PROBLEMAS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

FEDENKO

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

Сборник задач по дифференциальной геометрии

под редакцией
А.С. ФЕДЕНКО

Москва "Наука"

Problemas de geometría diferencial

Bajo la redacción
de *A.S. FEDENKO*

Traducido al español
por A. I. Samojválov

Editorial · Mir · Moscú

Impreso en la URSS, 1981

На испанском языке

Indice

Prefacio 7

Designaciones 8

Introducción 9

Capítulo 1. *Función vectorial. Los conceptos de curva, línea y superficie* 23

Capítulo 2. *Líneas y curvas planas* 28

§ 1. Distintos métodos de representación 28
§ 2. Tangencia. Tangente y normal 32
§ 3. Asíntotas. Puntos singulares. Investigación y construcción de las líneas (curvas) 39
§ 4. Familia de líneas. Envolvente 46
§ 5. Longitud de un arco. Curvatura 49
§ 6. Evolutas y evolventes. Ecuaciones intrínsecas 55

Capítulo 3. *Curvas y líneas espaciales* 58

§ 7. Ecuaciones de curvas y de líneas 58
§ 8. Sistema de referencia de Frenet. Longitud de un arco 60
§ 9. Fórmulas de Frenet. Curvatura y torsión. Ecuaciones intrínsecas 66

Capítulo 4. *Superficies* 72

§ 10. Ecuaciones de una superficie 72
§ 11. Plano tangente y normal a una superficie. Superficies regladas. Tangencia de una línea a una superficie . . . 76
§ 12. Familia de superficies. Envolvente 83
§ 13. Primera forma cuadrática 86
§ 14. Aplicación esférica, segunda forma cuadrática 93
§ 15. Redes conjugadas y líneas asintóticas 103
§ 16. Líneas de curvatu 106

§ 17. Líneas geodésicas 108
§ 18. Método de un sistema de referencia móvil en la teoría de superficies 112
§ 19. Problemas diversos 119

Capítulo 5. *Propiedades afines de líneas y de superficies* . . . 123

Capítulo 6. *Elementos de la teoría del campo* 126

§ 20. Campo escalar 126
§ 21. Campo vectorial 131

Respuestas 139
Indice de materias 272

Prefacio

El presente libro contiene más de mil problemas y ejercicios referentes a las secciones principales del curso de geometría diferencial leído en las facultades físicomatemáticas de las universidades. Al preparar esta edición los autores trataron de tener en cuenta los cambios que se realizan actualmente en la enseñanza de las matemáticas.

La introducción de nuevos programas en la escuela media ha originado modificaciones en el modo de enseñar, en la terminología y las designaciones. En la obra procuramos apoyar y desarrollar estas innovaciones. Usamos sin restricciones todos los términos y designaciones adoptados en la escuela media. Prestamos atención especial a la definición exacta de los objetos principales que se estudian en el curso de geometría diferencial. Para la línea curva se dan dos definiciones. A saber, la curva es definida como clase de caminos parametrizados equivalentes. Por otro lado, se introduce el concepto de línea como variedad unidimensional. La superficie se considera como variedad bidimensional y se da de ordinario con ayuda de su parametrización. La mayoría de problemas se resuelve en el aspecto local, o sea, las figuras geométricas se examinan en el entorno de un punto fijo.

Al exponer el material, los autores han tratado de coordinar el curso de geometría diferencial con otros cursos matemáticos. Se utiliza ampliamente el aparato científico del álgebra lineal, del análisis matemático y de las ecuaciones diferenciales. Se atiende mucho al enlace con el curso de geometría en la escuela media y con el de geometría analítica.

El libro contiene una introducción, 6 capítulos y 21 parágrafos. Al final del mismo se incluye un índice alfabético de materias.

Esta obra puede ser recomendada en calidad de manual para las facultades físicomatemáticas de universidades e institutos pedagógicos.

Los autores

Designaciones

$\{a, b, c \ldots\}$ — conjunto compuesto por los elementos $a, b, c, \ldots$;
$\{x \mid x$ posee la propiedad $P\}$ — conjunto de todos los elementos que poseen la propiedad dada P;
$x \in A$ — x es un elemento del conjunto A (x pertenece a A);
$A \subset B$ — el conjunto A es un subconjunto del conjunto B;
$A \cup B$ — unión de los conjuntos A y B;
$A \cap B$ — intersección de los conjuntos A y B;
$A \setminus B$ — diferencia de los conjuntos;
$\varnothing$ — conjunto vacío;
$\mathbb{R}$ — conjunto de todos los números reales;
$\forall$ — (para) todo;
$\exists$ — existe (al menos un);
$p \Rightarrow q$ — de p se deduce q;
$p \Leftrightarrow q$ — p y q son equivalentes;
$a \cdot b$ — producto escalar de vectores;
$a \times b$ — producto vectorial de vectores;
abc — producto mixto de vectores.

Todas las demás designaciones se explican en el texto.

Introducción

Aplicación

Sean X e Y dos conjuntos arbitrarios no vacíos. Si a cada elemento del conjunto X le corresponde algún elemento del conjunto Y, entonces se dice que está dada la *aplicación* del conjunto X en el conjunto Y. Designando la aplicación con la letra f, se puede escribir

$$f\colon X \to Y, \qquad x \mapsto f(x). \tag{1}$$

El elemento $y = f(x)$ se llama *imagen del elemento* x, y si $A \subset X$, entonces el conjunto

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

se denomina *imagen del conjunto* A. El conjunto $f(X)$ se llama *imagen de la aplicación* f.

Si $f(X) = Y$, entonces se dice que f es la *aplicación del conjunto* X *sobre el conjunto* Y o f es una *sobreyección*. La aplicación f se denomina *inyección* si

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

La aplicación f que es simultáneamente una sobreyección y una inyección se llama *biyección*. De tal aplicación se dice que establece una *correspondencia biunívoca* entre los elementos de los conjuntos X e Y. Para la biyección f existe una *aplicación inversa*:

$$f^{-1}\colon Y \to X, \qquad f(x) \to x,$$

que también es una biyección.

Si $A \subset X$, entonces se puede considerar una *contracción de la aplicación* (1) sobre A:

$$f|_A\colon A \to Y, \qquad a \mapsto f(a), \qquad \text{donde} \quad a \in A.$$

En el caso en que en calidad de Y se toma el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, la aplicación (1) se llama *función*.

Supongamos que $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son aplicaciones. Entonces se puede determinar la aplicación

$$g\cdot f\colon X \to Z, \qquad x \mapsto g(f(x)),$$

que se llama *composición de las aplicaciones* f y g.

Para dos conjuntos X e Y su *producto directo* (o *cartesiano*) es el conjunto

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

de todos los pares (x, y), donde $x \in X$, $y \in Y$.

El espacio $\mathbb{R}^n$

Al conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

compuesto por las colecciones ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n números reales se le puede atribuir diferentes estructuras, $\mathbb{R}^n$ es un *espacio vectorial real n-dimensional*. De acuerdo con lo dicho, los elementos de $\mathbb{R}^n$ pueden llamarse *vectores* y designarse con a, b, x, y, ... La base del espacio $\mathbb{R}^n$ compuesto por los vectores

$$i_1 = (1, 0, \ldots, 0), \qquad i_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots$$
$$\ldots, i_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

se llama *canónica*. Designaremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ con (i, j, k).

$\mathbb{R}^n$ se puede considerar como espacio afín puntual relacionado con el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. En este caso los elementos de $\mathbb{R}^n$ se pueden tomar tanto por *puntos* y designar con M, N, ..., como por vectores a, x, ...

El vector $r = (x_1, \ldots, x_n)$ tiene las coordenadas x_1, x_2, ..., x_n con respecto a la base canónica. El punto $A(x_1, \ldots, x_n)$ tiene las mismas coordenadas afines respecto al *sistema de referencia* $(O;\ i_1, i_2, \ldots, i_n)$, donde $O = (0, 0, \ldots, 0)$ es el origen de coordenadas.

Si a cualesquiera dos vectores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ del espacio $\mathbb{R}^n$ se les asigna en correspondencia el número

$$x\cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

llamado *producto escalar de los vectores* x e y, entonces $\mathbb{R}^n$ será un *espacio euclídeo n-dimensional*. En este espacio se introduce la noción de *distancia entre dos puntos* $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $N = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$|MN| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

En particular el plano y el espacio que se estudian en el curso escolar pueden ser identificados con $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, respectivamente, si se eligen en los mismos los sistemas de coordenadas cartesianas.

Llámase *esfera de radio* $\varepsilon > 0$ *con el centro en el punto* A al conjunto

$$B(A, \varepsilon) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid |AM| < \varepsilon\}.$$

Esta esfera se denomina ε-*entorno del punto* A.

El subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ se llama *conjunto abierto* si junto con todo punto suyo A contiene cierta esfera con centro en A. Todo conjunto abierto que contiene el punto A se denomina *entorno* de este punto.

El punto $A \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto de adherencia* del conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$, si todo entorno de este punto contiene al menos un punto de U. La totalidad de todos los puntos de adherencia del conjunto U se dice *clausura* del conjunto U y se designa $\overline{U}$. El conjunto U se denomina *cerrado* si $\overline{U} = U$.

El conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ se llama *conexo* si no existen conjuntos abiertos no intersecados U_1 y U_2 que parten al conjunto V en dos subconjuntos no vacíos V_1 y V_2, tales que $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$. El conjunto abierto y conexo se denomina *región*. La clausura de la región se llama *región cerrada*.

El punto del conjunto U se dice *interior* si pertenece a U junto con cierto entorno suyo. La totalidad de todos los puntos interiores del conjunto U se denomina *interioridad* de este conjunto.

El punto $M \in \mathbb{R}^n$ se llama *punto de frontera* del conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ si en todo entorno suyo existen puntos tales que pertenecen al conjunto U y tales que no le pertenecen. La totalidad de todos los puntos de frontera del conjunto U se denomina *frontera* de este conjunto y se designa con ∂U.

Llámase *figura* Φ en el espacio $\mathbb{R}^n$ a todo subconjunto de puntos en él. Las ecuaciones que contienen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a los cuales les satisfacen aquellos y sólo aquellos puntos de $\mathbb{R}^n$ que pertenecen a Φ se denominan *ecuaciones* *de la figura* 4). Sean $l: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal; $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ una base canónica de $\mathbb{R}^m$; $('i_1, 'i_2, \ldots, 'i_n)$ una base canónica de $\mathbb{R}^n$ y sea $l(i_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}' i_j$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. La matriz

$$(\alpha_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}}$$

cuyas columnas son coordenadas de los vectores $l(i_k)$ se llama *matriz de la aplicación lineal* l. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $l(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk} x_k.$$

Dos bases $(e_1, e_2, \ldots, e_m) = [e]$ y $(a_1, a_2, \ldots, a_m) = [a]$ de un espacio vectorial m-dimensional V se dicen *equivalentes* si el determinante de la matriz de paso de la base $[e]$ a la base $[a]$ (es decir, de la matriz de la transformación lineal del espacio V que convierte la base $[e]$ en la base $[a]$) es positivo. La clase de las bases equivalentes del espacio V se llama *orientación* de este espacio. En todo espacio vectorial existen solamente dos orientaciones una de las cuales se dice *positiva* y la otra, *negativa*. La elección de la orientación del espacio es equivalente a la elección de la base en este espacio.

Si V es un subespacio bidimensional en $\mathbb{R}^3$; (e_1, e_2) es la base V, y m es un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$ que no pertenece a V, entonces (e_1, e_2, m) es la base de $\mathbb{R}^3$. Si el vector m está ya elegido, entonces la base (e_1, e_2) se dice *positiva* si la base (e_1, e_2, m) es equivalente a la base canónica en $\mathbb{R}^3$. Ahora bien, la definición de la orientación en V es equivalente a la definición del vector m que frecuentemente se escoge ortogonal a V y unitario.

Llámase *forma lineal* de α en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ a la aplicación lineal $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Supongamos que $\alpha(i_k) = \alpha_k$. Entonces para el vector $h = (h_1, \ldots, h_n)$

$$\alpha(h) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k;$$

A título de ejemplos de las formas lineales pueden servir las *funciones coordenadas*

$u_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$

Llámase *forma bilineal* sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ a la aplicación $\beta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisface las condiciones:

$$\beta(h_1 + h_2, p) = \beta(h_1, p) + \beta(h_2, p),$$
$$\beta(\lambda h, p) = \lambda\beta(h, p),$$
$$\beta(h, p_1 + p_2) = \beta(h, p_1) + \beta(h, p_2),$$
$$\beta(h, \lambda p) = \lambda\beta(h, p).$$

Si $\beta(i_h, i_l) = \beta_{hl}$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ entonces

$$\beta(h, p) = \sum_{h, l=1}^{n} \beta_{hl} h_h p_l.$$

La forma bilineal β se dice *simétrica*, si $\beta(h, p) = \beta(p, h)$ y *antisimétrica* (o *2-forma*) si $\beta(h, p) = -\beta(p, h)$. Para la forma bilineal simétrica $\beta_{hl} = \beta_{lh}$, para la forma antisimétrica $\beta_{hl} = -\beta_{lh}$. La aplicación $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama *forma cuadrática* sobre el espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ si existe una forma simétrica bilineal β tal que $q(h) = \beta(h, h)$. En coordenadas, $q(h)$ se expresa por la fórmula siguiente:

$$q(h) = \sum_{h, l=1}^{n} \beta_{hl} h_h h_l.$$

La forma cuadrática q se dice *correspondiente* a la forma bilineal β. Sean α y β dos formas lineales sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Llámase *producto exterior* de estas formas a la 2-forma

$$\alpha \wedge \beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

definida del modo siguiente:

$$(\alpha \wedge \beta)(h, p) = \frac{1}{2}(\alpha(h)\beta(p) - \alpha(p)\beta(h)) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha(h) & \alpha(p) \\ \beta(h) & \beta(p) \end{vmatrix}.$$

Sea M un punto arbitrario del espacio $\mathbb{R}^3$. Llámase *vector tangente* a $\mathbb{R}^3$ en el punto M al par (M, h), donde

h es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$. El vector tangente (M, h) se puede representar en forma de un par ordenado de puntos (M, N) tal, que el vector que le corresponde coincida con h (o sea, $M + h = N$), así como en forma de un vector h trazado en el punto M. El conjunto $T_M\mathbb{R}^3 = \{(M, h) \mid h \in \in \mathbb{R}^3\}$ de todos los vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$ en el punto M se denomina *espacio vectorial tangente*. Las operaciones sobre los vectores de $\mathbb{R}^3$ se trasladan a los vectores tangentes en el mismo punto según la regla siguiente:

$$(M, h) + (M, p) = (M, h + p),$$
$$\alpha (M, h) = (M, \alpha h),$$
$$(M, h) \cdot (M, p) = h \cdot p.$$

Respecto a estas operaciones, $T_M\mathbb{R}^3$ es un espacio euclídeo y los vectores (M, i), (M, j), (M, k) forman su base ortonormalizada. Cuando el punto de tangencia M está indicado, el vector tangente (M, h) se puede designar sencillamente con h.

Llámase campo *vectorial* sobre $\mathbb{R}^3$ (o sobre cierto subconjunto de $\mathbb{R}^3$) a la representación del vector tangente a $\mathbb{R}^3$ en cada punto de $\mathbb{R}^3$ (o de su subconjunto).

Función vectorial

Sea U cierto conjunto de puntos en el espacio $\mathbb{R}^m$. La aplicación

$$r\colon U \to R^n, \tag{2}$$

que le asigna a cada punto $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in U$ el vector $r(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^n$ se llama *función vectorial de m variables escalares*. La representación de una función vectorial es equivalente a la representación de n funciones escalares llamadas *componentes* de la misma:

$$r(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (x_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots$$
$$\ldots, x_n(u_1, \ldots, u_m)).$$

Supongamos que la función vectorial r está definida en cierto entorno del punto $M_0 \in \mathbb{R}^m$ a excepción, tal vez, del mismo punto M_0, y que a es cierto vector fijo. El vector a se denomina *límite* de la función vectorial r y se designa con $a = \lim\limits_{M \to M_0} r(M)$ si para $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ es tal, que

$$0 < |MM_0| < \delta \Rightarrow |r(M) - a| < \varepsilon.$$

La función vectorial (2) definida en cierto entorno del punto M_0 se dice *continua* en este punto si

$$\lim_{M \to M_0} r(M) = r(M_0).$$

En el caso general, para un punto arbitrario $M_0 \in U$ la función vectorial (2) se dice *continua* en el punto M_0 si para cualquier entorno W en $\mathbb{R}^n$ del punto $r(M_0)$ se puede hallar un entorno V tal, en $\mathbb{R}^m$ del punto M_0, que $r(V \cap \cap U) \subset W$. La aplicación $r: U \to V$, donde U es un subconjunto en $\mathbb{R}^m$ y V es un subconjunto en $\mathbb{R}^n$, se denomina *homeomorfismo*, si es biyectiva y r es continuo junto con r^{-1}.

Examinemos la función vectorial $r = r(t)$ representada en un conjunto abierto de la recta $\mathbb{R}$, o sea, una función vectorial de una variable real t. Si esta función está definida en el punto t_0 y existe el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t},$$

éste se dice *derivada de la función vectorial* dada en el punto t_0 y se designa con $r'(t_0)$ o $\frac{dr}{dt}(t_0)$. Así aparece la función vectorial r' que denominaremos *derivada de la función vectorial* r. La función derivada de r' se llama segunda derivada de la función vectorial r. Llámase *derivada* $r^{(h)}$ *de* k*-ésimo orden* de la función vectorial r a la derivada de la función $r^{(h-1)}$. De la función que tiene una k-ésima derivada continua se dice que ella *pertenece a la clase* C^h. La función que tiene derivadas de cualquier orden se denomina *función de la clase* C^∞. Las funciones de la clase C^h se llaman con frecuencia *suaves*. La derivada $r'(t_0)$ de la función vectorial $r = r(t)$ se puede identificar con la aplicación lineal $r'(t_0)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que le asigna a cada $\tau \in \mathbb{R}$ el vector $\tau r'(t_0)$. Esta aplicación satisface la igualdad

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) - \Delta t\, r'(t_0)|}{|\Delta t|} = 0.$$

La aplicación lineal $r'(t_0)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se llama frecuentemente *diferencial* y se designa con $dr_{t_0} = r'(t_0)\, dt$.

La función vectorial $r = r(t)$ representada en el segmento $J = [\alpha, \beta]$ se dice *suave* si existe una función vectorial suave $\rho = \rho(t)$, representada sobre el intervalo $I =]a, b[$ que contiene el segmento J, tal que $\rho|_J = r$.

Para la función vectorial r de una variable real que pertenece a la clase C^h tiene lugar la *fórmula de Taylor*:

$$r(t+\Delta t) = r(t) + \Delta t\, r'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} r''(t) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(\Delta t)^k}{k!} \left(r^{(h)}(t) + \varepsilon(t, \Delta t)\right),$$

donde $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(t, \Delta t) = 0$.

Examinemos ahora la función vectorial (2) dada en el subconjunto $\mathbb{R}^2$ de las variables u, v. Las derivadas parciales de esta función en el punto (u_0, v_0) se definen del modo siguiente:

$$\partial_u r(u_0, v_0) = r_u(u_0, v_0) = \lim_{h \to 0} \frac{r(u_0+h, v_0) - r(u_0, v_0)}{h},$$

$$\partial_v r(u_0, v_0) = r_v(u_0, v_0) = \lim_{h \to 0} \frac{r(u_0, v_0+h) - r(u_0, v_0)}{h},$$

$$\partial_{uu} r = r_{uu} = \partial_u(r_u), \quad \partial_{vv} r = r_{vv} = \partial_v(r_v),$$

$$\partial_{uv} r = \partial_{vu} r = r_{uv} = r_{vu} = \partial_u(r_v) = \partial_v(r_u).$$

La función vectorial $r\colon U \to \mathbb{R}^n$, $(u, v) \mapsto r(u, v)$, donde U es una región en $\mathbb{R}^2$, se dice *diferenciable* en el punto $M_0 \in U$ si existe una aplicación lineal $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ tal, que

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|r(M_0+h) - r(M_0) - l(h)|}{|h|} = 0.$$

La función vectorial diferenciable en el punto M_0 será continua en este punto y la aplicación lineal $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ única y se llama *diferencial* (o *derivada*) de la función vectorial $r = r(u, v)$ en el punto M_0, designándose con dr_{M_0}. La diferencial dr_{M_0} se puede representar en forma de la aplicación $T_{M_0}\mathbb{R}^2$ en $T_{r(M_0)}\mathbb{R}^n$ identificando el vector $h \in \mathbb{R}^2$ con el vector tangente (M_0, h) a $\mathbb{R}^2$ en el punto M_0 y el vector $dr_{M_0}(h) = l(h) \in \mathbb{R}^n$, con el vector tangente $(r(M_0), dr_{M_0}(h))$ a $\mathbb{R}^n$ en el punto $r(M_0)$. Entonces, si la función vectorial $\rho = \rho(t)$ satisface a las condiciones $\rho(t_0) = M_0$, $\rho'(t_0) = h$, el vector $dr_{M_0}(h)$ coincide con la derivada $(r \circ \rho)'(t_0)$ de la función vectorial de la función $(r \circ \rho)$. La función vectorial $r = r(u, v)$ se dice *diferenciable* siempre que sea diferenciable en cada punto de U. Las coordenadas u y v pueden interpretarse como funciones sobre U, u: $(u, v) \mapsto u$, v: $(u, v) \mapsto v$. Estas funciones serán diferenciales y sus diferenciales du y dv se ponen en correspondencia con el vector tangente (M, h), donde $h = (h_1, h_2)$; los números h_1 y h_2 son respectivamente $du_M(h) = h_1$, $dv_M(h) = h_2$. Representando de tal modo las diferenciales du y dv tiene lugar la fórmula

$$dr = \partial_u r\, du + \partial_v r\, dv.$$

Para el vector tangente $h = (h_1, h_2)$

$$dr(h) = \partial_u r\, du(h) + \partial_v r\, dv(h) = \partial_u r h_1 + \partial_v r h_2.$$

Si $r(u, v) = (f_1(u, v), \ldots, f_n(u, v))$ y $M_0 = (u_0, v_0)$, entonces la diferencial dr_{M_0} viene representada por la *matriz de Jacobi*:

$$\begin{pmatrix} \partial_u f_1(u_0, v_0) & \partial_v f_1(u_0, v_0) \\ \partial_u f_2(u_0, v_0) & \partial_v f_2(u_0, v_0) \\ \cdots & \cdots \\ \partial_u f_n(u_0, v_0) & \partial_v f_n(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

El espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^n$ se puede identificar con el espacio $\mathbb{R}^{2n}$ representando la aplicación lineal por su matriz. Entonces para la función vectorial diferenciable $r = r(u, v)$ aparece la función vectorial dr: $U \to \mathbb{R}^{2n}$. La diferencial de la función vectorial dr en el punto M se llama *segunda diferencial* de la función vectorial r en el punto M y se designa con d^2r_M. La función vectorial $r = r(u, v)$ se denomina *dos veces diferenciable* si d^2r existe en cada punto de U; *continuamente diferenciable* (o *de la clase* C^1) si dr es continua; *de la clase* C^2 si d^2r es continua. Del mismo modo se determinan sucesivamente las diferenciales de orden k y las *funciones vectoriales de la clase* C^k que para abreviar denominaremos *suaves*. La aplicación lineal

$$d^2r_M : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n), \quad h \mapsto d^2r_M(h)$$

se puede identificar con la aplicación bilineal $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^n$, que se designa también por d^2r_M, según la regla

$$d^2r_M\,(h,\ p) = d^2r_M\,(h)\,(p).$$

La aplicación bilineal d^2r_M es simétrica y la forma cuadrática que le corresponde se escribe frecuentemente así:

$$d^2r = \partial_{uu}r\,du^2 + 2\partial_{uv}r\,du\,dv + \partial_{vv}r\,dv^2.$$

Sean U, V las regiones en $\mathbb{R}^n$. La aplicación $f\colon U \to V$ se llama *difeomorfismo de la clase C^k* si f es biyectiva y pertenece a la clase C^k junto con su f^{-1} inversa.

Curva y línea

Sea I un intervalo, un segmento o un intervalo semiabierto sobre la recta $\mathbb{R}$. Llámase *camino* (o *curva parametrizada*) *de la clase C^k* en el espacio $\mathbb{R}^3$ a la función vectorial $r\colon I \to \mathbb{R}^3$ de la clase C^k que designaremos con $(I,\ r)$. El camino $(I,\ r)$ se dice:

1) *simple*, si la aplicación r es inyectiva;
2) *regular*, si para todo punto interior $t_0 \in I$
$$r'\,(t_0) \neq 0;$$
3) *birregular*, si para todo punto interior $t_0 \in I$
$$r'\,(t_0) \nparallel r''\,(t_0).$$

Dos caminos $(I,\ r = r\,(t))$ y $(J,\ \rho = \rho\,(s))$ de la clase C^k, donde I y J son intervalos, se denominan *equivalentes* si existe un difeomorfismo $\lambda\colon I \to J$ de la clase C^k tal que $r\,(t) = \rho\,(\lambda\,(t))$. Las clases de caminos equivalentes (de curvas parametrizadas) se llaman *curvas* y cada camino de esta clase, *parametrización de la curva*. La función $\lambda\colon I \to J$ que define la equivalencia de dos caminos se denomina *cambio de parámetro*. Si $(I,\ r)$ es un camino, entonces el conjunto $r\,(I) \subset \mathbb{R}^3$ se llama *imagen de* este *camino*. Todos los caminos equivalentes que forman la curva dada tienen la misma imagen que se denomina *imagen de* esta *curva*. La imagen de una curva se dice frecuentemente curva, aunque diferentes curvas pueden tener la misma imagen. La curva cuya imagen se contiene en cierto plano se llama *plana*. Una curva es *simple* (*regular*, *birregular*) si existe su parametrización y resulta simple (regular, birregular).

Sea dado un camino $r = r\,(t)$. Examinemos todos los caminos equivalentes a él, que se obtienen con el cambio del parámetro $s = \lambda(t)$ por la derivada positiva $\lambda'(t) > 0$. La clase de tales caminos se llama *curva orientada*. La parametrización $r = r(s)$ de la curva se dice *natural* si $|r'(s)| = 1$. Toda curva regular admite una parametrización natural. *El parámetro natural*, designado generalmente con s, es la longitud del arco de una curva medida a partir de cierto punto inicial y tomada con el signo $+$ o $-$. El subconjunto l de $\mathbb{R}^3$ se denomina *línea* (o *variedad unidimensional*) *de la clase* C^h si para todo punto $M \in l$ existen un entorno W de este punto en $\mathbb{R}^3$ y un camino regular (I, r) de la clase C^h que satisfacen a las condiciones: $r(I) = W \cap l$ y $r: I \to W \cap l$ es un homeomorfismo. El camino (I, r) se llama *parametrización de la línea* l. La línea l se denomina *elemental* siempre que exista una parametrización suya (I, r) tal, que $r(I) = l$. Si (I, r) y (J, ρ) son dos parametrizaciones de la línea l, entonces los caminos (I, r) y (J, ρ) son equivalentes. Si el subconjunto l se contiene en cierto plano, la línea l se dice *plana*.

