{sen} 0{,}8x\right)\left(\operatorname{sen}\frac{2x+1}{2}+0{,}8\cos 0{,}8x\right)$.

707. $10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$. 708. $-\frac{4}{\operatorname{tg} 2x\operatorname{sen}^2 2x}$.

709. $-\frac{1}{(x^2+2x+2)\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}$. 710. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

711. $\frac{x+2}{2\sqrt{x+3}\sqrt[3]{(1+x\sqrt{x+3})^2}}$. 712. $\frac{x(8+9\sqrt{x})}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

713. $-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2 x)^3}}$. **714.** $3x^2 \operatorname{arctg} x^3 + \frac{3x^5}{1+x^6}$.

715. $\frac{\operatorname{ctg} x \ln \cos x + \operatorname{tg} x \ln \operatorname{sen} x}{\ln^2 \cos x}$. **716.** $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

717. $\frac{4}{(1-4x)^2}\left(\sqrt{\frac{1-4x}{1+4x}} + \operatorname{arcsen} 4x\right)$. **718.** $-\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x \ln^2 x}$.

719. $\frac{1}{e^x - 1}$. **720.** $10^{x \operatorname{tg} x} \ln 10 \left(\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}\right)$.

721. $2 \operatorname{sen} x\,(x \operatorname{sen} x \cos x^2 + \cos x \operatorname{sen} x^2)$. **722.** $\frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$.

723. $\frac{2-3x-x^3}{2(1-x)(1+x^2)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$. **724.** $\frac{x^2}{1-x^4}$. **725** $2^{\frac{x}{\ln x}} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \ln 2$.

726. $\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$. **727.** $-\frac{2(2\cos^2 x + 1)}{\operatorname{sen}^2 2x}$.

728. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\, e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. **729.** $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. **730.** $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

731. $-\cos 2x$. **732.** $\frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. **733.** $(a^2+1) \operatorname{sen} x e^{ax}$.

734. $e^{1-\cos x}(1 + x \operatorname{sen} x)$. **735.** $\frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x})(\operatorname{arctg} e^{-2x})^2}$.

736. $10e^x \operatorname{sen} 3x$. **737.** $9x^2 \operatorname{arcsen} x$.

738. $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}\sqrt{(1+e^{-\sqrt{x}})^3}}$. **739.** $\frac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$.

740. $\frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(e^x + e^{-x})}{e^x \cos x + e^{-x} \operatorname{sen} x}$. **741.** $\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

742. $\frac{\operatorname{sen}(x - \cos x)(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos^2(x - \cos x)}$. **743.** $e^x \operatorname{sen} x \cos^3 x\,(1 + \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x)$.

744. $\frac{54\sqrt[5]{x^4}}{55\sqrt[11]{(9+6\sqrt[5]{x^9})^{10}}}$. **745.** $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

746. $\frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)[2+\ln(2x+3)]\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

747. $\frac{e^{x^2}}{(e^x+e^{-x})^2}[2x(e^x+e^{-x}) - (e^x - e^{-x})]$. **748.** $\frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x}$.

749. $\frac{40}{2x - 3\sqrt{1-4x^2}}$. **750.** $\frac{x^5+1}{x^4(x^2+1)}$. **751.** $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

752. $\frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2} + \operatorname{ctg} x$. **753.** $\frac{(1+2x^2)\operatorname{sen} x + x(1+x^2)\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$.

754. $\frac{(x^2-32x-73)(3-x)^3}{2(x+1)^6\sqrt{x+2}}$.

755. $\dfrac{3e^{\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})}{10\sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^2}}$.

756. $\left(2x-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\dfrac{e^{x^2-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}}{\sqrt{x}}$. 757. $\dfrac{1}{\cos^5 x}$.

758. $\dfrac{e^x\operatorname{arctg}x}{\ln^5 x}\left[1+x+\dfrac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}-\dfrac{5}{\ln x}\right]$.

759. $\dfrac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}\left[\dfrac{3-2x-3x^2}{1-x^2}-\operatorname{tg}x+\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right]$.

760. $4\sqrt{(x^2+a^2)^3}$. 761. $(\operatorname{arcsen}x)^2$. 762. $\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$.

763. $\dfrac{1}{ae^{mx}+be^{-mx}}$. 764. $\dfrac{1}{x^3+1}$. 765. $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

766. $(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\left(\dfrac{4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}4x}-\dfrac{\ln\operatorname{tg}2x}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\right)$.

767. $\dfrac{3x^2+10x+20}{15(x^2+4)\sqrt[3]{(x-5)^2\sqrt[5]{x^2+4}}}$. 768. $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$.

769. $-\dfrac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$, si n es un número par, y $-\dfrac{2nx^n}{|x|(x^{2n}+1)}$, si n es un número impar. 770. $\dfrac{24x^3}{(1+8x^3)^2}$. 774. a) $\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$;
b) $\dfrac{2-n(n+1)x^{n-1}+2(n^2-1)x^n-n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}$. *Indicación*: aplicar el valor de la suma $x+x^2+\ldots+x^n$.

776. $\sqrt{1-y^2}\,e^{\operatorname{arcsen}y}$ y $\dfrac{\cos\ln x}{x}$. 777. $\dfrac{1}{3(s^2-1)}$. 779. $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

780. $\alpha'(x)=\dfrac{1}{x[1+\ln\alpha(x)]}$. 781. $(\operatorname{Arsh}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
$(\operatorname{Arch}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $(\operatorname{Arth}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$. 782. $\dfrac{e^t}{1-t}$.

783. $\dfrac{-(1+x^4)^2}{8x^3}$; $-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(1-y)^3(1+y)^5}}$. 784. $\dfrac{1}{3y^2-4}$.

785. $\dfrac{1}{2^s\ln 2}\sqrt{1-2^{2s}}$, $\dfrac{1}{\ln 2}\operatorname{ctg}t$. 789. $\sqrt{2}$. 790. $-\dfrac{1}{a}$.

791. $-\dfrac{1}{4}$. 792. $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$. — 793. $\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. 794. $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

795. $\dfrac{3a^2\cos 3x+y^2\operatorname{sen}x}{2y\cos x}$. 796. $\dfrac{2a}{3(1-y^2)}$. 797. $\dfrac{y}{y-x}$.

798. $-\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y^2-2x^2}{2y^2-x^2}$. 799. $-\dfrac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$.

800. $-\dfrac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\operatorname{sen}(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\operatorname{sen}(xy))-1}$. 801. $2^{x-y}\dfrac{2^y-1}{1-2^x}$.

802. $\dfrac{1}{2(1+\ln y)}$. 803. $\dfrac{\sqrt{1-y^2}\,(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}\,(1-\sqrt{1-y^2})}$.

804. $\dfrac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$. 805. $-\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{1+\operatorname{sen}(x+y)}$. 806. $-\dfrac{1+y\operatorname{sen}(xy)}{x\operatorname{sen}(xy)}$.

807. $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$. 808. $\dfrac{e^y}{2-y}$. 809. $\dfrac{\operatorname{sen} y}{2\operatorname{sen}2y-\operatorname{sen}y-x\cos y}$.

810. $\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{1+k\cos x}$. 811. $\dfrac{y\cos x+\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x-y)-\operatorname{sen}x}$.

812. $\dfrac{1+y^2}{y^2}$. 814. $(2,4)$.

816. $y+4x+4=0$; $8y-2x+15=0$; la subtangente es igual a $1/2$; la subnormal es igual $a-8$.

819. a) $t_1=0$, $t_2=8$; b) $t_1=0$, $t_2=4$, $t_3=8$.

820. $181{,}5\cdot10^3$ erg. 821. $\omega=13\dfrac{\text{rd}}{\text{s}}$. 822. $\omega=2\pi\dfrac{\text{rd}}{\text{s}}$.

823. $\omega=(2at-b)\dfrac{\text{rd}}{\text{s}}$; la velocidad se reduce a cero cuando $t=\dfrac{b}{2a}$ s.

824. $23A$. 825. $(0, 0)$; $(1, 1)$; $(2,0)$. 827. $(1, 0)$; $(-1, -4)$.

828. $y=2x-2$; $y=2x+2$. 829. $3x+y+6=0$.

830. La tangente es $y-y_0=(x-x_0)\cos x_0$; la normal es $y-y_0=-(x-x_0)\sec x_0$.

831. La tangente es $x_0(y-y_0)=x-x_0$; la normal es $(y-y_0)+x_0(x-x_0)=0$.

832. La tangente es $x+2y=4a$; la normal es $y=2x-3a$.

833. La tangente es $y-y_0=\dfrac{x_0^2(3a-x_0)}{y_0(2a-x_0)^2}(x-x_0)$; la normal es $y-y_0=-\dfrac{y_0(2a-x_0)^2}{x_0^2(3a-x_0)}(x-x_0)$.

835. Las subtangentes son iguales a $x/3$; $2x/3$ y $-2x$, respectivamente; las subnormales son iguales a $-3x^5$; $-3x^2/2$ y $1/2x^2$, respectivamente.

836. $y=\dfrac{x_0}{2a}\left(x-\dfrac{x_0}{2}\right)$; $y-y_0-=\dfrac{2a}{x_0}(x-x_0)$. 837. $2x-y+1=0$.

838. $27x-3y-79=0$. 839. $2x-y-1=0$.

840. $4x-4y-21=0$. 842. $3{,}75$. 844. $x+25y=0$; $x+y=0$.

845. $(0, 1)$. 846. $y=x$. 848. $x-y-3e^{-2}=0$. 849. $2/\sqrt{5}$.

850. $(1+\sqrt{3/2};\ 1)$.

857. $2x-y\pm1=0$.

858. Si $y=f(x)$ es la ecuación de la curva dada, la ecuación del lugar geométrico buscado es $y=xf'(x)$. a) La parábola $y^2=\dfrac{1}{2}px$; b) la recta paralela al eje Ox $y=\dfrac{1}{\ln b}$; c) la curva «kappa» $y\sqrt{a^2-x^2}+x^2=0$; d) la circunferencia $x^2+y^2=a$.

859. 1) $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\operatorname{arctg}\dfrac{18}{31}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{8}{15}$. 862. 1) arctg 3, 2) 45°.

861. 90°. 862. 45° y 90°. 863. arctg 3. 864. arctg $(2\sqrt{2})$.

865. Cuando n es impar la tangente es $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, la normal es $ax-by=$ $=a^2-b^2$. Cuando n es par las tangentes son $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=2$, las normales son $ax\pm by=a^2-b^2$.

879. $\Delta y=1{,}461$; $dy=1{,}4$. 880. $\Delta y=0{,}1012$; $dy=0{,}1$; $\frac{dy}{\Delta y}=0{,}9880$.

881. 4. 882. -2. 883. $\Delta y=1{,}91$; $dy=1{,}9$; $\Delta y-dy=0{,}01$; $\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}=$ $=0{,}0052$. 884. $\Delta y=0{,}1$; $dy=0{,}1025$; $\Delta y-dy=-0{,}0025$; $\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}=-0{,}025$.

885.

$\Delta x=1$,	0,1,	0,01
$\Delta y=18$,	1,161,	0,110601,
$dy=11$,	1,1,	0,11
$\Delta y-dy=7$,	0,061,	0,000601,
$\delta=\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}=0{,}39$,	0,0526,	0,0055.

886. $\Delta y\approx 1{,}3$; $dy\approx 1{,}1$; $\Delta y-dy\approx 0{,}2$; $\delta=\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\approx 0{,}15$.

887. a) $dy=16$, $\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\ \%=5{,}88\%$;

b) $dy=8$, $\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\ \%=3{,}03\%$;

c) $dy=1{,}6$, $\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\ \%=0{,}62\%$

888. a) $dy=4{,}8\ \text{cm}^2$; b) $dy=6{,}0\ \text{cm}^2$; c) $dy=9{,}6\ \text{cm}^2$.

889. 1) $\frac{0{,}125}{\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\frac{5\,dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $-\frac{4\,dx}{x^3}$; 4) $-\frac{dx}{x^5}$; 5) $-\frac{dx}{4x\sqrt{x}}$;

6) $-\frac{dx}{3nx\sqrt[3]{x}}$; 7) $\frac{dx}{2(a+b)\sqrt{x}}$; 8) $-\frac{p\ln q}{q^x}\,dx$;

9) $-\frac{0{,}2(m-n)}{x^{1,2}}\,dx$; 10) $-\frac{(m+n)\,dx}{2x\sqrt{x}}$;

11) $\left[(2x+4)(x^2-\sqrt{x})+(x^2+4x+1)\left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]dx$;

12) $-\frac{6x^2\,dx}{(x^3-1)^2}$; 13) $\frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2}$; 14) $3(1+x-x^2)^2(1-2x)\,dx$;

15) $\frac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}\,dx$; 16) $5^{\ln\operatorname{tg}x}\,\frac{2\ln 5}{\operatorname{sen}2x}\,dx$; 17) $-2^{-\frac{1}{\cos x}}\ln 2\,\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\,dx$;

18) $-\frac{dx}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\,dx$; 19) $\frac{(x^2-1)\operatorname{sen}x+2x\cos x}{(1-x^2)^2}\,dx$;

20) $\left(\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arcsen}x}\,\sqrt{1-x^2}}+\frac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\right)dx$;

21) $\left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{2}$;

22) $\left(3^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}\cdot\ln 3+9x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx.$

890. 1) $-0{,}0059$; 2) $-0{,}0075$; 3) $0{,}0086$; 4) 0; 5) $0{,}00287$. **891.** $\Delta y\approx$ ≈ 0.00025; sen $30°1'\approx 0{,}50025$. **892.** 0,00582. **893.** $-0{,}0693$.

894. $d\rho=-\frac{k\operatorname{sen}2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi.$

895. 0,3466. **896.** sen $60°\,03'=0{,}8665$; sen $60°\,18'=0{,}8686$.
899. 0,995.

900. arctg $1{,}02\approx 0{,}795$; arctg $0{,}97\approx 0{,}770$. **901.** 0,355. **902.** 0,52164.

903. a) El cambio que sufre la longitud del hilo es: $2ds=\frac{8f}{3l}\,df$; b) el cambio operado en la flecha es: $df=\frac{3l}{4f}\,ds$.

904. El error producido al calcular el ángulo por su seno es: $\Delta x_s=$ $=\operatorname{tg}x\cdot\Delta y$; el error producido al calcular el ángulo por su tangente es: $\Delta x_T=$ $=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\cdot\Delta z$ (donde Δy, Δz son los errores de las magnitudes y y z); $\frac{\Delta x_S}{\Delta x_T}=$ $=\frac{1}{\cos^2 x}$; la exactitud obtenida para el ángulo con ayuda del logaritmo de su tangente es mayor que la obtenida mediante el logaritmo de su seno.

905. 0,3%. **906.** 1) $dy=\frac{(2t^3+4t+7)(3t^2+2)\,dt}{3\sqrt[3]{[(t^3+2t+1)(t^3+2t+6)]^2}}$;

2) $ds=-\frac{t}{2}\operatorname{sen}\frac{t^2-1}{2}\,dt$; 3) $dz=-ds$; 4) $dv=\frac{2\ln 3}{3^{\frac{1}{\ln\operatorname{tg}s}}\ln^2\operatorname{tg}s}\cdot\frac{ds}{\operatorname{sen}2s}$;

5) $ds=\frac{(4u-3)\,du}{2\sqrt{2u^2-3u+1}}$; 6) $dy=-\frac{2\,ds}{\cos 2s}$.

908. Es continua y derivable.

909. La función $f(x)$ es continua por todas partes excepto los puntos $x=0$ y $x=2$; $f'(x)$ existe y es continua por todas partes excepto los puntos $x=0$, 1, 2, donde no existe.

910. Para $x=k\pi$, donde k es cualquier entero.

911. Es continua, pero no es derivable.

912. $f'(0)=0$.

913. Es continua, pero no es derivable.

914. Δy y Δx son las magnitudes de distinto orden infinitesimal.

915. Es continua, pero no es derivable. **916.** Sí; no. **917.** a. **918.** $a\omega e^{a\varphi}$.

919. La abscisa varía con la velocidad $v_x=-2r\omega\operatorname{sen}2\varphi$; la ordenada varía con la velocidad $v_y=-2r\omega\cos 2\varphi$.

920. La velocidad de la variación de la abscisa es $v_x=v(1+\cos\varphi)$; la velocidad de la variación de la ordenada es $v_y=v\operatorname{sen}\varphi$ (φ es el ángulo formado entre el eje de ordenadas y el radio polar del punto).

921. $-\frac{p\ln 2}{5540}\approx-0{,}000125p$.

922. $2\,\frac{\text{unidades}}{\text{s}}$ en el punto (3,6) y $-2\,\frac{\text{unidades}}{\text{s}}$ en el punto $(3,\,-6)$.

923. $2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ en el punto (3, 4) y $-2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ en el punto $(-3,\,4)$.

924. En los puntos $(3, 16/3)$ y $(-3, -16/3)$.
925. $4v$ y $2av$. **926.** $2\pi v$ y $2\pi rv$.
927. $4\pi r^2 v$ y $8\pi rv$. **928.** Para $x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$ y para $x = 2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$.
929. Para $x = 2\pi k$. **930.** En $1/n^2$ veces. **932.** a) Sí; b) no.
934. 1) $x^2 - 18x + 9y = 0$; 2) $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$; 3) $y^3 = (x - 1)^2$; 4) $x = \operatorname{Arccos}(1-y) \mp \sqrt{2y-y^2}$; 5) $y = \frac{2(1+x-x^2)}{1+x^2}$.
935. 1) $t = (2k + 1)\pi$; 2) $t = 1$; 3) $t = \pi/4 + \pi k$; 4) $t_1 = 1$, $t_2 = -1$.
936. $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. **937.** $-\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$. **938.** $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. **939.** $\frac{3t^2-1}{2t}$.
940. -1. **941.** $\frac{t}{2}$.
942. $\frac{\cos\varphi - \varphi\operatorname{sen}\varphi}{1-\operatorname{sen}\varphi-\varphi\cos\varphi}$. **943.** $\frac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}$.
944. $\frac{1-\operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}t}$. **945.** $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. **946.** $-\frac{4}{3}$. **947.** 0 y $\frac{1}{3}$.
948. No existe. **949.** $\sqrt{3}/6$.
950. 1) $t = \pi/2 + \alpha$; 2) $t = \pi - \alpha$; 3) $t = \pi/6 + \alpha/3$, donde α es el ángulo formado entre la tangente y el eje Ox.
956. 1) Las curvas se cortan en dos puntos formándose los ángulos $\alpha_1 = \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{41}{2} \approx 87°\,12'$; 2) las curvas se cortan en tres puntos formándose los ángulos $\alpha_1 = \alpha_2 = 30°$ y $\alpha_3 = 0°$.
958. La longitud de la tangente es $T = \left|\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{3}{2}t}\right|$; la longitud de la normal es $N = \left|\frac{y}{\cos\frac{3}{2}t}\right|$; la longitud de la subtangente es $S_T = \left|y\operatorname{ctg}\frac{3}{2}t\right|$; la longitud de la subnormal es $S_N = \left|y\operatorname{tg}\frac{3}{2}t\right|$.
959. $\left|\frac{y}{\cos t}\right|$, $\left|\frac{y}{\operatorname{sen}t}\right|$, $|y\operatorname{tg}t|$ y $|y\operatorname{ctg}t|$.
961. $\left|\frac{y}{\operatorname{sen}t}\right|$, $\left|\frac{y}{\cos t}\right|$, $|y\operatorname{ctg}t|$ y $|y\operatorname{tg}t|$.
963. $x + 2y - 4 = 0$; $2x - y - 3 = 0$. **964.** $4x + 2y - 3 = 0$; $2x - 4y + 1 = 0$.
965. $y = 2$, $x = 1$. **966.** 1) $4x + 3y - 12a = 0$; $3x - 4y + 6a = 0$; 2) $x + y = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$; $y - x = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 3) $y = 1 + x\ln a$.
969. $p = 2a\cos t$. **970.** $\theta = \varphi$, $\alpha = 2\varphi$.
974. 3; -3. **975.** 1) 0; 2) 0; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$.
977. $\frac{f_1(t)\,f_2'(t)}{f_1'(t)} = \operatorname{tg}\theta$. **978.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}bt^2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\varphi$.
979. $\rho = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}t\right)$, la tangente del ángulo formado entre la tangente y el radio polar es igual a $\frac{2ab}{(b^2-a^2)\operatorname{sen}2t}$.

980. La subtangente polar es $S_T=\dfrac{\rho^2}{\dfrac{d\rho}{d\varphi}}$; la subnormal polar es $S_N=$ $=\dfrac{d\rho}{d\varphi}$. 983. $\dfrac{\rho}{\ln a}$. 984. $\rho\ln a$. 985. $\sqrt{1+a^2}$.

986. $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}=\dfrac{r}{y}$. 987. $\dfrac{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}{b^2x}$.

988. $\sqrt{1+\dfrac{p}{2x}}\,dx$ ó $\dfrac{\sqrt{y^2+p^2}}{y}\,dx$. 989. $\sqrt{1+\dfrac{4}{9ax}}$.

990. $\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$. 991. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=y$. 992. r.

993. $2a\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}$. 994. $3a\cos t\operatorname{sen} t\,dt$. 995. $a\sqrt{1+t^2}\,dt$.

996. $4a\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}\,dt$. 997. $a\operatorname{ctg} t\,dt$. 998. at. 999. $a\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,dt$.

1000. $\dfrac{3}{2}$ m/min; el vector de la velocidad está dirigido verticalmente hacia abajo.

1001. $10\sqrt{26}\approx 51$ km/hora; el vector de la velocidad es paralelo a la hipotenusa del triángulo rectángulo un cateto del cual es horizontal e igual a 50 km, y el otro es vertical e igual a 10 km.

1002. 14,63 km/hora. 1003. 40 km/hora.

1004. $R_\omega\left(\operatorname{sen}\alpha+\dfrac{R\operatorname{sen}2\alpha}{2\sqrt{l^2-R^2\operatorname{sen}^2\alpha}}\right)$. 1005. 9,43 m/s. 1006. 2.

1007. $-24x$. 1008. 207 360. 1009. 360. 1010. $6(5x^4+6x^2+1)$.

1011. $4\operatorname{sen}2x$. 1012. $\dfrac{4}{e}$. 1013. $-\dfrac{1}{2}$. 1014. $\dfrac{5!}{(1-x)^6}$.

1015. $\dfrac{6}{x}$. 1016. $\dfrac{an(n+1)}{x^{n+2}}$. 1017. $16a\operatorname{sen}2\varphi$.

1018. $\dfrac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. 1019. $2e^{x^2}(3x+2x^3)$. 1020. $\dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$.

1021. $\dfrac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x$. 1022. $-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

1023. $-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 1024. $\dfrac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(a+\sqrt{x})^3}$.

1025. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$. 1026. $-\dfrac{\operatorname{arcsen}x+x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

1027. $\dfrac{a(a^2-1)\operatorname{sen}x}{\sqrt{(1-a^2\operatorname{sen}^2x)^3}}$. 1028. $x^x\left[(\ln x+1)^2+\dfrac{1}{x}\right]$.

1029. a^ne^{ax}. 1030. $(-1)^n e^{-x}$.

1031. $a^n\operatorname{sen}\left(ax+n\dfrac{\pi}{2}\right)+b^n\cos\left(bx+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1032. $2^{n-1}\operatorname{sen}\left[2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$. 1033. $e^x(x+n)$.

1034. $(-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ $(n \geqslant 2)$. **1035.** $\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

1036. $\frac{(-1)^{n-1} a^n (n-1)!}{(ax+b)^n}$. **1037.** $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n \ln a}$.

1038. $(-1)^n \frac{n!}{2} \left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$.

1039. $(-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$.

1040. $4^{n-1} \cos \left(4x + n \frac{\pi}{2} \right)$. **1054.** $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx} \right)^3}$.

1056. $-\frac{b^4}{a^2 y_3}$. **1057.** $-\frac{3r^3x}{y^5}$. **1058.** $-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$.

1059. $\frac{(3-s)e^{2s}}{(2-s)^3}$. **1060.** $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

1061. $-\frac{y}{[1-\cos(x+y)]^3}$. **1062.** $-\frac{y[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$.

1063. $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx} \right)^3}$. **1064.** $\frac{1}{e^2}$. **1065.** $-\frac{p^2}{\sqrt{(y^2+p^2)^3}}$.

1069. $-\frac{2a}{9b^2t^4}$. **1070.** $-\frac{a^2}{y^3} = -\frac{1}{a \operatorname{sen}^3 t}$. **1071.** $-\frac{3b \cos t}{a^3 \operatorname{sen}^5 t}$.

1072. $-\frac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$. **1073.** 1) $\frac{\cos^2 t - 4\operatorname{sen}^2 t}{9a^2 \cos^7 t \operatorname{sen}^3 t}$; 2) 0, porque $x+y=0$.

1074. 1) $4t^2$; 2) $-\frac{2}{1-t^2}$. **1075.** $\frac{2+t^2}{a(\cos t - t \operatorname{sen} t)^3}$. **1080.** 16 m/s^2.

1081. $v=2t-4$, $a=2$. **1082.** $-\pi^2/18$ cm/s^2. **1084.** $-0{,}0015$ m/s^2.

1085. $-1/8$ m/s^2. **1088.** 1) $(x^2-379)\operatorname{sen} x - 40x\cos x$;

2) $e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \operatorname{sen}\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\alpha^n x^3 \operatorname{sen}\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3n\alpha^{n-1}x^2 \times$

$\times \operatorname{sen}\left[\alpha x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] + 3n(n-1)\alpha^{n-2}x \operatorname{sen}\left[\alpha x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right] + n(n-1) \times$

$\times (n-2)\alpha^{n-3} \operatorname{sen}\left[\alpha x + (n-3)\frac{\pi}{2}\right]$.

1093. $y^{(2n)}(0) = 0$; $y^{(2n+1)}(0) = [1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)]^2$.

1095. $y^{(2n-1)}(0) = 0$; $y^{(2n)}(0) = 2[2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)]^2$.

1096. $-\frac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x}}$. **1097.** $m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$.

1098. $4(x+1)(5x^2-2x-1)dx^2$. **1099.** $4^{-x^2} \cdot 2 \cdot \ln 4 \cdot (2x^2 \ln 4 - 1)dx^2$.

1100. $\frac{ab(a^2-b^2)\operatorname{sen} 2x\, dx^2}{(a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x)^2}$. **1101.** $\frac{4\ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}}dx^2$.

1102. $-4\operatorname{sen} 2x\, dx^3$. **1103.** $\pm \frac{3a \sec^2 \varphi}{4\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}(1+5\operatorname{tg}^2\varphi)\, d\varphi^2$.

1104. $\frac{a^{\frac{2}{3}}\, dx^2}{3x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}}$. **1105.** 1) $d^2y = \frac{4x}{x^4-1}\, d^2x - \frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2}\, dx^2$;

2) $d^2y = -4\sec^2 2t\, dt^2$.

1106. 1) $d^2y = \cos z d^2z - \operatorname{sen} z\, dz^2$;
2) $d^2y = a^x \cos(a^x) \ln a\, d^2x - a^x \ln^2 a\, (a^x \operatorname{sen} a^x - \cos a^x)\, dx^2$;
3) $d^2y = a^{t^3} \ln a\, [\cos a^{t^3} (6t + 9t^4 \ln a) - a^{t^3} \operatorname{sen} a^{t^3} 9t^4 \ln a]\, dt^2$.

Al capítulo IV

1110. 1) Es el punto del máximo; 2) decrece; 3) crece; 4) es el punto del mínimo; 5) es el punto del máximo; 6) es el punto del mínimo; 7) es el punto del mínimo; 8) es el punto del máximo; 9) es el punto del mínimo.

1112. En el punto $x_1 = 0$ crece, en el punto $x_2 = 1$ decrece, en el punto $x_3 = -\pi/2$ crece y en el punto $x_4 = 2$ decrece.

1113. En el punto $x_1 = 1/2$ decrece, crece en los puntos $x_2 = 2$ y $x_3 = e$; el punto del mínimo es $x_4 = 1$.

1114. Crece en el punto $x_1 = 1$, decrece en el punto $x_2 = -1$; el punto del mínimo es $x_3 = 0$.

1115. Decrece en el punto $x_1 = 1/2$, crece en el punto $x_2 = 1/2$; el punto del máximo es $x_3 = 0$.

1125. Tres raíces pertenecientes a los intervalos (1, 2), (2, 3) y (3, 4), respectivamente.

1127. $\operatorname{sen} 3x_2 - \operatorname{sen} 3x_1 = 3(x_2 - x_1) \cos 3\xi$, donde $x_1 < \xi < x_2$.

1128. $a(1 - \ln a) - b(1 - \ln b) = (b - a) \ln \xi$, donde $a < \xi < b$.

1129. $\operatorname{arcsen}[2(x_0 + \Delta x)] - \operatorname{arcsen} 2x_0 = \frac{2\Delta x}{\sqrt{1-4\xi^2}}$, donde $x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$.

1135. Para $x \to 0$ ξ tiende a cero tomando no todos los valores intermedios sino tal sucesión de éstos para la cual $\cos \frac{1}{\xi}$ tiende a cero.

1136. 0,833. **1137.** 0,57. **1138.** 1,0414. **1139.** 0,1990. **1140.** 0,8449.

1141. 1,7853.

1149*. La desigualdad necesaria es debida al crecimiento de la función $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

1150. $(-\infty, -1)$ crece, $(-1, 3)$ decrece, $(3, \infty)$ crece.

1151. $(-\infty, -1)$ decrece, $(-1, 0)$ crece, $(0, 1)$ decrece, $(1, \infty)$ crece.

1152. $(-\infty, -1/2)$ crece, $(-1/2, 11/18)$ decrece, $(11/18, \infty)$ crece.

1153. $\left(-\infty, \frac{2}{3}a\right)$ crece, $\left(\frac{2}{3}a, a\right)$ decrece, (a, ∞) crece.

1154. $(-\infty, -1)$ crece, $(-1, 1)$ decrece, $(1, \infty)$ crece.

1155. $(-\infty, 0)$ decrece, $(0, 1/2)$ decrece, $(1/2, 1)$ crece, $(1, \infty)$ decrece.

1156. $(-\infty, 0)$ crece, $(0, \infty)$ decrece.

1157. $(-\infty, 0)$ decrece, $(0, 2)$ crece, $(2, \infty)$ decrece.

1158. $(0, 1)$ decrece, $(1, e)$ decrece, (e, ∞) crece.

1159. $(0, 1/2)$ decrece, $(1/2, \infty)$ crece.

1160. $(0, \pi/3)$ decrece, $(\pi/3, 5\pi/3)$ crece, $(5\pi/3, 2\pi)$ decrece.

1161. $(0, \pi/6)$ crece, $(\pi/6, \pi/2)$ decrece, $(\pi/2, 5\pi/6)$ crece, $(5\pi/6, 3\pi/2)$ decrece, $(3\pi/2, 2\pi)$ crece.

1162. Crece de manera monótona. **1163.** Crece de manera monótona.
1164. $\left(0, \frac{3}{4}a\right)$ crece, $\left(\frac{3}{4}a, a\right)$ decrece.
1165. $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = -1$ para $x = 1$.
1166. $y_{\text{máx}} = 17$ para $x = -1$, $y_{\text{mín}} = -47$ para $x = 3$.
1167. $y_{\text{máx}} = 4$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = 8/3$ para $x = -2$.
1168. $y_{\text{máx}} = 2$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = \sqrt[3]{4}$ para $x = 2$.
1169. $y_{\text{máx}} = \frac{81}{\ln 3}$ para $x = -3$. **1170.** $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$.
1171. $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = -2/3$ para $x = 1$.
1172. $y_{\text{mín}} = 2$ para $x = 2/3$. **1173.** $y_{\text{máx}} = \sqrt{205}/10$ para $x = 12/5$.
1174. $y_{\text{máx}} = \sqrt[3]{a^4}$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = \pm a$.
1175. $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. **1176.** Crece de manera monótona.
1177. $y_{\text{máx}} = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$ para $x = \frac{1}{2}$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = -1$ y para $x = 5$.
1178. $y_{\text{máx}} = 2{,}5$ para $x = 1$, $y_{\text{mín}} = \frac{e(4-e)}{2} \approx 1{,}76$ para $x = e$.
1179. $y_{\text{máx}} = 1/2$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = \pi/8$ para $x = 1$.
1180. $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{48}$ para $x = \frac{1}{2}$.
1181. $y_{\text{máx}} = \frac{6\pi\sqrt{3} - \pi^2 + 18}{36} \approx 1{,}13$ para $x = \pm\frac{\pi}{3}$, $y_{\text{mín}} = 1$ para $x = 0$.
1182. $y_{\text{máx}} = \operatorname{sen}\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$ para $x = \frac{1}{2}$,

$$y_{\text{mín}} = \frac{36\sqrt{3} - 12\pi\sqrt{3} + 72 - \pi^2 + 6\pi}{144} \text{ para } x = \frac{\pi}{6}.$$

1183. $y_{\text{máx}} = 1/\pi$ para $x = 1$, $y_{\text{mín}} = -1/\pi$ para $x = 3$.
1184. Si $ab \leqslant 0$, no existen valores extremos. Si $ab > 0$ y $a > 0$, se tiene $y_{\text{mín}} = 2\sqrt{ab}$ para $x = \frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$; si $ab > 0$ y $a < 0$, se tiene $y_{\text{máx}} = -2\sqrt{ab}$ para $x = \frac{1}{2p} = \frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$.
1185. 13 y 4. **1186.** 8 y 0. **1187.** 2 y -10. **1188.** 2 y -12. **1189.** 10 y 6.
1190. 1 y 3/5. **1191.** 3/5 y -1.
1192. El valor mínimo es igual a $(a + b)^2$, el valor máximo no existe.
1193. $\pi/2$ y $-\pi/2$.
1194. El valor máximo es igual a 1, el valor mínimo no existe.
1195. El valor mínimo es igual a $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$, el valor máximo no existe.
1196. $\sqrt[3]{9}$ y 0. **1197.** $\frac{\pi}{4}$ y 0. **1208.** 4 y 4. **1209.** 1. **1210.** 6 y 6.
1211. 3, 6 y 4 cm. **1212.** 3 cm. **1213.** 1 cm. **1214.** $\sqrt{4v}$.
1215. El radio de la base es igual a la altura, igual a $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

1216. $H=2R$. **1217.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm. **1218.** $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 293°56'$.

1219. El lado es igual a $3p/4$, la base es igual a $p/2$. **1220.** El lado es igual a $3p/5$, la base es igual a $4p/5$.

1221. $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **1222.** $\frac{4}{3}R$. **1223.** $\frac{2m_0}{3k}$, $\frac{2}{27}\frac{m_0^3 g^2}{k^2}$. **1224.** $\sqrt{\frac{2aP}{k}}$.

1225. 20 km/hora, 720 rublos. **1226.** Al cabo de $1\frac{27}{43}$ hora $\approx$ 1 hora 38 minutos.

1227. La distancia que medie entre la cuerda y el punto A debe ser igual a 3/4 del diamétro de la circunferencia.

1228. $\frac{4R\sqrt{5}}{5}$ y $\frac{R\sqrt{5}}{5}$.

1229. La altura del rectángulo es igual a $\frac{\sqrt{8R^2+h^2}-3h}{4}$, donde h es la distancia desde el centro de la cuerda que subtiende el arco del segmento, R es el radio del círculo.

1230. El radio de la base del cono debe ser 1,5 veces mayor que el del cilindro.

1231. $4R$. **1232.** $\approx 49°$. **1233.** $60°$. **1234.** $R\sqrt{3}$. **1235.** $\frac{4}{3}R$.

1237. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$. **1238.** $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$.

1239. El área del rectángulo es igual a $\frac{2}{\pi}\times$ el área de la elipse.

1240. Por el punto (2, 3). **1241.** $C(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

1242. $x=a-p$, si $a>p$; $x=0$, si $a\leqslant p$.

1243. La sección del canalón ha de tener la forma de semicírculo.

1244. La longitud de la viga es de $13\frac{1}{3}$ m, el lado de la sección transversal es de $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ m.

1245. El valor buscado es igual a la media aritmética de los resultados de los cálculos:

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

1246. Que dista 3 km del campamento. **1247.** A la altura $R\sqrt{2}/2$.

1248. La distancia que media entre el punto buscado y el manantial de luz de intensidad luminosa I_1, es igual a $\frac{l\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1}+\sqrt[3]{I_2}}$, en otras palabras, la distancia l se divide por el punto buscado a razón de $\sqrt[3]{I_1}:\sqrt[3]{I_2}$.
1249. 2,4 m.

1250. $F_{\min}=\frac{kP}{\sqrt{1+k^2}}$ para $\varphi=\operatorname{arctg} k$.

1251. $\approx 4,5$.

1252. $2b+\sqrt{\frac{Sb}{a}}$ y $2a+\sqrt{\frac{Sa}{b}}$.

1253*. $\frac{RHL}{(L-R)(L+2R)}$, donde L es la generatriz del cono. Tomar en consideración que la diferencia entre la distancia que media entre el centro de la esfera y el vértice del cono, y el radio de la esfera es igual a la diferencia entre la altura del cono y la altura de la parte sumergida del segmento.

1254. $R/4$. 1255. $R/2$. 1256. $P\,(p, \pm p\sqrt{2})$.

1263*. $\frac{3}{4}$. Como la función es constante ($y' = 0$), su valor es igual al valor de la función dada para cualquier valor de x, por ejemplo, para $x = 0$.

1264. π. 1265. 0. 1267. $y_{\text{máx}} = \frac{4}{27}a^3$ para $x = \frac{a}{3}$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = a$.

1268. $y_{\text{máx}} = \frac{a^4}{16}$ para $x = \frac{a}{2}$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$ y para $x = a$.

1269. $y_{\text{máx}} = -2a$ para $x = -a$, $y_{\text{mín}} = 2a$ para $x = a$.

1270. $y_{\text{máx}} = 5/4$ para $x = 3/4$.

1271. $y_{\text{máx}} = 1$ para $x = 1$, $y_{\text{mín}} = -1$ para $x = -1$.

1272. $y_{\text{mín}} = 1$ para $x = 0$.

1273. $y_{\text{máx}} = 4/e^2$ para $x = 2$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$.

1274. $y_{\text{mín}} = e$ para $x = e$. 1275. $y_{\text{máx}} = \sqrt[e]{e}$ para $x = e$.

1276. Para $a = 2$ es máximo. 1277. $a = -2/3$, $b = -1/6$.

1278. Es convexa en el entorno del punto (1, 11), cóncava en el entorno del punto (3, 3).

1279. Es convexa en el entorno del punto $(1, \pi/4)$, cóncava en el entorno del punto $(-1, -\pi/4)$.

1280. Es convexa en el entorno del punto $(1/e^2, -2/e^4)$, cóncava en el entorno del punto (1, 0).

1287. El punto de inflexión es (5/3, —250/27). Los intervalos son: de la convexidad $(-\infty, 5/3)$, de la concavidad $(5/3, \infty)$.

1288. No tiene puntos de inflexión, la gráfica es cóncava.

1289. Los puntos de inflexión son (2, 62) y (4, 206). Los intervalos son: de la concavidad $(-\infty, 2)$, de la convexidad (2, 4), de la concavidad $(4, \infty)$.

1290. Los puntos de inflexión son (—3, 294) y (2, 114). Los intervalos son: de la convexidad $(-\infty, -3)$, de la concavidad (—3, 2), de la convexidad $(2, \infty)$.

1291. El punto de inflexión es (1, —1). Los intervalos son: de la convexidad $(-\infty, 1)$, de la concavidad $(1, \infty)$.

1292. No tiene puntos de inflexión, la gráfica es cóncava.

1293. Los puntos de inflexión son $(-3a, -9a/4)$, (0, 0), $(3a, 9a/4)$. Los intervalos son: de la concavidad $(-\infty, -3a)$, de la convexidad $(-3a, 0)$, de la concavidad $(0, 3a)$, de la convexidad $(3a, \infty)$.

1294. El punto de inflexión es (b, a). Los intervalos son: de la convexidad $(-\infty, b)$, de la concavidad (b, ∞).

1295. El punto de inflexión $\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2}, e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$. Los intervalos son: de la concavidad $\left(-\frac{\pi}{2}, \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, de la convexidad $\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

1296. Los puntos de inflexión $(\pm 1, \ln 2)$. Los intervalos son: de la convexidad $(-\infty, -1)$, de la concavidad $(-1, 1)$, de la convexidad $(1, \infty)$.

1297. El punto de inflexión es $\left(ae^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$. Los intervalos son: de la convexidad $(0,\ ae^{\frac{3}{2}})$, de la concavidad $(ae^{\frac{3}{2}},\ \infty)$. 1298. No tiene puntos de inflexión. La gráfica es cóncava.

1299. El punto de inflexión $\left(\frac{1}{2},\ e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\right)$. El intervalo de la concavidad es $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)$, el de la convexidad es $\left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$.

1300. El punto de inflexión es $(1,\ -7)$. Los intervalos son: de la convexidad $(0,\ 1)$, de la concavidad $(1,\ \infty)$.

1305. $a=-3/2$, $b=9/2$. 1306. $\alpha=-20/3$, $\beta=4/3$. Los puntos $(-2;\ -2{,}5)$ y $(0,\ 0)$ también son puntos de inflexión.

1307. Para $a \leqslant -e/6$ y para $a>0$.

1316. Los puntos de inflexión son $(1,\ 4)$ y $(1,\ -4)$.

1317. Para $t=3\pi/4$ los puntos de inflexión son $\pm k\pi$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

1318. $\dfrac{\operatorname{sen} b-\operatorname{sen} a}{\ln\dfrac{b}{a}}=\xi\cos\xi$, donde $a<\xi<b$.

1319. $e^b-e^a=2e^{\xi}$, donde $a<\xi<b$.

1324. $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{a}}$. 1325. 0. 1326. 1. 1327. $\dfrac{\alpha}{\beta}$. 1328. $\dfrac{1}{3}$. 1329. $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$.

1330. $-\dfrac{1}{2}$. 1331. 2. 1332. $\dfrac{m}{n}a^{m-n}$. 1333. $\dfrac{\ln\dfrac{a}{b}}{\ln\dfrac{c}{d}}$. 1334. -2. 1335. 2.

1336. $\ln\dfrac{a}{b}$. 1337. $\cos a$. 1338. 2. 1339. 1. 1340. 1. 1341. $\dfrac{1}{128}$. 1342. 16.

1343. 1. 1344. 1. 1345. -2. 1346. 0. 1347. 0. 1348. a. 1349. $\dfrac{1}{2}$.

1350. $\dfrac{4a^2}{\pi}$. 1351. -1. 1352. 0.

1353. ∞. 1354. $\dfrac{a+b+c}{3}$. 1355. 1.

1356. ∞. 1357. 1. 1358. 1. 1359. e. 1360. 1. 1361. e^2. 1362. e^{π}. 1363. 1. 1364. 1/2. 1366. Los valores de x^x son mayores que los de $a^x x^a$.

1367. Los valores de $f(x)$ son mayores que los de $\ln f(x)$.

1374. $f(115)\approx 1\,520\,990$; $f(120)\approx 1\,728\,120$; $\delta_{x=100}\approx 0{,}03$ (error absoluto).

1375. $y=\pm\dfrac{b}{a}x$. 1376. $x=0$, $y=0$. 1377. $y=0$. 1378. $x=b$, $y=c$.

1379. $x=-1$, $y=\dfrac{1}{2}x-1$. 1380. $x+y=0$. 1381. $y=x+2$.

1382. $y=\pm x$. 1383. $x=0$, $y=0$; $x+y=0$.

1384. $x=b$; $x=2b$; $y=x+3(b-a)$.

1385. $y+1=0$; $2x+y+1=0$. 1386. $x=-1/e$, $y=x+1/e$.

1387. $x=0$, $y=x$. 1388. $x=0$, $y=x+3$. 1389. $y=\dfrac{\pi}{2}x-1$.

1390. $y=2x\pm\pi/2$.

1391. $y = x$; si $f(x)$ no es constante idéntica.

1392. Si $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = \infty$ y $\lim\limits_{t\to t_0} \psi(t) = b$, $y = b$ es asíntota; si $\lim\limits_{t\to t_0} \psi(t) = \infty$ y $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = a$, entonces $x = a$ es asíntota.

1393. $x = -1$, $y = 0$. 1394. $y = \frac{1}{2}x + c$. 1395. $y = \pm\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

1396. $x + y + a = 0$. 1397. $x = 2$; $2x + 8y + 1 = 0$; $6x - 40y + 9 = 0$.

1398. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al origen. $y_{\text{máx}} = 1/2$ para $x = 1$, $y_{\text{mín}} = -1/2$ para $x = -1$. Los puntos de inflexión de la gráfica son $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$; $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$. La asíntota es $y = 0$.

1399. Está definida por todas partes, excepto los valores $x = \pm 1$. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. No tiene máximos. $y_{\text{mín}} = 1$ para $x = 0$. No tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = \pm 1$, $y = 0$.

1400. Está definida por todas partes, excepto los valores $x = \pm 1$. La gráfica es simétrica respecto al origen. No tiene extremos. El punto de inflexión es $(0, 0)$. Las asíntotas son $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

1401. Está definida por todas partes, excepto los valores $x = 1$, $x = 2$ $x = 3$. $y_{\text{máx}} \approx -2{,}60$ para $x \approx 2{,}58$, $y_{\text{mín}} \approx 2{,}60$ para $x \approx 1{,}42$. No tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.

1402. No está definida cuando $x = \pm 1$. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$. No tiene mínimos. Cuando $x < -1$ crece; cuando $x > 1$, decrece. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = \pm 1$, $y = 1$.

1403. Está definida por todas partes, la gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{mín}} = -1$ para $x = 0$; $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ son puntos de inflexión de la gráfica con la tangente horizontal; los puntos de inflexión son $(\pm\sqrt{5}/5, -64/125)$. No tiene asíntotas.

1404. Está definida por todas partes; la gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{máx}} = 0$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = -27/8$ para $x = \pm 1/2$. Los puntos de inflexión de la gráfica con la tangente horizontal son $(\pm 1, 0)$. Cuando $x \approx \pm 0{,}7$ y $x \approx \pm 0{,}26$ también existen otros cuatro puntos de inflexión de la gráfica. No tiene asíntotas.

1405. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. $y_{\text{mín}} = 3$ para $x = 1/2$. No tiene máximos. El punto de inflexión de la gráfica es $(-\sqrt[3]{2}/2, 0)$. La asíntota es $x = 0$.

1406. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{mín}} = 2$ para $x = \pm 1$. No tiene máximos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. La asíntota es $x = 0$.

1407. Está definida por todas partes, excepto $x = 1$. $y_{\text{mín}} = -1$ para $x = 0$. No tiene máximos. El punto de inflexión de la gráfica es $(-1/2, -8/9)$. Las asíntotas son $x = 1$ e $y = 0$.

1408. Está definida por todas partes, excepto $x = \pm\sqrt{3}$. La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas. $y_{\text{máx}} = -4{,}5$ para $x = 3$, $y_{\text{mín}} = 4{,}5$ para $x = -3$. El punto de inflexión de la gráfica es $(0, 0)$. Las asíntotas son $x = \pm\sqrt{3}$ y $x + y = 0$.

1409. Está definida por todas partes, excepto $x = -1$. No tiene mínimos. $y_{\text{máx}} = -3\frac{3}{8}$ para $x = -3$. El punto de inflexión de la gráfica es $(0, 0)$. Las asíntotas son $x = -1$ e $y = \frac{1}{2}x - 1$.

1410. Está definida por todas partes, excepto $x = 1$. No tiene máximos. $y_{\text{mín}} = 27/4$ para $x = 3/2$. El punto de inflexión de la gráfica es $(0, 0)$. La asíntota es $x = 1$.

1411. Está definida por todas partes, excepto $x=1$. $y_{\text{máx}}=0$ para $x=0$, $y_{\text{mín}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$ para $x=\sqrt[3]{4}$. El punto de inflexión de la gráfica es $\left(-\sqrt[3]{2},\ -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. La asintotas son $x=1$ e $y=x$.

1412. Está definida por todas partes, excepto $x = -1$. $y_{\text{máx}} = 2/27$ para $x = 5$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 1$. Las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica son $5 \pm 2\sqrt{3}$. Las asíntotas son $x = -1$ e $y = 0$.

1413. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. $y_{\text{máx}} = 7/2$ para $x = 1$, $y_{\text{máx}} = -11/6$ para $x = -3$, $y_{\text{mín}} = 27/8$ para $x = 2$. La abscisa del punto de inflexión de la gráfica es $9/7$. Las asíntotas son $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}x + 1$.

1414. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. No tiene máximos. $y_{\text{mín}} \approx -0{,}28$ para $x \approx 1{,}46$. La abscisa del punto de inflexión de la gráfica es $-\sqrt[3]{2}$. La asíntota es $x = 0$.

1415. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. $y_{\text{máx}} = -2{,}5$ para $x = -2$; no tiene mínimos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = 0$ e $y = x$.

1416. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}} = 1/e$ para $x = 1$. No tiene mínimos. El punto de inflexión de la gráfica es $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$. La asíntota es $y = 0$.

1417. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}} = 4/e^2$ para $x = 2$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. Las absicas de los puntos de inflexión de la gráfica son $2 \pm \sqrt{2}$. La asíntota es $y = 0$.

1418. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$, $y_{\text{mín}} = e$ para $x = 1$. No tiene máximos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = 0$, $y = 0$.

1419. Está definida para $x > -1$. $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. No tiene máximos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. La asíntota es $x = -1$.

1420. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. No tiene máximos. Los puntos de inflexión de la gráfica son $(\pm 1, \ln 2)$. No tiene asíntotas.

1421. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{máx}}=\frac{1}{e}$ para $x=\pm 1$, $y_{\text{mín}}=0$ para $x=0$. Las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica son $\pm\frac{\sqrt{5\pm\sqrt{17}}}{2}$. La asíntota es $y=0$.

1422. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}} = 27/e^3$ para $x = 3$. No tiene mínimos. Las abscisas de los puntos de inflexión son 0 y $3 \pm \sqrt{3}$. La asíntota es $y = 0$.

1423. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al origen la coordenadas $y_{\text{máx}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ para $x=1$, $y_{\text{mín}}=-\frac{1}{\sqrt{e}}$ para $x=-1$.

Los puntos de inflexión de la grafica son $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ y $-\left(\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$. La asíntota es $y=0$.

1424. Está definida por todas partes, excepto $x=0$. No tiene extremos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x=0$, $y=0$ e $y=-1$.

1425. Esta definida para $x>0$. No tiene extremos. El punto de inflexión de la gráfica es $\left(e^{\frac{3}{2}}, e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$. La asíntotas son $x=0$ e $y=x$.

1426. La función está definida cuando $-\infty<x<-1$ y cuando $0<x<\infty$. En el intervalo $(-\infty, -1)$ crece desde e hasta ∞; en el intervalo $(0, +\infty)$ crece desde 1 hasta e. La gráfica consta de dos ramas separadas. Las asíntotas son $y=e$ y $x=-1$.

1427. Está definida por todas partes. No tiene extremos. Cuando $x=\pm k\pi$ $(k=1, 3, 5, \ldots)$ es estacionaria. La gráfica es simértica respecto al origen de coordenadas, no tiene asíntotas; los puntos de inflexión son $(k\pi, k\pi)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; en los puntos de inflexión la gráfica cruza la recta $y=x$.

1428. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. Los puntos extremos satisfacen la ecuación $\operatorname{tg} x=-x$. Las abscisas de los puntos de inflexión satisfacen la ecuación $x \operatorname{tg} x=2$. No tiene asíntotas.

1429. Está definida en los intervalos $(-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi)$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ El período es 2π. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{máx}}=0$ para $x=2k\pi$. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x=\pi/2+k\pi$.

1430. Está definida en los intervalos $(-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi)$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ El período es 2π. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{mín}}=1$ para $x=2k\pi$. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x=\pi/2+k\pi$.

1431. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas. $y_{\text{máx}}=\pi/2-1$ para $x=-1$, $y_{\text{mín}}=1-\pi/2$ para $x=1$. El punto de inflexión es $(0, 0)$. Las asíntotas son $y=x\pm\pi$.

1432. Está definida por todas partes, excepto $x=1$ y $x=3$. $y_{\text{máx}}=1/e$ para $x=2$. No tiene mínimos. Las asíntotas son $x=1$, $x=3$ e $y=1$.

1433. Está definida por todas partes. El período es 2π. $y_{\text{mín}}=1$ para $x=k\pi$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y_{\text{máx}}=e-1$ para $x=\pi/2+2k\pi$ e $y_{\text{máx}}=1+1/e$ para $x=3\pi/2+2k\pi$. No tiene asíntotas.

1434. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}}=4/27$ para $x=8/27$, $y_{\text{mín}}=0$ para $x=0$. La gráfica no tiene puntos de inflexión, ni asíntotas.

1435. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{máx}}=0$ para $x=0$, $y_{\text{mín}}=-3$ para $x=\pm 1$. La gráfica no tiene puntos de inflexión, ni asíntotas.

1436. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas. $y_{\text{máx}}=2/3$ para $x=1$, $y_{\text{mín}}=-2/3$ para $x=-1$. El punto de inflexión de la gráfica es $(0, 0)$. No tiene asíntotas.

1437. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}}=2$ para $x=0$, $y_{\text{mín}}=0$ para $x=-1$. El punto de inflexión de la gráfica es $(-1/2, 1)$. La asíntota es $y=1$.

1438. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}}\approx 2{,}2$ para $x=7/11$, $y_{\text{mín}}=0$ para $x=1$. Las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica son -1 y $\frac{7\pm 3\sqrt{3}}{11}$. No tiene asíntotas.

1439. Está definida por todas partes. $y_{\text{máx}} = 2\sqrt[3]{4}$ para $x = 4$, $y_{\text{mín}} = 0$ para $x = 0$. El punto de inflexión de la gráfica es (6, 0). La asíntota es $x + y = 2$.

1440. La función está definida cuando $x \geqslant 0$, es bivalente. La función $y = x + \sqrt{x^5}$ (rama superior de la gráfica) crece de manera monótona. La función $y = x - \sqrt{x^5}$ (rama inferior de la gráfica) tiene máximo para $x = \sqrt{20}/5$. La gráfica no tiene puntos de inflexión, ni asíntotas.

1441. Está definida para $x \geqslant 0$, es bivalente. La función $y = x^2 + \sqrt{x^5}$ (rama superior de la gráfica) crece de manera monótona. La función $y = x^2 - \sqrt{x^5}$ (rama inferior de la gráfica) tiene máximo cuando $x = 16/25$. La abscisa del punto de inflexión de la rama inferior de la gráfica es 64/225. No tiene asíntotas.

1442. Está definida para $x \geqslant -1$, es bivalente. No tiene extremos. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas, sus puntos de inflexión son (0, 1) y (0, —1). No tiene asíntotas.

1443. Está definida en los intervalos $[-1, 0]$ y $(1, \infty)$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{\text{máx}} = \sqrt[4]{12}/3$ para $x = -\sqrt{3}/3$. La abscisa de los puntos de inflexión de la gráfica es

$\sqrt{1+\frac{\sqrt{12}}{3}}$. No tiene asíntotas.

1444. Está definida para $x \geqslant 0$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{\text{máx}} = \sqrt{12}/9$ para $x = 1/3$. La gráfica no tiene puntos de inflexión. No tiene asíntotas.

1445. Está definida para $x = 0$ y para $x \geqslant 1$. El origen de coordenadas es un punto aislado. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. No tiene extremos. Los puntos de inflexión de la gráfica son

$\left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$. No tiene asíntotas.

1446. Está definida para $x < 0$ y para $x \geqslant \sqrt[3]{2}$, es bivalente. La gráfica es simiétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{\text{máx}} = 1$ para $x = -1$. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = 0$ e $y = \pm x\sqrt{3}/3$.

1447. Está definida para $x \leqslant -2$ y para $x > 0$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a la recta $y = x$. $y_{\text{máx}} = -2$ para $x = 1$. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 0$.

1448. Está definida para $-a \leqslant x < a$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{\text{máx}} = a\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$ para $x = -\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$. No tiene puntos de inflexión. La asíntota es $x = a$.

1449. Está definida para $0 \leqslant x \leqslant 4$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{\text{m}} = \sqrt{3}$ para $x = 3$. La abscisa de los puntos de inflexión de la gráfica es $3 - \sqrt{3}$. No tiene asíntotas.

1450. Está definida para $-2 \leqslant x \leqslant 2$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a los ejes de coordenadas. $|y|_{\text{máx}} = 3\sqrt{3}/5$ para $x = \pm 1$. Los puntos de inflexión de la gráfica son (0, 0) y $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/5)$. No tiene asíntotas.

1451. Está definida para $-1 \leqslant x \leqslant 2$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a los ejes de coordenadas. $|y|_{\text{máx}} = 1/2$ para $x = \pm\sqrt{2}/2$. El punto de inflexión de la gráfica es (0, 0). No tiene asíntotas.

1452. Está definida para $x \geqslant 1$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{\text{máx}} = 1$ para $x = 2$. La abscisa de los puntos de inflexión es $\frac{6+2\sqrt{3}}{2}$. La asíntota es $y = 0$.

1453. Está definida para $0 \leqslant x < 2a$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. No tiene extremos. No tiene puntos de inflexión. La asíntota es $x = 2a$.

1454. Está definida para $x \leqslant 0$, para $0 < x \leqslant 1$ y para $x \geqslant 2$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas, tiene las asíntotas, que son $x = 0$ e $y = \pm 1$ y dos puntos de inflexión. No tiene extremos.

1455. Está definida para $-a \leqslant x < 0$ y para $0 < x \leqslant a$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. No tiene extremos. Los puntos de inflexión de la gráfica son $\left[a(\sqrt{3}-1), \pm a\sqrt[4]{\frac{27}{4}}\right]$. La asíntota es $x = 0$.

1456. Está definida para $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y para $x = \pm 2$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a los ejes de coordenadas y tiene dos puntos aislados: $(\pm 2, 0)$, $|y|_{\text{máx}} = 1$ para $x = 0$. No tiene puntos de inflexión y asíntotas.

1457. Está definida para $-1 \leqslant x \leqslant 1$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a los ejes de coordenadas. $|y|_{\text{máx}} = 1$ para $x = 0$. Los puntos de inflexión de la gráfica son $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/4)$. No tiene asíntotas.

1458. Está definida para $x \leqslant -1$ y para $x \geqslant 1$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto a los ejes de coordenadas. No tiene extremos. Los puntos de inflexión de la gráfica son $(\pm\sqrt{2}, \pm 1/2)$. Las asíntotas son $y = \pm x$.

1459. Está definida para $x \geqslant 0$, es bivalente. La gráfica es simétrica respecto al eje de abscisas. $|y|_{\text{máx}} = 1$ para $x = 1/2$. La abscisa de los puntos de inflexión de la gráfica es $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. La asíntota es $y = 0$.

1460. Está definida por todas partes, excepto $x = 0$. No tiene extremos. Los puntos de inflexión de la gráfica son $(-1/2, e^{-2} + 1/2)$. Las asíntotas son $x = 0$ y $x + y = 1$.

1461. Está definida por todas partes, excepto $x = \pi/2 + k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ El período es π. No tiene extremos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Las asíntotas son $x = \pi/2 + k\pi$.

1462. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. Los puntos extremos satisfacen la ecuación $x = \operatorname{tg} x$. La asíntota es $y = 0$.

1463. Está definida por todas partes. No tiene extremos. La gráfica no tiene puntos de inflexión. Cuando $x \leqslant 0$ la función es idénticamente igual a la función lineal $y = 1 - x$. La asíntota es $x + y = 3$. $(0, 1)$ es el punto angular de la gráfica con dos tangentes diferentes.

1464. Está definida por todas partes. La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y_{\text{máx}} = 3$ para $x = 0$, $y_{\text{mín}} = -1$ para $x \pm 2$. La gráfica no tiene puntos de inflexión, ni asíntotas, su parte derecha representa una parte de la parábola $y = x^2 - 4x + 3$, situada a la derecha del eje de ordenadas. $(0, 3)$ es el punto angular de la gráfica con dos tangentes diferentes.

1465. $x(t)$ e $y(t)$ están definidas para todas las t, e $y(x)$, para todas las x. $(-3, 3)$ es el máximo, $(5, -1)$ es el mínimo, $(1, 1)$ es el punto de inflexión. No tiene asíntotas. Cuando $x \to \infty$, el ángulo de inclinación de la línea hacia el eje de abscisas tiende a $45°$.

1466. $x(t)$ e $y(t)$ están definidas para todas las t, e $y(x)$, para todas las x.

Las asíntotas son $y = x$ e $y = x + 6\pi$; $(-1 - 3\pi, -1 + 3\pi/2)$ es el máximo, $(1 - 3\pi, 1 - 3\pi/2)$ es el mínimo, $(-3\pi, 0)$ es el punto de inflexión.

1467. $x(t)$ e $y(t)$ están definidas para todas las t, excepto $t = -1$. La asíntota es $x + y + 1 = 0$. $(0, 0)$ es el punto múltiple, los ejes de coordenadas sirven de tangentes en este punto. No tienen puntos de inflexión. En el primer cuadrante está un lazo cerrado.

1468. $x(t)$ e $y(t)$ están definidas para todas las t. Cuando $x < -1/e$ la función $y(x)$ no está definida, cuando $-1/e < x < 0$ esta misma función es bivalente, cuando $x > 0$ es univalente. La línea es simétrica respecto a la recta $x + y = 0$. El máximo es $(e, 1/e)$. Existen dos puntos de inflexión. Los ejes de coordenadas hacen de asíntotas.

1469. Es una línea cerrada simétrica respecto al eje de abscisas, con un punto de retroceso $(a, 0)$.

1470. Es una rosa cerrada de tres pétalos. La función está definida en los intervalos $[0, \pi/3]$, $[2/3\pi, \pi]$, $[4/3\pi, 5/3\pi]$. Los extremos existen cuando $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$ y $\varphi = 3\pi/2$.

1471. La función está definida en los intervalos $[0, \pi/2)$, $[\pi, 3\pi/2)$. La gráfica de la función es simétrica respecto al polo. Las rectas $x = a$ y $x = -a$ son las asíntotas*.

1472. La función está definida en los intervalos $[0, \pi/2)$, $(3\pi/4, 3\pi/2)$, $(7\pi/4, 2\pi]$. La gráfica de la función es simétrica respecto al polo. Las asíntotas son $x = a$ y $x = -a$. En el polo la curva toca la recta $\varphi = 3\pi/4$.

1473. Existe para todos los valores de φ. Cuando $\varphi = 0$ el máximo es igual a $2a$, cuando $\varphi = \pi$ el mínimo es igual a 0. La línea es cerrada y simétrica respecto al eje polar. El polo es el punto de retroceso.

1474. La función está definida en los intervalos $[0, \pi/2 + \arccos 1/b]$, $[3\pi/2 - \arccos 1/b, 2\pi]$. En el punto $\varphi = 0$ la función tiene el máximo igual a $a(1 + b)$, en los puntos $\varphi = \pi/2 + \arccos 1/b$ y $\varphi = 3\pi/2 - \arccos 1/b$ tiene el mínimo igual a 0. La gráfica de la función es simétrica respecto al eje polar.

1475. Existe para $\varphi > 0$. El punto de inflexión es $(\sqrt{2\pi}; 0{,}5)$. El eje polar es la asíntota. La línea se desarrolla alrededor del polo en forma de espiral, acercándose a éste de manera asintótica.

1476. Existe para $\varphi \geqslant 0$. La gráfica es una espiral que parte del polo y se acerca, de manera asintótica, a la circunferencia $\rho = 1$.

1477. Existe para $-1 \leqslant t \leqslant 1$ situada íntegramente a la derecha del eje de ordenadas. Línea cerrada. El máximo existe cuando $t = 0$ ($\varphi = 1$ radián, $\rho = 1$). No tiene puntos de inflexión. Cuando $t = \pm 1$ toca el eje de ordenadas.

1478. Rosa de cuatro pétalos. El origen de coordenadas es el punto autotangencial doble.

1479. La línea pertenece íntegramente a la banda $-\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Es simétrica respecto al origen. La asíntota es $x = 0$. $(0, 0)$ es el punto de inflexión en que el eje de abscisas sirve de tangente. Existen otros dos puntos de inflexión.

1480. Es una línea simétrica respecto a los cuatro ejes $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$, cerrada, que tiene cuatro puntos de retroceso, que son $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$ y $(0, -a)$. El origen de coordenadas es un punto aislado.

1481. Es una línea simétrica respecto a los ejes de coordenadas y las bisectrices de los ángulos coordenados. Las asíntotas son $(x \pm y)^2 = \frac{1}{2}$. El origen de

---

* En este ejercicio, al igual que en los que siguen más abajo, las asíntotas vienen dadas en el sistema de coordenadas cartesianas en el cual el eje polar hace de eje de abscisas, y la perpendicular hacia el eje polar que pasa por el polo, hace de eje de ordenadas.

coordenadas es el punto cuádruplo. En él, las ramas de la línea tocan los ejes de coordenadas. La línea presenta la forma de «molino».

1485. Las demás raíces son simples.

1486. $0,1 < x < 0,2$. **1487.** $-0,7 < x_1 < -0,6$ y $0,8 < x_2 < 0,9$.

1488. $0,32 < x < 0,33$.

1489. $-3,11 < x_1 < -3,10$, $0,22 < x_2 < 0,23$ y $2,88 < x_3 < 2,89$.

1490. $0,38 < x_1 < 0,39$ y $1,24 < x_2 < 1,25$.

1491. $-0,20 < x < -0,19$. **1492.** $0,84 < x < 0,85$. **1493.** $1,63 < x < 1,64$.

1494. $1,537 < x < 1,538$. **1495.** $0,826 < x < 0,827$. **1496.** $1,096 < x < 1,097$.

1497. $0,64 < x < 0,65$. Para $0 < a < 1$ existe un solo número real igual a su propio logaritmo, siendo menor que 1. Para $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ existen dos números distintos iguales a sus propios logaritmos: uno de éstos pertenece al intervalo $(1, e)$, el otro, pertenece al intervalo $(e, +\infty)$. Para $a = e^{\frac{1}{e}}$ el único número igual a su logaritmo es el número e (es la raíz doble de la ecuación $\log_a x = x$). Para $e^{\frac{1}{e}} < a < \infty$ no existen números reales que sean iguales a sus propios logaritmos.

1498. $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$.

1499. $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8$.

1500. $(x-1)^{10} + 10(x-1)^9 + 45(x-1)^8 + 120(x-1)^7 + 210(x-1)^6 + 249(x-1)^5 + 195(x-1)^4 + 90(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 5(x-1) - 1$.

1501. $x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1$.

1502. $f(-1) = 143$; $f'(0) = -60$; $f''(1) = 26$.

1503. $-1-(x+1)-(x+1)^2-\ldots-(x+1)^n+(-1)^{n+1}\dfrac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$, donde $0<\theta<1$.

1504. $x+\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{x^3}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{(n-1)!}+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\theta x+n+1)e^{\theta x}$, [donde $0<\theta<1$.

1505. $2+\dfrac{x-4}{4}-\dfrac{(x-4)^2}{64}+\dfrac{(x-4)^3}{512}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-2)!\,(x-4)^n}{n!\,(n-1)!\,2^{4n-2}}+\dfrac{(-1)^n(2n)!\,(x-4)^{n+1}}{2^{2n+1}n!\,(n+1)!\sqrt{[4+\theta(x-4)]^{2n+1}}}$, donde $0<\theta<1$.

1506. $1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\dfrac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2}$, donde $0<\theta<1$.

1507. $(x-1)+\dfrac{5}{2!}(x-1)^2+\dfrac{11}{3!}(x-1)^3+\dfrac{6}{4!}(x-1)^4+\ldots$
$\ldots+\dfrac{(-1)^n 6(x-1)^n}{(n-3)(n-2)(n-1)n}+\dfrac{(-1)^{n+1}6(x-1)^{n+1}}{(n-2)(n-1)n(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n-2}}$, donde $0<\theta<1$.

1508. $\dfrac{2x^2}{2!}-\dfrac{2^3x^4}{4!}+\dfrac{2^5x^6}{6!}-\dfrac{2^7x^8}{8!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\dfrac{(-1)^n2^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\operatorname{sen}2\theta x$, donde $0<\theta<1$.

1509. $2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\dfrac{(x-2)^4}{[1+\theta(x-2)]^5}$, donde $0<\theta<1$.

1510. $x+\dfrac{x^3}{3}\cdot\dfrac{1+2\operatorname{sen}^3\theta x}{\cos^4\theta x}$, donde $0<\theta<1$.

1511. $x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{4!}\,\frac{9\theta x+6\theta^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{\frac{7}{2}}}$, donde $0<\theta<1$.

1512. $1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2}(x-1)^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}(x-1)^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}\times$
$\times\frac{(x-1)^4}{\sqrt{[1+\theta(x-1)]^9}}$, donde $0<\theta<1$.

1513*. Debido a la existencia de la tercera derivada tenemos

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1 h).$$

Comparando con la expresión en el texto obtenemos:

$$\frac{h^2}{2!}[f''(a+\theta h)-f''(a)]=\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1 h),$$

es decir,

$$\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{h}=\theta\,\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{\theta h}=\frac{1}{3}f'''(a+\theta_1 h).$$

Sólo queda pasar al límite para $h\to 0$.
1514. La función decrece. $(0, 3)$ es el punto de inflexión de la gráfica.
1515. La función tiene el mínimo igual a 1.
1516. La función tiene el mínimo igual a 2.
1517. La función tiene el máximo igual a -11.
1518. La función crece. $(0, 0)$es el punto de inflexión de la gráfica.
1519. La función crece. $(0, 4)$ es el punto de inflexión de la gráfica.
1520. $f(x)=1-6(x-1)+(x-1)^2+\ldots$; $f(1{,}03)\approx 0{,}82$.
1521. $f(x)=321+1087(x-2)+1648(x-2)^2+\ldots$; $f(2{,}02)\approx$ $\approx 343{,}4$; $f(1{,}97)\approx 289{,}9$.
1522. $f(x)=1+60(x-1)+2570(x-1)^2+\ldots$; $f(1{,}005)\approx 1{,}364$.
1523. $f(x)=-6+21(x-2)+50(x-2)^2+\ldots$; $f(2{,}1)\approx -3{,}4$; $f(2{,}1)=-3{,}36399$; $\delta=0{,}036$; $\delta'\approx 0{,}011=1{,}1\%$. 1524. 1,65.
1525. 0,78, $\delta<0{,}01$. 1526. 0,342020. 1527. 0,985. 1528. 0,40, $\delta<0{,}01$.

1529. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 1530. $\frac{a}{b^2}$; $\frac{b}{a^2}$. 1531. 36. 1532. 0,128. 1533. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

1534. 0. 1535. 1. 1536. $\frac{8\sqrt{2}}{3a}$. 1537. $\frac{6|x|}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}$.

1538. $\frac{a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}$. 1539. $|\cos x|$. 1540. $\frac{1}{3\sqrt[3]{a|xy|}}$.

1541. $\frac{|(m-1)(ab)^{2m}(xy)^{m-2}|}{(b^{2m}x^{2m-2}+a^{2m}y^{2m-2})^{\frac{3}{2}}}$. 1542. $\frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}$. 1543. $\frac{1}{6}$.

1544. $\frac{2}{3a|\mathrm{sen}\,2t_1|}$. 1545. $\frac{2}{\pi a}$. 1546. $\frac{3}{8a\left|\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}\right|}$. 1547. $\frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}$.

1548. $\frac{2+\varphi^2}{a(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$. 1549. $\frac{\varphi^2+k^2+k}{a\varphi^{k-1}(\varphi^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$. 1550. $\frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab\sqrt{2}}$.

1554. $(x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$. 1555. $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

1556. $(x+2)^2+(y-3)^2=8$. 1557. $\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$

1558. $\left(x+\frac{7}{3}a\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}a\right)^2=\frac{125}{9}a^2$. 1559. $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$.

1560. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\ln 2\right)$. 1561. $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 1562. Para $t=k\pi$.

1563. $\frac{3}{4}a$. 1566. $a=3$, $b=-3$, $c=1$.

1567. $y=-x^5-0{,}64^4+4{,}5x^3+0{,}1x^2$.

1568. $\xi=x-\frac{[1+n^2x^{2(n-1)}]\,x}{n-1}$, $\eta=x^n+\frac{1+n^2x^{2(n-1)}}{n(n-1)\,x^{n-2}}$.

1569. $\xi=\frac{(a^2+b^2)\,x^3}{a^4}$, $\eta=-\frac{(a^2+b^2)\,y^3}{b^4}$; $(a\xi)^{\frac{2}{3}}-(b\eta)^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$.

1570. $\xi=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, $\eta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$; $(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}+(\xi-\eta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

1571. $\xi=\pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{y}{a}}\,(3y+a)$, $\eta=-\frac{9y^2+2ay}{2a}$.

1572. $\xi=-\frac{4}{3}t^3$, $\eta=3t^2-\frac{3}{2}$, $\xi^2=\frac{16}{243}\left(\eta+\frac{3}{2}\right)^3$.

1573. $\left(\frac{3\eta}{8}\right)^4+6a^2\left(\frac{3\eta}{8}\right)^2+3a^3\xi=0$. 1574. $\xi^{\frac{2}{3}}+\eta^{\frac{2}{3}}=(2a)^{\frac{2}{3}}$.

1576. Sí, es posible. 1579. $2p\left[\sqrt{\left(\frac{x+p}{3p}\right)^3}-1\right]$. 1580. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

1581. $6a$. 1582*. $16a$. Al obtener las ecuaciones paramétricas de la evoluta, pasar a otras coordenadas y al parámetro, poniendo $x=-x_1$, $y=-y_1$, $t=t_1+\pi$.

1583*. Valerse de la dependencia que existe entre la longitud de la evoluta y el incremento del radio de la curvatura.

1584. 0,785. 1585. 0,073. 1586. (3,00; 2,46). 1587. (−0,773; −0,841). 1588. (1,38; 4,99). 1589. (0,57; −3,62). 1590. 0,78. 1591. (2,327; 0,845).

Al capítulo V

1592. 1) $\int\limits_0^3 (x^2+1)\,dx$; 2) $\int\limits_a^b (e^x+2)\,dx$; 3) $\int\limits_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2}^2 (8-2x^2)\,dx$; 5) $\int\limits_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$; 6) $\int\limits_1^e (\ln x-\ln^2 x)\,dx$.

1593. $20-\frac{4}{n}$ y $20+\frac{4}{n}$; $\alpha=\frac{4}{n}$; $\sigma=\frac{1}{5n}$.

1594. $\alpha=\frac{149}{600}\approx 0{,}248$, $\delta\approx 0{,}039$.

1595. 31,5. **1596.** $10\frac{2}{3}$. **1597.** $\frac{2}{3}ah=40$ cm². **1598.** $10\frac{2}{3}$.

1599. 8. **1600.** $21\frac{1}{3}$. **1601.** $2\frac{7}{8}$. **1602.** 140 cm. **1603.** $\approx 122{,}6$ m.

1604. $20\frac{5}{6}$ cm. **1605.** 625 julios. **1606.** 4 cm.

1607. a) $m_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1} v(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0=T_0$, $t_n=T_1$; b) $m=\int\limits_{T_0}^{T_1} v(t)\,dt$.

1608. a) $\theta_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1} \psi(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0=T_0$, $t_n=T_1$; b) $\theta=\int\limits_{T_0}^{T_1} \psi(t)\,dt$.

1609. $Q_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0=0$, $t_n=T$; $Q=\int\limits_{0}^{T} I(t)\,dt$.

1610. a) $A_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)\psi(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0=T_0$, $t_n=T_1$;

b) $A=\int\limits_{T_0}^{T_1} \varphi(t)\psi(t)\,dt$.

1611. 1500 culombios. **1612.** $\approx 67\,600$ julios. **1613.** 2880 julios.

1614. a) $P_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1} a\xi_i(x_{i+1}-x_i)$, $x_0=0$, $x_n=b$; b) $P=\int\limits_{0}^{b} ax\,dx$.

1615. a) $\frac{ab^2}{2}=18{,}75$ kgf; b) la recta debe ser trazada de tal modo que entre ella y la superficie medie la distancia igual a $\frac{b}{\sqrt{2}}\approx 17{,}7$ cm.

1616. $e-1$. **1617.** $\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$. **1618.** 1) 50; 2) $4a$; 3) $\frac{7a^3}{24}$; 4) $\frac{7}{3}ab^2$; 5) $a\left(a^2-\frac{a}{2}+1\right)$; 6) $\frac{4}{3}$ m; 7) 31,5; 8) $\frac{(a-b)^3}{6}$; 9) $\frac{a^2}{3}$; 10) $\frac{a(a^2-3ab+3b^2)}{3(a-b)^2}$; 11) 4; 12) $16\frac{2}{15}$; 13) 0.

1619*. $\frac{1}{k+1}$; $\approx 1{,}67\cdot 10^{11}$. Escribir la expresión cuyo límite es buscado en forma de la n-ésima suma integral de cierta función.

1620. ln 2. **1621.** ln 2. **1622*.** ln a, ln 3 $\approx$ 1,1. Véanse los ejercicios 1620 y 1621.

1623*. 1) ae^a-e^a+1; 2) $a\ln a-a+1$; 3) $\frac{(\ln b)^2-(\ln a)^2}{2}$.

La expresión $q+2q^2+\ \dots\ +nq^n$ se halla mediante la derivación de la suma de los términos de la progresión geométrica.

1624. $\int\limits_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = 2\int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$. **1625.** $\frac{1}{2}$. **1626.** $\frac{64}{3}$. **1627.** $\frac{8}{5}$.

1630. $8 < I < 9{,}8$. **1631.** $3 < I < 5$. **1632.** $\pi < I < 2\pi$. **1633.** $\frac{20}{29} < I < 1$.