Sea M cierto punto de la línea l y sea (I, r) una parametrización de l tal que $M = r(t)$. Llámase *recta tangente* de la línea l en el punto M a la recta que pasa por el punto M y que tiene como vector director suyo el vector $r'(t)$. De un modo análogo se determina la recta tangente para la curva y para el camino. Supongamos que $r = r(s)$ es la parametrización natural de una curva (o de una línea). Entonces el vector $r''(s)$ se denomina *vector de curvatura* de la curva (línea) en el punto s y la longitud del mismo $|r''(s)|$ se dice *curvatura* y se designa con $k(s)$ (o con k).

Llámase *plano osculador* de una curva (línea) birregular $\rho = \rho(t)$ en el punto t_0 al plano que pasa por el punto $\rho(t_0)$ y que tiene como sus vectores directores a $\rho'(t_0)$ y $\rho''(t_0)$.

Para la parametrización natural $r = r(s)$ de una curva (línea) birregular el vector $r''(s)$ es ortogonal a la tangente en el punto respectivo. Denomínase *circunferencia osculatriz* de una curva (línea) birregular en el punto s de esta curva (línea), a la circunferencia de radio $1/k(s)$ que se halla en el plano osculador y cuyo centro es el punto

$$r(s) + \frac{1}{k^2(s)} r''(s).$$

Llámase *sistema de referencia de Frenet* de una curva (línea) birregular orientada $r = r(s)$ en el punto s, a un sistema de referencia ortonormalizado $(r(s);\ t(s),\ n(s),\ b(s))$, donde $t(s) = r'(s)$, $n(s) \uparrow\uparrow r''(s)$ y los tres vectores $(t(s),\ n(s),\ b(s))$ son derechos.

Superficie

El subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ se llama *superficie* (o *variedad bidimensional*) *de la clase* C^h si para todo punto $A \in S$ existen un entorno W de este punto en $\mathbb{R}^3$ y un par (U, r), donde U es una región en $\mathbb{R}^2$, $r\colon U \to \mathbb{R}^3$, y satisfacen las condiciones:

1) la aplicación $r\colon U \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto r(u, v)$ pertenece a la clase C^h;

2) $r(U) = W \cap S$ y $r\colon U \to W \cap S$ es un homeomorfismo;

3) para todo punto $(u, v) \in U$ los vectores $\partial_u r(u, v)$ y $\partial_v r(u, v)$ son no colineales, o sea, rang $dr_{(u,\, v)} = 2$.

El par (U, r) se denomina *parametrización de la superficie* S, y los parámetros u, v, *coordenadas curvilíneas* sobre la misma. La superficie S se dice *elemental* si existe su parametrización (U, r) tal que $r(U) = S$.

Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ de la clase C^h. Si (U, r) es su parametrización, V es una región en $\mathbb{R}^2$ y $\lambda\colon V \to U$ es un difeomorfismo de la clase C^h, entonces el par $(V, r\circ\lambda)$ es también una parametrización de S. Por otro lado, si (U_1, r_1) y (U_2, r_2) son dos parametrizaciones de la superficie S, tales que $r_1(U_1) = r_2(U_2)$, entonces la aplicación $\lambda = r_2^{-1}\circ r_1\colon U_1 \to U_2$ es un difeomorfismo de la clase C^h y se llama *cambio de parametrización*. La aplicación $\rho\colon I \to S$, donde I es un intervalo sobre la recta, se denomina *camino (línea) suave sobre la superficie* S en $\mathbb{R}^3$ si la aplicación $I \to \mathbb{R}\rho$ es suave (respectivamente, si $\rho(I)$ es una línea en $\mathbb{R}^3$ y (I, ρ) es su parametrización). Sean $\rho\colon I \to S$ un camino (línea) suave sobre la superficie S y (U, r), la parametrización de S; con ello $\rho(I) \subset r(U)$. Entonces la función vectorial suave $\mu\colon I \to U$, tal que $r(\mu(t)) \equiv \rho(t)$ se denomina *representación interior del camino (línea)*; en este caso (I, μ) es el camino (línea) sobre la región U. Las líneas sobre la superficie S cuyas representaciones interiores tienen la forma de $u = u_0 + t$, $v = v_0$ o $u = u_0$, $v = v_0 + t$ se llaman *líneas coordenadas*. Para un punto dado M sobre la superficie S el vector tangente h a $\mathbb{R}^3$ en el punto M se denomina *vector tangente a la superficie S en el punto M*, siempre que sobre la superficie S exista un camino (I, ρ) tal, que $\rho(t_0) = M$, $\rho'(t_0) = h$. El subconjunto de todos los vectores tangentes a la superficie S en el punto M es un subespacio vectorial bidimensional en $T_M\mathbb{R}^3$, se designa T_MS y se llama *espacio tangente a la superficie S en el punto M*. Si $M = r(u, v)$, donde (U, r) es la parametrización de S, entonces los vectores $\partial_u r(u,v)$ y $\partial_v r(u, v)$ que designaremos también $\partial_u r_M$ y $\partial_v r_M$, respectivamente, son tangentes a las líneas coordenadas que pasan por el punto M y forman una base del espacio tangente T_MS. La base $(\partial_u r, \partial_v r)$ se denomina *base movible* sobre la superficie S; con ello $T_MS = dr_{(u,v)}(\mathbb{R}^2)$. El plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto M y tiene T_MS como su subespacio director se llama *plano tangente* a la superficie S en el punto M. La recta que pasa por el punto M y es ortogonal al plano tangente se denomina *normal* a la superficie S en el punto M. Llámase *campo vectorial* ξ sobre la superficie S (o sobre el subconjunto $Q \subset S$) a la aplicación que pone en correspondencia con cada punto $M \in S$ (o $M \in Q$) el vector tangente ξ_M a la superficie S en el punto M. Como ejemplos de campos vectoriales sobre el subconjunto $r(U) \subset S$, donde (U, r) es la parametrización de S, pueden servir los campos $\partial_u r$ y $\partial_v r$ denominados *campos vectoriales básicos*. Para los campos vectoriales ξ y η y la función f sobre la superficie S se determinan las operaciones de adición de campos vectoriales y de producto de un campo vectorial por una función valiéndose de las fórmulas

$$(\xi + \eta)_M = \xi_M + \eta_M, \qquad (f\xi)_M = f(M)\,\xi_M,$$

donde en los segundos miembros de las igualdades se incluyen las operaciones determinadas en el espacio vectorial T_MS. Si el campo vectorial está definido sobre el subconjunto $r(U) \subset S$, entonces tiene lugar la descomposición de $\xi = \xi_1\partial_u r + \xi_2\partial_v r$, donde ξ_1, ξ_2 son las funciones determinadas sobre $r(U)$. Estas funciones se denominan *componentes del campo ξ con respecto a la base movible* $(\partial_u r, \partial_v r)$. Si el campo ξ está definido sobre toda la superficie S, entonces sus componentes con respecto a la base movible $(\partial_u r, \partial_v r)$ se llaman *componentes de la contracción del campo* ξ *sobre el subconjunto* $r(U)$. El campo vectorial ξ se dice *continuo* si sus componentes con respecto a cualquier base movible son funciones continuas.

La orientación de la superficie S es la elección de la orientación en cada espacio vectorial tangente $T_M S$ lo que es equivalente a la elección del vector unitario $\mathbf{m}_M$, ortogonal a $T_M S$ para todos los $M \in S$. La parametrización (U, r) de la superficie S se dice *concordada con la orientación* si la base movible está orientada positivamente en todos los puntos, o sea, si la base $(\partial_u r, \partial_v r, m)$ es equivalente a la base canónica en $\mathbb{R}^3$. La orientación de la superficie S se dice continua si para todo punto M de S se halla la parametrización (U, r) concordada con la orientación y tal que $M \in r(U)$. Por regla general, se examinan sólo orientaciones continuas. Una superficie junto con su orientación continua se llama *orientada*.

La aplicación $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ de la superficie S en el espacio $\mathbb{R}^n$ se denomina suave si para cualquier parametrización (U, r) de esta superficie la función vectorial $f \circ r\colon U \to \mathbb{R}^n$ definida sobre la región U de $\mathbb{R}^2$ es suave. En particular, cuando $n = 1$, obtenemos la definición de una función suave sobre la superficie. Sea Q otra superficie en $\mathbb{R}^3$. La aplicación $f\colon S \to Q$ se puede considerar también como la aplicación S en $\mathbb{R}^3$, teniendo en cuenta que Q es un subconjunto en $\mathbb{R}^3$. La aplicación $f\colon S \to Q$ se dice suave si es suave como aplicación S en $\mathbb{R}^3$. El campo vectorial ξ sobre la superficie S se llama *suave* si sus componentes con respecto a cualquier base movible son funciones suaves. Los campos vectoriales de base $\partial_u r$ y $\partial_v r$ son suaves.

Supongamos que $f\colon S \to Q$ es una aplicación suave de las superficies y $\rho = \rho(t)$ es un camino suave sobre la superficie S que pasa por el punto $M = \rho(t_0)$. Entonces $f \circ \rho = (f \circ \rho)(t)$ es un camino suave sobre la superficie Q que pasa por el punto $M' = f(M) = f \circ \rho(t_0)$. La aplicación $T_M S$ en $T_{M'} Q$ que pone al vector tangente $\rho'(t_0)$ en correspondencia con el vector tangente $(f \circ \rho)'(t_0)$ se denomina *diferencial* (o *aplicación derivada*) *de la aplicación* f *en el punto* M y se designa con df_M. La diferencial $df_M\colon T_M S \to T_{M'} Q$ es una aplicación lineal.

CAPÍTULO 1

Función vectorial Los conceptos de curva, línea y superficie

1. Mostrar que las componentes de la función vectorial $r = r(M)$ se hallan por la regla

$$x_j(M) = i_j \cdot r(M) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ es la base canónica del espacio $\mathfrak{R}^n$.

2—6. Demostrar que de la existencia de los límites

$$\lim_{M \to M_0} r_i(M) = a_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lambda$$

se deducen la existencia de los límites indicados a continuación y las fórmulas respectivas:

(2) $\lim\limits_{M \to M_0} (r_1(M) \pm r_2(M)) = a_1 \pm a_2.$

(3) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M)\, r_1(M)) = \lambda a_1.$

(4) $\lim\limits_{M \to M_0} (r_1(M) \cdot r_2(M)) = a_1 \cdot a_2.$

(5) $\lim\limits_{M \to M_0} (r_1(M) \times r_2(M)) = a_1 \times a_2.$

(6) $\lim\limits_{M \to M_0} (r_1(M)\, r_2(M)\, r_3(M)) = a_1 a_2 a_3.$

7. Demostrar que la continuidad de la función vectorial es equivalente a la continuidad de sus componentes.

8. ¿Se deduce de la continuidad de la función vectorial $r = r(M)$ la continuidad de la función $|r| = |r(M)|$? ¿Es cierto lo contrario?

9—13. Demostrar que la continuidad de la función vectorial $r_i(M)$ y de la función $f(M)$ en el punto M_0 determina la continuidad de las funciones siguientes en este punto:

(9) $r_1(M) \pm r_2(M)$. (10) $f(M)\, r_1(M)$.

(11) $r_1(M) \cdot r_2(M)$. (12) $r_1(M) \times r_2(M)$.

(13) $r_1(M)\, r_2(M)\, r_3(M)$.

14. Demostrar que la suavidad de la función vectorial es equivalente a la suavidad de sus componentes.

15. Demostrar que

$$r^{(h)}(t) = x_1^{(h)}(t),\ x_2^{(h)}(t),\ \ldots,\ x_n^{(h)}(t)).$$

16—20. Demostrar que para las funciones vectoriales r_i: $I \to \mathbb{R}^3$ y la función f: $I \to \mathbb{R}$ de la clase C^1 existen las fórmulas siguientes:

(16) $(r_1 \pm r_2)' = r_1' \pm r_2'$.

(17) $(fr)' = f'r + fr'$.

(18) $(r_1 \cdot r_2)' = r_1' \cdot r_2 + r_1 \cdot r_2'$.

(19) $(r_1 \times r_2)' = r_1' \times r_2 + r_1 \times r_2'$.

(20) $(r_1 r_2 r_3)' = r_2' r_2 r_3 + r_1 r_2' r_3 + r_1 r_2 r_3'$.

21—26. Hallar las derivadas de las funciones siguientes de una variable real t:

(21) r^2. (22) r'^2.

(23) $r' \times r''$. (24) $r' r'' r'''$.

(25) $(r' \times r'') \times r'''$. (25) $\sqrt{r^2}$.

27. Demostrar la propiedad bisectorial de la tangente a la elipse: la tangente a la elipse en un punto arbitrario de ésta M es la bisectriz del ángulo adyacente al comprendido entre los radios focales del punto de tangencia.

28. Hallar para la función vectorial $r(t) = (t^2 + 8,\ 4t - 7,\ t + 5)$ el valor t_0 con el cual la aplicación lineal $r'(t_0)$ convierte al número 2 en el vector $(4, 8, 2)$.

29. ¿Se deduce de la suavidad de la función vectorial $r = r(t)$ la suavidad de la función $|r| = |r(t)|$?

30. ¿Se puede afirmar que para la función $r(t)$ existen las igualdades:

a) $|r'| = |r|'$; b) $r \cdot r' = |r|\,|r'|$?

31. Para que la función vectorial $r = r(t)$ tenga sobre cierto intervalo una derivada nula, es necesario y suficiente que el vector $r(t)$ sea constante, o sea, no dependa de t. Demuéstrese esto.

32. Para que en todos los puntos de cierto intervalo los vectores $r(t)$ y $r'(t)$ sean ortogonales es necesario y suficiente que $|r(t)| = \text{const}$. Demuéstrese esto.

33. Sea $r = r(t)$ una función vectorial de la clase C^1, $r(t) \neq 0$. Para que el vector $r(t)$ tenga un sentido constante es necesario y suficiente que en la región de cambio de los vectores $r(t)$ y $r'(t)$ sean colineales. Demuéstrese esto.

34. Supongamos que para la función vectorial $r = r(t)$ de la case C^2 en todos los puntos de su definición existen las relaciones

$$r(t)\, r'(t)\, r''(t) = 0, \qquad r(t) \times r'(t) \neq 0.$$

Demostrar que la imagen de la curva definida por la función vectorial $r = r(t)$ es plana.

35. Supongamos que para la función vectorial $r = r(t)$ de la clase C^2 definida sobre el intervalo $]a, b[$ las derivadas $r'(t)$ y $r''(t)$ son distintas del cero y colineales para todo $t \in\,]a, b[$. Demostrar que la imagen de la curva definida por la función vectorial $r = r(t)$ es un intervalo de la recta.

36. Demostrar que la imagen de la curva definida por la función vectorial $r = r_0 + tr_1 + t^2r_2$, $t \in \mathbb{R}$, donde r_0, r_1, r_2 son vectores constantes, es una parábola si los vectores r_1 y r_2 no son colineales. ¿Qué pasa en caso de que sean colineales los vectores r_1 y r_2?

37. Demostrar que la imagen de la curva definida por la función vectorial

$$r = r_0 + \cos t r_1 + \operatorname{sen} t r_2, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

es una elipse si los vectores r_1 y r_2 no son colineales. ¿Qué será en el caso de un carácter colineal de los vectores r_1 y r_2?

38. Demostrar que la imagen de la curva definida por la función vectorial

$$r = r_0 + \operatorname{ch} t r_1 + \operatorname{ch} t r_2, \qquad t \in \mathbb{R},$$

es la rama de una hipérbola si los vectores r_1 y r_2 son no colineales. ¿Qué será en el caso de un carácter colineal de los vectores r_1 y r_2?

39. Demostrar que la trayectoria de un punto material que se mueve bajo la acción de una fuerza central es plana.

40. Demostrar que dos curvas suaves parametrizadas $r(t) = (t, 0, 0)$ y $r_1(t) = (t^3, 0, 0)$ no son equivalentes, aunque la imagen de cada una de ellas sea una recta.

41. Demostrar que las figuras planas siguientes son líneas y señalar cualesquiera parametrizaciones suyas: a) recta, b) circunferencia, c) elipse, d) parábola, e) hipérbola.

42. Demostrar que la circunferencia S^1 no admite una parametrización (I, r) en el sentido de definir una línea tal que $r(I) = S^1$.

43. Mostrar que toda curva regular (I, r) es simple localmente, o sea, para cualquier $t_0 \in I$ existe un intervalo $J \subset I$ tal que $t_0 \in J$ y $(J, r|_J)$ sea una curva simple.

44. Demostrar que la imagen de una curva regular es localmente una línea.

45. Demostrar que toda curva regular define exactamente dos curvas orientadas.

46. Para que una función vectorial $r = r(u, v)$ tenga en cierta región derivadas parciales nulas o una diferencial nula es necesario y suficiente que el vector $r(u, v)$ sea constante. Demuéstrese esto.

47. Para que en cada punto de cierta región de cambio de los parámetros u y v el vector $r(u, v)$ sea ortogonal a los vectores $\partial_u r(u, v)$ y $\partial_v r(u, v)$ es necesario y suficiente que $|r(u, v)| = \text{const}$. Demuéstrese esto.

48. Sea $r = r(u, v)$ una función vectorial de la clase C^1. Para que el vector $r(u, v)$ tenga un sentido constante es necesario y suficiente que en la región de cambio de los parámetros u y v el vector $r(u, v)$ sea colineal al vector $\partial_u r(u, v)$ y al vector $\partial_v r(u, v)$. Demuéstrese esto.

49. Para que la imagen de una función vectorial suave $r = r(u, v)$ que satisface la condición $\partial_u r \nparallel \partial_v r$ pertenezca a cierto plano es necesario y suficiente que los vectores $\partial_u r$ y $\partial_v r$ sean paralelos a este plano. Demuéstrese esto.

50—53. Sean r_0, r_1, r_2, r_3 vectores constantes y, además, los vectores r_1, r_2, r_3 son no colineales. Hallar las imágenes de las funciones vectoriales siguientes:

(50) $r = r_0 + ur_1 + u^2 r_2 + vr_3$.

(51) $r = r_0 + \cos u r_1 + \operatorname{sen} u r_2 + vr_3$.

(52) $r = r_0 + \left(u + \frac{1}{u}\right) r_1 + \left(u - \frac{1}{u}\right) r_2 + vr_3$.

(53) $r = r_0 + u \cos v r_1 + u \operatorname{sen} v r_2 + u^2 r_3$.

54. Mostrar que el plano es una superficie elemental. Escribir cualesquiera dos parametrizaciones suyas.

55—63. Mostrar que las figuras siguientes son superficies en $\mathbb{R}^3$ y construir sus parametrizaciones:

(55) Esfera.
(56) Elipsoide.
(57) Paraboloide elíptico.
(58) Hiperboloide de un casco.
(59) Hiperboloide de dos cascos.
(60) Cilindro elíptico.
(61) Cilindro parabólico.
(62) Cilindro hiperbólico.
(63) Cono sin vértice.

64. Sean U una región en $\mathbb{R}^2$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$ una función de la clase C^h. Mostrar que el gráfico de la función f, o sea, el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U,\ z = f(x, y)\}$ es una superficie elemental de la clase C^h, y que la función vectorial $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$ es su parametrización.

65. Mostrar que toda superficie S es localmente el gráfico de cierta función, o sea, para todo punto $M \in S$ se puede hallar un entorno W de este punto en $\mathbb{R}^3$ tal, que $S \cap W$ sea el gráfico de cierta función.

66. Sean $r\colon V \to \mathbb{R}^3$, donde V es una región en $\mathbb{R}^2$, y $\partial_u r \nparallel \partial_v r$ para todos los puntos de V. a) ¿Es una superficie el conjunto $r(V)$? b) Mostrar que para todo punto $(u, v) \in V$ existe una región U en $\mathbb{R}^2$, tal, que $(u, v) \in U \subset V$ y $r(U)$ es una superficie de la clase C^h.

67. Sea la función vectorial $r(u, v) = (u, v, 0)$, donde $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) \mid v = 0,\ u \geqslant 0\}$, es una parametrización de la superficie S. a) Determinar la forma de la superficie S. b) Hallar una región sobre la cual la función vectorial $\rho(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \operatorname{sen} \varphi, 0)$ es la parametrización de la superficie S. Construir la sustitución de las parametrizaciones indicadas.

CAPITULO 2

Líneas y curvas planas

§ 1. Distintos métodos de representación

Si la función vectorial $r: I \to \mathbb{R}^2$, $t \to r(t)$ es parametrización de la línea o de la curva, entonces la igualdad

$$r = r(t) \tag{1}$$

se llama *ecuación vectorial de la línea* (*curva*). Si $(x(t), y(t))$ son componentes de la función vectorial (1) con respecto al sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en $\mathbb{R}^2$, entonces la ecuación (1) es equivalente a dos ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \qquad y = y(t). \tag{2}$$

Un caso particular de la representación paramétrica (2) es la *representación* explícita *de una línea* (*curva*):

$$y = f(x). \tag{3}$$

La línea (imagen de una curva) puede ser definida también con ayuda de la ecuación

$$F(x, y) = 0 \tag{4}$$

que es una *representación implícita*.

En vez de las coordenadas rectangulares cartesianas se pueden utilizar también las coordenadas polares.

68. Escribir la ecuación de una figura plana constituida por todos los puntos cuyo producto de distancias hasta dos puntos dados F_1 y F_2 ($|F_1F_2| = 2b$) es una magnitud constante igual a a^2 (*óvalos de Cassini*). ¿Cuáles de estas figuras son líneas y cuáles pueden ser imágenes de curvas?

69. Se dan una circunferencia con diámetro OA, largo $2a$ y la tangente a ella en el punto A. Por el punto O se traza el rayo OC y éste lleva el segmento OM congruente al segmento BC, comprendido entre la circunferencia y la tangente AB. Al girar el rayo OC alrededor del punto O el punto M se desplaza por la trayectoria que se llama *cisoide de Diocles*. Hallar la ecuación de esta trayectoria. ¿Es una línea la cisoide de Diocles?

70. Un rayo arbitrario OE corta en los puntos D y E la circunferencia

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

y la tangente a la misma que pasa por el punto C diametralmente opuesto a O. Por los puntos D y E están trazadas las rectas, respectivamente paralelas a los ejes Ox y Oy, hasta intersecarse en el punto M. Encontrar la ecuación de la línea formada por los puntos M (*curva de Agnesi*).

71. El punto M se desplaza uniformemente por la recta ON que gira uniformemente alrededor del punto O. Hallar la ecuación de la trayectoria del punto M (*espiral de Arquímedes*).

72. La recta OL gira en torno al punto O con una velocidad angular constante ω. El punto M se mueve por la recta OL con una velocidad proporcional a la distancia $|OM|$. Encontrar la ecuación de la línea descrita por el punto M (*espiral logarítmica*).

73. Un segmento AB de longitud constante $2a$ se desliza con sus extremos por los ejes del sistema rectangular de coordenadas xOy. Desde el origen de coordenadas está trazada la recta OM perpendicular a AB. Hallar la ecuación de la figura formada por los puntos M (*rosa de cuatro pétalos*). ¿Es una línea esta figura? ¿Puede ser ella la imagen de una curva?

74. En torno a cierto punto O de una circunferencia de radio a gira un rayo. En este rayo, por ambos lados del punto A a sus intersecciones con la circunferencia, se trazan los segmentos AM_1 y AM_2 de longitud $2b$. Encontrar la ecuación de la figura descrita por los puntos M_1 y M_2 (*caracol de Pascal*; en particular, cuando $a = b$, *cardioide*). ¿Todo caracol de Pascal es una línea?

75. Una recta $x = a$ corta el eje Ox en el punto A y un rayo arbitrario OB lo corta en el punto B. El rayo lleva trazados, por ambos lados del punto B, los segmentos BM_1 y BM_2 congruentes al segmento AB. Escribir la ecuación de la figura Φ formada por todos los puntos M_1 y M_2

(*estrofoide*). ¿Son líneas las figuras Φ y $\Phi \setminus A$? ¿Pueden ser estas figuras imágenes de curvas?

76. Por el punto E $(a, \pi/2)$ dado en coordenadas polares se traza una recta paralela al eje polar. Un rayo arbitrario OK corta esta recta en el punto K. El rayo lleva trazados, por ambos lados del punto K, los segmentos congruentes KM_1 y KM_2 de largo l. Escribir la ecuación de la figura constituida por todos los puntos M_1 y M_2 (*concoide de Nicomedes*). ¿Es línea la concoide de Nicomedes? ¿Puede ser ella la imagen de una curva?

77. El segmento AB de longitud a se desliza con sus extremos por los ejes del sistema rectangular de coordenadas. Las rectas AC y BC, paralelas a los ejes de coordenadas, se cortan en el punto C desde el cual se baja la perpendicular CM a la recta AB. Escribir la ecuación de la figura compuesta por los puntos M (*astroide*). ¿Es una línea la astroide?

78. Encontrar las ecuaciones paramétricas del desarrollo de una circunferencia, o sea, de la trayectoria del extremo de un hilo bien tenso que se desarrolla de una bobina plana redonda fija.

79. Un círculo de radio a rueda sin deslizar por una recta. Hallar las ecuaciones de la trayectoria del punto M rígidamente acoplado al círculo y alejado a una distancia d desde su centro (*cicloide* para $d = a$, *cicloide corta* para $d < a$, *cicloide larga* para $d > a$).

80. Una circunferencia de radio r rueda sin deslizar por la circunferencia de radio R quedando fuera de ésta. Encontrar la ecuación de la trayectoria de un punto M de la circunferencia que va rodando (*epicicloide*). ¿Qué pasa cuando $r = R$?

81. Una circunferencia de radio r rueda sin deslizar por la circunferencia de radio R quedando dentro de ésta. Escribir las ecuaciones de la trayectoria de un punto M de la circunferencia que va rodando (*hipocicloide*). ¿Qué pasa cuando $R = 4r$, $R = 2r$?

82. Dada la curva

$$x = t^3 - 2t, \qquad y = t^2 - 2.$$

¿Se encuentran sobre su imagen los puntos M $(-1, -1)$, N $(4, 2)$, P $(1, 2)$? Hallar los puntos de intersección de la imagen de la curva con los ejes de las coordenadas. Escribir la ecuación implícita de la imagen de la curva.

83. Hallar las parametrizaciones de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ tomando como parámetro: a) el coeficiente angular de una recta que pasa por el origen de las coordenadas y un punto de la circunferencia; b) el ángulo comprendido entre el eje Ox y una recta que pasa por un punto de la circunferencia y su centro.

84—91. Construir las imágenes de las curvas siguientes:

(84) $x = t^2 - t + 1, \qquad y = t^2 + t + 1.$

(85) $x = t^2 - 2t + 3, \qquad y = t^2 - 2t + 1.$

(86) $x = a \operatorname{sen}^2 t, \qquad y = b \cos^2 t.$

(87) $x = \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad y = \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}.$

(88) $x = 3^t + 3^{-t}, \qquad y = 3^t - 3^{-t}.$

(89) $x = \dfrac{a-t}{a+t}, \qquad y = \dfrac{t}{a+t}.$

(90) $x = a \ln t, \qquad y = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right).$

(91) $x = a + R\,\dfrac{1-t^4}{1+t^2}, \qquad y = b + R\,\dfrac{2t}{1+t^2}.$

92. Las parametrizaciones de una hipérbola se pueden tomar de la forma

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \qquad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

¿Como se mueve un punto por la hipérbola cuando el parámetro t crece de $-\infty$ a $+\infty$? ¿Qué reemplazo del parámetro hay que efectuar para que la parametrización de la rama derecha de la hipérbola tome la forma

$$x = a \operatorname{ch} \varphi, \qquad y = b \operatorname{sh} \varphi?$$

93. Mostrar que las ecuaciones

$$x = a \cos \theta, \qquad y = b \operatorname{sen} \theta$$

y

$$x = a\,\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = b\,\frac{2t}{1+t^2}$$

son parametrizaciones de la misma línea. Dibujar esta línea. ¿Cómo se desplaza un punto por la línea cuando el parámetro t crece de $-\infty$ a $+\infty$?