1634. $\frac{\pi}{9} < I < \frac{2\pi}{3}$. **1635.** $\frac{e^2-1}{e^{e^2-1}} < I < \frac{e^2-1}{e^2}$.

1636. 1) La primera; 2) la segunda.
1637. 1) La primera; 2) la segunda; 3) la primera; 4) la segunda.
1640. $0{,}85 < I < 0{,}90$.
1641. a) $1 < I < \sqrt{2} \approx 1{,}414$;

b) $1 < I < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$; c) $1 < I < \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}095$.

1642. $y_{\text{med}} = \frac{k(x_1+x_2)}{2} + b$; $\frac{x_1+x_2}{2}$.

1643. $y_{\text{med}} = \frac{a}{3}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$. Si $x_1x_2 \geqslant 0$, en un solo punto; si $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$, en dos puntos siendo válidas las desigualdades $-\frac{x_1}{2} \leqslant x_2 \leqslant -2x_1$, en caso contrario, en un solo punto.

1644. 24,5. **1645.** $\frac{\pi a}{4}$. **1646.** 0. **1647.** $\frac{2}{3}h = 1$ m.

1648. 11 A. **1649.** ≈ 1558 V. **1650.** 1) $\frac{x^3}{3}$; 2) $\frac{x^6-a^6}{6}$; 3) $\frac{x^4-x^5}{20}$.

1651. $s = \frac{2}{3}t^3$. **1652.** $A = 100s + 25s^2$ julios, s es la distancia recorrida en metros.

1653. $A = \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha^2}{2}t^3 + \alpha\beta t^2 + \beta^2 t\right)$, donde $\alpha = \frac{E_2-E_1}{t_2-t_1}$, $\beta = \frac{E_1t_2-E_2t_1}{t_2-t_1}$.

1654. $Q = c_0t + \frac{\alpha}{2}t^2 + \frac{\beta}{3}t^3$. **1655.** $dS = 10$, $\Delta S = 10{,}100033\ldots$ **1656.** $dS = 1$.

1657.

Δx	ΔS	dS	α	δ
1	92,25	64	28,25	0,442
0,1	6,644	6,4	0,244	0,0382
0,01	0,6424	0,64	0,0024	0,00376

1658. $\frac{1}{3}$. **1659.** 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1. **1660.** $\frac{d}{dx}\int\limits_x^a f(x)\,dx = -f(x)$.

1661. -1, $-\frac{5}{4}$. **1662.** $\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$. **1663.** 1) x; 2) $-4x\ln x$.

1664*. $2\ln^2 2x - \ln^2 x$. Presentar la integral $\int\limits_x^{2x} \ln^2 x\,dx$ en forma de la suma de las integrales $\int\limits_x^{a} \ln^2 x\,dx + \int\limits_a^{2x} \ln^2 x\,dx$, donde $a > 0$.

1665. $y'=-\frac{\cos x}{e^y}$. 1666. 1) $\frac{dy}{dx}=\operatorname{ctg} t$; 2) $\frac{dy}{dx}=-t^2$. 1667. -2.

1668. Para $x=0$ es igual al mínimo. $I(0)=0$. 1669. 1.

1670. $y_{\text{máx}}=5/6$ para $x=1$, $y_{\text{mín}}=2/3$ para $x=2$. El punto de inflexión de la gráfica es igual a $(3/2,\ 3/4)$.

1672. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{15}{32}$; 3) 52; 4) $4\frac{5}{6}$; 5) $45\frac{1}{6}$; 6) $\approx 0{,}08$; 7) $2-\sqrt{2}$; 8) $6\frac{2}{3}$; 9) $3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)$; 10) $\frac{z_1^2-z_0^2}{2}-\frac{4}{3}(\sqrt{z_1^3}-\sqrt{z_0^3})+z_1-z_0$.

1673. 1) 2; 2) 0; 3) e^3-1; 4) 1; 5) $\pi/4$; 6) $\pi/6$. 1674. 0. 1675. $1-\sqrt{3}$; -1.

Al capítulo VI

1676. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$. 1677. $\frac{mx^{\frac{n}{m}+1}}{n+m}+C$. 1678. $C-\frac{1}{x}$.

1679. $\approx 0{,}4343\cdot 10^x+C$. 1680. $\frac{(ae)^x}{1+\ln a}+C$. 1681. $\sqrt{x}+C$.

1682. $\sqrt{\frac{2h}{g}}+C$. 1683. $\approx 4{,}1x^{0,83}+C$. 1684. $u-u^2+C$.

1685. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$. 1686. $C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$.

1687. $C-10x^{-0,2}+15x^{0,2}-3{,}62x^{1,38}$. 1688. $z-2\ln|z|-\frac{1}{z}+C$

1689. $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$.

1690. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C$.

1691. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$. 1692. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen} x+C$.

1693. $3x-\frac{2(1{,}5)^x}{\ln 1{,}5}+C$. 1694. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x+x)+C$. 1695. $C-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x$.

1696. $\operatorname{tg} x-x+C$. 1697. $C-\operatorname{ctg} x-x$. 1698. $x-\operatorname{sen} x+C$.

1699. $\operatorname{arctg} x-\frac{2}{x}+C$. 1700. $\ln|x|+2\operatorname{arc\,tg} x+C$. 1701. $\operatorname{tg} x+C$.

1702. $\frac{\pi}{2}x+C$. 1703. $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}+C$. 1704. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$. 1705. $2\sqrt{1+x^2}+C$.

1706. $\frac{(x+1)^{16}}{16}+C$. 1707. $C-\frac{1}{8(2x-3)^4}$. 1708. $\frac{(a+bx)^{1-c}}{b(1-c)}+C$.

1709. $C-\frac{5}{33}(8-3x)^{\frac{11}{5}}$. 1710. $C-\frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$. 1711. $\frac{3m}{b}\sqrt[3]{a+bx}+C$.

1712. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$. 1713. $C-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$.

1714. $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$.

1715. $\sqrt{x^2+1}+C$. 1716. $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$. 1717. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$.

1718. $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$. 1719. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x+C$. 1720. $\sec x+C$.

1721. $3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}+C$. 1722. $C-\frac{2}{5}\cos^5 x$. 1723. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C$.

1724. $\frac{(\operatorname{arctg})^3}{3}+C$. 1725. $C-\frac{1}{2(\operatorname{arcsen} x)^2}$. 1726. $2\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+C$.

1727. $\operatorname{sen} 3x+C$. 1728. $\operatorname{tg}(1+\ln x)+C$.

1729. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+C$. 1730. $x\cos\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+C$. 1731. $C-\frac{1}{2}\cos(2x-3)$.

1732. $C-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(1-2x)$. 1733. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$ ó $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} 4x-\sec 4x)+C$.

1734. $C-\cos(e^x)$. 1735. $\ln(1+x^2)+C$. 1736. $\ln|\operatorname{arcsen} x|+C$.

1737. $\ln(x^2-3x+8)+C$. 1738. $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

1739. $\frac{1}{c}\ln|cx+m|+C$.

1740. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. 1741. $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$. 1742. $\ln(e^x+1)+C$

1743. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+a^2)+C$. 1744. $C-\ln|\cos x|$. 1745. $\ln|\operatorname{sen} x|+C$.

1746. $C-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$. 1747. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen}(2x+1)|+C$.

1748. $C-\ln(1+\cos^2 x)$. 1749. $\ln|\ln x|+C$.

1750. $\frac{\ln^{m+1} x}{m+1}+C$, si $m\neq-1$ y $\ln|\ln x|+C$, si $m=-1$.

1751. $e^{\operatorname{sen} x}+C$. 1752. $e^{\operatorname{sen} x}+C$. 1753. $\frac{a^{3x}}{3\ln a}+C$. 1754. $C-\frac{a^{-x}}{\ln a}$.

1755. $C-\frac{e^{1-3x}}{3}$. 1756. $0{,}5e^{x^2}e^{x^3}+C$. 1757. $C-\frac{1}{3}e^{-x^3}$.

1758. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}+C$.

1759. $\frac{1}{5}\operatorname{arcsen} 5x+C$. 1750. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x+C$. 1761. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+C$.

1762. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}x+C$. 1763. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x}{2}+C$.

1764. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$. 1765. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x^2}{a}+C$. 1666. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+C$.

1767. $\frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x^4+C$. 1768. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+C$. 1769. $\frac{\operatorname{arcsen} 2^x}{\ln 2}+C$.

1770. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}+C$. 1771. $e^{x}+e^{-x}+C$.

1772. $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^{x}+x+C$. 1773. $\operatorname{arcsen}x-\sqrt{1-x^2}+C$.

1774. $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$. 1775. $\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+C$.

1776. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$. 1777. $\operatorname{arcsen}x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

1778. $\frac{2}{3}[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}]-x+C$. 1779. $C-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arcsen}x)^3}$

1780. $C-\frac{1}{9}[\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3]$. 1781. $x-4\ln|x+4|+C$.

1782. $\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]+C$. 1783. $\frac{A}{b}\left[x-\frac{a}{b}\ln|bx+a|\right]+C$.

1784. $C-x-6\ln|3-x|$. 1785. $2x+3\ln|x-2|+C$.

1786. $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\ln|2x-1|+C$. 1787. $x+\ln(x^2+1)+C$.

1788. $x-2\operatorname{arctg}x+C$. 1789. $C-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|1-x|$.

1790. $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$. 1791. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$. 1792. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$.

1793. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+C$. 1794. $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{b-x}{a-x}\right|+C$.

1795. $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 1796. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C$.

1797. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$. 1798. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C$.

1799. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C$. 1800. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

1801. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. 1802. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{3}+C$.

1803. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C$. 1804. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2x+3)+C$.

1805. $\operatorname{arcsen}(x-2)+C$. 1806. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x-1}{3}+C$.

1807. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$. 1808. $\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C$.

1809. $\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C$. 1810. $C-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. 1811. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$.

1812. $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C$. 1813. $2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-x+C$.

1814. $\frac{1}{8}\operatorname{tg}^3 x+C.$ 1815. $\ln(2+\operatorname{sen} 2x)+C.$

1816. $C-\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x\right).$ 1817. $\frac{1}{10}\operatorname{sen} 5x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x+C.$

1818. $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x-\frac{1}{14}\operatorname{sen} 7x+C.$

1819. $\frac{1}{8}\left(2x+\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 6x\right)+C.$

1820. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$ 1821. $\ln(1+\operatorname{sen} x)+C.$

1822. $\frac{\cos^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C.$ 1823. $\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x}+C.$

1824. $2\sqrt{\cos\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha}{5}-1\right)+C.$ 1825. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C.$

1826. $\operatorname{sen} x-\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+C.$ 1827. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x+C.$

1828. $C-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x.$

1829. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x+C.$

1830. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C.$ 1831. $C-\operatorname{ctg} x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x.$

1832. $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C.$ 1833. $x\operatorname{sen} x+\cos x+C.$

1834. $C-e^{-x}(x+1).$ 1835. $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C.$

1836. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C.$ 1837. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+C.$

1838. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$ 1839. $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{acrtg}\sqrt{x}+C.$

1840. $2\sqrt{x+1}\operatorname{arcsen} x+4\sqrt{1-x}+C.$

1841. $x\operatorname{tg} x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C.$

1842. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.$ 1843. $C-\frac{1}{2x^2}\lg(x\sqrt{e}).$

1844. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

1845. $2(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\operatorname{arcsen}\sqrt{x})+C.$

1846. $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg} x+C.$ 1847. $C-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$

1848. $x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(2+x^2)^3}+C.$

1849. $\frac{(x^3+1)\ln(2+x)}{3}-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C.$ 1850. $C-e^{-x}(2+2x+x^2).$

1851. $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$. 1852. $a^x\left(\frac{x^2}{\ln a}-\frac{2x}{\ln^2 a}+\frac{2}{\ln^3 a}\right)+C$.

1853. $C-x^3\cos x+3x^2\operatorname{sen} x+6x\cos x-6\operatorname{sen} x$.

1854. $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x+C$.

1855. $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$. 1856. $C-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)$.

1857. $C-\frac{8}{28\sqrt{x^3}}\left(\frac{9}{4}\ln^2 x+3\ln x+2\right)$.

1858. $x(\operatorname{arcsen} x)^2+2\operatorname{arcsen} x\cdot\sqrt{2-x^2}-2x+C$.

1859. $\frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

1860. $\frac{e^x(\operatorname{sen} x-\cos x)}{2}+C$. 1861. $\frac{e^{3x}}{13}(\operatorname{sen} 2x-5\cos 2x)+C$.

1862. $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(n\operatorname{sen} nx+a\cos nx)+C$. 1863. $\frac{x}{2}(\operatorname{sen}\ln x-\cos\ln x)+C$.

1864. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\operatorname{sen}\ln x)+C$. 1865*. $C-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x$.

(Poner $dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, y luego $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ transformar a la forma $\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.)

1866*. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$. (Poner $u=\sqrt{a^2+x^2}$).

1867. $\frac{x-2}{x+2}a^x+C$. 1868. $\frac{1}{2}[(x^2-1)\operatorname{sen} x-(x-1)^2\cos x]e^x+C$.

1869. $2[\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})]+C$.

1870. $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}(5x^3+6x^2+8x+16)+C$.

1871. $C-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}$. 1872. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$.

1873. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$.

1874. $2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C$. 1875. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

1876. $2(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x})+C$.

1877. $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C$.

1878. $\frac{2}{a}[\sqrt{ax+b}-m\ln|\sqrt{ax+b}+m|]+C$.

1879. $x+\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C.$

1880. $3\sqrt[3]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}-1|+C.$

1881. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C.$

1882. $\frac{6}{5}[\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|]+C.$

1883. $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C.$ 1884. $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$

1885. $2\sqrt{1+\ln x}-\ln|\ln x|+2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1|+C.$

1886. $0.4\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}(3-2\cos^2 x)+C.$ 1887. $\frac{1}{2}\ln^2 \operatorname{tg} x+C.$

1888. $C-\frac{2}{9}\sqrt{a^3-x^3}(2a^3+x^3).$ 1889. $\frac{x^2-4}{2}+\frac{8}{x^2-4}+4\ln|x^2-4|+C.$

1890. $C-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}.$ 1891. $\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$

1892. $C-\frac{1}{a}\operatorname{arcsen}\frac{a}{|x|}.$ 1893. $C-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}.$

1894. $C-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\operatorname{arcsen} x.$ 1859. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

1896. $C-\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}.$ 1897. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C.$

1898. $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+C.$ 1899. $C-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}.$

1900. $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2}+2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+C.$

1901. $\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right|+C.$

1902*. $\arccos\frac{1}{|x|}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$ (Se puede realizar la sustitución $x=\frac{1}{z}$.)

1903*. $2\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+C.$ (Se puede realizar la sustitución $x=\operatorname{sen}^2 z$.)

1904*. $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C.$ (Multiplicar el numerador y el denominador por e^x, y poner $xe^x=z$.) 1905. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$

1906. $3[(2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}]+C.$

1907. $\frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C.$

1908. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+C.$

1909. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C$.

1910. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2x)^3}+C$. 1911. $\frac{1}{9}(1+e^{3x})^3+C$. 1912. $2e^{\sqrt{x}}+C$.

1913. $e^{-\cos x}+C$. 1914. $C-\frac{2}{3}(1-e^x)^{\frac{3}{2}}$. 1915. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}x^2+C$.

1916. $C-\frac{5}{24}(2-3x^{\frac{4}{3}})^{\frac{6}{5}}$. 1917. $C-\frac{1}{3}\ln|1+3x^3-x^6|$.

1918. $\frac{2}{3}\ln(1+x^{\frac{3}{2}})+C$. 1919. $C-\ln(3+e^{-x})$.

1920. $C-\operatorname{arcsen}e^{-x}$. 1921. $2\sqrt{1+x^2+3}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

1922. $\frac{1}{9}[2\sqrt{9x^2-4}-3\ln|3x+\sqrt{9x^2-4}|]+C$.

1923. $2\operatorname{sen}\sqrt{x}+C$. 1924. $\operatorname{arcsen}\frac{\ln x}{\sqrt{3}}+C$. 1925. $C-\frac{1}{2}\ln|1-\ln^2 x|$.

1926. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$.

1927. $\frac{(\operatorname{arctg}x)^{n+1}}{n+1}+C$, si $n\neq-1$, y $\ln|\operatorname{arctg}x|$, si $n=-1$.

1928. $C-2\operatorname{ctg}2\varphi$. 1929. $2x-\operatorname{tg}x+C$. 1930. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C$.

1931. $\frac{2}{45}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}\,(5\operatorname{tg}^2 x+9)+C$. 1932. $\frac{1}{3}(\operatorname{tg}3x+\ln\cos^2 3x)+C$.

1933. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$. 1934. $C-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}$.

1935. $\frac{\sqrt{2+4x}\,(x-1)}{6}+C$. 1936. $x\sqrt{1+2x}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$.

1937. $\frac{2}{15}(3x-2a)\sqrt{(a+x)^3}+C$.

1938. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\frac{4}{3}\sqrt{\operatorname{sen}^3 x}-\cos x+C$. 1939. $\frac{a^{mx}b^{nx}}{m\ln a+n\ln b}+C$.

1940. $C-\ln[1-x+\sqrt{5-2x+x^2}]$.

1941. $\frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2})+C$. 1942. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$.

1943. $C-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{\sqrt{6}}$.

1944. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

1945. $C-\sqrt{3-2x-x^2}-4\arcsen\frac{x+1}{2}$.

1946. $\frac{3}{8}\left[\ln(4x^2-4x+17)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]+C$.

1947. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln(x+1+\sqrt{x+2x+2})+C$.

1948. $\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$.

1949. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2})+C$.

1950. $C-\ln|2x^2-3x+1|$.

1951. $\frac{29}{45}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{9}-\frac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18)+C$.

1952. $\frac{61}{16}\ln|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$.

1953. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2}+\frac{11}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{11}{6}+\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}\right|+C$.

1954. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3x}{2}}\right)+C$.

1955. $\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}+C$.

1956. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 1957. $\frac{1}{8}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+C$.

1958. $\frac{1}{\omega^3}[(\omega^2x^2-2)\operatorname{sen}\omega x+2\omega x\cos\omega x]+C$.

1959. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)+C$.

1960. $\operatorname{tg}x\cdot\ln(\cos x)+\operatorname{tg}x-x+C$. 1961. $\ln|\ln\operatorname{sen}x|+C$.

1962. $\frac{1}{4}\left[\ln(1+x^4)+\frac{1}{1+x^4}\right]+C$.

1963. $\frac{1}{3}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|+\cos 3x\right)+C$. 1964. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)+C$.

1965. $C-\frac{1}{8}\ln\frac{2+\cos 2x}{2-\cos 2x}$. 1966. $\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C$.

1967. $2\ln(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})+C$. 1968. $e^{e^x}+C$. 1969. $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$.

1970. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[3\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}\right]+C$.

1971. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsen x+C$. 1972. $C-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\operatorname{sen}^2x}+\operatorname{ctg}x\right)$.

1973. $\frac{e^x}{2}\left(1-\frac{2\operatorname{sen}2x+\cos 2x}{5}\right)+C$. 1974. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+\ln|\operatorname{tg}x|)+C$.

1975. $\ln|\operatorname{sen} x+\cos x|+C$. **1976.** $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|+C$.

1977. $\sec x-\operatorname{tg} x+x+C$. **1978.** $\operatorname{sen} x-\operatorname{arctg}\operatorname{sen} x+C$.

1979. $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|+C$. **1980.** $\ln x\cdot\ln\ln x-\ln x+C$.

1981. $\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{2}+C$. **1982.** $C-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)$.

1983. $\frac{1}{6}(x^2-1)\sqrt{1+2x^2}+C$. **1984.** $C-\frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsen x$.

1985. $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-a^2)^5}-\frac{a^2}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}+a^4\sqrt{x^2-a^2}+a^5\arcsen\frac{a}{|x|}+C$.

1986. $\frac{\sqrt{4+x^2}(x^2-2)}{24x^3}+C$. **1987.** $\frac{\sqrt{(x^2-8)^3}}{24x^3}+C$.

1988. $\frac{\sqrt{(4+x^2)^3}(x^2-6)}{120x^5}+C$. **1989.** $\frac{\sqrt{x^2-3}(2x^2+3)}{27x^3}+C$.

1990. $\frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)]+C$.

1991. $x+4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{1+x}-1)+C$. **1992.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C$.

1993. $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$. **1994.** $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C$.

1995*. $\frac{x^8}{8(1-x^2)^4}+C$. (Es conveniente la sustitución $x=\operatorname{sen} u$.)

1996. $\frac{2}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax}{b}}+C$. **1997.** $C\frac{(1+x^8)^{\frac{3}{2}}}{12x^{12}}$.

1998. $\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}}+C$. **1999.** $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+4}-\ln(x^2+\sqrt{x^4+4})+C$.

2000. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C$. **2001.** $C-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-x^3}{x^3}}-\frac{2}{3}\arcsen\sqrt{x^3}$.

2002. $C-\frac{x^3}{4(1+x^2)^2}-\frac{3x}{8(1+x^2)}+\frac{3\operatorname{arctg} x}{8}$.

2003. $\frac{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+C$. **2004.** $\arcsen e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$.

2005. $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$. **2006*.** $C-\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $\left(\text{sustituyendo } u=1+\frac{1}{x}\right)$. **2007.** $\operatorname{arctg} x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$.

2008. $x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

2009. $x \ln (x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

2010. $\frac{3}{55}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}\,(5\operatorname{tg}^2 x+11)+C$.

2011. $\frac{\sqrt{2}}{5}(\operatorname{tg}^2 x+5)\sqrt{\operatorname{tg} x}+C$. 2012. $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C$.

2013. $\frac{1}{5}\ln[(x-2)^2\sqrt{2x+1}]+C$. 2014. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x-3)^7}\right|+C$.

2015. $\frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C$.

2016. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

2017. $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$.

2018. $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|+C$.

2019. $\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C$.

2020. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$.

2021. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C$.

2022. $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C$.

2023. $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$.

2024. $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$. 2025. $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$.

2026. $C-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\ln|x-2|$.

2027. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 2028. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+C$.

2029. $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|+C$.

2030. $\frac{x}{8}-\ln|x+1|-\frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3}+C$.

2031. $\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{31}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln|x+1|+C$.

2032. $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C$.

2033. $\frac{3}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+20\ln|x-3|-\frac{47}{4}\ln|x-2|+C$.

2034. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+C.$

2035. $C-\frac{x}{(x^2-1)^2}.$ **2036.** $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

2037. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

2038. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

2039. $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C,$

2040. $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x+C.$

2041. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

2042. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

2043. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C.$

2044. $\frac{1}{4}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+\operatorname{arctg}x-\frac{7}{(x-1)^2}\right]+C.$

2045. $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$

2046. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}+C.$

2047*. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$ (En el denominador de la expresión integrando sumar y restar $2x^2$.)

2048. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4+\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

2049. $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C.$

2050. $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$

2051. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+C.$

2052. $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$

2053. $\frac{x-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C.$

2054. $\dfrac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\dfrac{15}{48}\operatorname{arctg} x+C.$

2055. $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)+C.$

2056. $\dfrac{x}{x^2+x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}-2\ln(x^2+x+1)+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+$
$+2x+C.$

2057. $\dfrac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg} x+C.$

2058. $C-6\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|-\dfrac{12x^2-5x-1}{2(x^3-x^2)}.$

2059. $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C.$

2060. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+x}{(1+x^2)^2}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{x-2}{x^2+1}+\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg} x+C.$

2061. $\dfrac{2}{3}\ln\left|\dfrac{x^3+1}{x^3}\right|-\dfrac{1}{3x^3}-\dfrac{1}{3(x^3+1)}+C.$

2062. $\dfrac{1}{648}\left[\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\dfrac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}\right]+C.$

2063. $\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x}{4(x^2+2x+2)^2}+C.$

2064. $C-\dfrac{x}{8(x^2+4)}-\dfrac{2x+5}{2(x^2+4x+5)}-\dfrac{1}{16}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{arctg}(x+2).$

2065. $C-\dfrac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\dfrac{57}{8}\operatorname{arctg} x.$

2066. $\dfrac{3-7x-2x^2}{2(x^3-x^2-x+1)}+\ln\dfrac{|x-1|}{(x+1)^2}+C.$

2067. $\left(-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{3}{5}\right)\dfrac{1}{x(3-2x^2)^2}+\dfrac{1}{8\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}}\right|+C.$

2068. $\ln\dfrac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\dfrac{10}{\sqrt[10]{x}}-\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}}+\dfrac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\dfrac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C.$

2069. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln(1+\sqrt[12]{x})+$
$+\dfrac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-\dfrac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$

2070. $6\left[\dfrac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\dfrac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-\dfrac{1}{6}(x+1)+\dfrac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\right.$
$\left.-\dfrac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]+C.$

2071. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+C.$

2072. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+C$.

2073. $6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left[\frac{(1+x)^2}{16}-\frac{1+x}{5}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}+\frac{1}{4}\right]+C$.

2074. $\ln\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}+\sqrt{x}\operatorname{arctg}\frac{1+2u^2}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

2075*. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C$. Multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por $\sqrt[4]{x-1}$, y sacar los multiplicadores fuera del signo de radical.

2076. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$.

2077. $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C$.

2078. $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1)-\frac{1}{4}\ln[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1]+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\times$
$\times\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C$.

2079. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$.

2080. $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$.

2081. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$.

2082. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C$.

2083. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C$.

2084. $6u+2\ln\frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$

2085. $\frac{1}{5}\ln\frac{|u-1|}{\sqrt{u^2+u+1}}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{1+2u}{\sqrt{3}}+C$, dondo $u=\sqrt[3]{1+x^5}$.

2086. $C-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}-$
$-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}}\right|$.

2087. $C-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}$.

2088. $\frac{u}{2(u^3+1)}-\frac{1}{6}\ln\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C$, donde $u=$
$=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

2089. $12\left[\frac{\sqrt[3]{u^{13}}}{13}-\frac{3\sqrt[3]{u^{10}}}{10}+\frac{3\sqrt[3]{u^{7}}}{7}-\frac{\sqrt[3]{u^{4}}}{4}\right]+C$, donde $u=1+\sqrt[4]{x}$.

2090. $\frac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x-5)+C$. 2091. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$.

2092. $\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}+C$. 2093. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x-\frac{3}{2}x+C$.

2094. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+2\ln|\operatorname{tg} x|+C$.

2095. $\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^4 x+10\operatorname{tg}^2 x+1)}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$. 2096. $\frac{1}{\cos x-1}+C$.

2097. $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}+C$.

2098. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen} 2x\left(\cos^4 x+\frac{5}{4}\cos^2 x+\frac{15}{8}\right)+C$.

2099. $x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+C$. 2100. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$.

2101. $x-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+C$.

2102. $C-\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

2103. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x+C$.

2104. $C-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$. 2105. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$.

2106. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}{2}\right|+C$.

2107. $\ln\frac{|C\cdot\operatorname{sen} x|}{\sqrt{\cos 2x}}$. 2108. $\ln\frac{|C\cdot\operatorname{sen} x|}{\sqrt{1-4\operatorname{sen}^2 x}}$.

2109. $\frac{1}{2}[x+\ln|\operatorname{sen} x+\cos x|]+C$. 2110. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

2111. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$.

2112. $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

2113. $\frac{\cos x(\cos x-\operatorname{sen} x)}{4}-\frac{1}{4}\ln|\cos x-\operatorname{sen} x|+C$.

2114. $\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln|\operatorname{tg} x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg} x+2)}-\frac{3}{25}\ln|\cos x|+C$.

2115. $\frac{\cos 2x-15}{15(4+\operatorname{sen} 2x)}+\frac{4}{15\sqrt{15}}\operatorname{arcsen}\frac{4\operatorname{sen}2x+1}{4+\operatorname{sen}2x}+C.$

2116. $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$ 2117. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x)+C.$

2118. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C.$

2119. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C.$ 2120 $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}x}{b}+C.$

2121. $C-\frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\right].$

2122. $\ln\frac{|\sqrt[3]{\operatorname{tg}x-1}\,|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}+C.$

2123. $2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$ para los valores de x que satisfacen la desigualdad $\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\geqslant 0$, y $-2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$ para los valores de x que satisfacen la desigualdad $\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\leqslant 0$.

2124. $2\sqrt{\operatorname{tg}x}+C.$ 2125*. $C-\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{\operatorname{ctg}^5x}$. (Poner $u=\operatorname{ctg}x$).

2126. $4\sqrt[4]{\operatorname{tg}x}+C.$ 2127. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2x})+C.$

2128. $2\operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen}x}+C.$ 2129. $C-\frac{1}{3}\operatorname{tg}x(2+\operatorname{tg}^2x)\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2x}.$

2130. $\frac{4}{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-\ln\frac{1+\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{1-\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+C.$

2131. $\frac{1}{\sqrt{2}}[\ln(\operatorname{sen}x+\cos x-\sqrt{\operatorname{sen}2x})+\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}x-\cos x)]+C.$

2132. $\operatorname{sh}x+C.$ 2133. $\operatorname{ch}x+C.$ 2134. $\operatorname{th}x+C.$ 2135. $x+C.$

2136. $\frac{1}{2a}\operatorname{sh}2ax+C.$ 2137. $\frac{\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x-x}{2}+C.$

2138. $x-\operatorname{th}x+C.$ 2139. $x-\operatorname{cth}x+C.$ 2140. $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3x-\operatorname{ch}x+C.$

2141. $\operatorname{sh}x+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3x+C.$ 2142. $x-\operatorname{th}x-\frac{1}{3}\operatorname{th}^3x+C.$

2143. $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5x+C.$ 2144. $\ln|\operatorname{sh}x|-\frac{1}{2}\operatorname{cth}^2x-\frac{1}{4}\operatorname{cth}^4x+C.$

2145. $\ln|\operatorname{th}x|+C.$ 2146. $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.$ 2147. $\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}+C.$

2148. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\operatorname{th} x}}{|1-\sqrt{\operatorname{th} x}|}-\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th} x}+C.$

2149. $x\operatorname{th} x-\ln\operatorname{ch} x+C.$ **2150.** $C-\frac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3 x}.$

2151*. $\ln\frac{|cx|}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}$. (Se puede aplicar la sustitución, por ejemplo, $x=\frac{1}{z}$.)

2152. $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}+C.$ **2153.** $\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{x\sqrt{2}}+C.$

2154. $C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|.$

2155. $\ln|x+1+\sqrt{2x+x^2}|-\frac{4}{x+\sqrt{2x+x^2}}+C.$

2156. $C-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|.$

2157. $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|.$

2158. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|+C.$

2159. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3x^2-3x+1}+\right.$
$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right|+C.$

2160. $\frac{1}{2}\left[(x+2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right]+C.$

2161. $C-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}-\frac{3}{2}\ln|2x-1-$
$-2\sqrt{x^2-x+1}|+2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|.$

2162. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

2163. $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C.$

2164. $\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$

2165. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C.$

2166. $C-\frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}+14\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{2}.$

2167. $(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5}-15\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C.$

2168. $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x+2x+2})+C.$

2169. $(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}|+C.$

2170. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{95}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+$
$+\frac{35}{8}\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C.$

2171. $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2}+\frac{1}{16}\arccos\frac{2}{x+1}+C.$

2172. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C.$

2173. $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C.$

2174. $\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}+C.$

2175. $C-\frac{1}{8(x-1)^8}-\frac{1}{3(x-1)^9}-\frac{3}{10(x-1)^{10}}-\frac{1}{11(x-1)^{11}}.$

2176. $\frac{1}{3}[x^2+\sqrt{(x^2-1)^3}]+C.$ 2177. $\frac{3(4x-3a)\sqrt[3]{(a+x)^4}}{28}+C.$

2178. $\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+C.$

2179. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x-\frac{x+2}{2}\sqrt{1-x^2}+C.$

2180. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{|x-1|(x+2)^{32}}{|x+1|^3}+C.$

2181. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

2182. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

2183. $2\sqrt{x+1}[\ln|x+1|-2]+C.$

2184. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\operatorname{sen}2x+C.$

2185. $x^2\operatorname{ch}x-2x\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x+C.$

2186. $x\operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln|x+2\sqrt{x}+2|+C.$

2187. $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{\operatorname{arcsen}x}{x}+C.$

2188. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C.$

2189. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120)+C.$

2190. $e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{13}{9}\right)+C.$

2191. $2(\operatorname{sen}\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x})+C.$

2192. $\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C.$

2193. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$

2194. $\ln(x+\sqrt{1+x})^2-\frac{\sqrt{(+x^2)^5}}{5x^5}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

2195. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x\right)\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C.$

2196. $3[\ln|u|-\ln(1+\sqrt{1-u^2})-\operatorname{arcsen} u]+C$, donde $u=\sqrt[3]{x}$.

2197. $\frac{15x^2+5x-2}{4x^2\sqrt{1+x}}+\frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C.$

2198. $C-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|.$

2199. $\frac{1}{15}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right]+C$, donde $z=x^5$.

2200. $C-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$

2201. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+C.$

2202. $\frac{2}{b^2\operatorname{sen}2\alpha}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}(\alpha-x)}{\operatorname{sen}(\alpha+x)}\right|+C$, donde $\alpha=\arccos\frac{a}{b}$, si $a^2<b^2$;

$\frac{1}{a^2\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}\alpha}+C$, donde $\alpha=\arccos\frac{b}{a}$, si $a^2>b^2$.

2203. $\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^3)-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+$

$+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

2204. $\frac{x}{\ln x}+C$. 2205. $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}+C.$

2206. $\frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\operatorname{sen}x]+C.$

2207. $\frac{x^2e^{x^2}}{2}+C$. 2208. $\frac{2}{3}\frac{\operatorname{tg}^2x-3}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}+C.$

2209. $\frac{1}{4}(\operatorname{tg}^4x-\operatorname{ctg}^4x)+2(\operatorname{tg}^2x-\operatorname{ctg}^2x)+6\ln|\operatorname{tg}x|+C.$

2210. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2x)+C$. 2211. $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

2212. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2x}}+\ln(\sqrt{2+\operatorname{tg}^2x}+\operatorname{tg}x+C.$

2213. $\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}+C.$

2214. $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|.$

2215. $\frac{e^x}{1+x}+C$.

2216. $2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$.

2217. $\frac{1}{6}\ln\frac{1+x^2}{x^2}-\frac{\operatorname{arctg} x}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}+C$.

2218. $C-\frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg} x}{4}+\frac{x}{4(1+x^2)}$.

2219. $\frac{1}{4}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x)^2}-\frac{1}{4(x+1)}+C$.

2220. $x-\log_2|1-2^x|+\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{1}{1-2^x}+\frac{1}{2(1-2^x)^2}+\frac{1}{3(1-2^x)^3}\right]+C$.

2221. $\operatorname{arctg}(e^x-e^{-x})+C$. 2222. $\ln\frac{1+e^x-\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}{1-e^x+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}+C$.

2223. $x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}+C$.

2224. $\frac{35}{128}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{7}{128}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 2x+\frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8x+C$.

2225. $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{(1+x^2)^2}+C$.

2226. $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|+C$.

2227. $C-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2x)$. 2228. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

2229*. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C$. (Dividir el numerador y el denominador por x^2 y realizar la sustitución $x+\frac{1}{x}=z$.)

2230. $e^{\operatorname{sen} x}(x-\sec x)+C$.

Al capítulo VII

2231. $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$. 2232. $\frac{7}{72}$. 2233. $-5(\sqrt[5]{16}-1)$. 2234. $7\frac{2}{3}$.

2235. $\frac{T}{\pi}\cos\varphi_0$. 2236. 12. 2237. $0{,}2(e-1)^5$. 2238. $3\ln\frac{b}{b-a}$.

2239. $\frac{1}{4}$. 2240. $\frac{\pi}{2}$. 2241. $1+\frac{1}{2}\lg e$. 2242. $e-\sqrt{e}$. 2243. $\frac{\pi}{6n}$.

2244. 2. 2245. $\frac{4}{3}$. 2246. $\ln\frac{3}{2}$. 2247. $0{,}2\ln\frac{4}{3}$. 2248. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$.

2249. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. 2250. $\frac{\pi}{6}$. 2251. 2. 2252. $\frac{2}{7}$. 2253. $\frac{4}{3}$.

2254. $\frac{\pi}{2\omega}$. 2255. $-0{,}083\ldots$ 2256. $\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{3}-\operatorname{ctg}\alpha$.

2257. 1. 2258. $-\sqrt{2}/3$. 2259. $1-2/e$. 2260. $\pi/2-1$.

2261. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 2262. $\pi^3-6\pi$. 2263. $2-\frac{3}{4\ln 2}$.

2264. 1. 2265. $\frac{141a^3\sqrt[3]{a}}{20}$. 2266. $\frac{\pi a^2}{4}$. 2267. $\frac{e^{\pi}-2}{5}$. 2268. $6-2e$.

2269. a) $\frac{8}{15}$; b) $\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\approx 0{,}429$; c) $\frac{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}{11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3}=\frac{256}{693}$.

2270. $J_{m,\,n}=\frac{n-1}{m+n}J_{m,\,n-2}=\frac{m-1}{m+n}J_{m-2,\,n}$.

Si n es impar, se tiene

$$J_{m,\,n}=\frac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{(m+n)(M+n-2)\ldots(m+3)(m+1)};$$

si m es impar, se tiene

$$J_{m,\,n}=\frac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(n+3)(n+1)};$$

si m es par y n es par, se tiene

$$J_{m,\,n}=\frac{(n-1)(n-3)\ldots 3\cdot 1\cdot(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

2271. $(-1)^n n!\left[1-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{1}{1!}+1\right)\right]$.

2272. $\frac{11}{48}+\frac{5\pi}{64}$. 2274*. $\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Poner $x=\operatorname{sen}^2 z$ y aplicar el resultado del ejercicio 2270. 2275. $7+2\ln 2$. 2276. $2-\frac{\pi}{2}$. 2277. $\frac{32}{3}$.

2278. $\frac{5}{3}-2\ln 2$. 2279. $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$. 2280. $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

2281*. $\frac{5}{16}\pi$. Poniendo $x=2z$ transformamos la integral dada en $2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^6 z\,dz$.

2282*. $\frac{8}{35}$. Poner $x=\frac{z}{2}$. 2283. $\frac{\pi}{23}$.

2284. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. 2285. $\frac{8}{15}$. 2286. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

2287. $\frac{1}{32}\left(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8\right)$. 2288. $\frac{3}{16}\pi$. 2289. $\frac{\pi}{16}$.

2290 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$. 2291. $\frac{\pi}{4}$. 2292. $\frac{\sqrt{3}}{24}$. 2293. $\frac{\pi}{3}$.

2294. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 2295. $\frac{\sqrt{6}}{27}+\frac{\pi\sqrt{2}}{48}$. 2296. $\frac{20}{9}$.

2297. $2\ln\frac{6}{5}\approx 0{,}365$. 2298. $\frac{2}{\pi}$; $\frac{1}{2}$. 2299. $2+\ln\frac{2}{e^2+1}$.

2300. Para $a=e$. 2301. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. 2302. $\frac{2}{45}$.

2303. $8\ln 3-15\ln 2+\frac{13}{8}$. 2304. $\frac{5}{192}(5+7\sqrt[5]{5^3})$. 2305. $\frac{\pi}{6}$.