94—104. Señalar qué líneas se definen en coordenadas polares por las ecuaciones siguientes:

(94) $r = 4$.

(95) $r = 2a\cos\varphi$, (96) $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$.

(97) $r = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\varphi}$. (98) $r = \dfrac{16}{5-3\cos\varphi}$.

(99) $r = \dfrac{16}{3-5\cos\varphi}$. (100) $r = \dfrac{2}{1-\cos\varphi}$.

(101) $r^2\cos 2\varphi = a^2$. (102) $r = b\operatorname{sen}\varphi$.

(103) $r = \sec^2(\varphi/2)$. (104) $r = \operatorname{cosec}^2(\varphi/2)$.

105. La curva que tiene la parametrización $r(t) = (x(t), y(t))$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones racionales del parámetro t, se llama *unicursal*. Mostrar que una curva es unicursal si su imagen puede ser definida por la ecuación que tiene la forma

$$\varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) = 0,$$

donde $\varphi_n(x, y)$ es un polinomio homogéneo de grado n.

106—110. Mostrar que las figuras definidas por las ecuaciones que siguen a continuación son imágenes de curvas unicursales y hallar las parametrizaciones respectivas:

(106) $x^2 + y^2 - ax = 0$.

(107) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

(108) $(x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0$.

(109) $r = a(1 + \cos\varphi)$.

(110) $(x^2 + y^2)x + a^2(x^2 - y^2) = 0$.

§ 2. Tangencia. Tangente y normal

Las ecuaciones de las tangentes a las líneas (curvas) definidas por las ecuaciones (1)—(4) del § 1 tienen, respectivamente, la forma

$$\rho = y + \lambda r',$$

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'},$$

$$Y - y = f'(x)(X - x),$$
$$(X - x) F_x + (Y - y) F_y = 0,$$

donde X, Y son las coordenadas corrientes de un punto sobre la tangente, ρ es el radio vector de este punto, x e y son las coordenadas del punto de tangencia. Las ecuaciones de las normales tienen, respectivamente, la forma

$$(\rho - r)\cdot r' = 0,$$
$$(X - x)\, x' + (Y - y)\, y' = 0,$$
$$X - x + (Y - y)\, f'(x) = 0,$$
$$\frac{X - x}{F_x} = \frac{Y - y}{F_y}.$$

Si para dos líneas que tienen un punto común M_0 existen parametrizaciones naturales suyas $r_1 = r_1(s)$, $r_2 = r_2(s)$ tales, que $r_1(s_0) = r_2(s_0) = M_0$ y

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|r_1(s_0 + \Delta t) - r_2(t_0 + \Delta s)|}{(\Delta s)^k} = 0,$$

además k es el máximo entre los números que satisfacen a esta condición, entonces se dice que estas líneas en el punto indicado tienen una *tangencia de orden* k. Dos líneas tienen en el punto común M_0 la tangencia de orden k si, y sólo si, existen parametrizaciones naturales suyas $r_1 = r_1(s)$, $r_2 = r_2(s)$ tales, que $r_1(s_0) = r_2(s_0) = M_0$, y, con $s = s_0$,

$$\frac{dr_1}{ds} = \frac{dr_2}{ds}, \quad \ldots, \quad \frac{d^k r_1}{ds^k} = \frac{d^k r_2}{ds^k}, \quad \frac{d^{k+1} r_1}{ds^{k+1}} \neq \frac{d^{k+1} r_2}{ds^{k+1}}.$$

Si para dos líneas que tienen un punto común M_0 existen parametrizaciones suyas $r_1 = r_1(t)$, $r_2 = r_2(t)$ tales, que $r_1(t_0) = r_2(t_0) = M_0$ y, con $t = t_0$

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d^k r_1}{dt^k} = \frac{d^k r_2}{dt^k}, \quad \frac{d^{k+1} r_1}{dt^{k+1}} \neq \frac{d^{k+1} r_2}{dt^{k+1}},$$

entonces estas líneas tienen en el punto M_0 una tangencia de orden k.

Supongamos que para una línea está representada la parametrización $x = x(t)$, $y = y(t)$ y la segunda línea está representada en la forma implícita $F(x, y) = 0$. Si en cierto punto, que pertenece a ambas líneas, se cumplen las relaciones

$$F(x(t),\ y(t))=0,\ \frac{dF}{dt}=0,\ \ldots,\ \frac{d^kF}{dt^k}=0,\quad \frac{d^{k+1}F}{dt^{k+1}}\neq 0,$$

entonces las líneas tienen en este punto una tangencia de orden k.

111—127. Encontrar las ecuaciones de la tangente y de la normal a las líneas y curvas siguientes:

(111) $y = x^2 + 4x + 3$ en los puntos A, B, C con las abscisas -1, 0, 1.

(112) $y = x^3$ en los puntos A, B con las abscisas 0 y 1.

(113) $y = \operatorname{sen} x$ en los puntos con las abscisas 0, $\pi/2$, π.

(114) $y = \operatorname{tg} x$ en los puntos con las abscisas 0, $\pi/4$.

(115) $x = t^3 - 2t$, $y = t^2 + 1$ en el punto A $(t = 1)$.

(116) $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$.

(117) $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

(118) $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$.

(119) $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $\qquad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$.

(120) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ en el punto A $(3a/2,\ 3a/2)$.

(121) $(x^2 + y^2)\,x - ay^2 = 0$ en el punto A $(a/2,\ a/2)$.

(122) $(x^3 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = C$.

(123) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. $\qquad$ (124) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

(125) $y^2 = 2px$. $\qquad$ (126) $r = a\varphi$.

(127) $r = 2a\cos\varphi$ en el punto A para el cual $\varphi = \pi/4$.

128. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2$ forma con el eje Ox un ángulo de 45°?

129. ¿Puede el ángulo de inclinación de la tangente en cierto punto de la línea $y = x^3$ al eje Ox ser igual a $3\pi/4$?

130. Mostrar que el ángulo φ de inclinación de la tangente en un punto arbitrario de la línea

$$y = x^5 + 2x^3 + x - 1$$

al eje Ox está comprendido dentro de los límites $\pi/4 \leqslant \varphi < \pi/2$.

131. Hallar la tangente a la parábola $y = x^2$ que sea paralela a la recta

$$y = 4x - 5.$$

132. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 6x + 5$ es perpendicular a la recta $x - 2y + 8 = 0$?

133. En la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ escoger las constantes b y c de modo que la parábola sea tangente a la recta $y = 3x - 5$ en el punto con abscisa $x = 2$.

134. ¿En qué puntos con la misma abscisa (no igual a cero) las tangentes a las líneas $y = x^2$, $y = x^3$ son paralelas?

135. Demostrar que sólo una normal de la línea $y = x^n$ (n es un número entero positivo) pasa por el origen de coordenadas.

136. Hallar las tangentes a la curva $x = t^2 - 1$, $y = t^3 + 1$ que sean paralelas a la recta $2x - y + 3 = 0$.

137. Hallar las tangentes a la curva $x = t^3$, $y = t^2$ que pasan por el punto $M(-7, -1)$.

138. Mostrar que las líneas

$$y = a \operatorname{sen}(x/a), \quad y = a \operatorname{tg}(x/a), \quad y = a \ln(x/a)$$

cortan el eje Ox en un ángulo que no depende de la magnitud a.

139. Hallar las tangentes a la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

que estén más alejadas del origen de las coordenadas.

140. Demostrar que para todo punto M de la hipérbola equilatera $x^2 - y^2 = a^2$ el segmento de la normal desde el punto M hasta el punto de intersección con el eje Ox es congruente al segmento OM.

141. Demostrar que todas las normales de la desarrollante de la circunferencia $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$ están a una misma distancia del origen de las coordenadas.

142. Mostrar que si todas las normales de una línea plana pasan por un punto fijo, entonces la línea es una circunferencia o parte de ésta.

143—146. Hallar los puntos de intersección y los ángulos con que se intersecan las líneas siguientes:

(143) $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

(144) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 6x = 9$.

(145) $x^2 + y^2 + 2x = 7$, $y^2 = 4x$.

(146) $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$.

147—149. Demostrar que las líneas siguientes se intersecan formando un ángulo recto:

(147) $y = x - x^2$, $y = x^2 - x$.

(148) $y^2 = 2ax + a^2$, $y^2 = -2bx + b^2$.

(149) $x^2 - y^2 = a$, $xy = b$.

150. Mostrar que la tangente del ángulo formado por la tangente a la curva $r = r(\varphi)$ con el radio vector trazado al punto de tangencia se define por la fórmula

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{dr/d\varphi}.$$

151. Mostrar que el ángulo comprendido entre la tangente y el radio vector en un punto arbitrario de la cardioide es igual a la mitad del ángulo polar.

152. Demostrar que las tangentes a la cardioide $r = 2a(1 - \cos\varphi)$ trazadas en los extremos de una cuerda que pasa por el polo, son recíprocamente perpendiculares.

153. Demostrar que el ángulo comprendido entre una tangente a la espiral de Arquímedes $r = a\varphi$ y el radio vector trazado desde el polo al punto de tangencia tiende a 90° cuando $|\varphi| \to \infty$.

154. Demostrar que el ángulo μ formado por una tangente en un punto arbitrario de la espiral logarítmica $r = ca^\varphi$, $a > 0$, con el radio vector del punto de tangencia, es constante.

155. Demostrar que sólo las espirales logarítmicas y las circuferencias poseen la propiedad indicada en el problema 154.

156. Demostrar que el ángulo μ formado por la tangente en un punto arbitrario de la lemniscata de Bernoulli $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ con el radio vector del punto de tangencia es igual a $2\varphi + \frac{\pi}{2}$, donde φ es el ángulo polar del punto de tangencia. Basándose en esta propiedad, señalar el método de construir la tangente y la normal a un punto arbitrario de la lemniscata.

157. Sean dadas las curvas en coordenadas polares: $r = r(\varphi)$ y $r_1 = r_1(\varphi)$. Mostrar que ellas se intersecan formando un ángulo recto si $rr_1 + r'r_1' = 0$.

158—159. Mostrar que las curvas siguientes se intersecan formando un ángulo recto:

(158) $r = ae^{\varphi}$, $\qquad r = be^{-\varphi}$.

(159) $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\quad r = a(1 - \cos\varphi)$.

160. Supongamos que la tangente a la línea $y = y(x)$ en el punto M corta el eje Ox en el punto T, y que la normal lo hace en el punto N, suponiendo que P es la proyección del punto M sobre el eje Ox. Demostrar que las longitudes de la tangente MT, de la normal MN, de la subtangente PT y de la subnormal PN se expresan por las fórmulas

$$|MT| = \left|\frac{y}{y'}\right| \sqrt{1 + y'^2}, \qquad |MN| = |y| \sqrt{1 + y'^2},$$

$$|PT| = \left|\frac{y}{y'}\right| \qquad\qquad |PN| = |yy'|.$$

161—162. Hallar las longitudes de la tangente, de la subtangente, de la normal y de la subnormal de las líneas:

(161) $y = \operatorname{tg} x$ en el punto M con abscisa $\pi/4$.

(162) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en un punto cualquiera.

163. Hallar las líneas en las cuales la longitud de la subnormal es constante e igual a k.

164. Hallar las líneas en las cuales la longitud de la subtangente es constante e igual a k.

165. Mostrar que las únicas líneas en las cuales la longitud de la normal es una magnitud constante son las circunferencias con centros en el eje Ox.

166. Hallar las líneas en las cuales la longitud de la tangente es una magnitud constante a.

167. Mostrar que el área S limitada por la tractriz (véase la respuesta al problema 166) y el eje de las abscisas es finita.

168. Supongamos que la tangente a la curva $r = r(\varphi)$ en el punto M corta la recta que pasa por el polo y es perpendicular al radio vector del punto de tangencia en el punto T y a la normal, en el punto N. Demostrar que las longitudes de la tangente polar MT, de la normal polar MN, de la subtangente polar OT y de la subnormal polar ON se expresan por las fórmulas

$$|MT| = \left|\frac{r}{r'}\right| \sqrt{r^2 + r'^2}, \qquad |MN| = \sqrt{r^2 + r'^2},$$

$$|OT| = \frac{r^2}{|r'|}, \qquad |ON| = |r'|.$$

169. Hallar curvas en las cuales la longitud de la subtangente polar es constante e igual a k.

170. Hallar las curvas en las cuales la longitud de la subnormal polar es constante.

171. Hallar las curvas en las cuales la longitud de la normal polar es constante e igual a k.

172. Demostrar que la longitud del segmento de una tangente a la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

comprendido entre los ejes de las coordenadas, es igual a a.

173. Mostrar que las tangentes a la lemniscata de Bernoulli $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ trazadas en los extremos de la cuerda que pasa por el polo del sistema polar de coordenadas, son paralelas.

174. Demostrar que cada tangente corta la astroide en dos puntos en los cuales las tangentes se intersecan en un punto que se encuentra en la circunferencia circunscrita cerca de la astroide.

175. Para que dos líneas tengan en un punto común una tangencia de orden no inferior al primero, es necesario y suficiente que en el punto indicado tengan una tangente común. Demuéstrese esto.

176. Demostrar que la línea $y = e^{hx} \operatorname{sen} mx$ es tangente a cada una de las líneas $y = e^{hx}$ o $y = e^{-hx}$.

177—178. Hallar el orden de tangencia en el origen de las coordenadas de las líneas siguientes:

(177) $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{tg} x.$

(178) $y = x^3, \quad y = x \operatorname{sen} x.$

179. Demostrar que las líneas

$$y = \operatorname{sen} x, \quad y = x^4 - \frac{1}{6} x^3 + x$$

tienen en el origen de las coordenadas una tangencia de tercer orden.

180. Averiguar qué orden de tangencia tienen las líneas

$$x^2+y^2-6x-6y+10=0, \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}-2=0$$
$$(x>0, \ y>0)$$

en el punto A (1, 1).

181. Hallar la ecuación de una parábola de la forma $y = x^2 + ax + b$ que es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ en el punto M (1, 1).

182. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene con la parábola $y = x^2$ en el origen de coordenadas una tangencia de segundo orden.

183. Plantear la ecuación de la parábola que tiene con la línea $y = \ln x$ en el punto M (1, 0) el orden más alto de tangencia.

184. Hallar la línea $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ que tiene con la línea $y = f(x)$ en el punto A $(0, f(0))$ una tangencia de orden n.

185. Encontrar las ecuaciones: a) de una elipse, b) de una hipérbola y c) de una parábola, cuyos vértices coinciden con el vértice A $(\pi R, 2R)$ de la cicloide $x = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R(1 - \cos t)$ y que tienen con la cicloide el orden superior de tangencia.

§ 3. Asíntotas. Puntos singulares.

Investigación y construcción de las líneas (curvas)

Si una línea (curva)

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{1}$$

permite una asíntota para $t \to t_0$, cuya ecuación es $Y = kX + b$, entonces

$$k = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}, \qquad b = \lim_{t \to t_0} (y(t) - kx(t)).$$

Si la línea (curva) (1) admite una asíntota vertical para $t \to t_0$, entonces la ecuación de esta última tiene la forma

$x = a$, donde

$$a = \lim_{t \to t_0} x(t), \qquad \lim_{t \to t_0} y(t) = \infty.$$

Supongamos que una curva está dada por la parametrización $r = r(t)$ y $M = r(t_0)$ es un punto suyo tal, que $r'(t_0) = 0$. A este punto M lo llamaremos *irregular*.

Sea $r^{(p)}(t_0)$ la primera derivada distinta del cero y sea $r^{q}(t_0)$ la primera entre las derivadas no colineales al vector $r^{(p)}(t_0)$. Entonces son posibles los casos siguientes

1) p es impar, q es par;

2) p es impar, q es impar;

3) p es par, q es impar;

4) p es par, q es par.

En el primer caso la imagen de una curva en el entorno del punto M tiene la misma forma que en el entorno de un

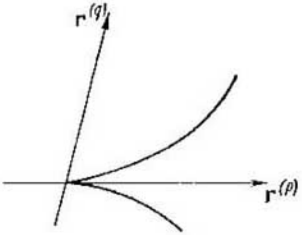

Fig.

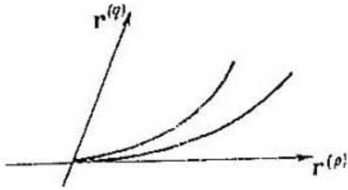

Fig. 2

punto regular. En el segundo caso el punto M es un *punto de inflexión*. En el tercer caso el punto M se llama *punto de retroceso de primer género*. En su entorno una curva se comporta del modo que se muestra en la fig. 1. En el cuarto caso el punto M se denomina *punto de retroceso de segundo género*. En su entorno una curva tiene una forma tal como se indica en la fig. 2.

Supongamos que una figura plana l definida por la ecuación

$$F(x, y) = 0, \tag{2}$$

donde F es una función suave, posee las propiedades:

a) existen los puntos $M_1, \ldots, M_k$ de la figura l tales que la figura $l_1 = \diagdown\{M_1, \ldots, M_k\}$ es una línea;

b) ninguna de las figuras $l_1 \cup \{M_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ es una línea.

Entonces la figura l se llama *línea de puntos singulares* $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Singulares pueden ser sólo tales puntos en los cuales $F_x(x, y) = 0$, $F_y(x, y) = 0$. Un punto sin-

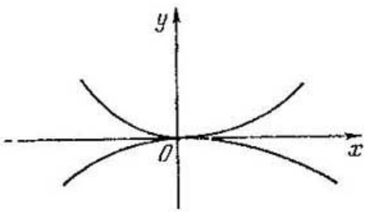

Fig 3

gular M de la línea (2) se denomina *punto singular doble*, si en él al menos una de las segundas derivadas parciales de la función $F(x, y)$ es distinta de cero.

Si por un punto singular doble M pasa una línea elemental que pertenece a la línea (2) y en este punto $F_{yy} \neq 0$, entonces el coeficiente angular k de la tangente a esta línea elemental se halla de la ecuación $F_{xx} + 2F_{xy}k + F_{yy}k^2 = 0$.

Si en el punto singular doble se cumple la condición $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0$, entonces en el entorno de este punto se pueden destacar dos líneas elementales que pasan por el mismo. Un punto así se llama *punto múltiple*. Si $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0$ en el punto M, entonces en cierto entorno suyo, además de este mismo punto, no existen otros puntos que satisfagan a la ecuación (2). Un punto así se dice *aislado*. Si $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0$ en el punto M, éste puede ser punto de retroceso de primero o segundo género o *punto autotangencial*. En este último caso en cierto entorno del punto la línea tiene una forma tal como se muestra en la fig. 3.

Investigar una línea, esto quiere decir averiguar el conjunto de las propiedades más importantes de la misma que permitan construirla con exactitud suficiente. Entre las propiedades más importantes se pueden citar la presencia o ausencia de puntos singulares, puntos de inflexión, asíntotas, puntos múltiples, puntos en los cuales las tangentes son paralelas a los ejes de coordenadas y en los cuales la línea corta estos ejes.

186—191. Hallar las asíntotas de las líneas definidas por las ecuaciones en forma explícita:

(186) $y=\frac{2}{x-3}$. (187) $y=\frac{5}{x^2-16}$.

(188) $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$. (189) $y=\frac{x^2-4x+7}{x}$.

(190) $y=\frac{x^2}{x+2}$. (191) $y=\frac{x^3+1}{x}$.

192—194. Hallar las asíntotas de las curvas representadas por las ecuaciones en forma paramétrica:

(192) $x=\frac{2t}{(t-1)(t-2)}$, $y=\frac{t^2}{(t-1)(t-3)}$.

(193) $x=\frac{2t-1}{t^2-1}$, $y=\frac{t^2}{t-1}$.

(194) $x=\frac{t^3}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

195—197. Hallar las asíntotas de las líneas definidas por las ecuaciones implícitas:

(195) $xy^2-y^2-4x=0$.

(196) $xy^2=x^2+2x-\frac{5}{4}$.

(197) $(x^2-y^2)(x-y)=1$.

198—199. Hallar las asíntotas de las curvas definidas por las ecuaciones en coordenadas polares:

(198) $r=\frac{a}{\operatorname{sen}\varphi}+l$ (*concoide de Nicomedes*).

(199) $r=\frac{2a\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos\varphi}$ (*cisoide de Diocles*).

200—204. Hallar los puntos singulares de las líneas definidas por las ecuaciones siguientes:

(200) $y^2=x^3+x^2$. (201) $x^2=y^2+x^4$.

(202) $y^2 = x^3 - x^2$. (203) $x^2y^2 = x^2 + y^2$.

(204) $4y^2 = x + 5x^4$.

205—209. Hallar los puntos singulares y escribir las ecuaciones de las tangentes en los mismos para las líneas siguientes:

(205) $(x^2 + y^2)\,x - 2ay^2 = 0$ (*cisoide de Diocles*).

(206) $(x^2 + y^2)\,(y - a)^2 - l^2y^2 = 0$ (*concoide de Nicomedes*).

(207) $(2a - x)\,y^2 = x\,(x - a)^2$ (*estrofoide*).

(208) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2\,(x^2 - y^2)$ (*lemniscata de Bernoulli*).

(209) $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2\,(x^2 + y^2)$ (*cardioide*).

210—212. ¿Existen la tangente y la normal en los puntos indicados de las líneas siguientes?

(210) $y = x \operatorname{sen}(1/x)$ en el punto $x = 0$.

(211) $y = x\,(1 + e^{1/x})^{-1}$ en el punto $x = 0$.

(212) $y = (1 + e^{1/(x-1)})^{-1}$ en el punto $x = 1$.

213. Mostrar que las coordenadas del punto de inflexión de la línea definida por la ecuación $F(x, y) = 0$ satisfacen a la ecuación

$$F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = 0.$$

214. Hallar la ecuación que determina los puntos de inflexión de la curva representada por la ecuación $r = r(\varphi)$ en coordenadas polares.

215—222. Investigar y construir las líneas definidas por las ecuaciones en la forma explícita:

(215) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. (216) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$.

(217) $y = \dfrac{x^3}{2\,(x+1)^2}$. (218) $y = \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$.

(219) $y = \sqrt{\dfrac{125 - x^3}{3x}}$. (220) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

(221) $y = e^{-x^2}$. (222) $y = e^{1/x}$.

223—238. Investigar y construir las imágenes de las curvas dadas por las ecuaciones paramétricas:

(223) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $\quad y = \dfrac{3at}{1+t^3}$ *(folio de Descartes)*

(224) $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\quad y = \dfrac{t(1-t)}{1+t^2}$.

(225) $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\quad y = \dfrac{t^3}{1+t^2}$.

(226) $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\quad y = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}$.

(227) $x = t^2$, $\quad y = \dfrac{2}{3}t(3-t^2)$.

(228) $x = \dfrac{t^2}{1-t}$, $\quad y = \dfrac{t^3}{1-t^2}$.

(229) $x = \dfrac{t^2}{1-t^3}$, $\quad y = \dfrac{t^3}{1-t^3}$.

(230) $x = 4t^2$, $\quad y = 3t(t^2+1)$.

(231) $x = t^4$, $\quad y = t^2 - t^5$.

(232) $x = \dfrac{t^5}{10(1-t)}$, $\quad y = t^3$.

(233) $x = \dfrac{t}{1-t^2}$, $\quad y = \dfrac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$.

(234) $x = t^2$, $\quad y = t^4 + t^5$.

(235) $x = \dfrac{5t^2}{1+t^5}$, $\quad y = \dfrac{5t^3}{1+t^5}$.

(236) $x = \dfrac{(t+2)^2}{t+1}$, $\quad y = \dfrac{(t-2)^2}{t-1}$.

(237) $x = \dfrac{4t}{1-t^4}$, $\quad y = \dfrac{4t^2}{1-t^4}$.

(238) $x = 2\,\mathrm{sen}\,t$, $\quad y = \dfrac{2\cos^2 t}{2+\cos t}$.

239—274. Investigar y construir las líneas (con puntos singulares) definidas por las ecuaciones:

(239) $x^3 - y^2 + 1 = 0$.

(240) $xy^2 - y^2 - 4x = 0$.

(241) $x(x^2 + y^2) - y^2 + x = 0.$

(242) $xy^2 = x^2 + 2x - \frac{5}{4}.$

(243) $x^4 + y^4 = a^4.$

(244) $x^4 - 4x^2y^2 - 6x^2 - 4y^2 = 0.$

(245) $(x^2 - y^2)^2 = 2x.$

(246) $(x^2 - y^2)(x - y) = 1.$

(247) $(x - y)xy + x + y = 0.$

(248) $x^2y^2 + y = 1.$

(249) $x^3 + xy^2 - x^2 - y^2 = 0.$

(250) $x^2 + y^2 = x^2y^2.$

(251) $x^4 - y^4 + x^2 + 2y^2 = 0.$

(252) $x^3 - xy^2 + x^2 + y^2 = 0.$

(253) $(x^2 - y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2).$

(254) $xy^2 = -\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2.$

(255) $x(x^2 - 3y^2) - 4(x^2 + y^2) = 0.$

(256) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2.$

(257) $x^3 + xy^2 + x^2 - y^2 = 0.$

(258) $x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0.$

(259) $xy^2 = (x - 1)^2.$

(260) $x^4 + y^4 - 2xy = 0.$

(261) $x^2 = y^2 + x^4.$

(262) $(x + 1)(x + 2)y^2 = x^2.$

(263) $y^2 = x^3 - 2x^2 + x.$

(264) $(x^2 + y^2)^2 = xy.$

(265) $x^3 + y^3 - x^2 = 0.$

(266) $x^3 - 27(x - y)^2 = 0.$

(267) $x^3 - xy^2 + ay^2 = 0.$

(268) $x^5 - x^4 + 4x^2y - 4y^2 = 0.$

(269) $x^4 - x^2y + y^3 = 0.$

(270) $x^4 + x^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0$.

(271) $x^4 + y^4 = 8xy^2$.

(272) $x^6 - x^4 + y^2 = 0$.

(273) $x^4 - y^4 + xy = 0$.

(274) $(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2$.

275—281. Investigar y construir las imágenes de las curvas definidas por las ecuaciones en coordenadas polares (a veces generalizadas):

(275) $r = \operatorname{tg}(\varphi/2)$.

(276) $r^2 = a^2\varphi$ $(a \neq 0)$ (*espiral de Fermat*).

(277) $r^2\varphi = a^2$, $a \neq 0$ (*bastón*).

(278) $r^2 = a^2\varphi^3$, $a \neq 0$ (*espiral de Galileo*).

(279) $r = a + \frac{l}{\varphi}$, $a \geqslant 0$, $l > 0$, $\varphi > 0$.

(280) $r = a \operatorname{sen}(\varphi/2)$, $a > 0$.

(281) $r = a \operatorname{sen} 3\varphi$, $a > 0$ (*rosa de tres pétalos*).

§ 4. Familia de líneas. Envolvente

Sea dada la ecuación de una familia monoparamétrica de líneas

$$F(x, y, C) = 0, \tag{1}$$

donde C es un parámetro. El conjunto de todos los puntos que satisfacen al sistema de ecuaciones

$$F(x, y, C) = 0, \quad F_C(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

se llama *discriminante de una familia* (1).

Si F_x y F_y en los puntos del discriminante no se anulan simultáneamente, entonces el discriminante coincide con la *envolvente de la familia*, o sea, con una línea tal, que en cada punto suyo toque cierta línea de la familia. En el caso contrario el discriminante no puede ser envolvente. Este caso requiere una investigación suplementaria.

El discriminante de una familia representado por una ecuación en forma vectorial $r = r(t, C)$, se define por el sistema de ecuaciones

$$r = r(t, C) \quad r_t \times r_C = 0.$$

282—284. Investigar las familias de líneas y trazar las figuras:

(282) $C^2x^2 + y^2 = Cx$.

(283) $x^2 + 2Cy = 2xy$.

(284) $x = \cos u \operatorname{ch} v$, $y = \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v$ para a) $v = \text{const}$, b) $u = \text{const}$.

285. Demostrar que cada línea de la familia $\varphi(x, y) = a$ es ortogonal a toda línea de la familia $\psi(x, y) = b$ en el punto común a ambas, si se cumple la condición

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

286. Mostrar que la familia de líneas ortogonales a las líneas de la familia $\varphi(x, y) = a$ se define por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{\partial\varphi/\partial x} = \frac{dy}{\partial\varphi/\partial y}.$$

287. Hallar la familia de líneas ortogonales a un haz de rectas.

288. Hallar la familia de líneas ortogonales a la familia de circunferencias tangentes al eje Ox en el origen de coordenadas.

289. Hallar la familia de líneas ortogonales a la familia de parábolas $y^2 = 2ax$.

290. Hallar la familia de líneas ortogonales a la familia de circunferencias que pasan por dos puntos fijos.

291—299. Hallar la envolvente de las familias siguientes de líneas (con puntos singulares):

(291) $(x - C)^2 + y^2 = a^2$.

(292) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2$.

(293) $x \cos C + y \operatorname{sen} C - p = 0$.

(294) $y = (x - C)^3$.

(295) $y^2 - (x - C)^3 = 0$.

(296) $y^3 - (x - C)^2 = 0$.

(297) $3(y-C)^2-2(x-C)^3=0$.

(298) $(1-C^2)x+2Cy-a=0$.

(299) $C^2(x-a)-Cy-a=0$.

300. Hallar la envolvente de la familia de rectas que forman con los ejes de coordenadas triángulos de área constante S.

301. La circunferencia $x^2+y^2=R^2$ es envolvente de la familia de rectas $Ax+By+C=0$. ¿A qué relación deben satisfacer los coeficientes A, B, C?

302. Hallar la ecuación de la envolvente de una familia de rectas sobre las cuales está el segmento de longitud constante a si los extremos de este último se deslizan por los ejes del sistema rectangular de coordenadas.

303. Hallar la envolvente de una familia de rectas que son los lados de un ángulo recto que se desplaza por el plano de modo que uno de sus lados pase por un punto fijo F y el ángulo recto circunscriba: a) una recta; b) una circunferencia.

304. Una recta gira con velocidad angular constante alrededor de un punto que se mueve uniformemente por otra segunda recta. Hallar la envolvente de esta familia de rectas.

305. Hallar la envolvente de la familia de circunferencias de radio r cuyos centros circunscriben una circunferencia de radio R.

306. Hallar la envolvente de la familia de circunferencias construídas, como en los diámetros, sobre los radios vectores focales de la parábola dada.

307. Hallar la envolvente de la familia de circunferencias construídas, como en los diámetros, sobre las cuerdas focales de la parábola $y^2=2px$.

308. Se da una elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. En las cuerdas paralelas a uno de los ejes de simetría, como en los diámetros, se construyen circunferencias. Hallar la envolvente de cada familia de circunfencias.

309. Sobre las cuerdas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ paralelas a uno de los ejes de coordenadas se construyen, como en los diámetros, circunferencias. Hallar la envolvente de cada familia.

310. Hallar la envolvente de la familia de circunferencias construidas, como sobre los diámetros, sobre las cuerdas de la parábola $y^2 = 2px$ que son perpendiculares al eje de esta última.

311. Se da una familia de parábolas de parámetro p los ejes de las cuales son paralelos a Ox y los vértices circunscriben una parábola $y^2 = 2qx$. Hallar la envolvente de esta familia.

312. Hallar las condiciones a las cuales deben satisfacer los puntos de la envolvente de la familia de líneas $F(x, y, \alpha, \beta) = 0$, donde α y β están vinculados por la relación $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

313. Hallar la envolvente de la familia de líneas $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$, donde $p + q = 1$.

314. Hallar la envolvente de la familia de rectas $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$, los parámetros α, β están vinculados por la relación $\alpha^m + \beta^m - a^m = 0$, $a = \text{const}$. Señalar los casos para $m = 2, 1, -2$.

315. Desde el punto dado, bajo diferentes ángulos al horizonte en un plano vertical y con la misma velocidad inicial v_0, se arrojan puntos materiales. Hallar la envolvente de sus trayectorias (parábola de seguridad).

316. Los radios de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se proyectan sobre los ejes de las coordenadas. Sobre las proyecciones, como sobre los semiejes, se construyen elipses. Encontrar la envolvente de esta familia de elipses.

§ 5. Longitud de un arco. Curvatura

La longitud del arco de una curva definida por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$
$$y = y(x),$$
$$r = r(\varphi)$$

se calcula por las fórmulas

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi,$$

respectivamente.

La curvatura de una curva se calcula por las fórmulas

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

$$k = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}},$$

respectivamente.

La circunferencia osculatriz de una curva en el punto dado tiene con la curva una tangencia no inferior a la de segundo orden. El centro de la circunferencia osculatriz se llama también *centro de curvatura de la curva en el punto dado*. Su radio denominado también *radio de curvatura de la curva en el punto dado* se encuentra por la fórmula $R = 1/k$. El círculo limitado por la circunferencia osculatriz se llama frecuentemente círculo de curvatura de la curva.

317—322. Encontrar la longitud del arco comprendido entre dos puntos arbitrarios M_1 y M_2 de las curvas siguientes:

(317) $y = x^{3/2}$. (318) $y = \ln x$.

(319) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. (320) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

(321) $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$.

(322) $x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a \operatorname{sen} t$.

323—328. Encontrar la longitud del arco comprendido entre los puntos indicados de las curvas siguientes:

(323) $y = \ln \cos x$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/3$.

(324) $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-\sqrt{x}$, puntos de intersección con el eje Ox.

(325) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x,\ x_1=1,\ x_2=4$.

(326) $y=\ln\sec x,\ x_1=-\pi/3,\ x_2=\pi/3$.

(327) $x=t-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t,\ y=2\operatorname{ch}t,\ t_1=0,\ t_2=2$.

(328) $x=8at^3,\ y=3a(2t^2-t^4),\ t_1=0,\ t_2=\sqrt{2}$.

329. Hallar la longitud del arco de la parábola $r=a\sec^2(\varphi/2)$, cortado por el eje Oy.

330. Hallar la longitud de una onda de una cicloide.

331. Hallar la longitud de una rama de una epicicloide (hipocicloide) (véanse los problemas 80, 81).

332—335. Hallar la longitud de toda la curva:

(332) $x=a\cos^3 t,\quad y=a\operatorname{sen}^3 t$.

(333) $r=a(1+\cos\varphi)$.

(334) $r=a\cos^4(\varphi/4)$. (335) $r=a\operatorname{sen}^3(\varphi/3)$.

336. Hallar la longitud del arco de la primera vuelta de la espiral de Arquímedes $r=a\varphi$.

337. Mostrar que la longitud del arco de la espiral logarítmica $r=ca^{\varphi}$ a partir de un punto arbitrario hasta el polo, es igual a la longitud de la tangente polar trazada con respecto a la espiral en este punto.

338. Hallar la ecuación de una línea, cuya longitud del arco, medida entre cierto punto fijo A y un punto arbitrario M, es proporcional al coeficiente angular de la tangente trazada en el extremo del arco.

339. Demostrar que la longitud del arco de una catenaria $y=a\operatorname{ch}(x/a)$ a partir de su vértice hasta cierto punto es igual a la proyección de la ordenada de este punto sobre la tangente trazada en este punto.

340. Mostrar que el área limitada por una catenaria, dos ordenadas de sus puntos y por el eje de las abscisas, es proporcional a la longitud del arco correspondiente, además, como coeficiente de proporcionalidad sirve el parámetro a de la catenaria.

341. Demostrar que el producto de las longitudes de arcos medidas entre el vértice de una catenaria y los puntos de tangencia de dos tangentes recíprocamente perpendiculares, es una magnitud constante.

342. Encontrar la parametrización natural de una circunferencia.

343. Encontrar la parametrización natural de la catenaria

$$y = a \operatorname{ch} (x/a).$$

344—353. Hallar la curvatura de las curvas siguientes:

(344) $y = \operatorname{sen} x.$ (345) $y = a \operatorname{ch} (x/a).$

(346) $y^2 = 2px.$ (347) $x = t^2,\ y = t^3.$

(348) $x = a \cos t,\ y = b \operatorname{sen} t.$

(349) $x = a \operatorname{ch} t,\quad y = b \operatorname{sh} t.$

(350) $x = a (t - \operatorname{sen} t),\quad y = a (1 - \cos t).$

(351) $x = a \cos^3 t,\quad y = a \operatorname{sen}^3 t.$

(352) $r = a\varphi.$ (353) $r = a (1 + \cos \varphi).$

354. Hallar la curvatura de la línea definida por la ecuación

$$F (x, y) = 0.$$

355—356. Hallar la curvatura de las siguientes líneas:

(355) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

(356) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

357. Calcular la curvatura de la línea $y = x^4$ en el punto O (0, 0).

358. Las líneas son dadas por su ecuación diferencial $P (x, y)\, dx + Q (x, y)\, dy = 0$. Hallar la curvatura de las mismas.

359. Demostrar que en un punto arbitrario de la línea es válida la igualdad

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2h}{\Delta s^2},$$

donde h es la distancia comprendida desde el punto de la línea para el valor del parámetro $s + \Delta s$ hasta la tangente trazada en el punto de la línea para el parámetro s.

360. Demostrar que el radio de curvatura de la cardioide $r = 2a(1 - \cos\varphi)$ en un punto cualquiera, es igual a 2/3 de la longitud de la normal en el mismo punto. Señalar el método de construcción del centro de curvatura para cualquier punto de una cardioide.

361. Demostrar que el radio de curvatura de la parábola $y = x^2/2p$ es igual a $R = p/\cos^3\alpha$, donde α es el ángulo de inclinación de la tangente con respecto al eje de las abscisas.

362. Demostrar que el radio de curvatura de la espiral logarítmica $r = ca^{\varphi}$ en un punto cualquiera es igual a la longitud de la normal polar para este punto. Utilizando esta propiedad, mostrar un método de construir la circunferencia osculatriz en cualquier punto de la espiral logarítmica.

363. Calcular el radio de curvatura y señalar el método de construir el centro de curvatura en un punto arbitrario de la trayectoria $x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a \operatorname{sen} t$.

364. Demostrar que el segmento que une un punto arbitrario de una cicloide con el centro de curvatura, correspondiente a este punto, se biseca por la base de la cicloide. Señalar el método respectivo de construir el centro de curvatura para cualquier punto de una cicloide.

365. Mostrar que la ordenada de un punto cualquiera de una catenaria es media proporcional entre su parámetro y el radio de curvatura en este punto.

366. Mostrar que el radio de curvatura de la lemniscata de Bernoulli $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ en cualquier punto suyo es tres veces menor que la longitud de la normal polar en este punto. Basándose en esta propiedad, señálese el método de construir el centro de curvatura en un punto arbitrario de una lemniscata.

367. Señalar el método geométrico de construcción de los centros de curvatura correspondientes a los vértices de una elipse.

368. Escribir las ecuaciones de circunferencias osculatrices en los vértices $A(a, 0)$, $B(0, b)$ de una elipse.

369. Escribir la ecuación de una circunferencia osculatriz de la línea $y = \operatorname{sen} x$ en el punto A $(\pi/2, 1)$.

370. Hallar la circunferencia osculatriz de una hipérbola equilátera $xy = 1$ cuyo radio tiene el valor mínimo.

371—373. Hallar sobre las curvas puntos en que la curvatura toma el valor extremo (vértices de las curvas):

(371) $y = e^x$.

(372) $\begin{cases} x = at - d \operatorname{sen} t, \\ y = a - d \cos t. \end{cases}$

(373) $r = a \operatorname{sen}^3 (\varphi/3)$.

374. Para que dos líneas en un punto común tengan una tangencia no inferior al segundo orden es necesario y suficiente que tengan la tangente común y los vectores de curvatura iguales. Demuéstrese esto.

375. Mostrar que en el punto de una línea en el cual el radio de curvatura tiene el máximo o el mínimo, la línea tiene con la circunferencia osculatriz una tangencia no inferior al tercer orden.

376. Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia osculatriz de la parábola $y^2 = 2px$. ¿En qué punto de la parábola la circunferencia tiene con la misma una tangencia de tercer orden?

377. Supongamos que las líneas l_1 y l_2 que se tocan en el punto M se encuentran en el entorno de este punto por un mismo lado con respecto a la tangente y $0 < k_1 < k_2$, donde k_1, k_2 son las curvaturas de las líneas en el punto M. Demostrar que en el entorno del punto M la línea l_1 envuelve la línea l_2.

378. Si en un punto A el radio de curvatura tiene el máximo, entonces la línea en el entorno del punto A se encuentra dentro del círculo de curvatura. Demuéstrese esto.

379. Si en un punto A la curvatura tiene un mínimo, entonces la línea en el entorno del punto A se encuentra fuera del círculo de curvatura. Demuéstrese esto.

380. Hallar una parábola $y = ax^2 + bx + c$ que tenga con la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ en el punto A $(\pi/2, 1)$ comunes la tangente y la curvatura.

381. La circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ es osculatriz en el punto A $(1, 2)$ a una parábola, cuyo eje es paralelo al eje Ox. Hallar la ecuación de esta parábola.

§ 6. Evolutas y evolventes. Ecuaciones intrínsecas

La evoluta, o sea, la figura constituida por los centros de curvatura de una curva definida por las ecuaciones (2) del § 1 tiene las ecuaciones

$$X = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad Y = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.$$

Llámase *evolvente* de la curva dada γ a la curva γ^* con respecto a la cual γ es evoluta. Si la curva γ está definida por la ecuación $r = r(s)$, entonces la ecuación de la familia de sus evolventes tiene la forma $\rho = r + (\lambda - s)\, t$, donde t es el vector unitario de la tangente a la curva γ y λ es un parámetro arbitrario.

Vamos a atribuir a la curvatura de la curva un signo determinado, calculándola por la fórmula $k = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \dot{\alpha}$, donde α es el ángulo que la tangente a la curva forma con el eje Ox. En lo sucesivo los puntos colocados encima de la letra siempre designan la diferenciación del parámetro en cuya calidad se toma la longitud del arco. Se denominan ecuaciones intrínsecas de la curva a las ecuaciones de la forma

$$k = k(s), \qquad F(k, s) = 0,$$
$$k = k(t) \qquad\qquad s = s(t).$$

Si se dan las ecuaciones intrínsecas de una curva, entonces la parametrización de la curva puede ser definida de la forma

$$x = \int \cos\alpha(s)\, ds, \qquad y = \int \operatorname{sen}\alpha(s)\, ds.$$

382. ¿Cómo es la evoluta de una circunferencia?

383—392. Encontrar las ecuaciones y trazar las evolutas de las curvas siguientes:

(383) $x = a\cos t,\ y = b\operatorname{sen} t$.

(384) $x = a\operatorname{ch} t,\ y = b\operatorname{sh} t$. (385) $y = x^2$.

(386) $y = x^{2k}$, k es un número natural mayor que la unidad.

(387) $y = x^{2k+1}$, k es un número natural cualquiera.

(388) $y = \ln x$. (389) $y = \operatorname{sen} x$.

(390) $y = \operatorname{tg} x, \qquad -\pi/2 < x < \pi/2.$

(391) $x = a\,(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t), \qquad y = a \operatorname{sen} t.$

(392) $r = a\,(1 + \cos\varphi).$

393. Demostrar que la evoluta de una cicloide es una cicloide congruente a la dada.

394. Mostrar que la evoluta de una astroide es una astroide semejante a la dada, con la razón de semejanza igual a 2, vuelta con respecto a la dada en un ángulo $\pi/4$.

395. Mostrar que la evoluta de una espiral logarítmica $r = ca^{\varphi}$ es una espiral logarítmica obtenida de la dada, haciéndola girar alrededor del polo en cierto ángulo.

396. Hallar tal condición para el parámetro a de la espiral logarítmica $r = ca^{\varphi}$ que la evoluta de la espiral coincida con la misma espiral.

397. Encontrar las ecuaciones de evolventes de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y trazar el dibujo.

398. Encontrar la ecuación y trazar el dibujo de la evolvente de la catenaria $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ que pasa por su vértice.

399. Encontrar las ecuaciones de evolventes de la parábola

$$x = t, \quad y = t^2/4.$$

400—402. Hallar las longitudes de arcos de las curvas citadas a continuación, representando estas curvas en forma de evolutas de ciertas otras curvas.

(400) De la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

(401) De una onda de la cicloide $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

(402) De la cardioide $r = a\,(1 + \cos\varphi)$.

403—407. Encontrar las ecuaciones intrínsecas de las curvas:

(403) $y = x^{3/2}$. $\qquad$ (404) $y = \ln x$.

(405) $x = a\,(\cos t + t \operatorname{sen} t), \qquad y = a\,(\operatorname{sen} t - t\cos t).$

(406) $x = a\,(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a \operatorname{sen} t$.

(407) $r = a\,(1 + \cos\varphi)$.

408—411. ¿Qué curvas se definen por las ecuaciones intrínsecas siguientes:

(408) $k = a$. (409) $R = as$.

(410) $R = (a^2 + s^2)/a^2$. (411) $s^2 + R^2 = 16a^2$.

412—415. Encontrar las parametrizaciones de las curvas para las cuales:

(412) $R \operatorname{sen}^3 \alpha = a$. (413) $R = ae^{\alpha}$.

(414) $R = a\alpha$. (415) $s = a \operatorname{tg} \alpha$.

416. Demostrar que la cicloide es una *línea isócrona*. Esto quiere decir que si la onda de la cicloide se coloca en el plano vertical con el vértice A hacia abajo, entonces el tiempo empleado por un punto material para la traslación por la cicloide bajo la acción de la fuerza de gravedad de la Tierra a partir de cierta posición inicial M hasta el vértice A, no depende de la posición inicial del punto material.

CAPÍTULO 3

Curvas y líneas espaciales

§ 7. Ecuaciones de curvas y de líneas

La parametrización

$$r = r(t) \tag{1}$$

de una curva (o de una línea) en $\mathbb{R}^3$ la llamaremos *ecuación vectorial paramétrica* de esta curva (de esta línea). Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{2}$$

se denominan *paramétricas.*

Sean $F(x, y, z)$ y $G(x, y, z)$ dos funciones suaves y l es un conjunto de soluciones del sistema

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Si en el punto $M \in l$ los vectores $\operatorname{grad} F = (\partial_x F, \ \partial_y F, \ \partial_z F)$ y $\operatorname{grad} G = (\partial_x G, \ \partial_y G, \ \partial_z G)$ no son colineales, entonces en el entorno del punto M cada una de las ecuaciones (3) define una superficie y la intersección de estas superficies es una línea que se contiene en el conjunto l.

417. Un cilindro circular está definido con respecto al sistema rectangular de coordenadas por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. Supongamos que un punto M se mueve por este cilindro de modo que su proyección sobre el eje Oz se desplace por este eje con velocidad constante, y su proyección sobre el plano xOy gire uniformemente por la circunferencia. La trayectoria del punto M se llama *hélice*. Escribir las ecuaciones paramétricas de la hélice y hallar sus proyecciones sobre los planos de las coordenadas.

418. Un punto M se mueve a lo largo de la generatriz de un cilindro circular con velocidad proporcional al camino recorrido; con ello el cilindro gira en torno a su propio eje con velocidad angular constante. Hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del punto M.

419. Hallar la curva cuya imagen es la intersección de la esfera de radio R y del cilindro circular de diámetro R, una de las generatrices del cual pasa por el centro de la esfera. Esta curva se llama *curva de Viviani*.

420. La recta OL, no perpendicular al eje Oz, gira uniformemente alrededor de éste con una velocidad angular constante ω. El punto M se mueve por la recta OL: a) con una velocidad proporcional a la distancia OM del punto movible hasta el punto O; b) con velocidad constante. En el primer caso el punto M circunscribe una *espiral cónica* y en el segundo, una *hélice cónica*. Escribir las ecuaciones paramétricas de estas líneas.

421. Los ejes de dos cilindros circulares de radios a y b se intersecan bajo el ángulo recto. En la intersección de los cilindros se forman dos líneas cerradas cuyo conjunto se llama *bicilíndrica*. Escribir las ecuaciones implícitas de una bicilíndrica, señalar una de sus parametrizaciones. ¿Qué pasa si $a = b$?

422. Mostrar que la imagen de la curva $x = at \cos t$, $y = at \operatorname{sen} t$, $z = a^2t^2/2p$ se encuentra sobre el paraboloide de rotación y su proyección sobre xOy es una espiral de Arquímedes.

423. Hallar las proyecciones de la imagen de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ sobre los planos de coordenadas.

424. Mostrar que la imagen de la curva $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $z = ct$ se encuentra sobre un cilindro hiperbólico. Hallar sus proyecciones sobre los planos de las coordenadas.

425. Hallar la proyección sobre el plano xOy de la línea de intersección del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y del plano $x + y - z = 0$.

426. Demostrar que la proyección sobre el plano yOz de la línea de intersección del paraboloide elíptico $x = y^2 + z^2$ y del plano $x - 2y + 4z - 4 = 0$ es una circunferencia de radio $R = 3$ con centro en el punto $M(0, 1, -2)$.

427. Mostrar que la imagen de la curva $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $z = a \cos 2t$ se encuentra en la parte acotada del cilindro cuya directriz es una astroide y cuya generatriz es paralela al eje Oz.

428. Representar la imagen de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = e^t$ en forma de intersección de dos superficies.

429. Mostrar que la imagen de la curva $x = \operatorname{sen} 2\varphi$, $y = 1 - \cos 2\varphi$, $z = 2 \cos \varphi$ se encuentra sobre una esfera y es la intersección de los cilindros parabólico y circular.

430. Mostrar que la imagen de la curva $x = a \operatorname{sen}^2 t$, $y = b \operatorname{sen} t \cos t$, $z = c \cos t$ se encuentra sobre un elipsoide.

431. Mostrar que la imagen de la curva $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = ct$ se encuentra sobre un cono circular.

432. ¿Qué resulta de la intersección de los hiperboloides de una hoja $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 - x^2 = 1$?

§ 8. Sistema de referencia de Frenet. Longitud de un arco

Para una curva (línea) representada en el espacio R^3 los vectores del sistema de referencia de Frenet se designan con t, n y b, con ello los ejes de coordenadas y los planos tienen nombres especiales: el eje del vector t es *tangente*, el eje del vector n se llama *normal principal*, el eje del vector b se llama *binormal*, el plano de los vectores n y t es *osculador*, el plano de los vectores n y b se denomina *normal* y el plano de los vectores t y b se denomina *rectificante*.

Las ecuaciones de la tangente a la curva definida por las ecuaciones (1) y (2) del § 7 tienen la forma

$$R = r + \tau r',$$

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'},$$

respectivamente, donde R es el radio vector del punto corriente de la tangente y X, Y, Z son las coordenadas del vector R.

Ecuaciones de la normal principal:

$$R = r + \lambda\left((r' \times r'') \times r'\right),$$

o bien

$$X = x + \lambda\left(z' \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\right),$$

$$Y = y + \lambda \left(x' \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - z' \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} \right),$$

$$Z = z + \lambda \left(y' \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - x' \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} \right).$$

Ecuaciones de la binormal:

$$R = r + \lambda\ (r' \times r''),$$

o bien

$$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}.$$

Ecuación del plano osculador:

$$(R - r)\, r' r'' = 0,$$

o bien

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuación del plano normal:

$$(R - r)\, r' = 0,$$

o bien

$$(X - x)\, x' + (Y - y)\, y' + (Z - z)\, z' = 0.$$

Ecuación del plano rectificante:

$$(R - r)\, r'\ (r' \times r'') = 0,$$

o bien

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Los vectores unitarios de la tangente, de la normal principal y de la binormal se hallan por las fórmulas

$$t = \frac{r'}{|r'|}, \quad n = \frac{(r' \times r'') \times r'}{|(r' \times r'')|\ |r'|}, \quad b = \frac{r' \times r''}{|r' \times r''|}.$$

La longitud del arco de la línea, o el paramétro natural, se determina por la fórmula

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

433—435. Encontrar las ecuaciones de las tangentes a las curvas en los puntos indicados:

(433) $x = \sec t,\ y = \operatorname{tg} t,\ z = at$ para $t = \pi/4$.

(434) $x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t^2$ para $t = 1$.

(435) $x = e^t \cos t,\ y = e^t \operatorname{sen} t,\ z = e^t$ para $t = 0$.

436. Encontrar las ecuaciones de la tangente a la curva

$x = a(t - \operatorname{sen} t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a \operatorname{sen}(t/2)$

en el punto $t = \pi/2$. ¿Qué ángulo forma esta tangente con el eje Oz?

437. ¿En qué puntos la tangente a la curva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ es paralela al plano $3x + y + z + 2 = 0$?

438. Encontrar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal de la hélice $x = 2 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $z = 4t$ en el punto $t = 0$.

439. Se da la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. Escribir las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal en el punto $t = 1$. ¿Qué línea resulta de la intersección de las tangentes con el plano xOy?

440. Demostrar que la línea $a = e^{t/\sqrt{2}} \cos t$, $y = e^{t/\sqrt{2}} \operatorname{sen} t$, $z = e^{t/\sqrt{2}}$ se encuentra sobre el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y corta sus generatrices bajo el ángulo de 45°.

441. Escribir las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva de Viviani (véase el problema 419).

442. Llámase *indicatriz esférica* de una línea a la figura compuesta por los extremos de los vectores unitarios trazados a partir del origen de las coordenadas. Hallar la indicatriz esférica de una hélice.

443. Demostrar que si todos los planos normales de una línea espacial pasan por un punto fijo, entonces la línea se encuentra sobre la esfera (tales líneas se llaman *esféricas*).

444. Encontrar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal de una línea definida por la intersección de dos superficies:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix} = 2.$$

445. Escribir las ecuaciones de la tangente y del plano normal de la línea $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ en un punto arbitrario.

446. Hallar las ecuaciones del plano normal en un punto arbitrario de la línea $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ $(y \neq \pm 1)$.

447. Mostrar que los planos normales de la curva

$$x = a \operatorname{sen}^2 t, \quad y = a \operatorname{sen} t \cos t, \quad z = a \cos t$$

pasan por el origen de las coordenadas.