2306. $a^2[\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]$. 2307. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$. 2308. $\frac{848}{105}$.

2309. $4-\pi$. 2310. $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$. 2311. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

2312. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. 2313. $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}$. 2314. $\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24$.

2315. $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$. 2316. $\frac{19}{27}-\frac{5}{6\sqrt{6}}$. 2317. $\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$.

2319. $x=2$. 2310. $x=\ln 4$. 2322*. Utilizar las relaciones $4-x^2\geqslant 4-x^2-x^3\geqslant 4-2x^2$, que son válidas para $0\leqslant x\leqslant 1$.

2323*. Utilizar las desigualdades

$$\sqrt{1-x^2}\leqslant\sqrt{1-x^{2n}}\leqslant 1,\ \text{donde}\ -1\leqslant x\leqslant 1\ \text{y}\ n\geqslant 1$$

2324. $1{,}098<I<1{,}110$.

2325. * Para evaluar la integral por abajo, utilizar la desigualdad $1+x^4<(1+x^2)^2$, y para evaluarla por arriba, emplear la desigualdad de Cauchy—Buniakovski.

2326. $I(1)\approx 1{,}66$ es el valor máximo, $I\left(-\frac{1}{2}\right)\approx -0{,}11$ es el valor mínimo.

2327. El mínimo existe para $x=1$ ($y=-17/12$), los puntos de inflexión son $(2, -4/3)$ y $(4/3, -112/81)$.

2332*. a) Sustituir la variable de la integración de acuerdo con la fórmula $t=-x$, dividir el intervalo $[-a, -x]$ en dos intervalos, a saber $[-a, a]$ y $[a, -x]$ teniendo en cuenta que la integral de una función impar sobre el intervalo $[-a, a]$ es igual a cero. b) No, si $a\neq 0$; sí, si $a=0$.

2333*. Poner $t=1/z$.

2338. Cada una de las integrales es igual a $\pi/4$.

2339*. Poner $x=\pi-z$. La integral es igual a $\pi^2/4$.

2342*. Dividir el intervalo de integración $[a, a+T]$ en los intervalos $[a, 0]$, $[0, T]$ y $[T, a+T]$, y luego, valiéndose de la propiedad $f(x)=f(x+T)$, demostrar que

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_T^{a+T} f(x)\,dx.$$

2341. La igualdad que debe ser demostrada equivale a la igualdad

$$\int_x^{x+T} f(z)\,dz=0.$$

Quedar convencido de que la integral en el miembro izquierdo de esta igualdad no depende de x, y poner luego $x=-\frac{T}{2}$. **2342.** $\frac{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n+1)}$.

2343. La sustitución $z=\operatorname{tg} x/2$ no es válida porque la función $\operatorname{tg} x/2$ es discontinua para $x=\pi$.

2344. Para evaluar I_n valerse de que I_n decrece creciendo n.

2345*. Sustituir la variable de la integración de acuerdo con la fórmula $z=\frac{x+t}{2}$ y tomar en consideración la propiedad de la integral de una función par.

2346*. Sustituir la variable de la integración de acuerdo con la fórmula $z=k\omega^2x^2$, y luego aplicar la regla de l'Hospital.

2347. De acuerdo con la regla de los rectángulos, $\pi\approx 2{,}904$ (por defecto) y $\pi\approx 3{,}305$ (por exceso). De acuerdo con la fórmula de los trapecios, $\pi\approx$ $\approx 3{,}104$. De acuerdo con la fórmula de Simpson, $\pi\approx 3{,}127$.

2348. De acuerdo con la regla de los rectángulos, $\pi\approx 3{,}04$ (por defecto) y $\pi\approx 3{,}24$ (por exceso). De acuerdo con la fórmula de los trapecios, $\pi\approx 3{,}140$. De acuerdo con la fórmula de Simpson, $\pi\approx 3{,}1416$ (todas las cifras son exactas).

2349. $\ln 10\approx 2{,}31$, $M=\frac{1}{\ln 10}\approx 0{,}433$. **2350.** $\approx 0{,}837$.

2351. $\approx 1{,}09$. **2352.** $\approx 2{,}59$. **2353.** $\approx 0{,}950$. **2354.** $\approx 1{,}53$.
2355. $\approx 0{,}985$. **2356.** $\approx 0{,}957$. **2357.** ≈ 239 m^2 (por la fórmula de Simpson).
2358. $\approx 5{,}7$ m^2 (por la fórmula de Simpson). **2359.** ≈ 1950 mm^2.
2360. $\approx 10{,}9$. **2361.** $\approx 36{,}2$. **2362.** $\approx 98{,}2$. **2363.** $\approx 9{,}2$.
2364. ≈ 569 mm^2. **2365.** ≈ 138 mm^2. **2366.** 1/3. **2367.** Diverge.
2368. $1/a$. **2369.** Diverge. **2372.** π.
2371. Diverge.

2372. $1-\ln 2$. **2373.** $\frac{1}{2}$. **2374.** $\frac{\pi}{4}$. **2375.** $\ln\frac{\sqrt{a^4+1}+1}{a^2}$.

2376. 1/2. **2377.** 1/2. **2378.** Diverge. **2379.** 2. **2380.** 1/2.

2381. $\frac{a}{a^2+b^2}$, si $a>0$, diverge, si $a\leqslant 0$. **2382** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

2383. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **2384.** $\frac{\pi}{2}$. **2385.** $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

2386. Converge.
2387. Diverge. **2388.** Converge. **2389.** Diverge.
2390. Converge. **2391.** Diverge. **2392.** Diverge.
2393. Converge. **2394.** $\pi/2$. **2395.** Diverge. **2396.** 8/3.
2397. $-1/4$. **2398.** 1. **2399.** Diverge. **2400.** 2. **2401.** π.

2402. $\frac{1}{2}\pi(a+b)$. **2403.** $\frac{33\pi}{2}$. **2404.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **2405.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2406. $14\frac{4}{7}$. **2407.** $\frac{10}{7}$. **2408.** Diverge. **2409.** $6-\frac{9}{2}\ln 3$.

2410. $-2/e$. **2411.** Diverge. **2412.** Converge. **2413.** Diverge.
2414. Converge. **2415.** Converge. **2416.** Diverge. **2417.** Converge.
2418. No. **2419.** Cuando $k<-1$ converge, cuando $k\geqslant -1$ diverge.
2420. 1) Cuando $k>1$ converge, cuando $k\leqslant 1$ diverge,

2) $I=\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$, si $k>1$; diverge si $k\leqslant 1$.

2421. Para $k<1$ converge, para $k\geqslant 1$ diverge.
2422. Diverge para cualquier k.
2423. Converge a condición de que se verifiquen simultáneamente las desigualdades $k>-1$ y $t>k+1$.
2424. Para $m<3$ converge, para $m\geqslant 3$ diverge.
2425. Para $k<1$ converge, para $k\geqslant 1$ diverge.
2426. π. **2427***. $5\pi/3$. Poner $x=\cos\varphi$ y efectuar la integración por partes.

2428. $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}\pi-\dfrac{3}{2}\ln 2$.

2429. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\cdot\dfrac{\pi}{2a^{2n-1}}$.

2430. $n!$. **2431.** $n!/2$. **2432.** $(-1)^n n!$

2433*. a) $\dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)\ldots 4\cdot 2}\dfrac{\pi}{2}$; b) $\dfrac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{m(m-2)\ldots 3\cdot 1}$. Poner $x=\operatorname{sen}\varphi$. **2434***. $2\dfrac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}$. Poner $x=\operatorname{sen}^2\varphi$.

2435. $\dfrac{\pi-\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ ($I=1$ cuando $\alpha=\pi$).

2436*. Para demostrar la igualdad de las integrales poner en una de ellas $x=1/z$. Luego, calcular su suma valiéndose de la identidad

$$\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}}+\frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}}\right).$$

2437*. Presentar la integral como la suma de dos integrales: $\int\limits_0^\infty=\int\limits_0^1+\int\limits_1^\infty$; en la segunda poner $x=\dfrac{1}{y}$. **2438.** 0. **2439.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

2440. $\sqrt{\pi}$. **2441***. $\sqrt{\pi}/4$. Efectuar la integración por partes.

2442. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. **2443.** $\dfrac{\pi}{2}$.

2444. $\pi/2$, si $a>0$; 0, si $a=0$; $-\pi/2$, si $a<0$.
2445. $\pi/2$, si $a>b$; $\pi/4$, si $a=b$; 0, si $a<b$.
2446*. $\pi/2$. Efectuar la integración por partes.
2447*. $\pi/4$. Presentar el numerador como la diferencia de los senos de los arcos múltiples.
2448*. $\pi/4$. Emplear los mismos métodos que los que fueron utilizados en los ejercicios 2446 y 2447.

2449*. Poniendo $y=\dfrac{\pi}{2}-z$, hacemos que $\varphi(x)$ tenga la forma $\varphi(x)=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\ln\operatorname{sen}z\,dz$. De acuerdo con la fórmula $\operatorname{sen}z=2\operatorname{sen}\dfrac{z}{2}\cos\dfrac{z}{2}$ dividimos la integral en tres, una de las cuales se halla directamente. Aplicando el procedimiento del cambio de las variables las otras dos integrales se reducen a las integrales del tipo inicial; $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

2450. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. **2451.** $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$.

2452*. $\frac{\pi}{2}\ln 2$. Efectuar la integración por partes.

2453*. $\frac{\pi}{2}\ln 2$. Aplicando el cambio de la variable, se reduce al ejercicio anterior.

2454. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Al capítulo VIII

2455. $\frac{16}{3}$. **2456.** $\frac{9}{4}$. **2457.** $\frac{16}{3}p^2$. **2458.** $\frac{1}{3}$. **2459.** $\frac{32}{3}\sqrt{6}$

2460. $2\frac{1}{4}$. **2461.** $2\pi+\frac{4}{3}$ y $6\pi-\frac{4}{3}$.

2462. $\frac{4}{3}(4\pi+\sqrt{3})$ y $\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$.

2464. $\frac{b^2c}{a}-ab\ln\frac{c+b}{a}=b\left[\varepsilon b-a\ln\left(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-1}\right)\right]$, donde ε es la excéntricidad.

2465. $a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$; $a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$; y $a^2\left[\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$.

2466. $S_1=S_3=\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3-2\arcsen\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}46$; $S_2=2(\pi-S_1)$.

2467. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **2468.** $\frac{1}{12}$. **2469.** $\frac{1}{12}$.

2470. $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$; $4\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, si m y n son pares; $2\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, si m y n son impares; $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, si m y n son de paridad distinta.

2471. a) $\frac{3}{14}$; b) $73\frac{1}{7}$.

2472. 1 (la figura consta de dos partes cuyas áreas son iguales entre sí).

2473. $\frac{8}{15}$. **2474.** $\frac{3}{4}\pi$. **2475.** $\frac{4}{3}$.

2476. $\frac{\pi a^2}{8}$. 2477. $8\left(\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}\right)$.

2478. $e+\frac{1}{e}-2$. 2479. 4. 2480. $\frac{3}{e}(e^3-4)$. 2481. $\frac{18}{e^2}-2$.

2482. a) $b(\ln b-1)-a(\ln a-1)$; b) $b-a$. 2483. $3-e$.

2484. $\frac{3-2\ln 2-2\ln^2 2}{16}$. 2485. $2-\sqrt{2}$. 2486. $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2487. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$. 2488. $\sqrt{2}-1$. 2489. $\frac{\pi}{4}$. 2490. $3\pi a^2$.

2491. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 2492. $6\pi a^2$.

2493. 1) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n+1)(n+2)$; 2) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n-1)(n-2)$.

2494. 1) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$; 2) $\frac{8}{15}$. 2495. 1) $\frac{4}{3}\pi^3a^2$; 2) $\frac{76a^2\pi^3}{3}$.

2496. $\frac{\pi a^2}{4}$ (rosa de dos pétalos). 2497. $\frac{\pi a^2}{4}$. 2498. $18\pi a^2$.

2499. $\frac{a^2}{8}(4-\pi)$. 2500. $\frac{37\pi}{6}-5\sqrt{3}$. 2501. $\frac{51\sqrt{3}}{16}$. 2502. a^2.

2505*. $a^2\frac{5\pi+18\sqrt{3}}{32}$. Para construir la línea conviene considerar la variación de φ desde 0 hasta 3π. 2506. $\frac{\pi}{4}$. 2507. a^2.

2508. $a^2\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2509. $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$. 2510. a^2. 2511. $\pi\sqrt{2}$. 2512. π. 2513. 2.

2514. $3\pi a^2$. 2515. 4π. 2516*. 1) $\sqrt{\pi}/2$; 2) $\sqrt{\pi}$. Valerse de que $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integral de Poisson).

2517. $\frac{\pi a^2}{2}$. 2518. $2-\frac{\pi}{2}$ y $2+\frac{\pi}{2}$. 2519. $a\operatorname{sh}\frac{b}{a}$.

2520. $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$. 2521. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

2522. $\ln 3-\frac{1}{2}$. 2523. $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$. 2524. $\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$.

2525. $4\frac{26}{27}$. 2526. $4a\sqrt{3}$. 2527. $\frac{\pi}{2}+2\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+2\ln(\sqrt{2}+1)$.

2528. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\ln 3$. 2529. 2. 2530. 8.

2531. Para $t=\frac{2\pi}{3}$; $\left[x=a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ y=\frac{3a}{2}\right]$.

2532. Para $t=\frac{\pi}{6}$, $\left(x=\frac{3\sqrt{3}}{8}R,\ y=\frac{R}{8}\right)$.

2533*. $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Poner $x=a\cos^3 t$, $y=b\operatorname{sen}^3 t$.

2534. $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$. 2535. $a\ln\frac{a}{y}$. 2536. $\frac{\pi^2}{2}R$.

2537. $\pi^3/3$. 2538. $4\sqrt{3}$. 2541. $2(e^t-1)$. 2543. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+$ $+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 2545. $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$.

2546. $8a$. 2547. $\frac{3}{2}\pi a$.

2549. k debe tener la forma $\frac{2N+1}{2N}$ ó $\frac{2N}{2N-1}$, donde N es un entero.

2550. 4. 2551. $\ln\frac{\pi}{2}$. 2554*. Demostrar que la longitud de la elipse es susceptible de ser escrita en la forma

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}+\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}\right)dt,$$

y aplicar el teorema sobre la evaluación de la integral. 2555. 2π. 2556. 1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; 2) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

2557. $\frac{8}{15}\pi h^2 a$. 2558. $\frac{\pi h^2}{3}(3a+h)$. 2559. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$.

2560. $\frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2}-\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{2}+2(b-a)\right]$. 2561. $\frac{3\pi}{10}$.

2562. $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$. 2563. $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$. 2564. $\frac{8\pi}{3}$. 2565. $2\pi^2$.

2566. $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$. 2567. 1) $\frac{2}{3}\pi a^3$; 2) $\frac{\pi^2}{16}$. 2568. $5\pi^2 a^3$.

2569. $\pi a^3\left(\frac{3\pi^2}{2}-\frac{8}{3}\right)$. 2570. $\frac{32}{105}\pi a^3$. 2571. $\frac{16\pi c^6}{105ab^2}$. 2572. $\frac{\pi^2}{2}$.

2573. $\frac{\pi e}{2}$. 2574*. 1) π; 2) $\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Véase la indicación al ejercicio 2516.

2575*. $\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32}$. Véase la indicación al ejercicio 2516.

2576*. π^2. Valerse de que $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ (integral de Dirichlet).

2577*. $2\pi^2 a^3$. Es conveniente pasar a la forma paramétrica poniendo $x=2\,a\,\mathrm{sen}^2\,t$, $y=\frac{2a\,\mathrm{sen}^3\,t}{\cos t}$. 2578. $\frac{2}{3}\pi a^3$. 2579*. $\frac{4}{3}\pi abc$. Aplicar la fórmula $V=\int\limits_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx$, donde $S(x)$ es el área de la sección transversal.

2580. 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) 36π.

2581. $v_1=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}-\frac{11}{3}\right)$, $v_2=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}+\frac{11}{3}\right)$.

2582. $v_1=v_3=4\pi(\sqrt{6}+\sqrt{3}-4)$, $v_2=8\pi(4-\sqrt{3})$.

2583. $\frac{8\pi\sqrt{6}}{3}$. 2584. 8π.

2585*. $\frac{2}{3}R^2H=400$ cm^3. El eje de la simetría de la base debe ser tomado por el de abscisas.

2586. $\frac{4}{15}ahH=128$ cm^3. 2587. $\frac{2}{3}abH=133\frac{1}{3}$ cm^3.

2588*. $\frac{2}{3}\pi R^2H$. El área del segmento parabólico simétrico es igual a $\frac{2}{3}ah$, donde a es la base del segmento y h, la «flecha».

2589*. $\frac{R^2H}{6}\left(\pi+\frac{4}{3}\right)$ y $\frac{R^2H}{6}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. (Véase la indicación al ejercicio 2588).

2590. $\frac{8}{3}a^3$. 2591. $\frac{8}{3}\pi r^3$. 2592. $\frac{16}{3}R^3$. 2593. $\frac{4}{3}R^2H$.

2594. $\frac{56}{3}\pi a^2$. 2595. $\frac{\pi}{9}(\sqrt{(1+a^4)^3}-1)$. 2596. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$.

2597. $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$ y $2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, donde ε es la excentricidad de la elipse. 2598. $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

2599. $\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}\right]$. 2600. $3\pi a^2$.

2601. $\pi a^2\sqrt{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$. 2602. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi}-2)$. 2603. $\frac{12}{5}\pi a^2$.

2604. $8\pi a^2\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 2605. $\frac{32}{5}\pi a^2$. 2606. $4\pi^2r^2$.

2607. $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$. 2608. $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. 2609. $4\pi a^2$.

2610. $\frac{ah^2}{2}$. 2611. $\frac{a^3}{6}$, $\frac{a^3}{6}$, $\frac{a^2\sqrt{2}}{12}$.

2613. El centro de gravedad se halla en el eje de la simetría del segmento mediando entre dicho centro y la base la distancia igual a $\frac{2}{5}h$.

2614. Para $S_1: \xi=\frac{3}{5}a$, $\eta=\frac{3}{8}b$; para S_2: $\xi=\frac{3}{10}a$, $\eta=\frac{3}{4}b$.

2615. $\xi=0$, $\eta=\frac{2r}{\pi}$. **2616.** $\xi=0$, $\eta=\frac{4r}{3\pi}$.

2617. El centro de gravedad se halla en la bisectriz del ángulo central que subtiende el arco, mediando entre dicho centro y el centro de la circunferencia la distancia igual a $2r\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$.

2618. $\xi=\frac{a}{5}$, $\eta=\frac{a}{5}$. **2619.** $\xi=\frac{4a}{3\pi}$, $\eta=\frac{4b}{3\pi}$.

2620. $\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\operatorname{arcsen}\varepsilon$, donde ε es la excentricidad de la elipse.

2621. $\xi=\frac{\pi}{2}$, $\pi=\frac{\pi}{8}$. **2622.** $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}$. **2623.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$. **2624.** $\frac{3}{20}$.

2625. $\xi=\frac{5}{8}a$, $\eta=0$. **2626.** $\xi=0$, $\eta=a\frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)}$.

2628. $\xi=\pi a$, $\eta=\frac{4}{3}a$. **2629.** $\xi=\pi a$, $\eta=\frac{5}{6}a$.

2630. $\xi=\frac{2}{5}a$, $\eta=\frac{2}{5}a$. **2631.** $\xi=\frac{256a}{315}$, $\eta=\frac{256a}{315\pi}$.

2633. $\xi=\frac{6a(4-\pi^2)}{\pi^3}$, $\eta=\frac{2a(\pi^2-6)}{\pi^2}$.

2634. El centro de gravedad se halla en el eje de la simetría del sector, mediando entre dicho centro y el centro del círculo la distancia igual a $\frac{2}{3}\frac{r\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$.

2635. $\xi=\frac{5}{5}a$, $\eta=0$. **2636.** $\xi=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a$, $\eta=0$.

2638. $\xi=-\frac{a}{5}\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$, $\eta=\frac{a}{5}\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$.

2639. $\xi=\frac{4}{5}a$, $\eta=\frac{4}{5}a$. **2640.** $\frac{3}{8}R$.

2641. El centro de gravedad se halla en el eje de la simetría, mediando entre dicho centro y el centro de la semiesfera la distancia igual a $R/2$.

2642. $\frac{H}{3}$, $\frac{H\sqrt{R^2+H^2}}{3(R+\sqrt{R^2+H^2})}$, $\frac{H}{4}$. **2643.** $\frac{h}{3}$.

2644. $\frac{l}{3}(a^2+ab+b^2)$. **2645.** $\frac{\pi R^3}{2}=M\frac{R^2}{2}$ (M es la masa de la semicircunferencia).

2646. $\frac{\sqrt{(1+e)^3}-2\sqrt{2}}{3}$. 2647. $I_x=\frac{256}{15}a^3$; $I_y=16a^3\left(\pi^2-\frac{128}{45}\right)$.

2648. $\frac{ab^3}{3}$. 2649. 1) $\frac{bh^3}{12}$; 2) $\frac{bh^3}{4}$; 3) $\frac{bh^3}{36}$. 2650. $\frac{\pi R^4}{8}$. 2651. $\frac{\pi R^4}{2}$.

2652. $\frac{\pi}{4}ab^3$ y $\frac{\pi}{4}ba^3$. 2653. $\frac{1}{2}\pi R^4H$. 2654. $\frac{1}{10}\pi R^4H$.

2655. $\frac{8}{15}\pi R^5$.

2656. $\frac{8}{15}\pi ab^4$, donde $2a$ es la magnitud del eje alrededor del cual se efectúa la revolución.

2657. $\frac{1}{6}\pi R^4H$. 2658. $\frac{56\pi}{15}$. 2659. 1) $I_x=\frac{\pi(e^4-1)}{8}$; 2) $I_y=4\pi(3-e)$.

2660. MR^2, donde M es la masa de la superficie lateral del cilindro.

2661. $\frac{1}{2}MR^2$. 2662. $\frac{2}{3}MR^2$. 2663. $\frac{9}{2}\pi a^3$. 2664. $6\pi^2ab^2$.

2665. El volumen es igual a $\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2a^3$, la superficie, $6\sqrt{2}\pi a^2$.

2666. El volumen es igual a $12\pi^3a^3$, la superficie, $32\pi^2a^2$.

2667. El eje de revolución debe ser perpendicular respecto a la diagonal del cuadrado; el eje de revolución debe ser perpendicular respecto a la mediana.

2668. $\approx 23{,}7$ m. 2669. $x_2=x_1+\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_2}{T}+\varphi_0\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t_1}{T}+\varphi_0\right)$.

2670. $\frac{kmM}{a(a+l)}$, $\frac{a+l}{a}M$, $\frac{kmM}{l}\ln\frac{r_1(r_2+l)}{r_2(r_1+l)}$. 2671. $\frac{2kmM}{\pi r^2}$.

2672. $\frac{kmMa}{\sqrt{(R^2+a^2)^3}}=\frac{kmM\cos^3\varphi}{a^2}$, donde φ es el ángulo formado entre las rectas que unen el punto C con el centro del anillo y con cualquiera de los puntos del mismo; $\frac{kmM}{R}$.

2673. $\frac{2kmM}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$. 2674. $2\pi km\sigma$.

2675*. $2\pi km\gamma h\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+(R-r)^2}}\right)=2\pi km\gamma h(1-\cos\alpha)$, donde α es el ángulo formado entre la generatriz del cono y su eje. Valerse de la solución del ejercicio 2673.

2676. $2km\gamma$ 2678*. $\frac{kM^2}{l^2}\ln\frac{4}{3}$. Primero, es necesario calcular la fuerza de interacción del elemento ds de la primera barra y la segunda (valerse del resultado del ejercicio 2670), y, luego, calcular la atracción total.

2679. $\frac{g^2M^3}{6m^2}$. 2680. $\frac{\pi H^2d}{12}(R^2+2Rr+3r^2)$.

2681. $\approx 1{,}63\cdot 10^{11}$ kgm. 2682. 353 250 kgm.

2683. $\frac{\pi dR^2H^2}{12}$, $\frac{\pi dR^2H^2}{4}$. En las respuestas a los ejercicios 2683—2686 el valor del trabajo se indica en kgm, si la distancia se mide en metros, el peso específico, en kgf/m^3.

2684. $\frac{\pi dR^4}{4} \approx 101{,}8$ kgm. 2685. $\frac{\pi dR^2H^2}{6} \approx 26\,800$ kgm.

2686. $\frac{4}{15} dabH^2 = 240$ kgm. 2687. $\frac{Sl^3\omega^2\gamma}{6} \approx 0{,}418$ $kgm \approx 4{,}2$ *julios*.

2688. $\frac{ab^3 d\gamma\omega^2}{6} \approx 1{,}16$ kgm. 2689. $\frac{ah^3 d\omega^2\gamma}{24} \approx 0{,}05$ kgm.

2690. $\frac{ha^3 d\omega^2\gamma}{60} \approx 0{,}015$ kgm. 2691. $\frac{\pi R^4 H\omega^2\gamma}{4}$.

2692. $\frac{MR^2\pi^2n^2}{3600}$; $\frac{MR^2(3\pi-8)\pi n^2}{3600}$.

2693. a) $\frac{ah^2}{6}$; b) dos veces. 2694. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. 2695. 22,2 m.

2696. $\frac{2}{3} da^2b$. 2697. $abd\left(h+\frac{b}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)$.

2699. a) $\frac{d^2H^2S}{2} = 32$ kgm, b) $\frac{1}{2} SH^2(1-d)^2 = 2$ kgm.

2700. $\frac{4}{3}\pi R^4$. 2701. $\approx 0{,}206$ cm². 2702. a) $\approx 33{,}2$ s; b) $\approx 64{,}6$ s.

2703. ≈ 1 hora 6 minutos 53 segundos. 2704. $\frac{2bL\sqrt{2a}}{3S\sqrt{g}}(2\sqrt{2}-1)$.

2705. $\frac{2b\sqrt{2g}}{3}\left[(H+h)^{\frac{3}{2}} - H^{\frac{3}{2}}\right]$; para $H=0$: $\frac{2b\sqrt{2g}}{3} h^{\frac{3}{2}} =$
$= \frac{2\sqrt{2g}}{3} S\sqrt{h}$, donde S es el área de la hendidura.

2706. a) $\approx 2{,}4$ s; b) $\approx 6{,}3$ s; c) ≈ 53 s; d) para $t \to \infty$.

2707. $\approx 3{,}4$ kgm. 2708. 1) a) $\approx 7{,}16$ kgm; b) $\approx 16{,}6$ kgm; c) $\approx 23{,}8$ kgm; 2) al dilatarse el gas infinitamente, el trabajo aumenta sin límites.

2709. ≈ 1600 kgm. 2710. ≈ 82 minutos. 2711. Un poco más de 5°.

2712. $\frac{\sigma}{2a\pi\varepsilon_0}$. 2713. a) $4\cdot10^{-6}$ *julios*; b) $6\cdot10^{-6}$ *julios*. 2714. 5 cm.

2715. ≈ 946 *culombios*.

2716. ≈ 1092 *culombios*. 2717. ≈ 5110 *culombios*.

2718. $\frac{E_0^2}{2}$. La tensión efectiva de la corriente alterna es igual a $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$.

2719. $\frac{E_0I_0}{2} T\cos\varphi_0$. 2720. ≈ 7 minutos. 2721. $\approx 2{,}915$ l.

2722. a) $H_1 = H\frac{\ln a - \ln c}{\ln a - \ln b} \approx 15$ cm; b) $\approx 0{,}125\%$.

2723. $\frac{1}{1024}$ de la cantidad inicial. 2724. $\approx 2{,}49$ g. 2725. $\frac{8}{9}$ g.

2726. $\approx 37{,}3$ minutos.

Al capítulo IX

2727*. $S_n=1-\frac{1}{n+1}$, $S=1$. Cada término de la serie ha de ser presentado como la suma de dos sumandos.

2728. $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$, $S=\frac{1}{2}$.

2729. $S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$, $S=\frac{1}{3}$.

2730. $S_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$, $S=\frac{11}{18}$.

2731. $S_n=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$, $S=\frac{23}{90}$.

2732. $S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$, $S=\frac{1}{4}$.

2733. $S_n=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$, $S=\frac{3}{2}$.

2734. $S_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$, $S=1$.

2735. $S_n=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$, $S=\frac{1}{8}$.

2736. $S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$, $S=\frac{\pi}{4}$.

2737. Converge. 2738. Converge. 2739. Diverge. 2740. Converge.
2741. Diverge. 2742. Diverge. 2743. Converge.
2744. Diverge. 2745. Diverge. 2746. Converge.
2747. Converge. 2748. Diverge. 2749. Converge.
2750. Diverge. 2751. Converge. 2752. Converge.
2753. Diverge. 2767. Converge. 2768. Diverge.
2769. Converge. 2770. Converge. 2771. Converge.
2772. Diverge. 2773. Diverge. 2774. Converge.
2775. Diverge. 2776. Diverge. 2777. Diverge.
2778. Converge. 2779. Converge. 2780. Diverge.
2781. Converge. 2782. Diverge. 2783. Converge.
2784*. Diverge. Valerse de la fórmula

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha+\ldots+\operatorname{sen}k\alpha=\frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}\alpha\operatorname{sen}\frac{k}{2}\alpha}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

o de la desigualdad $\operatorname{sen}x>\frac{2}{\pi}x$, si $0<x<\frac{\pi}{2}$.

2790. Converge, pero no absolutamente. 2791. Converge absolutamente.
2792. Converge, pero no absolutamente. 2793. Converge absolutamente.
2794. Converge absolutamente.
2795. Diverge. 2796. Converge, pero no absolutamente.
2797. Converge absolutamente. 2798. Converge, pero no absolutamente.
2799. Diverge. 2802. $-1<x<1$.
2803. $\frac{1}{e}<x<e$. 2804. $-1<x<1$. 2805. $-1\leqslant x\leqslant 1$.

2806. $-1 \leqslant x < 1$. 2807. $x < -1$ y $x > 1$. 2808. $-1 < x < 1$.
2809. $-1 \leqslant x < 1$. 2810. $x \neq \pm 1$. 2811. Para cualquier x.
2812. $-2 < x < 2$. 2813. Para cualquier x. 2814. $x > 0$. 2815. $x > 0$.
2816. $x \geqslant 0$.
2822. 11 términos. 2823*. Valerse de la desigualdad $\ln(1+\alpha) \leqslant \alpha$

2825. $f(0)=\frac{1}{9}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{101}$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{44}{1001}$; $f(1)=0{,}049$; $f(-0{,}2)=0{,}108$.

2827. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. 2828. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2829. $(x+1)\ln(x+1)-x$. 2830. $\frac{1}{2}$. 2831. 0,2.

2832*. $\ln\frac{3}{2}$. Valerse de la relacion $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ \ldots,\ \cos\frac{x}{2^n}\ldots = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

2833*. $\frac{\pi^3}{12}$. Valerse de la fórmula $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

2834. 1) $\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}\right]$. 2835. $\ln 2$.

2836. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

2837. La serie dada no es susceptible de ser derivada término a término en ninguno de los intervalos. En efecto, el término general de la serie de derivadas ofrece la forma $\pi\cos(2^n\pi x)$. Por pequeño que sea el intervalo (α, β) y dondequiera que esté en el eje numérico, dentro de él siempre existirán los números de la forma $\frac{k}{2^N}$, donde k es un entero, y N, un número entero positivo suficientemente grande. Pero, cuando $x=\frac{k}{2^N}$ la serie de derivadas diverge porque para todas las $n > N$ sus términos llegan a ser iguales a π.

2838. $\frac{1}{(1-x)^2}$ y $\frac{1}{(1-x)^3}$.

2841. $(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-n)^n}{n}+\ldots$

2842. $1+\frac{3}{2}\left[(x-1)+\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{1}{2^2}\frac{(x-1)^3}{3!}+\ldots\right.$
$\left.\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\ \ldots\ (2n-5)}{2^{n-1}}\frac{(x-1)^n}{n!}+\ldots\right]$.

2843. $\frac{1}{3}-\frac{x-3}{9}+\frac{(x-3)^2}{27}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$.

2844. $1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}\frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$

2845. $1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$

2846. $x^2+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n-1)!}+\ldots$

2847. $\cos\alpha\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\right]-$
$-\operatorname{sen}\alpha\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right].$

2848. $x+x^2+\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}+\ldots+\sqrt{2^n}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{4}\cdot\frac{x^n}{n!}+\ldots$

2849. $1-\frac{4x^4}{4!}+\frac{4^2x^8}{8!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{4^{n-1}x^{4(n-1)}}{(4n-4)!}+\ldots$

2850. $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+\ldots$

2851. $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right).$ 2852. $1-\frac{nx^2}{2}+\frac{3n^2-2n}{24}x^4+\ldots$

2853. $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\ldots$ 2854. $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5x^4}{6}+\ldots$

2855. $1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$

2856. $1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^{(n+1)}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}+\ldots$

2857. $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$

2858. $1+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+\ldots+\frac{x^{6(n-1)}}{(2n-1)!}+\ldots$

2859. $\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^2\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}+\ldots$

2860. $1-\left[x^2-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right].$

2861. $1-\frac{x^2}{3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n-1)!}+\ldots$

2862. $-\frac{2x^3}{3!}+\frac{4x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$

2863. $\ln 10+\left[\frac{x}{10}-\frac{x^2}{2\cdot 10^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\ldots\right].$

2864. $x^2-\frac{x^3}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n}+\ldots$

2865. $1+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)\,x^{2n}}{2\cdot 4\ldots(2n-2)\,2n}+\ldots\right].$

2866. $2-2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots+\right.$
$\left.+\frac{2\cdot 5\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}+\ldots\right].$

2867. $1-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1\cdot 4}{3^2 2!}x^6+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n!}x^{3n}+\ldots\right].$

2868. $x^2+\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n+2}+\ldots\right].$

2869. $1+2^2x+\ldots+n^2x^{n-1}+\ldots$, $S=12$.

2870. 1) $-7!$, 2) $\frac{105}{16}$, 3) $\frac{10!}{4!}$ y 4) $\frac{8}{3}$.

2871. 1/6. 2872. 1/4. 2873. 1. 2874. 1/2. 2875. 2/3. 2876. 1/3.
2877. 1/60. 2878. $-1/10 < x < 1/10$. 2879. $-1 < x \leqslant 1$.
2880. $-10 \leqslant x < 10$. 2881. $x=0$. 2882. $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$.
2883. $-\infty < x < \infty$. 2884. $-1/3 < x < 1/3$. 2885. $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
2886. $-1/e \leqslant x < 1/e$. 2887. $x=0$. 2888. $-1 \leqslant x < 1$.

2889. $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$.

2890. $x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$
$(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2891. $x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$ $(-1<x<1)$.

2892. $x^2+\frac{x^4}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2893. $4\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots+\frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)$ $(-\infty<x<\infty)$, $\frac{1}{2e}$.

2894. 1,39, el error es igual a 0,01. 2895. 0,3090, el error es igual a 0,0001.
2896. 2,154, el error es igual a 0,001. 2897. 7,389. 2898. 1,649. 2899. 0,3679.
2900. 0,7788. 2901. 0,0175. 2902. 1,000. 2903. 0,17365. 2904. 0,9848.
2905. 3,107. 2906. 4,121. 2907. 7,937. 2908. 1,005.
2909. 3,017. 2910. 5,053. 2911. 2,001. 2912. 1,0986.
2913. 0,434294. 2914. 0,6990.

2915. $1+2x+\frac{5}{2}x^2+\ldots+\left[2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right]x^{n-1}+\ldots$

2916. $x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\ldots+(-1)^{n+1}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right]x^n+\ldots$

2917. $1-\frac{x}{3}+\frac{x^3}{81}+\ldots$ 2918. $-\frac{x}{2}+\frac{5x^3}{32}+\ldots$

2919. $x-x^2+2x^3+\ldots$

2920. $C+x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots$
$(-\infty<x<\infty)$.

2921. $C+\ln|x|-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}-\ldots$
$\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n\cdot(2n)!}+\ldots$ $(-\infty<x<0$ y $0<x<\infty)$.

2922. $C+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot n!}+\ldots$
$(-\infty<x<0$ y $0<x<\infty)$.

2923. $C-\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 3!}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)!}+\ldots$
$(-\infty<x<0$ y $0<x<\infty)$.

2924. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!}+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$.

2925. $x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2926. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^9}{9}+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2927. $x+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-5)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{3n-2}}{3n-2}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2928. $x+\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{10}}{19}+\ldots+\frac{x^{9n-8}}{9n-8}$ $(-1\leqslant x<1)$.

2929. $\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4\cdot 8}\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{3\cdot 7\ldots(4n-5)}{4^n\cdot n!}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2930. 0,3230, el error es igual a 0,0001. 2931. 0,24488, el error es igual a 0,00001.

2932. 0,4971, el error es igual a 0,0001. 2933. 3,518, el error es igual a 0,001

2934. 0,012, el error es igual a 0,001. 2935. 32,831. 2936. 0,487.

2937. 0,006. 2938. 0,494. 2940. 3,141592654.

2941. $x+\frac{2}{1\cdot 3}x^3+\frac{2^2}{1\cdot 3\cdot 5}x^5+\ldots+\frac{2^{n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}x^{2n-1}+\ldots$

2942*. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}+\ldots$ Presentar x^x en la forma $e^{x\ln x}$, desarrollar en serie de potencias de $x\ln x$ e integrar las expresiones de la forma $x^n\ln^n x$.

2943. 0,6449. 2944. 0,511 2945. 1,015.

2946*. 3,71. Resulta poco cómodo calcular el área mediante la fórmula $S=4\int\limits_0^1\sqrt[4]{1-x^4}\,dx$ porque para $x=1$ la serie correspondiente converge lentamente.

Conviene calcular el área del sector limitado por la línea, el eje de ordenadas y la bisectriz del primer ángulo coordenado. Esto origina una serie rápidamente convergente.

2947. 0,2505. 2948. 3,821. 2949. 0,119. 2952. 1,225.

2951. (0,347; 2,996). 2952. (1,71; 0,94).

Al capítulo X

2953. $z=\frac{\pi}{3}(x^2y-y^3)$.

2954. $S=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)}$.

2955.

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5
0	1	3	5	7	9	11
1	−2	0	2	4	6	8
2	−5	−3	−1	1	3	5
3	−8	−6	−4	−2	0	2
4	−11	−9	−7	−5	−3	−1
5	−14	−12	−10	−8	−6	−4

2956.