448. Sean $r = r(s)$ la parametrización natural de una curva, π una recta que pasa por el punto $M_0(s_0)$ de la curva y $d(\Delta s)$ la distancia comprendida entre el punto $M(s_0 + \Delta s)$ y la recta π. Para que la recta π sea tangente a la curva $r = r(s)$ en el punto M_0 es necesario y suficiente que $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{d(\Delta s)}{\Delta s} = 0$. Demuéstrese esto.

449. Demostrar que el plano osculador de la curva birregular $r = r(t)$ en el punto dado $M_0(t_0)$ se puede determinar por cualquiera de las condiciones siguientes:

a) El plano que pasa por el punto M_0 y tiene los vectores directores $r'(t_0)$ y $r''(t_0)$.

b) Sean π el plano que pasa por la tangente a la curva en el punto M_0, $\rho = \rho(s)$ la parametrización natural de la curva, el punto M_0 corresponde al valor del parámetro s_0, y sea $d(\Delta s)$ la distancia del punto $M(s_0 + \Delta s)$ al plano π. El plano π es el plano osculador de la curva en el punto M_0 si y sólo si

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s^2} = 0.$$

c) Un plano que tenga con la curva en el punto M_0 una tangencia no inferior al segundo orden (la definición de la tangencia de una curva con la superficie véase en el § 11).

450. Demostrar que si todos los planos osculadores de una línea birregular pasan por un punto fijo, entonces esta línea es plana.

451. Hallar los planos osculadores de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ que pasan por el punto M_0 (2, $-1/3$, -6) dado.

452. Mostrar que una recta trazada desde un punto arbitrario M de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en paralelo al plano $z = 0$ hasta el encuentro con el eje Oz está en el plano osculador de la curva en el punto M.

453. Escribir la ecuación del plano osculador de la curva $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ en el punto $t = 0$.

454. En las binormales de la curva $x = \cos \alpha \cos t$, $y = \cos \alpha \operatorname{sen} t$, $z = t \operatorname{sen} \alpha$, $\alpha = \text{const}$ están trazados, en el sentido positivo, segmentos de longitud constante igual a la unidad. Escribir la ecuación del plano osculador de la curva formada por los extremos de estos segmentos.

455. Encontrar la ecuación del plano osculador de la línea de intersección de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y de un cilindro hiperbólico $x^2 - y^2 = 3$ en el punto M (2, 1, 2).

456. Demostrar que la imagen de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = 2t$ se encuentra en la superficie $x^2 + y^2 - e^z = 0$ y el plano osculador de la curva coincide con el plano tangente de la superficie.

457—458. Encontrar las ecuaciones de la normal principal y de la binormal de las curvas siguientes en los puntos indicados:

(457) $x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^t \quad$ para $t = 0$.

(458) $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 \quad$ para $t = 1$.

459. Desde cada punto de la curva $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \operatorname{sen}(t/2)$ se ha trazado, sobre su normal principal en el sentido del vector $\boldsymbol{n}$, un segmento de longitud $a\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(t/2)}$. Demostrar que la línea constituida por los extremos de estos segmentos es sinusoide.

460. Hallar los puntos sobre la curva $x = 2/t$, $y = \ln t$, $z = -t^2$ en los cuales la binormal es paralela al plano $x - y + 8z + 2 = 0$.

461. En las binormales de una hélice se han trazado segmentos de igual longitud. Demostrar que los extremos de estos segmentos están sobre otra hélice.

462. Encontrar los vectores unitarios de la tangente, de la normal principal y de la binormal de la curva $x = t \operatorname{sen} t$, $y = t \cos t$, $z = te^t$ en el origen de coordenadas.

463—464. Hallar los vectores unitarios de la tangente, de la normal principal y de la binormal en un punto arbitrario de las curvas siguientes:

(463) $x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t, \quad z = \cos 2t.$

(464) $x = a (t - \operatorname{sen} t)$, $y = a (1 - \cos t)$, $z = 4a \cos (t/2)$.

465. Demostrar que los vectores t, n, b de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en el punto O (0, 0, 0) coinciden con los vectores unitarios de los ejes de las coordenadas.

466. Encontrar las ecuaciones de la tangente, del plano normal, de la binormal, del plano osculador, de la normal principal y del plano rectificante de la hélice

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = bt.$$

Demostrar que la normal principal corta el eje de la hélice en ángulo recto y la binormal forma con él un ángulo constante. Hallar los vectores del sistema de referencia de Frenet.

467. Escribir las ecuaciones vectoriales de las curvas circunscritas por los puntos de intersección de las tangentes, de las normales principales y de las binormales de una curva $r = r(s)$ con el plano xOy.

468. Hallar la longitud del arco de una hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$, desde el punto de intersección con el plano xOy hasta un punto arbitrario M.

469. Escribir la parametrización natural de una hélice.

470. Hallar la longitud del arco de una espira de la curva

$x = a (t - \operatorname{sen} t)$, $y = a (1 - \cos t)$, $z = 4a \cos (t/2)$, comprendido entre dos puntos de intersección suyos con el plano xOz.

471. Hallar la longitud del arco de una línea $x^3 = 3a^2y$, $2xz = a^2$, comprendido entre los planos $y = a/3$, $y = 9a$.

472. Mostrar que la curva cerrada $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$, $z = \cos 2t$ tiene la longitud $s = 10$.

473. Hallar la longitud del arco de una curva $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = at$, comprendido entre los puntos que corresponden a los valores del parámetro 0 y t.

474. Hallar la expresión de la diferencial de longitud del arco de una curva en coordenadas cilíndricas.

475. Hallar la expresión de la diferencial de longitud del arco de una curva en coordenadas esféricas.

§ 9. Fórmulas de Frenet. Curvatura y torsión. Ecuaciones intrínsecas

Las fórmulas de Frenet de una curva birregular orientada en el espacio $\mathbb{R}^3$ tienen el aspecto

$$\frac{dt}{ds} = kn, \quad \frac{dn}{ds} = -kt + \varkappa b, \quad \frac{db}{ds} = -\varkappa n,$$

donde k y $\varkappa$ son las *curvaturas primera* y *segunda* llamadas *curvatura* y *torsión*, respectivamente.

La curvatura de una curva definida por las ecuaciones (1) y (2) del § 7 se calcula por las fórmulas

$$k = |r' \times r''|/|r'|^3$$

o bien

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

Fórmulas para calcular la torsión:

$$\varkappa = (r'r''r''')/(r' \times r'')^2,$$

o bien

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}.$$

En particular, si en calidad de parámetro se toma un parámetro natural s, entonces

$$k = |\ddot{r}|, \quad k = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad \varkappa = (\dot{r}\,\ddot{r}\,\dddot{r})/\ddot{r}^2,$$

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

donde los puntos designan las derivadas del parámetro s. Las ecuaciones $k = k(s)$, $\varkappa = \varkappa(s)$ se llaman *ecuaciones intrínsecas* de la línea.

476. Comprobar que para la curva $r = r(s)$ se cumplen las relaciones siguientes:

$$|\dddot{r}|^2 = k^4 + k^2\varkappa^2 + \dot{k}^2,$$

$$\dot{r} \cdot \ddot{r} = 0, \quad \dot{r} \cdot \dddot{r} = -k^2, \quad \ddot{r} \cdot \dddot{r} = k\dot{k}.$$

477. Demostrar que las fórmulas de Frenet

$$\dot{t} = kn, \quad \dot{n} = -kt + \varkappa b, \quad \dot{b} = -\varkappa n$$

se pueden escribir de la forma $\dot{t} = \omega \times t$, $\dot{n} = \omega \times n$, $\dot{b} = \omega \times b$. Hallar el vector ω (*vector de Darboux*) y averiguar su sentido cinemático.

478. Demostrar que

a) $tb\dot{b} = \varkappa$.

b) $\dot{b}\,\ddot{b}\,\dddot{b} = \varkappa^5 \left(\frac{k}{\varkappa}\right)^{\cdot}$.

c) $\dot{t}\,\ddot{t}\,\dddot{t} = k^5 \left(\frac{\varkappa}{k}\right)^{\cdot}$.

479. Para que una línea sea una recta o un subconjunto abierto de la misma, es necesario y suficiente que $k \equiv 0$. Demuéstrese esto.

480. Para que una línea birregular sea plana es necesario y suficiente que $\varkappa \equiv 0$. Demuéstrese esto.

481. Demostrar que en un punto M_0 la curvatura de la línea L es igual a la curvatura de la proyección L^* de la línea L sobre su plano osculador en el punto M_0.

482—483. Demostrar que para las curvas siguientes la curvatura y la torsión son iguales:

(482) $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at.$

(483) $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3.$

484. Hallar la curvatura y la torsión de la hélice

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = bt.$$

485. Hallar la curvatura de la hélice cónica $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = at$ en el origen de coordenadas.

486—489. Hallar la curvatura y la torsión de las curvas siguientes:

(486) $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at.$

(487) $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2}t.$

(488) $x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2.$

(489) $x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t, \quad z = \cos 2t.$

490. Hallar para cuáles a y b la torsión de la curva $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = bt$ en todos los puntos es igual a su curvatura.

491. Hallar los puntos sobre la curva $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$, $z = \cos 2t$ en los cuales la curvatura tiene el valor mínimo (local).

492. ¿En qué puntos el radio de curvatura de la curva $x = a (t - \operatorname{sen} t)$, $y = a (1 - \cos t)$, $z = 4a \cos (t/2)$ alcanza el mínimo local?;

493. Demostrar que el radio de curvatura de una espiral cónica $x = a \cos \varphi \cdot e^{h\varphi}$, $y = a \operatorname{sen} \varphi \cdot e^{h\varphi}$, $z = be^{h\varphi}$ es proporcional a la distancia entre un punto de la espiral y el eje del cono.

494—495. Demostrar que las curvas siguientes son planas y encontrar las ecuaciones de los planos en los cuales están sus imágenes:

(494) $x = \frac{1+t}{1-t}, \quad y = \frac{1}{1-t^2}, \quad z = \frac{1}{1+t}.$

(495) $x = a_1t^2 + b_1t + c_1$, $y = a_2t^2 + b_2t + c_2$, $z = a_3t^2 + b_3t + c_3$.

496. Hallar una función $f(t)$ tal que la curva $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = f(t)$ sea plana.

497. Llámase *hélice generalizada* a una línea espacial cuyas tangentes forman un ángulo constante con el sentido fijo. Demostrar que una línea será una hélice generalizada si, y sólo si, se cumple una de las condiciones siguientes:

a) las normales principales son perpendiculares al sentido fijo;

b) las binormales forman un ángulo constante con el sentido fijo;

c) la relación entre la curvatura y la torsión es constante.

498. Mostrar que la condición $\dot{r}\,\ddot{r}\,r^{(4)} = 0$ es necesaria y suficiente para que una línea sea una hélice generalizada.

499. Demostrar que la línea $x^3 = 3y$, $2xy = 9z$ es una hélice generalizada.

500. Mostrar que la línea $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ es una hélice generalizada que está en la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al vector a (0, 1, 1).

501. Hallar las condiciones en las cuales la línea $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$ será una hélice generalizada.

502. Si todos los planos normales de una línea birregular contienen un vector constante e, entonces la línea es plana. Demuéstrese esto.

503. Si todos los planos osculadores de una línea birregular son perpendiculares a cierta recta fija, entonces la línea es plana. Demuéstrese esto.

504. Si entre los puntos de dos líneas se puede establecer una correspondencia tal que en los puntos correspondientes las tangentes sean paralelas, entonces las relaciones entre la torsión y la curvatura en estos puntos son de módulos iguales. Demuéstrese esto.

505. Llámase *línea de Bertrand* a una línea tal, cuyas normales principales son simultáneamente normales principales de cierta segunda línea distinta de la primera. Demostrar que la línea de Bertrand se caracteriza por la dependencia $\lambda k + \mu \varkappa = 1$, donde λ, μ son const.

506. Mostrar que el ángulo comprendido entre las tangentes en los puntos correspondientes de líneas de Bertrand es constante.

507. Demostrar que la distancia entre dos puntos correspondientes de líneas de Bertrand es constante.

508. Demostrar que una línea de curvatura constante es línea de Bertrand. Mostrar que en este caso la línea corres-

pondiente tiene la misma curvatura y que cada una de estas líneas se compone de los centros de curvatura de la otra. Mostrar que en los puntos correspondientes las tangentes son perpendiculares.

509. Entre los puntos de dos líneas se ha establecido una correspondencia biunívoca de modo que las tangentes, las normales principales y las binormales en los puntos correspondientes sean paralelas. Demostrar que $\frac{k^*}{k}=\frac{ds}{ds^*}=\frac{\varkappa^*}{\varkappa}$, donde k, $\varkappa$, s son la curvatura, la torsión y la longitud del arco de una línea y k^*, $\varkappa^*$, s^* son las magnitudes respectivas de la otra línea.

510. Llamaremos *evolvente de la línea no plana* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ a la línea $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - s\boldsymbol{t}$. Expresar la curvatura y la torsión de esta línea por la curvatura y la torsión de la línea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$. Demostrar que si la línea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ es una hélice generalizada, entonces la línea $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - s\boldsymbol{t}$ es plana.

511. Mostrar que si la curvatura y la torsión de una línea son constantes la línea es una hélice.

512. Conociendo la curvatura k y la torsión $\varkappa$ de una hélice, encontrar sus ecuaciones paramétricas.

513. Mostrar que entre todas las líneas de Bertrand sólo para la hélice existe un conjunto infinito de líneas dotadas de normales principales comunes.

514—515. Encontrar las ecuaciones intrínsecas de las curvas siguientes:

(514) $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at.$

(515) $x = ct, \quad y = \sqrt{2c} \ln t, \quad z = ct^{-1}.$

516. Una línea está definida por las ecuaciones intrínsecas $k = k(s)$, $\varkappa = \varkappa(s)$. Mostrar que las ecuaciones intrínsecas de una línea simétrica a la dada con respecto al origen de las coordenadas serán $k = k(s)$, $\varkappa = -\varkappa(s)$.

517. Demostrar que en el caso de una tangencia de dos líneas no inferior al tercer orden las torsiones en su punto común son iguales. ¿Es cierto lo inverso?

518. Hallar el orden de pequeñez de la distancia mínima entre las tangentes de una línea con respecto a la distancia entre los puntos de tangencia. Resolver un problema análogo para las normales principales y las binormales.

519. Demostrar que la línea y su circunferencia osculatriz en el punto dado tienen una tangencia no inferior al segundo orden.

520. ¿En qué circunstancias el centro de curvatura de una hélice se encuentra sobre el mismo cilindro que la hélice en cuestión?

521. La esfera, que tiene con la curva en un punto dado una tangencia no inferior al tercer orden, se llama *esfera osculatriz* en este punto (la definición de la tangencia de una línea con la superficie véase en el § 11). Demostrar que si la curva está definida por la ecuación $r = r(s)$, entonces el radio vector del centro de la esfera osculatriz se define por la fórmula $r_c = r + Rn + \frac{\dot{R}}{\varkappa} b$ y el radio de la esfera osculatriz, por la fórmula $R_c = \sqrt{R^2 + \frac{\dot{R}^2}{\varkappa^2}}$, donde $R = \frac{1}{k}$.

522—523. Hallar el radio de la esfera osculatriz en un punto arbitrario de las curvas siguientes:

(522) $x = e^t, \qquad y = e^{-t}, \qquad z = \sqrt{2}t.$

(523) $x = e^t \operatorname{sen} t, \quad y = e^t \cos t, \quad z = e^t.$

524. Mostrar que dos curvas que tienen en cierto punto una tangencia no inferior al tercer orden poseen en este punto una misma esfera osculatriz.

525. Si el radio de una esfera osculatriz es constante, entonces la línea es *esférica* (se encuentra sobre la esfera) o tiene una curvatura constante. Demuéstrese esto.

526. Hallar el conjunto de los centros de las esferas osculatrices de una hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$.

527. Demostrar que el plano osculador de una curva corta su esfera osculatriz por la circunferencia osculatriz.

CAPÍTULO 4

Superficies

§ 10. Ecuaciones de una superficie

Sean S una superficie y (U, r) su parametrización.
La ecuación

$$r = r(u, v) \tag{1}$$

se llama *ecuación vectorial de la región $r(U)$ sobre la superficie S*. Si existe una función vectorial (1) sobre el conjunto $W = \{(u, v)\}$ tal, que la imagen $r(W)$ sea igual a S, entonces (1) se denomina *ecuación vectorial de la superficie*, aunque el par (W, r) puede o no ser la parametrización de S. Si $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, entonces las ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{2}$$

se llaman *ecuaciones paramétricas de la superficie*.

La parametrización de una superficie se representa con frecuencia en forma $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$, donde f es una función suave. En este caso la ecuación

$$z = f(x, y) \tag{3}$$

se denomina *ecuación de la superficie en forma explícita*.

Supongamos que $F(x, y, z)$ es una función suave y S, el conjunto de soluciones de la ecuación

$$F(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

Si en el punto $M \in S$ el vector grad $F = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F)$ es distinto de cero, entonces S en un entorno del punto M es una superficie y (4) se llama *ecuación implícita de la superficie*.

528. En el plano xOz está dada la línea $x = f(u)$, $z = g(u)$ que no corta el eje Oz. Hallar la parametrización de la superficie obtenida al girar esta línea alrededor del eje Oz.

529. Escribir las ecuaciones de un *toro* que se obtiene al girar la circunferencia

$$x = a + b \cos u, \quad y = 0, \quad z = b \operatorname{sen} u \quad (b < a)$$

alrededor del eje Oz.

530. Escribir las ecuaciones de una *catenoide* que se obtiene al girar la catenaria $x = a \operatorname{ch}(u/a)$, $y = 0$, $z = u$ alrededor del eje Oz.

531. Escribir las ecuaciones de la *seudoesfera* que se obtiene al girar la tractriz $x = a \operatorname{sen} u$, $y = 0$, $z = a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$ en torno al eje Oz.

532. Escribir las ecuaciones paramétricas del paraboloide hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

tomando por líneas de coordenadas sus generatrices rectilíneas. ¿Cómo se escribirán estas ecuaciones si la ecuación de la superficie se toma en la forma $z = pxy$?

533. Escribir las ecuaciones paramétricas de una superficie cilíndrica cuyas generatrices sean paralelas al eje Oz y la directriz se define por las ecuaciones $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$, $z = 0$.

534. Escribir las ecuaciones paramétricas de los cilindros hiperbólico y parabólico.

535. Escribir la ecuación de una superficie cilíndrica para la cual la línea $\rho = \rho(u)$ es directriz y las generatrices son paralelas al vector e.

536. Escribir las ecuaciones paramétricas de una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al vector $a(1, 2, 3)$ y la directriz está definida por las ecuaciones $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$.

537. Escribir la ecuación implícita de una superficie cilíndrica con la línea directriz $x = \cos u$, $y = \operatorname{sen} u$, $z = 0$ y con las generatrices rectilíneas paralelas al vector $a(-1, 3, -2)$.

538. Demostrar que la ecuación de una superficie cilíndrica cuyas directrices son paralelas al vector $a(l, m, n)$, tiene la forma $f(nx - lz, ny - mz) = 0$.

539. Hallar la ecuación de una superficie cilíndrica cuya directriz es la línea $x^2 + y^2 = ay$, $z = 0$ y las generatrices son paralelas al vector $a(l, m, n)$.

540. Dada la superficie

$$x = 3u + v^2 + 1, \qquad y = 2u + v^2 - 1, \qquad z = -u + 2v.$$

a) Mostrar que esta superficie es cilíndrica.
b) Escribir la ecuación de cualquiera de sus líneas directrices.
c) Hallar la generatriz rectilínea que pasa por el punto M $(u = 2,\ v = 3)$.

541. Dados el punto $M\ (a, b, c)$ y la línea L

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u).$$

Escribir en la forma paramétrica e implícita las ecuaciones de un cono con el vértice en el punto M y con la línea directriz L.

542. Encontrar la ecuación de un cono formado por las rectas que pasan por el punto $M\ (a, b, c)$ y cortan la parábola $y^2 = 2px$, $z = 0$.

543. Encontrar la ecuación de un cono que tiene el vértice en el punto $M\ (-1, 0, 0)$ y está circunscrito alrededor del paraboloide $2y^2 + z^2 = 4x$.

544. Se da la superficie $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$. Comprobar si los puntos $A\ (4, 2, 3)$, $B\ (1, 4, -2)$ le pertenecen a ella.

545. ¿Qué superficie es definida por las ecuaciones

$$x = u + \operatorname{sen} v, \qquad y = u + \cos v, \qquad z = u + a?$$

546. Hallar la ecuación implícita de una superficie definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + a \cos u \cos v, \qquad y = y_0 + b \cos u \operatorname{sen} v,$$

$$z = z_0 + c \operatorname{sen} u.$$

547. Mostrar que las ecuaciones

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad z = \frac{1}{u^2 + v^2}$$

y

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = u^2$$

representan la misma superficie.

548. Dada la ecuación del cono $r = ue(v)$, $|e| = |e'| = 1$. ¿Qué significado geométrico tienen los parámetros u y v?

549—551. Averiguar la forma de las líneas de coordenadas sobre los planos:

(549) $x = u,\qquad y = v,\qquad z = 0.$

(550) $x = u\cos v,\qquad y = u \operatorname{sen} v,\qquad z = 0.$

(551) $x = \cos u \operatorname{ch} v,\qquad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v,\qquad z = 0.$

552. Mostrar que las ecuaciones paramétricas de un hiperboloide de una hoja se puede representar en la forma

$$x = a\,\frac{uv+1}{u+v},\qquad y = b\,\frac{u-v}{u+v},\qquad z = \frac{uv-1}{u+v}.$$

¿Cuáles son las líneas de coordenadas de la superficie para la parametrización indicada?

553. Escribir las ecuaciones paramétricas de un cilindro circular de modo que en calidad de líneas de coordenadas sirvan: a) hélices y circunferencias; b) hélices y generatrices rectilíneas; c) dos familias de hélices.

554. Escribir las ecuaciones paramétricas de una figura formada por las tangentes a la línea dada $\rho = \rho(u)$.

555. Escribir las ecuaciones paramétricas de una figura formada por las tangentes a la hélice

$$x = a\cos u,\qquad y = a \operatorname{sen} u,\qquad z = bu.$$

¿Es superficie esta figura?

556. Llámase *helicoide de forma general* a una figura formada por cierta línea (perfil) que gira en torno al eje y simultáneamente avanza en la dirección de este eje, además, las velocidades de estos movimientos son proporcionales. Encontrar las ecuaciones de un helicoide de forma general.

557. El *helicoide* de cuyo perfil sirve una recta que corta el eje se llama *directo* si la recta es perpendicular al eje y *oblicuo* si la recta no es perpendicular al eje. Escribir las ecuaciones de estos helicoides tomando por eje de rotación el eje Oz.

558. Hallar la ecuación de una superficie formada por las normales principales de una hélice.

559. Llámase *conoide directo* a la figura obtenida por la rotación de una recta alrededor del eje ortogonal a la misma y por la traslación simultánea de esta recta a lo largo del eje. Escribir la ecuación de un conoide cuyo eje coincide con el eje Oz.

560. Escribir en forma implícita la ecuación de un conoide directo en el cual el desplazamiento a lo largo del eje Oz se determina por la fórmula $z = a \operatorname{sen} 2v$, donde v es la velocidad angular de rotación de la recta.

561. Escribir las ecuaciones paramétricas de la superficie $x^2z^2 = a^2(x^2 + y^2)$. Demostrar que esto es un conoide directo.

562. Una circunferencia de radio a se desplaza de modo que su centro se mueve por una línea dada $\rho = \rho(s)$ y el plano, en el cual ella se encuentra, es en cada momento el plano normal de esta línea. Escribir la ecuación de la figura circunscrita por la circunferencia (la superficie de este género se llama *tubular*).

563. La superficie que admite la parametrización de la forma $r = r_1(u) + r_2(v)$, donde r_1, r_2 son funciones vectoriales suaves, se llama *superficie de traslación*. Demostrar que la superficie de traslación se puede obtener con el avance de cierta línea.

564. Mostrar que la superficie constituida por los centros de segmentos, cuyos extremos pertenecen a dos líneas dadas, es una superficie de traslación.

565. Demostrar que una parte del helicoide directo

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = av$$

para $u \leqslant c$ (donde c es cierto número positivo) es superficie de traslación.

566. Mostrar que paraboloides elíptico e hiperbólico son superficies de traslación.

567. Demostrar que las coordenadas x, y, z, de un punto arbitrario de una superficie de segundo orden, siempre se pueden expresar por funciones racionales de dos parámetros u y v.

§ 11. Plano tangente y normal a una superficie. Superficies regladas. Tangencia de una línea a una superficie

Las ecuaciones del plano tangente correspondientes a las representaciones de las superficies (1), (2), (3), (4) del § 10 tienen, respectivamente, la forma

$$(R - r)\, r_u r_v = 0,$$

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

$$Z - z = p\,(X - x) + q\,(Y - y),$$

donde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$,

$$(X - x)\,F_x + (Y - y)\,F_y + (Z - z)\,F_z = 0;$$

las ecuaciones de la normal:

$$R = r + \lambda\,(r_u \times r_v),$$

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

$$\frac{X-x}{-p} = \frac{Y-y}{-q} = \frac{Z-z}{1}, \qquad \frac{X-x}{F_x} = \frac{Y-y}{F_y} = \frac{Z-z}{F_z}.$$

La superficie que admite la parametrización en la forma $R = r\,(u) + va\,(u)$, donde r y a son funciones vectoriales suaves se llama *reglada*. La línea de coordenadas $u = \text{const}$ es una recta o una parte suya y se denomina *generatriz*. La línea $r = r\,(u)$ se dice *directriz*. La superficie reglada se llama *desarrollable* si en todos los puntos de una generatriz arbitraria el plano tangente a la superficie es el mismo. La superficie reglada que no es desarrollable se llama *oblicua*.

Sea M cierto punto de una superficie reglada S y sea $\pi = \pi\,(u)$ la generatriz rectilínea que pasa por el punto M. Asignando al parámetro u cierto incremento Δu, obtendremos la generatriz rectilínea $\pi' = \pi'\,(u + \Delta u)$. Sea NN' la perpendicular común de las rectas π y π'. Si para $\Delta u \to 0$ el punto N tiende por la recta π a cierta posición límite, entonces este punto límite se llama *punto de garganta* de la generatriz π. El conjunto de todos los puntos de garganta de una superficie reglada S forma en el caso general una línea que se denomina *línea de garganta* (de estricción). La ecuación de la línea de garganta de una superficie reglada tiene la forma

$$\rho = r\,(u) - \frac{dr \cdot da}{(da)^2}\,a\,(u).$$

Supongamos que la curva

$$x = x\,(t), \qquad y = y\,(t), \qquad z = z\,(t) \tag{1}$$

tiene con la superficie

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

un punto común $M(t_0)$. Examinemos la función

$$\Phi(t) = F(x(t), y(t), z(t)).$$

Cuando el punto $M(t)$ tiende por la curva (1) al punto $M(t_0)$, $\Phi(t)$ será una variable infinitamente pequeña si $t \to t_0$. Si el orden de pequeñez de esta magnitud con respecto a $t - t_0$ es igual a $k + 1$, entonces se dice que la curva (1) tiene con la superficie (2) una *tangencia de orden k*.

568. Si por el punto M de la superficie pasa una recta que descansa sobre la misma, entonces el plano tangente a la superficie en el punto M contiene la recta dada. Demuéstrese esto.

569. En la superficie $x = u + \cos v$, $y = u - \operatorname{sen} v$, $z = \lambda u$ se da el punto M $(u = 1, v = \pi/2)$.

a) Escribir las ecuaciones de las tangentes y de los planos normales a las líneas $u = 1$, $v = \pi/2$ en el punto M.

b) Hallar el ángulo comprendido entre las líneas $u = 1$, $v = \pi/2$.

c) Mostrar que la tangente a la línea $u = \operatorname{sen} v$ en el punto M es tangente a la línea $u = 1$ en el mismo punto.

570. Mostrar que la normal en un punto arbitrario de la superficie formada por las tangentes a una hélice forma un ángulo constante con el eje de la línea.

571. Escribir la ecuación del plano tangente a la superficie $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 - v^3$ en el punto $M(3, 5, 7)$.

572. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ en el punto M $(u = 2, v = 1)$.

573. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal en el punto $M(1, 3, 4)$ de la superficie $x = u$, $y = u^2 - 2uv$, $z = u^3 - 3u^2v$.

574. Dada la superficie $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u$, escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie y la ecuación de la tangente a la línea $u = 2$ en el punto M $(u = 2, v = \pi/4)$ de la misma.

575—578. Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las superficies siguientes en los puntos indicados:

(575) $z = x^3 + y^3$ en el punto M (1, 2, 9).

(576) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ en el punto M (3, 4, 12).

(577) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 4 = 0$ en el punto M (3, 1, —1).

(578) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto $M (x_0, y_0, z_0)$.

579. Escribir la ecuación del plano tangente a la seudoesfera

$$x = a \operatorname{sen} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$
$$z = a (\ln \operatorname{tg} (u/2) + \cos u).$$

580. Encontrar las ecuaciones del plano tangente y de la normal al helicoide directo

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = av.$$

Investigar el comportamiento de la normal al desplazarla a lo largo de las líneas de coordenadas.

581. Escribir la ecuación del plano tangente al toro

$$x = (7 + 5 \cos u) \cos v, \quad y = (7 + 5 \cos u) \operatorname{sen} v,$$
$$z = 5 \operatorname{sen} u$$

en el punto $M (u, v)$ para el cual

$$\cos u = 3/5, \quad \cos v = 4/5 \quad (0 < u, \ v < \pi/2).$$

582. Trazar un plano tangente a la superficie $xyz = 1$ que sea paralelo al plano $x + y + z - 3 = 0$.

583. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $xyz = a^3$ forman con los planos de las coordenadas un tetraedro de volumen constante.[1]

584. Mostrar que el plano tangente en un punto arbitrario de un cono pasa por el vértice de este último.

585. Mostrar que todos los planos tangentes a la superficie $z = x^3 + y^3$ en los puntos $M (\alpha, -\alpha, 0)$ forman un haz de planos.

586. Hallar los puntos del toro

$$x = (a + b \cos u) \cos v \quad y = (a + b \cos u) \operatorname{sen} v,$$
$$z = b \operatorname{sen} u$$

en los cuales la normal es perpendicular al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

587. Se da la superficie $x^n + y^n + z^n - d^n = 0$ y el punto $M(a, b, c)$ en la misma (a, b, c, d, son positivos). Mostrar que si A, B, C son los puntos en los cuales el plano tangente en el punto M corta los ejes Ox, Oy, Oz, entonces $\frac{a}{|OA|}+\frac{b}{|OB|}+\frac{c}{|OC|}=1$.

588. Mostrar que el plano tangente en un punto arbitrario de la superficie $f(x - az, y - bz) = 0$ es paralelo a una dirección fija.

589. Demostrar que un plano tangente a una superficie tubular (véase el problema 562) es paralelo a la línea tangente de la línea directriz, y que las normales del mismo son las normales de la línea directriz.

590. Mostrar que los planos tangentes de la superficie

$$z = x\varphi(y/x)$$

pasan por el origen de coordenadas.

591. Demostrar que los planos tangentes a la superficie de traslación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u) + \boldsymbol{r}_2(v)$ a lo largo de cada línea $u = \text{const}$ o $v = \text{const}$ son paralelos a cierta recta.

592. Una superficie S' se llama *paralela* a otra superficie S si esta consta de los extremos de segmentos de longitud constante trazados sobre las normales de la superficie S a partir de los puntos de esta superficie. Consideremos como puntos correspondientes de las superficies S y S' los extremos de los segmentos de los cuales se trata en la definición.

Mostrar que: a) los planos tangentes en los puntos correspondientes de las superficies paralelas S y S' son paralelos; b) la propiedad de paralelismo es recíproca (es decir, si S' es paralela a la S, entonces S es paralela a la S').

593. Supongamos que una superficie es una parte de la figura formada por las tangentes a la línea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$. Escribir la ecuación del plano tangente en un punto arbitrario de la superficie. Investigar su comportamiento al desplazarse el punto de tangencia a lo largo de las generatrices rectilíneas de la superficie.

594. Demostrar que las superficies $z = \operatorname{tg}(xy)$, $x^2 - y^2 = a$ son ortogonales en los puntos de su intersección.

595—597. Demostrar que las siguientes familias de superficies son ortogonales de par en par (λ, μ, ν son los parámetros de las familias):

(595) $4x + y^2 + z^2 = \lambda, \quad y = \mu z, \quad y^2 + z^2 = \nu e^x.$

(596) $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \mu y,$
$x^2 + y^2 + z^2 = \nu z.$

(597) $xy = \lambda z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \mu,$
$x^2 + y^2 + z^2 = \nu (x^2 - y^2).$

598. Mostrar que el plano tangente trazado en cualquier punto de la línea $v = c$ sobre la superficie $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = f(v) + au$, pasa por una recta fija.

599. Demostrar que si todas las normales de una superficie pasan por un punto, entonces esta superficie es una esfera o una región en la esfera.

600. Demostrar que la normal de una superficie de rotación coincide con la normal principal del meridiano y corta el eje de rotación.

601. Si todas las normales de una superficie cortan la misma recta, entonces la superficie será superficie de rotación. Demostrar esto.

602. Demostrar que la superficie reglada $R = r(u) + va(u)$ es desarrollable si y sólo si

$$r'aa' = 0.$$

603. Demostrar que una superficie paralela a una desarrollable es también superficie desarrollable.

604. Demostrar que cualquier superficie desarrollable se puede dividir en las partes siguientes:

a) parte del plano;

b) parte del cilindro;

c) parte del cono;

d) parte de la figura constituida por las tangentes a cierta línea no plana. En este último caso la línea indicada se llama *arista de retroceso.*

605. Sea S una superficie desarrollable del tipo d) del problema 604. Demostrar que el plano tangente en un punto arbitrario de la superficie S coincide con el plano osculador de la arista de retroceso en el punto correspondiente.

606. Llámase *superficie de Catalán* a la superficie reglada oblicua, todas las generatrices de la cual son paralelas a cierto plano denominado *director.* Demostrar que las condiciones necesarias y suficientes para que la superficie reglada

$$r = \rho(u) + va(u)$$

sea una superficie de Catalán son las siguientes:

$$aa'a'' = 0, \quad a'' \neq o.$$

607—610. Hallar la línea de garganta de las superficies siguientes:

(607) Del helicoide directo.

(608) Del hiperboloide de rotación de una hoja.

(609) De la superficie formada por las binormales de una línea espacial.

(610) De la superficie formada por las normales principales de una línea espacial.

611. Demostrar que la superficie formada por las normales trazadas en los puntos de una generatriz de una superficie reglada oblicua es un paraboloide hiperbólico o una parte del mismo.

612. Mostrar que la línea $yz = x$, $xz = y + 1$, tiene, con la superficie $z = xy$ una tangencia de segundo orden en el punto $M(0, -1, 0)$.

613. Hallar el orden de tangencia de la línea

$$x = t^3, \quad y = t^3 + 2t \quad z = t^2$$

con la superficie

$$x^2 + y^2 = x(y + z)$$

en el origen de coordenadas.

614. Una recta que tiene con una superficie de segundo orden una tangencia no inferior al segundo orden se encuentra completamente en ésta superficie. Demuéstrese esto.

615. Si una línea en cada punto suyo tiene con un plano osculador una tangencia no inferior al tercer orden, entonces esta línea es plana. Demuéstrese esto.

616. Supongamos que la línea L tiene con la superficie S en el punto M_0 una tangencia de orden n. Mostrar que la proyección L' de la línea L sobre la superficie S es paralela a cierta dirección que no está en el plano tangente a S en el punto M_0 y tiene con la línea L en el punto M_0 una tangencia de orden n.

§ 12. Familia de superficies. Envolvente

Sea

$$F(x, y, z) = C \tag{1}$$

la ecuación de una familia monoparamétrica de superficies. El conjunto de todos los puntos que satisfacen al sistema de ecuaciones

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad \partial_C F(x, y, z, C) = 0 \tag{2}$$

se llama *discriminante* de la familia (1).

Llámase *envolvente* de la familia (1) la superficie que en cada punto suyo toca cierta superficie de la familia (es decir, tiene con ella un punto común y un plano común tangente a ella). Una parte del discriminante, que es superficie, será envolvente. Los puntos de tangencia de la envolvente de una familia (1) con cierta superficie fija de la familia forman en el caso general una línea que se llama *característica* y se define por el sistema (2) siendo dado el valor C correspondiente a la superficie que se examina.

El conjunto de puntos que satisfacen al sistema de ecuaciones

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad \partial_C F(x, y, z, C) = 0$$
$$\partial^2_{CC} F(x, y, z, C) = 0$$

se denomina *arista de retroceso de una envolvente*. Si una familia de características tiene una envolvente, entonces esta envolvente pertenece a la arista de retroceso.

Sea

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \tag{3}$$

la ecuación de una familia biparamétrica de superficies. El conjunto de soluciones del sistema

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \quad \partial_{C_1} F(x, y, z, C_1, C_2) = 0$$
$$\partial_{C_2} F(x, y, z, C_1, C_2) = 0$$

se llama *discriminante* de la familia (3). La *envolvente* de la familia (3) se define del modo igual al indicado anteriormente.

617—619. Hallar la envolvente de una familia de superficies:

(617) $x^2 + y^2 + (z - C)^2 - 1 = 0.$

(618) $x + C^2y + z - 2C = 0.$

(619) $(x - C)^2 + (y - C)^2 + (z - C)^2 - C^2 = 0 \ (C \neq 0).$

620. Citar el ejemplo de una familia de superficies cuyo discriminante sea una línea.

621. Citar el ejemplo de una familia de superficies cuyo discriminante sea un punto.

622. Hallar la envolvente y las características de la familia de esferas

$$(x - C)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

¿Existe la arista de retroceso de la envolvente?

623. En las cuerdas de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

paralelas a uno de los ejes de simetría se construyen, como en diámetros, esferas. Hallar la envolvente de estas esferas. El mismo problema se plantea para la hipérbola.

624. Hallar la arista de retroceso de la envolvente de una familia de superficies

$$x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha + z = b\alpha,$$

donde $b = \text{const}$, α es parámetro.

625. Hallar la envolvente de una familia de planos cada uno de los cuales forma con los planos de coordenadas el tetraedro de volumen dado V.

626. Encontrar la ecuación de una familia de esferas para la cual la superficie envolvente es un cono sin vértice.

$$x^2 + y^2 = a^2z^2 \quad (z \neq 0).$$

627. Hallar la envolvente de una familia de esferas de radio constante cuyos centros están en la línea dada $\rho = \rho\ (s)$ (*superficie tubular*).

628. Hallar la envolvente, las características y la arista de retroceso de una familia de esferas de radio a cuyos centros se encuentran sobre la circunferencia

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad z = 0.$$

629. Hallar la envolvente, las características y la arista de retroceso de la familia de superficies

$$[(x-C)^2+(y-R)^2+z^2-R^2]\times$$
$$\times[(x-C)^2+(y+R)^2+z^2-R^2]=0\ (y^2+z^2\neq 0).$$

630. Hallar la envolvente de planos osculadores de una línea espacial y sus características. ¿Existe la arista de retroceso de la envolvente?

631. Hallar la envolvente de planos normales de una línea espacial, sus características y la arista de retroceso.

632. Hallar la envolvente de planos rectificantes de una línea espacial, sus características y la arista de retroceso.

633. Hallar la envolvente de una familia de conos circulares iguales (con el ángulo de sección axial igual a 2α) que tienen el vértice en el origen de las coordenadas y tocan el plano $z=0$.

634. Demostrar que las superficies desarrollables y sólo ellas son envolventes de una familia monoparamétrica de planos.

635. La superficie desarrollable σ está cortada por una familia de planos paralelos. Demostrar que las evolutas de secciones también están sobre la superficie desarrollable.

636. Hallar la envolvente de una familia de esferas de radio constante a que tienen los centros en el plano $z=0$.

637. Si todos los planos tangentes de cierta superficie la tocan por líneas, entonces estas líneas son rectas o partes suyas. Demuéstrese esto.

638. Hallar la envolvente de una familia de planos para los cuales la suma de las distancias hasta n puntos fijos es constante.

§ 13. Primera forma cuadrática

Llámase *primera forma fundamental de la superficie S* en $\mathbb{R}^3$, y se designa con φ_1, al producto escalar inducido en cada espacio vectorial tangente de la superficie por el producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Así, pues, a cada par h, p de los vectores tangentes a la superficie (en un mismo punto) la forma φ_1 le pone en correspondencia el número $\varphi_1(h, p) = h\cdot p$. La forma cuadrática φ_1 correspondiente se denomina *primera forma cuadrática de la superficie* y se denota por ds^2

(así como por φ_1). La representación de la forma bilineal φ_1 es equivalente a la representación de la forma cuadrática ds^2. Para el vector tangente h a la superficie $ds^2(h) = \varphi_1(h, h) = h\cdot h = |h|^2$. Si (U, r) es la parametrización de una superficie y $\partial_u r$, $\partial_v r$ es la base movible, entonces las funciones

$$E(u, v) = \partial_u r(u, v)\cdot\partial_u r(u, v),$$

$$F(u, v) = \partial_u r(u, v)\cdot\partial_v r(u, v),$$

$$G(u, v) = \partial_v r(u, v)\cdot\partial_v r(u, v)$$

se llaman *coeficientes de la primera forma cuadrática (fundamental)*. Si h, p son los vectores tangentes a una superficie en el punto $r(u, v)$ y

$$h = h_1\partial_u r(u, v) + h_2\partial_v r(u, v),$$

$$p = p_1\partial_u r(u, v) + p_2\partial_v r(u, v)$$

(es decir, (h_1, h_2) son las coordenadas del vector h en la base movible y (p_1, p_2) son las coordenadas del vector p), entonces

$$ds^2(h) = E(u, v)h_1^2 + 2F(u, v)h_1h_2 + G(u, v)h_2^2,$$

$$\varphi_1(h, p) = E(u, v)h_1p_1 + F(u, v)(h_1p_2 + h_2p_1) + G(u, v)h_2p_2.$$

Con frecuencia ds^2 se escribe de la forma

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

teniendo en cuenta con ello que $du(h) = h_1$, $dv(h) = h_2$.

Si la línea en superficie está definida por las ecuaciones interiores $u = u(t)$, $v = v(t)$, entonces la longitud del arco de esta línea se encuentra por la fórmula

$$s = \int_{t_0}^{t}\sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)\times v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2}\,dt.$$

Si φ es el valor del ángulo comprendido entre las líneas en la superficie (definidas por las ecuaciones interiores $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$ y $u = u_2(t)$, $v = v_2(t)$) en el punto común con las coordenadas curvilíneas $(u_0, v_0) =$

$= (u_1(t_0), v_1(t_0)) = (u_2(t_0)\, v_2(t_0))$, entonces

$$\cos\varphi = \frac{1}{d_1 d_2}\big(E(u_0, v_0)\, u_1'(t_0)\, u_2'(t_0) + F(u_0, v_0)\,(u_1'(t_0)\, v_2'(t_0) + u_2'(t_0)\, v_1'(t_0)) + G(u_0, v_0)\, v_1'(t_0)\, v_2'(t_0)\big),$$

donde

$$d_1 = \sqrt{E(u_0, v_0)\,(u_1'(t_0))^2 + 2F(u_0, v_0)\, u_1'(t_0)\, v_1'(t_0) + G(u_0, v_0)\,(v_1'(t_0))^2},$$

$$d_2 = \sqrt{E(u_0, v_0)\,(u_2'(t_0))^2 + 2F(u_0, v_0)\, u_2'(t_0)\, v_2'(t_0) + G(u_0, v_0)\,(v_2'(t_0))^2}.$$

El área σ de una región cerrada D en la superficie, que es la imagen de una región cerrada D' con respecto a la función vectorial r (o sea, $r(D') = D$), se calcula por la fórmula

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

El difeomorfismo f de la superficie S sobre la superficie Q se llama *isometría* si la longitud del arco de una línea cualquiera l en la superficie S, entre los puntos M y N, es igual a la longitud del arco de la línea $f(l)$ en la superficie Q entre los puntos correspondientes. La superficie S se llama *aplicable* a la superficie Q si para todo punto $M \in S$ existe la isometría del entorno W del punto M en la superficie S sobre cierta parte de la superficie Q.

El difeomorfismo f de la superficie S sobre la superficie Q se denomina *aplicación conforme* si el ángulo comprendido entre dos líneas cualesquiera en la superficie S es igual al ángulo comprendido entre las líneas correspondientes en la superficie Q.

Sean (U, r_1) y (U, r_2) parametrizaciones de las superficies S y Q, respectivamente, y sea

$$f\colon r_1(U) \to r_2(U), \quad r_1(u, v) \to r_2(u, v)$$

la aplicación que pone en correspondencia los puntos con las mismas coordenadas curvilíneas. La aplicación f es isometría (conforme) si, y sólo si, los coeficientes de las primeras formas cuadráticas de las superficies con respecto a las parametrizaciones indicadas coinciden (son correspondientemente proporcionales).

639—649. Hallar la primera forma cuadrática de las siguientes superficies de rotación:

(639) $x = f(u) \cos v$, $y = f(u) \operatorname{sen} v$, $z = g(u)$, o sea, la superficie de rotación con el eje de rotación Oz.

(640) $x = R \cos u \cos v$, $y = R \cos u \operatorname{sen} v$, $z = R \operatorname{sen} u$, o sea una esfera.

(641) $x = a \cos u \cos v$, $y = a \cos u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{sen} u$, o sea, un elipsoide de rotación.

(642) $x = a \operatorname{ch} u \cos v$, $y = a \operatorname{ch} u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{sh} u$, o sea, un hiperboloide de rotación de una hoja.

(643) $x = a \operatorname{sh} u \cos v$, $y = a \operatorname{sh} u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{ch} u$, o sea, un hiperboloide de rotación de dos hojas.

(644) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, o sea un paraboloide de rotación.

(645) $x = R \cos v$, $y = R \operatorname{sen} v$, $z = u$, o sea, un cilindro de sección circular.

(646) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = ku$ $(u \neq 0)$, o sea, un cono circular sin vértice.

(647) $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \operatorname{sen} v$, $z = b \operatorname{sen} u$, o sea un toro.

(648) $x = a \operatorname{ch}(u/a) \cos v$, $y = a \operatorname{ch}(u/a) \operatorname{sen} v$, $z = u$, o sea, un catenoide.

(649) $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$ $(u \neq \pi/2)$, o sea una seudoesfera.

650. Hallar la primera forma cuadrática del helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$.

651. Hallar la primera forma cuadrática del helicoide de forma general $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $x = f(u) + av$.

652. La superficie S es una parte de la figura formada: a) por las tangentes, b) por las normales principales, c) por las binormales de una línea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$, donde u es un parámetro natural. Hallar la primera forma cuadrática de la superficie S.

653. Hallar la primera forma cuadrática de la superficie

$$z = z(x, y).$$

654. Señalar qué forma cuadrática entre las citadas a continuación no puede servir en calidad de primera forma cuadrática de cierta superficie:

a) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv + dv^2$;

b) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv + 4dv^2$;

c) $ds^2 = du^2 - 4du\,dv + 6dv^2$;

d) $ds^2 = du^2 + 4du\,dv - 2dv^2$.

655. Hallar las fórmulas de transformación de los coeficientes de la primera forma cuadrática y de la expresión

$$H = \sqrt{EG - F^2}$$

al pasar a un nuevo sistema curvilíneo de coordenadas.

656. Mostrar que, una vez escogidas correspondientes las coordenadas curvilíneas en la superficie de rotación, su primera forma cuadrática puede ser reducida a la forma

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2.$$

657. Una red de líneas de coordenadas en una superficie se llama *red de Chébishev* si los segmentos de líneas de coordenadas de una familia, comprendidos entre dos líneas de otra familia, tienen longitudes iguales. Demostrar que una red de líneas de coordenadas en superficie es red de Chébishev si, y sólo si, $\partial_v E = 0$, $\partial_v G = 0$.

658. La primera forma cuadrática de una superficie tiene la forma

$$ds^2 = du^2 + 2F\,du\,dv + dv^2.$$

¿Qué se puede decir en este caso de las coordenadas curvilíneas?

659. Reducir la primera forma cuadrática de una esfera, un toro, un catenoide y una seudoesfera a la forma

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + \tilde{G}(\tilde{u})\,d\tilde{v}^2.$$

660. Un sistema de coordenadas curvilíneas en superficie se llama *isotérmico* si la primera forma cuadrática de la superficie en estas coordenadas tiene la forma

$$ds^2 = \Lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Hallar las coordenadas isotérmicas sobre una seudoesfera.

661. Hallar el ángulo bajo el cual se cortan las generatrices rectilíneas del paraboloide hiperbólico $z = axy$.

662. Mostrar que las áreas de regiones en los paraboloides $z = a(x^2 + y^2)/2$ y $z = axy$ que se proyectan sobre la misma región del plano xOy son iguales.

663. Hallar las ecuaciones de líneas que cortan los meridianos de una superficie de rotación bajo un ángulo constante α (de una *loxodromia*).

664. Hallar la ecuación de las loxodromias en una esfera.

665. Si la familia de líneas en una superficie está definida por la ecuación diferencial $A\,du + B\,dv = 0$, entonces la ecuación de las trayectorias ortogonales, o sea, de las líneas que cortan las líneas dadas bajo el ángulo recto, tiene la forma

$$(BE - AF)\,du + (BF - AG)\,dv = 0.$$

Demuéstrese esto.

666. Hallar las trayectorias ortogonales de las generatrices rectilíneas de un cono.

667. La superficie S es una parte de la figura formada por las tangentes a cierta línea: Hallar las trayectorias ortogonales de las generatrices rectilíneas de la superficie S.

668. Encontrar la ecuación diferencial de las líneas que cortan las generatrices rectilíneas de la superficie S del problema 667 bajo un ángulo constante α.

669. Hallar la ecuación diferencial de trayectorias ortogonales de una familia de líneas $\varphi(u, v) = \text{const}$ en una superficie.

670. Hallar las trayectorias ortogonales de una familia de líneas $u + v = \text{const}$ que descansan en una esfera
$x = R\cos u\cos v,\ \ y = R\cos u\,\text{sen}\,v,\ \ z = R\,\text{sen}\,u.$

671. Hallar las trayectorias ortogonales de una familia de líneas $u = Ce^v$ que descansan sobre un helicoide oblicuo $x = u\cos v,\ y = u\,\text{sen}\,v,\ z = u + v$.

672. Sobre un cono circular $x = u\cos v,\ y = u\,\text{sen}\,v,\ z = u$, se examina una familia de líneas $v = u^2 + \alpha$, donde α es un parámetro. Hallar la familia de sus trayectorias ortogonales.

673. Escribir las ecuaciones de un helicoide oblicuo $x = u\cos v,\ y = u\,\text{sen}\,v,\ z = u + v$, tomando las líneas $v = \text{const}$ y sus trayectorias ortogonales por líneas de coordenadas.

674. Deducir la condición de ortogonalidad de dos familias de líneas en una superficie, definidas por la ecuación diferencial

$$P(u, v)\, du^2 + Q(u, v)\, du\, dv + R(uv)\, dv^2 = 0.$$

675. Demostrar que sobre un helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$ la ecuación diferencial

$$du^2 - (u^2 + a^2)\, dv^2 = 0$$

define la red ortogonal.

676. En la superficie $z = axy$ hallar las trayectorias ortogonales de sus generatrices rectilíneas.

677. Demostrar que las líneas que en cada punto suyo bisecan los ángulos comprendidos entre las líneas de coordenadas se definen por las ecuaciones diferenciales

$$\sqrt{E}\, du \pm \sqrt{G}\, dv = 0.$$

678. Encontrar las ecuaciones de las líneas sobre un helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$, que bisecan los ángulos comprendidos entre las líneas de coordenadas.

679. Hallar las ecuaciones de las líneas en la esfera $x = a \cos u \operatorname{sen} v$, $y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = a \cos v$, que bisecan los ángulos comprendidos entre las paralelas y los meridianos.

680. Hallar las ecuaciones de las líneas que bisecan los ángulos comprendidos entre las generatrices rectilíneas en cada punto de la superficie $z = axy$.

681. Dada la superficie

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = uv \quad (|u| + |v| \neq 0),$$

a) Hallar la primera forma cuadrática.

b) Calcular la diferencial de la longitud del arco para las líneas $u = 2$, $v = 1$, $v = au$.

c) Calcular la longitud del arco de la línea $v = au$ entre los puntos de su intersección con las líneas $u = 1$, $u = 2$.

682. Hallar bajo qué ángulo se cortan las líneas $u + v = 0$, $u - v = 0$ sobre el helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$.

683. Hallar el perímetro y los ángulos interiores del triángulo $u = \pm av^2/2$, $v = 1$ que está en una superficie

en la cual

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2.$$

684. Hallar en la superficie con la primera forma cuadrática

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u\, dv^2$$

la longitud del arco de la línea $u = v$ entre los puntos $M_1(u_1, v_1)$ y $M_2(u_2, v_2)$.

685. Hallar el ángulo comprendido entre las líneas $v = 2u$ y $v = -2u$ en la superficie que tiene la primera forma cuadrática

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

686. Hallar el ángulo comprendido entre las líneas $v = u + 1$ y $v = 3 - u$ sobre la superficie $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u^2$.

687. Sobre un helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$ están definidas las líneas

$$v = \ln (u \pm \sqrt{u^2 + a^2}) + C.$$

Calcular las longitudes de los arcos de estas líneas entre dos puntos $M_1(u_1, v_1)$ y $M_2(u_2, v_2)$.

688. Sobre la seudoesfera

$$x = a \operatorname{sen} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$
$$z = a\,(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$$

se dan dos familias de líneas

$$v = \pm a \ln \operatorname{tg}(u/2) + C.$$

Calcular la longitud del arco de la línea de cada familia entre dos puntos $M_1(u_1, v_1)$ y $M_2(u_2, v_2)$.

Demostrar que las longitudes de los arcos de todas las líneas de una familia entre dos líneas fijas de otra familia son iguales.

689. Sobre una esfera está representado un triángulo rectangular cuyos lados son arcos de grandes circunferencias de la esfera. Hallar: a) la relación entre los lados del triángulo; b) su área.

690. Hallar el área de un cuadrilátero sobre el helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$, acotado por las líneas $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.