$y \backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,1	0,10	0,14	0,22	0,32	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,90	1,00
0,2	0,20	0,22	0,28	0,36	0,45	0,54	0,63	0,73	0,82	0,92	1,01
0,3	0,30	0,32	0,36	0,42	0,50	0,58	0,67	0,76	0,85	0,95	1,04
0,4	0,40	0,41	0,45	0,50	0,57	0,64	0,72	0,81	0,89	0,98	1,08
0,5	0,50	0,51	0,54	0,58	0,64	0,71	0,78	0,86	0,94	1,03	1,12
0,6	0,60	0,61	0,63	0,67	0,72	0,78	0,85	0,92	1,00	1,08	1,16
0,7	0,70	0,71	0,73	0,76	0,81	0,86	0,92	0,99	1,06	1,14	1,22
0,8	0,80	0,81	0,82	0,85	0,89	0,94	1,00	1,06	1,13	1,20	1,28
0,9	0,90	0,91	0,92	0,95	0,98	1,03	1,08	1,14	1,20	1,27	1,34
1	1,00	1,00	1,02	1,04	1,08	1,12	1,16	1,22	1,28	1,34	1,41

2957. 1) $\frac{9}{16}$; 2) 1; 3) 16; 2; 2.

2958. $\dfrac{\varphi(a)\,\psi\left(\frac{1}{a}\right)-\psi(a)\,\varphi\left(\frac{1}{a}\right)}{\varphi(1)\,\psi(1)}$; $a-\frac{1}{a}$.

2959. La segunda función crece con más rapidez.
2960. La parábola de segundo orden; 1) no, 2) no.
2961. Poner $m=1/x$. **2965.** La función no es unívoca.

2966. 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{1}{5}$; 4) no está definida; 5) 1.

2967. $z=(x+y)^{x-y}+(x+y)^{y-x}$, $(x+y)>0$; z es la función racional de u y de v, pero no de w, t, x e y.

2968. $z=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$.

2969. $u=(x^2+y^2+z^2)^2-\frac{x^2+y^2+z^2}{4}[(x^2+y^2+z^2)^2+3(x+y+z)^4]$; u es la función entera racional respecto a ξ y η, x, y y z, pero no respecto a ω y φ.

2970. $z=\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^v+u$; $u=x^2+y^2$; $v=xy$.

2971. $x=\text{const}$ es una parábola, $y=\text{const}$ es una parábola, $z=\text{const}\neq 0$ es una hipérbola, $z=0$ es una pareja de rectas.

2972. $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ son rectas, $z=\text{const}\neq 0$ es una hipérbola, $z=0$ es una pareja de rectas.

2973. $x=\text{const}$ es una parábola, $y=\text{const}$ es una parábola cúbica, $z=\text{const}\neq 0$ es una curva de tercer orden, $z=0$ es una parábola semicúbica.

2974. $z=\text{const}>0$ es una elipse, $x=\text{const}$ e $y=\text{const}$ son curvas de tercer orden (para $x=0$ e $y=0$ son parábolas semicúbicas).

2975. $0<y<2$; $-1<y-\frac{1}{2}x<0$. 2976. $x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$.

2977. $0<y<x\sqrt{3}$; $y<(a-x)\sqrt{3}$.

2978. $(x-a)^2+(y-b)^2<R^2$; $-\infty<z<\infty$.

2979. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2$. 2980. $x^2+y^2<4R^2$.

2981. $v=\frac{1}{6}xy\left(2R\pm\sqrt{4R^2-x^2-y^2}\right)$; la función no es unívoca. El dominio de definición de la función es $x^2+y^2\leqslant 4R^2$; $x>0$, $y>0$.

2982. Para $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ $S=xy$;
para $0\leqslant x\leqslant 1$, $1\leqslant y$ $S=x$;
para $1\leqslant x$ $0\leqslant y\leqslant 1$ $S=y$;
para $1\leqslant x\leqslant 2$; $1\leqslant y\leqslant 2$ $S=xy-x-y+2$;
para $1\leqslant x\leqslant 2$; $2\leqslant y$ $S=x$;
para $2\leqslant x$, $1\leqslant y\leqslant 2$ $S=y$;
para $2\leqslant x$, $2\leqslant y$ $S=2$.

2983. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. 2984. $y^2>4x-8$.

2985. Todo el plano, excepto los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=R^2$.

2986. La parte interior del ángulo derecho vertical formado por las bisectrices de los ángulos coordenados, incluyendo las mismas bisectrices $x+y\geqslant 0$, $x-y\geqslant 0$.

2987. Lo mismo que en el ejercicio 2986, pero sin fronteras.

2988. La parte interior de los ángulos verticales derecho e izquierdo formados por las rectas $y=1+x$ e $y=1-x$, incluyendo estas mismas rectas, pero sin los puntos de intersección:

$$1-x\leqslant y\leqslant 1+x\ (x>0),$$
$$1+x\leqslant y\leqslant 1-x\ (x<0)$$

(cuando $x=0$ la función no está definida).

2989. Parte del plano situado dentro de los ángulos coordenados primero y tercero (sin fronteras).

2990. Dominio cerrado situado entre el semieje positivo de abscisas y la parábola $y = x^2$ (incluyendo la frontera): $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $x^2 \geqslant y$.

2991. Anillo entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (incluyendo las mismas circunferencias $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$.

2992. Parte del plano situada dentro de la parábola $y^2 = 4x$, entre la parábola y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, incluyendo el arco de la parábola excepto su vértice, excluyendo el arco de la circunferencia.

2993. Parte del plano situada fuera de las circunferencias de radios iguales a 1, cuyos centros se hallan en los puntos $(-1, 0)$, y $(1, 0)$. Los puntos de la primera circunferencia pertenecen al dominio, los puntos de la segunda, no pertenecen.

2994. Solamente los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

2995. Todo el plano excluyendo las rectas $x + y = n$ (n es cualquier número entero positivo o negativo, o cero).

2996. Parte interior del círculo $x^2 + y^2 = 1$ y de los anillos $2n \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2n + 1$ (n es un entero), incluyendo las fronteras.

2997. $\left.\begin{array}{c}\text{Si } x \geqslant 0, \text{ se tiene} \\ 2n\pi \leqslant y \leqslant (2n+1)\pi; \\ \text{si } x < 0, \text{ se tiene} \\ (2n+1)\pi \leqslant y \leqslant (2n+2)\pi;\end{array}\right\}$ n es un entero.

2998. $x > 0$; $2n\pi < y < 2(n + 1)\pi$ (n es un entero).

2999. El dominio rayado abierto (véase la fig. 83).

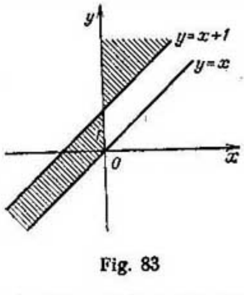

Fig. 83

Para $x > 0$ $y > x + 1$, para $x < 0$, $x < y < x + 1$.

3000. Parte del plano comprendida entre la línea $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ y su asíntota, incluyendo la frontera. **3001.** $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3002. Parte del espacio comprendida entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, incluyendo la superficie de la esfera exterior y excluyendo la superficie de la esfera interior.

3003. 2. **3004.** 0. **3005.** 0.

3006. La función no tiene límite para $x \to 0$, $y \to 0$. **3007.** 0. **3008.** 1.

3009. a) $y = 0$ ó $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 1$), $x \to 0$ de acuerdo con la ley arbitraria; b) $y = \dfrac{x}{3}$, $x \to 0$ de acuerdo con la ley arbitraria.

3010. Es el punto $(0, 0)$. En el entorno de este punto la función puede tomar valores positivos tan grandes como quieran.

3011. Son todos los puntos cuyas coordenadas son números enteros.

3012. En la recta $y = x$.

3013. En las rectas $x = m$, $y = n$ (m y n son números enteros).

3014. En la parábola $y^2 = 2x$.

3015. 1) es continua; 2) es discontinua; es continua con respecto a x e y por separado; 3) es continua; 4) es discontinua; 5) es discontinua; 6) es discontinua. Pasar a las coordenadas polares.

3016. Son las circunferencias cuyos centros se hallan en el origen de coordenadas y cuyos radios son 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{2}$, respectivamente.

3017. Son las circunferencias que pasan por los puntos A y B.

3025. Son las rectas $y = ax + b$, donde $a = \ln b$.

3026. Son las esferas concéntricas cuyo centro se halla en el punto A y cuyos radios son iguales a 1, 2, 3, 4.

3027. Son los elipsoides de revolución cuyos focos se hallan en los puntos A y B:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}=\text{const.}$$

3028. Son las esferas $x^2+y^2+z^2=\left(\frac{lc-1}{c+1}\right)^2$, donde $c=e^u$.

3029. Son los paraboloides de revolución $x^2 + y^2 = cz$.

3030. 1) Son los planos $2x + 3y - z = C$; 2) son los hiperboloides de revolución o el cono $x^2 + y^2 - 2z^2 = C$.

3032. $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$ para $T=T_0$.

3033. $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ es la velocidad del cambio de la temperatura en el punto dado; $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ es la velocidad del cambio de la temperatura en el momento dado del tiempo a lo largo de la barra.

3034. $\frac{\partial S}{\partial h}=b$ es la velocidad de variación del área en función de la altura; $\frac{\partial S}{\partial b}=h$ es la velocidad de variación del área en función de la base del rectángulo.

3036. $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-1$.

3037. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$.

3038. $\frac{\partial\theta}{\partial x}=ae^{-t}$; $\frac{\partial\theta}{\partial t}=-axe^{-t}+b$.

3039. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2}$; $\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}+\frac{1}{u}$.

3040. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$.

3041. $\frac{\partial z}{\partial x}=30xy\,(5x^2y-y^3+7)^2$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=3\,(5x^2y-y^3+7)^2\,(5x^2-3y^2)$.

3042. $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-\frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

3043. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$.

3044. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$.

3045. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$.

3046. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

3047. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

3048. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

3049. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$.

3050. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y\operatorname{sen}\frac{2x}{y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2\operatorname{sen}\frac{2x}{y}}$.

3051. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$.

3052. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$.

3053. $\frac{\partial u}{\partial v}=-\frac{w}{v^2+w^2}$; $\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{v}{v^2+w^2}$.

3054. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\operatorname{sen}\frac{x}{y}\operatorname{sen}\frac{y}{x}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{x}{y}\operatorname{sen}\frac{y}{x}$.

3055. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{x}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$.

3056. $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=xy(1+xy)^{y-1}+(1+xy)^y\ln(1+xy)$.

3057. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$.

3058. $\frac{\partial z}{\partial x}=x^{x^y}x^{y-1}(y\ln x+1)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y x^{x^y}\ln^2 x$.

3059. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz$; $\frac{\partial u}{\partial y}=xz$; $\frac{\partial u}{\partial z}=xy$.

3060. $\frac{\partial u}{\partial x}=y+z$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x+z$; $\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$.

3061. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;
$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3062. $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+3y-1$; $\frac{\partial u}{\partial y}=z^2+3x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2yz+1$.

3063. $\frac{\partial w}{\partial x}=yz+vz+vy$; $\frac{\partial w}{\partial y}=xz+zv+vx$.
$\frac{\partial w}{\partial z}=xy+yv+vx$; $\frac{\partial w}{\partial v}=yz+xz+xy$.

3064. $\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)\,e^{x(x^2+y^2+z^2)}$;
$\frac{\partial u}{\partial y}=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2xze^{x(x^2+y^2+z)^2}$.

3065. $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2+z^2)$;
$\frac{\partial u}{\partial z}=2z\cos(x^2+y^2+z^2)$.

3066. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}$.

3067. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}\,x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}\,x^{\frac{y}{z}}\ln x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\,x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

3068. $\frac{\partial u}{\partial x}=y^zx^{y^z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}\,zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=y^zx^{y^z}\ln x\ln y$.

3069. $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$. 3070. 0, $\frac{1}{4}$.

3071. $\frac{\partial z}{\partial x}=2\,(2x+y)^{2x+y}\,[1+\ln(2x+y)]$;
$\frac{\partial z}{\partial y}=(2x+y)^{2x+y}\,[1+\ln(2x+y)]$.

3072. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{x\ln y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3\ln x}{y\ln^2 y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$.

3073. $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{\operatorname{sen}\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{\operatorname{sen}\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$.

3074. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,2x$;
$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,2y$.

3075. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1-x^y)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^y}\ln x}{2(1+x^y)}$.

3076. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}$.

3077. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$.

3078. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$.

3079. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)^2+2\operatorname{arctg}^3\frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)^2+\operatorname{arctg}^3\frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$.

3080. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{4kx}{(x^2+y^2+z^2)^3}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{4ky}{(x^2+y^2+z^2)^3}$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{4kz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$.

3081. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

3082. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(\operatorname{sen}x)^{yz-1}\cos x$; $\frac{\partial u}{\partial y}=z(\operatorname{sen}x)^{yz}\ln\operatorname{sen}x$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=y(\operatorname{sen}x)^{yz}\ln\operatorname{sen}x$.

3083. $\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{x}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{y}=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{z}=\frac{2}{r(r^2-1)}$, donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3084. $\frac{\partial w}{\partial x}=(2xy^2-yzv)\operatorname{tg}^3\alpha$; $\frac{\partial w}{\partial y}=(2x^2y-xzv)\operatorname{tg}^3\alpha$;

$\frac{\partial w}{\partial z}=(2zv^2-xyv)\operatorname{tg}^3\alpha$; $\frac{\partial w}{\partial v}=(2z^2v-xyz)\operatorname{tg}^3\alpha$,

donde $\alpha=x^2y^2+z^2v^2-xyzv$.

3085. 4.

3086. $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{z=b\\t=a}}=\frac{3b}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$; $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\substack{z=b\\t=a}}=-\frac{3a}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$.

3087. 1 y -1. 3088. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3089. $\frac{3}{2}$. 3090. $-\frac{13}{22}$. 3091. 45°.

3092. 30°. 3093. $\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$.

3094. $d_x z=(y^3-6xy^2)\,dx$; $d_y z=(3xy^2-6x^2y+8y^3)\,dy$.

3095. $d_x z=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $d_y z=\dfrac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3096. $d_x z=\dfrac{y\,(y^2-x^2)\,dx}{(x^2+y^2)^2}$; $d_y z=\dfrac{x\,(x^2-y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$.

3097. $d_x u=\dfrac{3x^2\,dx}{x^3+2y^3-z^3}$; $d_y u=\dfrac{6y^2\,dy}{x^3+2y^3-z^3}$; $d_z u=\dfrac{-3z^2\,dz}{x^3+2y^3-z^3}$.

3098. $\dfrac{1}{270}$. 3099. $\approx 0{,}0187$. 3100. $\dfrac{97}{600}$.

3101. $xy\,[(2y^3-3xy^2+4x^2y)\,dx+(4y^2x-3yx^2+2x^3)\,dy]$.

3102. $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$. 3103. $\dfrac{2\,(x\,dy-y\,dx)}{(x-y)^2}$. 3104. $\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

3105. $(x\,dy+y\,dx)\cos(xy)$. 3106. $\dfrac{dx}{1+x^2}+\dfrac{dy}{1+y^2}$.

3107. $\dfrac{4xy\,(x\,dy-y\,dx)}{(x^2-y^2)^2}$. 3108. $\dfrac{x\,dy+y\,dx}{1+x^2y^2}$.

3109. $x^{zy-1}\,(yz\,dx+zx\ln x\,dy+xy\ln x\,dz)$. 3110. 0,08. 3111. $0{,}25e$.

3112. $\dfrac{1}{36}$. 3113. $\approx 7{,}5$. 3114. $\approx 0{,}005$. 3115. $\approx 1{,}08$.

3116. 5. 3117. $1{,}8\pm 0{,}2$. 3118. 4730 ± 100.

3119. $2\delta_a+\dfrac{\delta_B B\,\mathrm{sen}\,C}{\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,(B+C)}+\dfrac{\delta_C C\,\mathrm{sen}\,B}{\mathrm{sen}\,C\,\mathrm{sen}\,(B+C)}$.

3120. Crece con la velocidad igual a 444 cm^2/s. 3121. En $\approx 2575\ cm^3$.

3123. $dr=\dfrac{s}{p}\,ds+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{s^2}{2p^2}\right)dp=0{,}16\ cm$, es decir, cerca de 1%.

3124. $e^{\mathrm{sen}\,t-2t^3}\,(\cos t-6t^2)$. 3125. $\mathrm{sen}\,2t+2e^{2t}+e^t\,(\mathrm{sen}\,t+\cos t)$.

3126. $\dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

3127. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=3u^3\,\mathrm{sen}\,v\cos v\,(\cos v-\mathrm{sen}\,v)$;

$$\frac{\partial z}{\partial v}=u^3\,(\mathrm{sen}\,v+\cos v)\,(1-3\,\mathrm{sen}\,v\cos v).$$

3128. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=2\dfrac{u}{v^2}\ln(3u-2v)+\dfrac{3u^2}{v^2\,(3u-2v)}$;

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\frac{2u^2}{v^2\,(3u-2v)}.$$

3129. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{e^x}{e^x+e^y}$; $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{e^x+3e^{x^3}x^2}{e^x+e^{x^3}}$.

3130. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x\,(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$. 3131. $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

3132. $\dfrac{dz}{dt}=\left(3-\dfrac{4}{t^3}-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2\left(3t+\dfrac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)$.

3133. $\dfrac{du}{dx}=e^{ax}\,\mathrm{sen}\,x$.

3134. $dz=\frac{y^2\,dx+x^2\,dy}{(x+y)^2}\operatorname{arctg}(xy+x+y)+\frac{xy\,[(y+1)\,dx+(x+1)\,dy]}{(x+y)\,[1+(xy+x+y)^2]}$.

3135. $\frac{e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}}{x^2y^2}\,[(y^4-x^4+2xy^3)\,x\,dy+(x^4-y^4+2x^3y)\,y\,dx]$.

3136. $\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2x\,\frac{\partial f}{\partial u}+ye^{xy}\,\frac{\partial f}{\partial v};\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-2y\,\frac{\partial f}{\partial u}+xe^{xy}\,\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}u&=x^2-y^2;\\ v&=e^{xy}.\end{aligned}$

3145. $\frac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$. 3146. $\frac{x\,(y^2-2x^2)}{y\,(2y^2-x^2)}$. 3147. $\frac{ye^{xy}-ye^x-e^y}{xe^y+e^x-xe^{xy}}$.

3148. $-\frac{x}{y}\cdot\frac{2\,(x^2+y^2)-a^2}{2\,(x^2+y^2)+a^2}$. 3149. $\frac{y}{x}\cdot\frac{2x+e^{xy}-\cos xy}{\cos xy-e^{xy}-x}$.

3150. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 3151. $\frac{y^2}{1-xy}$. 3152. $\frac{a^2}{(x+y)^2}$. 3153. $\frac{2y}{x\,(y-1)}$.

3154. $\frac{y}{y-1}$. 3155. $\frac{y^2\ln x-1}{x^2\ln y-1}$.

3157. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=6\\ y=2}}=\frac{4}{3};\quad\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=6\\ y=8}}=-\frac{4}{3}$.

3158. -1. 3161. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z};\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$.

3162. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-x}{z+1};\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{z+1}$.

3163. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{xy+z^2};\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{xy+z^2}$

3164. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x\,(z-1)};\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y\,(z-1)}$.

3167. $dz=-\frac{\operatorname{sen}2x\,dx+\operatorname{sen}2y\,dy}{\operatorname{sen}2z}$. 3168. $z=\frac{x^2-y^2}{4}$.

3169. $z=\frac{3xy-x^3}{2}$. 3170. $z=k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. 3171. $dz=\frac{x\,dx}{z}-\frac{y\,dy}{z}$.

3172. $dz=\frac{x\,dx}{a}+\frac{y\,dy}{a}$. 3173. $dz=\sqrt{z}\,(x\,dx-y\,dy)$.

3174. $2\,(x\,dx+y\,dy)$.
3175. $2\,(x\,dx+y\,dy)$.
3176. $dz=e^{-u}\,[(v\cos v-u\operatorname{sen}v)\,dx+(u\cos v+v\operatorname{sen}v)\,dy]$.

3185. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x\,dy}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3186. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})^2};$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3187. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0$.

3188. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a^2 \cos 2(ax+by)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2 \cos 2(ax+by)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} =$
$= 2ab \cos 2(ax+by)$.

3189. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xe^y+2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(1+xe^y)\, e^{xe^y+y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = (1+xe^y)\, e^{xe^y+y}$.

3190. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$.

3191. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y(\ln y+1)}{x^2}\, e^{\ln x \ln y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}\, e^{\ln x \ln y}$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\ln x \ln y+1}{xy}\, e^{\ln x \ln y}$.

3192. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.

3193. $\frac{(x-z)\, y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xz)^3}}$. 3194. $2y^3(2+xy^2)\, e^{xy^2}$.

3195. $\frac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$. 3196. $-x(2 \operatorname{sen} xy + xy \cos xy)$.

3197. $(x^2y^2z^2+3xyz+1)\, e^{xyz}$.

3198. $mn(n-1)(n-2)\, p(p-1)\, x^{m-1}y^{n-3}z^{p-2}$. 3204. $a=-3$.

3209. $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

3219. $-2y\, dx^2 + 4(y-x)\, dx\, dy + 2x\, dy^2$. 3220. $-\frac{(dx-dy)^2}{(x-y)^2}$.

3221. $\frac{(3x^2-y^2)\, dx^2 + 8xy\, dx\, dy + (3y^2-x^2)\, dy^2}{(x^2+y^2)^3}$.

3222. $2 \operatorname{sen} 2y\, dx\, dy + 2x \cos 2y\, dy^2$. 3223. $e^{xy}[(y\, dx + x\, dy)^2 + 2dx\, dy]$.

3224. $2(z\, dx\, dy + y\, dx\, dz + x\, dy\, dz)$.

3225. $-\cos(2x+y)(2\, dx + dy)^3$; $(2\, dx+dy)^3$; 0.

3226. $-\operatorname{sen}(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$.

3227. $-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2b^2}\, dx\, dy + \left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$.

3228. $-\frac{2z\,[xy^3\, dx^2 + (x^2y^2+2xyz^2-z^4)\, dx\, dy + x^3y\, dy^2]}{(z^2-xy)^3}$.

3229. $-31{,}5\,dx^2+206\,dx\,dy-306\,dy^2$. 3230. $\frac{d^2y}{dt^2}+y$.

3231. $y''-5y'+y$. 3232. $\frac{d^2y}{dt^2}+ay$. 3233. $y-x''$. 3234. $-\frac{x'''}{x'^5}$.

3235. $-\frac{v''+2v}{v^3}$. 3236. $\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho$. 3237. $\frac{2\rho'^2-\rho\rho''+\rho^2}{(\rho'^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3238. $-\frac{\partial z}{\partial v}$. 3239. $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}$.

3240. $\omega''(\rho)+\frac{1}{\rho}\omega'(\rho)+k\omega(\rho)$. 3241. $-4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2$.

Al capítulo XI

3242. $x^3+2y^3-xy+h(3x^2-y)+k(6y^2-x)+3xh^2-hk+$
$+6yk^2+h^3+2k^3$.

3243. $\Delta z=15h^2-6hk+k^2+h^3$.

3244. $\Delta z=-2h+7k-4h^2+4hk+2k^2-2h^3-$

$$-h^2k+\frac{5}{2}hk^2+\frac{1}{4}k^3-h^3k+\frac{1}{2}h^2k^2+\frac{1}{4}hk^3;$$

$$f(1{,}02;\ 2{,}03)\approx 2{,}1726.$$

3245. $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+$

$$+(2Ax+Dy+Fz)h+(2By+Dx+Ez)k+$$
$$+(2Cz+Ey+Fx)l+Ah^2+Bk^2+Cl^2+Dhk+Ekl+Fhl.$$

3246. $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-$

$$-\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]-$$
$$-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\operatorname{sen}\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+3\cos\xi\operatorname{sen}\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\operatorname{sen}\xi\cos\eta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right].$$

3247. $z=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+\ldots;\ z_1\approx 1{,}1021$.

3248. $e^x\left[\operatorname{sen}y+h\operatorname{sen}y+k\cos y+\frac{1}{2}(h^2\operatorname{sen}y+2hk\cos y-k^2\operatorname{sen}y)+\right.$

$$\left.+\frac{1}{6}(h^3\operatorname{sen}y+3h^2k\cos y-3hk^2\operatorname{sen}y-k^3\cos y)\right]+\ldots;\ z_1\approx 1{,}1051.$$

3249. $y+xy+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3+\ldots$

3250. $y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+\frac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+\ldots$

3251. $1+(x+y)+\ldots+\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+\ldots$

3252*. $x-y-\frac{1}{3}(x^3-y^3)+\frac{1}{5}(x^5-y^5)-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}(x^{2n+1}-y^{2n+1})+\ldots$

Fijarse en que $\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y$.

3253. $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^ny^m}{nm}$.

3254. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+y)^n-x^n-y^n}{n}$. 3255. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

3256. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^my^{2n}}{m!\,(2n)!}$.

3257. $z=1+(x-1)+\frac{1}{4}(y-1)-\frac{1}{8}(x-1)(y-1)+\frac{9}{64}(y-1)^2+\ldots$

3259. $(0, 0)$, $(-5/3, 0)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$.
3260. $(1/2, -1)$.
3261. $(0, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$, $(a/3, a/3)$.
3262. $(0, 0)$, $(0, 2b)$, (a, b), $(2a, 0)$, $(2a, 2b)$.
3263. $(\pi/6, \pi/6)$.
3264. $(b/a, c/a)$. 3265. $(-2/3, -2/3)$.
3266. $(2, 1, 7)$. 3267. $(6, 4, 10)$.

3268. A y C son los máximos, B es el mínimo; en el entorno de D la superficie ofrece la forma de ensilladura, a lo largo de EF la función conserva su valor constante.

3269. $(-2, 0)$, $(16/7, 0)$, cada uno de los puntos es estacionario para una de las ramas de la función.

3270. $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

3271*. $(0, 0)$. Para comprobar que el punto hallado es el del máximo basta presentar la función en la forma $z=10-(x-y)^2-2x^2-y^2$.

3272. $(2, -2)$.

3273. $(-1, 1)$.

3277. En el punto $(6, 4)$ se halla el máximo.

3278. En el punto $(0, 0)$ no existe el extremo. En el punto $(1, 1)$ se halla el mínimo.

3279. Los valores máximos y mínimos se hallan en la frontera del dominio; el máximo es $z=4$ y se halla en los puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$; el mínimo es $z=-4$ y se halla en los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$. El punto estacionario $(0, 0)$ no da extremo.

3280. El valor máximo $z=17$ se halla en el punto $(1, 2)$; el valor mínimo $z=-3$ se halla en el punto $(1, 0)$; el punto estacionario $(-4, 6)$ se encuentra fuera del dominio dado.

3281. El valor máximo $z=4$ se halla en el punto estacionario $(2, 1)$ (de este modo este punto resulta el punto del máximo). El valor mínimo $z=-64$ se halla en el punto $(4, 2)$, en la frontera.

3282. El valor mínimo de la función es $z=0$ y se halla en el punto $(0, 0)$. El valor máximo es $z=3/e$ y se halla en los puntos $(0, \pm 1)$.

3283. $z_{\text{máx}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ en el punto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ (máximo),

$z_{\text{mín}}=0$ en el punto $(0, 0)$ (en la frontera).

3284. Todos los sumandos son iguales entre sí.

3285. Todos los factores son iguales entre sí.

3286. $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$. 3287. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$.

3288. $x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}$. 3289. $(3, \sqrt{39}, 0)$; $(3, -\sqrt{39}, 0)$.

3290. El cubo. 3291. En el punto $(1, 1)$ está el mínimo, $z=2$.

3292. (a, a) ó $(-a, -a)$, $z=a^2$ (el máximo), $(a, -a)$ ó $(-a, a)$, $z=-a^2$ (el mínimo).

3293. $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, $z=-\sqrt{2}/a$ (el mínimo), $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$, $z=\sqrt{2}/a$ (el máximo).

3294. Los puntos estacionarios son $x=-\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{b}{a}$, $y=\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{a}{b}$.

3295. $(3, 3, 3)$, $u=9$ (el mínimo).

3296. Cada una de dos de las variables es igual a 2, la tercera es igual a 1 (el mínimo igual a 4); cada una de dos de las variables es igual a $\frac{4}{3}$, la tercera es igual a $\frac{7}{3}$ $\left(\text{el máximo igual a } \frac{112}{27}\right)$.

3297*. Analizar si la función $\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}$ tiene el mínimo cuando $x_1+x_2+\ldots+x_n=A$. En general, es válida la relación $\frac{\sum x_i^k}{n} \geqslant \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^k$, si $k \geqslant 1$ y $x_i \geqslant 0$.

3299. $u_{\text{mín}}=\frac{abc}{bc+ca+ab}$ para $x=\frac{bc}{bc+ca+ab}$; $y=\frac{ac}{bc+ac+ab}$;

$$z=\frac{ab}{bc+ac+ab}.$$

3300. $u_{\text{máx}}=1$, $u_{\text{mín}}=-\frac{1}{2}$. 3301. $\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$.

3302. $(3, -1, 1)$. 3303. a) $(-2, 0, 0)$; b) $(2, 0, 0)$.

3304. El cubo. 3305. El cubo. 3306. $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

3307. Si R es el radio de la base de la tienda de campaña; H, la altura de la parte cónica; h, la altura de la cúspide cónica, deben verificarse las siguientes relaciones:

$$R=\frac{h\sqrt{5}}{2}, \qquad H=\frac{h}{2}.$$

3308. Si l es el lado del trapecio, b, la base y α, el ángulo de inclinación del lado, deben verificarse las siguientes relaciones:

$l=b=\frac{2\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3^3}}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$, donde A es el área dada de la sección. La superficie lavada es $u=2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{A}\approx 2{,}632\sqrt{A}$.

3309. El cubo.

3310. Cada uno de los lados de la base es igual a $2\alpha+\sqrt[3]{2v}$, la altura es dos veces menor: $\left(\alpha+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}\right)$. 3311. a^3 (el cubo).

3312. El área mínima es igual a $3\sqrt{3}\,ab$.

3313. $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ y $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

3314. $\left(-\frac{5}{9}, -\frac{1}{9}\right)$. 3315. $(3, 5)$. 3316. $z_{\text{máx}}=2$.

3317. Los lados del triángulo son $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$ y $2\sqrt{S}$.

3318. La altura es $\frac{H}{3}$, los lados de la base son $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ y $\frac{2b\sqrt{2}}{3}$, el volumen es $V=\frac{8}{27}abH$.

3319. Es el tetraedro.

3320. La normal a la elipse en el punto buscado debe ser perpendicular a la línea que une los puntos dados.

3321. La normal debe ser trazada en el punto cuyas coordenadas son

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \pm b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right).$$

3322. $\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$; $\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$. 3323. $2\sqrt{2}$.

3324. $x+y=2$; $y=x$. 3325. $x-y+a=0$; $x+y-3a=0$.
3326. $x+2y-1=0$; $2x-y-2=0$.
3327. $x-y+2=0$; $x+y-2=0$. 3328. $(0, 0)$. 3329. $(0,0)$. 3330. $(0, 0)$.
3331. $(a, 0)$. 3332. $(0, a)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$.
3333. $(2, 0)$, $(-2, 0)$. 3334. $(0, 3)$, $(-3, 0)$, $(-6, 3)$.
3335. $(0, 0)$ es el punto doble. 3336. $(0, 0)$ es el punto aislado.
3337. $(0, 0)$ es el punto terminal.
3338. $k\pi$; $k=0, 1, 2, \ldots$ son los puntos de retroceso.
3339. $(a, 0)$ es el punto de retroceso. 3340. $(0, 0)$.
3341. $x=-f'(a)$, $y=f(a)-af'(a)$; $y=x\arcsen x+\sqrt{1-x^2}$.
3342. $16y^3+27x^4=0$. 3342. $y^2=4ax$. 3344. $y=x/2$ e $y=-x/2$.
3345. $y=-x^4/4$. 3346. $y=0$ y $16y=x^4$.
3347. $y=x$ e $y=x-4/27$. La primera ecuación es el lugar geométrico de los puntos singulares; la segunda, la envolvente.

3348. $x^2+\frac{2}{3\sqrt{3}}y^2=0$ y $x^2-\frac{2}{3\sqrt{3}}y^3=0$. 3349. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=d^{\frac{2}{3}}$.

3350. 4 rectas $x\pm y=\pm R$. 3351. $2by(x^2+y^2)+x^3=0$.

3352. Parábola $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

3353. Cicloide $x=\frac{R}{2}(t-\operatorname{sen} t)$, $y=\frac{R}{2}(1-\cos t)$.

3354. Elipse $x^2+\frac{y^2}{2}=R^2$. 3355. Hipérbola $xy=\frac{a}{4}$.

3357. Evoluta de la parábola $y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3$.

3359. Hipérbolas $xy=\frac{1}{2}$ y $xy=-\frac{1}{2}$.

3361. a) $2r\cdot\frac{dr}{dt}=2|r|\cdot\frac{d|r|}{dt}$;

b) $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r\,\frac{d^2r}{dt^2}$; c) $r\times\frac{d^2r}{dt^2}$;

d) $\left(r\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d^3r}{dt^3}\right)$.

3362. De la igualdad $\frac{dr}{dt}=\alpha(t)\,r$ se deduce

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d\alpha}{dt}r+\alpha\frac{dr}{dt}=\left(\frac{d\alpha}{dt}+\alpha^2\right)r=\beta(t)\cdot r,\ \text{etc.}$$

3363. Derivando la igualdad $r^2=$ const (véase el ejercicio 3361) obtenemos $r\cdot\frac{dr}{dt}=0$. La tangente a la línea esférica (o sea, a la línea situada en la esfera) es perpendicular al radio de la esfera trazado al punto de contacto. También se verifica el teorema inverso.

3368. $\frac{dr}{dx}=\frac{dr}{du}\varphi'$; $\frac{d^2r}{dx^2}=\frac{d^2r}{du^2}\varphi'^2+\frac{dr}{du}\varphi''$;

$$\frac{d^3r}{dx^3}=\frac{d^3r}{du^3}\varphi'^3+3\frac{d^2r}{du^2}\varphi'\varphi''+\frac{dr}{du}\varphi'''.$$

3370. De la igualdad $a\frac{dr(\tau)}{dt}=0$, donde $t_1<\tau<t_2$,

se deduce que en la línea cerrada (debido a la igualdad $r(t_1)=r(t_2)$) habrá un punto en el cual la tangente sea perpendicular a cualquier dirección previamente dada.

3371. La hodógrafa de la velocidad $v\{a\cos t,\ a\operatorname{sen} t,\ 2bt\}$ es una hélice, la hodógrafa de la aceleración $w\{-a\operatorname{sen} t,\ a\cos t,\ 2b\}$ es una circunferencia.

3372. La multiplicación escalar por a y por r da: $a\frac{dr}{dt}=0$, $r\frac{dr}{dt}=0$. De donde $ar=$ const, es la ecuación del plano, $r^2=$ const, es la ecuación de la esfera. La trayectoria buscada es una circunferencia cuyo plano es perpendicular al vector a.

3374. Elipse. La velocidad es máxima en el momento en que el punto material se halle al final del semieje menor, y es mínima en el momento en que el punto se halle al final del semieje mayor. La aceleración es máxima (mínima) en el momento en que la velocidad es mínima (máxima).

3375. Componentes de la velocidad $\frac{d\rho}{dt}$; $\rho\frac{d\varphi}{dt}$; $\rho\operatorname{sen}\varphi\frac{d\theta}{dt}$. *Indicación.* Hallar los productos escalares $\frac{dr}{dt}e_\rho$; $\frac{dr}{dt}e_\varphi$; $\frac{dr}{dt}e_\theta$.

3376. $\dfrac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=\dfrac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\dfrac{z-\frac{t^2}{2}}{1}$; $t^2x+ty+z=\frac{t^6}{4}+\frac{t^4}{3}+\frac{t^2}{2}$.

3377. $\dfrac{x-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-a\sqrt{2}}=\dfrac{y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{z-\frac{k}{8}}{\frac{k}{\pi}}$; $-x+y+\frac{k}{\pi a\sqrt{2}}z=\frac{k^2}{8\pi a\sqrt{2}}$.

3378. $x-6a=\frac{y-18a}{6}=\frac{z-72a}{36}$; $x+6x+36z=2706a$.

3379. $\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $x+y+\sqrt{2}\cdot z=\frac{\pi}{2}+4$.

3380. $\frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}$; $12x-4y+3z-12=0$.

3381. $\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4}$; $27x+28y+4z+2=0$.

3382. $\frac{x-x_0}{z_0}=\frac{y-y_0}{z_0}=\frac{z-z_0}{y_0+x_0}$; $\frac{x+y}{x_0+y_0}+\frac{z}{z_0}=2$.

3383. $\frac{x-x_0}{y_0^2z_0^2}=\frac{y-y_0}{x_0^2z_0^2}=\frac{z-z_0}{-x_0^2y_0^2}$; $\frac{x-x_0}{x_0^2}+\frac{y-y_0}{y_0^2}-\frac{z-z_0}{z_0^2}=0$.

3384. $r_0\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ e^{\frac{\pi}{6}}\right\}$.

3385. $6x-8y-z+3=0$; $\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-1}{-1}$; $\frac{x-1}{31}=\frac{y-1}{26}=\frac{z-1}{-22}$.

3386. $\sqrt{b}\,(x-x_0)-\sqrt{a}\,(y-y_0)=0$; $\frac{x-x_0}{\sqrt{b}}=\frac{y-y_0}{-\sqrt{a}}=\frac{z-z_0}{0}$; $\frac{x-x_0}{\sqrt{2az_0}}=$

$$=\frac{y-y_0}{\sqrt{2bz_0}}=\frac{z-z_0}{-(a+b)}.$$

3387. $\frac{1}{e}x-ey-\sqrt{2}z+2=0$; $\frac{x-e}{-\frac{1}{e}}=\frac{y-\frac{1}{e}}{e}=\frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

$$\frac{x-e}{1}=\frac{y-\frac{1}{e}}{1}=\frac{z-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,1}.$$

3389. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{3}$; $2x-y+3z-5=0$;

$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}$; $3x+3y-z-2=0$; $\frac{x-1}{8}=\frac{y}{-11}=\frac{z-1}{-9}$; $8x-11y-9z+1=0$.

3390. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{0}$; $x-y=0$; $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$;

$z=1$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0}$; $x+y-2=0$.

3391. $\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{z-1}{4}$; $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z=4$;

$\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{z-1}{1}$; $\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+z-5=0$;

$$\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{13}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-3}=\frac{z-1}{-4\sqrt{2}};\quad -13x+3y+4\sqrt{2}z+\sqrt{2}=0.$$

3392. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-13}{3}=\frac{z}{6}$; $2x+3y+6z=37$;

$\frac{x+1}{6}=\frac{y-13}{2}=\frac{z}{-3}$; $6x+2y-3z=20$;

$\frac{x+1}{3}=\frac{y-13}{-6}=\frac{z}{2}$; $3x-6y+2z=-81$.

3393. Para cualquier punto de la línea la ecuación del plano osculador es $3x-2y-11=0$, o sea, toda la línea pertenece a este plano.

3394. El plano osculador es el mismo para todos los puntos de la línea. Su ecuación es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

3395. $\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh} t}$. 3396. $R=\sqrt{2}\operatorname{cosec} 2t$.