691. Hallar el área del triángulo curvilíneo $u = \pm av$, $v = 1$ que está en una superficie con la primera forma cuadrática

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2.$$

692. Hallar el área de una región esférica convexa limitada por el bucle de una curva de Viviani.

693. Llámase *lúnula esférica* a la figura constituida por dos grandes semicircunferencias que tienen los extremos comunes. Hallar el área S de una lúnula esférica con el ángulo φ_0 en el vértice.

694. Demostrar que toda superficie cilíndrica se puede superponer a un plano.

695. Demostrar que toda superficie cónica se puede superponer a un plano.

696. Demostrar que se puede superponer a un plano la superficie que es una parte de la figura formada por las tangentes a cierta línea.

697. Demostrar que un helicoide recto se puede superponer a un catenoide.

698. Llámase *superficie de Liouville* a la que tiene una primera forma cuadrática que se puede reducir a la forma

$$ds^2 = (f(u) + g(v))\,(du^2 + dv^2).$$

Demostrar que una superficie aplicable a la superficie de rotación es superficie de Liouville.

699. Demostrar que cualquier superficie de rotación se puede aplicar localmente de un modo conforme sobre un plano.

700. La aplicación de una superficie sobre otra se llama *equiareal* si las regiones de aplicación correspondientes tienen las áreas iguales. Demostrar que si la aplicación de una superficie sobre la otra es conforme y equiareal, entonces es isométrica.

§ 14. Aplicación esférica, segunda forma cuadrática

Sea S una superficie orientada cuya orientación se determina por el campo de m vectores unitarios sobre la superficie, ortogonales a ella. La aplicación de la superficie S en la esfera S^2 tal, que al punto $M \in S$ le pone en correspondencia el punto M' de una esfera cuyo radio vector es igual a $m(M)$, se llama *aplicación esférica* (o *gaussiana*) *de la superficie* S. Con ello, el espacio tangente $T_M S$ se puede identificar con el espacio tangente $T_{M'} S^2$, identificando el vector tangente (M, h) con (M', h). La aplicación esférica es suave y su diferencial en el punto M, considerada como transformación lineal del espacio $T_M S$, se denomina *operador principal de la superficie* (en el punto M) y se designa con $\mathcal{A}$. Con ayuda del operador principal en cada espacio vectorial tangente a la superficie S se determina la forma simétrica bilineal φ_2, llamada *segunda forma fundamental*, por la regla $\varphi_2(h, p) = -\mathcal{A}(h)\cdot p = -h\cdot \mathcal{A}(p)$. La forma cuadrática φ_2 correspondiente se denomina *segunda forma cuadrática de la superficie* y se denota también por φ_2. Si (U, r) es la parametrización de la superficie y

$$m = \frac{\partial_u r \times \partial_v r}{|\partial_u r \times \partial_v r|},$$

entonces

$$\mathcal{A}(\partial_u r) = \partial_u m, \quad \mathcal{A}(\partial_v r) = \partial_v m$$

y para los vectores tangentes $h = \partial_u r h_1 + \partial_v r h_2$ y $p = \partial_u r p_1 + \partial_v r p_2$

$$\mathcal{A}(h) = \partial_u m h_1 + \partial_v m h_2$$

y

$$\varphi_2(h, p) = -\partial_u m\cdot\partial_u r h_1 p_1 - \partial_u m\cdot\partial_v r h_1 p_2 - \partial_v m\cdot\partial_u r h_2 p_1 - \partial_v m\cdot\partial_v r h_2 p_2.$$

Las funciones

$$L(u, v) = -\partial_u m(u, v)\cdot\partial_u r(u, v) = m(u, v)\cdot\partial^2_{uu} r(u, v) = \frac{\partial_u r\,\partial_v r\,\partial^2_{uu} r}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$M(u, v) = -\partial_u m(u, v)\cdot\partial_v r(u, v) = -\partial_v m(u, v)\cdot\partial_u r(u, v) = m(u, v)\cdot\partial^2_{uv} r(u, v) = \frac{\partial_u r\,\partial_v r\,\partial^2_{uv} r}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N(u, v) = -\partial_v m(u, v)\cdot\partial_v r(u, v) = m(u, v)\cdot\partial^2_{vv} r(u, v) = \frac{\partial_u r\,\partial_v r\,\partial^2_{vv} r}{\sqrt{EG-F^2}}$$

se denominan *coeficientes de la segunda forma cuadrática (fundamental) de la superficie.* Tiene lugar la fórmula

$$\varphi_2(h, p) = Lh_1p_1 + M(h_1p_2 + h_2p_1) + Nh_2p_2.$$

La segunda forma cuadrática se escribe frecuentemente así:

$$\varphi_2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

En la base movible $(\partial_u r \partial_v r)$ de una superficie, la matriz del operador principal (de la transformación lineal) $\mathcal{A}$ tiene la forma

$$\frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} FM-GL & FN-GM \\ FL-EM & FM-EN \end{bmatrix}.$$

En cada punto de la superficie se determinan los valores propios (reales) λ_1, λ_2 del operador principal $\mathcal{A}$ y los vectores propios unitarios recíprocamente ortogonales e_1, e_2 tales, que $\mathcal{A}(e_1) = \lambda_1 e_1$, $\mathcal{A}(e_2) = \lambda_2 e_2$. Las direcciones determinadas en cada plano tangente de la superficie por los vectores e_1 y e_2 se llaman *principales.* El punto de la superficie, en que el operador principal es nulo, o sea, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ se denomina *punto de aplanamiento.*

El punto en que el operador principal es una semejanza, o sea, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ se llama *punto de redondeo* (o punto *umbílico*).

Denomínase *curvatura normal* k_n de una línea sobre la superficie en un punto M, al valor de la proyección del vector de curvatura kn de esta línea en el punto M sobre la normal a la superficie, orientada por el vector $m(M)$. Si dos líneas en la superficie tienen en el punto M una recta tangente común, entonces sus curvaturas normales en este punto coinciden. Por eso la curvatura normal en el punto M se puede considerar como función de la dirección en el plano tangente en el punto M y llamarla *curvatura normal de la superficie en la dirección dada.* La curvatura normal de una línea que tiene en el punto M el vector tangente h se calcula por la fórmula

$$k_n(h) = \frac{\varphi_2(h)}{\varphi_1(h)}.$$

Si por la normal a la superficie en el punto M se pasa un plano, entonces en el entorno del punto M la intersección de este plano con la superficie es línea y se llama *sección normal*. La curvatura de la sección normal coincide con el módulo de su curvatura normal. La curvatura k de una línea en superficie está enlazada con la curvatura k_0 de la sección normal, que tiene con la línea en cuestión la tangente común, según la fórmula

$$k_0 = k \mid \cos \theta \mid,$$

donde θ es el ángulo comprendido entre el vector m y el vector n de la normal principal de la línea. Las curvaturas normales de una superficie en las direcciones principales se llaman *curvaturas normales principales* y se designan mediante k_1 y k_2.

Existen las fórmulas

$$k_1 = -\lambda_1, \quad k_2 = -\lambda_2$$

y k_1, k_2 son las raíces de la ecuación

$$(EG - F^2)\, k^2 - (EN + GL - 2FM)\, k + LN - M^2 = 0.$$

Si el vector tangente h engendra el ángulo φ con el vector e_1 de la dirección principal, entonces

$$k_n (h) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi,$$

o sea, la *fórmula de Euler*.

La *curvatura total* (o *gaussiana*) de una superficie en un punto se determina por la fórmula

$$K = \det \mathcal{A} = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

y la *curvatura media*, por la fórmula

$$H = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathcal{A} = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN + GL - 2FM}{2\,(EG - F^2)}.$$

Si $K > 0$, entonces el punto de la superficie se llama *elíptico*; si $K < 0$, *hiperbólico*; si $K = 0$, *parabólico*.

Si a partir de cierto punto M de una superficie se traza en la tangente a cada sección normal un segmento igual a la raíz cuadrada del radio de curvatura de esta sección, entonces se obtiene una línea que se denomina *de Dupin*.

701—714. Hallar los conjuntos de puntos sobre una esfera en los que se representan las superficies indicadas a continuación con su aplicación esférica:

(701) Una esfera.

(702) Un elipsoide.

(703) Un paraboloide elíptico.

(704) Un hiperboloide de rotación de una hoja.

(705) Un hiperboloide de rotación de dos hojas.

(706) Un cilindro elíptico.

(707) Un cilindro parabólico.

(708) Un cilindro hiperbólico.

(709) Un cono circular.

(710) Un catenoide.

(711) Una seudoesfera.

(712) Un toro.

(713) El cilindro $y = x^3$.

(714) Un helicoide recto.

715. Supongamos que la superficie S es una parte de la figura constituida por las tangentes de la curva espacial $r = r(t)$. Demostrar que la imagen de la superficie S en aplicación esférica es la curva sobre la esfera.

716—726. Hallar la segunda forma cuadrática de las superficies de rotación siguientes:

(716) $x = f(u) \cos v$, $y = f(u) \operatorname{sen} v$, $z = g(u)$, o sea, una superficie de rotación con el eje de rotación Oz.

(717) $x = R \cos u \cos v$, $y = R \cos u \operatorname{sen} v$, $z = R \operatorname{sen} u$, o sea, una esfera.

(718) $x = a \cos u \cos v$, $y = a \cos u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{sen} u$, o sea, un elipsoide de rotación.

(719) $x = a \operatorname{ch} u \cos v$, $y = a \operatorname{ch} u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{sh} u$, o sea, un hiperboloide de rotación de una hoja.

(720) $x = a \operatorname{sh} u \cos v$, $y = a \operatorname{sh} u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{ch} u$, o sea, un hiperboloide de rotación de dos hojas.

(721) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, o sea, un paraboloide de rotación.

(722) $x = R \cos v$, $y = R \operatorname{sen} v$, $z = u$, o sea, un cilindro de sección circular.

(723) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = ku$ $(u \neq 0)$, o sea, un cono circular sin vértice.

(724) $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \operatorname{sen} v$, $z = b \operatorname{sen} u$, o sea, un toro.

(725) $x = a\,\mathrm{ch}\,(u/a)\cos v$, $y = a\,\mathrm{ch}\,(u/a)\,\mathrm{sen}\,v$, $z = u$, o sea, un catenoide.

(726) $x = a\,\mathrm{sen}\,u\cos v$, $y = a\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v$, $z = a\,(\ln \mathrm{tg}\,(u/2) + \cos u)$, o sea, una seudoesfera.

727. Hallar la segunda forma cuadrática del helicoide directo $x = u\cos v$, $y = u\,\mathrm{sen}\,v$, $z = av$.

728. Mostrar que cualesquiera que se escojan las coordenadas curvilíneas sobre un plano la segunda forma cuadrática es igual idénticamente al cero.

729. Si la segunda forma cuadrática de la superficie

$$z = f(x, y)$$

es idénticamente igual a cero, entonces la superficie es un plano o una parte de este último. Demuéstrese esto.

730. Mostrar que las ecuaciones del catenoide (problema 530) se puede representar en la forma

$$x = \sqrt{u^2 + a^2}\cos v,$$

$$y = \sqrt{u^2 + a^2}\,\mathrm{sen}\,v,$$

$$z = a\ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right).$$

Hallar la segunda forma cuadrática del catenoide con la parametrización indicada y calcular la curvatura normal de las líneas de coordenadas.

731. La superficie S es una parte de la figura constituida por las tangentes a una línea espacial. Hallar las curvaturas principales de la superficie S.

732. Calcular las curvaturas principales en los vértices del hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

733. Hallar las direcciones principales y las curvaturas principales del helicoide recto $x = u\cos v$, $y = u\,\mathrm{sen}\,v$, $z = av$.

734. Demostrar que las direcciones principales de un helicoide recto bisecan los ángulos comprendidos entre las direcciones de la generatriz y de la hélice.

735. Calcular las curvaturas principales de la superficie $z = xy$ en el punto $M\,(1, 1, 1)$.

736. Calcular las curvaturas principales de la superficie

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

en el punto M (0, 0, 0).

737. Mostrar que en todo punto de la superficie $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = \lambda u$, una de las secciones normales principales es recta.

738. Hallar las curvaturas de las secciones normales de la superficie $y = x^2/2$, a) en un punto arbitrario; b) en los puntos de las líneas que se obtienen en las secciones de la superficie por los planos $z = k$ en las direcciones que van por las tangentes a estas líneas; c) en el punto M (2, 2, 4) en la dirección de la tangente a la línea $y = x^2/2$, $z = x^2$.

739. En la superficie $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ se da el punto P ($u = 1$, $v = 1$).

a) Calcular las curvaturas principales de la superficie en el punto P.

b) Hallar las ecuaciones de las tangentes PT_1, PT_2 a las secciones normales tangentes en el punto indicado.

c) Calcular la curvatura de la sección normal en el punto P la cual pasa por la tangente a la línea $v = u^2$.

740. Dada la superficie

$$z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2.$$

a) Hallar en el origen de las coordenadas la ecuación de la indicatriz de Dupin.

b) Calcular en el origen de las coordenadas el radio de curvatura de la sección normal, la tangente al cual forma un ángulo de 45° con el eje Ox.

741. En el plano tangente en un punto M de una superficie están trazadas n líneas que forman entre sí ángulos iguales π/n. Mostrar que

$$\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}\right)=H,$$

donde $1/r_i$ son las curvaturas normales de las líneas en la superficie, que tocan las rectas en cuestión.

742. Por el vértice M de un elipsoide de rotación se trazan todas las líneas posibles. Hallar la figura constituida por los centros de curvatura de estas líneas en el punto M.

743. Mostrar que las superficies desarrollables se caracterizan por el hecho de que su curvatura total en todos los puntos es igual al cero.

744. Hallar las superficies para las cuales la segunda forma cuadrática sea un cuadrado completo.

745. Mostrar que uno de los radios principales de curvatura de una superficie de rotación es igual al segmento de la normal, comprendido entre la superficie y el eje de rotación.

746. Hallar la curvatura total de las superficies indicadas en los problemas 639—649 como producto de las curvaturas principales (sin calcular las formas cuadráticas).

747. Si una parábola gira en torno a la directriz, se obtiene una superficie en la cual $|R_1| = 2|R_2|$, donde R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura. Demuéstrese esto.

748. Hallar la expresión de la curvatura total de una superficie referida a las coordenadas isotérmicas.

749. Hallar la expresión de la curvatura total de una superficie referida a las *coordenadas semigeodésicas*, o sea, a tales en que la primera forma cuadrática tiene el aspecto

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2.$$

750. Hallar la curvatura total de una superficie cuya forma cuadrática sea

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}\, dv^2.$$

751. Hallar la curvatura total del paraboloide

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

752. Mostrar que si la primera forma cuadrática tiene el aspecto

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2,$$

entonces su curvatura total se calcula por la fórmula

$$K = \frac{d^2_{uv}\omega}{\operatorname{sen}\omega}.$$

753. Hallar la curvatura total de la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$.

754. Demostrar que la curvatura total de una superficie con la primera forma cuadrática

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c^2)^2}$$

es constante.

755. La superficie S es una parte de la figura constituida por las normales principales (por las binormales) de una línea espacial. Hallar la curvatura total de la superficie S.

756. Hallar la curvatura total y la media del helicoide directo $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$. ¿En qué líneas la curvatura total es constante?

757. Hallar la curvatura total y la media de la superficie $z = f(x, y)$.

758. Hallar la curvatura total y la media de la superficie de rotación $z = f(\rho)$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

759. Hallar la curvatura media de un cilindro circular de radio a.

760. Supongamos que una superficie fue obtenida haciendo girar en torno al eje l una línea L que no tenga puntos con curvatura nula. Si la línea L está vuelta con concavidad hacia el eje l, entonces la superficie estará compuesta por puntos elípticos; pero si está vuelta hacia el eje l con convexidad, esta superficie estará constituida por puntos hiperbólicos. Demuéstrese esto.

761. Hallar los puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos sobre un toro.

762—766. Investigar el carácter de los puntos en las superficies obtenidas por la rotación de las líneas siguientes:

(762) La sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(x \neq k\pi)$ gira alrededor del eje Ox.

(763) La sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(x \neq k\pi)$ gira alrededor del eje Oy.

(764) La línea $y = \ln x$ $(x \neq 1)$ gira alrededor del eje Ox.

(765) La línea $y = \ln x$ gira alrededor del eje Oy.

(766) La rama de la hipérbola $xy = 1$ $(x > 0,\ x \neq \sqrt{-B/A})$ gira alrededor de la recta $Ax + By = 0$.

767—775. Investigar el carácter de los puntos en las superficies de segundo orden siguientes:

(767) Un elipsoide.
(768) Un hiperboloide de una hoja.
(769) Un hiperboloide de dos hojas.
(770) Un paraboloide elíptico.
(771) Un paraboloide hiperbólico.
(772) Un cilindro elíptico.
(773) Un cilindro parabólico.
(774) Un cilindro hiperbólico.
(775) Un cono sin vértice.

776. Averiguar el carácter de los puntos de la superficie $z = f(u)$, donde $u = \sqrt{x^2 - y^2}$.

777. Mostrar que todos los puntos de la superficie $x + y = z^3$ son parabólicos.

778. Demostrar que la única superficie conexa con curvatura total no nula constituida completamente por los puntos de redondeo es una esfera o parte de la esfera.

779. Para que un punto de una superficie sea un punto de redondeo es necesario y suficiente que en este punto se cumplan las condiciones

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

Demuéstrese esto.

780. Señalar el método geométrico de construcción de los puntos de redondeo para una superficie de rotación.

781. La sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(x \neq k\pi)$ gira en torno al eje Ox. Hallar en la superficie de rotación los puntos de redondeo.

782—786. Hallar los puntos de redondeo de las superficies siguientes:

(782) Del elipsoide de rotación.
(783) Del paraboloide de rotación.
(784) Del paraboloide elíptico.
(785) Del elipsoide de tres ejes.
(786) Del hiperboloide de dos hojas.

787. Mostrar que los puntos de redondeo de la superficie

$$x = \frac{u^2}{2} + v, \qquad y = u + \frac{v^2}{2}, \qquad z = uv$$

se encuentran en las líneas

$$u = v, \quad u + v + 1 = 0.$$

788. Demostrar que el punto de redondeo se caracteriza por la igualdad

$$H^2 = K.$$

789. Citar un ejemplo de superficie con un único punto de aplanamiento.

790. Citar un ejemplo de superficie en la cual los puntos de aplanamiento forman una línea.

791. Demostrar que la única superficie constituida enteramente por puntos de aplanamiento es un plano o parte del plano.

§ 15. Redes conjugadas y líneas asintóticas

Una familia uniparamétrica de líneas en una superficie definida por la ecuación

$$f(u, v, C) = 0,$$

se llama *regular* si por cada punto de la región en examen pasa una y solamente una línea de la familia. Denomínase *red de líneas* en superficie al conjunto de dos familias regulares cuyas líneas, intersecándose, no se tocan.

Dos direcciones en el plano tangente de la superficie representadas por los vectores h y p se llaman *conjugadas* si $\varphi_2(h, p) = 0$, o sea, si

$$Lh_1p_1 + M(h_1p_2 + h_2p_1) + Nh_2p_2 = 0,$$

donde $h = (h_1, h_2)$, $p = (p_1, p_2)$.

Una *red de líneas* en superficie se dice *conjugada* si en cada punto los vectores tangenciales a las líneas de diferentes familias de esta red están conjugados.

La dirección determinada por el vector h, se denomina *asintótica* si $\varphi_2(h, h) = 0$. La dirección asintótica viene caracterizada por el hecho de que la curvatura normal de la superficie en esta dirección es igual a cero. Una línea en superficie se llama *asintótica* si en cada punto su tangente tiene la dirección asintótica. Las representaciones interiores de líneas asintóticas se hallan como soluciones de la ecuación diferencial

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0,$$

En una superficie compuesta por puntos elípticos no hay líneas asintóticas. En una superficie constituida por puntos hiperbólicos, por cada punto pasan dos líneas asintóticas. En una superficie formada por puntos parabólicos que no sean puntos de aplanamiento, por cada punto pasa una línea asintótica.

792. Hallar las ecuaciones diferenciales de las familias de líneas en superficie que forman una red conjugada con la familia de líneas de coordenadas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$.

793. Hallar la condición de conjugación de dos familias de líneas en superficie, definidas por la ecuación diferencial

$$P(u, v)\, du^2 + Q(u, v)\, du\, dv + R((u, v)\, dv^2 = 0.$$

794. Las líneas $v^2\, du^2 - u^2\, dv^2 = 0$ que se encuentran sobre el helicoide $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$, forman una red conjugada. Demuéstrese esto.

795. Encontrar la ecuación diferencial de la familia de líneas en superficie que forman una red conjugada con la familia de líneas $\varphi(u, v) = C$.

796. Mostrar que las líneas de coordenadas de la superficie de traslación $r = r_1(u) + r_2(v)$ forman una red conjugada.

797. El paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$$

está cortado por los planos $x + y = C$, donde C es una constante arbitraria. Hallar la familia de líneas que forman con estas secciones una red conjugada.

798. En el punto $M(1, 1, 1)$ de la superficie $xyz = 1$ hállese la dirección conjugada con la dirección $a(1, -2, 1)$.

799. La familia monoparamétrica de líneas en superficie está definida por la ecuación diferencial

$$A(u, v)\, du + B(u, v)\, dv = 0.$$

Hallar la ecuación diferencial de la familia de las líneas conjugadas con las dadas.

800. En una superficie desarrollable una familia de generatrices rectilíneas está conjugada con toda familia monoparamétrica de líneas. Demuéstrese esto.

801. Hallar las líneas conjugadas a la familia de líneas $u + v = C$ sobre el helicoide oblicuo $x = u \cos v$, $y = v \operatorname{sen} v$, $z = u + v$.

802. Demostrar que una línea en superficie es asintótica si, y sólo si, satisface una de las condiciones siguientes:

a) en cada punto suyo la tangente tiene la dirección asintótica;

b) en cada punto la curvatura normal de la línea es igual a cero;

c) en los puntos de la línea donde su curvatura se distingue de cero el plano osculador de la línea coincide con el plano tangente a la superficie.

803. Para que las líneas de coordenadas en superficie sean asintóticas es necesario y suficiente que $N = L = 0$. Demuéstrese esto.

804. Hallar las líneas asintóticas de una seudoesfera. Demostrar que forman una red de Chébishev.

805. Sea l una línea asintótica a la superficie Φ. Demostrar que las características de la familia monoparamétrica de planos tangentes a la superficie Φ a lo largo de la línea l coinciden con las tangentes a la línea l.

806. Encontrar la ecuación diferencial de las líneas asintóticas de una superficie de rotación.

807. Hallar las líneas asintóticas del catenoide $x = \operatorname{ch} u \cos v$, $y = \operatorname{ch} u \operatorname{sen} v$, $z = u$.

808. Investigar las líneas asintóticas de un toro.

809. Hallar las líneas asintóticas de un helicoide recto.

810. Hallar las líneas asintóticas de un hiperboloide de una hoja.

811. Una recta se desplaza en paralelo al plano xOy, cortando el eje Oz y la línea $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$. Hallar las líneas asintóticas a la superficie descrita por esta recta.

812. Mostrar que la línea

$$x = \frac{2}{1+t}, \quad y = \frac{2}{1-t}, \quad z = t$$

es una línea asintótica de la superficie

$$z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}.$$

813. En la superficie engendrada por las normales principales de una línea espacial esta línea es asintótica. Demuéstrese esto.

814. Una superficie se llama *mínima* si su curvatura media es idéntica a cero. Mostrar que en la superficie mínima la red de líneas asintóticas es ortogonal, o sea, en todos los puntos las líneas de una familia son ortogonales a las líneas de la otra.

815. Si en cierto punto de una superficie la curvatura media es igual a cero, entonces las direcciones asintóticas son perpendiculares recíprocamente. Demuéstrese esto.

816. Mostrar que en un plano toda línea es asintótica e, inversamente, la superficie en que toda línea es asintótica es un plano o parte del plano.

817. Mostrar que en una superficie paralela a la dada las líneas correspondientes a las líneas asintóticas de la superficie en cuestión serán asintóticas si, y sólo si, la superficie dada es desarrollable.

818. Demostrar que la línea l de una superficie y su aplicación esférica l' tienen en los puntos correspondientes las tangentes perpendiculares si, y sólo si, l es una línea asintótica.

§ 16. Líneas de curvatura

Una línea en una superficie se llama *línea de curvatura* si en cada punto de la línea su tangente tiene la dirección principal. Las representaciones interiores de las líneas de curvatura se hallan de la ecuación diferencial

$$\begin{vmatrix} E\,du+F\,dv & F\,du+G\,dv \\ L\,du+M\,dv & M\,du+N\,dv \end{vmatrix}=0.$$

Por cada punto de la superficie que no sea punto de aplanamiento o de redondeo, pasan dos líneas de curvatura recíprocamente ortogonales.

819. Demostrar que una línea en superficie es línea de curvatura si, y sólo si, se cumple una de las condiciones siguientes:

a) la línea en cada punto va por la dirección principal;

b) la curvatura normal en cada punto suyo es igual a una de las curvaturas principales;

c) las normales a la superficie a lo largo de la línea forman una superficie desarrollable.

820—826. Hallar las líneas de curvatura de las superficies siguientes:

(820) De una superficie cilíndrica arbitraria.

(821) De una superficie cónica arbitraria.

(822) De una superficie de rotación arbitraria.

(823) De la superficie $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = v$.

(824) De una superficie desarrollable arbitraria.

(825) De un helicoide recto.

(826) De un paraboloide elíptico.

827. En un plano o en una esfera toda línea es línea de curvatura. Demuéstrese esto.

828. Demostrar que las líneas de coordenadas de una superficie son líneas de curvatura si, y sólo si, $F = M = 0$.

829. Mostrar que las líneas de coordenadas de la superficie $x = 3u - u^3 + 3uv^2$, $y = v^3 - 3u^2v - 3v$; $z = 3(u^2 - v^2)$ son líneas de curvatura.

830. Demostrar que la generatriz rectilínea de una superficie reglada oblicua no puede ser línea de curvatura.

831. Hallar la envolvente de la familia de superficies normales, trazadas en los puntos de la línea de curvatura.

832. Demostrar que en la región de los puntos hiperbólicos de una superficie las líneas de curvatura en cada punto bisecan los ángulos comprendidos entre las líneas asintóticas.

833. Mostrar que a las líneas de curvatura de una superficie S en una superficie paralela a ésta corresponden también líneas de curvatura.

834. Averiguar en qué condiciones a la red ortogonal en la superficie dada corresponderá la red ortogonal en una superficie paralela a la indicada.

835. ¿En qué condiciones el sistema de secciones circulares de un elipsoide es sistema de líneas de curvatura?

836. En cualquier superficie existe una única red ortogonal conjugada que coincide con las líneas de curvatura de la superficie. Demuéstrese esto.

837. Para que la línea de curvatura de cierta superficie, por la cual ella corta otra superficie, sea línea de curvatura también de esta última, es necesario y suficiente que estas superficies se intersequen bajo un ángulo constante. Demuéstrese esto.

838. Demostrar que la aplicación esférica de la línea de curvatura plana de una superficie es una circunferencia.

839. Demostrar que con la aplicación esférica de una superficie, la línea l en superficie y su imagen l' tendrán las tangentes paralelas en los puntos correspondientes si, y solo si, l es línea de curvatura.