3398. $k=\sqrt{\frac{(y'z''-z'y'')^2+y''^2+z''^2}{(1+y'^2+z'^2)^3}}$.

3399. $\boldsymbol{\tau}_1=\frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}$, $\boldsymbol{\beta}_1=\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}$, $\boldsymbol{\nu}_1=\frac{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\times\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|\cdot|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}$.

3400. $\boldsymbol{\tau}_1=\boldsymbol{\nu}_1\times\boldsymbol{\beta}_1$; $\boldsymbol{\nu}_1=\boldsymbol{\beta}_1\times\boldsymbol{\tau}_1$; $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\nu}_1$.

3401. El vector buscado $\boldsymbol{\omega}$ (si es que existe) es susceptible de ser presentado en la forma

$$\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{\omega\tau}_1)\,\boldsymbol{\tau}_1+(\boldsymbol{\omega\nu}_1)\,\boldsymbol{\nu}_1+(\boldsymbol{\omega\beta}_1)\,\boldsymbol{\beta}_1. \tag{1}$$

De todos los datos expuestos en el ejercicio (teniendo en cuenta las fórmulas de Frénet) se deduce que

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau}_1=k\boldsymbol{\nu}_1;\quad \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}_1=-k\boldsymbol{\tau}_1+T\boldsymbol{\beta}_1;\quad \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\beta}_1=-T\boldsymbol{\nu}_1. \tag{2}$$

Multiplicando estas igualdades de manera escalar por $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\tau}_1$, respectivamente, obtenemos $\boldsymbol{\omega\tau}_1=T$, $\boldsymbol{\omega\nu}_1=0$, $\boldsymbol{\omega\beta}_1=k$ y, por consiguiente, $\boldsymbol{\omega}=T\boldsymbol{\tau}_1+k\boldsymbol{\beta}_1$. La sustitución en las fórmulas (2) muestra que este vector satisface los datos expuestos en el ejercicio.

3402. $99+\ln 10\approx 101{,}43$. 3403. $a\ln(1+\sqrt{2})=a\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

3404. $\sqrt{3}\,(e^t-1)$. 3405. 5. 3406. $4a$. 3407. $z\sqrt{2}$.

3408. $a\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}-\sqrt{x}}$. 3409. $\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}\ln 3\right)$.

3410. $8x-8y-z=4$; $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-4}{-1}$.

3411. $x+y-z-1=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$. 3412. $z+a=0$, $x=a$, $y=a$.

3413. $17x+11y+5z=60$; $\frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}$.

3414. $x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$.

3415. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$;

$$a\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)=b\left(y-\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)=c\left(z-\frac{c\sqrt{3}}{3}\right).$$

3416. $x+11y+5z-18=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$.

3417. $3x-2y-2z+1=0$; $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-2}$.

3418. $2x+y+11z-25=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{11}$.

3419. $5x+4y+z-28=0$; $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-6}{1}$.

3421. $x-y+2z=\sqrt{\frac{11}{2}}$ y $x-y+2z=-\sqrt{\frac{11}{2}}$.

3422. $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

3424. Todos los planos pasan por el origen de coordenadas.

3425. $x_0x+y_0y+z_0z=a^2$; $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$.

3426. $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=2(z+z_0)$; $\frac{a(x-x_0)}{bx_0}=-\frac{b(y-y_0)}{ay_0}=\frac{z-z_0}{-2ab}$.

3428. $\frac{9}{2}a^2$. **3430.** $2x+y-z=2$. **3434.** $4x-2y-3z+3$.

3435. Es paralelo al plano xOy en los puntos $(0, 3, 3)$ y $(0, 3, -7)$; al plano yOz en los puntos $(5, 3, -2)$ y $(-5, 3, -2)$; al plano xOz en los puntos $(0, -2, -2)$ y $(0, 8, -2)$.

3436. a) $6u_0v_0x-3(u_0+v_0)y+2z+(u_0+v_0)(u_0^2-4u_0v_0+v_0^2)=0$;

b) $3(x_0^2-y_0)x-3x_0(y+y_0)+2z+4z_0=0$.

3437. $2z(x^2+y^2+z^2)+p(x^2+y^2)=0$.

3438. $(x^2+y^2+z^2)^3=27a^3xyz$.

3439. 1) $\{-2, 1\}$; 2) $\{10xy-3y^3, 5x^2-9xy^2+4y^3\}$.

3440. 1) $6\mathbf{i}+4\mathbf{j}$; 2) $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}+\mathbf{j})$; 3) $\frac{-y_0\mathbf{i}+x_0\mathbf{j}}{x_0^2+y_0^2}$.

3441. 1) $\operatorname{tg}\varphi\approx 0{,}342$, $\varphi\approx 18^\circ 52'$; 2) $\operatorname{tg}\varphi\approx 4{,}87$, $\varphi\approx 78^\circ 24'$.

3442. El semieje negativo y.

3443. 1) $\cos\alpha\approx 0{,}99$, $\alpha=8^\circ$; 2) $\cos\alpha\approx -0{,}199$, $\alpha\approx 101^\circ 30'$.

3444. 1) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right)$; 2) Los puntos situados en la circunferencia $x^2+y^2=\frac{2}{3}$.

3447. 1) $\{3x_0^2y_0^2z_0, 2x_0^3y_0z_0, x_0^3y_0^2\}$; 2) $\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, donde $\mathbf{r}$ es el radio vector.

3450. 1) $2r$; 2) $2\frac{r}{|r|}$; 3) $2F'(r^2)\,r$; 4) $a(br)+b(ar)$; 5) $a\times b$.

3451. 1) 0; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\sqrt{5}$; 4) $\frac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{2}$. **3452.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

3453. $\frac{1}{2}$. **3455.** 1) 5; 2) $\frac{98}{13}$. **3456.** -22. **3459.** $\frac{1}{r^2}$.

Al capítulo XII

3460. $M=\iint\limits_D \gamma(x, y)\,d\sigma$. **3461.** $E=\iint\limits_D \sigma(x, y)\,d\sigma$.

3462. $T=\frac{1}{2}\omega^2\iint\limits_D y^2\gamma(x, y)\,d\sigma$.

3463. $Q=(t_2-t_1)\iint\limits_D c(x, y)\,\gamma(x, y)\,d\sigma$.

3464. $M=\iiint\limits_\Omega \gamma(x, y, z)\,dv$. **3465.** $E=\iiint\limits_\Omega \delta(x, y, z)\,dv$.

3466. $8\pi(5-\sqrt{2})<I<8\pi(5+\sqrt{2})$. **3467.** $36\pi<I<100\pi$.

3468. $2<I<8$. **3469.** $-8<I<\frac{2}{3}$. **3470.** $0<I<64$.

3471. $4<I<36$. **3472.** $4<I<8(5-2\sqrt{2})$. **3473.** $4\pi<I<22\pi$.

3474. $0<I<\frac{4}{3}\pi R^5$. **3475.** $24<I<72$.

3476. $28\pi\sqrt{3}<I<52\pi\sqrt{3}$. **3477.** 1. **3478.** $(e-1)^2$.

3479. $\frac{\pi}{12}$. **3480.** $\ln\frac{4}{3}$. **3481.** $\ln\frac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

3482. $\pi-2$. **3483.** 2. **3484.** $-\frac{\pi}{16}$.

3485. $\int\limits_3^5 dx \int\limits_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y)\,dy$. **3486.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\,dy$.

3487. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$. **3488.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^{1-x} f(x, y)\,dy$.

3489. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x, y)\,dy$. **3490.** $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy$.

3491. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{2-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x, y)\,dy.$ **3492.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} f(x, y)\,dy.$

3493. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\,dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{6-x} f(x, y)\,dy.$

3494. $\int\limits_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} dx \int\limits_{1-2x}^{x+3} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dx \int\limits_x^{x+3} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} dx \int\limits_x^{5-2x} f(x, y)\,dy.$

3495. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x, y)\,dy.$

3496. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{2x} f(x, y)\,dy + \int\limits_2^{\frac{9}{2}} dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{2\sqrt{2x}} f(x, y)\,dy +$

$+ \int\limits_{\frac{9}{2}}^{8} dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{24-4x} f(x, y)\,dy.$

3497. $\int\limits_{-3}^{-2} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\,dy +$

$+ \int\limits_2^3 dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy.$

3498. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x, y)\,dy.$ **3499.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3500. $\int\limits_0^r dy \int\limits_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x, y)\,dx.$ **3501.** $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x, y)\,dx.$

3502. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_1^{y} f(x, y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x, y)\,dx.$

3503. $\int_0^4 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x, y)\,dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x, y)\,dx.$

3504. 1) $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y)\,dx$; 2) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y)\,dx$;

3) $\int_0^1 dy \int_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3505. 1) $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x, y)\,dx + \int_2^4 dy \int_{2y-3}^{\frac{y+6}{2}} f(x, y)\,dx$;

2) $\int_1^3 dy \int_{\frac{y+1}{2}}^{\frac{9-y}{2}} f(x, y)\,dx$; 3) $\int_{-1}^3 dx \int_0^{1+\sqrt{3+2x-x^2}} f(x, y)\,dy$;

4) $\int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3506. 1) $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$; 2) 9; 3) $\frac{1}{2}$. **3507.** 0. **3508.** $\frac{33}{140}$. **3509.** $\frac{9}{4}$.
3510. -2. **3511.** $\frac{\pi}{6}$. **3512.** $\frac{4}{135}$. **3513.** 4. **3514.** 3. **3515.** $12\frac{2}{3}$.
3516. $\frac{2}{3}R$. **3517.** 6. **3518.** $\frac{abc(a+b+c)}{2}$. **3519.** $\frac{a^6}{48}$. **3520.** $\frac{a^{11}}{110}$.
3521. $2e-5$. **3522.** $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$. **3523.** $\frac{1}{180}$. **3524.** $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$.

3525. 1) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho$;

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho$;

3) $\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{b\,\mathrm{sen}\,\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3526. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho \operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3527. $\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} d\varphi \int\limits^{b \operatorname{sen}\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho \operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho +$

$$+\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho \operatorname{sen}\rho)\,\rho\,d\rho.$$

3528. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sec\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho \operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3529. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\sqrt{2}\sec\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}^{2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho \operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3530. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho \operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3531. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a \operatorname{sen} 2\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho \operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3532. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{R} f(\rho\cos\varphi,\ \rho \operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3533. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{R}{2\operatorname{sen}\varphi}}^{2R\operatorname{sen}\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho \operatorname{sen}\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3534. $\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{R} f(\rho^2)\,\rho\,d\rho.$ 3535. $\frac{R^2}{2}\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg} R} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi.$

3536. $\frac{\pi}{4}\left[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2\right].$

3537. $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$. 3538. $\pi R^2 h$. 3539. $\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 3540. $\frac{\pi^2}{6}$.

3542. $x=2\rho\cos\varphi,\ y=3\rho\,\text{sen}\,\varphi;\ I=6\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 f(2\rho\cos\varphi,\ 3\rho\,\text{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3543. $x=\rho\cos\varphi,\ y=\sqrt{3}\,\rho\,\text{sen}\,\varphi;$

$$I=\sqrt{3}\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}\cos^2\varphi\,\text{sen}\,\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \sqrt{3}\,\rho\,\text{sen}\,\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

3544. $x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\,\text{sen}\,\varphi;\ I=ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_1^2 f\left(\sqrt{4-\rho^2}\right)\rho\,d\rho.$

3545. $\frac{a^2b^2}{8}$. 3546. $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$. 3547. $\int\limits_0^1 dz\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\text{sen}\,\varphi,\ z)\,\rho\,d\rho.$

3548. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho\,d\rho\int\limits_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\text{sen}\,\varphi,\ z)\,dz.$

3549. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}\,\theta\,d\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta,\ \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\,d\rho.$

3550. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho\,d\rho\int\limits_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\text{sen}\,\varphi,\ z)\,dz.$

3551. $\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}}\rho\,d\rho\int\limits_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\,\text{sen}\,\varphi,\ z)\,dz$ ó

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\text{sen}\,\theta\,d\theta\int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta,\ \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\,d\rho+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}\,\theta\,d\theta\int\limits_0^{2R\cos\theta} f(\rho\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta,\ \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta,\ \rho\cos\theta)\,\rho^2\,d\rho.$$

3552. $\frac{\pi a}{2}$. 3553. $\frac{8}{9}a^2$. 3554. $\frac{4}{15}\pi R^5$. 3555. $\frac{\pi}{8}$.

3556. $\frac{4}{15}\pi(R^5-r^5)$. 3557. $\frac{2\pi}{3}$. 3558. $\pi\left[3\sqrt{10}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}-\sqrt{2}-8\right]$.

3559. $186\frac{2}{3}$. 3560. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$. 3561. $\frac{abc}{6}$. 3562. 12. 3563. $\frac{1}{6}$.

3564. $78\frac{15}{32}$. 3565. $\frac{48}{5}\sqrt{6}$. 3566. 16. 3567. 45.

3568. $13\frac{1}{3}$. 3569. $16\frac{1}{5}$. 3570. $ar^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$. 3571. 22π.

3572. $\frac{16}{3}R^3$. 3573. $12\frac{4}{21}$. 3574. $\frac{4R^5}{15a^2}$. 3575. 27. 3576. $\frac{3}{8}$.

3577. $\frac{88}{105}$. 3578. $\frac{1}{3}abc$. 3579. $\frac{\pi a^3}{4}$. 3580. $2\left(e^2-\frac{2e^3+1}{9}\right)$.

3581. $3e-8$. 3582*. $4e-e^2-1$. El cuerpo es simétrico respecto al plano $y=x$. 3583. $2\left(\pi^2-\frac{35}{9}\right)$. 3584. $\frac{1}{45}$. 3585. $\frac{16}{9}$. 3586. $\frac{\pi}{4}$.

3587. 40π. 3588. 2π. 3589. $\frac{5}{2}\pi R^3$. 3590. $\frac{3}{2}\pi a^3$.

3591. $\frac{4}{3}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$. 3592. $\frac{a^3}{24}$. 3593. $\frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8}+1\right)$.

3594. $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 3595. $\frac{\pi\sqrt{2}}{24}$. 3596. $\frac{\pi^2R^2h}{16}$. 3597. $\frac{1}{2}$.

3598. 2. 3599. πab. 3600. $\frac{ab}{6}$. 3601. $\frac{16}{3}$.

3602*. $\frac{5}{8}\pi a^2$. Pasar a las coordenadas polares. 3603. $\frac{3}{4}\pi$.

3604. $2a^2$. 3605. $\frac{2}{3}$. 3606. $\frac{1}{60}$. 3607. $\frac{1}{1260}$.

3608*. 1) $\frac{a^2b^2}{2c^2}$; 2) $\frac{39}{25}\pi$. Valerse del resultado del ejercicio 3541.

3609. 8. 3610. $\frac{7}{12}$. 3611. $\frac{3}{35}$. 3612. $4(4-3\ln 3)$.

3613*. $\frac{\pi}{2}$. La proyección del cuerpo al plano Oxy es un círculo.

3614. $\frac{\pi}{8}$. Pasar el origen de coordenadas al punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

3615*. $\frac{19}{6}\pi$ y $\frac{15}{2}\pi$. Pasar a las coordenadas cilíndricas.

3616. $\frac{5}{12}\pi R^3$. 3617. $\frac{\pi}{96}$. 3618. $\frac{92}{75}\pi R^3$.

3619*. $\frac{1}{3}\pi a^3$. Pasar a las coordenadas esféricas. 3620. $\frac{a^3}{360}$.

3621. $\frac{4}{21}\pi a^3$. 3622. $\frac{4}{3}\pi a^3$. 3623. $\frac{64}{105}\pi a^3$. 3624. $\frac{\pi^2a^3}{6}$.

3625. $\frac{21(2-\sqrt{2})}{4}\pi$. 3626. 14. 3627. 36. 3628. 8π.

3629. $2\sqrt{2}\,\pi p^2$. 3630*. $2\pi R^2$. Proyectar la superficie sobre el plano Oyz.

3631. $8\sqrt{2}\,ab$. 3632. $\frac{16}{3}(\sqrt{8}-1)$. 3633. $\frac{2\pi}{3}\{(1+R^2)^{\frac{3}{2}}-1\}$.

3634. $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$. 3635. $4\pi a(a-\sqrt{a^2-R^2})$.

3636. $2R^2(\pi-2)$. 3637. $2R^2(\pi+4-4\sqrt{2})$.

3638. $\frac{\pi}{4}\left\{3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2+\sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right\}$. 3639. $\frac{2a^2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$.

3640*. $\frac{\pi R^2}{12}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\approx 3.42\cdot 10^8 km^2$. Pasar a las coordenadas esféricas.

3641. $\frac{16}{3}\pi a^2$. 3642. $8R^2$. 3643. $\frac{ab^2}{2}$. 3644. $\frac{2}{3}R^3$. 3645. πR^3.

3646. $\frac{9}{4}a^3$. 3647. El momento estático es igual a $\frac{ah^2}{6}$.

3648. El centro de gravedad se halla en el eje menor, a la distancia igual a $\frac{4b}{3\pi}$ del eje mayor (b es el eje menor).

3649. $\xi=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}+1)$, $\eta=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(2+\sqrt{2})$.

3650. El centro de gravedad se halla en la bisectriz del ángulo α, a la distancia igual a $\frac{4}{3}R\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ del centro del círculo.

3651. El centro de gravedad se halla en la bisectriz del ángulo α, a la distancia igual a $\frac{4}{3}R\frac{\operatorname{sen}^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\operatorname{sen}\alpha}$ del centro del círculo.

3652. $\xi=\frac{3\pi}{16}$, $\eta=0$. 3653. $\frac{5}{4}\pi R^4$. 3654. $\frac{2}{3}a^4$. 3655. $\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$.

3656. $\frac{ab(a^2+b^2)}{12}$. 3657. $\frac{ah}{48}(a^2+12h^2)$. 3658. $\frac{3\pi R^4}{2}$. 3659. $ah\left(\frac{2h^2}{7}+\frac{a^2}{30}\right)$.

3660*. Seleccionar el sistema de coordenadas de tal modo que el origen de coordenadas coincida con el centro de gravedad de la figura y que uno de los ejes de coordenadas sea paralelo al eje respecto al cual se busca el momento de inercia.

3663. $\frac{a^2bc}{2}\cdot\frac{ab^2c}{2}$ y $\frac{abc^2}{2}$. 3664. $\frac{\pi R^2H^2}{4}$. 3665. $\frac{\pi abc^2}{4}$.

3666. $\xi=\frac{14}{15}$, $\eta=\frac{26}{15}$, $\zeta=\frac{8}{3}$. 3667. $\xi=\frac{3}{8}a$, $\eta=\frac{3}{8}b$, $\zeta=\frac{3}{8}c$.

3668. $\xi=\frac{6}{5}$, $\eta=\frac{12}{5}$, $\zeta=\frac{8}{5}$. 3669. $\xi=\frac{18}{7}$, $\eta=\frac{15}{16}\sqrt{6}$, $\zeta=\frac{12}{7}$.

3670. $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\frac{5a}{83}(6\sqrt{3}+5)$.

3671. $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\frac{3R}{8}(1+\cos\alpha)$.

3672. $\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=\frac{9a}{20}$. 3673. $\xi=\frac{R}{2},\ \eta=\frac{R}{2},\ \zeta=\frac{R}{2}$.

3674. $\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=\frac{55+9\sqrt{3}}{130}$.

3675. $\frac{1}{3}M(b^2+c^2),\ \frac{1}{3}M(c^2+a^2),\ \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$ y $\frac{1}{12}M(a^2+b^2+c^2)$.

3676. $\frac{7}{5}MR^2$. 3677. $\frac{1}{5}M(b^2+c^2),\ \frac{1}{5}M(c^2+a^2),\ \frac{1}{5}M(a^2+b^2)$.

3678. $M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{3}\right)$ y $\frac{M}{12}(H^2+3R^2)$. 3679. $\frac{2}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$.

3680. $\frac{1}{36}\pi R^2H(3R^2+H^2)$. 3681. $\frac{1}{2}M\left(R^2+\frac{1}{6}H^2\right)$. 3682. $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}Mc^2$.

3683. $\frac{M}{2}(R^2+r^2)$. 3684. $\frac{4}{3}a^2$. 3685. $2\pi r(R-r)$.

3686. $\frac{4}{3}\gamma ab^2$. 3687. $2\pi\gamma(R^2-r^2)$. 3688. $\frac{\pi R^2H}{6}(3R^2+2H^2)$.

3689*. $\frac{\pi\gamma h^{n+3}\operatorname{tg}^2\alpha}{n+3}$. Si el eje Oz se toma por el del cono y el origen de coordenadas, por su vértice, la ecuación del cono es $x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\alpha=0$.

3690. $\frac{2}{3}\pi\gamma R^6$. 3691. $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$.

3692*. $\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=\frac{5}{4}R$. Pasar a las coordenadas cilíndricas.

3693*. $\frac{59}{480}\pi R^5$. Véase la indicación al ejercicio anterior.

3694*. Seleccionar el sistema de coordenadas de tal modo que el origen de coordenadas coincida con el centro de gravedad del cuerpo y uno de los ejes de coordenadas sea paralelo al eje respecto al cual se busca el momento de inercia.

3695. $\frac{Mkm}{a^2}$, donde M es la masa de la esfera, y k es la constante gravitacional.

3696*. Valerse del resultado del ejercicio anterior.

3697. $\frac{17}{56}\frac{kM}{R^2}$, k es la constante gravitacional.

3699. El centro de presión se halla en el eje de simetría del rectángulo perpendicular al lado a, a la distancia igual a $\frac{2}{3}b$ del lado situado en la superficie. En el segundo caso (el lado a situado a la profundidad igual a h), la distancia que medie entre el centro de presión y el lado superior será igual a $\frac{2b}{3}\frac{b+\frac{3}{2}l}{b+2l}$, donde $l=\frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$. (Para $l\gg b$ el centro de presión casi coincide con el del rectángulo.)

3700. a) $\frac{h}{2}\operatorname{sen}\alpha$; b) $\frac{3}{4}h\operatorname{sen}\alpha$.

3701. El centro de presión se halla en el eje mayor de la elipse, a la distancia igual a $a+\frac{a^2}{4(a+h)}$ de su extremo superior.

3702*. Seleccionar el sistema de coordenadas de tal modo que uno de los planos de coordenadas coincida con el de la placa y uno de los ejes, con la línea de intersección de la superficie del líquido con el plano de la placa.
3703. Diverge. **3704.** 2π.

3705. $\frac{\pi}{4a^2}$. **3706.** 4. **3707.** 2. **3708.** $\frac{1}{4}$.

3709*. $\frac{\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha}$. Pasar a las coordenadas polares.

3710*. $\frac{1}{2}$. Cambiar el orden de integración.

3711. $\frac{1}{16}$. Véase la indicación al ejercicio anterior.

3712. Converge. **3713.** Diverge. **3714.** Converge.
3715. Diverge. **3716.** No.

3717. $\frac{8}{15}$. **3718.** $\frac{\pi}{16}$. **3719*.** $\pi\sqrt{\pi}$; valerse de la integral de Poisson $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3720. Diverge. **3721.** Converge. **3722.** Diverge.

3723. $\frac{8}{3}\pi R^3\left(\ln R-\frac{1}{3}\right)$. **3724*.** π. (Véase la indicación al ejercicio 3719.) **3725.** $\frac{\pi}{4}$. **3726.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **3727.** $2\pi km\gamma\,(R+H-\sqrt{R^2+H^2})$. La fuerza está dirigida a lo largo del eje del cilindro, k es la constante gravitacional.

3728. $\frac{2\pi km\gamma H}{l}(l-H)$, donde l es la generatriz del cono. La fuerza está dirigida a lo largo del eje del cono.

3729. a) $a=4\gamma_C-3\gamma_0$, $b=\frac{4}{R}(\gamma_C-\gamma_0)$; b) $\frac{4}{3}\pi kR\gamma_C=\frac{kMm}{R^2}$.

3730. Está definida por todas partes excepto $x=0$. **3731.** 3π.

3733. $\frac{b}{8a^4}\left\{\frac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{3}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right\}$.

3734. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\,\ldots\,(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\,\ldots\,(2n-2)}\,\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$ $(n>1)$.

3735. $\frac{(n-1)!}{a^n}$. **3736*.** $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4\,|ab|^3}$. Derivar respecto a a y b y sumar los resultados.

3737. $\ln(1+a)$. **3738.** $\frac{1}{2}\ln(1+a)$.

3739. $\frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{1+a^2})$. **3740.** $\pi(\sqrt{1-a^2}-1)$.

3741. $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$, si $a\geqslant 0$; $-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$, si $a\leqslant 0$.

3742. $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$.

3743. $\pi \arcsen a$. **3744.** $\pi \arcsen a$. **3745.** $\sqrt{\pi a}$.

3746*. $\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$. Derivar respecto a a o respecto a b.

3747*. $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}-\operatorname{arctg}\frac{c}{a}=\operatorname{arctg}\frac{a(b-c)}{a^2+bc}$. Derivar respecto a b o c.

3748. $\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$. 3749*. $\pi\ln\frac{a+b}{2}$. Derivar respecto a a o b.

3750. $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$, si $a>0$; $-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$, si $a<0$;

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg}x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$. 3751*. $\ln\frac{1+\beta}{1+\alpha}$. Efectuar la integración respecto al parámetro n deste α hasta β.

3752. $\sqrt{\pi}(b-a)$. 3753. $\int_0^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}x\,dx}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3755. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. 3756. $\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}$.

3757*. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{\sqrt{x}}\,dx\right]=$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(ax)}{x}\,dx-\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(bx)}{x}\,dx\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Evaluamos la última integral sustituyendo $f(x)$ por sus valores máximo y mínimo en el intervalo $(a\varepsilon, b\varepsilon)$, y pasamos al límite.

3758. $\ln\frac{b}{a}$. 3759. $\ln\frac{b}{a}$. 3760. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$. 3761. $ab\ln\frac{b}{a}$.

3762*. $\frac{3}{4}\ln 3$. Presentando $\operatorname{sen}^3 x$ en forma de la diferencia de los senos de los arcos múltiples, reducimos el problema de este ejercicio al del ejercicio anterior (seleccionando convenientemente a y b).

3763*. Para demostrar las relaciones se puede valerse de dos métodos, a saber: 1) efectuando la integración por partes; 2) cambiando el orden de integración en la integral doble que se obtiene después de sustituir $\Phi(az)$ por la integral.

3764*. Véase la indicación al ejercicio 3763.

3765*. Valerse del segundo método de la resolución del №3763. Para demostrar la segunda relación es necesario analizar la integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}ax\cos(x\operatorname{sen}\theta)}{x}\,dx$$

para $|a|>1$ y $|a|\leqslant 1$. Para ello transformar la expresión del numerador, y tener en cuenta que $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ (integral de Dirichlet).

3767*. En el primer miembro de la igualdad sometida a prueba, poner las expresiones para y' o y'' que se obtienen derivando la integral y respecto al parámetro. Efectuar la integración por partes de uno de los sumandos obtenidos.
3768*. Véase la indicación al ejercicio 3767.
3769*. Véase la indicación al ejercicio 3767.

Al capítulo XIII

3770. $\sqrt{5}\ln 2$. 3771. 24. 3772. $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$. 3773. $2\pi a^{2n+1}$.

3774. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. 3775. $4\pi a\sqrt{a}$.

3776. $\int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1} F(\rho\cos\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$.

3777*. $\frac{\pi a^2}{2}$. Pasar a las coordenadas polares.

3778. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. 3779. $\frac{1}{12}\left[(R^2+4)^{\frac{3}{2}}-8\right]$. 3780. $\frac{8a\pi^3\sqrt{2}}{3}$.

3781. $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$. 3782. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. 3783. $R^2\sqrt{2}$.

3784. $\frac{1}{3}\left\{(x_2^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x_1^2+1)^{\frac{3}{2}}\right\}$. 3785. $8a$.

3786. $\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\arcsen\varepsilon$, donde ε es la excentricidad de la elipse.

3787. $\left(2\pi a^2+\frac{8\pi^3b^2}{3}\right)\sqrt{a^2+b^2}$. 3788. $(1-e^{-t})\sqrt{3}$.

3789. $\left(0,\ \frac{2a}{\pi},\ \frac{b\pi}{2}\right)$. 3790. $\frac{8k\sqrt{2}}{15}\left[(3\pi^2-1)(2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}+1\right]$.

3791. $I_x=I_y=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$, $I_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$.

3792. $3\pi R^2$. 3793. $\frac{\pi p^2}{4}$. 3794. $\frac{11}{3}$. 3795. R^2.

3796. $ka\left(a+\frac{b^2}{2c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right)$, donde $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Para $a=b$ $S=2ka^2$.

3797. $\frac{98}{81}p^2$. 3798. $8R^2$. 3799. $4R^2$. 3800. $\frac{2Im}{a}$.

3801. $\frac{8mI\sqrt{2}}{a}$. 3803. $\frac{2\pi mIa}{b^2}$, donde a y b son los semiejes de la elipse. 3804. $\frac{2\pi mI}{p}$. 3805. $\frac{2\pi mIR^2}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$. Para $R=h\sqrt{2}$.

3806. 3. 3807. $\frac{ab}{2}$. 3808. $-\frac{56}{15}$. 3809. $37\frac{1}{3}$. 3810. 4π.

3811. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{17}{30}$; 4) $-\frac{1}{20}$.

3812. En los cuatro casos la integral es igual a 1.

3813. 0. 3814. $-2\pi ab$. 3815. $-\frac{4}{3}a$. 3816. πa^2.

3817. $\frac{3}{16}\pi R\sqrt[3]{R}$. 3818. 13. 3819. 0. 3820. $3\sqrt{3}$. 3821. $-\frac{\pi R^3}{4}$.

3822. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$. 3823. $\iint\limits_D (y-x)\,e^{xy}\,dx\,dy$.

3824. $\frac{\pi R^4}{2}$. 3825. 1) 0; 2) $-\frac{\pi a^3}{8}$. 3827. $\frac{1}{3}$.

3836*. Aplicar la fórmula de Green al dominio doblemente conexo limitado por el contorno L y y cualquier circunferencia cuyo centro se halle en el origen de coordenadas y que no se corte con el contorno L.

3837. π. 3838. 8. 3839. 4. 3840. $\ln\frac{13}{5}$. 3841. R_2-R_1. 3842. $\frac{10}{3}$.

3843. 0. 3844. $-\frac{9}{2}$. 3845. $u=\frac{x^3+y^3}{3}+C$.

3846. $u=(x^2-y^2)^2+C$. 3847. $u=\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+C$.

3848. $u=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{y}+C$.

3849. $u=\ln|x-y|+\frac{y}{x-y}+\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}+C$.

3850. $u=x^2\cos y+y^2\cos x+C$.

3851. $u=\frac{e^y-1}{1+x^2}+y+C$. 3852. $u=\frac{x-y}{(x+y)^2}+C$.

3853. $n=1$, $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C$.

3854. $a=b=-1$, $u=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$.

3855. $u=\ln|x+y+z|+C$. 3856. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C$.

3857. $\operatorname{arctg} xyz+C$. 3858. $u=\frac{2x}{x-yz}+C$.

3859. $u=\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}+C$. 3860. $u=e^{\frac{y}{z}}(x+1)+e^{yz}-e^{-z}$.

3861. πab. 3862. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 3863. $6\pi a^2$.

3864*. $\frac{3}{2}a^2$. Poner $y=tx$ al pasar al parámetro.

3865. $\frac{1}{60}$. 3866. $\frac{1}{210}$. 3867*. $2a^2$. Poner $y=x\operatorname{tg}t$.

3868*. $\frac{1}{30}$. Poner $y=xt^2$. 3869. FR.

3870. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{17}{12}$; 3) $\frac{3}{2}$ y 1. 3871. a) $\frac{a^2-b^2}{2}$; b) 0. 3872. 0.

3873. $\frac{k\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}\ln 2$ donde k es el coeficiente de proporcionalidad.

3874. $0{,}5\,k\ln 2$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad.

3876. $4\sqrt{61}$. 3877. $\frac{\sqrt{3}}{120}$. 3878. $\frac{\pi R^3}{4}$. 3879. 0.

3880. πR^3. 3881. $\frac{2\pi R^6}{15}$. 3882. $2\pi\,\mathrm{arctg}\,\frac{H}{R}$.

3883. $\frac{2\pi R}{c(n-2)}\left[\frac{1}{(c-R)^{n-2}}-\frac{1}{(c+R)^{n-2}}\right]$ para $n\neq 2$;

$\frac{2\pi R}{c}\ln\frac{c+R}{c-R}$ para $n=2$.

3884. $\pi\left[R\sqrt{R^2+1}+\ln\left(R+\sqrt{R^2+1}\right)\right]$.

3885*. π^2R^3. Valerse de las coordenadas esféricas.

3886. $\frac{8}{3}\pi R^4$. 3887. 3. 3888. $\frac{2\pi R^7}{105}$. 3889. $\frac{4}{3}\pi abc$. 3890. 0.

3891. $\frac{1}{8}$. 3892. $R^2H\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi H}{8}\right)$. 3893. $\frac{\pi}{8}$.

3894. $2\iint\limits_S (x-y)\,dx\,dy+(y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dx\,dz$.

3895. $-\frac{\pi R^6}{8}$. 3896. $2\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$.

3897. $\iiint\limits_\Omega \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$. 3898. 0. 3899. $\frac{12}{5}\pi R^5$.

Al capítulo XIII

3901. $1+y^2=C(1-x^2)$. 3902. $x^2+y^2=\ln Cx^2$.

3903. $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$. 3904. $y=C\,\mathrm{sen}\,x-a$. 3905. $Cx=\frac{y-1}{y}$.

3906. $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C$. 3907. $\sqrt{1-y^2}=\mathrm{arcsen}\,x+C$.

3908. $e^t=C(1-e^{-S})$. 3909. $10^x+10^{-y}=C$.

3910. $\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{y}{4}\right|=C-2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$. 3911. $t=\frac{1}{a}\left(l+\frac{b\cdot l^{1-n}}{1-n}\right)$.

3912. $t=\frac{v^2}{2\sqrt{k_1k_2}}\ln\frac{\sqrt{k_1}(1-x)+x\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}(1-x)-x\sqrt{k_2}}$.

3913. $y=e^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$. 3914. $y=\frac{1+x}{1-x}$. 3915. $\cos x=\sqrt{2}\cos y$.

3916. $y=\frac{b+x}{1+bx}$. 3917. Hipérbola $xy=6$.

3918. Tractriz $y=\sqrt{4-x^2}+2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$.

3919. Parábolas $y^2=Cx$. 3920. $y^k=Cx$. 3921. $y=e^{\frac{x-a}{a}}$.

3922. $(x-C)^2+y^2=a^2$. 3923. $y=\frac{1}{k}\ln|C(k^2x^2-1)|$. 3924. $x=y^n$.

3925. $\approx 2{,}7\ \frac{m}{s}$. 3927. $0{,}467\ \frac{km}{hora}$; 85,2 m.

3928. $H=\left[\sqrt{h}-\frac{\sqrt{2g}}{4S}qT\right]^2$. 3929. $\ln\left|\frac{\theta_0-\theta_1}{\theta-\theta_1}\right|=\frac{k_0}{2}(2t+\alpha t^2)$.

3930*. Si t es el tiempo calculado a partir de la medianoche y expresado en horas, la ecuación diferencial ofrece la siguiente forma

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}}=k\cos\frac{\pi(t-12)}{12}\,dt; \text{ de donde } S=\frac{160\,000}{\left[9-\operatorname{sen}\frac{\pi(t-12)}{12}\right]^2}.$$

La función $S(t)$ está definida para $6\leqslant t\leqslant 18$.

3931. $x+\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=C$. 3932. $4y-6x-7=Ce^{-2x}$.

3933. $x+C=2u+\frac{2}{3}\ln|u-1|-\frac{8}{3}\ln(u+2)$, donde $u=\sqrt{1+x+y}$.

3934. $y-2x=Cx^3(y+x)$. 3935. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$.

3936. $\ln|y|+\frac{x}{y}=C$. 3937. $x^2+y^2=Cy$. 3938. $y=\pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$.

3939. $x^2=C^2+2Cy$. 3940. $e^{\frac{y}{x}}=Cy$. 3941. $\ln|Cx|=-e^{-\frac{y}{x}}$.

3942. $y=xe^{1+Cx}$. 3943. $(x+y)^2=Cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}$.

3944. $Cx=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. 3945. $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

3946. $y^3=y^2-x^2$. 3947. $y=-x$. 3948. $y^2=5\pm 2\sqrt{5}\,x$.

3949. Si $\frac{y}{x}=u$, ó $\ln|x|=\int\frac{du}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}$; $\varphi(u)=-\frac{1}{u^2}$ ó $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=$ $=-\frac{y^2}{x^2}$. 3950. $x=Ce^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}$. 3951. $x=y\ln|Cy|$. 3952. $x^2=2Cy+C^2$.

3953*. Presenta la forma del paraboloide de revolución. Sea el plano Oxy el plano meridiano de la superficie del espejo. La línea buscada pertenece a este plano. La ecuación diferencial se obtiene si igualamos los tangentes de los ángulos de incidencia y de reflexión expresados mediante x, y, y'.

3954. $y=Ce^{-2x}+2x-1$. 3955. $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$.

3956. $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$. 3957. $y=(x+C)(1+x^2)$.

3958. $y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{sen} x)$.

3959. Si $m\neq -a$, se tiene $y=Ce^{-ax}+\frac{e^{mx}}{m+a}$; si $m=-a$, se tiene $y=$ $=(C+x)e^{mx}$.

3960. $y^2-2x=Cy^3$. 3961. $x=Ce^{2y}+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$.

3962. $x=y\ln y+\frac{C}{y}$. 3963. $y=e^x\left(\ln|x|+\frac{x^2}{2}\right)+Ce^x$.

3964. $y=Ce^{-\Phi(x)}+\Phi(x)-1$. 3965. $y=\frac{x}{\cos x}$.

3966. $y=\frac{e^x+ab-e^a}{x}$. 3967. $y=\frac{x}{x+1}(x-1+\ln|x|)$.

3968. $x=-t\operatorname{arctg} t$. 3969. b) $\alpha+\beta=1$. 3971. $y=Cx-x\ln|x|-2$.

3972*. $y=Cx\pm\frac{a^2}{2x}$. La ecuación diferencial del ejercicio es $|xy-x^2y'|=a^2$.

3973*. $x=Cy\pm\frac{a^2}{y}$. La ecuación diferencial del ejercicio es $\left|xy-y^2\frac{dx}{dy}\right|=2a^2$.

3974. $v=\frac{k_1}{k}\left(t-\frac{m}{k}+\frac{m}{k}e^{-\frac{ht}{m}}\right)$.

3975. $v=(v_0+b)e^{-at^2}+b(at^2-1)$, donde $a=\frac{k_1}{2m}$; $b=\frac{2km}{k_1^2}$.

3976. $\theta-\theta_0=e^{-kt}\int\limits_0^t\varphi(t)e^{kt}\,dt$. 3977. 9,03 a.

3978. $I=\frac{E_0}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\left[\omega Le^{-\frac{Rt}{L}}+R\operatorname{sen}\omega t-\omega L\cos\omega t\right]$.

3979. $x=Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. 3980. $y=Cx^2+\frac{1}{x}$.

3981. $y=\frac{C}{x}\sqrt{x^2+1}+\frac{(1+x^2)^2}{3x}$. 3982. $y=Cx-1$.

3983. $(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$. 3984. $(x+y)^2(2x+y)^3=C$.

3985. $x=Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$. 3986. $\operatorname{sen}\frac{y}{x}=Cx$.

3987. $\operatorname{sen}\frac{y}{x}+\ln|x|=C$. 3988. $y=Ce^{-e^x}+e^x-1$.

3989. $y(y-2x)^3=C(y-x)^2$. 3990. $y=Ce^{\operatorname{sen}y}-2(1+\operatorname{sen}y)$.

3991. $x=y^2(1+Ce^{\frac{1}{y}})$. 3992. $y=Ce^{-\operatorname{sen}x}+\operatorname{sen}x-1$.

3993. $y=(C+e^x)(1+x)^n$. 3994. $y^4=4xy+C$.

3995. $y=C\cdot e^x$ e $y=C+\frac{x^2}{2}$.

3996*. $y^2=\frac{2}{3}\operatorname{sen}x+\frac{C}{\operatorname{sen}^2x}$. Reducir a la ecuación lineal respecto a $z=y^2$.

3997. $\operatorname{arctg}(x+y)=x+C$. 3999. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln(x^2+y^2)=\frac{\pi}{4}+\ln 2$.

4000. $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,[2+x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen} x]$.

4001. $(1+y)\,e^{-y}=\ln\frac{1+e^x}{2}+1-x$. 4002. $y=\frac{5}{3}\,e^{x^2}-\frac{1}{3}\,(2+x^3)$.

4004. $y=\frac{1}{2k}\,[e^{kx+C}+e^{-(kx+C)}]$. 4005. $x^2+y^2=Cx$.

4006. $(y-x)^2\,(x+2y)=1$. 4007. Parábolas $y=x+Cx^2$.
4008. $(2y^2-x^2)^3=Cx^2$. 4009. Catenaria. 4010. $y=Cx^2$.

4011*. Haz de rectas $y-y_0=C\,(x-x_0)$. La ecuación diferencial es $y-y_0=y'\,(x-x_0)$.

4012. Circunferencia cuyo centro se halla en el punto $(x_0,\ y_0)$: $x^2+y^2=2\,(xx_0+yy_0)$.

4013. Cualquier circunferencia cuyo centro se halle en el eje Oy y que toque el eje Ox.

4014. Si el trayecto es S y el tiempo t, se tiene $S=S_0+Ce^{-k_2t}-\frac{k_1}{k_2^2}\,t+\frac{k_1}{2k_2}\,t^2$, donde S_0 es el trayecto inicial, y k_1 y k_2 son coeficientes de proporcionalidad.

4016. 1) $\frac{8}{9}$ vueltas por segundo; 2) al cabo de 6 *min* 18 *s*. 4017. 0,00082 *s*.

4018*. $v=v_0\left(1-\frac{m}{M_0}\,t\right)^{-1}e^{-\frac{3f_0}{mv_0}\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{m}{M_0}\,t}\right)}$.

La fuerza efectiva F es igual a $\frac{d\,(m\cdot v)}{dt}$. Para resolver el problema de este ejercicio y los dos siguientes es necesario tener en cuenta que la masa m es una magnitud variable que depende del tiempo t. La velocidad v es la función buscada.

4019*. $v=\frac{g}{2m-k}\,(M_0-mt)\left[\left(1-\frac{m}{M_0}\,t\right)^{\frac{k}{m}-2}-1\right]$. Véase la indicación al ejercicio 4018.

4020*. $v=\frac{g}{\mu}\,e^{k_1\mu^{2/3}}\int\limits_0^1\mu e^{-k_1\mu^{2/3}}dt$, donde $\mu=M_0-mt$, $k_1=\frac{3k}{m}\times\sqrt[3]{\frac{9\pi}{2\gamma^2}}$. Véase la indicación al ejercicio 4018.

4021*. $y=m_0+\frac{m_0}{k_1-k_2}\,(k_2e^{-k_1t}-k_1e^{-k_2t})$, donde t es el tiempo, y es la cantidad del segundo producto. Si x es la cantidad del primer producto formado al cabo de t unidades del tiempo, se tiene $\frac{dx}{dt}=k_1\,(m_0-x)$. De donde hallamos $x=x\,(t)$. La velocidad $\frac{dy}{dt}$ de la formación del segundo producto es proporcional a la magnitud $x-y$.

4022. 2,97 *kg* de la sal. El máximo se obtiene para $t=33\,\frac{1}{3}$ *min* y es igual a 3,68 *kg*.

4023. $I = 1 + (I_0 - 1)\,e^{-t^2}$. 4024*. $p = \dfrac{p_0 l e^{h\omega^2 x^2}}{\int\limits_0^l e^{h\omega^2 x^2}\,dx}$, donde $k = \dfrac{M}{2p_0 lS}$.

Tiene importancia práctica el caso en que ω es muy grande (el caso de una centrífuga). En vez de calcular la integral en el denominador siendo dada ω (no puede ser expresada en funciones elementales) calculan $\lim\limits_{\omega\to\infty} p$ (véase el ejercicio 2439). La ecuación diferencial del problema presenta la forma

$$S\,dp = \omega^2 x\,dm,$$

donde dm es la masa del elemento CD. Luego, $\gamma = 2kp$ (una de las formas de la ley de Boyle—Mariotte; el coeficiente de proporcionalidad viene designado por $2k$ para simplificar la notación más abajo); $dm = \gamma S\,dx = 2kpS\,dx$. Como resultado obtenemos la ecuación con variables separables

$\dfrac{dp}{p} = 2k\omega^2 x\,dx$. Efectuando su integración, obtenemos $p = Ce^{h\omega^2 x^2}$. Luego, $M = \int\limits_0^M dm = C\cdot 2kT\cdot\int\limits_0^l e^{h\omega^2 x^2}\,dx$, de donde se halla C. Tenemos:

$$p = \frac{Me^{h\omega^2 x^2}}{2kS\int\limits_0^l e^{h\omega^2 x^2}\,dx},\ \text{pero}\ \gamma_0 = 2kp_0 = \frac{M}{lS},\quad k = \frac{M}{2p_0 lS}$$

y, definitivamente,

$$p = \frac{p_0 l e^{h\omega^2 x^2}}{\int\limits_0^l e^{h\omega^2 x^2}\,dx}.$$

4025. $(x+y-1)^3 = C(x-y+3)$. 4026. $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.

4027. $y - 2y + \ln|x+y| = C$. 4028. $e^{+2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y+2}{x-3}} = C(y+2)$.

4029. $y^2 = x + (x+1)\ln\dfrac{C}{x+1}$. 4030. $y^2 e^{-\frac{y^2}{x}} = C$.

4031. $y = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{tg}\ln|Cx|$. 4032. $x^2y^2 + 1 = Cy$. 4033. $Cx = 1 - \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

4034. $(1 + Cx)\,e^y = 1$. 4035. $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$.
4036. $x^2 + y^2 = C(y-1)^2$. 4037. $y = x\,\mathrm{tg}\,(x + C)$.

4038. $\dfrac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$. 4039. $y = \dfrac{1}{(1+x)\,[C + \ln|1+x|]}$.

4040. $ny^n = Ce^{\frac{-nx}{a}} + nx - a$. 4041. $x^2 = y^2(C - y^2)$.
4042. $y(1 + \ln x + Cx) = 1$. 4043. $y(x + C) = \sec x$.
4044. $y = \left(\dfrac{C + \ln|\cos x|}{x} + \mathrm{tg}\,x\right)^2$. 4045. $y = \dfrac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$.

4046. $y^2 = Ce^{\frac{-2a}{x}} - \dfrac{b}{a}$. 4047. $y = \dfrac{\varphi(x)}{x + C}$.

4048. 1) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$; 2) $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1$. 4049. $\frac{\rho-k}{\rho}=\frac{(\rho_0-k)\varphi}{\rho_0\varphi_0}$.

4050. $x^4-x^2y^2+y^4=C$. 4051. $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$.

4052. $xe^y-y^2=C$. 4053. $x^y=C$. 4054. $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$.

4055. $\operatorname{tg}(xy)-\cos x-\cos y=C$.

4056. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}+x-\frac{1}{2}y^2=C$.

4057. $\operatorname{sen}\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=C$.

4058. $x-\frac{y}{x}=C$. El factor integrante es $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$.

4059*. $x^2+\frac{2x}{y}=C$. Buscar el factor integrante en forma de la función $\mu(y)$.

4060. $(x^2+y^2)e^x=C$. 4061. $\frac{y^2}{2}+\frac{\ln x}{y}=C$.

4062. $(x\operatorname{sen}y+y\cos y-\operatorname{sen}y)e^x=C$. 4064. $\mu=y^{-n}e^{-(n-1)\int P(x)dx}$.

4065. La expresión $\frac{Y'x-X'y}{X-Y}$ debe ser la función de $(x+y)$.

4066. La expresión $\frac{Y'x-X'y}{xX-yY}$ debe ser la función de xy.

4067. $abx+b^2y+a+bc=Ce^{bx}$. 4068. $y=\left[Ce^{\frac{(m-1)bx}{a}}-\frac{c}{b}\right]^{\frac{1}{1-m}}$.

4069. $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$.

4070. $\frac{2x}{x-y}+\ln|x+y|+3\ln|y-x|=C$.

4071. $x+y=a\operatorname{tg}\left(C+\frac{y}{a}\right)$. 4072. $y^3-3xy=C$.

4073 $x^2-y^2=Cy^3$. 4074. $3x^2y+x^3y^3=C$.

4075. $y\left(x^2+\frac{1}{3}y^2\right)=Ce^{-x}$. 4076. $\ln|1+y|-\frac{1+y}{x}=C$.

4077. $y^2-1+Cxy=0$. 4078. $\frac{xy}{x-y}+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C$.

4079. $3\sqrt{y}=C\sqrt[4]{x^2-1}+x^2-1$. 4080. $y=\operatorname{sen}x+C\cos x$.

4081. $y=\frac{2e^x}{C+e^x(\cos x+\operatorname{sen}x)}$. 4082. $\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}x}=C$.

4083. $xe^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}=C$. 4084. $xy\cos\frac{y}{x}=C$. 4085. $\operatorname{sen}y=x-1+Ce^{-x}$.

4086. $y=\frac{\operatorname{tg}x+\sec x}{C+\operatorname{sen}x}$. 4087. $\ln|Cx|=-e^{-\frac{x^2+y^2}{x}}$. 4088. $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$.

4089. $y = x \ln|Cx|$. 4090. $y^2 - by - axy = C$.

4091. La circunferencia $x^2 + y^2 - \frac{2k}{k+1}(ax+by) = C$ $(k \neq -1)$ o la circunferencia $x^2 + y^2 - \frac{2k}{k-1}(ax+by) = C$ $(k \neq 1)$; si $k = -1$ ó $k = 1$, es la recta $ax + by = C$.

4092. Las espirales logarítmicas

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\pm \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

4093*. $y^2 = \frac{x^4 + C^4}{2x^2}$. La ecuación diferencial del ejercicio es $y^2 = x(x - yy')$.

4094. $I = \frac{t}{2}$.

4095. El vector del campo en cada punto es perpendicular al radio polar del punto. Las curvas integrales es una familia de circunferencias concéntricas cuyo centro se halla en el origen de coordenadas. La ecuación de la familia es $x^2 + y^2 = C$. Las isóclinas son una familia de rectas que pasan por el origen de coordenadas.

4096. 1) $y' = f(x \cdot y)$; 2) $y' = f\left(\frac{y^2}{x}\right)$; 3) $y' = f(x^2 + y^2)$.

4097. Las rectas $y = Cx$. El resultado puede ser presentado en forma del teorema geométrico siguiente: si cruzamos una familia de parábolas que tienen un eje común y un vértice común, por una recta que pase por el vértice, las tangentes a diferentes parábolas en los puntos de su intersección con la recta, son paralelas entre sí.

4099. $y' = \frac{ay+b}{x} + C$; $y' = ay + bx + C$.

4103. Para $\Delta x = 0{,}05$ $y \approx 0{,}31$. 4104. Para $\Delta x = 0{,}05$ $y \approx 1{,}68$.

4105. La solución exacta es $y = e^{\frac{x^2}{4}} = f(x)$; $f(0{,}9) = 1{,}2244$. La solución aproximada es $f(0{,}9) = 1{,}1942$. El error relativo es igual a $\sim 2{,}5\%$.

4106. Para la solución exacta $x = \sqrt[3]{3(e-1)} \approx 1{,}727$; dividiendo el intervalo en 4 partes y efectuando la integración numérica obtenemos $x \approx 1{,}72$.

4107. $y_2 = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{63}x^7$.

4108. $-1{,}28$. 4109. $y = 1 + x + x^2 + 2x^3 + \frac{13}{4}x^4 + \ldots$

4110. $y = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

4111. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7 \cdot 9}x^7 - \frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 27}x^{11} - \ldots$

4112. $y = 1 + 2x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \ldots$

4113. $y = 0$. 4114. $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$

4115. $y = -\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^6}{6!} - \ldots$

4116. $y=1+(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{2(x-1)^3}{3!}+\frac{4(x-1)^4}{4!}-\frac{60(x-1)^5}{5!}+\ldots$
4117. $y=Cx+C^2$; la integral singular es $x^2+4y=0$.
4118. $y=Cx-3C^3$; la integral singular es $9y\pm 2x\sqrt{x}=0$.
4119. $y=Cx+\frac{1}{C}$; la integral singular es $y^2=4x$.
4120. $x=Cx+\sqrt{1+C^2}$; la integral singular es $x^2+y^2=1$.
4121. $y=Cx+\operatorname{sen} C$; la solución singular es $y=x(\pi-\arccos x)+\sqrt{1-x^2}$.
4122. $x=Cx-\ln C$; la solución singular es $y=\ln x+1$.
4123. $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$; la solución singular es $y=0$.
4124. $y=Cx^2+\frac{1}{C}$; la integral singular es $y^2-4x^2=0$.
4125. $2Cx=C^2-y^2$; la integral singular no existe.
4126. $x=Ce^{-p}+2(1-p)$, $y=x(1+p)+p^2$; la integral singular no existe.
4127. $y=Cx-e^C$; la solución singular es $y=x(\ln x-1)$.
4128. $y=Cx+C+C^2$; la solución singular es $y=-\frac{1}{4}(x+1)^2$.
4129. $y=Cx+a\sqrt[3]{1-C^3}$; la integral singular es $\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}=\sqrt{a^3}$.
4130. $(C-x)y=C^2$; la solución singular es $y=4x$.
4131. $y^2-4e^x=0$. 4132. $xy=1$.
4133. $2y-x^2=0$.
4135. La hipérbola equilátera $2xy=\pm a^2$, donde a^2 es el área del triángulo; la solución trivial es cualquier recta de la familia $y=\pm\frac{C^2}{2}x+aC$.
4136. $(y-x-2a)^2=8ax$. 4137. Elipses e hipérbolas.
4138. $x=\frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}(1+p^2)}{p^2}$, $\quad y=\frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}}{p}$, ó $x=\frac{(p^2+1)C}{\sqrt{p}\sqrt[4]{(p^2+2)^3}}$,

$$y=\frac{-C\sqrt{p}}{\sqrt[4]{(p^2+2)^3}}.$$

4139. $y^2=Cx^{-\frac{1}{k}}+\frac{k^2x^2}{2k+1}$.

4140*. $\begin{cases} y=\cos\alpha\left(C+\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\alpha\right) \\ x=\operatorname{sen}\alpha\left(a-C-\frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\alpha\right)\end{cases}$

En la ecuación diferencial obtenida poner $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha$, luego, expresar x mediante y y el parámetro α, hallar dx, sustituir dx por $\frac{dy}{\operatorname{tg}\alpha}$, y resolver la ecuación deferencial así obtenida, considerando y como función de α.
4141. $S=at^2$, donde a es cierta constante definida.
4142. $x^2+y^2=2a^2=\ln|Cx|$. 4143. $y=Ce^{-\frac{x}{2}}$.
4144. $y=C(x^2+y^2)$. 4145. $(x^2+y^2)^2=C(y^2+2x^2)$.

4146. Si el parámetro de las parábolas es igual a $2p$ y la recta es considerada como el eje de ordenadas, las ecuaciones de las trayectorias son:

$$y=C+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x^3}{p}}.$$

4147. Tractrices.

4148. Marcando el ángulo α en una de las dos posibles direcciones obtenemos la ecuación de la familia

$$xy-\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2)=C.$$

4149. Marcando el ángulo α en una de las dos posibles direcciones obtenemos la ecuación de la familia

$$\ln(2x^2+xy+y^2)+\frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+2y}{x\sqrt{7}}=C.$$

4150*. Se puede admitir, por ejemplo, que el viento pasa a lo largo del eje Ox. Las líneas de la propagación del sonido por el plano Oxy son trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $(x-at)^2+y^2=(v_0t)^2$, donde t es el tiempo transcurrido después de salir la onda sonora de la fuente, y v_0 es la velocidad del sonido en el aire inmóvil.

Para cualquier t fijada la ecuación diferencial de las trayectorias buscadas es $y'=\frac{y}{x-at}$ junto con la ecuación de la familia de circunferencias.

Excluyendo t obtenemos cierta ecuación de Lagrange. Su solución general es

$$x=C(\cos\varphi+b)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{b}},$$

$$y=C\operatorname{sen}\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{b}},$$

donde $b=\pm\frac{a}{v_0}$, φ es el parámetro.

4151. $x=C\operatorname{sen}t+R(\cos t+t\operatorname{sen}t)$, $y=-C\cos t+R(\operatorname{sen}t-t\cos t)$.

4152. $x=\frac{C}{\operatorname{ch}t}+a(t-\operatorname{th}t)$, $y=C\operatorname{th}t+\frac{a}{\operatorname{ch}t}$.

4153. $x=a(\cos t+t\operatorname{sen}t)-\cos t\left(\frac{at^2}{2}+C\right)$,

$$y=a(\operatorname{sen}t+t\cos t)-\operatorname{sen}t\left(\frac{at^2}{2}+C.\right)$$

4154. $x=C\operatorname{sen}t+2\operatorname{tg}t$, $y=\operatorname{tg}^2t-C\cos t-2$.

4155. $y=\frac{x^3}{6}-\operatorname{sen}x+C_1x+C_2$.

4156. $y=\frac{\operatorname{arctg}x}{2}(x^2-1)-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$.

4157. $y=\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{3}{2}\right]+C_1x+C_2$.

4158. $y=C_1x^2+C_2$.

4159. $y=C_1e^x+C_2-x-\frac{x^2}{2}$. 4160. $y=\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2$.

4161. $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$.

4162. $y=(C_1x-C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$. 4163. $y=\frac{1}{12}(y+C_1)^3+C_2$.

4164. $y=\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2$.

4165. $y=-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}\right)+C_2$.

4166. $(x+C_2)^2=4C_1(y-C_1)$.

4167. $y=C_1(x+C_2)^{\frac{2}{3}}$. 4168. $y=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2e^{-\frac{x}{a}}$.

4169. $x=\frac{4}{3}(y^{\frac{1}{2}}-2C_1)\sqrt{y^{\frac{1}{2}}+C_1}+C_2$. 4170. $y=\frac{x+C_1}{x+C_2}$.

4171. $(x+C_2)^2-y^2=C_1$. 4172. $y=C_1e^{C_2x}$.
4173. $y\cos^2(x+C_1)=C_2$. 4174. $(x+C_2)\ln y=x+C_1$.

4175. Si la constante arbitraria introducida por la primera integración, es positiva $(+C_1^2)$, se tiene $y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$; si es negativa $(-C_1^2)$, se tiene

$$y=C_1\frac{1+e^{2(C_1x+C_2)}}{1-e^{2(C_1x+C_2)}}=-C_1\operatorname{cth}(C_1x+C_2);$$

si $C_1=0$, se tiene $y=-\frac{1}{1+C_2}$.

4176. $x=C_1+\cos C_2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y+C_2}{2}\right|$. 4177. $C_1x+C_2=\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$.

4178. $\frac{x+C_2}{2}=C_1\operatorname{arctg}(C_1\ln y)$, $C_1>0$.

4179. $\ln|C_1y|=2\operatorname{tg}(2x+C_2)$.

4180. $y=\ln|x^2+C_1|+\frac{1}{\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right|+C_2$, si $C_1<0$,

o $y=\ln|x^2+C_1|+\frac{2a}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{C_1}}+C_2$, si $C_1>0$.

4181*. Después de efectuar la sustitución $y'=p$ la ecuación se divide en dos una de las cuales pertenece al tipo de Clairaut. Su solución general es $y=$ $=C_1+C_2e^{C_1x}$, y las soluciones singulares son

$$y=\frac{4}{C-x}.$$ La otra ecuación es $y'=0$.

4182. $y=C_1x(x-C_1)+C_2$, y las soluciones singulares son $y=\frac{x^3}{3}+C$.

4183. $y^2=C_1x^4+C_2$. 4184. $x=\ln\left|\frac{C_1x^{C_1}}{C_2-x^{C_1}}\right|$.

4185. $y=\sqrt{\frac{1}{3}x^3+C_1x+C_2}$. 4186. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$.

4187. $y=C_1xe^{\frac{C_2}{x}}$. 4188. $\ln|y+C_1|+\frac{C_1}{y+C_1}=x+C_2$.

4189. $y=x^3+3x+1$. 4190. $y=2+\ln\frac{x^2}{4}$.

4191. $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\frac{16}{5}$. 4192. $y=\frac{4}{(x+4)^2}$.

4193. $y-x=2\ln|y|$. 4194. $y=\sqrt{2x-x^2}$.

4195. $y=\sqrt{1+e^{2x}}$. 4196. $y=-\ln|1-x|$. 4197. $y=\frac{x+1}{x}$.

4198*. $y=x$. Efectuar la sustitución $y=ux$. 4199. $y=2e^{\frac{1}{2}x^2}-1$.

4200*. La ecuación diferencial de la línea es $dx=\frac{dy}{\sqrt{(C_1y)^{\frac{2}{k}}-1}}$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. Si $k=1$, se tiene $y=$ $=\frac{1}{2C_1}[e^{C_1x+C_2}+e^{-(C_1x+C_2)}]=\frac{\operatorname{ch}(C_1x+C_2)}{C_1}$, es una catenaria. Si $k=-1$, se tiene $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$; es una circunferencia. Si $k=2$, se tiene $(x+C_2)^2=$ $=4C(y-C_1)$; es una parábola. Si $k=-2$, se tiene $dx=\sqrt{\frac{C_1y}{1-C_1y}}\,dy$; es la ecuación diferencial de la cicloide.

4201. $e^{\frac{y}{a}}=C_2\sec\left(\frac{x}{a}+C_1\right)$. 4202. $Cx=y^{2k-1}$.

4203. Catenaria. 4204. $v=\sqrt{\frac{mgv_0^2}{mg+kv_0^2}}$. 4205. Parábola.

4206. $S=\frac{m}{3k}\left[\sqrt{\left(\frac{2k}{m}t+C\right)^3}-\sqrt{C^3}\right]$.

4207*. Que el eje de abscisas esté dirigido verticalmente hacia abajo, el origen de coordenadas esté a la superficie del líquido, la ecuación del rayo, $y=f(x)$. A la profundidad x tenemos $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+d\alpha)}=\frac{m+dm}{m}$, donde m es el índice de refracción a la profundidad x, α es el ángulo formado entre la vertical y la tangente al rayo de luz. Es evidente que $\operatorname{tg}\alpha$ es igual a y'. Después de abrir los paréntesis en la ecuación $m\operatorname{sen}\alpha=(m+dm)(\operatorname{sen}\alpha\cos d\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}d\alpha)$ y suprimir las infinitesimales de orden superior a uno, obtenemos: $md\alpha=$ $=-dm\operatorname{tg}\alpha$, de donde $\frac{dm}{m}=-\frac{dy'}{y'(1+y'^2)}$. Efectuando la integración de esta ecuación hallamos y' como función de m. Sustituyendo m por su expresión mediante x e integrando la segunda vez, obtenemos la solución:

$$y=\frac{m_0h\operatorname{sen}\alpha_0}{m_2-m_1}\ln|m+\sqrt{m^2-m_0^2\operatorname{sen}^2\alpha_0}|+C,$$

donde $m=\frac{(m_2-m_1)x+m_1h}{h}$.

4208. $y=x^2\ln\sqrt{x}+C_1x^2+C_2x+C_3$

4209. $y=-\frac{1}{8}\operatorname{sen}2x+C_1x^2+C_2x+C_3$.

4210. $y=\frac{e^{ax}}{a^{10}}+P_9$ (P_9 es el polinomio de noveno grado respecto a x con coeficientes arbitrarios).

4211. $y=C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3-C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|$.

4212. $y=C_1x^5+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5$.

4213. $y=\frac{1}{3}(C_1-2x)^{\frac{3}{2}}+C_2x+C_3$.

4214. $x=C_1y^2+C_2y+C_3$.

4215. Las soluciones son susceptibles de ser presentadas de tres maneras: $y=C_1\operatorname{sen}(C_2x+C_3)$ ó $y=C_1\operatorname{sh}(C_2x+C_3)$ ó $y=C_1\operatorname{ch}(C_2x+C_3)$.

4216. $(x+C_2)^2+(y+C_3)^2=C_1^2$.

4217. $y=C_2\left(xe^{C_1x}-\frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right)+C_3$.

4219. 2) $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{8x^4}{4!}+\frac{14x^5}{5!}+\ldots$

4220. $y=1-\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{2(x-1)^4}{4!}+\frac{3(x-1)^5}{5!}+\ldots$

4221. $y=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{(x-1)^4}{4!}-\frac{4(x-1)^5}{5!}+\ldots$

4222. $y=1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\ldots$ Si $f(x)\approx 1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}$, para $x=-0{,}5$, resulta una serie numérica alternante y el valor de los primeros términos suprimidos es menor que 0,001.

4223. $y=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{4x^5}{5!}-\frac{14x^6}{6!}+\ldots$; de quinto orden.

4224. $y=x^2-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{80}x^8-\frac{7}{4400}x^{11}+\ldots$; 0,318; 0,96951.

4225*. La ecuación diferencial del problema es $E=L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{dQ}{dt}\times\times\frac{V_0-kQ}{k_1}$, donde Q es la cantidad de electricidad que pasó por el circuito por el espacio de tiempo desde el comienzo del experimento hasta el momento t. Después de expresar Q mediante V (V es la cantidad disponible del agua en el baño en el momento t) y de determinar los coeficientes partiendo de los datos del problema, llegamos a la ecuación $V''+aVV'+b=0$, donde $a=\frac{1}{k_1L}=0{,}005$, $b=\frac{kE}{L}=0{,}00935$. Dadas las siguientes condiciones $V_0==1000$ cm^3, $V_0'=-kI_0=-0{,}00187$ cm^3/s, efectuamos la integración de la ecuación y obtenemos la serie $V=1000-0{,}00187t-10^{-9}[2{,}91t^3--3{,}64t^4+3{,}64t^5-3{,}04t^6+2{,}17t^7-\ldots]$, que es alternante y cuyos coeficientes decrecen tendiendo a cero, lo cual es muy cómodo para efectuar los cálculos.

4226*. La ecuación diferencial del ejercicio presenta la forma

$$L\cdot\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{dQ}{dt}\cdot\frac{k_1}{M_0-kQ}=E.$$

Tomando como función buscada la cantidad y de cloruro de hidrógeno no descompuesta para el momento t, reducimos la ecuación a la forma $yy'' + ay' + by = 0$, donde $a = \frac{k_1}{L} = 50$, $b = \frac{kE}{L} = 0{,}0191$. Dadas las condiciones iniciales $y_0 = M_0 = 10$; $y'_0 = -kI_0 = -0{,}00381$, efectuamos la integración de esta ecuación y obtenemos la serie

$$y = 10 - 0{,}00381t + 10^{-10}t^3\,(1{,}21 - 1{,}52t + \ldots).$$

4227. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.

4228. $xy'' - (2x+1)\,y' + (x+1)\,y = 0$.

4229. $(x^3 - 3x^2 + 3x)\,y''' - (x^3 - 3x + 3)\,y'' - 3x\,(1-x)\,y' + 3\,(1-x)\,y = 0$.

4230. $y = 3x^2 - 2x^3$.

4231. a) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \neq \text{const}$; b) $y''\operatorname{sen} 2x - 2y'\cos 2x = 0$.

4232*. 3) De acuerdo con la fórmula de Ostrogradski

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = C\cdot e^{-\int P(x)dx}$$

o, abriendo el determinante de Wronski (wronskiano): $y_1y'_2 - y'_1y_2 = Ce^{-\int P(x)dx}$. Después de dividir los dos miembros de la ecuación por y_1^2, obtenemos $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2}\,e^{-\int P(x)dx}$, de donde se halla la relación buscada.

4233. $y = C_1x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 2C_1 + C_2x$.

4234. $y = C_1\frac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$. 4235. $y = x^2 - e^{x-1}$.

4236*. Las funciones P y Q deben estar unidas por la relación $Q' + 2P\cdot Q = 0$. Poner $y_1 = \frac{1}{y_2}$ en la fórmula del ejercicio 4232 (que se deduce de la fórmula de Ostrogradski), derivar dos veces la relación así obtenida, y poner y'_2, y''_2 en la ecuación dada.

4237*. $y = C_1\,(4x^3 - 3x) + C_2\sqrt{1-x^2}\,(4x^2 - 1)$. De acuerdo con la condición ponemos $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Poniendo y_1 en la ecuación dada obtenemos $B = 0$, $D = 0$, $A/C = \frac{4}{-3}$, ó $A = 4k$, $C = -3k$. De ahí, la solución particular es $y_1 = k\,(4x^3 - 3x)$. En conformidad con la propiedad de la ecuación lineal se puede admitir que $k = 1$, entonces se tiene $y_1 = 4x^3 - 3x$. Sabiendo una solución particular y aplicando el procedimiento ordinario, hallamos la segunda solución y formamos la solución general.

4238. $y = C_1\operatorname{sen} x + C_2\left[1 - \operatorname{sen} x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|\right]$.

4239. $y = C_1x + C_2x\int\frac{e^x\,dx}{x^2}$. 4240. $y = C_1x + C_2\,(x^2 - 1)$.

4241. $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$. 4242. $y = x^3 + x\,(C_1 + C_2\ln|x|)$.

4243. $y = C_1e^x + C_2x - x^2 - 1$. 4244. $y = C_1x^3 + C_2\,(x+1) - x$.

4245. $y = 2 + 3x + x\left(\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} x\right) + x^2$.

4246. $y=-2+2x-x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{7x^5}{60}-\ldots$

4247. $y=1+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^7}{7!}+\frac{62x^8}{8!}-\ldots$

4248. $y=\frac{x^2}{2}+\left[\frac{x^4}{4!}+\frac{3x^6}{6!}+\frac{5x^8}{8!}+\ldots+\frac{(2n-1)\,x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\ldots\right].$

4249. $y=C_1\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}+\ldots\right)+$
$+C_2\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{30}+\ldots\right).$

4250. $y=C_1\left(1+\frac{x^4}{12}+\ldots\right)+C_2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\ldots\right).$

4251. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$. 4252. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.

4253. $y=C_1e^{4x}+C_2$. 4254. $y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$.

4255. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. 4256. $y=C_1\cos x+C_2\,\mathrm{sen}\,x$.

4257. $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\,\mathrm{sen}\,2x)$.

4258. $y=e^{x}\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\right)$.

4259. $y=e^{x}(C_1+C_2x)$. 4260. $x=(C_1+C_2t)\,e^{2,5t}$.

4261. $y=(C_1+C_2x)\,e^{-\frac{1}{4}x}$. 4262. $y=4e^{x}+2e^{3x}$.

4263. $y=3e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,5x$. 4264. $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$.

4265. $y=[1+(1-m)\,x]\,e^{mx}$. 4266. $y=\cos 3x-\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,x$.

4267. Si $k>0$, se tiene $y=\frac{a}{\sqrt{k}}\,\mathrm{sen}\,[\sqrt{k}\,(x-x_0)]+y_0\cos\times$
$\times[\sqrt{k}\,(x-x_0)]$; Si $k<0$, se tiene $y=\frac{1}{2\sqrt{k_1}}[(y_0\sqrt{k_1}+a)\,e^{\sqrt{k_1}(x-x_0)}+$
$+(y_0\sqrt{k_1}-a)\,e^{-\sqrt{k_1}(x-x_0)}]$, donde $k_1=-k$.

4268. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^{x}$. 4269. $y=C_1\cos ax+C_2\,\mathrm{sen}\,ax+\frac{e^{x}}{a^2+1}$.

4270. $y=C_1e^{6x}+C_2e^{x}+\frac{5\,\mathrm{sen}\,x+7\cos x}{74}$.

4271. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\,\mathrm{sen}\,2x)-\frac{1}{2}\cos 2x-2\,\mathrm{sen}\,2x$.

4272. $y=(C_1+C_2x)\,e^{3x}+\frac{2}{9}\,x^2+\frac{5}{27}\,x+\frac{11}{27}$.

4273. $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\,\mathrm{sen}\,x)+x+1$.

4274. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-5x}-0,2$.

4275. $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a 1) $\frac{5}{3}\,e^{-x}$;

2) $3xe^{2x}$; 3) $\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\operatorname{sen} x$; 4) $x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$;

5) $-\frac{8}{5}e^x\left[\cos\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]$; 6) $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$; 7) $e^x(2x^2+x)$;

8) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\operatorname{sen} 2x)$; 9) $-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$;

10) $\frac{1}{20}\cos x-\frac{3}{20}\operatorname{sen} x+\frac{7}{260}\cos 3x+\frac{9}{260}\operatorname{sen} 3x$; 11) $-\frac{1}{12}e^{-x}-\frac{1}{2}xe^x$.

4276. $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a: 1) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$;

2) $\frac{1}{7}e^x$; 3) $5\operatorname{sen} x-2\cos x$; 4) $\frac{1}{10}x+\frac{5}{164}\operatorname{sen} 2x-\frac{1}{41}\cos 2x$;

5) $\cos 2{,}5x+\operatorname{sen} 2{,}5x-0{,}02xe^{-2{,}5x}$;

6) $\left(-5x-\frac{16}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\operatorname{sen} x$;

7) $e^{-x}[(10x+18)\operatorname{sen} x-(20x+1)\cos x]$; 8) $\frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{5}{2}x}-xe^{-\frac{5}{2}x}\right)$.

4277. $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{9}e^{-x}$;

3) $\frac{3}{2}x^2e^{2x}$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$;

5) $\frac{1}{169}\left(\frac{-5}{2}\operatorname{sen} 3x+6\cos 3x\right)-\frac{1}{50}(3\operatorname{sen} x+4\cos x)$;

6) $\frac{3}{100}(3\operatorname{sen} x+4\cos x)+\frac{1}{676}(5\operatorname{sen} 3x-12\cos 3x)$;

7) $2x^2+4x+3+4x^2e^{2x}+\cos 2x$; 8) $\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$;

9) $\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{9}e^{-x}\right)+\frac{1}{25}(3\operatorname{sen} x+4\cos x)$; 10) $e^x-\frac{1}{2}e^{x-1}+\frac{1}{18}e^{1-x}$.

4278. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a: 1) $2x^3-13x+2$;

2) $\cos 3x$; 3) $\frac{1}{2}x\operatorname{sen} x$; 4) $-\frac{1}{2}x\cos x-e^{-x}$; 5) $\frac{1}{4}\left(x\operatorname{sen} x-\frac{1}{4}\cos 3x\right)$;

6) $9+4\cos 2x-0{,}2\cos 4x$; 7) $0{,}5\operatorname{ch} x$; 8) $0{,}5+0{,}1\operatorname{ch} 2x$.

4279. $y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\operatorname{sen}\frac{4}{5}x\right)+\bar{y}$, donde y es igual a:

1) $\frac{25}{16}e^{\frac{3}{5}x}$; 2) $\frac{15}{219}\operatorname{sen}\frac{4}{5}x+\frac{40}{219}\cos\frac{4}{5}x$;

3) $\frac{1}{13}e^{2x}+\frac{1}{5}\left(2x^3+\frac{36}{5}x^2+\frac{107}{25}x-\frac{908}{125}\right)$; 4) $-\frac{5}{9}\cos x\cdot e^{\frac{3}{5}x}$,

5) $-\frac{1}{8}xe^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x$; 6) $0{,}5e^{2x}+1{,}3$.

4280. $y=2+C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x+\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

4281. $y=e^x\left(C_1+C_2x-\ln\sqrt{x^2+1}+x\operatorname{arctg} x\right)$.

4282. 1) $y=e^x(x+C_1)-(e^x+1)\ln(e^x+1)+C_2$;

2) $y=\frac{1}{2}e^x\left[\operatorname{arcsen} e^x+e^x\sqrt{1-e^{2x}}+C_1\right]+\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}+C_2$;

3) $y=C_1e^x-\cos e^x+C_2$.

4283. $y=(1+x)e^{-\frac{3}{2}}+2e^{-\frac{5}{2}x}$.

4284. $x=e^x(0,16\cos 3x+0,28\operatorname{sen} 3x)+x^2+2,2x+0,84$.

4285. $y=e^x+x^2$. 4286. $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$.

4287. $y=\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x-\frac{1}{3}\operatorname{sen} x-\cos x$.

4288*. Efectuar dos veces la derivación de las expresiones indicadas para y; en la ecuación introducir y, y' e y''. En los tres casos se obtiene una identidad.

4289. $y=x^3(C_1+C_2x^4)$.

4290. $y=\frac{x}{2}+C_1\cos\ln|x|+C_2\operatorname{sen}\ln|x|$.

4291. $y=x[C_1+C_2\ln|x|+\ln^2|x|]$.

4292. $y=x\ln|x|+C_1x+C_2x^3+x^3$.

4293. Si $\frac{1}{m\alpha}>\omega^2$, se tiene $y=C_1\cos kt+C_2\operatorname{sen} kt+\frac{g}{k^2-\omega^2}\cos\omega t+\frac{e\omega^2}{k^2}$, donde $k^2=\frac{1}{m\alpha}-\omega^2$. Si $\frac{1}{m\alpha}<\omega^2$, se tiene $y=C_1e^{kt}+C_2e^{kt}-\frac{g}{k^2+\omega^2}\cos\omega t-\frac{e\omega^2}{k^2}$ donde $k^2=\omega^2-\frac{1}{m\alpha}$. 4294. $s=\frac{1}{5}(4e^t+e^{-4t})$.

4295. $s=e^{-0,2t}[10\cos(0,245t)+8,16\operatorname{sen}(0,245t)]$; $s|_{t=3}\approx 7,07$ cm.

4296. $t=\sqrt{\frac{am}{f}}\ln\frac{F+\sqrt{f(2F-f)}}{F-f}$.