§ 17. Líneas geodésicas

Llámase *línea geodésica* en superficie a la línea, en cada punto de la cual se cumple una de las condiciones:

a) la curvatura de la línea es igual a cero;

b) la normal a la superficie es la normal principal de la línea.

Si la red de coordenadas es ortogonal, entonces las ecuaciones diferenciales de las representaciones interiores de las líneas geodésicas dadas tienen la forma

$$\left.\begin{aligned} 2E\frac{d^2u}{ds^2}+\partial_u E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\partial_v E\,\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds}-\partial_u G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0,\\ 2G\frac{d^2v}{ds^2}-\partial_v E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\partial_u G\,\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds}+\partial_v G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

considerando que $dv\neq 0$, este sistema puede ser sustituido por la ecuación

$$\frac{d^2u}{dv^2}+\frac{\partial_v E}{2G}\left(\frac{du}{dv}\right)^3+\left(\frac{\partial_u E}{2E}-\frac{\partial_u G}{G}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)^2+\\ +\left(\frac{\partial_v E}{E}-\frac{\partial_v G}{2G}\right)\frac{du}{dv}-\frac{\partial_u G}{2E}=0.$$

Serán o no en este caso las líneas $v=\text{const}$ geodésicas, conviene comprobarlo partiendo del sistema (1).

Por cada punto de una superficie pasa en la dirección dada una sola línea geodésica.

Llámase *curvatura geodésica* de la línea sobre una superficie en el punto dado a la longitud de proyección del vector de curvatura de la línea $k\mathbf{n}$ sobre el plano tangente a la superficie en este punto.

Denomínase *torsión geodésica*, correspondiente a la dirección dada, a la torsión de la línea geodésica que pasa en esta dirección. Si en la superficie las coordenadas curvilíneas están escogidas de modo tal que una familia de líneas de coordenadas se compone de líneas geodésicas y la segunda, de sus trayectorias ortogonales, además una de las coordenadas curvilíneas coincide con la longitud de arcos de las líneas de coordenadas de la primera familia, entonces el sistema de coordenadas se llama *semigeodésica*. En tal sistema de coordenadas la primera forma cuadrática es

$$ds^2 = du^2 + G(u,\ v)\, dv^2.$$

840. Demostrar que la línea geodésica en una superficie se caracteriza completamente por una de las propiedades siguientes:

a) En cada punto de la línea donde su curvatura es distinta de cero la normal a la superficie es la normal principal de la línea.

b) En cada punto de la línea donde su curvatura es distinta de cero la normal a la superficie está en el plano osculador de la línea.

c) En cada punto de la línea su curvatura geodésica es igual a cero.

d) En cada punto de la línea su curvatura es igual al valor absoluto de la curvatura normal.

e) En cada punto de la línea donde su curvatura es distinta de cero su plano rectificante coincide con el plano tangente a la superficie.

841. Demostrar que toda línea recta en una superficie es una línea geodésica.

842. Dos superficies son tangentes entre sí por la línea l. Demostrar que si l es línea geodésica en una superficie, entonces ella debe ser geodésica también en la otra superficie.

843. Mostrar que la ecuación diferencial de las líneas geodésicas de la superficie $r = r(u,\ v)$ se puede representar en la forma $N\, dr\, d^2r = 0$, donde N es el vector de la normal de la superficie.

844. Demostrar que las líneas geodésicas de un plano son sólo rectas.

845. Demostrar que las líneas geodésicas de una superficie cilíndrica son sólo generatrices rectilíneas y hélices generalizadas.

846. Demostrar que los meridianos de una superficie de rotación son líneas geodésicas.

847. Demostrar que la paralela de una superficie de rotación será geodésica si, y sólo si, la tangente al meridiano en sus puntos es paralela al eje de rotación.

848. Hallar las líneas geodésicas sobre una esfera.

849. Demostrar que una línea geodésica es asintótica si, y sólo si, es recta.

850. Demostrar que una línea geodésica es línea de curvatura si, y sólo si, es plana.

851. La envolvente de los planos rectificantes de una línea geodésica en una superficie desarrollable es la superficie dada. Demuéstrese esto.

852. El vector de Darboux de una línea geodésica en una superficie desarrollable está orientado por la generatriz en el punto dado. Demuéstrese esto.

853. En la superficie que envuelve los planos rectificantes de una línea espacial, esta línea es geodésica. Demuéstrese esto.

854. Demostrar que la curvatura geodésica de una línea en una superficie puede ser calculada por la fórmula

$$k_g = m\dot{r}\ddot{r}\dddot{r},$$

donde m es el vector unitario de la normal a la superficie.

855. Demostrar que la curvatura geodésica es igual a la curvatura de la proyección de la línea sobre el plano que toca la superficie en el punto dado de la línea.

856—858. Hallar la curvatura geodésica:

(856) De una circunferencia de radio r que descansa sobre una esfera de radio R.

(857) De las hélices u = const que están sobre el helicoide recto $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$.

(858) De las líneas u = const y v = const en la superficie $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = f(v)$.

859. Mostrar que la curvatura geodésica en los puntos de una línea asintótica es igual a su curvatura.

860. Demostrar que la torsión geodésica de la línea sobre una superficie puede ser calculada por la fórmula:

$$\varkappa_g = \dot{r}\dot{m}m,$$

donde m es el vector unitario de la normal a la superficie.

861. Para que una línea en una superficie sea línea de curvatura es necesario y suficiente que en cada punto suyo la torsión geodésica sea igual a cero. Demuéstrese esto.

862. Mostrar que la torsión geodésica en los puntos de una línea asintótica es igual a la torsión de la línea asintótica.

863—864. Hallar las líneas geodésicas:

(863) De un helicoide recto.

(864) De una seudoesfera.

865. Mostrar que las líneas geodésicas en una superficie de Liouville se definen por las ecuaciones

$$\frac{du}{\sqrt{f(u)+a}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{\varphi(v)-a}} + b,$$

donde a y b son constantes arbitrarias.

866. Demostrar que en una superficie de rotación a lo largo de toda línea geodésica se cumple la relación

$$\rho \cos \mu = c,$$

donde ρ es la distancia comprendida entre el punto geodésico y el eje de rotación, μ es el ángulo comprendido entre la geodésica y la paralela, c es el número constante para la geodésica dada (*teorema de Clairaut*).

¿Es cierto el teorema recíproco? O sea, ¿se deduce del cumplimiento de la relación indicada a lo largo de cierta línea en la superficie de rotación la afirmación de que esta línea es geodésica?

867—869. Valiéndose del teorema de Clairaut, investigar el comportamiento de las líneas geodésicas de las superficies siguientes:

(867) De un elipsoide de rotación.

(868) De un hiperboloide de rotación de una hoja.

(869) De un toro.

870. Si por un punto M_0 de una superficie se trazan en todas las direcciones posibles las líneas geodésicas y se marcan sobre ellas, a partir del punto M_0, arcos de longitud igual, entonces los extremos de estos arcos forman la rayectoria ortogonal de las geodésicas. Demuéstrese esto.

§ 18. Método de un sistema de referencia móvil en la teoría de superficies[1]

Llámase *forma diferencial lineal* (o *1-forma*) en una superficie S a la aplicación ω que a cada punto $M \in S$ le pone en correspondencia la forma líneal ω_M sobre el espacio vectorial T_MS; la 1-forma ω pone en correspondencia a cada campo vectorial ξ sobre la superficie la función $\omega(\xi)$ en superficie, determinada por la fórmula

$$\omega(\xi)(M) = \omega_M(\xi_M).$$

La 1-forma ω se dice *suave* si para cualquier campo vectorial suave ξ la función $\omega(\xi)$ es suave.

Denomínase *2-forma* en una superficie S a la aplicación Ω que a cada punto $M \in S$ le pone en correspondencia la 2-forma Ω_M sobre el espacio vectorial T_MS; la 2-forma Ω pone en correspondencia a cada par de campos vectoriales ξ, η sobre la superficie la función $\Omega(\xi, \eta)$ en superficie, determinada por la fórmula

$$\Omega(\xi, \eta)(M) = \Omega_M(\xi_M, \eta_M).$$

La 2-forma se dice *suave* si para cualesquiera campos vectoriales ξ, η la función $\Omega(\xi, \eta)$ es suave. A continuación examinaremos solamente 1-formas y 2-formas suaves.

Llámase *producto exterior* de las 1-formas ω y θ en una superficie S a la 2-forma $\omega \wedge \theta$ determinada por la fórmula $(\omega \wedge \theta)_M = \omega_M \wedge \theta_M$, donde el producto exterior $\omega_M \wedge \theta_M$ se considera en el espacio vectorial T_MS. Sean (U, r) la parametrización de una superficie S con las coordenadas curvilíneas (u, v) y $W = r(U)$. Entonces las diferenciales du, dv de las coordenadas curvilíneas se pueden considerar como 1-formas en W por la regla

$$du_M(h) = h_1, \quad dv_M(h) = h_2,$$

[1] En § 18 se da la numeración continua de las fórmulas que se usa también en las respuestas.

donde h es el vector tangencial de la superficie en el punto M y (h_1, h_2) son sus coordenadas en la base móvil $(\partial_u r, \partial_v r)$. Toda 1-forma ω en W se representa unívocamente del modo

$$\omega = a_1\, du + a_2\, dv,$$

donde $a_1 = \omega(\partial_u r)$, $a_2 = \omega(\partial_v r)$ son funciones suaves en W. La diferencial df de la función f representada sobre W es una 1-forma en W. Esta función f se puede considerar también como función en U por la regla

$$f(u, v) = f(r(u, v)).$$

Entonces df se representa así:

$$df = \partial_u f\, du + \partial_v f\, dv.$$

Llámase *diferencial exterior* de la 1-forma ω dada en W a la 2-forma $d\omega$ determinada por la fórmula

$$d\omega = da_1 \wedge du + da_2 \wedge dv = (\partial_u a_2 - \partial_v a_1)\, du \wedge dv.$$

Denomínase *sistema de referencia móvil* sobre una superficie orientada $W = r(U)$ a la aplicación que a cada punto M de W le pone en correspondencia el sistema de referencia $(M, e_1(M), e_2(M), e_3(M))$ donde los vectores $e_1(M)$, $e_2(M)$ pertenecen a $T_M W$ y $(e_1(M), e_2(M), e_3(M))$ es la base ortonormalizada en $\mathbb{R}^3$ concordada con la orientación de la superficie W. Las magnitudes M, e_1, e_2, e_3 se pueden considerar como funciones vectoriales en W con los valores en $\mathbb{R}^3$ según la regla: la función vectorial M pone en correspondencia al punto N de la superficie su radio vector y a la función vectorial e_j, el vector $e_j(N)$ $(j = 1, 2, 3)$. Las funciones vectoriales M y e_3 son suaves, supondremos que también e_1, e_2 son suaves. Escribamos las diferenciales de estas funciones vectoriales del modo

$$\left.\begin{aligned}
dM_N(h) &= \omega_N^1(h)\, e_1(N) + \omega_N^2(h)\, e_2(N) + \omega_N^3(h)\, e_3(N),\\
de_{1N}(h) &= \omega_{1N}^1(h)\, e_1(N) + \omega_{1N}^2(h)\, e_2(N) + \omega_{1N}^3(h)\, e_3(N),\\
de_{2N}(h) &= \omega_{2N}^1(h)\, e_1(N) + \omega_{2N}^2(h)\, e_2(N) + \omega_{2N}^3(h)\, e_3(N),\\
de_{3N}(h) &= \omega_{3N}^1(h)\, e_1(N) + \omega_{3N}^2(h)\, e_2(N) + \omega_{3N}^3(h)\, e_3(N),
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

donde $h \in T_N W$. Entonces ω^i, ω_i^j $(i, j = 1, 2, 3)$ son las 1-formas sobre la superficie W. Las ecuaciones (1) se escriben

$$dM = \sum_{i=1}^{3} \omega^i e_i, \quad de_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j e_j. \tag{2}$$

Las ecuaciones (2) se llaman *ecuaciones de movimiento* de un sistema de referencia móvil. Un sistema de referencia móvil (M, e_1, e_2, e_3) se denomina *sistema de referencia de Cartan* de la superficie W si en cada punto N de W los vectores $e_1(N)$ y $e_2(N)$ tienen las direcciones principales.

Sea ξ un campo vectorial suave en la superficie W y

$$\xi_N = a_1(N)\, e_1(N) + a_2(N)\, e_2(N);$$

entonces a_1, a_2 son funciones suaves en W. El campo vectorial ξ se puede también considerar como campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y escribir en la forma

$$\xi_N = \xi_1(N)\, i_1 + \xi_2(N)\, i_2 + \xi_3(N)\, i_3,$$

donde (i_1, i_2, i_3) es la base canónica en $\mathbb{R}^3$. Para la curva regular suave $\gamma(t)$ en la superficie W designemos por $\xi(t)$ el vector $\xi_{\gamma(t)}$. Entonces

$$\xi(t) = \xi_1(t)\, i_1 + \xi_2(t)\, i_2 + \xi_3(t)\, i_3,$$

donde ξ_1, ξ_2, ξ_3 son funciones suaves. El vector

$$\xi'(t) = \sum_{j=1}^{3} \xi_j'(t)\, i_j$$

se llama *derivada del campo vectorial* ξ *a lo largo de la curva* γ.

Sean h el vector tangencial de la superficie W en el punto M y $\gamma(t)$ la curva regular en W que pasa por el punto M cuando $t = t_0$, tal que $\gamma'(t_0) = h$. Denomínase *derivada covariante del campo vectorial* ξ *en la dirección del vector* h a la proyección ortogonal sobre el plano tangencial de la superficie en el punto M del vector $\xi'(t_0)$ de la derivada dël campo vectorial ξ a lo largo de la curva γ. La derivada covariante del campo vectorial ξ en la dirección h se designa $D_h\xi$ y es vector tangencial a la superficie en el punto M. Si $\xi = a_1 e_1 + a_2 e_2$, entonces tiene lugar la fórmula

$$D_h\xi = da_1(h)\, e_1 + da_2(h)\, e_2 - a_2\omega_1^2(h)\, e_1 + a_1\omega_1^2(h)\, e_2.$$

El campo vectorial ξ se llama paralelo a lo largo de la curva γ si para todos t

$$D_{\gamma(t)}\,\xi = 0,$$

o sea, la derivada covariante del campo ξ en la dirección de todo vector tangencial de la curva γ es igual a cero.

871. De la condición de ortonormalidad de un sistema de referencia móvil se deduce que la matriz (ω_i^j) es antisimétrica. Demuéstrese esto.

872. Puesto que los vectores e_1, e_2 de un sistema de referencia móvil son base en el plano tangencial de la superfcie, entonces, en las fórmulas (1) y (2) la forma $\omega^3 = 0$. Demuéstrese esto.

873. Sea $\gamma(t)$ la línea de curvatura en la superficie W. Si el vector e_1 del sistema de referencia móvil es tangente a la línea γ, entonces $\omega_{3\gamma(t)}^2(e_1) = 0$. Por analogía, si e_2 es tangente a γ, entonces $\omega_{3\gamma(t)}^1(e_2) = 0$. Demuéstrese esto.

874. Mostrar que en todos los puntos de una superficie se cumplen las condiciones

$$\omega^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j, \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \quad (i,\ j = 1,\ 2).$$

875. Si en cada punto de una superficie W los vectores $e_1 \uparrow\uparrow \partial_u r$, $e_2 \uparrow\uparrow \partial_v r$, entonces $\omega^1 = \sqrt{E}\,du$, $\omega^2 = \sqrt{G}\,dv$, donde E, G son los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie. Demuéstrese esto.

876. Supongamos que las líneas de coordenadas de la parametrización (U, r) de la superficie W son líneas de curvatura y $e_1 \uparrow\uparrow \partial_u r$, $e_2 \uparrow\uparrow \partial_v r$. Demostrar que las 1-formas ω^i, ω_i^j se definen del modo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^1 = \sqrt{E}\,du, \quad \omega^2 = \sqrt{G}\,dv \\ &\omega_1^2 = -\omega_2^1 = q_1\sqrt{E}\,du + q_2\sqrt{G}\,dv, \\ &\omega_1^3 = -\omega_3^1 = p_1\sqrt{E}\,du, \\ &\omega_2^3 = -\omega_3^2 = p_2\sqrt{G}\,dv. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

877. El sistema de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\partial_u b_i = \sum_{j=1}^{n} f_i^j b_j, \quad \partial_v b_i = \sum_{j=1}^{n} g_i^j b_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

se llama *completamente integrable* si se cumplen las condiciones

$$\partial_v \left(\sum_{j=1}^{n} f_i^j b_j\right) = \partial_u \left(\sum_{j=1}^{n} g_i^j b_j\right).$$

Este sistema se caracteriza por la existencia de la única solución para las condiciones iniciales dadas

$$b_i (u_0, v_0) = b_i^0.$$

Si las formas ω^i, ω_i^j se dan como en (3), entonces las ecuaciones de movimiento del sistema de referencia móvil son equivalentes al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_u M = \sqrt{E}\, e_1, && \partial_v M = \sqrt{G}\, e_2,\\
&\partial_u e_1 = q_1 \sqrt{E}\, e_2 + p_1 \sqrt{E}\, e_3, && \partial_v e_1 = q_2 \sqrt{G}\, e_2,\\
&\partial_u e_2 = -q_1 \sqrt{E}\, e_1, && \partial_v e_2 = -q_2 \sqrt{G}\, e_1 +\\
& && \quad + p_2 \sqrt{G} e_3,\\
&\partial_u e_3 = -p_1 \sqrt{E}\, e_1, && \partial_v e_3 = -p_2 \sqrt{G}\, e_2.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Mostrar que las condiciones de integrabilidad completa del sistema (4) tienen la forma

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_v \sqrt{E} + q_1 \sqrt{EG} = 0, \quad \partial_u \sqrt{G} = q_2 \sqrt{EG},\\
&\partial_v (q_1 \sqrt{E}) - \partial_u (q_2 \sqrt{G}) = p_1 p_2 \sqrt{EG},\\
&\partial_v (p_1 \sqrt{E}) + p_2 q_1 \sqrt{EG} = 0, \quad \partial_u (p_2 \sqrt{G}) = p_1 p_2 \sqrt{EG}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Averiguar el sentido geométrico de las condiciones iniciales.

878. Mostrar que si las 1-formas ω^i, ω_i^j satisfacen las condiciones (3), entonces las condiciones de integrabilidad completa (5) son equivalentes a las condiciones

$$d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega_1^2, \quad d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2,$$
$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2, \quad d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3, \quad d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3.$$

879. Si las 1-formas ω^i, ω_i^j satisfacen las condiciones (3), entonces la primera forma cuadrática de la superficie se representa del modo

$$ds^2 = dM^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Demuéstrese esto.

880. Si las 1-formas ω^i, ω_i^j satisfacen a las condiciones (3), entonces la segunda forma cuadrática de la superficie se representa del modo

$$\varphi_2 = -dM\cdot de_3 = p_1 E\,du^2 + p_2 G\,dv^2.$$

Demuéstrese esto.

881. Mostrar que p_1 y p_2 en las ecuaciones (3) son curvaturas principales de la superficie.

882. Mostrar que una superficie reglada constituida por las tangentes a las líneas de curvatura u en los puntos de la línea de curvatura v es desarrollable y su arista de retroceso toca el eje Me_1 en los puntos con radio vector $M - \frac{1}{q_2} e_1$. Análogamente, la superficie de las tangentes a las líneas v en los puntos de la línea u es desarrollable y su arista de retroceso toca el eje Me_2 en el punto con radio vector $M + \frac{1}{q_1} e^2$.

883. Demostrar la fórmula de Euler

$$k_n = p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

884. Mostrar que la ecuación de la indicatriz de Dupin se puede representar en la forma $p_1 x^2 + p_2 y^2 = \pm 1$.

885. Mostrar que la curvatura total de una superficie depende solamente de los coeficientes de la primera forma cuadrática y puede ser expresada por la fórmula

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \partial_v \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \partial_v \sqrt{E} \right) - \partial_u \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \partial_u \sqrt{G} \right) \right\}.$$

886. Demostrar que el cuadrado de torsión de una línea asintótica a una superficie en cada punto suyo es igual a la curvatura total de la superficie en este punto tomada con el signo contrario (*teorema de Beltrami—Ennéper*).

887. Mostrar que la curvatura geodésica de las líneas de curvatura en el punto M se expresa por las fórmulas

$$k_g|_{dv=0} = q_1, \quad k_g|_{du=0} = -q_2.$$

888. Demostrar que se tiene la fórmula

$$d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2,$$

donde K es la curvatura total de la superficie.

889. Demostrar que al trasladar en paralelo los vectores por la superficie las longitudes de los vectores y los ángulos comprendidos entre ellos se conservan.

890. Para que una línea en una superficie sea geodésica es necesario y suficiente que su vector tangente unitario sea trasladable en paralelo a lo largo de esta línea. Demuéstrese esto.

891. Si el campo vectorial unitario en la supérficie

$$r = \cos\varphi\, e_1 + \operatorname{sen}\varphi\, e_2$$

se traslada en paralelo en la superficie a lo largo de cierta línea, entonces en los puntos de esta línea,

$$-d\varphi = q_1 \sqrt{E}\, du + q_2 \sqrt{G}\, dv. \tag{6}$$

demuéstrese esto.

892. El ángulo de giro de un vector en la superficie al trasladarlo en paralelo por la frontera L de la región simplemente conexa D en la superficie, es igual a la *curvatura integral* de esta región, o sea,

$$\Delta\varphi = \iint_D K\, d\sigma.$$

Demuéstrese esto.

893. La curvatura integral de la región simplemente conexa D de la superficie limitada por el contorno suave L y la *curvatura geodésica integral* de este contorno están vinculadas por la relación

$$\iint_D K\, d\sigma + \oint_L k_g\, ds = 2\pi.$$

Demuéstrese esto.

894. Sea D una región simplemente conexa en la superficie limitada por el polígono curvilíneo L. Entonces

$$\iint_D K\, d\sigma + \oint_L k_g\, ds + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son los ángulos exteriores del polígono L (teorema de Gauss—Bonnet). Demuéstrese esto.

895. Si la región D en una superficie está limitada por el triángulo geodésico ABC ($\cup AB$, $\cup BC$, $\cup CA$ son geodésicos) y sus ángulos interiores son iguales, respectivamente, a α, β, γ, entonces

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\iint_D K\,d\sigma.$$

Demuéstrese esto.

896. Sobre superficies simplemente conexas, en todos los puntos de las cuales la curvatura total no es positiva, no existe una línea geodésica cerrada. Demuéstrese esto.

§ 19. Problemas diversos

897. Todos los puntos de la superficie

$$2x^2+3y^2+4z^2-2xy-4x+18y-16z=0$$

se proyectan ortogonalmente sobre los planos de las coordenadas. Hallar las imágenes de las proyecciones.

898. Si una superficie toca un plano a lo largo de cierta línea, entonces cada punto de esta línea es un punto parabólico de la superficie. Demuéstrese esto.

899. Mostrar que si las normales a una superficie a lo largo de una línea l son paralelas, entonces todos los puntos de la línea l son puntos parabólicos de la superficie.

900. Si con la aplicación esférica de la superficie S cada línea asintótica de una familia se representa por una circunferencia grande, entonces S es una superficie reglada oblicua. Demuéstrese esto.

901. Demostrar que un plano y un catenoide son las únicas superficies de rotación mínimas.

902. Demostrar que entre las superficies regladas el helicoide recto es la única superficie mínima (distinta del plano).

903. Hallar todas las superficies mínimas que pueden ser definidas por la ecuación $z=f(y/x)$.

904. Sea $r=r(u, v)$ la ecuación de la superficie S y sea $r^*=r+am$ la ecuación de la superficie S^* paralela a la primera. Expresar la curvatura total y media de la

superficie S^* por la curvatura total y media de la superficie S.

905. Se da una superficie cuya curvatura H media constante es distinta de cero. En todas sus normales están trazados los segmentos de $\pm 1/2H$. Demostrar que la curvatura total de la superficie paralela construida de este modo es constante.

906. Demostrar que para la curvatura media de una superficie S existe la fórmula

$$H = \lim_{a \to 0} \frac{d\sigma - d\sigma^*}{2a\, d\sigma},$$

donde $d\sigma$ y $d\sigma^*$ son los elementos correspondientes del área de las superficies paralelas S y S^*.

907. Demostrar que el área de todo trozo de una superficie mínima no puede ser menor que el área del trozo correspondiente de la superficie paralela.

908. Demostrar que el límite de la relación entre el área de la imagen esférica de una superficie S y el área de la región respectiva de la superficie S es igual en valor y signo a la curvatura total de la superficie.

909. Demostrar que si uno de los radios principales de la curvatura de una superficie es constante, entonces la superficie es envolvente de una familia de esferas que tienen radio constante y cuyos centros están en cierta línea.

910. Dado un sistema de rectas

$$x = tz + p, \quad y = pz + \frac{t^3}{3},$$

donde t y p son parámetros variables. ¿Para qué dependencia entre p y t estas rectas engendran una superficie desarrollable? Hallar la figura formada por las aristas de retroceso de tales superficies. Hallar las líneas de intersección de estas superficies con el plano xOy.

911. Un cilindro de sección circular está cortado por un plano no paralelo a su eje. ¿Qué tipo de línea será la intersección al aplicar el cilindro al plano?

912. Se dan una esfera y una recta d. Hallar las trayectorias ortogonales de las secciones formadas sobre la esfera por los planos que pasan por la recta d.

913. Si las fuerzas externas no actúan sobre un punto material forzado a moverse por cierta superficie, entonces este punto se moverá por una geodésica. Demuéstrese esto.

914. Llámase *podaria* de una superficie con respecto a un punto dado, a la figura constituida por las bases de las perpendiculares trazadas desde este punto a los planos tangentes a la superficie. Hallar la podaria de la superficie $F(x, y, z) = 0$ con respecto al origen de las coordenadas.

915—917. Hallar las podarias de las superficies siguientes con respecto al origen de las coordenadas:

(915) $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon' \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \varepsilon, \ \varepsilon' = \pm 1.$

(916) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z.$

(917) $xy = az.$

918. Demostrar que sólo superficies desarrollables son superponibles a un plano.

919. ¿Qué se puede decir de una superficie en la cual la primera forma cuadrática es

$$ds^2 = E(u)\, du^2 + G(v)\, dv^2?$$

920. ¿En qué superficies los coeficientes de la primera forma cuadrática pueden ser transformados en constantes?

921. Demostrar que al superponer superficies las líneas geodésicas quedan como tales.

922. Si en una superficie existen dos familias de líneas geodésicas tales que las líneas geodésicas de una familia cortan bajo un ángulo constante las líneas geodésicas de la otra familia, entonces la superficie es desarrollable. Inversamente, en toda superficie desarrollable existen familias de líneas geodésicas que poseen la propiedad indicada. Demuéstrese esto.

923. Demostrar que los planos osculadores de una línea geodésica sobre un cono están a igual distancia del vértice del cono. Inversamente, las líneas sobre el cono que poseen la propiedad señalada, son geodésicas.

924. Demostrar que dos superficies de igual curvatura total constante son superponibles una a la otra.

925. Demostrar que toda superficie de curvatura total constante positiva es superponible a la esfera.

926. Demostrar que toda superficie de curvatura total constante negativa es superponible a la seudoesfera.

927. Demostrar que al superponer un helicoide al catenoide las líneas de curvatura de una superficie pasan a las líneas asintóticas de la otra y viceversa.