4297. $s=e^{-0,245t}[2\cos(156,6t)+0,00313\operatorname{sen}(156,6t)]$.

4298*. $k=33\frac{1}{3}\frac{g}{cm}=33\frac{1}{3}\cdot g\frac{dinas}{cm}$; $t=0,38$ s; la altura de la parte sumergida del zoquete de madera es $x=5[3+\cos[8,16t)]$. Formando la ecuación considerar $g=1000$ cm/s^2.

4299*. $r=\frac{a_0}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$. Todo ocurre de tal modo como si el tubo fuese inmóvil, pero sobre el globo actúa la fuerza igual a $m\omega^2r$ (r es la distancia que media entre el eje de revolución y el globo).

4300. Si $k>m\omega^2$, se tiene $r=\frac{a_0}{k-m\omega^2}\left[k-m\omega^2\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\omega^2}\right)\right]$;

Si $k=m\omega^2$, se tiene $r=a_0\left(1+\frac{k}{2m}t^2\right)$;

Si $k<m\omega^2$, se tiene $r=\frac{a_0}{m\omega^2-k}\left[m\omega^2\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\omega^2-\frac{k}{m}}\right)-k\right]$.

4301. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + C_3$.
4302. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} + C_4e^{-3x}$.
4303. $y = (C_1 + C_2x)\, e^{2x} + (C_3 + C_4x)\, e^{-2x}$.
4304. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x$.
4305. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{4x}$.
4306. $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + C_3x^2e^{x}$.
4307. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$.
4308. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + Cx_3^{n-3} + C_4x^{n-4} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$.

4309. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

4310. $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2) \cos \frac{x}{2} + (C_4 + C_5x + C_6x^2) \operatorname{sen} \frac{x}{2} + C_7x + C_8$.

4311. $y = e^{-x}\,(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1})$.
4312. $y = 1 + \cos x$.
4313. $y = e^{x} + \cos x - 2$.
4314. $y = (C_1 + C_2x)\, e^{x} + C_3e^{2x} - x - 4$.
4315. $y = (C_1 + C_2x)\, e^{x} + C_3e^{-2x} + (x^2 + x - 1)\, e^{-x}$.
4316. $y = (C_1 + C_2x) \cos 2x + (C_3 + C_4x) \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{9} \cos x$.

4317. $y = (C_1 + C_2x) \cos ax + (C_3 + C_4x) \operatorname{sen} ax - \frac{x^2 \cos ax}{8a^2}$.

4318. $y = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3 + C_4 \cos x + C_5 \operatorname{sen} x$.

4319. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3 \operatorname{sen} x + C_4 \cos x + \frac{x^2 - 3x}{8}e^{x} - \frac{1}{4}x \operatorname{sen} x$.

4320. $y = (C_1 + C_2x + x^2)\, e^{x} + (C_3 + C_4x + x^2)\, e^{-x} + \operatorname{sen} x + \cos x$.
4321. $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$.
4322. $y = e^{x} + x^3$.
4323. $y = x\,(C_1 + C_2 \ln|x| + C_3\ln^2|x|)$.

4324. 1. $\begin{cases} x = e^{-6t}\,(C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t), \\ y = e^{-6t}\,[(C_2 + C_1) \cos t + (C_2 - C_1) \operatorname{sen} t]. \end{cases}$

4324.2. $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{5t}, \\ y = -C_1e^{t} + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$ 4324.3. $\begin{cases} x = e^{t}\,(C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t), \\ y = e^{t}\,(C_1 \operatorname{sen} 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases}$

4324.4. $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ y = C_1e^{t} - 3C_3e^{-t}, \\ z = C_1e^{t} + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}. \end{cases}$ 4324.5. $\begin{cases} x = C_1 + 3C_2e^{2t}, \\ y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}. \end{cases}$

4324.6. $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}, \\ y = C_1e^{t} - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}, \\ z = -C_1e^{t} - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}. \end{cases}$

4324.7. $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + e^{3t}\,(C_2 \cos t + C_3 \operatorname{sen} t), \\ y = e^{3t}\,[(C_2 + C_3) \cos t + (C_3 - C_2) \operatorname{sen} t], \\ z = C_1e^{2t} + e^{3t}\,[(2C_2 - C_3) \cos t + (C_2 + 2C_3) \operatorname{sen} t]. \end{cases}$

4325. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}+t\operatorname{sh}t, \\ y=C_1e^t-C_2e^{-t}+\operatorname{sh}t+t\operatorname{ch}t. \end{cases}$

4326. $\begin{cases} x=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\dfrac{7}{40}e^t+\dfrac{1}{5}e^{-2t}, \\ y=\dfrac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\dfrac{1}{40}e^t+\dfrac{3}{10}e^{-2t}. \end{cases}$

4327. $\begin{cases} z=C_1y; \\ zy^2-\dfrac{3}{2}x^2=C_2. \end{cases}$

4328. $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{C_1+x^2}}{\ln\left|\dfrac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|}, \\ z=\sqrt{C_1+x^2}\ln\left|\dfrac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|. \end{cases}$

4329. $\begin{cases} \dfrac{y}{x}=C_1; \\ x^2+y^2+z^2=C_2. \end{cases}$ 4330. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C_1y, \\ z=C_2y. \end{cases}$

4331. $\begin{cases} y^2-z^2=C_1; \\ yz-y^2-x=C_2. \end{cases}$ 4332. $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}, \\ y=C_1e^{-t}+3C_2e^{-3t}+\cos t. \end{cases}$

4333. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\operatorname{sen}t, \\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\operatorname{sen}t. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} x=C_1+C_2t+C_3t^2-\dfrac{1}{6}t^3+e^t, \\ y=C_4-(C_1+2C_3)\,t-\dfrac{1}{2}(C_2-1)\,t^2-\dfrac{1}{3}C_3t^3+\dfrac{t^4}{24}-e^t. \end{cases}$

4335. $\begin{cases} x+y+z=C_1; \\ x^2+y^2+z^2=C_2. \end{cases}$ 4336. $\begin{cases} z=x-y; \\ y\,(y-2x)^3=(x-y)^2. \end{cases}$

4337. $\begin{cases} x=\dfrac{t}{3}. \\ y=-\dfrac{t}{3}. \end{cases}$

4338. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{6}e^{2t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}, \\ y=\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{6}e^{2t}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}, \\ z=-\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}e^{2t}. \end{cases}$ 4339. $\begin{cases} x=-e^{-t}, \\ y=e^{-t}, \\ z=0. \end{cases}$

4340. Las líneas son $y_1=\dfrac{C_1x^2-C_2}{2x}$ e $y_2=-\dfrac{C_1x^2+C_2}{2x}$. Dadas las condiciones iniciales se obtienen las hipérbolas

$$y_1=\frac{3-x^2}{2x}, \qquad y_2=\frac{3+x^2}{2x}.$$

4341. $y=e^{2x}$. 4342. Línea plana $\begin{cases} x-y+z=0; \\ x=\pm\dfrac{z\ln|z|}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

4343. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left[gt^2+(l_1-l_0)\left(1-\cos\dfrac{\pi t}{2T}\right)\right], \\ y=\dfrac{1}{2}\left[gt^2+l_0+l_1+(l_1-l_0)\cos\dfrac{\pi t}{2T}\right]. \end{cases}$

4344. $\begin{cases} x=10\operatorname{ch}2t-\dfrac{4}{49}\cos 14t+\dfrac{200}{49}, \\ y=10\operatorname{ch}2t+\dfrac{6}{49}\cos 14s-\dfrac{300}{49}. \end{cases}$

Aquí x es el trayecto del globo más pesado, e y, del globo más ligero.

4345. $A=\dfrac{k\alpha^2}{2k_1}\left[1-\left(\dfrac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right]$. $B=\alpha\dfrac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}$, donde $\alpha=\sqrt{B_0^2+\dfrac{2k_1}{k}A_0}$, $\beta=\dfrac{\alpha-B_0}{\alpha+B_0}$.

4346*. Si T es la cantidad del veneno, se tiene $\dfrac{dN}{dt}=aN-bNT$, $\dfrac{dT}{dt}=cN$ y $\dfrac{dN}{dt}=0$ en el momento en que $N=M$.

4347. $h_1=\dfrac{S_1H_1+S_2H_2}{S_1+S_2}+\dfrac{S_2}{S_1+S_2}(H_1-H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$,

$h_2=\dfrac{S_1H_1+S_2H_2}{S_1+S_2}-\dfrac{S_1}{S_1+S_2}(H_1-H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$

4348. 1) $\theta-\theta_0+0{,}002(\theta^2-\theta_0^2)=0{,}00008\dfrac{E_1^2t^3}{R_0T^2}$; en 53°;

2) $\theta-\theta_0+0{,}002(\theta^2-\theta_0^2)=\dfrac{6E_0^2}{\pi R_0\cdot 10^7}\cdot(200\pi t-\operatorname{sen}200\pi t)$; en 76°.

4349. 1) 44,5°; 2) 46,2°.

4350.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
y	1,000	1,000	0,997	0,992	0,984	0,973

x	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
y	0,959	0,942	0,923	0,901	0,876

4351. $y\,|_{x=1} = 3{,}43656\ldots$

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
2,5	3,16667	3,37500	3,42500	3,43472

Para y_5 el error relativo es del orden 0,1%.

4352. 0,46128; lo mismo de la fórmula de Simpson para $2n = 10$. Todas las cifras son exactas.

4353. $y_4 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^4}{12} + \frac{5x^5}{12} + \frac{16x^6}{75} +$ etc; $y_4\,(0{,}3) \approx 1{,}543$; $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^4}{12} + \frac{11x^5}{20} + \frac{22x^6}{45} +$ etc; $f\,(0{,}3) \approx 1{,}545$. El error es menor que 0,2%. **4354.** 0,808.

4355*. 1,001624. El resultado se obtiene de la manera más rápida si la función buscada se busca directamente en forma de una serie de potencias.

4356*. 1,0244. Véase la indicación al ejercicio anterior.

4357. $y = x + \frac{2}{4}x^4 + \frac{2\cdot 5}{7!} + \ldots x^7 + \frac{2\cdot 5\ldots(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1} + \ldots$; $k = 0{,}2297$.

Al capítulo XV

4358. $$\operatorname{sen}^{2k} x = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} + \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}\,[\cos 2kx - C_{2k}^1 \cos (2k=2)\,x + C_{2k}^2 \cos (2k-4)\,x - \ldots + (-1)^{k-1} C_{2k}^{k-1} \cos 2x];$$

$$\operatorname{sen}^{2k+1} x = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\,[\operatorname{sen}(2k+1)\,x - C_{2k+1}^1 \operatorname{sen}(2k-1)\,x + C_{2k+1}^2 \operatorname{sen}(2k-3)\,x - \ldots + (-1)^k C_{2k+1}^k \operatorname{sen} x];$$

$$\cos^{2k} x = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{2k-1}}\,[\cos 2kx + C_{2k}^1 \cos (2k-2)\,x + C_{2k}^2 \cos (2k-4)\,x + \ldots + C_{2k}^{k-1} \cos 2k];$$

$$\cos^{2k+1} x = \frac{1}{2^{2k}}\,[\cos (2k+1)\,x + C_{2k+1}^1 \cos (2k-1)\,x + C_{2k+1}^2 \cos (2k-3)\,x + \ldots + C_{2k+1}^k \cos x].$$

4360. $\cos nx^n = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \operatorname{sen}^4 x\ldots$ Como los exponentes del sen x sólo son números pares, $\cos nx$ es susceptible de ser expresado racionalmente mediante $\cos x$.

4363. 1) $\varphi = \nu\frac{2\pi}{n}$ y $\varphi = \nu\frac{2\pi}{n+1}$, donde $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$;

2) $\varphi = \nu\frac{2\pi}{n}$, donde $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ para n impar, y $\nu =$

$=1, 2, \ldots, n$ para n par, y $\varphi=(2\nu-1)\frac{\pi}{n+1}$, donde $\nu=1, 2, \ldots, n+1$.

4365*. Fijarse en que $\int\limits_0^{2\pi}\Phi_n(\varphi)\,d\varphi=0$. **4366.** Sí.

4371. a) $b_1=b_2=b_3=\ldots=0$ y $a_1=a_3=a_5=\ldots=0$

b) $a_0=a_1=a_2=\ldots=0$ y $b_1=b_3=b_5=\ldots=0$.

4372. $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$. **4373.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}2nx}{2n}$.

4374. $x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen}nx}{n}\ (-\pi, \pi)$; $\quad\frac{\pi-x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}nx}{n}\ (0, 2\pi)$.

4375. $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

4376. 1) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$;

2) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}nx}{n}$;

$$S_1=\frac{\pi^2}{6},\quad S_2=\frac{\pi^2}{12},\quad S_3=\frac{\pi^2}{8}.$$

4377. $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\operatorname{sen}nx$.

4378. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\operatorname{sen}nx$.

4379. $2+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$. **4380.** $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}nh}{nh}\cos nx\right]$.

4381. $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}nh}{nh}\right)^2\cos nx\right]$.

4382. $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right]}{(2n+1)^2}$.

4383. $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\operatorname{sen}nx}{1+n^2}\right)\right]-1$.

4384. $$\frac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}+$$
$$+\pi(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}=$$
$$=\operatorname{sh} l\left[\frac{1}{l}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{l\cos\frac{n\pi x}{l}-\pi n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}\right]$$

4385. $$\frac{2\operatorname{sen}\pi a}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\frac{a\cos x}{1-a^2}-\frac{a\cos 2x}{2^2-a^2}+\dots\right).$$

4386. $$\frac{2\operatorname{sen}\pi a}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1-a^2}-\frac{2\operatorname{sen}2x}{2^2-a^2}+\frac{3\operatorname{sen}3x}{3^2-a^2}-\dots\right).$$

4387. $$\operatorname{sen}ax=\begin{cases}\dfrac{4a}{\pi}\left[\dfrac{\cos x}{a^2-1}+\dfrac{\cos 3x}{a^2-3^2}+\dfrac{\cos 5x}{a^2-5^2}+\dots\right] & (a \text{ es par});\\[2ex] \dfrac{4a}{\pi}\left[\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{\cos 2x}{a^2-2^2}+\dfrac{\cos 4x}{a^2-4^2}+\dots\right] & (a \text{ es impar}).\end{cases}$$

4388. $$\cos ax=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\operatorname{sen}x}{a^2-1^2}+\dfrac{3\operatorname{sen}3x}{a^2-3^2}+\dfrac{5\operatorname{sen}5x}{a^2-5^2}+\dots\right] & (a \text{ es par});\\[2ex] -\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{2\operatorname{sen}2x}{a^2-2^2}+\dfrac{4\operatorname{sen}4x}{a^2-4^2}+\dfrac{6\operatorname{sen}6x}{a^2-6^2}+\dots\right] & (a \text{ es impar}).\end{cases}$$

4389. $$\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{a^2+n^2}\operatorname{sen}nx.$$

4390. $$\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{1+n^2}\right];\ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\operatorname{ch}\pi}{1+n^2}n\operatorname{sen}nx.$$

4391. $$f(x)-\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{3}}{n}-\frac{3\left(1-\cos\frac{2\pi n}{3}\right)}{2\pi n^2}\right]\cos\frac{2\pi nx}{3}=$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{2\pi x}{3}}{1}+\frac{\cos\frac{4\pi x}{3}}{2}+\frac{\cos\frac{8\pi x}{3}}{4}-\dots\right)-$$
$$-\frac{9}{2\pi^2}\left(\frac{\cos\frac{2\pi x}{3}}{1^2}+\frac{\cos\frac{4\pi x}{3}}{2^2}+\frac{\cos\frac{8\pi x}{4^2}}{4^2}+\dots\right).$$

4392*. $f(x)\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3^2}}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3}\operatorname{sen}2nx-\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\cos 2nx\right)=$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{1^2}-\frac{\operatorname{sen}4x}{2^2}+\frac{\operatorname{sen}8x}{4^2}-\frac{\operatorname{sen}10x}{5^2}+\ldots\right)-$$
$$-\frac{9}{8\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 8x}{4^2}+\frac{\cos 10x}{5^2}+\ldots\right).$$

Valerse del resultado del ejercicio 4368.

4393*. 1) $f(x)\frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}x}{1^2}+\frac{\operatorname{sen}3\alpha\cdot\operatorname{sen}3x}{3^2}+\ldots\right);$

2) $f(x)=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n\alpha}{n^2}\cos 2nx=$

$$=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\cos 2x}{1^2}+\frac{\operatorname{sen}^2 2\alpha\cdot\cos 4x}{2^2}+\ldots\right).$$

Valerse del resultado del ejercicio 4371.

4394. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3};\ \frac{\pi^3}{32}.$

4395. $\frac{8}{15}\pi^4-48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^4};$ c) $\frac{7}{720}\pi^4.$

4396*. $\frac{\pi-x}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}nx}{n(n^3+1)}$ (véase el ejercicio 4374).

4397*. $\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n(n^2+1)}\operatorname{sen}nx$ (véase el ejercicio 4374).

4398*. $\frac{(\pi-x)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2(n^4+1)}\cos nx.$

Derivar la serie y valerse de la solución en el ejercicio 4374 y también de que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (véase el ejercicio 4376).

4399. $\frac{\pi^3}{32}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x^2}{8}-2\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}n\frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\cos nx\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right);$

valerse de la serie $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}}{n}\cos nx$ (véase el ejercicio 4380 para $h=\frac{\pi}{2}$) y de que $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}=\frac{\pi^3}{32}$ (véase el ejercicio 4394).

4400. $f_1(x) \approx 27{,}8 + 6{,}5\cos x - 0{,}1\operatorname{sen} x - 3{,}2\cos 2x + 0{,}1\operatorname{sen} 2x$;
$f_2(x) \approx 0{,}24 + 0{,}55\cos x + 0{,}25\operatorname{sen} x - 0{,}08\cos 2x - 0{,}13\operatorname{sen} 2x$;
$f_3(x) \approx 0{,}12 + 1{,}32\cos x + 0{,}28\operatorname{sen} x - 0{,}07\cos 2x + 0{,}46\operatorname{sen} 2x$

Al capítulo XVI

4401. Son las rectas paralelas al vector $A\{a, b, c\}$: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

4402. Son las circunferencias cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas $x^2 + y^2 = R^2$.

4403. Son las hélices cuyo paso es igual a $\frac{2\pi h}{\omega}$ situadas en los cilindros cuyos ejes coinciden con el eje z: $x = R\cos(\omega t + \alpha)$, $y = R\operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, $z = ht + z_0$, donde R, α y z_0 son constantes arbitrarias.

4404. Son las circunferencias formadas por la intersección de las esferas cuyo centro se halla en el origen de coordenadas, y de los planos paralelos al plano bisector $y - z = 0$: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y - z + C = 0$, donde R y C son constantes arbitrarias.

2) Son las circunferencias formadas por la intersección de las esferas cuyo centro se halla en el origen de coordenadas, y de los planos que cortan en los ejes de coordenadas segmentos que son iguales por su valor y por su signo: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = C$.

3) Son las líneas de intersección de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y de los paraboloides hiperbólicos $zy = Cx$.

4405. div $A = 3$, rot $A = 0$.

4406. div $A = 0$, rot $A = 2[(y-z)\boldsymbol{i} + (z-x)\boldsymbol{j} + (x-y)\boldsymbol{k}]$.

4407. div $A = 6xyz$, rot $A = x(z^2-y^2)\boldsymbol{i} + y(x^2-z^2)\boldsymbol{j} + z(y^2-x^2)\boldsymbol{k}$.

4408. div $A = 6$, rot $A = 0$. **4409.** div $A = 0$, rot $A = 0$.

4410. div $A = \frac{k}{r^3}$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad, r es la distancia que media entre el punto de aplicación de la fuerza hasta el origen de coordenadas, rot $A = 0$.

4411. div $A = 0$, rot $A = 0$. **4412.** div $A = 0$, rot $A = 0$. En los puntos del eje Oz el campo no está definido.

4413. div $A = -\frac{k}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. En los puntos del plano Oxy el campo no está definido.

4414. $3a$. **4416.** div $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ra}) = (\boldsymbol{ab})$, div $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{ra}) = 4(\boldsymbol{ra})$.

4417. 0. **4418.** 1) 0, 2) 0, 3) 0.

4419. div $A = \frac{2f(r)}{r} + f'(r)$, si el campo es espacial, div $A = \frac{f(r)}{r} + f'(r)$, si el campo es plano.

4421. φ rot $A + (\operatorname{grad}\varphi \times A)$. **4422.** $\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{r}|}$.

4423. $2a$. **4424.** $2\omega\boldsymbol{n}^\circ$, donde $\boldsymbol{n}^\circ$ es el vector único paralelo al eje de revolución. **4430.** $u = Ar + C$.

4431. $u = -\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2) + C$.

4432. No. 4433. No. 4434. $u=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$.

4435. No. 4437. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$. 4438. $k\delta\ln\frac{\sqrt{(l-x)^2+y^2}+l-x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l-x}$.

4439*. $4k(\sqrt{2}-1)$. 4440. $\frac{k\delta\sqrt{a^2+b^2}}{b}\ln\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}$.

4441. $2k\delta a\ln(1+\sqrt{2})$.

4442. $\frac{2\pi k}{\sqrt{1-h^2}}\arccos h$, si $h<1$, $2\pi k$, si $h=1$.

$\frac{2\pi k}{\sqrt{h^2-1}}\ln(h+\sqrt{h^2-1})$, si $h>1$.

4443*. 1) $2k\pi R\delta\ln\frac{H+\sqrt{H^2+R^2}}{R}$, 2) $4k\pi R\delta\ln\frac{H+\sqrt{H^2+4R^2}}{2R}$.

Dividir el cilindro en dos partes iguales por la sección paralela a la base, y calcular el potencial de la superficie lateral del cilindro como suma de los potenciales de las superficies laterales de las dos mitades aplicando el resultado del punto 1.

4444. $2k\pi R\delta$.

4445*. 1) $k\pi\delta\left[H\sqrt{R^2+H^2}-H^2+R^2\ln\frac{H+\sqrt{R^2+H^2}}{R}\right]$,

2) $\frac{k\pi\delta}{2}\left[H\sqrt{4R^2+H^2}-H^2+4R^2\ln\frac{H+\sqrt{4R^2+H^2}}{2R}\right]$; véase la indicación al ejercicio 4443.

4446. $\pi k\delta H(l-H)$, donde l es la generatriz del cono.

4447. $u=\frac{2}{3}k\frac{\pi R^3\delta}{a}\left[\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{a}{R}\right)^3-\frac{3a}{2R}+1\right]$ para $a\geqslant R$;

$u=\frac{2}{3}k\pi a^2\delta\left[\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{R}{a}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\frac{R}{a}\right)^2-2\right]$ para $a\leqslant R$;

$u=\frac{k\pi R^2\delta}{3}(4\sqrt{2}-3)$ para $a=R$.

4448*. $u=\frac{4k\pi\delta}{3a}(R^3-r^3)=\frac{kM}{a}$ (M es la masa del cuerpo) para $a\geqslant R$;

$u=2k\pi\delta(R^2-r^2)$ para $a\leqslant r$;

$u=\frac{4k\pi\delta}{3a}(a^3-r^3)+2k\pi\delta(R^2-a^2)$

para $r\leqslant a\leqslant R$. Trazar la esfera concéntrica de radio a y aplicar los resultados de los dos primeros casos.

4449. $\frac{kM}{a}\left[1+\frac{2}{7}\left(\frac{R}{a}\right)^2\right]$, donde M es la masa del globo.

* En las respuestas a los ejercicios 4439—4449 k es la constante gravitacional.

4450. El flujo y la circulación son iguales a 0.

4451. El flujo es igual a $2aS$, donde S es el área del dominio limitado por el contorno L. La circulación es igual a 0.

4452. El flujo y la circulación son iguales a 0.

4453. El flujo es igual a $\frac{3}{2}\pi R^4$, la circulación es igual a $2\pi R^2$.

4454. En el caso en que el origen de coordenadas se halla dentro del contorno, el flujo es igual a 2π, en caso contrario el flujo es igual a 0. En ambos casos la circulación es igual a 0.

4455. La circulación es igual a 2π, si el origen de coordenadas se halla dentro del contorno, e igual a 0 fuera del contorno. En ambos casos el flujo es igual a 0.

4456. 2. 4458. $2\pi R^2H$. 4459. πR^2H. 4460. 4π. Calcular el flujo a través de la base del cono y valerse del resultado del ejercicio 4457.

4461. $\frac{3\pi}{16}$. 4462*. $\frac{1}{6}$. Valerse de la fórmula de Ostrogradski y calcular el flujo a través de la base de la pirámide.

4463. $2\pi^2b^2$. 4464. $2\pi\omega R^2$. 4465. $-\pi$. Aplicar el teorema de Stokes tomando la línea de intersección del paraboloide con el plano Oxy como el contorno L.

Suplemento

Tablas de ciertas funciones elementales

1. Funciones trigonométricas

α°	sen α	tg α	ctg α	cos α	
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90
1	0175	0175	57,3	1,000	89
2	0349	0349	28,6	0,999	88
3	0523	0524	19,1	999	87
4	0698	0699	14,3	998	86
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85
6	1045	1051	9,51	995	84
7	1219	1228	8,14	993	83
8	139	141	7,11	990	82
9	156	158	6,31	988	81
10	0,174	0,176	5,67	985	80
11	191	194	5,145	982	79
12	208	213	4,705	978	78
13	225	231	4,331	974	77
14	242	249	4,011	970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	276	287	487	961	74
17	292	306	271	956	73
18	309	325	3,078	951	72
19	326	344	2,904	946	71
20	0,342	0,364	2.747	0,940	70
21	358	384	605	934	69
22	375	404	475	927	68
23	391	424	356	921	67
24	407	415	246	914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	438	488	2,050	899	64
27	454	510	1,963	891	63
28	469	532	881	883	62
29	485	554	804	875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	515	601	664	857	59
32	530	625	600	848	58
33	545	649	540	839	57
34	559	675	483	829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	588	727	376	809	54
37	602	754	327	799	53
38	616	781	280	788	52
39	629	810	235	777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	656	869	150	755	49
42	669	900	111	743	48
43	682	933	072	731	47
44	695	966	036	719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	cos α	ctg α	tg α	sen α	α°

α°	α radianes	sen α	tg α
0	0	0,000	0,000
5,73	0,1	0,100	+0,100
11,5	0,2	0,199	+0,203
17,2	0,3	0,296	+0,309
22,9	0.4	0,389	+0,423
28,7	0,5	0,479	+0,546
34,4	0,6	0,565	+0,684
40,1	0,7	0,644	+0,842
45,0	$\frac{\pi}{4}$	0,707	+1,000
45,8	0,8	0,717	+1,030
51,6	0,9	0,783	+1,260
57,3	1,0	0,841	+1,557
63,0	1,1	0,891	+1,965
68,8	1,2	0,932	+2,572
74,5	1,3	0,964	+3,602
80,2	1,4	0,985	+5,798
86,1	1,5	0,997	+14,10
90,0	$\frac{\pi}{2}$	1,000	—
91,7	1,6	1,000	−34,23
97,4	1,7	0,992	−7,697
103,1	1,8	0,974	−4,286
108,9	1,9	0,946	−2,297
114,6	2,0	0,909	−2,185
120.3	2,1	0,863	−1,710
126,1	2,2	0,808	−1,374
131,8	2,3	0,746	−1,119
135,0	$\frac{3\pi}{4}$	0,707	−1.000
137,5	2,4	0,675	−0,916
143,2	2,5	0,598	−0,747
149,0	2,6	0,516	−0,602
154,7	2,7	0,427	−0,473
160,4	2,8	0,335	−0,356
166.2	2,9	0,239	−0,246
171,9	3,0	0,141	−0,143
177,6	3,1	0,042	−0,042
180,0	π	0,000	0,000

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1.$$

α grados	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α radianes	0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,122	0,140	0,157

1 radián = 57°17′45″

2. *Funciones hiperbólicas*

x	sh x	ch x	x	sh x	ch x
0	0	1	2,1	4,022	4,144
0,1	0,100	1,005	2,2	4,457	4,568
0,2	0,201	1,002	2,3	4,937	5,037
0,3	0,305	1,045	2,4	5,466	5,557
0,4	0,411	1,081	2,5	6,050	6,132
0,5	0,521	1,128	2,6	6,695	6,769
0,6	0,637	1,185	2,7	7,406	7,474
0,7	0,759	1,255	2,8	8,192	8,253
0,8	0,888	1,337	2,9	9,060	9,115
0,9	1,027	1,433	3,0	10,02	10,07
1,0	1,175	1,543	3,1	11,08	11,12
1,1	1,336	1,669	3,2	12,25	12,29
1,2	1,509	1,811	3,3	13,54	13,58
1,3	1,698	1,971	3,4	14,97	15,00
1,4	1,904	2,151	3,5	16,54	16,57
1,5	2,129	2,352	3,6	18,29	18,31
1,6	2,376	2,578	3,7	20,21	20,24
1,7	2,646	2,828	3,8	22,34	22,36
1,8	2,942	3,107	3,9	24,69	24,71
1,9	3,268	3,418	4,0	27,29	27,31
2,0	3,627	3,762			

Para $x > 4$ se puede considerar que $\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx \frac{e^x}{2}$ con exactitud hasta 0,01.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{ch} e = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x; \qquad e^{xi} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

3. Magnitudes inversas, raíces cuadradas y cúbicas, logaritmos, función exponencial

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	lg x	ln x	e^x	x
1,0	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	000	0,000	2,72	1,0
1,1	0,909	05	32	03	22	79	041	095	3,00	1,1
1,2	833	10	46	06	29	93	079	182	3,32	1,2
1,3	769	14	61	09	35	5,07	114	262	3,67	1,3
1,4	714	18	74	12	41	19	146	336	4,06	1,4
1,5	0,667	1,22	3,87	1,14	2,47	5,31	176	0,405	4,48	1,5
1,6	625	26	4,00	17	52	43	204	470	4,95	1,6
1,7	588	30	12	19	57	54	230	530	5,47	1,7
1,8	556	34	24	22	62	65	255	588	6,05	1,8
1,9	526	38	36	24	67	75	279	642	6,69	1,9
2,0	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	301	0,693	7,39	2,0
2,1	476	45	58	28	76	94	322	742	8,17	2,1
2,2	455	48	69	30	80	6,04	342	788	9,03	2,2
2,3	435	52	80	32	84	13	362	833	9,97	2,3
2,4	417	55	90	34	88	21	380	875	11,0	2,4
2,5	0,400	1,58	5,00	1,36	2,92	6,30	398	0,916	12,2	2,5
2,6	385	61	10	38	96	38	415	956	13,5	2,6
2,7	370	64	20	39	3,00	46	431	993	14,9	2,7
2,8	357	67	29	41	04	54	447	1,030	16,4	2,8
2,9	345	70	39	43	07	62	462	065	18,2	2,9
3,0	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	477	1,099	20,1	3,0
3,1	323	76	57	46	14	77	491	131	22,2	3,1
3,2	313	79	66	47	17	84	505	163	24,5	3,2
3,3	303	82	74	49	21	91	519	194	27,1	3,3
3,4	294	84	83	50	24	98	531	224	30,0	3,4
3,5	0,286	1,87	5,92	1,52	3,27	7,05	544	1,253	33,1	3,5
3,6	278	90	6,00	53	30	11	556	281	36,6	3,6
3,7	270	92	08	55	33	18	568	308	40,4	3,7
3,8	263	95	16	56	36	24	580	335	44,7	3,8
3,9	256	97	24	57	39	31	591	361	49,4	3,9
4,0	0,250	2,00	6,32	1,59	3,42	7,37	602	1,386	54,6	4,0
4,1	244	02	40	60	45	43	613	411	60,3	4,1
4,2	238	05	48	61	48	49	623	435	66,7	4,2
4,3	233	07	56	63	50	55	633	459	73,7	4,3
4,4	227	10	63	64	53	61	643	482	81,5	4,4
4,5	0,222	2,12	6,71	1,65	3,56	7,66	653	1,504	90,0	4,5
4,6	217	14	78	66	58	72	663	526	99,5	4,6
4,7	213	17	86	68	61	77	672	548	110	4,7

Continuación

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
4,8	208	19	93	69	63	83	681	569	122	4,8
4,9	204	21	7,00	70	66	88	690	589	134	4,9
5,0	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	699	1,609	148	5,0
5,1	196	26	14	72	71	99	708	629	164	5,1
5,2	192	28	21	73	73	8,04	716	649	181	5,2
5,3	189	30	28	74	76	09	724	668	200	5,3
5,4	185	32	35	75	78	14	732	686	221	5,4
5,5	0,182	2,35	7,42	1,77	3,80	8,19	740	1,705	245	5,5
5,6	179	37	48	78	83	24	748	723	270	5,6
5,7	175	39	55	79	85	29	756	740	299	5,7
5,8	172	41	62	80	87	34	763	758	330	5,8
5,9	169	43	68	81	89	39	771	775	365	5,9
6,0	0,167	2,45	7,75	1,82	3,91	8,43	778	1,792	403	6,0
6,1	164	47	81	83	94	48	785	808	446	6,1
6,2	161	49	87	84	96	53	792	825	493	6,2
6,3	159	51	94	85	98	57	799	841	545	6,3
6,4	156	53	8,00	86	4,00	62	806	856	602	6,4
6,5	0,154	2,55	8,06	1,87	4,02	8,66	813	1,872	665	6,5
6,6	152	57	12	88	04	71	820	887	735	6,6
6,7	149	59	19	89	06	75	826	902	812	6,7
6,8	147	61	25	89	08	79	833	917	898	6,6
6,9	145	63	31	90	10	84	839	932	992	6,9
7,0	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	845	1,946	1097	7,0
7,1	141	66	43	92	14	92	851	960	1212	7,1
7,2	139	68	49	93	16	96	857	974	1339	7,2
7,3	137	70	54	94	18	9,00	863	988	1480	7,3
7,4	135	72	60	95	20	05	869	2,001	1636	7,4
7,5	0,133	2,74	8,66	1,96	4,22	9,09	875	2,015	1808	7,5
7,6	132	76	72	97	24	13	881	028	1998	7,6
7,7	130	77	77	97	25	17	886	041	2208	7,7
7,8	128	79	83	98	27	21	892	054	2441	7,8
7,9	127	81	89	99	29	24	898	067	2697	7,9
8,0	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	903	2,079	2981	8,0
8,1	123	85	9,00	01	33	32	908	092	3294	8,1
8,2	122	86	06	02	34	36	914	104	3641	8,2
8,3	120	88	11	02	36	40	919	116	4024	8,3
8,4	119	90	17	03	38	44	924	128	4447	8,4
8,5	0,118	2,92	9,22	2,04	4,40	9,47	929	2,140	4915	8,5
8,6	116	93	27	05	41	51	935	152	5432	8,6

Continuación

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
8,7	115	95	33	06	43	55	940	163	6003	8,7
8,8	114	97	38	06	45	58	944	175	6634	8,8
8,9	112	98	43	07	46	62	949	186	7332	8,9
9,0	0,111	3,00	9,49	2,08	4,48	9,65	954	2,197	8103	9,0
9,1	110	02	54	09	50	69	959	208	8955	9,1
9,2	109	03	59	10	51	73	964	219	9897	9,2
9,3	108	05	64	10	53	76	968	230	10938	9,3
9,4	106	07	69	11	55	80	973	241	12088	9,4
9,5	0,105	3,08	9,75	2,12	4,56	9,83	978	2,251	13360	9,5
9,6	104	10	80	13	58	86	982	262	14765	9,6
9,7	103	11	85	13	59	90	987	272	16318	9,7
9,8	102	13	90	14	61	93	991	282	18034	9,8
9,9	101	15	95	15	63	97	996	293	19930	9,9
10,0	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	000	2,303	22026	10,0

La columna $\lg x$ contiene mantisas de los logaritmos decimales.
Para hallar logaritmos naturales de los números mayores que 10 y menores que 1, se recurre a la fórmula

$$\ln (x \cdot 10^k) = \ln x + k \ln 10.$$

Notemos que

$$\ln 10 = 2{,}303; \quad \ln 10^2 = 4{,}605;$$
$$\lg x = 0{,}4343 \ln x; \quad \ln x = 2{,}303 \lg x.$$

Fórmulas para extracción aproximada de las raíces:

$$1) \ \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n} + \frac{1-n}{2n^2} x^2 \text{ para } |x| < 1.$$

$$2) \ \sqrt[n]{a^n + b} \approx a \left(1 + \frac{b}{na^n} + \frac{1-n}{2n^2} \cdot \frac{b^2}{a^{2n}}\right) \text{ para } \left|\frac{b}{a^n}\right| < 1.$$

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

MALTSEV A.

Fundamentos de álgebra lineal

Los resultados obtenidos por el eminente matemático soviético Anatol Ivánovich Máltsev han influido grandemente en el desarrollo del álgebra moderna. El profesor Máltsev además de gran científico, fue un destacado pedagogo y formó un grupo considerable de científicos soviéticos. Durante los años que trabajó en los centros de enseñanza superior preparó y dictó un gran número de cursos en diferentes ramas del álgebra. El libro que ofrecemos al lector es el resultado de la gran labor realizada por A. I. Máltsev durante la preparación de los cursos de álgebra lineal.

Su primera edición en ruso tuvo una amplia acogida y se agotó rápidamente. En los últimos años de su vida, el autor se propuso una modificación sustancial del libro, pero no pudo realizar sus planes y sólo alcanzó a escribir tres capítulos. Los manuscritos correspondientes fueron preparador para la publicación por un grupo de alumnos de A. I. Máltsev e incluidos en la segunda edición (capítulo 1, 2 y 8) en ruso. Los demás capítulos reproducen casi íntegramente el texto de la edición anterior.

Entre los libros de álgebra lineal existentes, el de A. I. Máltsev se destaca por su originalidad, la plenitud y claridad de la exposición y porque resalta constantemente la conexión que existe entre los objetos que estudia el álgebra lineal (matrices, especios y formas algebráicas). En el último capítulo se exponen los elementos de la teoría de espacios afines multidimensionales, que ha pasado a ocupar uno de los lugares centrales en una rama tan importante de las matemáticas aplicadas como es la teoría de operaciones. El libro es un manual para los estudiantes de especialidades matématicas de las universidades. Además resultará útil para los ingenieros y economistas que trabajan en diferentes ramas de la matemática aplicada y que deseen profundizar sus conocimientos del álgebra lineal.

La obra se reedita a solicitud de los lectores extranjeros.

En el año 1977 salen a la luz los siguientes libros
de la serie "Lecciones populares de matemáticas":

BARSOV A.
Qué es programación lineal

BESKIN N.
Representación de figuras espaciales

BOLTIANSKI V.
La envolvente

MARKUSHEVICH A.
Curvas maravillosas
Números complejos y representaciones conformes
Funciones maravillosas

NATANSON I.
Problemas elementales de máximo y mínimo
Suma de cantidades infinitamente pequeñas

TRAJTENBROT B.
Los algoritmos y la solución automática de problemas

ROSENFELD B., SERGEEVA N.
Proyección estereográfica

VENTSEL E.
Elementos de la teoría de los juegos

YAGLOM I.
Algebra extraordinaria